Les Formes modulaires

BERAUD Jordan

encadré par GUÉRÉ Jérémy

Table des matières

1 Notation

On va introduire les notations qui seront utilisées par la suite.

Pour $z \in \mathbb{C}$, *on note* $\Re(z)$, *sa partie réelle et* $\Im(z)$, *sa partie imaginaire.*

Le demi-plan de Poincaré sera noté $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$.

$GL_2^+(\mathbb{R}) = \{M \in GL_2(\mathbb{R}),\ det(M) > 0\}$.

$SO_2(\mathbb{R}) = \{M \in GL_2(\mathbb{R}),\ det(M) = 1\}$.

ρ *désignera le nombre complexe* $e^{i\pi/3}$.

On notera $\mathcal{F}(\mathbb{H}, \mathbb{C})$ *l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{H}$ *dans* $\mathbb{C}$.

$\zeta(k)$ *designera la fonction zéta évaluée en* k.

$\mathbb{C}[[q]]$ désignera les séries formelles en q à coefficients complexes.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ désignera l'espace de Schwartz.

2 Introduction

Les formes modulaires sont des fonctions holomorphes sur le demi-plan de Poincaré qui se transforment de manière particulière sous l'action du groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$. Elles interviennent de façon plus ou moins naturelle dans plusieurs domaines assez différents des mathématiques : théorie des fonctions elliptiques, théorie des formes quadratiques à coefficients entiers, théorie des représentations unitaires du groupe de Lie $SL_2(\mathbb{R})$, fonctions L et représentations du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$. Elles ont aussi été l'objet de plusieurs conjectures célèbres, comme la conjecture de Ramanujan ou la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil. En particulier, la preuve de cette dernière conjecture a été faite par Andre Wiles, et a pour corollaire la preuve du grand théorème de Fermat.

Ce TER peut se décomposer en deux grandes parties. Dans la première partie, nous montrons que l'espace des formes modulaires est de dimension finie, ce qui nous permettra de montrer des relations arithmétiques comme le nombre de façon de décomposer un nombre en somme de 8 carrées (Chapitre 3 à 6). La seconde partie a pour objectif d'étudier un article de recherche récent [1] qui exhibe un lien entre une certaine classe d'équation nommée équation WDVV et les formes modulaires (Chapitre 7 à 8).

3 Introduction aux formes modulaires

On utilisera tout au long de ce rapport les résultats qui se trouve dans l'Annexe.

3.1 Action de $GL_+(\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré

On définit une action à gauche de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ par :

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}),\ \forall z \in \mathbb{H},\ \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Remarque. De manière générale, pour un corps K, on peut définir une action de $GL_2(K)$ sur $\widehat{K} = K \cup \{\infty\}$ par : $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\gamma(\infty) = a/c$ si $c \neq 0$, $\gamma(\infty) = \infty$ si $c = 0$. Nous l'utiliserons dans la suite.

Lemme 3.1. *i)* $\forall z \in \mathbb{H}, \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}),\ \Im(\gamma(z)) = \frac{det(\gamma)\Im(z)}{|cz+d|^2}$ *donc l'action est bien définie.*
ii) $\forall z, z' \in \mathbb{H}, \exists \gamma \in GL_2^+(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(z) = z'$ *donc l'action est transitive.*
iii) $GL_2^+(\mathbb{R})/Z(SO_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{H}$ [1].

Démonstration. *i)* $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2}$ donc $\Im(\gamma(z)) = \frac{ad\Im(z)-bc\Im(z)}{|cz+d|^2} = \frac{det(\gamma)\Im(z)}{|cz+d|^2}$.

ii) Pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\gamma(i) = \frac{1}{d^2+c^2}(bd + ac + i(ad - cb))$ et la preuve de la transitivité en découle.

iii) $Stab(i) = \{\gamma \in GL_2^+(\mathbb{R}), \gamma(i) = i\} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\} = Z(SO_2(\mathbb{R}))$, d'où la bijection car l'action est transitive. □

A partir de cette action à gauche, on peut définir une action à droite de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{H}, \mathbb{C})$ par :

$$\forall \gamma \in GL_2^+(\mathbb{R}),\ \ \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{H}, \mathbb{C}),\ \ \forall z \in \mathbb{H},\ \ (f \circ \gamma)(z) = f(\gamma(z))$$

Lemme 3.2. *Pour tout entier naturel k, on définit une nouvelle action à droite de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{H}, \mathbb{C})$ par :*

$$\forall \gamma \in GL_2^+(\mathbb{R}), \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{H}, \mathbb{C}), \forall z \in \mathbb{H},\ \ (f|_k\gamma)(z) = j(\gamma, z)^k (f \circ \gamma)(z)\ \ avec\ \ j(\gamma, z) = \frac{det(\gamma)^{\frac{1}{2}}}{cz+d}$$

1. $Z(SO_2(\mathbb{R}))$ est interpreté ici comme l'ensemble des matrices qui commutent avec $SO_2(\mathbb{R})$

Démonstration. Soit $\gamma, \gamma' \in GL_2^+(\mathbb{R})$
On remarque que $\frac{d(\gamma(z))}{dz} = j(\gamma, z)^2$
D'où $\frac{d(\gamma\gamma'(z))}{dz} = j(\gamma\gamma', z)^2 = \frac{d(\gamma\gamma'(z))}{d\gamma'(z)} \frac{d\gamma'(z)}{dz} = j(\gamma, \gamma'(z))^2 j(\gamma', z)^2$
Et on peut simplifier les carrés car j est à valeur dans $\mathbb{H}$. Finalement on obtient :

$$(f|_k\gamma|_k\gamma')(z) = j(\gamma', z)^k (f|_k\gamma \circ \gamma')(z) = j(\gamma, \gamma'(z))^k j(\gamma', z)^k f(\gamma\gamma'(z)) = (f|_k\gamma\gamma')(z)$$

□

Remarque. On remarque que l'action pour $k = 0$ correspond à l'action définie précédemment.
De plus, pour tout sous groupe G de $GL_2^+(\mathbb{R})$, ces actions se restreignent à des actions de G sur $\mathbb{H}$.

Définition. *Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$ et k un entier. On appelle ensemble des formes modulaires de poids k relativement au groupe Γ les éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{H}, \mathbb{C})$ possédant les propriétés suivantes :*
i) f est holomorphe sur $\mathbb{H}$,
ii) f est invariante par l'opération de Γ associée a l'entier k induite par le Lemme,
iii) Pour tout $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, il existe un entier $N(\sigma)$ tel que f admette un developpement de la forme $(f|_k\sigma)(z) = \sum_{n\geq 0} a(n, \sigma) q^{n/N(\sigma)}$ où $q = exp(2i\pi z)$ et $a(n, \sigma) \in \mathbb{C}$.

Remarque. D'après la proposition **9.1**, si f vérifie $i)$ et $ii)$ alors f est périodique de période n et pour tout $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ $f \circ \sigma$ l'est aussi donc grâce à la proposition **9.2** on peut remplacer le $iii)$ dans la définition d'une forme modulaire sur Γ par : Pour tout $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, $f|_k\sigma$ possède une limite finie quand $\Im(\tau)$ tend vers $+\infty$
En particulier si $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ alors $a(n, .) = a(n)$ car $f|_k\sigma = f$.

On notera dans la suite $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ l'ensemble des formes modulaires Γ-invariante de poids k.

Remarque. $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Définition. *Un élément de $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ dont le premier terme du développement en série de q est nul est appelé une forme parabolique de poids k relativement à Γ. Le sous-espace vectoriel des formes paraboliques de poids k relativement à Γ est noté $\mathcal{S}_k(\Gamma)$.*

On définit l'espace $\mathcal{M}(\Gamma)$ des formes modulaires relativement à Γ et son sous-espace des formes paraboliques $\mathcal{S}(\Gamma)$ par :

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_k(\Gamma) \text{ \textit{ et } } \mathcal{S}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_k(\Gamma)$$

On vérifie que $\mathcal{M}(\Gamma)$ est une algèbre graduée.

3.2 Forme modulaire associée à un caractère

Définition. *Soit Γ un sous groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$ et soit un caractère χ du groupe Γ. Une forme modulaire associé au caractère χ du groupe Γ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$ à valeur dans $\mathbb{C}$ vérifiant :*
i) $f|_k\gamma = \chi(\gamma) f$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,
ii) Pour tout $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, la fonction $f|_k\gamma(\tau)$ admet une limite quand $\Im(\tau)$ tend vers $+\infty$.

L'ensemble des formes modulaires associés à un caractère χ du groupe Γ sera noté $\mathcal{M}_k(\Gamma, \chi)$.

On définit aussi 2 types de sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Définition.

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ c = 0 \ mod \ N \right\}$$

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ mod \ (N) \right\}$$

$\Gamma_0(N)$ *est appelé sous-groupe de Hecke de* $SL_2(\mathbb{Z})$*,*
$\Gamma(N)$ *est appelé sous groupe modulaire principal de niveau N.*

Remarque. On remarque que le caractère trivial correspond à l'action modulaire, on a encore une fois étendu l'action précédente.
On dit qu'un groupe est de congruence s'il contient $\Gamma(N)$ pour un certain N .
On donnera par la suite des résultats sur l'ensemble des formes modulaires associé au groupe $\Gamma_0(N)$ pour divers N.

Proposition 3.1. Un groupe de congruence est d'indice fini dans $SL_2(\mathbb{Z})$. En particulier, $\Gamma_0(N)$ et $\Gamma(N)$ le sont.

Démonstration. Soit J un groupe de congruence et N tel que $\Gamma(N) \subset J$.
D'après la proposition **9.4**, $\Gamma(N)$ correspond au noyau du morphisme pour $k = 2$ et en particulier $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N) = SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ donc par théorème de factorisation $SL_2(\mathbb{Z})/J$ s'injecte dans $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ et est donc fini. □

4 Etude de $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ et applications

4.1 Etude de $\mathcal{M}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$

Ce paragraphe constitue l'étude de l'ensemble des formes modulaires associé à $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Commençons par en donner un exemple.

Dans la suite nous noterons $\mathcal{M}_k$ l'ensemble $\mathcal{M}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ et $\mathcal{S}_k$ l'ensemble $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$

On note $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque. On considérera k pair car les relations $S^2 = I_2$ et $f|_k - I_2 = (-1)^k f$ montrent que $\mathcal{M}_k = 0$ pour k impair.
La relation $f(i) = f|_k S(i) = i^{-k} f(i)$ donne $f(i) = 0$ si $k \neq 0 \ mod \ 4$. Et si on remplace i par ρ, on a $f(\rho) = 0$ si $k \neq \ mod \ 3$

Lemme 4.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) $\forall \tau \in \mathbb{H} \ f(\tau+1) = f(\tau)$ *et* $f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau)$
ii) $\forall \gamma \in SL(2,\mathbb{Z}), \ \forall \tau \in \mathbb{H} \ f|_k\gamma(\tau) = j(\gamma,\tau)^k f(\gamma(\tau))$

Démonstration. On a $S(\tau) = \tau + 1$ et $T(\tau) = -1/\tau$ donc la preuve du lemme est directe car S et T engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$ d'après la proposition **9.5** et $|_k$ est une action à droite. □

Proposition 4.1 (Les séries d'Eisenstein)**.** Soit $k \geq 4$ un entier pair. La série

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2-\{0\}} (\frac{1}{m\tau+n})^k$$

est absolument convergente sur $\mathbb{H}$ et définit donc une fonction $G_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. De plus, on a $G_k \in \mathcal{M}_k$ et $G_k(\infty) = 2\zeta(k)$

Démonstration. On note $D_{A,B} = \{\tau \in \mathbb{H}, Im\ \tau > A\ et\ |Re\ \tau| < B\}$ pour $A, B > 0$.
Soit $\tau \in D_{A,B}$, On a que $|\tau - \lambda| > A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Si on regarde le cône $\{\lambda x, x \in D_{A,B}\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, il est délimité par les droites vectorielles engendrées par $B + iA$ et $-B + iA$. Donc, il existe $\delta > 0$ tq $|\lambda\tau + 1| > \delta$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ car la distance de 0 au cône translate de 1 est atteinte en 2 points. Ainsi, si on pose $C = Min(A, \delta)$, on obtient que pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$,

$$|\mu\tau + \nu| > Csup(|\mu|, |\nu|)$$

.

Si $s \geq 1$, on a exactement 8s couples $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $sup(|m|, |n|) = s$, donc
$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2-\{0\}} \frac{1}{|m\tau+n|^k} \leq \frac{1}{C^k} \sum_{s\geq 1} \frac{8s}{s^k} < +\infty$ sur $D_{A,B}$ si $k \geq 4$.

Donc les G_k sont normalement convergentes sur $\mathbb{H}$ et d'après le théorème de Weierstrass, on a que les G_k sont holomorphes sur $\mathbb{H}$. Par convergence absolue des G_k sur $\mathbb{H}$, les bijections $(m, n) \mapsto (m, n + m)$ et $(m, n) \mapsto (n, -m)$ donnent les relations $G_k(\tau + 1) = G_k(\tau)$ et $G_k(-1/\tau) = \tau^k G_k(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$.

Par convergence uniforme sur $D_{1,1}$, on obtient par inversion limite-intégrale que $G_k(\tau) \to \zeta(k)$ quand $Im(\tau) \to +\infty$ et $\tau \in D_{1,1}$. Par 1-périodicité des G_k, on conclut que $G_k(\tau) \to \zeta(k)$ quand $Im(\tau) \to \infty$ et $\tau \in \mathbb{H}$. Enfin, on obtient $G_k \in \mathcal{M}_k$ d'après le Lemme précédent.

□

On note $E_k = G_k/G_k(\infty)$ de facon a avoir $E_k(\infty)$=1. Cette définition a un sens car $\zeta(k) \neq 0$ et on remarque que $\mathcal{S}_k = ker(\Phi)$ avec $\Phi : \mathcal{M}_k \to \mathbb{C}$, $f \to f(\infty)$, d'où $\mathcal{M}_k = \mathcal{S}_k \bigoplus \mathbb{C}E_k$ pour $k \geq 4$.

Remarque. A l'aide des séries d'Einsenstein, on peut fabriquer d'autres formes modulaires car si $f \in \mathcal{M}_k$ et $g \in \mathcal{M}_l$ alors $fg \in \mathcal{M}_{k+l}$
Un exemple important est la forme modulaire parabolique de poids 12 :

$$\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$$

appelé forme modulaire de Jacobi. Le coefficient 1728 est tel que le coefficient devant q soit égal a 1.

La proposition suivante nous permettra de prouver que $\mathcal{M}_k$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 4.2. (Formule du $k/12$) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathcal{M}_k$ non identiquement nulle. On a la formule :

$$v_\infty(f) + \sum_{P \in SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} \frac{v_P(f)}{e_P} = k/12$$

où $v_P(f)$ est l'ordre d'annulation de f au point P, e_P le cardinal du stabilisateur de P dans $SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$, $v_\infty(f)$ est l'ordre d'annulation en 0 de $\tilde{f}$.

Remarque. $SL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$ correspond au quotient fourni par l'action à gauche de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$.
$v_P(f)$ et $e_P(f)$ dépendent uniquement de la $SL_2(\mathbb{Z})$-orbite de P. En effet, pour $e_P(f)$ cela vient du fait que les stabilisateurs de deux points dans la même orbite sont conjuguées et pour $v_P(f)$ de la non annulation des $j(\gamma, \tau)$ pour $\tau \in \mathbb{H}$ et $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Avant de pouvoir démontrer cette formule nous avons besoin de savoir comment se comporte l'action de Γ sur $\mathbb{H}$.

On pose $\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{H},\ |\Re(\tau)| \leq 1/2\ et\ |\tau| \geq 1\}$.

Proposition 4.3. *i)* Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, l'orbite de $\Gamma\tau$ rencontre $\mathcal{F}$.
ii) Si τ et τ' sont deux points distincts de $\mathcal{F}$ tels que $\Gamma\tau = \tau'$ alors :
- soit $\Re(\tau) = \pm 1/2$ et $\tau' = \tau \pm 1$,
- soit $|\tau| = 1$ et $\tau' = -1/\tau$.
iii) Si $\tau \in \mathcal{F}$ alors le stabilisateur de τ dans Γ est $\{\pm I_2\}$, sauf si $\tau = i$ (resp $\tau = \rho, -\rho^2$), auquel cas c'est le sous groupe engendré par S (resp ST).

Démonstration. *i)* Soit $\tau \in \mathbb{H}$, l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (c,d)$\to |c\tau + d|^2$ admet un minimum sur $\mathbb{Z}^2 - \{0\}$ car $\mathbb{Z}$ est discret et l'application tend vers $+\infty$ quand $\|(c,d)\|$ tend vers $+\infty$. D'après la proposition **3.1** il y a un sens à considérer l'ensemble $E \subset \Gamma\tau$ des éléments τ' tel que $\Im(\tau')$ soit maximal. Il est invariant par $\tau \to \tau + 1$ donc on a un $\tau' \in E$ avec $|\Re(\tau')| \leq 1/2$. Mais $-1/\tau' \in \Gamma\tau$ et $\Im(-1/\tau') = \Im(\tau')/|\tau'|^2$, donc $|\tau'| \geq 1$. Ainsi, $\tau' \in \Gamma\tau \cap \mathcal{F}$. On remarque que cette démonstration reste valable pour n'importe quelle sous groupe $G \subset \Gamma$ tel que $S, T \in G$.

ii) Prenons $\tau, \tau' \in \mathcal{F}$ avec $\Im(\tau') \geq \Im(\tau)$ et tel que $\tau' = \gamma(\tau)$ où $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$.
On a alors par le lemme **3.1** que $|c\tau + d| \geq 1$. En particulier, $|c\Im(\tau)| \geq 1$ d'où $c \in \{-1, 0, 1\}$. Si $c = 0$ alors $d = a = \pm 1$ et donc $\pm\gamma$ est une puissance de T, on obtient directement le premier cas de *ii)*. Quitte a prendre $-\gamma$, supposons $c = 1$, on remarque que $|\tau + d| \leq 1$ implique $|\tau| = 1$ et $d \in \{-1, 0, 1\}$ et qu'on est dans l'un des 3 cas suivants :
1) $\tau \neq \rho, -\rho^2$ et d=0. Dans ce cas $b = -1$ et $\tau' = a - 1/\tau$ puis $a = 0$ car $|\Re(-1/\tau)| < 1/2$. Donc $\gamma = S$ et $\tau' = \tau = i$.
2) $\tau = \rho$ et $d = 0, -1$. Si $d = 0$, on a encore $b = -1$ et $\tau' = a - 1/\rho = a - \rho^2$. Donc soit $\tau' = -\rho^2$, $a = 0$ et $\gamma = \pm S$, soit $\tau' = \tau$, $a = -1$ et $\gamma = (ST)^2$.
3) $\tau = -\rho^2$ et $d = 0, 1$. Si $d = 0$, on a $b = -1$ et $\tau' = a + \rho$. Donc soit $\tau' = \rho$, $a = 0$ et $\gamma = \pm S$ soit $\tau' = \tau'$, $a = 1$ et $\gamma = (ST)^2$.
iii) Ça découle de l'analyse des cas 1.2.3).

□

On est maintenant capable de démontrer la proposition **4.4**.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{M}_k$ non nulle. On sait que que l'orbite de tout zéro rencontre $\mathcal{F}$, pour $r > 0$, on note $\Omega_r = \{\tau \in \mathbb{H}, \Im(\tau) > r\}$. La fonction $\tilde{f}$ étant holomorphe en 0, il existe $r > 0$ tel que f n'admet pas de zéro dans Ω_r. La partie $\mathcal{F} - \Omega_r$ est compact donc ne contient qu'un nombre fini de zéro de f. Cela montre en particulier que le nombre de Γ-orbite de zéros de f est fini. (donc la somme intervenant dans la proposition **4.4** est finie) Considérons le chemin de limité par le contour de la figure 2 qu'on notera $\mathcal{C}$. On choisit les points A et E de façon à n'avoir aucun zéro de partie imaginaire supérieure à celle de A et E. Les zéros de f se situant sur la frontière de $\mathcal{F}$ (qui sont en nombre fini) sont évité par le chemin comme sur la figure 2. Ceci étant fait le contour contient un seul zéro de f de chaque Γ-orbite car d'après la proposition **4.3**, deux zéros de f se situant à l'intérieur du contour n'appartiennent pas à la même orbite, les zéros de f sur la bande $\{z \in \mathcal{F},\ \Re(z) = -1/2\}$ sont ceux de la bande $\{z \in \mathcal{F},\ \Re(z) = 1/2\}$ translatés par T et ceux qui sont dans l'arc de cercle $\{z \in \mathcal{F}, |z| = 1,\ arg(z) \in]\pi/2, 2\pi/3[\}$ sont ceux de $\{z \in \mathcal{F}, |z| = 1,\ arg(z) \in]\pi/3, \pi/2[\}$ translatés par S.

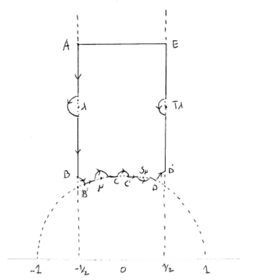


FIGURE 2. Le chemin d'intégration dans la démonstration de la formule $k/12$

Le théorème des résidus appliqué a la fonction méromorphe f'/f donne :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\sum_P v_P.$$

La somme porte sur toutes les Γ-orbites ne contenant ni i ni ρ. Les fonctions f et f' sont T-invariantes donc par changement de variable on a :

$$\int_{\gamma_{AB}}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\int_{T\gamma_{AB}}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=-\int_{\gamma_{D'E}}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau.$$

Le chemin $\omega(t)=e^{2i\pi\gamma_{EA}(t)}$ est un cercle de centre 0 dans D faisant un tour dans le sens direct, on a donc par changement de variable et théorème des residus applique à $\tilde{f}'/\tilde{f}$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{EA}}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\int_{\omega}\frac{\tilde{f}'(\tau)}{\tilde{f}(\tau)}d\tau=-v_\infty.$$

Par modularité de f on a que :

$$\frac{f'}{f}=-\frac{k}{\tau}+\frac{(f\circ S)'}{f\circ S},$$

d'où

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{B'C}}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{B'C}}\frac{k}{\tau}d\tau+\frac{1}{2i\pi}\int_{S\gamma_{B'C}}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau,$$

avec $S\gamma_{B'C}=-\gamma_{C'D}$.
Lorsque B' tend vers ρ, C tend vers i et les portions de cercles autour des zéros sont de rayons tendant vers 0, on a :

$$\frac{1}{i}\int_{\gamma_{B'C}}\frac{1}{\tau}d\tau\longrightarrow\widehat{(\rho,0,i)}=\frac{\pi}{6}.$$

De même, lorsque B et B' tendent vers ρ,

$$\frac{1}{i}\int_{\gamma_{BB'}}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau\longrightarrow-\frac{\pi}{3}v_\rho.$$

Enfin, lorsque C et C' tendent vers i,

$$\frac{1}{i}\int_{\gamma_{CC'}}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau\longrightarrow-\pi v_i.$$

On a donc

$$\sum_P v_P=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\frac{1}{2i\pi}(ik\frac{\pi}{6}-i\pi v_i-i\frac{2\pi}{3}v_\rho-2\pi i v_\infty),$$

d'où la formule car $e_P=1$ si $P\notin\{i,\rho\}$, $e_i=2$ et $e_\rho=3$ d'après la proposition **4.3**.

□

Remarque. Cette formule admet des généralisations lorsque Γ est quelconque et est alors connue sous le nom de théorème de Riemman-Roch.

Corollaire. *i) Si $k<0$, $k=2$ ou k impair alors $\mathcal{M}_k=0$.*
ii) $\mathcal{M}_0=\mathbb{C}$ et si $k=4,6,8,10$ alors $\mathcal{M}_k=\mathbb{C}E_k$.
iii) Δ ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$ et $v_\infty(\Delta)=1$.
iv) Si $k\in\mathbb{Z}$ alors $\mathcal{S}_k=\Delta\mathcal{M}_{k-12}$. En particulier, $\mathcal{S}_{12}=\mathbb{C}\Delta$.
v) Pour $k\geq 0$ pair, la dimension de $\mathcal{S}_k$ vaut $[k/12]$ si $k\neq 2$ mod 12 et $[k/12]-1$ sinon.

Démonstration. Une conséquence directe de la proposition précédente est $\mathcal{M}_k=0$ si $k<0$ et $\mathcal{S}_k=0$ si $k<12$

(car $v_\infty \geq 1$ pour $f \in \mathcal{S}_k$). En explicitant 2 termes de la somme on a :

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \sum_P v_P(f) = k/12,$$

où la somme porte sur les autres $SL(2,\mathbb{Z})$-orbite de P différentes de celle de i et ρ.
Donc en particulier $\mathcal{M}_2 = 0$ car le terme de gauche est soit nulle ou bien $> 1/6$. On a donc $i), ii)$

Maintenant, appliquons la formule pour $k = 4$ et $f = E_4$. Dans ce cas $k/12 = 1/3$, mais on sait que $E_4(\rho) = 0$ entraine $v_\rho(f) \geq 1$ d'où $E_4(i) \neq 0$ et ainsi $\Delta(i) = \frac{1}{1728}E_4^3(i) \neq 0$. En appliquant la formule $k = 12$ et $f = \Delta$, on en déduit que Δ ne s'annule pas car $v_\infty(\Delta) \geq 1$, et la formule nous dit de plus que $v_\infty(\Delta) = 1$, ce qui prouve $iii)$.

Comme Δ est non nulle sur $\mathbb{H}$, on peut considérer $\frac{f}{\Delta}$ pour $f \in \mathcal{S}_k$ qui est une forme modulaire de poids $k-12$. Ainsi $iv)$ et $v)$ se déduisent par récurrence de $ii)$ et $iv)$. □

Proposition 4.4. Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\mathcal{M}_k$ admet pour base les $E_4^s E_6^r$ avec $(r,s) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $4r + 6s = k$

Démonstration. On procède par récurrence sur k pour le caractère générateur de notre famille. D'après le corollaire, on peut supposer $k \geq 4$ pair. On a alors existence d'entier r et s tel que $4r + 6s = k$. Maintenant, il suffit de remarquer que pour $f \in \mathcal{M}_k$, $f - f(\infty)E_4^r E_6^s \in \mathcal{S}_k$ et en utilisant que $\mathcal{S}_k = \Delta\mathcal{M}_{k-12}$ avec l'hypothèse de récurrence on conclut que la famille donnée est bien génératrice.

Montrons par récurrence sur k que cette famille est libre, on peut supposer encore que $k \geq 4$. Supposons qu'on ait :

$$\sum_{4r+6s=k} \lambda_{r,s} E_4^r E_6^s = 0$$

Si k est multiple de 4, l'évaluation en i nous donne que $\lambda_{k/4,0} = 0$ ($E_4(i) \neq 0$). Donc $\lambda_{r,s} \neq 0$ implique $s > 0$. D'où, soit tous les $\lambda_{r,s}$ sont nuls ou bien $k \geq 6$ et les lambda qui sont a fortiori non nuls sont devant des termes avec $s \geq 1$, on conclut en simplifiant par E_6 et l'hypothèse de récurrence. Notons qu'on peut simplifier car l'anneau des fonctions holomorphes est intègre. □

On va voir que le formule $k/12$ permet aussi de montrer que $\mathcal{M}_k(\Gamma,\chi)$ est un espace vectoriel de dimension finie pour Γ un sous groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$ et χ un caractère d'image finie.

Proposition 4.5. Supposons Γ d'indice fini dans $SL_2(\mathbb{Z})$ et le caractère χ d'image finie. On a :

$$dim(\mathcal{M}_k(\Gamma,\chi)) \leq \frac{km}{12} + 1$$

Commencons par quelques remarque, on a

$$f|_k\gamma \times g|_{k'}\gamma = (fg)|_{k+k'}\gamma$$

donc si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma,\chi)$ et $g \in \mathcal{M}_{k'}(\Gamma,\chi')$ alors $fg \in \mathcal{M}_{k+k'}(\Gamma,\chi\chi')$. Or, vu que le caractère χ est d'image finie, il existe un entier e tel que $\chi^e = 1$ donc si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma,\chi)$ alors $f^e \in \mathcal{M}_{ke}(\Gamma)$. De plus, si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$, $f|_k\gamma$ ne dépend que de la classe de γ dans $\Gamma/SL(2,\mathbb{Z})$ donc on peut définir :

$$N(f) = \prod_{x \in \Gamma/SL(2,\mathbb{Z})} f|_k x.$$

Lemme 4.2. *Supposons Γ d'indice fini m dans $SL(2,\mathbb{Z})$ et $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$. Alors $N(f) \in \mathcal{M}_{km}$ et $N(f) = 0$ implique $f = 0$*

Démonstration. (Lemme 4.2) Le premier point se fait en remarquant que la multiplication par $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$ sur $\Gamma/SL(2,\mathbb{Z})$ est bijective et le second point, de l'intégrité de l'ensemble des fonctions holomorphes sur le connexe $\mathbb{H}$ □

Démonstration. (Proposition 4.5) Soit $N>\frac{mk}{12}$ et P une partie arbitraire de l'intérieur de $\mathcal{F}$ avec $|P| = N$. Il suffit de démontrer que l'application linéaire : $\mathcal{M}_k(\Gamma,\chi) \to \mathbb{C}^P$, $f \to (f(p))_{p\in P}$ est injective. Pour cela, on prend f dans son noyau dont on suppose qu'elle est non identiquement nulle. On applique la formule du $k/12$ à la fonction $N(f^e)$ qui est dans $\mathcal{M}_{ekm}$ d'après le lemme précédant. Cette fonction s'annule en les N points avec un ordre $\geq e$ par définition, donc cela nous donne que $\frac{ekm}{12} \geq \frac{Ne}{12}$, ce qui est absurde par définition de N. □

Remarque. La proposition **4.5** montre en particulier que l'ensemble des formes modulaires associées à un sous groupe de congruence est de dimension finie en prenant le caractère trivial.
Le théorème de Riemman-Roch permet d'obtenir une formule exacte de la dimension en fonction de certains invariants.

4.2 Développement des séries d'Eisenstein en série de Fourier

On sait d'après la proposition **9.2** que les séries d'Einsenstein admettent un développement en séries de Fourier. L'objectif de cette partie est de déterminer ce développement et d'en voir les conséquences.

Proposition 4.6. Soit k un entier pair ≥ 4, on pose $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ alors on a la relation suivante :

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n\geq 0}\sigma_{k-1}(n)q^n$$

où les nombres de Bernoulli sont définies de la manière suivante : $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}t^n$
Et q désigne la fonction : $q : \tau \to e^{2i\pi\tau}$

Démonstration. Euler a démontré que pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\frac{\pi}{tan(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\frac{1}{z-n}$$

Pour $\tau \in \mathbb{H}$, on a :

$$\frac{\pi}{tan(\pi\tau)} = i\pi\frac{q(\tau)+1}{q(\tau)-1} = i\pi - 2i\pi\sum_{n\geq 0}q(\tau)^n,$$

et en dérivant $k-1$ fois l'identité d'Euler par rapport à τ, ce qui est justifié par le théorème de Weirstrass, on trouve :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\tau+n)^k} = \frac{(-2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{n\geq 0}n^{k-1}q(\tau)^n,$$

On applique cette relation a $m\tau$ pour tout $m \geq 1$ entier et on en fait la somme sur m (possible par convergence absolue du terme de droite [2]) pour obtenir :

$$\frac{1}{2}G_k(\tau) - \zeta(k) = \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{n\geq 0}\sigma_{k-1}(n)q(\tau)^n$$

On conclut en utilisant une autre relation due a Euler : $\zeta(k) = -\frac{(2i\pi)^k}{2k!}B_k$

□

On remarque que tous les coefficients du développement de E_k sont dans $\mathbb{Q}$ et que ceux de E_4 et E_6 sont à coefficients entiers. Ainsi, $\mathcal{M}_k$ possède une $\mathbb{C}$-base de formes modulaires à coefficients entiers. Ce phénomène entraîne des relations inattendues comme :

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{d|n} d^l|q|^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} m^l|q|^{mn} < \infty$

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m), \ \forall n \geq 1.$$

En effet, il suffit de considérer $E_4^2 \in \mathcal{M}_8$, or $\mathcal{M}_8 = \mathbb{C}E_8$. Comme $E_4(\infty) = E_8(\infty) = 1$, on a $E_4^2 = E_8$ et en égalisant les coefficients on obtient la relation ci-dessus.

La formule $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ combinée aux q-développements de E_4 et E_6 permet d'exprimer les coefficients de Fourier de Δ. Le n-ième coefficient est généralement noté $\tau(n)$ et la fonction τ est appelée fonction de Ramanujan. Ramanujan a conjecturé que $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ pour p premier, ce qui fut démontré par Pierre Deligne en 1973.

On donne ci-dessous une table exprimant les premiers coefficients de Δ.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480	-113643	-115920	534612	-370944

On remarque que pour de petites valeurs $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ pour m et n premier entre eux. C'est un fait général que nous démontrerons par la suite.

4.3 Étude de $\mathcal{M}_k(J)$ et fonction thêta

On note J le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par T^2et S définie dans la section 4.1.
On appelle h le morphisme associé à l'action de $SL(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sur $\widehat{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ définie dans la remarque de la partie **3.1**.
Ce morphisme est injectif car la seule homothétie de $SL(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est I_2.
On note aussi $\pi : SL_2(\mathbb{Z}) \to SL(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et on a $h(\pi(S)) = \begin{pmatrix} 0 & \infty \end{pmatrix}$, $h(\pi(T)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. [3]

Proposition 4.7. *i)* $J = \Gamma(2) \cup S\Gamma(2)$, en particulier J est de congruence.
ii) Les éléments 1,T et TS forment un système de représentant de J$\backslash SL_2(\mathbb{Z})$.
iii) Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, il existe $g \in J$ tel que $g(\tau) \in \mathcal{F} \cup S\mathcal{F} \cup TS\mathcal{F}$.

Démonstration. Le point *iii)* se montre de la même manière que la proposition **4.3** . En effet, l'ensemble $\mathcal{F} \cup S\mathcal{F} \cup TS\mathcal{F}$ correspond à $\{\tau \in \mathbb{H}, -1/2 \geq \Re(\tau) \leq 3/2, |\tau| \geq 1\}$. Comme les éléments S et ST^2 sont dans J, d'homographies associées $\tau \to -1/\tau$ et $\tau \to -1/(\tau - 2)$, l'argument de maximalité fonctionne pareil.
Maintenant, le *ii)* découle de *iii)*. En effet, soit $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ et τ dans l'intérieur de $\mathcal{F}$. D'après *iii)*, il existe $g \in J$ tq $g(\gamma(\tau)) \in \mathcal{F} \cup S\mathcal{F} \cup TS\mathcal{F}$ ainsi la proposition **4.3** entraîne que $\pm g(\gamma(\tau)) = I_2, T$ ou TS, comme $-I_2 = S^2 \in J$ d'où :

$$SL_2(\mathbb{Z}) = J \cup JS \cup JTS$$

Cette réunion est disjointe car si $g \in J$(resp, JT, JTS) alors $\pi(g^{-1})(1) = 1$(resp, 0, ∞) . Cela montre aussi que J est l'ensemble des éléments qui fixent 1 dans l'action sur $SL(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (il suffit d'écrire le système nécessaire pour fixer 1 dans l'action) donc $J = \Gamma(2) \cup S\Gamma(2)$. □

Remarque. Le *ii)* de la définition de $f \in \mathcal{M}_k(J)$ est alors équivalent grâce à la proposition **4.7** à :
ii) $f(\tau)$ et $(f|_k TS)(\tau) = \tau^{-k} f(1 - 1/\tau)$ admettent tout deux des limites en $\Im(\tau) \to +\infty$.
On notera ces limites $f(\infty)$ et $f(1)$.

Les propositions qui viennent vont nous permettre de définir des séries de Eisenstein pour le groupe de congruence J. Il est possible de définir ces séries pour des groupes de congruence quelconque, ce que nous ne ferons pas ici.

Proposition 4.8. Soit $k \geq 4$ un entier pair. La série

$$\sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{0\} \\ m = n \ mod \ 2}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$$

3. Notation pour les transpositions

est absolument convergente sur $\mathbb{H}$ et définit donc une fonction $G_k^* : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. De plus,

$$G_k^* \in \mathcal{M}_k(J), \quad G_k^*(\infty) = 2^{1-k}\zeta(k) \ \text{ et } \ G_k^*(1) = 2\zeta(k).$$

Enfin

$$\frac{2^{k-1}}{\zeta(k)} G_k^*(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \sigma_{k-1}(n) e^{i\pi n\tau}$$

Démonstration. La convergence absolue est évidente d'après celle de G_k. L'invariance par l'action de poids k associé à J l'est aussi. En passant à la limite on obtient $G_k^*(\infty) = 2^{1-k}\zeta(k)$. Pour l'autre limite, on utilise

$$\tau^{-k} G_k^*(1 - 1/\tau) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{0\} \\ m = n \ mod \ 2}} \frac{1}{((m+n)\tau - m)^k} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{0\}} \frac{1}{(2m\tau + n)^k},$$

ce qui donne en passant à la limite, l'égalité $G_k^*(1) = \zeta(k)$. La dernière relation s'obtient grâce à celle sur G_k en remarquant que $G_k^*(\tau) = 2^{-k} G_k(\frac{\tau+1}{2})$. ☐

On définit $E_k = \frac{2^{k-1}}{\zeta(k)} G_k^*$.

Proposition 4.9. Si $k = 0 \ mod \ 4$, alors $\mathcal{M}_k(J)$ est de dimension $k/4 + 1$ de base $(E_4^r E_4^{*s})_{r+s=k/4}$

Démonstration. D'après la proposition **4.5**, on sait que sa dimension est plus petit que $k/4 + 1$. La preuve de la liberté de la famille est semblable à celle qu'on a faite pour la proposition **4.4** . ☐

On va à présent construire une forme modulaire associée à J pour un certain caractère qui, couplé avec le fait que $\mathcal{M}_k(J)$ est un espace vectoriel de dimension finie dont on connaît une base, va nous donner une relation sur le nombre de façons de décomposer un entier en somme de 8 carrés. On va retrouver l'idée que nous avons utilisé plus haut sur E_4^2 pour obtenir une relation non triviale sur $\sigma_7(n)$

On définit pour $t > 0$, $\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-t\pi n^2}$

Proposition 4.10. Pour tout $t > 0$, $\theta(1/t) = \sqrt{t}\theta(t)$

Démonstration. On pose $f_t(x) = e^{-\pi t x^2}$. On remarque que $f_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Un changement de variable montre que $\widehat{f_t}(y) = \frac{1}{\sqrt{t}} \widehat{f_1}(y/\sqrt{t})$ et on sait que $\widehat{f_1} = f_1$ donc $\widehat{f_t}(y) = \frac{1}{\sqrt{t}} \widehat{f_{1/t}}(y)$. Puis, on applique la formule de Poisson [4] à f_t en 0, ce qui donne le résultat souhaité. ☐

Jacobi a introduit une fonction qui à un intérêt important dans l'étude des formes modulaire, c'est la fonction thêta de Jacobi définit par :

$$\Theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi\tau n^2 + 2i\pi n z}$$

Proposition 4.11. La fonction de Jacobi est absolument convergente, holomorphe en les deux variables et vérifie $\Theta(z + 1, \tau) = \Theta(z, \tau)$ et $\Theta(z + \tau, \tau) = e^{-i\pi\tau - 2i\pi z}\Theta(z, \tau)$

Démonstration. Cette série est normalement convergente sur toute partie de $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ de la forme

$$\{(z, \tau), \ \Im z > A, \Im\tau > B\}$$

où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}_{>0}$. Par le théorème de Weirstrass, on en déduit l'holomorphie en les deux variables. Les deux relations sont immédiates. ☐

Proposition 4.12. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $\tau \in \mathbb{H}$, on a :

$$\Theta(z, \tau + 2) = \Theta(z, \tau) \ \ et \ \ \Theta(z, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau} e^{i\pi\tau z^2} \Theta(\tau z, \tau)$$

Où $\sqrt{.}$ désigne l'unique racine de partie réel positif.

4. Voir **9.3**

Démonstration. La première identité est immédiate. On pose $g_\tau(x) = e^{i\pi\tau x^2}$. La transformée de Fourier de $x \mapsto g_\tau(x)e^{2i\pi zx}$ est $y \mapsto \widehat{g_t}(y-z)$. Montrons que $\widehat{g_\tau}(y) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} g_{-1/\tau}(y)$. Lorsque $\tau = it$ avec $t > 0$, c'est la démonstration de la proposition **4.10** . A y fixé, il suffit de montrer que les deux fonctions sont holomorphes et on aura l'égalité pour tout $\tau \in \mathbb{H}$ par le principe des zéros isolés. La membre de droite est holomorphe car $\sqrt{-i\tau}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$. L'holomorphie du membre de gauche se déduit de la majoration $|e^{i\pi\tau x^2}| \leq e^{-\pi Im\tau x^2}$ et du théorème sur l'holomorphie des intégrales à paramètres. Pour conclure, il suffit d'appliquer la formule de poisson à $y \mapsto g_t(y-z)$ en utilisant l'identité que l'on vient de montrer. □

La fonction qui va nous intéresser par la suite est $\nu(\tau) = \Theta(0,\tau)$.
Elle est non nulle car $\nu(it) = \theta(t) > 0$ si $t > 0$

Corollaire. *Il existe un unique morphisme de groupe $\chi : J \to \{\pm 1, \pm i\}$ tel que $\chi(S) = -i$ et $\chi(T^2) = 1$ et on a pour tout $\gamma \in J$, on a $\nu^2|_1\gamma = \chi(\gamma)\nu^2$*

Démonstration. Le point qui est a priori délicat est qu'une telle application est un morphisme. Le théorème précédent nous dit que $\nu^2|_1 S = -i\nu^2$ et $\nu^2|_1 T^2 = \nu^2$. Comme T^2 et S engendre J, les propriétés d'une action montrent que l'application évidente est un morphisme. □

Remarque. $\nu(2\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$ et $\nu^k(2\tau) = \sum_{(n_1,\cdot,n_k)\in\mathbb{Z}^k} q^{n_1^2+\cdot+n_k^2} = \sum_{n\geq 0} r_k(n)q^n$ où $r_k(n)$ est le nombre de façons de décomposer n en somme de k carrés.

On définit aussi $\widetilde{\nu}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{i\pi\tau n^2}$ et $\widehat{\nu}(\tau) = e^{i\pi\tau/4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2}$.
Par définition, $\widetilde{\nu}(\tau) = \Theta(1/2,\tau)$ et $\widehat{\nu}(\tau) = e^{i\pi/4}\Theta(\tau/2,\tau)$.
Elles sont relié à ν par les relations suivantes : $\widetilde{\nu}(\tau) = \nu(\tau+1)$ *et* $\widehat{\nu}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\nu(1-1/\tau)$

Corollaire. *La fonction ν^2 est modulaire de poids 1 et caractère χ pour J. De plus, on a $\nu^2(\infty) = 1$, $\nu^2(1) = 0$ et $\nu^2|_1 TS(\tau) = -i\widehat{\nu}(\tau)^2$*

Corollaire. *i) Pour tout $k > 0$, on a $\nu^{2k} \in \mathcal{M}_k(J,\chi)$*
ii) On a $(\nu\ \widetilde{\nu}\ \widehat{\nu})^8 = 2^8\Delta$

Démonstration. Le *i)* a déjà été traité plus haut. Pour le *ii)*, on remarque que le terme de gauche correspond à $N(\nu^8)$. C'est un élément non nul de $\mathcal{S}_{12}$ donc est proportionnel à Δ. Pour avoir le coefficient, il suffit de remarquer que $\widehat{\nu}(\tau) = 2e^{i\pi\tau/4} + O(e^{i\pi\tau/2})$ et que le développement de Δ en q commence par $q - 24q^2$. □

Remarque. Le corollaire nous dit en particulier que ν ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$.

Proposition 4.13. On a $\nu^8 = \frac{1}{15}(16E_4 - E_4^*)$ et $r_8(n) = 16\sum_{d|n}(-1)^{n-d}d^3$

Démonstration. La proposition **4.9** appliqué à $k = 4$ nous dit qu'il existe a, b tel que $\nu^8 = aE_4 + bE_4^*$ et en regardant les limites en 1 et ∞, on obtient que $(1,0) = (a+b, a+16b)$. On a donc

$$\sum_{n\geq 0} r_8(n)q^n = \nu^8(2\tau) = 1 + 16\sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)(16q^{2n} - (-1)^n q^n)$$

Si n est impair, le coefficient de q^n vaut $16\sigma_3(n)$. Si n est pair, il s'agit de $16(-\sigma_3(n) + 16\sigma_3(n/2))$. Mais par un simple changement de variable, $16\sigma_3(n/2) = 2\sum_{2|d|n} d^3$ donc on a la relation $-\sigma_3(n) + 16\sigma_3(n/2) = \sum_{d|n}(-1)^d d^3$ d'où le résultat. □

En particulier si p est premier impair, on a $r_8(p) = 16(p^3+1)$. On peut obtenir d'autres relations en étudiant ν^{2k} et $\mathcal{M}_{4k}(J)$ de façon général.

4.4 Identité de Ramanujan

Nous allons énoncer un résultat qui lie les dérivées de certaines formes modulaires mais sans démonstration .

On définit $\eta = \Delta^{1/24}$, $A_4(\tau) = \frac{\eta(2\tau)^{10}}{\eta(\tau)^4\eta(4\tau)^4}$, $B_4(\tau) = \frac{\eta(\tau)^4}{\eta(2\tau)^2}$, $C_4(\tau) = 2^2\frac{\eta(4\tau)^4}{\eta(2\tau)^2}$, $D_4(\tau) = \frac{E_2(\tau)-2E_2(2\tau)+4E_2(4\tau)}{3}$

E_2 est définie dans la partie suivante, c'est la série de Eisenstein de poids 2.

Theoreme 4.1. On a les identités suivantes :
$\frac{1}{2i\pi}\partial_\tau A_4 = \frac{1}{4}A_4(D_4 + \frac{C_4^2-B_4^2}{A_4^2}A_4^2)$ et $A_4(q) = 1 + O(q)$
$\frac{1}{2i\pi}\partial_\tau B_4 = \frac{1}{4}B_4(D_4 - A_4^2)$ et $B_4(q) = 1 + O(q)$
$\frac{1}{2i\pi}\partial_\tau C_4 = \frac{1}{4}C_4(D_4 + A_4^2)$ et $C_4(q) = 4q^{1/2}(1 + O(q))$
$\frac{1}{2i\pi}\partial_\tau D_4 = \frac{1}{4}(D_4^2 - A_4^4)$ et $D_4(q) = 1 + O(q)$
$A_4(\tau)^2 = B_4(\tau)^2 + C_4(\tau)^2$

Remarque. Dans la partie 8, nous verrons que ces identités ont un lien avec des équations nommées WDVV. Les équations différentielles obtenues précédemment sont appelées identités de Ramanujan.

5 Les fonction modulaires

5.1 La fonction modulaire j

Définition. *Une fonction modulaire est une fonction méromorphe $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ vérifiant :*

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),\ z \in \mathbb{H},\ f(\gamma.z) = f(z)$$

On peut voir une fonction méromorphe comme une forme modulaire de poids 0 sans sa condition d'holomorphie sur tout $\mathbb{H}$. On peut toujours développer un telle fonction en série de Fourier sauf que des puissances négatives de q peuvent apparaitre dû à la non holomorphie en $i\infty$. On sait d'après la partie précédente que la seule forme modulaire sur $SL_2(\mathbb{Z})$ de poids 0 est la fonction nulle donc si on se donne une fonction modulaire qui est holomorphe sur $\mathbb{H}$ et en $i\infty$ alors c'est la fonction nulle. Cette remarque nous sera utile dans la suite.

En pratique il est facile de construire de telles fonctions. Si on prend $f, g \in \mathcal{M}_k$ alors f/g est une fonction modulaire.

Un exemple important de fonction modulaire est la fonction $j = E_4^3/\Delta$. On sait d'après la partie précédente que Δ est une forme modulaire de poids 12 ne s'annulant pas sur $\mathbb{H}$ donc j est holomorphe sur $\mathbb{H}$. D'après la remarque précédente j n'est pas holomorphe en $i\infty$ car elle est non identiquement nulle. On pouvait s'en douter car on a montré que Δ possède un zéro d'ordre 1 en $i\infty$. Plus précisément on a le développement de j suivant :

$$q^{-1} + 744 + 196884q + \cdots$$

De plus, comme les seul zéro de E_4 sont d'ordre 1 en ρ et ses conjugués par l'action, j possède un unique zéro d'ordre 3 en ρ et ses conjugués. On a aussi que $j - 1728 = E_4^3/\Delta - 1728 = 1728\frac{E_6^2}{E_4^3-E_6^2}$ donc $j - 1728$ possède un unique zéro d'ordre 2 en i et ses conjugués. (provenant du zéro d'ordre 1 en i de E_6). Ces données vont nous permettre de connaître toutes les fonctions modulaires et de démontrer le théorème suivant.

Theoreme 5.1. Toute fonction modulaire est un polynôme rationnel en j

Démonstration. Soit f une fonction modulaire.
On peut appliquer le même début de démonstration que pour la formule $k/12$ pour avoir que f possède un nombre fini de points dans $\mathcal{F}$ où elle n'est pas dérivable. Maintenant on applique l'algorithme suivant à f :
1) Si f a un zéro en $\tau_0 \in \mathcal{F}$, on l'élimine en multipliant f par $j(\tau) - j(\tau_0)$.
2) Si f s'écrit : $a_{-n}q^{-n} + \cdots$, on élimine le pôle d'ordre n en $i\infty$ en regardant $f - a_{-n}j(\tau)^n$. On peut éliminer toutes les puissances négatives jusqu'à se ramener à une fonction f holomorphe en $i\infty$.
Après avoir fini l'étape 1) on obtient une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$ car elle n'a qu'un nombre fini de pôles sur $\mathcal{F}$, du fait de l'invariance de f et j par $SL_2(\mathbb{Z})$, on les élimine tous. Après l'étape 2), on obtient une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$ et en $i\infty$ de poids 0. On en déduit le théorème. □

Remarque. En quelque sorte j est la fonction modulaire la plus simple que nous connaissons. Ses coefficients jouent un rôle clé dans l'étude d'un groupe appelé groupe Monstre.

Proposition 5.1. j est une application surjective.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$, il suffit de montrer que $f = 1728E_2^3 - z\Delta$ s'annule sur $\mathbb{H}$. Ceci se déduit directement de la formule $k/12$. La formule nous dit mieux, on a que f s'annule qu'une seule fois si $z \neq 0$. Le cas $z = 0$ correspond aux zéros de E_2. □

Un corollaire surprenant de ce qui précède est le théorème de Picard.

5.2 Une preuve du théorème de Picard

Theoreme 5.2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante alors l'image de f est au moins $\mathbb{C}$ privé d'un point.

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que j' est une forme modulaire de poids 2 qui n'est pas holomorphe en $i\infty$. En adaptant la preuve de la formule du $k/12$, le pôle en $i\infty$ remplace le terme v_∞ en $-k$ où k est l'ordre du pôle. On en tire que les seuls zéros de j' sont ρ, i et ses conjugués par l'action. Maintenant, on considère $j^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ qui n'est pas forcément bien définie de partout mais on peut la définir sur $\mathbb{C} - \{j(i), j(\rho)\}$ [5] et elle est alors holomorphe car $j' \neq 0$ sur $\mathbb{C} - \{i, \rho\}$ [6]. Maintenant, soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe tel que $f(z) \neq j(i), j(\rho)$ alors l'application $j^{-1} \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ est holomorphe et bien définie. En prenant l'exponentielle, d'après le théorème de Liouville on en déduit que f est constante d'où le théorème. □

6 Opérateur de Hecke

6.1 Pour une fonction modulaire

Définition. *Soit f une fonction modulaire et $n \in \mathbb{N}$.*
On note A_n les matrices entières de déterminant n et on définit $T(n)(f) = \sum_{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})/A_n} f(\gamma.\tau)$.

Remarque. $T(n)$ est bien défini car f est invariante par $SL_2(\mathbb{Z})$ et est appelé opérateur de Hecke.
$T(n)(f)$ est une fonction modulaire.

Par des opérations sur les lignes et les colonnes, on voit facilement qu'un système de représentants possible de $SL_2(\mathbb{Z})/A_n$ est constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} n/d & d \\ i & d \end{pmatrix}$ pour $i \in [0, d-1]$ et $d|n$

Theoreme 6.1. On note c_n les coefficients de j (pour $n < 1$ $c_n = 0$) ainsi on a l'expression suivante :

$$j(\sigma) - j(\tau) = p^{-1} \prod_{\substack{m>0 \\ n\in\mathbb{Z}}} (1 - p^m q^n)^{c_{nm}}$$

5. $j(i) = 1728$ et $j(\rho) = 0$, on peut la définir sur cette ensemble d'après la proposition précédente. On enlève $j(i)$ par s'assurer de son holormorphie.
6. On enlève aussi les conjugués de i et ρ.

où $p = e^{2i\pi\sigma}$, $q = e^{2i\pi\tau}$.

6.2 Pour une forme modulaire

Définition. *Soit* $f \in \mathcal{M}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ *et* $n \in \mathbb{N}$
On définit un autre opérateur de Hecke par $T_n(f) = n^{k-1} \sum_{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})/A_n} (c\tau + d)^{-k} f(\gamma.\tau)$ *où* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Remarque. T_n est bien défini car f est une forme modulaire de poids k.
$T_n(f)$ est aussi une forme modulaire de poids k.

Proposition 6.1. *i)* $T_n(f) = n^{k-1} \sum_{a,d>0,ad=n} \frac{1}{d^k} \sum_{b=0}^{d-1} f(\frac{az+b}{d})$
ii) $T_n(f) = \sum_{m \in \mathbb{N}} b_m q^m$ avec $b_m = \sum_m q^m \sum_{r>0, r|(m,n)} r^{k-1} c_{mn/r^2}$ où c_i [7] est le i-ème coefficient de f
iii) $T_n T_m = T_n m$ si n et m sont premier entre eux.

Démonstration. *i)* est direct en prenant le même système de représentant qu'en 6.1. *ii)* On a :

$$T_n(f)) = n^{k-1} \sum_{a,d>0,ad=n} \frac{1}{d^k} \sum_{b=0}^{d-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{2i\pi m(a\tau+b)/d} = n^{k-1} \sum_{a,d>0,ad=n} \frac{1}{d^{k-1}} \sum_{m' \in \mathbb{Z}} c_{m'd} q^{am'}$$

En faisant un simple changement de variable on a *ii)*. Et *iii)* découle du fait que l'application $(b, c) \to ab + dc$ est injective pour $b < d$ si a et d sont premier entre eux et une manipulation lourde sur les indices. □

Proposition 6.2. Δ est un vecteur propre de T_n associé à la valeur propre $\tau(n)$.

Démonstration. Comme $T_n\Delta$ est une forme modulaire de poids 12, elle est proportionnel à Δ. En prenant $m = 1$ dans *ii)* on voit que le 1er coefficient de $T_n\Delta$ vaut $c_n = \tau(n)$ tandis que celui de Δ est égale à 1, on en déduit le résultat. □

Corollaire. *i)* $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ *si* n *et* m *premier entre eux.*
ii) $\tau(p)\tau(p^n) = \tau(p^{n+1}) + p^{11}\tau(p^{n-1})$ *avec* p *premier.*

Démonstration. *i)* découle de 6.1 et 6.2. Pour *ii)* il suffit de prendre $m = p$ dans l'expression de b_m. □

Proposition 6.3. On a les estimations suivantes :
i) Pour $f = G_k$, $a_n = O(n^{2k-1})$
ii) Pour $f \in \mathcal{S}_k$, $a_n = O(n^k)$
iii) Pour $f \in \mathcal{M}_k$, $a_n = O(n^{2k-1})$

Démonstration. *i)* vient du fait que $\sigma_{2k-1}(n) = O(n^{2k-1})$. *ii)* demande plus de travaille. Comme $f \in S_k$, $a_0 = 0$ donc $|f(z)| = O(q) = O(e^{-2\pi y})$, avec $y = Im(z)$. On en tire que $\phi(z) = |f(x+iy)|y^k$ est borné sur le domaine fondamental $\mathcal{F}$ mais de l'invariance de f par $SL_2(\mathbb{Z})$, on en déduit celle de ϕ pour l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$, ce qui permet d'en déduire qu'il existe M tel que $\forall z \in \mathbb{H}$, $|f(z)| \leq My^{-k}$. Maintenant à y fixé, x variant de 0 à 1, q décrit un cercle de centre 0 et de rayon $e^{-2\pi y}$. En appliquant la formules de cauchy à ce cercle, on obtient la majoration :

$$|a_n| \leq My^{-k}e^{2\pi ny}$$

En prenant $y = 1/n$, on obtient le résultat voulut. *iii)* se déduit de *ii)* et *i)*. □

Theoreme 6.2. On pose $\Phi_\Delta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \tau(n)/n^s$. On a alors la relation suivante :

$$\Phi_\Delta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}}$$

7. Si $i < 0$ alors $c_i = 0$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, Φ_Δ converge absolument pour $Re(s) > 2k = 12$. Donc on va se placer dans ce cas. Comme τ est multiplicative, la formule du produit eulérien est valide et on obtient :

$$\Phi_\Delta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(p^n) p^{-ns}$$

On pose $T = p^{-s}$, on doit donc montrer :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(p^n) T^n = \frac{1}{1 - \tau(p)T + p^{11}T^2}$$

En développant :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(p^n) T^n (1 - \tau(p)T + p^{11}T^2)$$

Le coefficient de T est $\tau(p) - \tau(p) = 0$, celui de T^{n+1} est

$$\tau(p^{n+1}) - \tau(p)\tau(p^n) + p^{11}\tau(p^{n-1})$$

qui est nul d'après le corollaire. □

Remarque. Hecke a démontré que Φ_Δ se prolonge analytiquement sur le plan complexe, ce qui peut se faire de façon assez direct avec la transformée de Mellin. Ce qui précède reste valable en remplaçant Δ par un vecteur propre de l'opérateur T_n qui est normalisé i.e $a_0 = 1$ et on remplace le terme p^{11} par p^{2k-1} où k est le poids du vecteur propre.
On remarque que la conjecture de Ramanujan revient à montrer que $P(T) = 1 - \tau(p)T + p^{11}T^2$ possède 2 racines complexes car la majoration de $\tau(p)$ correspond à un discriminant négatif de P.
De façon analogue, la même conjecture existe en remplaçant Δ avec un vecteur propre normalisé de T_n. Cette conjecture a aussi été résolue par Pierre Deligne.

7 Forme quasi-modulaire

Dans la partie précédente, nous avons dérivé des formes modulaires, il est donc légitime de se demander si la dérivée d'une forme modulaire est encore une forme modulaire, en général la réponse est non. L'ensemble $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ n'est pas stable par l'opérateur dérivé. Un moyen de rendre stable cet espace est d'affaiblir les conditions de modularité d'une telle fonction.

7.1 Définition et étude de E_2

Définition. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ est quasi-modulaire de poids k pour le groupe Γ si elle vérifie :*
i) f est une fonction holomorphe
ii) il existe $f_i, i = 0, 1, \cdots, k-1 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorphe tel que :

$$f(\gamma(\tau)) = j(\gamma,\tau)^k f(\tau) + \sum_{i=0}^{k-1} c^{k-i} j(\gamma,\tau)^i f_i(\tau) \ \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

iii) $\forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, $f|_k\gamma$ est développable en série de Fourier

On notera $\widetilde{\mathcal{M}}_*(\Gamma)$ l'ensemble des formes quasi-modulaire sur Γ. La condition *ii)* nous donne que $\widetilde{\mathcal{M}}_*(\Gamma)$ est stable par l'opérateur de dérivation. Nous allons maintenant définir la série d'Eisenstein de poids 2 qui va nous permettre de connaître la structure de $\widetilde{\mathcal{M}}_*(\Gamma)$.

Proposition 7.1. La série définie par :

$$G_2(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ m\neq 0 \ si \ n=0}} \frac{1}{(m+n\tau)^2}$$

est bien définie, holomorphe sur $\mathbb{H}$ et est quasi-modulaire de poids 2 pour $SL_2(\mathbb{Z})$ vérifiant :

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \ \ G_2(\gamma(\tau)) = j(\gamma,\tau)^2 G_2(\tau) - 2i\pi c j(\gamma,\tau).$$

Pour démontrer la 1ère partie de la proposition, on va établir un lemme préliminaire. La 2nd partie de la proposition est très technique et on l'admettra. Tout le problème réside sur le fait que la famille $(\frac{1}{(m+n\tau)^2})_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ n'est pas sommable

Lemme 7.1. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,*
On suppose que f admet un prolongement $\widetilde{f}$ sur $\overline{\mathbb{H}}$, holomorphe sur $\overline{\mathbb{H}} - A$ avec A une partie finie de $\mathbb{H}$ vérifiant $\lim_{|z|\to+\infty} |\widetilde{f}(z)| = 0$ Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2i\pi xt}dt = 2i\pi \sum_{a\in A} Res(z \to \widetilde{f}(z)e^{2i\pi xz}, a)$ pour tout $x \geq 0$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème des résidus sur le lacet $\Gamma_R = \{Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\} \cup [-R,R]$ et de faire tendre R vers $+\infty$ □

Démonstration. Soit $z = x + iy \in \mathbb{H}$
On note $\phi_y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \to \frac{1}{(x+iy)^2}$, $\widetilde{\phi}_y : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}, z \to \frac{1}{(z+iy)^2}$,
$\widetilde{\phi}_y$ et $z \to \widetilde{\phi}_y(-z)$ prolonge ϕ_y et $x \to \phi_y(-x)$ sur $\overline{\mathbb{H}}$ et $\overline{\mathbb{H}} - \{iy\}$ et $\lim_{|z|\to+\infty} |\widetilde{\phi_y}(z)| = 0$
D'après le lemme on obtient $\widehat{\phi_y}(x)$=0 si $x > 0$ et $\widehat{\phi_y}(x) = -4\pi^2 x e^{-2\pi xy}$ si $x < 0$
De plus, pour x=0 $\widehat{\phi_y}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+iy)^2}dt = 0$, et ϕ_y vérifie les hypothèses de la proposition **9.3** ($\widehat{\phi}_y$ est sommable et on peut prendre $\alpha = 3/2$).
De la formule de Poisson, on en tire :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_y(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}_y(n)e^{2in\pi x} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{2i\pi z},$$

donc

$$\forall \tau \in \mathbb{H} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} m e^{2i\pi mn\tau} = -4\pi^2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sigma_1(p) e^{2ip\pi\tau}.$$

La dernière égalité est justifiée par le théorème de sommation par paquets car pour tout q$\in \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_1(n)|q|^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{d\in\mathbb{N} \\ d|n}} d|q|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} m|q|^{mn} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m|q|^m}{1-|q|^m} < +\infty$$

Comme $(me^{2i\pi\tau mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est une famille sommable, le changement de variable $(m,n) = (-m,-n)$ donne

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{=} - 4\pi^2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sigma_1(p) e^{2ip\pi\tau},$$

d'où

$$G_2(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ m\neq 0 \ si \ n=0}} \frac{1}{(m+n\tau)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^2} + 2\zeta(2) = 2\zeta(2) - 8\pi^2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sigma_1(p) e^{2ip\pi\tau}$$

Maintenant qu'on a une expression "utilisable" de G_2, l'holomorphie est simple à prouver.

Soit K un compact de $\mathbb{H}$,
Il existe $R > 0$ et $a > 0$ tel que pour tout $z \in K$, $|\Re(z)| < R$ et $a < \Im(z) < \frac{1}{a}$ donc $|\sigma_1(n)e^{2i\pi nz}| \leq \sigma_1(n)e^{-2i\pi na}$. Cette majoration prouve la convergence normale de cette série et donc d'après le théorème de Weierstrass son holomorphie. □

Remarque. Il est possible de modifier la construction de G_2 pour corriger ce défaut et la rendre invariante par l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ mais cela coûtera l'holomorphie de G_2, une telle fonction est couramment appelée fonction quasi holomorphe. On normalise G_2 par $2\zeta(2)$ pour avoir E_2.

7.2 Le théorème de structure des formes quasi-modulaires

On va maintenant pouvoir énoncer un théorème qui nous dit que les formes quasi-modulaires sont des polynômes en les formes modulaires et E_2. Ce théorème étant aussi très technique, nous l'admettrons par la suite.

Theoreme 7.1. Soit Γ un sous groupe de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$, on a :

$$\widetilde{\mathcal{M}}_*(\Gamma) = \mathcal{M}(\Gamma) \otimes \mathbb{C}[E_2]$$

Remarque. Le théorème reste valable si on rajoute un caractère.

Dans le cas $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, on a d'après le théorème que $\widetilde{\mathcal{M}}_*(\Gamma) = \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$.

7.3 Expression de Δ

Theoreme 7.2. On a aussi la relation :

$$\Delta = q \prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$$

Démonstration. Nous allons esquisser les idées de la preuve.
On pose $f(\tau) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$.
Pour avoir le résultat, il suffit de montrer que f est une forme modulaire de poids 12, d'après la partie 4.
La première étape est de calculer la dériver logarithmique de f et de remarquer quelle est égale à $2i\pi E_2$. La deuxième étape est de dériver l'équation fonctionnelle qu'on souhaite montrer sur f et de voir qu'elle est équivalente à la relation que l'on a admise sur E_2. On en déduit que $f|\gamma = C_\gamma f$ avec C_γ une certaine constante. Comme T et S engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$, il suffit de montrer que $C_T, C_S = 1$ et cela s'en déduit de l'évaluation en i car $f(i) \neq 0$. Le dernier point à vérifier est que f possède une limite nulle en $i\infty$, ce qui est évident. □

8 Étude du lien entre équations WDVV et forme modulaire

8.1 Introduction aux équations WDVV

On suppose qu'on a la donnée d'une fonction $F(t_0, \cdots, t_n)$ de $n+1$ variables au moins 3 fois différentiables.
On suppose de plus qu'on a les propriétés suivantes :

$$\eta_{\alpha\beta} := \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t_0 \partial t_\alpha \partial t_\beta} \tag{1}$$

est une matrice non dégénérée ne dépendant pas de t.

$$F(c^{d_1}t_0, \cdots, c^{d_n}t_n) = c^{d_F}F(t_0, \cdots, t_n) \tag{2}$$

pour c non nulle et $d_1, \cdots, d_F$ des entiers naturels non nuls.
On pose $(\eta^{\alpha\beta}) = (\eta_{\alpha\beta})^{-1}$ et F doit vérifier l'équation WDVV :

$$\sum_{\delta,\gamma=0}^{n} \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\delta} \eta^{\delta\gamma} \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t_\gamma \partial t_\omega \partial t_\rho} = \sum_{\delta,\gamma=0}^{n} \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t_\alpha \partial t_\omega \partial t_\delta} \eta^{\delta\gamma} \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t_\gamma \partial t_\beta \partial t_\rho} \tag{3}$$

pour tous indices $\alpha, \beta, \omega, \rho$.

Remarque. On voit que si on rajoute un terme quadratique à F en les variables $t_1, \cdots, t_n$, cela ne change pas les équations (1) et (3), donc on peut considérer une classe plus grande de fonction en changeant (2).
Le système résultant des conditions (1) et (3) est appelé Witten - Dijkgraaf - E.Verlinde - H.Verlinde système (WDVV) et une solution des équations WDVV est appelée énergie libre.

Définition. *Une algèbre A sur $\mathbb{C}$ est appelée algèbre de Frobenius s'il vérifie les propriétés suivantes :*
i) A est une algèbre commutative et associative munie d'un neutre.
ii) A est munie d'un produit $\mathbb{C}$-linéaire symétrique non dégénéré :

$$A \times A \to \mathbb{C}, \ a, b \mapsto < a, b >$$

vérifiant $< ab, c >=< a, bc >$.

Proposition 8.1. Soit A un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et F une fonction vérifiant les conditions précédente alors pour tout t, on peut munir A d'une structure d'algèbre de Frobenius.

Démonstration. Soit $e_1, \cdots, e_n$ une base de A.
On pose :

$$c_{\alpha\beta\gamma}(t) = \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\gamma}$$

$$c_{\alpha,\beta}^{\gamma} = \sum_{\epsilon=0}^{n} \eta^{\gamma\epsilon} c_{\epsilon\alpha\beta}, \quad e_\alpha . e_\beta = \sum_{\gamma=0}^{n} c_{\alpha,\beta}^{\gamma} e_\gamma, \quad < e_\alpha, e_\beta >= \eta_{\alpha\beta}.$$

Pour tout α, β, γ, on a $c_{\alpha,\beta}^{\gamma} = c_{\beta,\alpha}^{\gamma}$ par symétrie des dérivées croisées donc l'opération $\cdot$ est commutative .
De plus,

$$< e_\alpha . e_\gamma, e_\beta >= \sum_{\delta=0}^{n} c_{\alpha,\gamma}^{\delta} < e_\delta, e_\beta >= \sum_{\delta=0}^{n} c_{\alpha,\gamma}^{\delta} \eta_{\delta\beta} = \sum_{\delta=0}^{n} \sum_{\epsilon=0}^{n} c_{\epsilon\alpha\gamma} \eta^{\delta\epsilon} \eta_{\delta\beta}$$

Or $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$
Donc

$$< e_\alpha . e_\gamma, e_\beta >= \sum_{\epsilon=0}^{n} c_{\epsilon\alpha\gamma} (\eta^{-1}\eta)_{\beta\epsilon} = c_{\beta\alpha\gamma}$$

$c_{\beta\alpha\gamma}$ est symétrique en β, α, γ ce qui suffit à démontrer la propriété *ii*). Il reste l'associativité.
On a :

$$(e_\alpha . e_\gamma) . e_\beta = \sum_{\omega,\epsilon=0}^{n} c_{\alpha\gamma}^{\omega} c_{\omega\beta}^{\epsilon} e_\epsilon \quad e_\alpha . (e_\gamma . e_\beta) = \sum_{\omega,\epsilon=0}^{n} c_{\gamma\beta}^{\omega} c_{\alpha\omega}^{\epsilon} e_\epsilon$$

.
Donc il suffit de montrer que

$$\forall \epsilon, \ \sum_{\omega=0}^{n} c_{\alpha\gamma}^{\omega} c_{\omega\beta}^{\epsilon} = \sum_{\omega=0}^{n} c_{\gamma\beta}^{\omega} c_{\alpha\omega}^{\epsilon}$$

Cette égalité découle de (3) en prenant les bons indices. Le fait que $< \, , \, >$ soit non dégénérée provient directement de (1).

□

Exemple. Pour $n = 1$, les seules fonctions qui conviennent à changement de variable linéaire près sont :

$$F(t_0, t_1) = \frac{1}{2}t_0^2 t_1 + t_1^k,\ k = \frac{3-d}{1-d},\ d \neq -1, 1, 3$$

$$F(t_0, t_1) = \frac{1}{2}t_0^2 t_1 + t_0^2 \log t_1$$

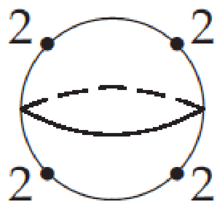
$$F(t_0, t_1) = \frac{1}{2}t_0^2 t_1 + \log t_1$$

$$F(t_0, t_1) = \frac{1}{2}t_0^2 t_1 + e^{t_1}$$

Pour $n > 1$, on obtient des équations différentielles difficilement résolubles dans le cas général. Cependant, nous allons en étudier une en particulière qui provient directement de la théorie de Gromov-Witten associée à une variété. Elle correspondra au cas $n = 5$ et à une variété que nous définirons dans la section qui suit. L'objectif des parties suivantes sera de démontrer la modularité de certains coefficients intervenant dans l'expression de cette fonction. C'est un résultat récent que l'on peut trouver dans l'article [1] et qui montre un lien intéressant entre forme modulaire et théorie de Gromov-Witten . Ce qui a été fait dans [1] ne se limite pas à la variété que nous allons étudier dans ce rapport.

8.2 L'ensemble $\mathcal{X}_2$

On se donne une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ où Λ est un réseau de $\mathbb{C}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ avec $\tau \in \mathbb{H}$. C'est une surface de Riemann de genre 1 et on remarque que l'application $z \to -z$ nous fournit une action biholomorphe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}/\Lambda$. Cette action possède 4 points fixes : $0, 1/2, \tau/2, 1/2 + \tau/2$ et on note $\mathcal{X}_2$ l'ensemble correspondant au quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ par l'action. Ce n'est plus une variété car l'action n'est pas lisse mais on peut montrer que cet ensemble est homéomorphe à une sphère marqué :



Les 4 points représentés sur la sphère correspondent aux points fixes de l'action. En tant qu'espace topologique, on peut alors lui associer sa cohomologie qui est un invariant topologique noté $H(\mathcal{X}_2) = H(S^2)$ mais celui ci ne tient pas compte du fait que nous n'avons pas une variété donc en général on va plutôt lui associer sa cohomologie orbifolde $H^{orb}(\mathcal{X}_2)$ qui en quelque sorte représente le nombre de sous-variétés que l'on peut dessiner sur cette sphère dont les poins représentés sur la sphère sont spéciaux. On peut voir sa cohomologie orbifolde comme un $\mathbb{C}$-ev de dimension 6 dont une base est formé par ces variétés modulo certaines relations.

8.3 Equation WDVV et forme modulaire

La fonction que nous allons étudier est définie sur la cohomohologie orbifolde $H^{orb}(\mathcal{X}_2)$ de $\mathcal{X}_2$ qui, pour faire simple, sera un espace vectoriel de dimension 6.

$$F : \mathbb{C}^6 \longrightarrow \mathbb{C}[[q]] \text{ où } q = e^{2i\pi\tau} \text{ avec } \tau \in \mathbb{H}$$

On définit $X, Y, Z \in \mathbb{C}[[q]]$ par :

$$F(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_P) = X(q)t_1t_2t_3t_4 + \frac{Y(q)}{4!}(\sum_{i=1}^{4} t_i^4) + \frac{Z(q)}{4} \sum_{1 \leq i,j \leq 4, i \neq j} (t_i^2 + t_j^2) + \text{termes cubiques}$$

Les termes cubiques sont tels que F vérifie (3) et :

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La fonction F vérifie aussi l'équation aux diviseurs, fait général de la théorie de Gromov-Witten, qui fournit les équations :

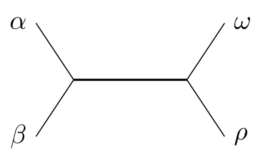
$$\frac{\partial F}{\partial t_P} = q \frac{\partial F}{\partial q},$$

$$X(q) = q + 4q^3 + O(q^5),$$

$$Y(q) = -\frac{1}{4} + O(q^3),$$

$$Z(q) = 2q^2 + O(q^4),$$

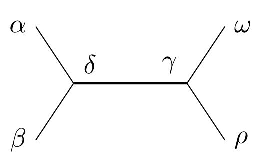
Un moyen pratique est de traduire l'équation (3) à l'aide des graphes suivants :



Ce graphe correspond au terme :

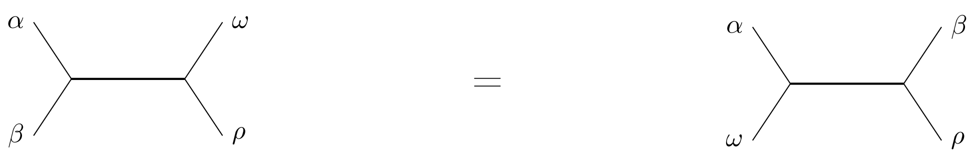
$$\sum_{\delta,\gamma=0}^{n} \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\delta} \eta^{\delta\gamma} \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t_\gamma \partial t_\omega \partial t_\rho}$$

Le sommet gauche indique que l'on dérive F à gauche par rapport à α et β. Le sommet droit nous indique que l'on dérive F à droite par rapport à ω et ρ. Lorsque l'on veut spécifier le terme (δ, γ) de la somme on utilisera le graphe suivant :

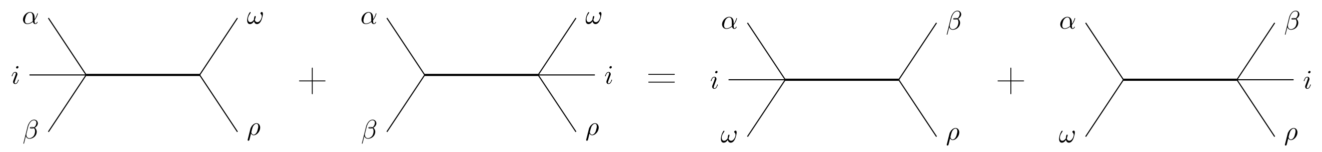


De manière générale, le nombre d'arêtes reliés à un sommet correspond au nombre de dérivations de F et une arête numérotée entre deux sommets correspond à une insertion d'un terme $\eta^{(\delta,\gamma)}$.

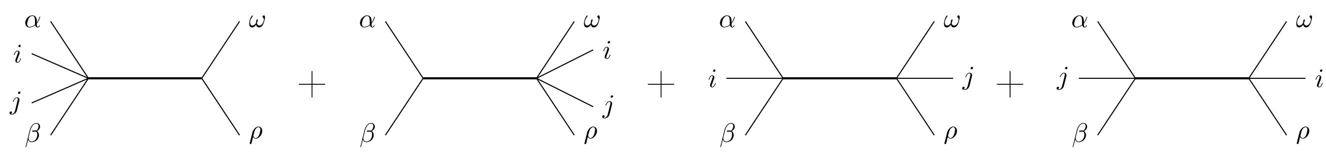
Donc l'équation (3) se traduit en :



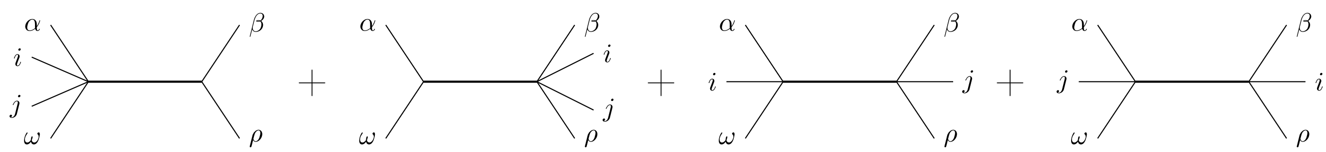
En dérivant l'équation (3), on voit comment se comportent les graphes si on rajoute de part et d'autre des branches. Par exemple, si on dérive l'équation (3) par rapport à la coordonnée t_i, on obtient les graphes suivants :



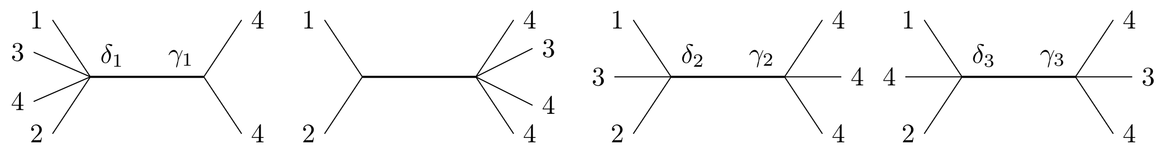
Si on dérive encore une fois, on obtient à gauche les graphes suivant (*) :



Et à droite (**) :

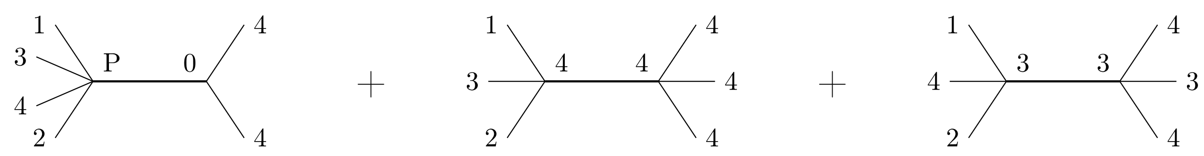


On a, par définition de η, que les seuls coefficients non nuls sont $\eta^{(P,0)} = 1$, $\eta^{(0,P))} = 1$, $\eta^{(\delta,\delta)} = 2$ avec $\delta \neq 0, P$. En prenant $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$, $\omega = 4$, $i = 3$, $j = 4$, on remarque que les graphes suivants sont nuls :

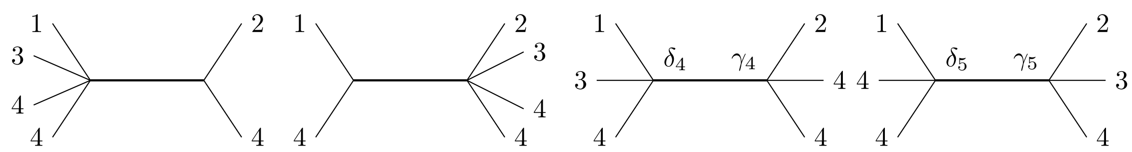


pour $(\delta_1, \gamma_1) \neq (P, 0)$, $(\delta_2, \gamma_2) \neq (4, 4)$, $(\delta_3, \gamma_2) \neq (3, 3)$

Donc dans (*), il reste uniquement :

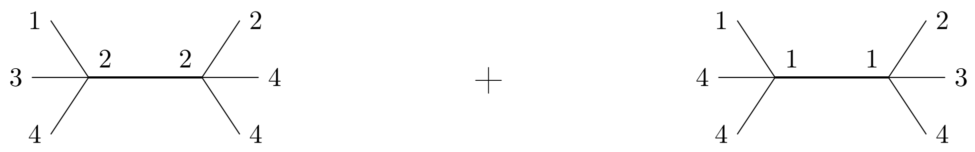


On remarque aussi la nullité des graphes suivants :



avec $(\delta_4, \gamma_4) \neq (2, 2)$, $(\delta_5, \gamma_5) \neq (1, 1)$

Et donc (**) devient :



Finalement (*) correspond uniquement à :

$$\frac{\partial^5 F}{\partial t_1 \partial t_3 \partial t_4 \partial t_2 \partial t_P}\eta^{(P,0)}\frac{\partial^3 F}{\partial^2 t_4 \partial t_0} + \frac{\partial^4 F}{\partial^2 t_1 \partial t_3 \partial t_4}\eta^{(4,4)}\frac{\partial^4 F}{\partial^4 t_4} + \frac{\partial^4 F}{\partial^2 t_1 \partial t_4 \partial t_3}\eta^{(3,3)}\frac{\partial^4 F}{\partial^2 t_3 \partial^2 t_4}$$

qui vaut par définition

$$\frac{1}{2}q\frac{\partial X}{\partial q} + 2XY + 2XZ,$$

et (**) à :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t_1 \partial t_3 \partial t_4 \partial t_2}\eta^{(2,2)}\frac{\partial^4 F}{\partial^2 t_2 \partial^4 t_4} + \frac{\partial^4 F}{\partial^2 t_1 \partial^2 t_4}\eta^{(1,1)}\frac{\partial^4 F}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3 \partial t_4}$$

qui vaut par définition

$$2XZ + 2XZ,$$

d'où une première équation sur les coefficients de F :

$$q\frac{\partial X}{\partial q} = 4X(Z - Y)$$

En faisant le même travaille pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\omega = 4$, $\rho = 4$, $i = 1$, $j = 1$ et $\alpha = P$, $\beta = 1$, $\omega = 2$, $\rho = P$, $i = 3$, $j = 4$ on obtient 2 autres relations. Pour résumé, on a le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} q\frac{\partial X}{\partial q} & = 4X(Z - Y) \\ q\frac{\partial Y}{\partial q} & = 12Z^2 - 4X^2 - 8YZ \\ q\frac{\partial Z}{\partial q} & = 4X^2 - 4Z^1 \end{cases}$$

Ces équations permettent de déduire le théorème suivant.

Theoreme 8.1.

$$\begin{cases} X(q) & = -\frac{1}{16}C_4^2(q) \\ Y(q) & = -\frac{1}{16}(3D_4(q) + A_4^2(q) + C_4^2(q)) \\ Z(q) & = -\frac{1}{16}(D_4(q) - B_4^2(q)) \end{cases}$$

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que $q\frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial \tau}$ donc :

$$-\frac{1}{16}q\frac{\partial C_4^2}{\partial q} = -\frac{1}{16}\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial C_4}{\partial \tau}C_4$$

Par le théorème **4.1**, on a

$$-\frac{1}{16}q\frac{\partial C_4^2}{\partial q} = -\frac{1}{32}C_4^2(D_4 + A_4^2)$$

Or, d'après **4.1**, on a

$$4(\frac{-1}{16})^2 C_4^2(-2D_4 - B_4^2 - A_4^2 - C_4^2) = 4(\frac{-1}{16})^2 C_4^2(-2D_4 - A_4^2) = -\frac{1}{32}C_4^2(D_4 + A_4^2)$$

Si on pose
$$X' = -\frac{1}{32}C_4^2,\ Y' = \frac{-1}{16}(3D_4 + A_4^2 + C_4^2), Z' = \frac{-1}{16}(D_4 - B_4^2),$$
on a obtenu que :
$$q\frac{\partial X'}{\partial q} = 4X'(Z' - Y').$$
De manière analogue, on obtient les mêmes équations pour Y', Z'. On a donc que (X, Y, Z) et (X', Y', Z') sont solutions du même système différentiel d'ordre 1. Pour conclure, il suffit de montrer que X et X', Y et Y', Z et Z possède le même développement jusqu'à l'ordre 1 car il y a au plus une solution si on connaît les deux premiers termes. Pour le voir il suffit d'identifier les termes dans le développement en série formelle des deux membres. Les hypothèses sur F et **4.1** nous fournissent les développements voulus.

□

Ainsi, les fonctions X, Y, Z intervenant dans la description de F sont en fait des formes modulaires. Cette fonction montre un lien surprenant entre les équations $WDVV$, forme modulaire et, plus généralement, théorie de Gromov-Witten. Pour plus d'informations sur la définition de F, voir [1].

9 Annexe

Dans cette partie, on va montrer des résultats que l'on va constamment utiliser dans ce TER.

Proposition 9.1. Soit Γ un sous-groupe d'indice fini m dans $SL_2(\mathbb{Z})$ et T=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors il existe n divisant m tel que $\mathrm{T}^n \in \Gamma$ et pour tout $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ $\mathrm{T}^n \in \sigma^{-1}\Gamma\sigma$.

Démonstration. Pour le premier point, on considère l'action par translation de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma$. Cela nous donne donc un morphisme Φ de $SL_2(\mathbb{Z})$ dans $Bij(SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma)$. Son noyau est un sous groupe distingué de $SL_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini car $SL_2(\mathbb{Z})/ker(\Phi)$ s'injecte dans un ensemble fini. De plus $ker(\Phi) = \cap_{b \in SL_2(\mathbb{Z})} b^{-1}\Gamma b$ donc est inclu dans Γ. On conclut par Lagrange car pour $n = |SL_2(\mathbb{Z})/ker(\Phi)|$, $\mathrm{T}^n \in ker(\Phi)$ et on a n divise m. Le second point découle de la description de $ker(\Phi)$. $\square$

Proposition 9.2. Soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe de période N. Alors f se factorise de façon unique en $\tilde{f}$ via la bijection $q : \mathbb{H} \to D - \{0\}$, $\tau \mapsto e^{2i\pi\tau/N}$. De plus les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) $\tau \mapsto f(\tau)$ admet une limite quand $Im(\tau) \to +\infty$
ii) $|f|$ est bornée sur $\{\tau \in \mathbb{H}, Im(\tau) > 1\}$
iii) $|\tilde{f}(q)|$ est bornée au voisinage de l'infini.
iv) $\tilde{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur D

Démonstration. Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, $f(\tau + N) = f(\tau)$, et par définition de q, $q(\tau + N) = q(\tau)$, de plus il est évident que q est une bijection. On peut donc définir $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(z) = f(\tau)$ avec $q(\tau) = z$. On peut vérifier que $\tilde{f}$ convient et est bien définie. Montrons maintenant les équivalences.
Les implications $i) \Rightarrow ii)$, $ii) \Rightarrow iii)$ et $iv) \Rightarrow i)$ sont évidentes. Supposons $iii)$, on a que q induit une bijection bi-holormorphe entre l'ouvert $\{\tau \in \mathbb{H}, |\Re(\tau)| < N/2\}$ est $D - \mathbb{R}_{\leq 0}$ dont la réciproque pour être défini par $g = \frac{N}{2i\pi} Ln$ où Ln est le logarithme principal et on a que pour $z \in D - \mathbb{R}_{\leq 0}$, $\tilde{f}(z) = (f \circ g)(z)$. Donc $\tilde{f}$ est holomorphe sur $D - \mathbb{R}_{\leq 0}$, en prenant $\{\tau \in \mathbb{H}, 0 < \Re(\tau) < N\}$ et $D - \mathbb{R}_{\geq 0}$ comme nouveau ouvert bi-holormorphe par q on obtient l'holormorphie sur $D - \mathbb{R}_{\geq 0}$, donc sur $D - \{0\}$ et par hypothèse, $\tilde{f}$ est bornée en 0, donc 0 est une singularité apparente d'où $iv)$.

$\square$

Proposition 9.3. (Formule de Poisson) Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :
$\exists M > 0, \ \exists, \alpha > 1, \ \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$
$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$
Alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2ni\pi x}$.

Démonstration. Les sommes sont bien définies par hypothèse sur f, la série de fonction $\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ est bien définie, 1-périodique et converge normalement sur tout segment. Elle définit donc une fonction continue et 1-périodiques. Ses coefficients de Fourier sont donnés par $c_n = \int_0^1 \psi(x) e^{-2i\pi x} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(x) dx = \widehat{f}(n)$. Mais on sait que sa série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ converge absolument vers ψ d'où le résultat. $\square$

Proposition 9.4. Soit $N, k \geq 1$ un entier, la projection $\pi : SL_k(\mathbb{Z}) \to SL_k(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est un morphisme surjective et induit donc un isomorphisme.

Démonstration. π est un morphisme de groupe, il reste a montrer qu'il est surjectif. Procédons par récurrence sur k, le cas $k = 1$ est direct.
Soit $A \in M_k(\mathbb{Z})$ tel que $det(A) = 1 \text{ mod}(N)$, comme $\mathbb{Z}$ est un anneau principal, d'après le théorème des facteurs invariants, il existe $P, Q \in GL_k(\mathbb{Z})$ et $a_1, \cdots, a_k$ tel que $a_1 \cdots a_k = 1 \text{ mod } (N)$ et $PAQ = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_k \end{pmatrix}$

On définit aussi : $W = \begin{pmatrix} b & 1 & & & \\ b-1 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1-a_2 & a_1a_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

Où $b = a_2 \cdots a_k$, donc $a_1 b = det(A) = 1 \bmod (N)$ et on a $WPAQX = A' \bmod (N)$

Par hypothèse de récurrence , la matrice en bas à droite de A' se relève en une matrice C dans $SL_{k-1}(\mathbb{Z})$. On vérifie que $B = P^{-1}W^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1-a_1 & & \\ 0 & & C \end{array}\right) X^{-1}Q^{-1}$ convient. □

Proposition 9.5. $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendre $SL_2(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Soit G le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T. Soit τ un point de l'intérieur de $\mathcal{F}$. Soit $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, d'après la démonstration de 4.3, il existe $g \in G$ tel que $g^{-1}\gamma\tau \in \mathcal{F}$. Ainsi $g^{-1}\gamma$ fixe τ i.e $g^{-1}\gamma = \pm I_2$ donc $\gamma \in G$ □

Références

[1] Yefeng Shen and Jie Zhou. *Ramanujan Identities and Quasi-Modularity in Gromov-Witten Theory.* `https://arxiv.org/pdf/1411.2078v3.pdf`, 2017.

[2] Jean Pierre Serre. *Cours d'arithmétique.*

[3] Boris DUBROVIN. *Geometry of 2D Topological Field Theories.* `https://arxiv.org/pdf/hep-th/9407018v1.pdf`, 1994.

[4] Gaetan Chenevier. *Forme modulaires.* `http://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr/M2_FA/cours2.pdf`.