Examen

Mercredi 10 janvier 2018

Exercice 1 (Faire des dessins !)**.** On considère l'équation différentielle $y'(x) = \sin(xy(x))$.

1. Montrer que pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale telle que $y(x_0) = y_0$, qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
   Dans la suite on s'intéresse aux solutions sur $\mathbb{R}_+$ telles que $y(0) > 0$.
2. Montrer qu'alors $y(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
3. Montrer que pour une solution y donnée l'équation $y(x) = x$ a une unique solution. *Pour l'existence d'un tel x, on pourra majorer y par une fonction f affine par (une infinité de) morceaux de pente 1 ou 0.*
4. Soit t le réel tel que $y(t) = t$ et n tel que $2n\pi \leqslant t^2 < 2n\pi + 2\pi$.
   (a) On suppose tout d'abord que $0 \leqslant t^2 - 2n\pi \leqslant 3\pi/2$. Montrer que pour $x > t + \frac{t}{n}$ on a
   $$(2n+1)\pi < xy(x) < (2n + \frac{3}{2})\pi.$$
   Prouver aussi qu'alors $xy(x)$ tend vers $(2n+1)\pi$ quand x tend vers $+\infty$. *On pourra montrer que, pour tout $\alpha \in](2n+1)\pi, (2n+2)\pi[$, $y(x) - \frac{\alpha}{x}$ décroit au voisinage de l'infini, puis considérer une valeur d'adhérence α de $xy(x)$.*
   (b) On suppose ensuite que $t > (2n + \frac{3}{2})\pi$.
   Montrer qu'il existe $t_0 \in](2n + \frac{3}{2})\pi, (2n+2)\pi[$ tel que
   — si $t < t_0$ alors $xy(x)$ tend vers $(2n+1)\pi$,
   — si $t = t_0$ alors $xy(x)$ tend vers $(2n+2)\pi$,
   — si $t > t_0$ alors $xy(x)$ tend vers $(2n+3)\pi$.

Exercice 2. Soit q une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et l'équation différentielle
$$y"(x) = q(x)y(x).$$

1. Si y n'est pas la solution nulle, montrer que yy' s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit y_α la solution telle que $y_\alpha(0) = 1$ et $y'_\alpha(0) = \alpha$.
   (a) Montrer qu'il existe une constante α_1 telle que y_α a un zero si et seulement si $\alpha < \alpha_1$.
   (b) Montrer qu'il existe une constante α_2 telle que y_α a un minimum si et seulement si $\alpha < \alpha_2$.
   (c) Prouver de plus que
   $$\alpha_1 = -\lim_{+\infty} \frac{y_0}{y_1 - y_0} = -\lim_{+\infty} \frac{y'_0}{y'_1 - y'_0} = \alpha_2.$$
   On pourra partir de $y_\alpha = y_0 + \alpha(y_1 - y_0)$.
3. En déduire qu'il existe une unique solution y_α strictement positive et strictement décroissante telle que $y(0) = 1$. Montrer que si y_α a une limite strictement positive en l'infini alors $tq(t)$ est intégrable.

4. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ exprimer y_α en fonction de y_0 et en déduire que

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\int_0^\infty y_0(x)^2} dx.$$

On pourra chercher z tel que $y_\alpha(x) = z(x)y_0(x)$

Exercice 3. On note $C_1^{0,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, l'espace des fonctions f 1-périodiques telles que $|f(x+h) - f(x)| \leqslant c|h|^\alpha$ pour tout x et tout h.

1. On pose $g(t) = f(t+h) - f(t-h)$. Montrer que $c_n(g) = 2ic_n(f)\sin(2\pi nh)$ et en déduire que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 |\sin(2\pi nh)|^2 \leqslant c^2|h|^{2\alpha}.$$

2. Pour tout entier $p \geqslant 0$, en prenant $h = 2^{-p-3}$ montrer que

$$\sum_{2^p \leqslant |n| \leqslant 2^{p+1}} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{2c^2}{8^{2\alpha}} \frac{1}{2^{2p\alpha}}.$$

3. Lorsque $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, en déduire la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{\frac{1}{2}+\alpha}|c_n(f)|^2$ puis celle de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$. Quelle est la limite de la série de Fourier de f ?

Exercice 4. On rappel qu'on note $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en l'infini. Et on prend comme convention sur cet exercice que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier est définie par

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-ikx} dx.$$

1. Montrer que $C_0(\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme est un espace de Banach.
2. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est une fonction de $C_0(\mathbb{R})$.
3. Soit g_n l'indicatrice de $[-n, n]$ et h l'indicatrice de $[-1, 1]$. Calculer $g_n \star h$.
4. Montrer que $g_n \star h$ est la transformée de Fourier de

$$f_n(x) = \frac{4}{x^2} \sin(nx)\sin(x).$$

5. Montrer que $||f_n||_1$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. *Attention l'explosion ne vient pas de l'infini.*
6. En déduire que la transformée de Fourier n'est pas un opérateur surjectif de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$. *On considèrera bien la transformée de Fourier comme un opérateur entre deux espaces de Banach, ayant des propriétés sympathiques...*
7. Montrer que son image est dense dans $C_0(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

avec comme conditions initiales $f(x, 0) = \exp^{-\frac{x^2}{2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0$. On justifiera bien, a priori ou a posteriori, que les hypothèses des propositions et théorèmes utilisés sont respectées.