



TRAVAIL D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Année 2020

Géométrie sphérique, caractéristique
d'Euler et homologie simpliciale

Thibaut TROUVÉ

Encadré par Catriona MACLEAN



Table des matières

I -	De la géométrie sphérique à la formule d'Euler-Descartes	2
I - 1	Introduction historique	2
I - 2	Petit et grand cercles, géodésique	2
I - 3	Triangle sphérique et triangle polaire	4
I - 4	Trigonométrie sphérique	5
I - 5	Théorème de Girard	6
	I - 5 - i Énoncé	6
	I - 5 - ii Preuve avec les lunes	7
	I - 5 - iii Preuve par intégration	8
I - 6	Formule d'Euler-Descartes	9
	I - 6 - i Énoncé du théorème	9
	I - 6 - ii Preuve	10
	I - 6 - iii Peut-on paver une sphère avec des hexagones?	11
II -	Groupes d'homologie simpliciale et leur invariance	13
II - 1	Simplexe et réalisation	13
II - 2	Complexe simplicial et polyèdre	14
II - 3	Triangulation	15
II - 4	Groupe de chaînes	16
II - 5	Opérateur de bord	17
II - 6	Groupes d'homologie	18
	II - 6 - i Définition des groupes	18
	II - 6 - ii Calculs de groupes d'homologie	19
	II - 6 - iii Premier résultat d'invariance	22
II - 7	Subdivision barycentrique	24
	II - 7 - i Barycentre	24
	II - 7 - ii Subdivision stellaire	26
	II - 7 - iii Préservation de l'homologie	27
II - 8	Approximation simpliciale	29
	II - 8 - i Théorème d'approximation simpliciale	29
	II - 8 - ii Invariance	31
II - 9	Caractéristique d'Euler-Poincaré	35
	II - 9 - i Nombres de Betti	35
	II - 9 - ii Énoncé de la formule	35
	II - 9 - iii Applications	36

Introduction

Ce dossier s'articule en deux parties. L'objectif de la première partie est de montrer que pour tout polyèdre convexe, la somme alternée du nombre de sommets, d'arêtes et de faces vaut toujours deux. C'est la formule d'Euler-Descartes :

Théorème : Pour un polyèdre convexe, la quantité $s - a + f$, où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces, est toujours égale à 2.

Pour arriver jusqu'à ce théorème, on devra d'abord se familiariser avec la géométrie sphérique qui permet de démontrer quelques lemmes techniques de trigonométrie. Ces résultats aideront à prouver le théorème de Girard qui donne une élégante formule pour l'aire d'un triangle sur la sphère. On en déduira enfin la formule souhaitée et quelques applications.

La deuxième partie du dossier est consacrée à une très large généralisation de la formule d'Euler-Descartes, appelée formule d'Euler-Poincaré. Dans des termes à définir, elle dit que, dans un espace topologique triangulé, la somme alternée des triangles dans chaque dimension est une constante topologique. Ce sera l'occasion de plonger dans le monde de l'homologie simpliciale. En particulier, on abordera de nombreux théorèmes d'invariance des groupes d'homologie, mais aussi des calculs explicites grâce aux triangulations.



FIGURE 0 – Leonhard Euler (1707 – 1783)

I - De la géométrie sphérique à la formule d'Euler-Descartes

I - 1 Introduction historique

Au cours de l'histoire, l'étude de la géométrie sphérique a d'abord été l'œuvre d'astronomes : avant de devenir la géométrie de la Terre, elle était celle de la sphère céleste. Dans son *Almageste*, Ptolémée (III^e siècle) évoque déjà les très anciens travaux des Égyptiens et des Babyloniens en la matière. Mais le premier manuscrit qui ait été conservé jusqu'à nos jours est celui du grec Autolykos de Pilate (IV^e siècle avant JC). Avant Ptolémée, d'autres mathématiciens-astronomes grecs se sont illustrés, comme Theodosius qui écrit les *Sphériques* au II^e siècle avant JC, puis Menelaus d'Alexandrie (I^{er} siècle avant JC) dont l'ouvrage s'intitule aussi *Sphériques*.

Plus tard, entre le IX^e et le XII^e siècle, de nombreux mathématiciens arabo-persans développent à leur tour la géométrie et la trigonométrie sphériques. Citons notamment Al Khwarizmi, Ibn Qurra (IX^e et X^e siècles), Ibn Iraq et Al Biruni (XI^e siècle) ou encore Al Tusi (XIII^e siècle). Puis en Europe, Regiomontanus (XV^e siècle) reprend les travaux de l'astronome maghrébin Ibn Aflah, et de nombreux savants développent ensuite la géométrie sphérique, notamment Copernic (XVI^e siècle), Viète, Girard (XVII^e siècle) et Euler (XVIII^e siècle). Les principales propriétés de la géométrie sphérique sont alors connues et démontrées.

La géométrie sphérique est un exemple de géométrie non euclidienne. Cette théorie géométrique relativement récente a recours à tous les axiomes et postulats posés par Euclide dans les *Éléments* (III^e siècle avant JC), sauf le postulat des parallèles dont la nécessité a fait débat pendant plusieurs millénaires. Un article très intéressant à propos des géométries euclidienne et non euclidienne, qui traite aussi de théorie axiomatique, de déduction formelle, d'interprétation et d'indécidabilité, est à lire dans [2].

I - 2 Petit et grand cercles, géodésique

Dans tout le dossier, on considère la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Prenons deux points de la sphère (figure 1). Un plan passant par ces deux points coupe la sphère en deux parties distinctes. L'intersection de ce plan avec la sphère forme un cercle. Lorsque le plan est en rotation autour de l'axe reliant les deux points dans \mathbb{R}^3 , l'intersection entre le plan et la sphère dessine des cercles plus ou moins grands. Le cercle de plus grand diamètre est obtenu lorsque le plan contient le centre de la sphère. Ce cercle est appelé *grand cercle* (en rouge sur la figure 1).

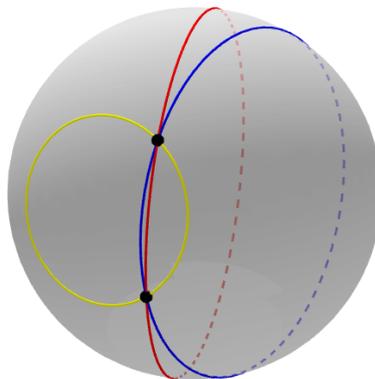


FIGURE 1 – Petit et grand cercles

En particulier, si deux points sont antipodaux (*i.e.* diamétralement opposés), alors tous les cercles passant par ces deux points sont des grands cercles. De telles droites sont appelées *méridiens* et séparent la sphère en deux hémisphères.

En géométrie sphérique, une droite reliant deux points ne peut correspondre à la droite euclidienne de \mathbb{R}^3 reliant ces deux points car elle n'est pas contenue dans \mathbb{S}^2 . Il faut donc une nouvelle définition.

Théorème 1 : Soient deux points de la sphère non antipodaux. Alors il existe un unique plus court chemin reliant ces deux points. Il s'agit de l'arc le plus court du grand cercle passant par ces deux points.

Remarque : Il s'agit du petit arc rouge sur la figure 1. On remarque aussi que si deux points sont antipodaux, l'existence reste valable mais l'unicité n'est plus vraie.

Preuve : [3] Soit un chemin $ADCFB$ sur la sphère (dessiné en rouge dans la figure 2). Supposons que c'est le chemin le plus court entre A et B et que ce n'est pas un arc de grand cercle. On va exhiber un chemin reliant A et B plus court. On trace les arcs des grands cercles \widehat{AB} , \widehat{AC} et \widehat{BC} . On obtient ainsi un triangle sphérique ABC (définition en section I-3) tel que $\widehat{AB} < \widehat{AC} + \widehat{BC}$. On renvoie à [4] pour une explication détaillée de cette inégalité.

Déformons un peu la figure : on fait pivoter autour de A , sur la surface de la sphère, le morceau de chemin ADC et \widehat{AC} de manière à faire rencontrer C et \widehat{AB} en un point C' . On opère de même en pivotant autour de B pour obtenir un point C'' sur \widehat{AB} .

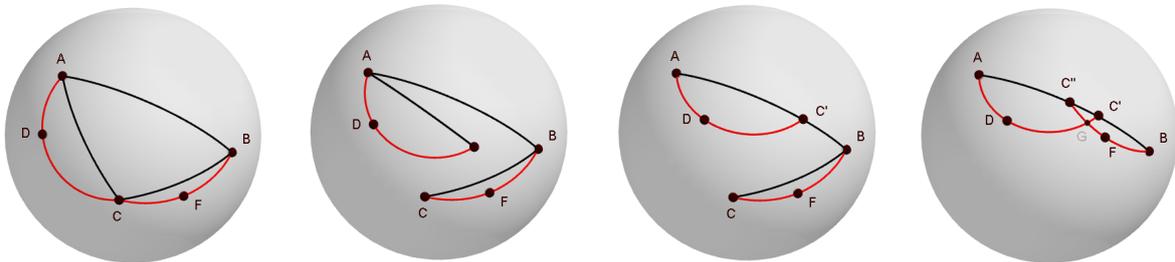


FIGURE 2 – Étapes de construction d'un plus court chemin

$\widehat{AB} < \widehat{AC} + \widehat{BC}$ garantit que les arcs $\widehat{AC'}$ et $\widehat{BC''}$ ne sont pas disjoints. Sous réserve que les portions de chemin rabattues s'intersectent (on peut toujours se ramener à ce cas en fait, d'après ce qui suit), on obtient un point G et ainsi un chemin $ADGFB$ plus court que le chemin $ADCFB$ de $C'GC''$.

Il se pourrait, en effet, qu'une fois rabattus, les deux chemins ne s'intersectent pas, dans le cas où le chemin ADC est courbé de manière à être contenu dans le triangle sphérique ABC . Dans ce cas, il suffit de considérer le symétrique du chemin ADC par rapport à l'arc \widehat{AC} , qui fait la même longueur et qui permet d'utiliser ce qui a été montré précédemment.

Enfin, et ce qui achève la preuve, si le chemin reliant A à B coupe l'arc \widehat{AB} , on applique ce que l'on a démontré pour chaque portion où le chemin reste d'un même côté de l'arc. ■

Définition : Le chemin le plus court (ou un des plus courts chemins s'il en existe plusieurs) entre deux points de la sphère est appelé *géodésique*.

I - 3 Triangle sphérique et triangle polaire

L'objet principal en géométrie sphérique est le triangle sphérique. Pour établir les formules de trigonométrie sphérique et définir le cosinus d'un angle en géométrie sphérique, on aura aussi besoin de définir le triangle polaire associé à un triangle sphérique.

Définition : Soient A , B et C trois points de la sphère. Les géodésiques reliant A , B et C forment un *triangle sphérique*.

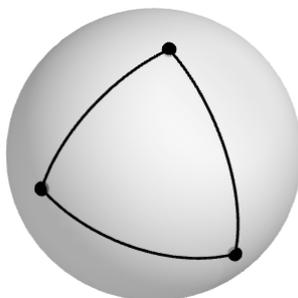


FIGURE 3 – Triangle sphérique

Définition : L'angle déterminé par deux géodésiques est l'angle formé par les deux plans contenant les grands cercles correspondant aux géodésiques.

Sur une sphère de centre O , on considère deux points A et B distincts et non diamétralement opposés. La droite (euclidienne) passant par O et orthogonale au plan OAB rencontre la sphère en deux points, qui sont appelés les pôles du plan OAB .

Pour un triangle ABC tracé sur une sphère, on appelle C' le pôle du plan OAB situé sur le même hémisphère que C . On construit de même les points A' et B' .

Définition : Le triangle $A'B'C'$ est appelé le *triangle polaire* (ou *triangle dual*) du triangle ABC .

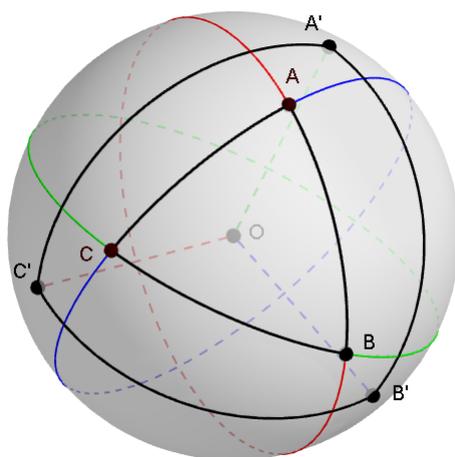


FIGURE 4 – Triangle polaire $A'B'C'$ du triangle ABC

Par construction, les grands cercles $C'B'$ et $C'A'$ coupent le grand cercle AB en angle droit. Il en est de même des deux grands cercles $B'A'$ et $B'C'$ pour le grand cercle AC , et des deux grands cercles $A'B'$ et $A'C'$ pour le grand cercle BC . Les côtés du triangle polaire sont donc perpendiculaires chacun à deux côtés du triangle d'origine.

Propriété 2 : La transformation qui à un triangle associe son triangle polaire est une application involutive, c'est-à-dire que le triangle polaire du triangle $A'B'C'$ est le triangle ABC .

Preuve : Comme (OA') est perpendiculaire à (OB) et (OC) , et de même (OB') perpendiculaire à (OC) et (OA) , ainsi que (OC') avec (OA) et (OB) , on a aussi (OA) perpendiculaire à (OB') et (OC') , avec A du même côté que A' . Il en est de même pour (OB) et (OC) .

Ainsi, le triangle ABC est le dual de $A'B'C'$. ■

Les côtés du triangle $A'B'C'$ sont les supplémentaires des angles du triangle ABC . Ce qui s'exprime par les égalités suivantes :

$$a' + \alpha = \pi \quad b' + \beta = \pi \quad c' + \gamma = \pi$$

Et par propriété d'involution, les angles du triangle polaire sont les supplémentaires des côtés du triangle ABC , c'est-à-dire :

$$a + \alpha' = \pi \quad b + \beta' = \pi \quad c + \gamma' = \pi$$

I - 4 Trigonométrie sphérique

Dans l'objectif d'établir la formule d'Euler-Descartes, on va d'abord démontrer le théorème de Girard qui donne l'aire d'un triangle sphérique en fonction des mesures de ses angles. Mais pour arriver à ce théorème, on aura besoin de résultats purement trigonométriques que l'on démontre au préalable dans cette section.

Lemme 3 : (Formule des cosinus pour les côtés¹)

Soit un triangle sphérique ABC d'angles α , β et γ et de cotés a opposé à A , b opposé à B et c opposé à C . Alors² :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma$$

Preuve : [5] Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé. On travaille avec la sphère \mathbb{S}^2 (centrée en O), et on suppose que $\vec{k} = OA$ et que B est dans le plan (O, \vec{i}, \vec{k}) . On peut ainsi paramétrer les points du triangle sphérique ABC par :

$$x = \cos \theta \cos \varphi \quad y = \sin \theta \cos \varphi \quad z = \sin \varphi$$

B a donc pour coordonnées sphériques $(1, c, 0)$ et C a pour coordonnées sphériques $(1, b, \alpha)$. Si on repasse en coordonnées cartésiennes, B a pour coordonnées $(\sin c, 0, \cos c)$ et C a pour coordonnées $(\sin b \cos \alpha, \sin b \sin \alpha, \cos b)$.

Le produit scalaire euclidien de OC avec OB donne :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

On obtient les autres formules avec la même démonstration en permutant les angles. ■

1. Formules énoncées par François Viète en 1593 dans son *De Varorium*.

2. On peut citer l'analogie de cette formule en géométrie hyperbolique :

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha$$

Théorème 4 : (Formule des cosinus pour les angles)

Soit un triangle sphérique ABC d'angles α, β et γ et de cotés a opposé à A , b opposé à B et c opposé à C . Alors³ :

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

Preuve : [5] On appelle $A'B'C'$ le triangle polaire de ABC . On a alors les relations suivantes :

$$a' + \alpha = \pi \quad b' + \beta = \pi \quad c' + \gamma = \pi \quad a + \alpha' = \pi \quad *$$

On applique maintenant la formule des cosinus pour les cotés de $A'B'C'$ pour obtenir :

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha'$$

Avec les relations $*$, on obtient :

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta) \cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta) \sin(\pi - \gamma) \cos(\pi - a)$$

$$\iff -\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\iff \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

On prouve les autres formules avec la même démonstration en permutant les angles. ■

I - 5 Théorème de Girard

Maintenant que l'on a établi les formules des cosinus pour les côtés et pour les angles, on peut démontrer le théorème de Girard.

I - 5 - i Énoncé

Théorème 5 : (Théorème de Girard⁴)

Soient α, β , et γ les mesures en radians des angles d'un triangle sphérique sur une sphère de rayon R . L'aire de ce triangle sphérique est égale à $(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \times R^2$.

Ce théorème dit que plus l'aire d'un triangle sphérique est grande, plus les angles sont grands, et donc plus le triangle est courbé (sur la sphère) puisqu'on s'écarte de la géométrie euclidienne.

On présente maintenant deux démonstrations du théorème de Girard.

3. On peut de nouveau citer l'analogie de cette formule en géométrie hyperbolique :

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cosh a$$

4. Théorème dû à Albert Girard, mathématicien français du XVII^e siècle, énoncé et partiellement démontré en 1629 dans son *Invention*.

I - 5 - ii Preuve avec les lunes

Définition : Étant donnés deux points antipodaux de la sphère, on appelle *lune* (ou *bigone*) la surface délimitée par deux géodésiques.

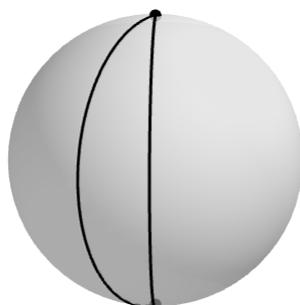


FIGURE 5 – Lune

Remarque : Si la sphère est décomposée en bigones de même angle $\theta < \pi$, comme l'aire d'une sphère de rayon R est $4\pi R^2$ alors l'aire d'un bigone est $\frac{4\pi R^2 \theta}{2\pi} = 2R^2 \theta$ et dans le cas de la sphère unité \mathbb{S}^2 , l'aire d'un bigone d'angle θ est 2θ . On remarque aussi qu'un polygone à deux cotés n'existe pas en géométrie euclidienne.

Preuve : [1] Reprenons la figure du triangle sphérique de sommets A, B et C . Appelons α, β et γ les angles en A, B et C respectivement et T l'aire du triangle ABC . Traçons les grands cercles qui prolongent les géodésiques. On voit naturellement apparaître un autre triangle sphérique, antipodal au triangle ABC , que l'on appelle $A'B'C'$, où A', B' et C' sont antipodaux respectivement à A, B et C .

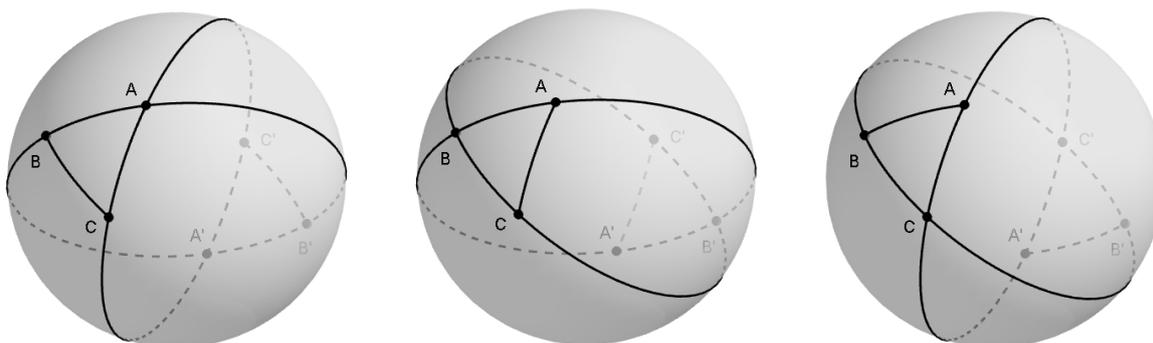


FIGURE 6 – Lunes $L_{AA'}, L_{BB'}$ et $L_{CC'}$

Appelons $L_{AA'}, L_{BB'}$ et $L_{CC'}$ les (aires des) trois lunes d'angles A et A', B et B' puis C et C' qui contiennent le triangle ABC . Les lunes antipodales $L'_{AA'}, L'_{BB'}$ et $L'_{CC'}$ contenant $A'B'C'$ sont évidemment d'aires $L_{AA'}, L_{BB'}$ et $L_{CC'}$. L'aire de la sphère est donnée par $4\pi R^2$, mais aussi par l'aire des lunes de la façon suivante :

$$2L_{AA'} + 2L_{BB'} + 2L_{CC'} - 4T$$

En effet, en additionnant les aires des six lunes, on aura compté l'aire du triangle ABC trois fois et celle du triangle $A'B'C'$ trois fois aussi. C'est pourquoi on retranche deux fois chaque aire (égale à T) pour obtenir exactement l'aire de la sphère. On a donc :

$$2L_{AA'} + 2L_{BB'} + 2L_{CC'} - 4T = 4\pi R^2$$

Par la remarque précédente, $L_{AA'} = 2R^2\alpha$, $L_{BB'} = 2R^2\beta$ et $L_{CC'} = 2R^2\gamma$.

Ainsi,

$$T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \times R^2$$

■

I - 5 - iii Preuve par intégration

On se place dorénavant dans un repère basé au centre de la sphère \mathbb{S}^2 .

Définition : Étant donnée une sphère, on appelle *longitude* d'un point de cette sphère, l'angle que fait le plan contenant le grand cercle du méridien reliant le pôle nord et le pôle sud auquel il appartient et le plan contenant le grand cercle du méridien de référence⁵, dont la longitude est 0° .

La *latitude* d'un point est l'angle que fait la normale à la sphère en ce point avec le plan équatorial de latitude 0° .

Preuve : [5] Sans perte de généralité⁶, on peut supposer que la sphère de rayon R est centrée en l'origine d'un repère $Oxyz$, que le point A est au pôle nord, *i.e.* ses coordonnées sont $(0, 0, R)$ et que le plan OBC contient l'axe Ox .

On appelle θ_B et θ_C les longitudes des point B et C . On peut ainsi paramétrer les points du triangle sphérique ABC par :

$$x = R \cos \theta \cos \varphi \quad y = R \sin \theta \cos \varphi \quad z = R \sin \varphi$$

En notant $u(\theta) := \frac{\pi}{2} - \varphi$ la *colatitude* d'un point de coordonnées (R, θ, φ) , l'aire du triangle ABC est :

$$\begin{aligned} \int_{\theta_B}^{\theta_C} \int_{\frac{\pi}{2}-u(\theta)}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta &= R^2 \int_{\theta_B}^{\theta_C} [\sin \varphi]_{\varphi=\frac{\pi}{2}-u(\theta)}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \, d\theta = R^2 \int_{\theta_B}^{\theta_C} 1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - u(\theta) \right) \, d\theta \\ &= R^2 \int_{\theta_B}^{\theta_C} 1 - \cos (u(\theta)) \, d\theta = R^2 (\theta_C - \theta_B) - R^2 \int_{\theta_B}^{\theta_C} \cos (u(\theta)) \, d\theta \end{aligned}$$

Par définition, $\alpha = \theta_C - \theta_B$.

Ensuite, on utilise la formule des cosinus pour les angles du triangle suivant où :

$$\alpha = \pi - \omega - d\omega \quad \beta = d\theta \quad \gamma = \omega \quad a = u$$

5. Le méridien de référence sur Terre est appelé méridien de Greenwich.

6. On peut toujours se ramener à cette situation par des rotations.

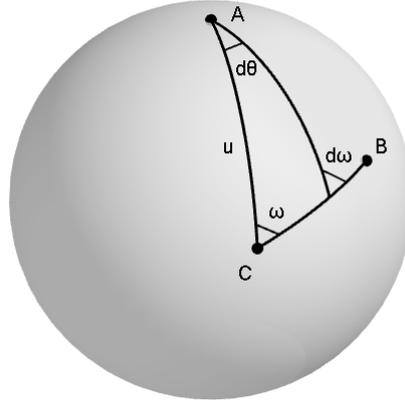


FIGURE 7 – Découpage pour l'intégration du triangle ABC

On obtient alors :

$$\cos(\pi - \omega - d\omega) = -\cos d\theta \cos \omega + \sin d\theta \sin \omega \cos u(\theta)$$

Or,

$$\cos(\pi - \omega - d\omega) = -\cos(-\omega - d\omega) = -\cos(\omega + d\omega) = \sin \omega \sin d\omega - \cos \omega \cos d\omega$$

Mais, par définition, $d\omega \rightarrow 1$ et $d\theta \rightarrow 1$, d'où :

$$\cos d\theta \sim 1 \quad , \quad \sin d\theta \sim d\theta \quad , \quad \cos d\omega \sim 1 \quad \text{et} \quad \sin d\omega \sim d\omega$$

Ainsi :

$$-\cos \omega + d\theta \sin \omega \cos u(\theta) = \sin \omega d\omega - \cos \omega$$

C'est-à-dire :

$$\cos u(\theta) d\theta = d\omega$$

Enfin, puisque $\omega = \beta$ en B et $\omega = \pi - \gamma$ en C , l'aire du triangle ABC est égale à :

$$R^2 \alpha - R^2 \int_{\beta}^{\pi - \gamma} d\omega = R^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

■

I - 6 Formule d'Euler-Descartes

I - 6 - i Énoncé du théorème

Théorème 6 : (Formule d'Euler-Descartes⁷)

Pour un polyèdre convexe⁸, la quantité $s - a + f$, où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces, est toujours égale à 2.

7. Théorème formulé par Euler en 1752. Il semble cependant que Descartes avait énoncé une formule très proche dans son manuscrit non publié *De Solidorum Elementis*.

8. On peut étendre cette hypothèse en remplaçant « convexe » par « homéomorphe à une sphère ».

Exemples :

- La formule est valide pour les solides platoniciens (polyèdres réguliers convexes) de base : le tétraèdre (4 sommets, 6 arêtes, 4 faces), le cube (8 sommets, 12 arêtes, 6 faces), l'octaèdre (6 sommets, 12 arêtes, 8 faces), le dodécaèdre (20 sommets, 30 arêtes, 12 faces) et l'icosaèdre (12 sommets, 30 arêtes, 20 faces).
- Un exemple prouvant que l'hypothèse de convexité est nécessaire : le polyèdre de la figure 8 qui possède 12 sommets, 24 arêtes et 12 faces et ne vérifie donc pas la formule d'Euler-Descartes ($12 - 24 + 12 = 0$).

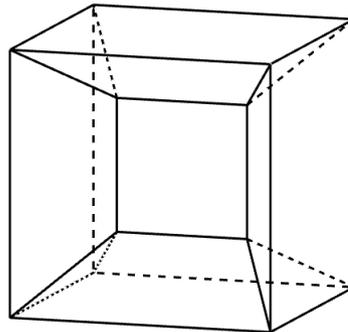


FIGURE 8 – Polyèdre ne vérifiant pas la formule d'Euler-Descartes

- Cas de recollement de deux polyèdres P et P' le long d'une face commune à n côtés. Supposons que P et P' vérifient $s - a + f = 2$ et $s' - a' + f' = 2$. Appelons Q le polyèdre recollé et S son nombre de sommets, F son nombre de faces et A son nombre d'arêtes. Alors on a $F = f + f' - 2$, puis $A = a + a' - n$ et $S = s + s' - n$. Q vérifie encore la relation d'Euler-Descartes car :

$$S - A + F = s + s' - n - (a + a' - n) + f + f' - 2 = s - a + f + s' - a' + f' - 2 = 4 - 2 = 2$$

- Troncature d'un coin d'un polyèdre où se rejoignent e arêtes. Soit P un polyèdre convexe qui vérifie $s - a + f = 2$. Si on appelle Q le polyèdre tronqué, alors il aura $s + e - 1$ sommets, $a + e$ arêtes et $f + 1$ faces et donc il vérifie encore la formule d'Euler-Descartes car

$$s + e - 1 - (a + e) + f + 1 = s - a + f = 2$$

I - 6 - ii Preuve

La preuve proposée ci-après est faite dans le cas d'un polyèdre sphérique convexe à faces triangulaires. Pourquoi cela suffit-il à prouver le cas général (polyèdre à faces polygonales) ?

Déjà, on admet qu'un polyèdre homéomorphe à la sphère est combinatoirement équivalent à un polyèdre sphérique, c'est pourquoi il suffit de se ramener au cas d'un polyèdre sphérique à faces polygonales.

Supposons maintenant que l'on a démontré le cas pour les faces triangulaires et considérons un polyèdre sphérique convexe P dont toutes les faces sont triangulaires, sauf une qui est un polygone à n sommets (ce peut être un bigone !). Considérons le même polyèdre, mais dont on a séparé le polygone en $n - 2$ triangles (de n'importe quelle manière), que l'on appelle \tilde{P} . En fait, on peut toujours diviser un polygone à n sommets en $n - 2$ triangles sans rajouter de sommet. La preuve s'éloigne grandement du sujet de ce dossier, mais on peut en trouver

une dans [6].

Avec des notations logiques, on a :

$$\tilde{f} = f - 1 + n - 2 = f + n - 1 \quad , \quad \tilde{a} = a + n - 1 \quad \text{et} \quad \tilde{s} = s$$

Ainsi :

$$\tilde{s} - \tilde{a} + \tilde{f} = s - (a + n - 1) + (f + n - 1) = s - a + f = 2$$

et donc la formule est vraie pour le polyèdre P , et donc pour n'importe quel polyèdre sphérique convexe.

Prouvons à présent le cas des faces triangulaires.

Preuve : On prend un polyèdre sphérique convexe dont toutes les faces sont triangulaires. Appelons f le nombre de faces, s le nombre de sommets et a le nombre d'arêtes de ce polyèdre. On appelle α_i, β_i et γ_i les trois angles de chaque triangle T_i .

L'idée de cette preuve est de calculer de deux manières différentes la somme des angles des T_i qui composent le polyèdre.

Définissons :

$$\Delta := \sum_{i=1}^f (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)$$

D'une part, d'après le théorème de Girard, l'aire de T_i , notée \mathcal{A}_i , vaut $R^2(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi)$.

Ainsi :

$$\Delta = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\mathcal{A}_i}{R^2} + \pi \right) = f\pi + \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^f \mathcal{A}_i = f\pi + \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = f\pi + 4\pi$$

D'autre part, Δ vaut aussi $2\pi s$ (en chaque sommet, la somme des angles des triangles vaut 2π). D'où :

$$2s = f + 4 \quad \text{i.e.} \quad 2s - f = 4$$

Mais, chaque arête est commune à 2 faces, et chaque face est commune à 3 arêtes, donc

$$3f = 2a \quad \text{i.e.} \quad f = 2a - 2f$$

En réinjectant dans la formule du dessus, on obtient : $2s - 2a + 2f = 4$ i.e. $s - a + f = 2$. ■

On utilise l'hypothèse de convexité lorsque l'on applique la formule de l'aire d'un triangle sphérique, qui n'est valable qu'en géométrie sphérique. C'est la raison pour laquelle on peut remplacer l'hypothèse de convexité par l'hypothèse d'un polyèdre homéomorphe à une sphère. Il existe d'autres preuves de ce théorème utilisant non pas la géométrie sphérique mais la théorie des graphes par exemple. On peut en trouver les détails dans [9] par exemple.

I - 6 - iii Peut-on paver une sphère avec des hexagones?

C'est un exemple classique d'application de la formule d'Euler-Descartes. Le sens mathématique de cette question est plutôt : existe-t-il un polyèdre homéomorphe à la sphère dont toutes les faces sont des hexagones (non réguliers) ?

La réponse est non : il est impossible de recouvrir une sphère seulement par des hexagones, même non réguliers, afin de former une géode, car un tel recouvrement ne vérifierait pas la relation d'Euler-Descartes.

En effet, prenons un polyèdre à faces uniquement hexagonales et reprenons les notations du théorème : a désigne le nombre d'arêtes, s le nombre de sommets et f le nombre de faces.

Chaque face du polyèdre contient 6 arêtes (chaque face est un hexagone), mais les arêtes sont communes à 2 faces, on a alors $a = \frac{6}{2}f = 3f$ arêtes sur le polyèdre. De même, chaque face contient 6 sommets, qui sont communs à au moins 3 faces sur le polyèdre, il y a donc $s \leq \frac{6}{3}f = 2f$ sommets. On a donc :

$$f - a + s \leq f - 3f + 2f = 0$$

La relation d'Euler-Descartes n'est pas vérifiée ! Pourtant, la géode à La Villette semble pavée d'hexagones, alors comment est-ce possible ?

Imaginons un polyèdre avec essentiellement des faces hexagonales et quelques faces pentagonales. Si le nombre de faces ne varie pas, le nombre d'arêtes et de sommets diminue : pour chaque pentagone ajouté, on a $\frac{6-5}{2}$ arêtes, c'est-à-dire une demie arête en moins et $\frac{6-5}{3}$ sommets, c'est-à-dire un tiers de sommet en moins. La quantité $s - a + f$ augmente donc à chaque fois de la différence, c'est-à-dire d'un sixième. Pour que la formule d'Euler-Descartes soit respectée, il faut que $s - a + f$ initialement égal à 0, devienne égal à 2, donc augmente de $\frac{12}{6}$. Ainsi, il faut remplacer 12 hexagones par autant de pentagones pour paver la sphère. Le nombre des sommets s est alors de $2f - 4$ et celui des arêtes a de $3f - 6$.

C'est ainsi que l'on obtient l'icosaèdre tronqué (ballon de football, ou fullerène⁹). Ce polyèdre est construit à partir d'un icosaèdre (solide formé de 20 faces triangulaires régulières) avec une troncature des 12 sommets telle qu'un tiers de chaque arête est enlevé à chaque extrémité (**cliquer ici pour voir une animation**). Un cas extrême est celui du dodécaèdre régulier ($f = 12$), où il ne reste plus aucun hexagone.

Dans la figure 9 (où $f = 32$), les douze pentagones sont visibles.

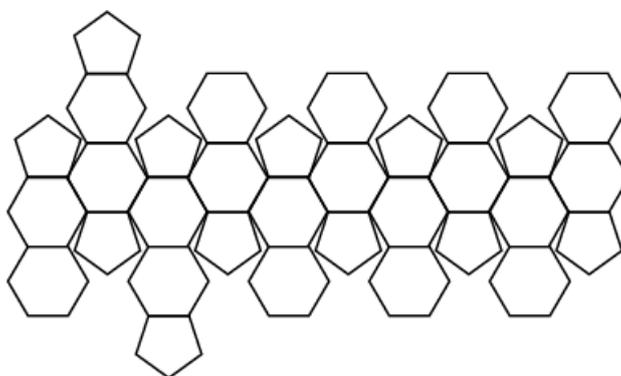


FIGURE 9 – Patron d'un pavage de sphère

9. Les fullerènes représentent une nouvelle famille de molécules constituées par un assemblage d'atomes de carbone. Le premier fullerène (C_{60}), comportant 60 atomes de carbone (12 pentagones et 20 hexagones), a été mis en évidence en 1985 par Harold Kroto, Robert Curl et Richard Smalley, qui, pour cette découverte, ont reçu le prix Nobel de chimie en 1996.

II - Groupes d'homologie simpliciale et leur invariance

Le but de cette seconde partie est de démontrer la formule d'Euler-Poincaré qui généralise la formule d'Euler-Descartes prouvée dans la première partie. Pour y parvenir, on aura besoin de la théorie de l'homologie simpliciale. Dans un premier temps, on définira tous les objets dont on aura besoin, puis après quelques calculs explicites, on s'attellera aux résultats d'invariance.

II - 1 Simplexe et réalisation

Dans toute la suite, \mathbb{E} est un espace euclidien de dimension n .

Définition : Un p -simplexe est un ensemble $\{v_0, \dots, v_p\} \in \mathbb{E}^{p+1}$ tel que v_0, \dots, v_p n'appartiennent pas à un même hyperplan. On le note $[v_0, \dots, v_p]$ ou σ_p .

p est la *dimension* du p -simplexe, aussi appelé *simplexe de dimension p* .

Remarque : La condition « v_0, \dots, v_p n'appartiennent pas à un même hyperplan » est équivalente à dire que $v_1 - v_0, \dots, v_p - v_0$ sont linéairement indépendants. En particulier, on a nécessairement $p \leq n + 1 = \dim(\mathbb{E}) + 1$. On se placera donc dans ce cas dans toute la suite.

Définition : v_0, \dots, v_p sont appelés *sommets* du p -simplexe $\sigma_p = [v_0, \dots, v_p]$. Si l'on supprime $l \leq p$ sommets, le $(p - l)$ -simplexe est appelé *face* du p -simplexe σ_p .

Définition : Étant donné un p -simplexe $\sigma_p = [v_0, \dots, v_p]$, on appelle *réalisation*¹⁰ de σ_p l'ensemble :

$$|\sigma_p| = \left\{ \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i \mid \forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1 \right\}$$

C'est le plus petit espace convexe qui contient v_0, \dots, v_p .

Exemples : La réalisation d'un 0-simplexe est un point, celle d'un 1-simplexe est un segment, celle d'un 2-simplexe est un triangle, et celle d'un 3-simplexe est un tétraèdre.

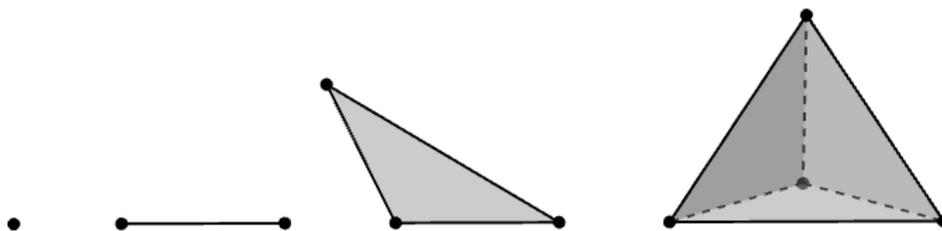


FIGURE 10 – Réalisations d'un singleton, couple, triplet et quadruplet respectivement

La réalisation d'un simplexe est compacte (c'est un fermé borné en dimension finie).

10. Il arrive souvent que l'on prenne pour définition d'un p -simplexe sa réalisation.

II - 2 Complexe simplicial et polyèdre

Définition : Un *complexe simplicial* de \mathbb{E} est un ensemble K tel que :

- tous les éléments de K sont des simplexes de \mathbb{E} ,
- si $\sigma \in K$ et que σ' est une face de σ , alors $\sigma' \in K$,
- l'intersection de deux simplexes de K est une face de ces deux simplexes.

La *dimension* de K est le maximum des dimensions des simplexes qui le composent.

Dans toute la suite, on suppose que tous les complexes simpliciaux considérés n'ont qu'un nombre fini de sommets.

On aimerait bien définir la réalisation d'un complexe simplicial comme on a défini celle d'un simplexe.

Soient $\sigma_p = [v_0, \dots, v_p]$ et $\sigma_q \subset \sigma_p$ deux simplexes d'un complexe simplicial K avec $q \leq p$. On définit alors naturellement l'inclusion $f_q^p : |\sigma_q| \hookrightarrow |\sigma_p|$ par :

$$f_q^p \left(\sum_{i=0}^q \lambda_i v_i \right) = \sum_{\substack{i=0 \\ v_i \in \sigma_q}}^p \lambda_i v_i + \sum_{\substack{i=0 \\ v_i \notin \sigma_q}}^p 0 \cdot v_i$$

Remarque : $f_0^0 = \text{id}_{|\sigma|}$ et si $l \leq q \leq p$ alors $f_q^p \circ f_l^q = f_l^p$.

Exemple : Soient $\{a, b, c\} \in \mathbb{E}^3$. On prend $\sigma_3 = [a, b, c]$ et $\sigma_2 = [b, c]$. Alors f_2^3 est l'inclusion naturelle du segment $[b, c]$ (la réalisation de σ_2) dans le triangle de sommets a, b et c (la réalisation de σ_3).

Proposition 7 : Soient $\sigma_q \subset \sigma_p$ deux simplexes d'un complexe simplicial K qui vérifient $q \leq p$. Soient $u \in \sigma_q$ et $v \in \sigma_p$. La relation \sim définie par « $u \sim v \iff f_q^p(u) = v$ » est une relation d'équivalence sur $|K|$.

Preuve : Soit K un complexe simplicial. Vérifions que \sim est réflexive, transitive et anti-symétrique. On se sert principalement de la remarque précédente.

- Soit $\sigma \in K$. $\forall v \in \sigma$, $f_0^0(v) = v$ i.e. $v \sim v$. Donc \sim est réflexive.
- Soient $l \leq q \leq p$ tels que $\sigma_l \subset \sigma_q \subset \sigma_p$ avec σ_l, σ_q et σ_p des simplexes de K . On suppose que $u \in \sigma_l$, $v \in \sigma_q$ et $w \in \sigma_p$ sont tels que $u \sim v$ et $v \sim w$. Alors $f_l^p(u) = f_q^p \circ f_l^q(u) = f_q^p(v) = w$ i.e. $u \sim w$. Donc \sim est transitive.
- Soient $u, v \in \sigma \subset K$ tels que $u \sim v$ et $v \sim u$. Alors on a directement que $u = v$ i.e. \sim est anti-symétrique. ■

Définition : Soit K un complexe simplicial. La *réalisation* de K est :

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma| / \sim$$

Autrement dit, la réalisation de K est l'ensemble des réalisations des simplexes de K où l'on a identifié les faces communes aux simplexes.

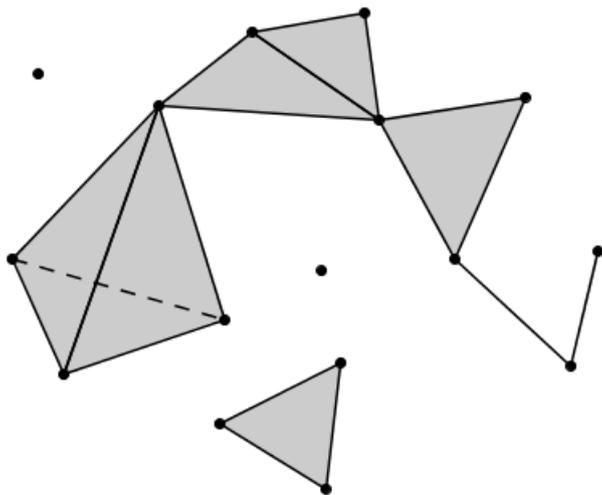


FIGURE 11 – Exemple de réalisation d'un complexe simplicial dans \mathbb{R}^3

Exemples :

- La réalisation d'un complexe simplicial de dimension 0 est un espace topologique discret,
- celle d'un complexe simplicial de dimension 1 est un graphe,
- et celle d'un complexe simplicial de dimension 2 est un espace triangulé.

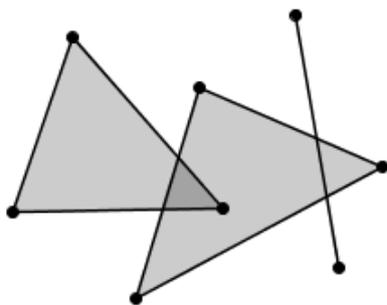


FIGURE 12 – Cas interdit dans la réalisation d'un complexe simplicial

Définition : On appelle *polyèdre* associé à un complexe simplicial K l'ensemble $|K|$ muni de la topologie induite par celle de l'espace euclidien ambiant. On appelle plus généralement polyèdre toute partie d'un espace euclidien qui est la réalisation d'un complexe (non précisé).

II - 3 Triangulation

Définition : Une *triangulation* d'un espace topologique X est la donnée d'un complexe simplicial K et d'un homéomorphisme $h : |K| \rightarrow X$.

Une triangulation permet en fait de définir un espace par des données combinatoires.

Les triangulations ne sont pas uniques car elles dépendent du choix d'un complexe simplicial K et d'un homéomorphisme h . En fait, l'important est l'existence d'une telle triangulation qui sert d'outil pour prouver des résultats. Par ailleurs, il existe des espaces topologiques qui ne sont pas triangulables¹¹.

Exemples : Une triangulation d'un cylindre est donnée par le complexe simplicial

$$K_{\mathcal{C}} = \{[a, b, c]; [a, c, d]; [d, c, b]; [d, b, a]; [a, b]; [b, c]; [a, c]; [a, d]; [d, c]; [d, b]; [a]; [b]; [c]; [d]\}$$

et l'homéomorphisme associé $h_{\mathcal{C}} = \text{id}$ (puisque $|K_{\mathcal{C}}|$ est exactement le cylindre).

On notera pour simplifier $K_{\mathcal{C}} = \{[a, b, c]; [a, c, d]; [d, c, b]; [d, b, a]; F\}$ où F signifie « et les faces associées à ces simplexes ».

En prenant de nouveau l'identité et les complexes simpliciaux

$$K_{\mathcal{M}} = \{[a, b, c]; [a, c, d]; [d, c, f]; [d, f, e]; [e, f, a]; [e, a, b]; F\},$$

$$K_{\mathcal{G}} = \{[a, b, e]; [a, d, e]; [d, e, b]; [d, a, b]; [e, b, c]; [e, c, d]; [b, e, b]; [b, c, d]; F\},$$

et $K_{\mathcal{K}} = \{[a, b, f]; [a, d, f]; [d, f, g]; [d, e, g]; [e, g, b]; [b, f, e]; [f, e, d]; [b, a, g]; [d, a, g]; F\}$

on obtient des triangulations respectivement du ruban de Mœbius, du tore et de la bouteille de Klein. La figure 13 représente les complexes simpliciaux « semi-réalisés¹² » (*i.e.* dont on n'a pas terminé les identifications).

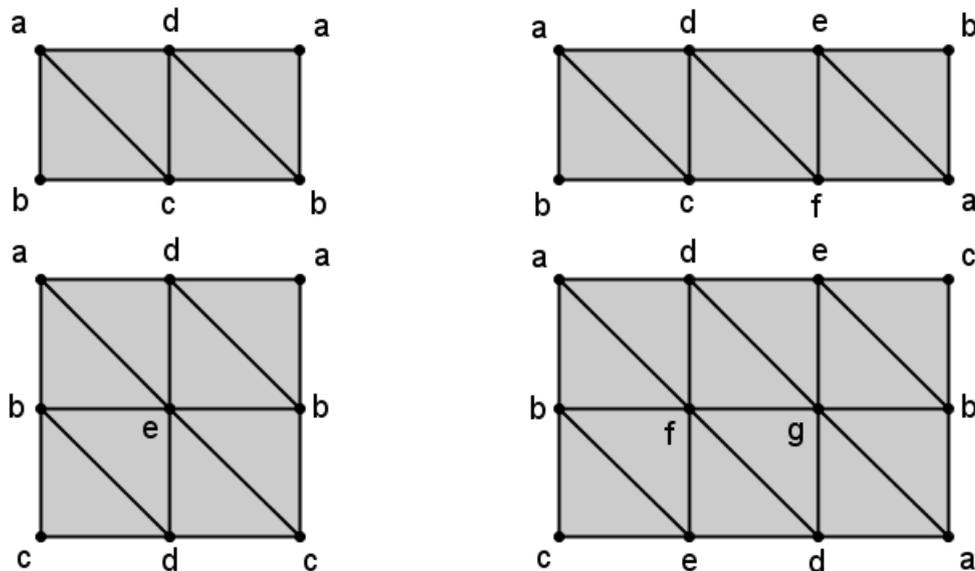


FIGURE 13 – « Semi-réalisations » de $K_{\mathcal{C}}$ et de $K_{\mathcal{M}}$ puis de $K_{\mathcal{G}}$ et $K_{\mathcal{K}}$

II - 4 Groupe de chaînes

On va s'intéresser dans cette section aux simplexes d'un complexe qui ont même dimension d .

11. On sait depuis les travaux de Freedman [8] en 1982 (médaille Fields 1986) qu'il existe des variétés topologiques de dimension 4 qui sont non triangulables. Une démonstration du fait que, pour tout $n \geq 5$, il existe des variétés topologiques non triangulables, a été annoncée en 2013 par Manolescu.

12. Ceci n'est pas une appellation conventionnelle.

Définition : Une *orientation* d'un p -simplexe σ_p est la donnée d'un ordre sur ses sommets modulo un changement de l'ordre par une permutation paire (*i.e.* de signature 1). Autrement dit, si $\sigma_p = [v_0, \dots, v_p]$, et si $\tau \in \mathfrak{S}_{p+1}$ est une permutation paire, alors en tant que *simplexes orientés*, $[v_0, \dots, v_p] = [v_{\tau(0)}, \dots, v_{\tau(p)}]$. Si $\tau \in \mathfrak{S}_{p+1}$ est une permutation impaire, on note $[v_{\tau(0)}, \dots, v_{\tau(p)}] = -\sigma_p$.

Exemples : Soient $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{E}^4$. En tant que simplexes orientés, $[a, b, c, d] = [a, d, b, c]$ puisque $\varepsilon((b, c, d)) = 1$, mais $[a, b, c, d] = -[a, d, c, b]$ car $\varepsilon((b, d)) = -1$.

Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne un corps¹³.

Définition : Le *groupe de chaînes* de degré d à coefficients dans \mathbb{K} d'un complexe simplicial K est l'ensemble des combinaisons \mathbb{K} -linéaires de d -simplexes de K orientés. On note cet ensemble $C_d(K, \mathbb{K})$, ou parfois plus simplement, $C_d(K)$.

Remarque : $C_d(K)$ est un groupe abélien pour l'addition. C'est un \mathbb{K} -module libre car il est engendré par les d -simplexes de K .

II - 5 Opérateur de bord

On va formaliser l'opération géométrique qui consiste à « prendre le bord » d'un simplexe (en tant que sous-variété).

Définition : On définit l'*opérateur de bord* $\partial : K \longrightarrow K$ par :

$$\forall \sigma = [v_1, \dots, v_p] \in K, \quad \partial(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p]$$

On notera $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p] = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$

Exemples : Soient $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{E}^4$

- $[a, b]$ (dont la réalisation est un segment) a pour bord $[b] - [a]$,
- le bord de $[a, b, c]$ (dont la réalisation est un triangle) est $[a, b] - [a, c] + [b, c]$ qui vaut aussi $[a, b] + [b, c] + [c, a]$ et c'est bien le bord du triangle comme on peut l'imaginer,
- le bord de $[a, b, c, d]$ (dont la réalisation est un tétraèdre) est donné par :
 $\partial([a, b, c, d]) = [b, c, d] - [a, c, d] + [a, b, d] - [a, b, c]$.

Remarque : Le bord d'un p -simplexe est une chaîne de degré $p - 1$. Le bord d'une chaîne de degré d est obtenu par extension linéaire $\partial_d : C_d(K, \mathbb{K}) \longrightarrow C_{d-1}(K, \mathbb{K})$ tel que :

$$\partial_d \left(\sum_{\sigma \in K} \alpha_\sigma \sigma \right) = \sum_{\sigma \in K} \alpha_\sigma \partial_d(\sigma) \quad \text{où } \alpha_\sigma \in \mathbb{K} \text{ et } \sigma \in K \text{ sont des } d\text{-simplexes}$$

Par convention, le bord d'un 0-simplexe (*i.e.* d'un sommet) est 0 et $C_{-1}(K) = \{0\}$.

Proposition 8 : Le bord du bord d'un simplexe orienté est nul, *i.e.* $\partial \circ \partial = 0$.

13. Toute cette théorie reste valable avec un anneau.

Preuve : [7] Soit $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ un p -simplexe de K orienté. On va montrer que $\partial \circ \partial(\sigma) = 0$. Par définition, puis par linéarité, on a :

$$\partial \circ \partial(\sigma) = \partial \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] \right) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p])$$

Or :

$$\partial([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]) = \sum_{j<i} (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] - \sum_{j>i} (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p]$$

D'où, $\partial \circ \partial(\sigma)$ est égal à :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j<i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] \right) - \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j>i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p] \right) \\ &= \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j<i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] \right) - \sum_{j=0}^p \left(\sum_{i<j} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p] \right) \end{aligned}$$

Et ce sont exactement les mêmes termes, on conclut donc $\partial \circ \partial(\sigma) = 0$. ■

Corollaire 9 : Le bord du bord d'une chaîne est nul.

Preuve : Par extension linéaire de ∂ . ■

II - 6 Groupes d'homologie

Tout le reste du dossier est grandement inspiré de *Basic Topology* de Armstrong [9].

II - 6 - i Définition des groupes

Ce qui est intéressant lorsque l'on prend un simplexe sans bord (*i.e.* une sous-variété fermée), c'est de regarder, à déformation près, ses invariants topologiques.

Définition : Étant donné K un complexe simplicial, et $\partial_d : C_d(K) \longrightarrow C_{d-1}(K)$, on définit le *groupe des d -cycles* et le *groupe des d -bords* respectivement par :

$$Z_d(K, \mathbb{K}) = \ker \partial_d \quad \text{et} \quad B_d(K, \mathbb{K}) = \text{Im } \partial_{d+1}$$

On notera $Z_d(K)$ et $B_d(K)$ pour simplifier. $Z_d(K)$ est l'ensemble des sous-variétés fermées.

Exemple : $[a, b] + [b, c] + [c, a]$ est un 1-cycle car son bord est nul.

La proposition 8 ($\partial \circ \partial = 0$) montre que $B_d(K) \subset Z_d(K)$, ce qui permet d'énoncer la définition suivante, sur laquelle repose tout le reste du dossier.

Définition : Le d -ième groupe d'homologie de K est le quotient :

$$H_d(K) = Z_d(K) / B_d(K)$$

L'opération quotient permet ici d'identifier deux sous-variétés sans bord lorsque l'on peut déformer l'une en l'autre. Les groupes d'homologie servent principalement à caractériser les « trous » d'un espace.

Définition : L'ensemble des éléments de $H_d(K)$ déterminés par un d -cycle σ est appelé *classe d'homologie* de σ et est noté $[\sigma]$. Deux d -cycles, dont la différence est un d -bord, ont la même classe d'homologie et sont donc dits *homologues*.

II - 6 - ii Calculs de groupes d'homologie

Exemple : Regardons quel est le groupe d'homologie d'un singleton, *i.e.* $K = \{x\}$. Clairement, pour $d > 0$, $Z_d(K) = 0$ donc $H_d(K) = 0$. De plus, $B_0(K) = 0$ et $Z_0(K) = C_0(K) \simeq \mathbb{K}$.

Exemple : On considère le complexe simplicial suivant :

$$K = \{[a, b, c]; [a, b]; [a, c]; [a, d]; [b, c]; [c, d]; [a]; [b]; [c]; [d]\}$$

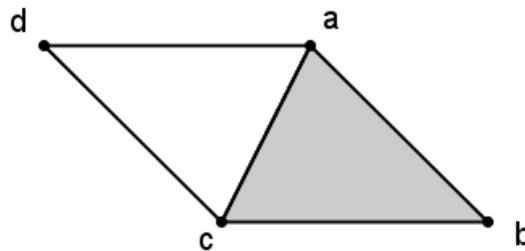


FIGURE 14 – Réalisation de K

On voit que $Z_0(K) = C_0(K)$. De $C_1(K) = \langle [a, b]; [a, c]; [a, d]; [b, c]; [c, d] \rangle$ on déduit :

$$B_0(K) = \partial C_1(K) = \langle [b] - [a]; [c] - [a]; [d] - [a]; [c] - [b]; [d] - [c] \rangle$$

On voit qu'alors $[a], [b], [c]$ et $[d]$ ont la même classe d'homologie car leurs différences deux à deux sont dans $B_0(K)$. Ainsi, $H_0(K) = [a] \simeq \mathbb{K}$.

Déterminons maintenant $H_1(K)$. Après calculs, $Z_1(K)$ est engendré par les 1-cycles qui sont ici :

$$[z_1] = [a, b] + [b, c] + [c, a], \quad [z_2] = [a, c] + [c, d] + [d, a], \quad [z_3] = [a, b] + [b, c] + [c, d] + [d, a]$$

Mais $[z_3] = [z_1] + [z_2]$, donc $Z_1(K) = \langle [z_1]; [z_2] \rangle$.

$C_2(K)$ est engendré par $[a, b, c]$ donc $B_1(K) = \partial C_2(K) = \langle [a, b] - [a, c] + [b, c] \rangle = \langle [z_1] \rangle$.

Ainsi, $H_1(K) = [z_2] \simeq \mathbb{K}$.

Enfin, $\forall d > 1, Z_d(K) = 0$, donc $H_d(K) = 0$.

Proposition 10 : Soit K un complexe simplicial. Alors $H_0(K)$ est un espace vectoriel dont le rang est le nombre de composantes connexes de $|K|$.

Preuve : La commutativité provient de celle de $C_0(K)$.

Si v et w sont deux sommets différents de K appartenant à une même composante connexe k de $|K|$, alors v et w sont homologues. En effet, on va exhiber une chaîne de degré 1 dont le bord est égal à $[w] - [v]$. Soit u_1, \dots, u_k des sommets de k tels que $\forall l \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, v_l \neq v_{l+1}$. Ainsi, $\sigma := [v, u_1] + [v_1, v_2] + \dots + [v_k, w] \in C_1(K)$.

On voit qu'alors $\partial(\sigma) = [w] - [v]$ *i.e.* v et w sont homologues.

Si v et w sont des sommets de deux composantes connexes différentes k et k' de K , il ne peuvent pas décrire la même classe d'homologie. En effet, si c'était le cas, on pourrait trouver une chaîne de degré 1 dont le bord est $[w] - [v]$. Ceci veut exactement dire que v et w sont dans le même élément de K , et c'est une contradiction.

Enfin, il est facile de voir que si $\lambda \in \mathbb{K}$, et v est sommet de K , $\lambda[v]$ ne peut jamais être un 0-bord. Ainsi, les éléments de $|K|$ composés seulement d'un sommet sont bien comptabilisés. ■

Exemple : Reprenons la triangulation du tore, où l'on oriente de manière compatible tous les 2-simplexes *i.e.* :

$$K_{\mathcal{T}} = \{[a, b, e]; [e, a, d]; [d, e, b]; [b, d, a]; [e, b, c]; [c, e, d]; [e, d, b]; [d, b, c]; F\}$$

D'après la proposition 10, $H_0(K) = [a] \simeq \mathbb{K}$ car le tore est connexe.

Expliquons maintenant pourquoi $H_1(K_{\mathcal{T}}) \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Les 1-cycles sont toutes les 1-chaînes de $C_1(K_{\mathcal{T}})$ qui partent d'un sommet et y reviennent. D'autre part, $C_2(K_{\mathcal{T}})$ est engendré par les 8 triangles qui composent $K_{\mathcal{T}}$. Ainsi, $B_1(K_{\mathcal{T}}) = \partial(K_{\mathcal{T}})$ est engendré par les bords des 8 triangles de $K_{\mathcal{T}}$.

On rappelle que deux éléments de $H_1(K_{\mathcal{T}})$ ont la même classe d'homologie si leur différence peut s'écrire comme le bord d'une 2-chaîne.

Prenons les triangles $[b, c, d]$ (inférieur gauche) et $[d, a, b]$ (supérieur droit). Il est impossible de trouver une chaîne de triangles dont le bord est exactement le bord de nos deux triangles (il faut voir que si l'on prend une chaîne trop courte, on aura des bords en trop; et si l'on prend une chaîne trop longue, il manquera des bords de nos deux triangles...). Ainsi $H_1(K_{\mathcal{T}})$ est au moins engendré par deux triangles non homologues. En fait, deux suffisent, mais on ne le prouve pas car il faudrait maintenant exhiber toutes les chaînes. On trouve donc que

$$H_1(K_{\mathcal{T}}) \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K}.$$

Maintenant, cherchons $H_2(K_{\mathcal{T}})$. On remarque que si l'on somme tous les triangles orientés du tore et que l'on en prend le bord on a :

$$\partial([a, b, e] + [e, a, d] + [d, e, b] + [b, d, a] + [e, b, c] + [c, e, d] + [e, d, b] + [d, b, c]) = 0$$

En effet, chaque arête apparaît deux fois exactement (avec ses deux orientations). Si une arête apparaît avec un coefficient $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour qu'elle disparaisse, le triangle contenant la même arête dans le sens opposé doit aussi avoir ce même coefficient. De cette manière, les seuls 2-cycles de $K_{\mathcal{T}}$ sont les multiples de la somme de tous les triangles orientés. Donc, si on note z cette somme, alors $Z_2(K_{\mathcal{T}}) = \langle [z] \rangle$. Enfin comme $K_{\mathcal{T}}$ ne contient aucun 3-cycle, alors on conclut d'une part que $H_2(K_{\mathcal{T}}) = \langle [z] \rangle \simeq \mathbb{K}$ et d'autre part que $\forall d > 2, H_d(K_{\mathcal{T}}) = 0$.

Remarque : $H_1(K)$ caractérise, pour une surface orientée (voir [12] pour une justification), le nombre maximal de coupes non déconnectantes (*i.e.* qui ne séparent pas $|K|$ en

deux composantes connexes). Pour le tore on vient de voir que c'est 2 : une coupe transversale pour obtenir un cylindre puis une coupe dans la longueur pour obtenir un rectangle. $H_2(K)$ caractérise le nombre de cavité de $|K|$. Pour le tore, c'est 1 (pour la bouteille de Klein ce serait 0). Avec ce point de vue on peut déterminer rapidement la géométrie d'un objet sachant ses groupes d'homologie et réciproquement.

Exemple : On peut prouver que, comme la sphère \mathbb{S}^2 est connexe, que n'importe quelle coupe la sépare en deux composantes connexes (théorème de Jordan) et qu'elle possède une seule cavité, alors $H_0(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{K}$, $H_1(\mathbb{S}^2) = 0$, $H_2(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{K}$ et que $\forall d > 2, H_d(\mathbb{S}^2) = 0$. On pourrait utiliser la triangulation de la figure 15 pour les calculs.

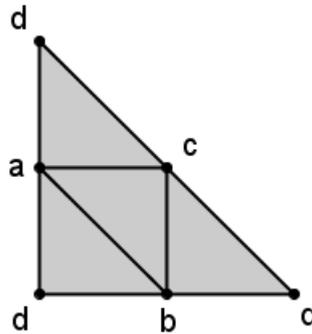


FIGURE 15 – Exemple de triangulation de la sphère \mathbb{S}^2

Remarque : On peut trouver dans [10] les calculs détaillés des groupes d'homologie pour le cercle, le disque, la sphère, le tore et la bouteille de Klein.

On introduit enfin une notion qui sera utile pour les dernières sections de ce dossier.

Définition : Soient un complexe simplicial K de \mathbb{E}^n que l'on plonge naturellement dans \mathbb{E}^{n+1} , $v \in \mathbb{E}^{n+1} \setminus \mathbb{E}^n$ et $\sigma = [v_0, \dots, v_p] \in K$. Le $(p+1)$ -simplexe $[v_0, \dots, v_p, v]$ est appelé la *jointure* de σ à v .

Définition : Un *cône* de K , noté CK est composé des simplexes de K , des jointures à v et de v lui-même.

Remarque : La vérification que CK est un complexe simplicial est assez claire. Les cônes sont donc bien définis.

Proposition 11 : Soit K un cône, i.e. K isomorphe à CL avec L de dimension 1 de moins que K . Alors $H_0(K) \simeq \mathbb{K}$ et $\forall q > 0, H_q(K) = 0$.

Preuve : Appelons v le sommet de CL . On remarque que CL est connexe, donc d'après la proposition 10, $H_0(CL) \simeq \mathbb{K}$.

Soient $q > 0$, et $d_q : C_q(CL) \rightarrow C_{q+1}(CL)$ le morphisme défini par $\forall \sigma = [v_0, \dots, v_q] \in CL$:

$$d_q(\sigma) = \begin{cases} [v, v_0, \dots, v_q] & \text{si } \sigma \in L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $d_q(-\sigma) = -d_q(\sigma)$.

Montrons que $\partial \circ d_q(\sigma) = \sigma - d_{q-1} \circ \partial(\sigma)$. Supposons que $\sigma \in L$. Alors :

$$\partial \circ d_q(\sigma) = \partial([v, v_0, \dots, v_q]) = [v_0, \dots, v_q] + \sum_{i=0}^q (-1)^i [v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] = \sigma - d_{q-1} \circ \partial(\sigma)$$

Supposons que $\sigma = [v, v_0, \dots, v_{q-1}]$. Clairement comme $d_q(\sigma) = 0$, $\partial \circ d_q(\sigma) = 0$.

$$\partial(\sigma) = [v_0, \dots, v_{q-1}] + \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i [v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{q-1}]$$

Et donc $d_{q-1} \circ \partial(\sigma) = [v, v_0, \dots, v_{q-1}]$. D'où l'égalité pour tous les simplexes de CL .

Si $\sigma \in Z_q(CL)$, on a $\partial(\sigma) = 0$. Et donc $\sigma = \partial \circ d_{q-1}(\sigma)$ i.e. $\sigma \in B_q(CL)$.

D'où, $\forall q > 0$, $H_q(CL) = 0$. ■

II - 6 - iii Premier résultat d'invariance

On commence ici par un résultat faible établi sous de fortes hypothèses. Il existe des théorèmes d'invariance plus forts qui seront abordés dans la dernière section de ce dossier.

Définition : Soient K et L deux complexes simpliciaux. On dit que $s : |K| \longrightarrow |L|$ est une *application simpliciale* si elle envoie linéairement des réalisations de p -simplexes de K sur des réalisations de p -simplexes de L .

Plus précisément, soient $\sigma = [v_0, \dots, v_p] \in K$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, \lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$. Alors si $A = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i \in |K|$, on a $s(A) = \sum_{i=0}^p \lambda_i s(v_i)$.

Remarques : Si $A \in |K|$, alors $s(A)$ peut être de dimension inférieure à celle de A car s peut envoyer deux sommets de K sur un seul sommet de L . s est en fait entièrement déterminée par son image sur les sommets de K . C'est pourquoi on notera plutôt $s(\sigma)$ pour dénoter $s(|\sigma|)$.

Définition : Soient K et L deux complexes simpliciaux. Étant donnée $s : |K| \longrightarrow |L|$ une application simpliciale, on définit $s_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$ par $\forall \sigma = [v_0, \dots, v_q] \in K$:

$$s_q(\sigma) = \begin{cases} [s(v_0), \dots, s(v_q)] & \text{si } \forall i, j \in \llbracket 0, q \rrbracket, i \neq j, s(v_i) \neq s(v_j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : On a $s_q(-\sigma) = -s_q(\sigma)$ ce qui fait de s_q un morphisme de $C_q(K)$ dans $C_q(L)$.

On va affirmer dans la suite que s_q induit un morphisme $s_{q*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$. Pour prouver cela, il faudra montrer que s_q envoie les cycles de K sur des cycles de L (de même degré) et les bords de K sur des bords de L (de même degré). On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 12 : $\partial \circ s_q = s_{q-1} \circ \partial : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(L)$, autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C_q(K) & \xrightarrow{s_q} & C_q(L) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C_{q-1}(K) & \xrightarrow{s_{q-1}} & C_{q-1}(L) \end{array}$$

Preuve : Soit $\sigma = [v_0, \dots, v_q] \in K$. On va montrer que $\partial \circ s_q(\sigma) = s_{q-1} \circ \partial(\sigma)$.
L'égalité est claire si les sommets $s(v_0), \dots, s(v_q)$ sont tous distincts.

Supposons maintenant qu'il existe $j < k$ tels que $s(v_j) = s(v_k)$. Par définition on a alors $s_q(\sigma) = 0$, et donc $\partial \circ s_q(\sigma) = 0$.

D'autre part, par linéarité :

$$s_{q-1} \circ \partial(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i s_{q-1}([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q])$$

On constate que si $i \neq j$ et $i \neq k$, alors $s_{q-1}([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q]) = 0$.

Les deux termes restants sont $(-1)^j s_{q-1}([v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q])$ et $(-1)^k s_{q-1}([v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_q])$. Ces deux termes sont non nuls seulement si v_j et v_k sont les seuls sommets de σ tels que $s(v_j) = s(v_k)$. Mais dans ce cas :

$$\begin{aligned} (-1)^j s_{q-1}([v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k, \dots, v_q]) &= (-1)^j [s(v_0), \dots, \widehat{s(v_j)}, \dots, s(v_k), \dots, s(v_q)] \\ &= (-1)^j [s(v_0), \dots, \widehat{s(v_k)}, \dots, s(v_j), \dots, s(v_q)] \\ &= (-1)^j (-1)^{k-j-1} [s(v_0), \dots, s(v_j), \dots, \widehat{s(v_k)}, \dots, s(v_q)] \\ &= (-1)^{k-1} s_{q-1}([v_0, \dots, v_j, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_q]) \end{aligned}$$

La troisième égalité vient de la définition de l'orientation d'un simplexe, associée avec le fait que $\varepsilon(k+1, \dots, j) = k-j-1$.

Ainsi, $(-1)^j s_{q-1}([v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q]) + (-1)^k s_{q-1}([v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_q]) = 0$. ■

Proposition 13 : $s_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$ induit un morphisme $s_{q*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$.

Preuve : Soit $\sigma \in Z_d(K)$. Alors par définition $\partial(\sigma) = 0$. Par le lemme 12,

$$\partial \circ s_q(\sigma) = s_{q-1} \circ \partial(\sigma) = 0$$

Donc $s_q(\sigma) \in Z_q(L)$ et donc $s_q(Z_q(K)) \subset Z_q(L)$.

Soit maintenant $\sigma \in B_q(K)$. Alors $\exists \sigma' \in C_{q+1}(K)$ tel que $\sigma = \partial(\sigma')$.

Mais d'après le lemme 12 :

$$\partial \circ s_q(\sigma') = s_{q-1} \circ \partial(\sigma') = s_{q-1}(\sigma)$$

et donc $\sigma \in B_q(L)$. Ainsi, $s_q(B_q(K)) \subset B_q(L)$. ■

Pour terminer cette section, un point de vocabulaire qui sera utile pour les dernières sections de ce dossier.

Définition : La collection de groupes et de morphismes

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_q(K) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(K) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0(K) \xrightarrow{\partial} 0$$

est appelée *complexe de chaîne* de K , et est notée $C(K)$.

Définition : Si, $\forall q \in \mathbb{N}$, on a un morphisme $\phi_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$ qui vérifie l'égalité $\partial \circ \phi_q = \phi_{q-1} \circ \partial$, on abrège en notant $\phi : C(K) \longrightarrow C(L)$ que l'on appelle *application de chaîne*.

Exemple : La collection d'applications $s_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$ pour $q \in \mathbb{N}$ induit une application de chaîne $s : C(K) \longrightarrow C(L)$.

Proposition 14 : Une application de chaîne $\phi : C(K) \longrightarrow C(L)$ induit des morphismes $\phi_{q*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$ et on note cette collection $\phi_* : H(K) \longrightarrow H(L)$.

Preuve : C'est exactement la même démonstration que celle de la proposition 13, en remplaçant s_q par ϕ_q . ■

Remarque : Il est facile de voir que si $\phi : C(K) \longrightarrow C(L)$ et $\psi : C(L) \longrightarrow C(M)$ sont deux applications de chaîne, alors $\psi \circ \phi : C(K) \longrightarrow C(M)$ aussi et $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$.

II - 7 Subdivision barycentrique

Dans cette section on va accumuler des résultats techniques qui serviront à prouver les théorèmes d'invariance.

II - 7 - i Barycentre

Le but de cette sous-section est de décrire une construction permettant de « couper » les simplexes d'un complexe K pour obtenir un nouveau complexe K^1 avec des simplexes de dimension inférieure, mais qui décrivent le même polyèdre.

Définition : Soient $\sigma = [v_0, \dots, v_p] \in K$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, \lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$. Si $A = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i \in |K|$, on appelle $(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$ les *coordonnées barycentriques* de A , et le *barycentre* de A est le point $\hat{A} = \frac{1}{p+1}(v_0 + \dots + v_p)$.

Détaillons la construction d'un tel complexe K^1 . On commence par ajouter à K l'ensemble des sommets formés par les barycentres de tous les simplexes de K . Ceci inclut tous les sommets d'origine de K , puisque le barycentre d'un 0-simplexe est lui-même. Ce sont donc les 0-simplexes de K^1 .

Ensuite, on dit que les barycentres $\hat{A}_0, \dots, \hat{A}_k$ sont les sommets d'un k -simplexe de K^1 si et seulement si $\exists \tau \in \mathfrak{S}_{k+1}$ telle que $A_{\tau(0)} < A_{\tau(1)} < \dots < A_{\tau(k)}$ (où $M < N$ signifie que M est une face de N). Dans la figure 16, les barycentres \hat{A}, \hat{B} et \hat{C} forment un 2-simplexe de K^1 car $C < B < A$.

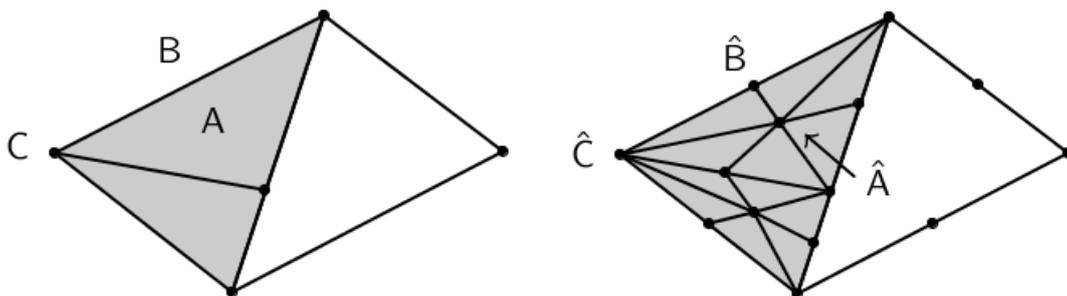


FIGURE 16 – Complexe simplicial et sa première subdivision barycentrique

Proposition 15 : La réalisation de tout simplexe de K^1 est contenue dans celle d'un simplexe de K .

Preuve : Soit $\sigma \in K^1$, et appelons $\hat{A}_0, \dots, \hat{A}_k$ ses sommets. On a que $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, A_i \in K$ et $A_0 < \dots < A_k$. Donc tous les sommets de σ appartiennent à $|A_k|$, d'où $|\sigma| \subset |A_k|$ par convexité. ■

Proposition 16 : La collection de simplexes décrite ci-dessus forme un complexe simplicial, que l'on note K^1 . On a de plus $|K| = |K^1|$.

Définition : K^1 est appelé *première subdivision barycentrique* de K .

Preuve : Il faut vérifier les trois propriétés de la définition d'un complexe simplicial. On va d'abord montrer que chaque élément de K^1 est un simplexe. Pour cela il suffit de remarquer que si $A_{\tau(0)} < A_{\tau(1)} < \dots < A_{\tau(k)}$, alors $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \hat{A}_{\tau(i)}$ n'appartient pas à l'hyperplan formé par $\hat{A}_0, \dots, \hat{A}_{i-1}$.

Le fait que si $\sigma \in K^1$ et si σ' est une face de σ , alors $\sigma' \in K^1$ est clair : supposons que σ est un k -simplexe de K^1 . Si les sommets de σ sont $\hat{A}_0, \dots, \hat{A}_k$, on a alors $A_{\tau(0)} < A_{\tau(1)} < \dots < A_{\tau(k)}$ pour $\tau \in \mathfrak{S}_{k+1}$. Ainsi, prendre une face de σ revient à prendre entre 1 et $k+1$ sommets de σ . Mais pour ces sommets, on a toujours $A_{\tau(0)} < A_{\tau(1)} < \dots < A_{\tau(k)}$. Ce qui fait de la face de σ un élément de K^1 .

Il reste à montrer que l'intersection de deux simplexes de K^1 est une face de ces deux simplexes. On va raisonner par récurrence sur le nombre de simplexes de K .

Le cas où K ne possède qu'un sommet est clair.

Supposons maintenant que la propriété est vraie pour tout complexe possédant moins de m simplexes. Soit K un complexe formé de m simplexes. Soit $A \in K$ une face de dimension maximale d et soit L le complexe formé par K auquel on a retiré A . L possède donc $m-1$ simplexes (car A est de dimension maximale, donc il n'y a pas d'impact sur les autres simplexes de L) et sa réalisation est celle de K dans laquelle on a retiré l'intérieur du simplexe A .

Par hypothèse de récurrence, L^1 est un complexe simplicial. On doit s'intéresser aux simplexes de K^1 qui ne sont pas dans L^1 . Soit σ un tel simplexe (différent de \hat{A}) et appelons $\hat{A}_0, \dots, \hat{A}_{k-1}, \hat{A}$ ses sommets, avec $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$. On a donc $A_0 < \dots < A_{k-1} < A$ (on a volontairement choisi l'ordre des sommets de manière à ce que $\tau = \text{id}$ pour alléger les notations).

Les sommets $\hat{A}_0, \dots, \hat{A}_{k-1}$ forment une face σ' de σ qui appartient à L^1 . On a $\sigma' = \sigma \cap |L^1|$, ce qui implique que si σ intersecte un simplexe de L^1 , leur intersection doit être une face de σ' et donc une face de σ lui-même. Soit ξ un autre simplexe défini exactement de la même manière que σ , et ξ' comme σ' . Comme L^1 est un complexe simplicial, l'intersection de σ' et ξ' est une face de σ' et de ξ' . Ainsi, les sommets de $\sigma' \cap \xi'$ avec \hat{A} forment une face de σ et de ξ , qui est exactement $\sigma \cap \xi$. Enfin si σ' et ξ' ne s'intersectent pas, alors $\sigma \cap \xi = [\hat{A}]$. Ceci achève la récurrence.

Enfin montrons que $|K| = |K^1|$. Chaque simplexe de K^1 est contenu dans un simplexe de K , alors $|K^1| \subseteq |K|$. Réciproquement, soit $x \in |K|$ et soit A l'unique simplexe de K dont l'intérieur contient x . Si $x = \hat{A}$, alors $x \in K^1$. Sinon, on raisonne par récurrence comme au dessus. On relie x à \hat{A} par une ligne droite qui intersecte nécessairement une face de A , disons en un point y . Alors $y \in |L| = |L^1|$ par hypothèse de récurrence (L défini comme dans la première récurrence) et donc $y \in \sigma$, avec $\sigma \in L^1$. Les sommets de σ avec \hat{A} forment un simplexe de K^1

qui contient x . Ainsi, $x \in |K^1|$ et donc $|K| \subseteq |K^1|$. ■

Définition : On définit par récurrence K^m la m -ième subdivision barycentrique de K .

II - 7 - ii Subdivision stellaire

L'objectif maintenant est le montrer que la subdivision barycentrique ne change pas les groupes d'homologie d'un complexe simplicial. Pour cela, on va expliquer comment obtenir la subdivision barycentrique d'un complexe par la répétition d'une opération élémentaire. Dans le paragraphe suivant on montrera que cette opération préserve les groupes d'homologie.

Soit K un complexe simplicial, et $\sigma \in K$ dont le barycentre est noté v . On va découper K de la manière suivante :

- les simplexes de K , dont σ n'est pas une face, restent inchangés,
- si $\sigma < \xi$, appelons L l'ensemble des simplexes de ξ qui n'ont pas pour face σ . On remplace alors ξ par le cône dont la base est L et le sommet est v .

Définition : Ce processus est appelé *subdivision stellaire* de K par σ .

Remarque : Si on effectue successivement la division stellaire de K par chacun de ses simplexes, que l'on prend successivement par dimension décroissante (peu importe l'ordre dans une même dimension), on obtient alors la subdivision barycentrique K^1 . Notons aussi que si on procède à la subdivision stellaire par σ , il suffit de considérer le cas où ξ est le simplexe de plus grande dimension contenant σ . Dans la pratique cela permet de simplifier les subdivisions.

Exemple : Procédons pas à pas à la subdivision d'un 3-simplexe. On donnera à chaque fois σ, ξ et L et on pourra suivre la subdivision sur la figure 17. Définissons :

$$K = \{[a, b, c]; [a, b]; [b, c]; [c, a]; [a]; [b]; [c]\}$$

Étape 1 : on commence par prendre $\sigma = [a, b, c]$ (le simplexe de plus grande dimension). Notons v_0 son barycentre. σ n'est une face que de lui-même : $\xi = \sigma$. Dans ce cas :

$$L = \{[a, b]; [b, c]; [c, a]; [a]; [b]; [c]\}$$

On remplace alors ξ par le cône de base L et de sommet v_0 .

Étape 2 : on commence aléatoirement par prendre comme 2-simplexe $\sigma = [a, b]$ et on appelle v_1 son barycentre. D'après la remarque précédente, on prend $\xi = [a, b, v_0]$. Dans ce cas :

$$L = \{[a, v_0]; [v_0, b]; [a]; [b]; [v_0]\}$$

On remplace alors ξ par le cône de base L et de sommet v_1 . On répète de même pour $[b, c]$ et $[c, a]$.

Étape 3 : le cas où $\sigma = [a]$ (par exemple) est un 0-simplexe ne change pas la figure car le barycentre est a . De même pour $[b]$ et $[c]$.

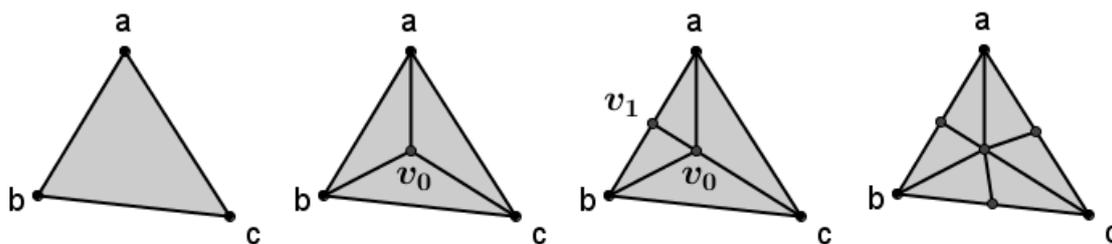


FIGURE 17 – Subdivisions stellaires d'un 2-simplexe

II - 7 - iii Préservation de l'homologie

Proposition 17 : Soit K un complexe simplicial. Supposons que K' est obtenu après une subdivision stellaire de K . Alors les groupes d'homologie de K et K' sont isomorphes.

Pour prouver ce théorème, on doit construire une application de chaîne $r : C(K) \longrightarrow C(K')$ et montrer qu'elle induit des isomorphismes entre les groupes d'homologie. Comme pour l'application s de la section II-6-ii, on doit définir $r(\sigma)$ pour σ un q -simplexe orienté de K , et on doit avoir $r(-\sigma) = -r(\sigma)$.

Définition : Soit K' obtenu par subdivision stellaire du simplexe $A = [v_0, \dots, v_k]$. Soit v le barycentre de A . On définit $r_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(K')$ par :

$$r_q(\sigma) = \begin{cases} \sum_{i=0}^k (-1)^i [v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q] & \text{si } \sigma = [v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q] \\ \sigma & \text{sinon, i.e. si } A \text{ n'est pas une face de } \sigma \end{cases}$$

Exemple :

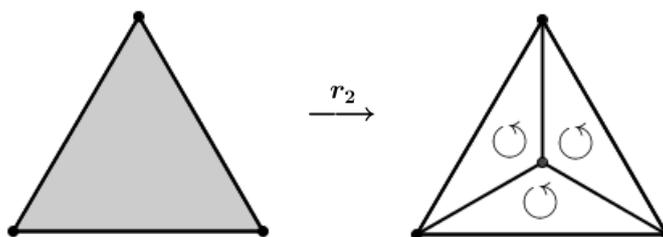


FIGURE 18 – Action de r_2 sur un 2-simplexe

Lemme 18 : r est une application de chaîne, dite *de subdivision*.

Preuve : Il faut montrer que $\partial \circ r_q = r_{q-1} \circ \partial$. Soit σ un q -simplexe de K . Si A n'est pas une face de σ , on a $r_q(\sigma) = \sigma$, et donc $\partial \circ r_q(\sigma) = \partial(\sigma)$. Mais, si A n'est pas une face de σ , A n'est pas non plus une face de $\partial(\sigma)$, donc $r_{q-1} \circ \partial(\sigma) = \partial(\sigma)$.

Reste à montrer l'égalité lorsque A est une face de σ . Calculons :

$$\begin{aligned} \partial(r_q(\sigma)) &= \partial \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i [v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q] \right) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial([v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v, v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q] \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j=i+1}^k (-1)^j [v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q] \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j=k+1}^q (-1)^j [v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q] \right) \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j=k+1}^q (-1)^j [v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q] \right)
\end{aligned}$$

Car $[v, v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q] = -[v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q]$.
Mais d'autre part, $r_{q-1}(\partial(\sigma))$ vaut :

$$\begin{aligned}
&r_{q-1} \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q] \right) \\
&= r_{q-1} \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q] + \sum_{j=k+1}^q (-1)^j [v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q] \right) \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j r_{q-1}([v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q]) \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^q (-1)^j r_{q-1}([v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q])
\end{aligned}$$

D'où $r_{q-1}(\partial(\sigma)) = 0 + \sum_{j=k+1}^q (-1)^j r_{q-1}([v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q])$ car A n'est pas une face de $[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q]$. En appliquant la définition de r_{q-1} , on obtient exactement $\partial(r_q(\sigma))$. On a donc prouvé que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
C_q(K) & \xrightarrow{r_q} & C_q(K') \\
\partial \downarrow & & \downarrow \partial \\
C_{q-1}(K) & \xrightarrow{r_{q-1}} & C_{q-1}(K')
\end{array}$$

■

Preuve : (de la proposition 17)

D'après le lemme 18, $r : C(K) \rightarrow C(K')$ est une application de chaîne. Grâce à la proposition 14, on en déduit que r_q induit un morphisme $r_{q*} : H_q(K) \rightarrow H_q(K')$. Reste à prouver que r_{q*} est un isomorphisme.

Soient v_0, \dots, v_k les sommets de A et v son barycentre. Soit $\theta : K' \rightarrow K$ l'application simpliciale qui envoie v sur v_0 et qui fixe tous les autres sommets, i.e. $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \theta(v_i) = v_i$. Comme θ est une application simpliciale, d'après la proposition 13, θ induit une application de chaîne $\theta_* : C(K') \rightarrow C(K)$. On va donc chercher à montrer que θ_* est l'inverse de r_{q*} .

On voit déjà que $\forall q \geq 0, r_q \circ \theta_q = \text{id}$ sur $C_q(K)$ et donc que $r_{q*} \circ \theta_{q*} = \text{id}$ sur $H_q(K)$.

Montrons que l'on a aussi $\theta_{q*} \circ r_{q*} = \text{id}$ sur $H_q(K')$. Soit $\sigma \in Z_q(K')$. Si L est l'ensemble des simplexes de K' dont v est un sommet (et leurs faces), alors L est un sous-complexe de K' et même un cône de sommet v . On remarque que $\sigma - r_q \circ \theta_q(\sigma) \in Z_q(L)$ car $\theta_q = \text{id}$ en dehors de L et puisque $\sigma \in Z_q(K')$, on a :

$$\partial(\sigma - r_q \circ \theta_q(\sigma)) = \partial(\sigma) - r_q \circ \theta_q(\partial(\sigma)) = 0$$

On utilise maintenant la proposition 11 qui donne les groupes d'homologie de L :

$$H_0(L) \simeq \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \forall q > 0, H_q(L) = 0$$

Donc $\forall q > 0$, on a que $\sigma - r_q \circ \theta_q(\sigma)$ est aussi un $(q+1)$ -bord de L et donc de K' . Autrement dit, σ et $r_q \circ \theta_q(\sigma)$ sont homologues dans $H_q(K')$.

Ceci prouve que $\theta_{q*} \circ r_{q*} = \text{id}$ sur $H_q(K')$. Donc r_{q*} est un isomorphisme.

Traisons le cas $q = 0$. D'après la proposition 15, toute réalisation de simplexe de K^1 est incluse dans une réalisation d'un simplexe de K . Il en est de même pour celles de K' . Par la proposition 10, on a bien que $H_0(K) \simeq H_0(K')$. ■

On en déduit directement par récurrence le corollaire suivant :

Corollaire 19 : La subdivision barycentrique préserve les groupes d'homologie d'un complexe simplicial.

Preuve : La subdivision barycentrique est obtenue par subdivisions stellaires successives. ■

Remarque : On a construit une application de chaîne de subdivision $r : C(K) \longrightarrow C(K')$. Si K^m est la m -ème subdivision barycentrique de K , on sait qu'elle est obtenue par un nombre fini de subdivisions stellaires de type r . On dira aussi que $r : C(K) \longrightarrow C(K^m)$ (la composition de ces applications de chaînes) est une application de chaîne de subdivision.

Réciproquement, on a une application simpliciale θ qui correspond à chaque subdivision stellaire (qui n'est pas unique, mais on la choisit à chaque étape).

On notera aussi $\theta : |K^m| \longrightarrow |K|$ la composition de ces applications, que l'on appellera **une application simpliciale standard**. L'application θ peut être pensée comme une application de « fusion ». L'application θ_* est, elle, unique.

II - 8 Approximation simpliciale

II - 8 - i Théorème d'approximation simpliciale

Avant de pouvoir montrer le résultat le plus global d'invariance, on doit montrer que l'on peut approximer n'importe quelle application $f : |K| \longrightarrow |L|$ par une application simpliciale dont on sait qu'elle préserve les groupes d'homologie.

Définition : Soient K un complexe simplicial et $x \in |K|$. On appelle *porteur* de x l'unique simplexe de K dont x appartient à l'intérieur¹⁴.

Définition : Une application simpliciale $s : |K| \longrightarrow |L|$ est une *approximation simpliciale* de $f : |K| \longrightarrow |L|$ si $\forall x \in |K|$, $s(x)$ appartient au porteur de $f(x)$.

14. On parle de l'intérieur pris par rapport à la topologie induite sur le simplexe et non pas la topologie de E .

Proposition 20 : Si s est une approximation simpliciale de f , alors s et f sont homotopes.

Preuve : Supposons que $|L| \subset \mathbb{E}^n$. Soit $F : |K| \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{E}^n$ définie par $\forall (x, t) \in |K| \times [0, 1]$, $F(x, t) = (1 - t)s(x) + tf(x)$. Par définition, $f(x)$ et $s(x)$ appartiennent au porteur de $f(x)$, et comme c 'est un simplexe, il est convexe, d'où $F(x, t)$ appartient au porteur de $f(x)$. Ainsi, F est à valeurs dans L , et donc c 'est une homotopie de s à f car elle est continue. ■

Remarque : Il n'existe pas toujours d'approximation simpliciale.

En effet, si $|K| = |L| = [0, 1]$, K ayant des sommets en $0, \frac{1}{3}$ et 1 , et L ayant des sommets en $0, \frac{2}{3}$ et 1 . Prenons $f : x \longmapsto x^2$.

Supposons qu'il existe une approximation simpliciale $s : |K| \longrightarrow |L|$ de f . Alors f et s doivent correspondre sur les sommets de K . Ainsi, $s(0) = 0$ et $s(1) = 1$. s étant une application simpliciale, on a $s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, s envoie $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ sur $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ et $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ sur $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. On a une contradiction car le porteur de $f\left(\frac{1}{3}\right)$ est $\left[0, \frac{2}{3}\right]$, mais l'intérieur de cet intervalle ne contient pas $s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Définition : Soit K un complexe simplicial et v un sommet de K . On appelle *étoile ouverte* de v dans K l'union de l'intérieur¹⁵ des complexes de K qui possèdent v comme sommet. C'est un sous-ensemble ouvert de $|K|$ que l'on note $\text{star}(v, K)$.

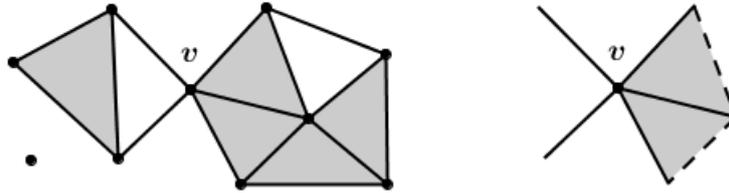


FIGURE 19 – Sommet v d'un complexe simplicial et son étoile ouverte

Lemme 21 : Des sommets v_0, \dots, v_k d'un complexe simplicial K sont les sommets d'un simplexe de K si et seulement si l'intersection de toute leur étoile ouverte est non vide.

Preuve : Si des sommets v_0, \dots, v_k d'un complexe simplicial K sont les sommets d'un simplexe $\sigma \in K$, alors l'intérieur de σ appartient à $\text{star}(v_i, K)$, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Donc $\bigcap_{i=0}^k \text{star}(v_i, K) \neq \emptyset$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{i=0}^k \text{star}(v_i, K)$ et σ le porteur de x . Par définition, chaque v_i est un sommet de σ et donc v_0, \dots, v_k sont les sommets de $\sigma \in K$. ■

Théorème 22 : (Théorème de l'approximation simpliciale)

Soit $f : |K| \longrightarrow |L|$. Alors $\exists m > 0$ et une approximation simpliciale $s : |K^m| \longrightarrow |L|$ de f .

Preuve : On va d'abord traiter le cas où il n'y a pas besoin de passer par une subdivision barycentrique. Supposons que pour tout sommet u de K on puisse trouver un sommet v de L tel que $f(\text{star}(u, K)) \subset \text{star}(v, L)$.

15. On parle de l'intérieur pris par rapport à la topologie induite sur le simplexe et non pas la topologie de \mathbb{E} .

On définit alors s cette fonction, qui envoie u sur v . D'après le lemme 21 et l'inclusion ci-dessus, si u_0, \dots, u_k sont les sommets d'un simplexe de K alors $s(u_0), \dots, s(u_k)$ sont les sommets d'un simplexe de L . On étend ensuite linéairement s aux simplexes de K pour obtenir une application simpliciale de $|K|$ dans $|L|$.

On affirme que $s : |K| \longrightarrow |L|$ est une approximation simpliciale de f . En effet, soient $x \in |K|$ et v_0, \dots, v_k les sommets de son porteur. Alors, $x \in \bigcap_{i=0}^k \text{star}(u_i, K)$ et par l'inclusion :

$$f(x) \in \bigcap_{i=0}^k \text{star}(s(u_i), L)$$

Ceci signifie que le porteur de $f(x)$ dans L possède au moins $s(u_0), \dots, s(u_k)$ comme sommets et contient donc $s(x)$.

Pour prouver le cas général, on doit prouver que l'inclusion reste vraie quitte à remplacer K par une subdivision barycentrique convenable K^m . On remarque que toutes les étoiles ouvertes des sommets de L forment un recouvrement ouvert de $|L|$. Comme $f : |K| \longrightarrow |L|$ est continue, l'image réciproque des ouverts de ce recouvrement forme un recouvrement ouvert de $|K|$.

Soit δ le nombre de Lebesgue¹⁶ de ce recouvrement ($|K|$ est compacte). Soit $m > 0$ assez grand pour que $\text{diam}(K^m) < \frac{\delta}{2}$.

Si u est un sommet de K^m , alors $\text{diam}(\text{star}(u, K^m)) < \delta$ donc $\text{star}(u, K^m) \subset f^{-1}(\text{star}(v, L))$, avec v un sommet de L . C'est exactement ce qu'il fallait pour appliquer la première partie de la preuve. ■

II - 8 - ii Invariance

On a montré que les applications simpliciales et la subdivision barycentrique préservent les groupes d'homologie. Pour terminer ce dossier, on va montrer qu'en fait, n'importe quelle application continue entre complexes simpliciaux préserve les groupes d'homologie. On va d'abord démontrer trois lemmes pour ensuite prouver trois théorèmes importants.

Définition : $s, t : |K| \longrightarrow |L|$ sont des *applications simpliciales proches* si $\forall \sigma \in K, \exists \sigma' \in L$ tel que $s(|\sigma|)$ et $t(|\sigma|)$ sont les réalisations de faces de $|\sigma'|$.

Lemme 23 : Deux approximations simpliciales $s, t : |K^m| \longrightarrow |L|$ de $f : |K^m| \longrightarrow |L|$ sont des applications simpliciales proches.

Preuve : Soit $\sigma \in K^m$. Par définition, $\forall x \in |\sigma|$, $s(x)$ et $t(x)$ appartiennent au porteur σ' de $f(x)$ car s et t sont des approximations simpliciales de f . Mais comme s et t sont des applications simpliciales, $\exists \tau_1, \tau_2 \in L$ tels que $s(|\sigma|) = |\tau_1|$ et $t(|\sigma|) = |\tau_2|$. On a donc que $\tau_1 \in \sigma'$ et $\tau_2 \in \sigma'$ i.e. $s(|\sigma|)$ et $t(|\sigma|)$ sont des faces de σ' et donc s et t sont proches. ■

16. **Lemme de Lebesgue :** Soit A une partie compacte d'un espace métrique E , et soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille de parties ouvertes de E telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Alors $\exists \delta > 0$, appelé *nombre de Lebesgue* pour le recouvrement donné, tel que $\forall x \in A, \exists i \in I, \mathcal{B}(x, \delta) \subset U_i$.

Définition : Soient $s, t : |K| \longrightarrow |L|$ des applications simpliciales proches et $\sigma \in K$. On appelle *supporteur* de σ le plus petit simplexe de L ayant $s(\sigma)$ et $t(\sigma)$ comme faces.

Lemme 24 : Si $s, t : |K| \longrightarrow |L|$ sont des applications simpliciales proches, alors $\forall q \in \mathbb{N}$, $s_{q*} = t_{q*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$.

Preuve : Supposons que $s, t : |K| \longrightarrow |L|$ sont deux applications simpliciales et que $\forall q \in \mathbb{N}$ on a un morphisme $d_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q+1}(L)$ tel que $d_{q-1} \circ \partial + \partial \circ d_q = t - s : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$. Alors $s_{q*} = t_{q*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$. En effet, soit $\sigma \in Z_q(K)$. Par définition :

$$t_q(\sigma) - s_q(\sigma) = d_{q-1}(\partial(\sigma)) + \partial(d_q(\sigma)) = 0 + \partial(d_q(\sigma)) \in B_q(L)$$

Donc $[t_q(\sigma)] = [s_q(\sigma)]$ d'où le résultat.

On va maintenant construire par récurrence les morphismes $d_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$ vérifiant :

- 1) $d_{q-1} \circ \partial + \partial \circ d_q = t - s : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$,
- 2) $d_i(\sigma)$ est une chaîne dans le supporteur σ .

Initialisation : si $\sigma = [v] \in K$, on définit :

$$d_0(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } t(\sigma) = s(\sigma) \\ [s(v), t(v)] & \text{sinon} \end{cases}$$

d_0 ainsi défini vérifie 1) car si $s(v) = t(v)$, $\partial \circ d_0(v) = \partial(0) = 0 = t(v) - s(v)$, et sinon on a $\partial \circ d_0(v) = \partial([s(v), t(v)]) = t(v) - s(v)$.

Par linéarité de d_0 et de ∂ , $\forall \sigma \in C_0(K)$, $\partial \circ d_0(\sigma) = t(\sigma) - s(\sigma) \in C_0(L)$.

d_0 satisfait 2) car $s(\sigma)$ et $t(\sigma)$ sont des simplexes qui sont des faces du supporteur de σ (qui existe car s et t sont des applications simpliciales proches), et donc $s(\sigma) - t(\sigma)$ est aussi dans le supporteur de σ .

Hérédité : supposons que l'on ait construit d_0, \dots, d_{q-1} vérifiant 1) et 2). Soit σ un q -simplexe de K . Calculons :

$$\begin{aligned} \partial(t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1} \circ \partial(\sigma)) &= \partial(t(\sigma)) - \partial(s(\sigma)) - \partial(d_{q-1} \circ \partial(\sigma)) \\ &= \partial(t(\sigma)) - \partial(s(\sigma)) + d_{q-2}(\partial \circ \partial(\sigma)) + s(\partial(\sigma)) - t(\partial(\sigma)) \\ &= \partial(t(\sigma)) - \partial(s(\sigma)) + s(\partial(\sigma)) - t(\partial(\sigma)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\partial(s(\sigma)) = s(\partial(\sigma))$ puisque s est une application simpliciale et de même pour t .

Ainsi, comme s et t sont proches, $\exists c_\sigma \in C_{q+1}(L)$ telle que $\partial(c_\sigma) = t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1} \circ \partial(\sigma)$.

Posons donc $d_q(\sigma) = c_\sigma$. Par construction d_q vérifie 2). De plus, $d_q(\sigma)$ appartient au supporteur de σ car $t(\sigma)$, $s(\sigma)$ et $d_q(\partial(\sigma))$ lui appartiennent et $d_q(\sigma) \in C_{q+1}(L)$.

Par principe de récurrence, on a construit, $\forall q \in \mathbb{N}$, $d_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q+1}(L)$ vérifiant 1) et 2).

On conclut directement avec le début de la preuve. ■

Lemme 25 : Si $f, g : |K| \longrightarrow |L|$ sont deux applications homotopes, il existe une subdivision barycentrique K^m et $s_0, \dots, s_n : |K^m| \longrightarrow |L|$ telles que s_0 est une approximation simpliciale de f , s_n une approximation simpliciale de g et $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, s_i et s_{i+1} sont des applications simpliciales proches.

Preuve : Soient $f, g : |K| \longrightarrow |L|$ deux applications et δ le nombre de Lebesgue du recouvrement de $|L|$ par ses étoiles ouvertes. On suppose de plus que $d(f, g) < \frac{\delta}{3}$, i.e. $\forall x \in |K|$, $d(f(x), g(x)) < \frac{\delta}{3}$.

Montrons d'abord que $R := \{f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L)), v \text{ sommet de } L\}$ est un recouvrement ouvert de $|K|$. On remarque déjà que les éléments de R sont des ouverts. Reste à montrer que $\forall x \in |K|, \exists v \text{ sommet de } L, x \in f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L))$.

Soit $x \in |K|$. On a $f(x) \in |L|$, $\{f(x)\}$ est compact dans $|L|$ et $\{f(x)\} \subset \bigcup_{v \in L} \text{star}(v, L)$ qui est un recouvrement ouvert de $|L|$. D'après le lemme de Lebesgue, il existe un sommet v de L tel que $\mathcal{B}(f(x), \delta) \subset \text{star}(v, L)$. Mais comme $d(f(x), g(x)) < \frac{\delta}{3}$, alors $g(x) \in \mathcal{B}(f(x), \delta)$.

Enfinement, $x \in f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L))$.

Montrons maintenant qu'il existe $m > 0$ et une approximation simpliciale $s : |K^m| \longrightarrow |L|$ de $f, g : |K^m| \longrightarrow |L|$ (les mêmes qu'au-dessus). En effet, on sait qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout sommet v de L , $\text{diam}_{K^m}(\text{star}(v, L)) < \frac{\delta}{3}$, ainsi $\forall x \in f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L))$

(qui est bien un recouvrement de $|K|$ d'après ce qui précède), $d(f(x), g(x)) < \frac{\delta}{3}$.

Définissons $s : |K^m| \longrightarrow |L|$ telle que $\forall x \in |K^m|, s(x) = v$ si $x \in f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L))$. s est bien une application simpliciale qui approxime f et g par construction.

Soient maintenant $f, g : |K| \longrightarrow |L|$ des applications homotopes et soit $F : |K| \times [0, 1] \longrightarrow |L|$ une homotopie.

Étant donné $\delta > 0$ et $x \in |K|$, si $n_x = \left\lceil \frac{3l_x}{\delta} \right\rceil + 1$ avec $l_x = \int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) \right\| dt$ la longueur du chemin $t \longmapsto F(x, t)$ entre $t = 0$ et $t = 1$, alors $\forall r \in \llbracket 0, n_x - 1 \rrbracket, d\left(F\left(x, \frac{r}{n_x}\right), F\left(x, \frac{r+1}{n_x}\right)\right) < \frac{\delta}{3}$.

Posons $n = \max\{n_x, x \in |K|\}$. Alors $\forall r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, d\left(F\left(\cdot, \frac{r}{n}\right), F\left(\cdot, \frac{r+1}{n}\right)\right) < \frac{\delta}{3}$.

On est exactement dans le cas du début de la preuve. On affirme donc que $\forall r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, il existe $m_r > 0$ et $s_r : |K^{m_r}| \longrightarrow |L|$ qui approxime $F\left(\cdot, \frac{r}{n}\right)$ et $F\left(\cdot, \frac{r+1}{n}\right)$ en tant qu'applications de $|K^{m_r}|$ dans $|L|$.

Posons $m = \max\{m_r, r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket\}$. Alors chaque $s_r : |K^m| \longrightarrow |L|$ reste une approximation simpliciale de $F\left(\cdot, \frac{r}{n}\right), F\left(\cdot, \frac{r+1}{n}\right) : |K^m| \longrightarrow |L|$.

En particulier s_0 approxime f et s_{n-1} approxime g .

Reste à voir que $\forall i \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket, s_i$ et s_{i+1} sont des applications proches. C'est exactement le lemme 23. ■

Grâce à ces trois lemmes, on peut maintenant prouver nos théorèmes.

Théorème 26 : Soit $f : |K| \longrightarrow |L|$ une fonction continue, $s : |K^m| \longrightarrow |L|$ une approximation simpliciale de f et $r : C(K) \longrightarrow C(K^m)$ l'application de chaîne de subdivision. Alors $s_* \circ r_*$ ne dépend pas de f . On note $f_* = s_* \circ r_* : H(K) \longrightarrow H(L)$.

Preuve : Soit $f : |K| \longrightarrow |L|$. D'après le théorème d'approximation simpliciale, il existe $m > 0$ et $s : |K^m| \longrightarrow |L|$. On prend $r : C(K) \longrightarrow C(K^m)$ l'application de chaîne de subdivision. On aimerait définir $f_* : H(K) \longrightarrow H(L)$ par $f_* = s_* \circ r_*$. Mais cette définition dépend du choix de l'approximation simpliciale... Montrons donc que ce choix ne change en fait pas les groupes d'homologie.

Supposons que $s : |K^m| \longrightarrow |L|$ et $t : |K^n| \longrightarrow |L|$, avec $n \geq m$, sont deux approximations simpliciales de f . Appelons $r_1 : C(K) \longrightarrow C(K^m)$ et $r_2 : C(K^m) \longrightarrow C(K^n)$ les deux applications de chaînes associées et soit $\theta : |K^n| \longrightarrow |K^m|$ une application de chaîne standard. Si on veut montrer que l'on peut utiliser soit s , soit t pour définir f_* , on doit vérifier que :

$$s_* \circ r_{1*} = t_* \circ r_{2*} \circ r_{1*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$$

Remarquons que $s \circ \theta : |K^n| \longrightarrow |L|$ est une approximation simpliciale de $f : |K^n| \longrightarrow |L|$. En effet, comme s et θ sont des applications simpliciales, $s \circ \theta$ aussi. Soit $x \in |K^n|$. $s \circ \theta(x)$ appartient au porteur de $f(\theta(x))$ car s est une approximation de $f : |K^m| \longrightarrow |L|$. Mais ponctuellement, θ n'est rien d'autre qu'une inclusion, i.e. $\theta(x) = x$. On a donc que $s \circ \theta(x)$ appartient au porteur de $f(x)$.

Ainsi, $s \circ \theta$ et t sont des approximations simpliciales de $f : |K^n| \longrightarrow |L|$. D'après le lemme 23, $s \circ \theta$ et t sont des applications simpliciales proches, et d'après le lemme 24 on a que $(s \circ \theta)_* = s_* \circ \theta_* = t_* : H(K^n) \longrightarrow H(L)$.

Mais on sait aussi que θ_* et r_{2*} sont inverses l'une de l'autre, on obtient l'égalité désirée. ■

Théorème 27 : Si f est l'application identité de $|K|$, alors $\forall q \in \mathbb{N}$, $f_{q*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(K)$ est l'identité, et si $|K| \xrightarrow{f} |L| \xrightarrow{g} |M|$, alors $\forall q \in \mathbb{N}$, $(f_g \circ g_g)_* = f_{g*} \circ g_{g*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(M)$.

Preuve : La première partie est vraie par construction.

Soient $|K| \xrightarrow{f} |L| \xrightarrow{g} |M|$ deux applications. D'après le théorème d'approximation simpliciale, il existe $m, n > 0$, $t : |L^n| \longrightarrow |M|$ qui approxime $g : |L^n| \longrightarrow |M|$ et $s : |K^m| \longrightarrow |L^n|$ qui approxime $f : |K^m| \longrightarrow |L^n|$. Appelons $r_K : C(K) \longrightarrow C(K^m)$ et $r_L : C(L) \longrightarrow C(L^n)$ les applications de chaîne de subdivision. Enfin, soit $\theta : |L^n| \longrightarrow |L|$ une application de chaîne standard. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H(K^m) & \xrightarrow{s_*} & H(L^n) & & \\ r_{K*} \uparrow & & \theta_* \left(\begin{array}{c} \uparrow r_{L*} \\ \downarrow \end{array} \right) & \searrow t_* & \\ H(K) & \xrightarrow{f_*} & H(L) & \xrightarrow{g_*} & H(M) \end{array}$$

On remarque que $\theta \circ s$ est une approximation simpliciale de $f : |K^m| \longrightarrow |L|$ (on a déjà avancé cet argument), et que $t \circ s$ est une approximation simpliciale de $f \circ g : |K^m| \longrightarrow |M|$.

Ainsi :

$$g_* \circ f_* = t_* \circ r_{L*} \circ \theta_* \circ s_* \circ r_{K*} = t_* \circ s_* \circ r_{K*} = (t \circ s)_* \circ r_{K*} = (g \circ f)_*$$

Théorème 28 : Soient $f, g : |K| \longrightarrow |L|$ deux fonctions homotopes. Alors on a $\forall q \in \mathbb{N}$, $f_{q*} = g_{q*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$.

Preuve : C'est une conséquence directe des lemmes 23 et 24 :

$$f_* = s_1 \circ r_* = s_2 \circ r_* = \dots = s_n \circ r_* = g_*$$

Énonçons et prouvons à présent le théorème le plus important du dossier.

Théorème 29 : Si $f : |K| \longrightarrow |L|$ est un homéomorphisme, *i.e.* $|K|$ et $|L|$ sont homotopiquement équivalents, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $H_q(K)$ et $H_q(L)$ sont isomorphes.

Preuve : Pour rappel, dire que $|K|$ et $|L|$ sont homotopiquement équivalents signifie qu'il existe $g : |K| \longrightarrow |L|$ et $h : |L| \longrightarrow |K|$ continues telles que $h \circ g$ est homotope à $\text{id}_{|K|}$ et $g \circ h$ est homotope à $\text{id}_{|L|}$.

On utilise alors le théorème 28 pour dire que $(h \circ g)_* = \text{id}_{|K|_*} : H(K) \longrightarrow H(K)$ et qu'aussi $(g \circ h)_* = \text{id}_{|L|_*} : H(L) \longrightarrow H(L)$.

Mais d'après le théorème 27, $(h \circ g)_* = h_* \circ g_*$ et $(g \circ h)_* = g_* \circ h_*$, ce qui fait de g_q un isomorphisme entre $H_q(K)$ et $H_q(L)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. ■

Remarque : Ce théorème est très fort. Il dit que les groupes d'homologie d'une triangulation sont des invariants topologiques de l'espace sous-jacent.

II - 9 Caractéristique d'Euler-Poincaré

Revenons au but premier du dossier : la généralisation de la formule d'Euler-Descartes étudiée dans la première partie.

II - 9 - i Nombres de Betti

On rappelle que K est fini. Alors chaque $H_d(K)$ est un groupe abélien de type fini avec une partie libre (*i.e.* la somme directe finie de copies de \mathbb{K}).

Définition : Soit K un complexe simplicial fini dont les groupes d'homologie $H_d(K)$ sont de type fini pour tout d . On appelle *d-ième nombre de Betti*¹⁷ de K le rang de $H_d(K)$, et on le note $b_d(K)$.

Exemple : On a montré précédemment que pour le tore, $H_0(K_{\mathcal{T}}) \simeq \mathbb{K}$ *i.e.* $b_0(K_{\mathcal{T}}) = 1$, que $H_1(K_{\mathcal{T}}) \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *i.e.* $b_1(K_{\mathcal{T}}) = 2$, que $H_2(K_{\mathcal{T}}) \simeq \mathbb{K}$ *i.e.* $b_2(K_{\mathcal{T}}) = 1$ et que $\forall d > 2, H_d(K_{\mathcal{T}}) = 0$, *i.e.* $b_d(K_{\mathcal{T}}) = 0$.

II - 9 - ii Énoncé de la formule

On a montré que si deux complexes simpliciaux $|K|$ et $|L|$ sont homéomorphes, alors $H_q(K) \simeq H_q(L)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\forall q \in \mathbb{N}, b_d(K) = b_d(L)$ *i.e.* les nombres de Betti sont des invariants topologiques.

Théorème 30 : Soit K un complexe fini de dimension d . On note $c_i(K)$ le rang du complexe de chaînes $C_i(K)$, *i.e.* le nombre de i -simplexes dans K . On a alors :

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i c_i(K) = \sum_{i=0}^d (-1)^i b_i(K)$$

17. Nombres dus au mathématicien du XIX^e siècle Enrico Betti, dont les rencontres à Pise avec Riemann, dans les années 1860, l'incitent à orienter ses recherches vers la géométrie différentielle et, implicitement, vers la topologie et la théorie de l'homologie.

Définition : La caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe K est $\chi(K) = \sum_{i=0}^d (-1)^i b_i(K)$.

Remarque : C est un invariant topologique.

Preuve : On abrège par C_i, Z_i, B_i et H_i les \mathbb{K} -modules $C_i(K), Z_i(K), B_i(K)$ et $H_i(K)$. On a alors des suites exactes de \mathbb{K} -modules (de type fini) :

$$0 \rightarrow Z_i \rightarrow C_i \xrightarrow{\partial} B_{i-1} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow B_i \rightarrow Z_i \rightarrow H_i \rightarrow 0$$

D'après le théorème du rang, on a :

$$\text{rang } C_i = \text{rang } Z_i + \text{rang } B_{i-1} \quad \text{et} \quad \text{rang } Z_i = \text{rang } B_i + \text{rang } H_i$$

On en déduit :

$$\text{rang } C_i = \text{rang } H_i + \text{rang } B_i + \text{rang } B_{i-1}$$

Et donc par télescopage, et puisque $B_{-1}(K) = B_d(K) = 0$:

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \text{rang } C_i = \sum_{i=0}^d (-1)^i \text{rang } H_i$$

■

II - 9 - iii Applications

La théorème d'Euler-Poincaré est une généralisation très large de la formule d'Euler-Descartes.

Théorème 31 : (Formule d'Euler-Descartes)

Pour un polyèdre convexe, la quantité $s - a + f$, où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces, est toujours égale à 2.

Preuve : On rappelle que $H_0(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{K}$, $H_1(\mathbb{S}^2) = 0$, $H_2(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{K}$ et que $\forall i > 2, H_i(\mathbb{S}^2) = 0$ ce qui se réécrit $b_0(\mathbb{S}^2) = b_2(\mathbb{S}^2) = 1$, $b_1(\mathbb{S}^2) = 0$ et $\forall i > 2, b_i(\mathbb{S}^2) = 0$.

De plus, $c_0(\mathbb{S}^2) = s$, $c_1(\mathbb{S}^2) = a$, $c_2(\mathbb{S}^2) = f$ et $\forall i > 2, c_i(\mathbb{S}^2) = 0$.

La formule d'Euler-Poincaré donne exactement $s - a + f = 2$.

■

Exemple : Considérons un graphe E (complexe simplicial de dimension 1) connexe avec s sommets et a arêtes. Sa caractéristique d'Euler-Poincaré est $\chi(E) = s - a = b_0(E) - b_1(E)$. Mais on a démontré que $H_0(E)$ est de rang le cardinal de E , ici c'est 1 car le graphe E est connexe. On en déduit que $b_1(E) = 1 - s + a$.

Proposition 32 : (Triangulations minimales d'une surface compacte)

Soit Σ une surface compacte (sans bord) que l'on suppose triangulée¹⁸. On note s, a et f le nombre de sommets, d'arêtes et de faces respectivement de la triangulation.

Alors :

$$s \geq \frac{1}{2} \left(7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Sigma)} \right)$$

18. On peut toujours trianguler une surface compacte, une démonstration est donnée dans [6].

Preuve : La caractéristique d'Euler-Poincaré est $\chi(\Sigma) = s - a + f$. Mais comme Σ est compact, alors une arête appartient exactement à 2 faces et chaque face contient exactement 3 arêtes, d'où $2a = 3f$. Ainsi, $s - \chi(\Sigma) = \frac{a}{3}$.

Par ailleurs, dans une triangulation, deux sommets distincts déterminent au plus une arête, donc $a \leq \frac{s(s-1)}{2}$.

Ainsi, $s - \chi(\Sigma) \leq \frac{s(s-1)}{6}$ i.e. $7s - 6\chi(\Sigma) \leq s^2$ et donc $\left(s - \frac{7}{2}\right)^2 \geq \frac{49}{4} - 6\chi(\Sigma)$.

Enfin, comme $s \geq 0$ et $\chi(\Sigma) \leq 2$, on en déduit :

$$s \geq \frac{1}{2} \left(7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Sigma)} \right)$$

■

Exemples : $s \geq 4$ pour la sphère \mathbb{S}^2 et $s \geq 7$ pour le tore.



Références

- [1] Pierre Audibert, *Géométrie sphérique : plus courts chemins, théorème de Girard, relations trigonométriques, isométries de la sphère*
<http://www.pierreaudibert.fr/tra/GeometrieSphere.pdf>
- [2] Éric Charpentier, *Géométries euclidienne et non euclidienne*
<https://culturemath.ens.fr/sites/default/files/CM-IREM-BORDEAUX/Geometries-euclidienne-et-non-euclidiennes.html>
- [3] M. Barbet, *Le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface d'une sphère, est le plus petit des arcs du grand cercle qui passe par ces points*
http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__415_1
- [4] De Marchin et Bosteels, *Trigonométrie sphérique*
Wesmael-Charlier, 1957, p. 2
- [5] Pierre-Yves Créach, *Trigonométrie sphérique*
<http://pycreach.free.fr/archives/Trigonometrie%20spherique.pdf>
- [6] Christian Nguyen, *Triangulation*
http://nguyen.univ-tln.fr/share/GeomAlgo/trans_triang.pdf
- [7] Francis Lazarus, *Homologie en dimension supérieure*
<http://www.gipsa-lab.fr/~francis.lazarus/Enseignement/homologie-nD.pdf>
- [8] Michael Hartley Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*
Journal of Differential Geometry, vol. 17, 1982, p. 357-453
- [9] M. A. Armstrong, *Basic Topology*
Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1983
- [10] P. Durand, *Algèbre et analyse tensorielle deuxième partie : L'homologie simpliciale*
<http://maths.cnam.fr/IMG/pdf/tenseur2cr3.pdf>
- [11] Allen Hatcher, *Algebraic topology*
<https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>
- [12] Analysis Situs, *Homologie des surfaces compactes orientables*
<http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Homologie-des-surfaces-compactes-orientables.html>