Université Grenoble Alpes **2017-2018**
M1 Mathématiques générales
UE Fonctions holomorphes

Examen du mardi 9 janvier 2018

Durée 3 heures. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits. La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Questions de cours

1. Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ l'ensemble de ses zéros. On suppose que $Z(f)$ est infini. Indiquer une ou des hypothèses supplémentaires raisonnables permettant d'assurer que f est nulle sur U (ici, « raisonnables » signifie que l'on évitera les hypothèses du genre $Z(f) = U$). Donner des contre-exemples illustrant les cas où l'une de ces hypothèses supplémentaires n'est pas réalisée.

2. Énoncer le théorème de la représentation conforme de Riemann.

3. Soit f une fonction entière telle que, pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$|f(z)| \leqslant a|z|^c + b$$

pour des constantes (a, b, c) positives réelles et finies. Montrer que f est un polynôme. Expliquer pourquoi le théorème de Liouville est un cas particulier de ce résultat.

Problème (Inégalité de Hadamard)

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Pour tout $r > 0$, on note C_r, D_r et $\overline{D_r}$, respectivement le cercle, le disque ouvert et le disque fermé, de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{C}$. Lorsque $C_r \subset U$, on note

$$M(r) = \sup\{|f(z)| : z \in C_r\}$$

1. Si $D_R \subset U$ avec $R > 0$, montrer que la fonction M est croissante sur $[0, R[$.

2. Si $\mathbb{C} \setminus \overline{D_R} \subset U$ avec $R > 0$ et si f est bornée au voisinage de l'infini, montrer que la fonction M est décroissante sur $]R, +\infty[$. Indication : on pourra considérer $g(z) = f(1/z)$.

3. Donner un exemple tel que f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et la fonction M n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

T.S.V.P.

4. On suppose désormais que U contient la couronne fermée $\{z \in \mathbb{C} : r \leqslant |z| \leqslant R\}$, pour $R > r > 0$ fixés.

4.1 Soient n un entier relatif et m un entier strictement positif. En considérant la fonction h définie sur $U \setminus \{0\}$ par $h(z) = z^n f(z)^m$, montrer que pour tout s dans $[r, R]$ et tout nombre rationnel q,

$$M(s)s^q \leqslant \max\{M(r)r^q, M(R)R^q\}$$

4.2 Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$M(s)s^x \leqslant \max\{M(r)r^x, M(R)R^x\}$$

4.3 En déduire que, pour tout s dans $[r, R]$,

$$M(s) \leqslant M(r)^{1-\alpha(s)} M(R)^{\alpha(s)}$$

où on a posé

$$\alpha(s) = \frac{\ln s - \ln r}{\ln R - \ln r}$$

Exercice 1

On considère l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(1+t^2)} dt$$

Justifier la convergence de I et calculer sa valeur.

Indication : on pourra considérer des chemins $[-R, R]$ et des demi-cercles de rayon R centrés en 0, pour R suffisamment grand, et la fonction complexe g définie par

$$g(z) = \frac{e^{iz} - 1}{z(1+z^2)}$$

Exercice 2

Soit $\gamma(r)$ le bord du triangle du plan complexe d'intérieur $\{z \in \mathbb{C} : |\mathfrak{Im}\, z| < \mathfrak{Re}\, z < r\}$, pour $r > 1$. On oriente le lacet $\gamma(r)$ dans le sens direct, et on considère l'intégrale

$$F(r) = \int_{\gamma(r)} \frac{e^{-z}}{(1-z^4)^2} dz$$

1. Montrer que, pour tout $r > 1$, $F(r) = u$, pour une constante complexe u que l'on calculera.

2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}(\cos t + \sin t)}{(1+4t^4)^2} dt$$

Fin.