Corrigé du devoir surveillé du 22 mars 2010

Exercice 1.

1. Le couple (X, Y) étant distribué uniformément sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \le y \le x \le 1\}$, il a pour densité $\rho(x, y) = 2 \times 1_\Omega(x, y)$. La densité de X vaut donc $\rho_X(x) = \int \mathrm{d}y\, \rho(x, y) = 2x$. Il découle du résultat de l'exercice 6 de la feuille de TD 1 que $\mathbb{E}[Y|X] = F(X)$ avec
$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, y\, \frac{\rho(x, y)}{\rho_X(x)}\, 1_{\{\rho_X(x)>0\}} = \frac{1_{\{0<x\le 1\}}(x)}{x} \int_0^x \mathrm{d}y\, y\, = 1_{\{0<x\le 1\}}(x)\, \frac{x}{2}$$
pour Lebesgue-presque tout $x \in \mathbb{R}$ (en effet, on a $q_{Y|X}(x, \mathrm{d}y) = \rho(x, y)\, 1_{\{\rho_X(x)>0\}} \mathrm{d}y/\rho_X(x)$ pour $\mathrm{d}x$-presque tout x, où $q_{Y|X}(x, \mathrm{d}y)$ désigne la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$). D'où
$$\mathbb{E}[Y|X] = \frac{X}{2} \quad \text{p.s.} \tag{1}$$
Autre méthode : On sait que $\mathbb{E}[Y|X] = F(X)$ où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne à déterminer (car $\mathbb{E}[Y|X]$ est $\sigma(X)$-mesurable). Par définition de l'espérance conditionnelle et en vertu du théorème de Fubini, pour toute fonction borélienne bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F(X)g(X)] &= 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y\, F(x)g(x) = 2\int_0^1 \mathrm{d}x\, xF(x)g(x) \\ &= \mathbb{E}[Y g(X)] = 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y\, y\, g(x) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^2 g(x)\ . \end{aligned}$$
D'où $F(x) = x/2$ pour $\mathrm{d}x$-presque tout $x \in [0, 1]$, ce qui implique (1).

2. En utilisant par exemple la première méthode de la question 1, on obtient $\rho_X(x) = 2\sqrt{1 - x^2}/\pi$ et $\mathbb{E}[Y^\beta|X] = F_\beta(X)$ avec
$$F_\beta(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, y^\beta \frac{1_{\{x^2+y^2\le 1\}}(x, y)}{\pi\rho_X(x)}\, 1_{\{\rho_X(x)>0\}} = \frac{1_{]-1,1[}(x)}{2\sqrt{1 - x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\, y^\beta$$
pour $\mathrm{d}x$-presque tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $\beta = 1, 2$ cela donne $F_1(x) = 0$ et $F_2(x) = 1_{]-1,1[}(x)(1-x^2)/3$
$$\Rightarrow \qquad \mathbb{E}[Y|X] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[Y^2|X] = \frac{1 - X^2}{3} \quad \text{p.s.}\ .$$

3. On note ${}^cB$ le complémentaire de B dans Ω. Oui, $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{F}\,;\, B \text{ ou } {}^cB \text{ est dénombrable}\}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ car (i) $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ (ii) $\emptyset \in \mathcal{G}$ (iii) si $B \in \mathcal{G}$ alors ${}^cB \in \mathcal{G}$ (par définition de $\mathcal{G}$), et (iv) soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements dans $\mathcal{G}$. Si tous les B_n sont dénombrables, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est dénombrable. Sinon, alors au moins un des B_n, disons B_{n_0}, est tel que ${}^cB_{n_0}$ est dénombrable. Par conséquent, ${}^c(\bigcup_n B_n) = \bigcap_n {}^cB_n \subset {}^cB_{n_0}$ est dénombrable. Dans les deux cas, on a $\bigcup_n B_n \in \mathcal{G}$.

   Soit $B \in \mathcal{G}$. On remarque que
$$\mathbb{E}[X\, 1_B] = \int_{\Omega\cap B} \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\pi}\, x = \begin{cases} 0 & \text{si } B \text{ est dénombrable} \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\pi}\, x = 0 & \text{si } {}^cB \text{ est dénombrable,} \end{cases}$$
vu que les ensembles dénombrables de $\mathbb{R}^2$ ont une mesure de Lebesgue nulle (et que $\int_\Omega \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, x = \int_{-1}^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x\, x = 0$). De même, $\mathbb{E}[Y\, 1_B] = 0$. Par définition et par unicité presque partout de l'espérance conditionnelle, on a $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\, 1_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\, 1_B] = 0$ pour tout $B \in \mathcal{G}$ et
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = 0 \quad \text{p.s.}\ .$$
Remarque : plus généralement, $\mathbb{E}[Z|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Z]$ p.s. pour toute variable aléatoire Z de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 2.

1. $\mathcal{G} = \{G \in \mathcal{F}\,;\, \gamma(G) = G \;\forall\, \gamma \in \Gamma\}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ car (i) $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ (ii) $\emptyset \in \mathcal{G}$ puisque $\gamma(\emptyset) = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ (iii) si $B \in \mathcal{G}$, alors $\gamma({}^c G) = {}^c\gamma(G)$ car γ est une bijection $\Omega \to \Omega$; mais $\gamma(G) = G$, d'où $\gamma({}^c G) = {}^c G$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et ${}^c G \in \mathcal{G}$; (iv) si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements dans $\mathcal{G}$, alors $\gamma(\cup_n B_n) = \cup_n \gamma(B_n) = \cup_n B_n$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et donc $\cup_n B_n \in \mathcal{G}$.

2. Une variable aléatoire Z est $\mathcal{G}$-mesurable ssi $\gamma(Z^{-1}(B)) = Z^{-1}(B)$ pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et tout $\gamma \in \Gamma$. Mais $\gamma(Z^{-1}(B)) = \{\gamma(\omega)\,;\, \omega \in \Omega, Z(\omega) \in B\} = (Z \circ \gamma^{-1})^{-1}(B)$ car γ est une bijection. En utilisant aussi le fait que Γ est un groupe, il s'ensuit que Z est $\mathcal{G}$-mesurable ssi $Z \circ \gamma = Z$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Autrement dit, les variables aléatoires $\mathcal{G}$-mesurables sont les variables aléatoires Γ-invariantes. Montrons que

$$Z = \frac{1}{\mathrm{card}(\Gamma)} \sum_{\gamma\in\Gamma} X \circ \gamma$$

est Γ-invariante. En effet, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$Z \circ \gamma = \frac{1}{\mathrm{card}(\Gamma)} \sum_{\gamma'\in\Gamma} X \circ \gamma' \circ \gamma = \frac{1}{\mathrm{card}(\Gamma)} \sum_{\gamma''\in\Gamma} X \circ \gamma'' = Z$$

d'après la propriété de groupe. Cela prouve que Z est $\mathcal{G}$-mesurable. De plus, si $G \in \mathcal{G}$,

$$\mathbb{E}[X \circ \gamma\, 1_G] = \int_G \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) X\big(\gamma(\omega)\big) = \int_{\gamma^{-1}(G)} \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega')X(\omega') = \mathbb{E}[X\, 1_G]\ ,$$

où on a fait le changement de variables $\omega' = \gamma(\omega)$ et on a utilisé l'invariance de $\mathbb{P}$ sous Γ (qui implique $\mathbb{P}(\gamma(A)) = \mathbb{P}(A) \;\forall\, A \in \mathcal{F}$) dans la seconde égalité. La troisième égalité est vraie car $\gamma^{-1}(G) = G$ (ce qui découle de $G \in \mathcal{G}$). Ainsi,

$$\mathbb{E}[Z\, 1_G] = \frac{1}{\mathrm{card}(\Gamma)} \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{E}[X \circ \gamma\, 1_G] = \frac{1}{\mathrm{card}(\Gamma)} \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{E}[X\, 1_G] = \mathbb{E}[X\, 1_G] \quad \text{pour tout} \quad G \in \mathcal{G}\ .$$

En vertu de l'unicité presque partout de l'espérance conditionnelle, on en conclut

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Z = \frac{1}{\mathrm{card}(\Gamma)} \sum_{\gamma\in\Gamma} X \circ \gamma \quad \text{p.s.}\ .$$

Exercice 3.

Soit B_1 et $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux boréliens. Par la propriété des lois conditionnelles et le th. de Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[1_{B_1}(X_1)1_{B_2}(X_2)\,|\,Y] &= \mathbb{E}\big[1_{B_1}(X_1)\mathbb{E}[1_{B_2}(X_2)\,|\,Y, X_1]\,\big|Y\big] \\
&= \int_{B_1} q_{X_1|Y}(y, \mathrm{d}x_1) \Big(\int_{B_2} q_{X_2|(Y,X_1)}(y, x_1, \mathrm{d}x_2)\Big)\Big|_{y=Y} \\
&= \int_{B_1}\int_{B_2} q_{X_1|Y}(y, \mathrm{d}x_1)\, q_{X_2|(Y,X_1)}(y, x_1, \mathrm{d}x_2)\Big|_{y=Y}
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{et}\quad \mathbb{E}[1_{B_1}(X_1)\,|\,Y]\ \mathbb{E}[1_{B_2}(X_2)\,|\,Y] = \int_{B_1}\int_{B_2} q_{X_1|Y}(y, \mathrm{d}x_1)\, q_{X_2|Y}(y, \mathrm{d}x_2)\Big|_{y=Y}. \tag{3}$$

Supposons que X_1 et X_2 sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{G} = \sigma(Y)$. Alors les membres de gauche des identités (2) et (3) coïncident p.s.. Donc les intégrales des membres de droite sont égales pour $\mathbb{P}_Y$-presque tout $y \in \mathbb{R}$. Ceci étant vrai pour tous boréliens B_1 et B_2, on a

$$q_{X_2|(Y,X_1)}(y, x_1, \mathrm{d}x_2) = q_{X_2|Y}(y, \mathrm{d}x_2) \quad \text{pour } \mathbb{P}_Y\text{-p.t. } y \in \mathbb{R} \text{ et } q_{X_1|Y}(y, \mathrm{d}x_1)\text{-p.t. } x_1 \in \mathbb{R}.$$

Mais, par définition des lois conditionnelles, $q_{X_1|Y}(y, \mathrm{d}x_1)\,\mathbb{P}_Y(\mathrm{d}y) = \mathbb{P}_{(X_1,Y)}(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}y)$ est la loi du couple (X_1, Y). D'où

$$q_{X_2|(Y,X_1)}(y, x_1, \mathrm{d}x_2) = q_{X_2|Y}(y, \mathrm{d}x_2) \quad \text{pour } \mathbb{P}_{(Y,X_1)}\text{-presque tout } (y, x_1) \in \mathbb{R}^2. \tag{4}$$

Réciproquement, si (4) est vrai alors les deux intégrales apparaissant dans (2) et (3) sont égales pour $\mathbb{P}_Y$-presque tout $y \in \mathbb{R}$ et donc les membres de gauche de ces identités coïncident p.s.. Cela étant vrai pour tout $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en conclut que X_1 et X_2 sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{G} = \sigma(Y)$.

Remarque : *X_1 et X_2 sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{G}$ si et seulement si $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{G}$ au sens de l'exercice 3 de la feuille de TD 2.*
En effet, si

$$\mathbb{E}[1_{B_1}(X_1)1_{B_2}(X_2)\,|\,\mathcal{G}] = \mathbb{E}[1_{B_1}(X_1)\,|\,\mathcal{G}]\ \mathbb{E}[1_{B_2}(X_2)\,|\,\mathcal{G}] \quad \text{p.s.}$$

pour tous boréliens $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors

$$\mathbb{E}[f_1(X_1)f_2(X_2)\,|\,\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f_1(X_1)\,|\,\mathcal{G}]\ \mathbb{E}[f_2(X_2)\,|\,\mathcal{G}] \quad \text{p.s.}$$

pour toutes fonctions étagées f_1 et f_2. Cette égalité reste vraie si f_1 et f_2 sont des fonctions boréliennes positives par passage à la limite et si f_1 et f_2 sont des fonctions boréliennes quelconques par linéarité. Comme les variables aléatoires réelles $\sigma(X_i)$-mesurables sont de la forme $f_i(X_i)$ avec $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et $i = 1, 2$, on en déduit que $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{G}$. La réciproque est évidente.
On pouvait donc résoudre l'exercice ci-dessus en utilisant le résultat de l'exercice 3 de la feuille de TD 2 : $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{G}$ ssi $\mathbb{E}[f_2(X_2)|Y, X_1] = \mathbb{E}[f_2(X_2)|Y]$ pour tout $f_2 \in L^1(\mathbb{R})$. Dans le cas $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, cela équivaut à

$$\int_{\mathbb{R}} q_{X_2|(Y,X_1)}(y, x_1, \mathrm{d}x_2) f_2(x_2) = \int_{\mathbb{R}} q_{X_2|Y}(y, \mathrm{d}x_2) f_2(x_2) \text{ pour } \mathbb{P}_{(Y,X_1)}\text{-p.t. } (y, x_1) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, f_2 \in L^1(\mathbb{R}),$$

c'est-à-dire à $q_{X_2|(Y,X_1)}(y, x_1, \mathrm{d}x_2) = q_{X_2|Y}(y, \mathrm{d}x_2)$ pour $\mathbb{P}_{(Y,X_1)}$-presque tout $(y, x_1) \in \mathbb{R}^2$.