

TER: Groupe de l'allumeur de réverbères

Julie BENKARA, sous la direction de François DAHMANI

Janvier - Mai 2021

Université Grenoble Alpes,

Institut Fourier

Table des matières

1	Introduction	2
2	Comprendre le groupe de l’allumeur de réverbères	3
2.1	Produits en couronne	3
2.1.1	Définition	3
2.1.2	Les exemples principaux	3
2.1.3	Notations spécifiques	3
2.1.4	Heuristique sur l’allumeur de réverbères	4
2.2	Premières propriétés du groupe de l’allumeur de réverbères	4
2.2.1	Produit de deux éléments de $\mathbf{L}_{2,1}$	4
2.2.2	Une représentation linéaire pratique	6
2.2.3	Propriétés de théorie de groupe pour $\mathbf{L}_{2,1}$	8
2.2.4	Générateurs de $\mathbf{L}_{2,1}$	10
2.2.5	Présentation de $\mathbf{L}_{2,1}$	11
3	Longueur et métrique de mots	13
3.1	Définitions et propriétés (les géodésiques)	13
3.2	Conséquences : les impasses dans $\mathbf{L}_{2,1}$	16
4	Géométrie du groupe $\mathbf{L}_{2,1}$	17
4.1	Graphes de Diestel-Leader	17
4.1.1	Définitions	17
4.1.2	Isomorphisme de graphes	19
4.2	Marches aléatoires	24
4.2.1	Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d	24
4.2.2	Lien avec $\mathbf{L}_{2,d}$	29
4.2.3	Marche aléatoire dans $\mathbf{L}_{2,1}$ (heuristique)	29
5	Références :	30

1 Introduction

Soit G un groupe. Commençons par rappeler que G est dit résoluble de degré 2 s'il n'est pas abélien mais que son groupe dérivé (c'est-à-dire le groupe engendré par ses commutateurs) $\langle ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G \rangle$ est abélien.

Nous pouvons en donner plusieurs exemples familiers :

— le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ des matrices triangulaires supérieures : $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}$

— Le groupe d'Heisenberg à coefficients entiers : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$

— $\mathbb{Z}^2 \rtimes_M \mathbb{Z}$, où $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ agit de façon naturelle. C'est-à-dire $(h_1, k_1) + (h_2, k_2) = (h_1 + k_1 + Mh_2, k_1 + k_2)$ pour tout $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$.

Notons que le premier exemple n'est pas de type fini (car tout simplement non dénombrable), et son groupe dérivé non plus ; celui-ci étant $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \right\}$.

En revanche, les deux autres groupes sont de type fini et leur groupe dérivé aussi ; ceux-ci étant respectivement engendrés par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\{(1, 0)\}$.

Dans ce TER nous nous proposons d'étudier un groupe plus atypique : le groupe de l'allumeur de réverbères. Il s'agira du groupe $(\oplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_i) \rtimes_f \mathbb{Z}$ pour un certain morphisme $f : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\oplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_i)$, que nous donnerons. Nous verrons que ce groupe est de type fini, résoluble d'ordre 2, mais que son groupe dérivé n'est pas de type fini. Nous nous intéresserons aussi à une présentation par générateurs et relations de ce groupe de l'allumeur de réverbères. Nous constaterons que, sur le système de générateurs le plus intuitif au moins, nous avons besoin d'un nombre infini de relations pour présenter ce groupe.

Nous verrons également que ce groupe n'est pas un groupe linéaire sur \mathbb{C} (dans le sens où il n'admet aucune représentation linéaire complexe intéressante). En revanche, il admet une représentation linéaire remarquable sur un anneau plus exotique.

Nous étudierons en outre la géométrie du groupe de l'allumeur de réverbères. Nous nous intéresserons à son graphe de Cayley sur un système de générateurs bien choisi (graphe dont les sommets sont les éléments du groupe et les arêtes sont les générateurs). Celui-ci correspond en fait (à isomorphisme près) à un graphe remarquable : graphe de Diestel-Leader. Il s'agira en fait du produit de deux arbres, dans un sens défini plus tard.

En plus de toutes ces propriétés remarquables, nous démontrerons que dans notre groupe, muni d'un certain ensemble de générateurs, nous pouvons résoudre simplement un problème complexe dans le cas d'un groupe générique : le problème des géodésiques. Il est en fait relativement aisé, étant donné un point de notre groupe, de trouver le chemin le plus court menant à lui, ainsi que de donner sa longueur.

Pour terminer, nous nous intéresserons à la marche aléatoire uniforme sur \mathbb{Z}^d et ce qu'elle peut nous apprendre à propos de notre groupe de l'allumeur de réverbères.

2 Comprendre le groupe de l'allumeur de réverbères

2.1 Produits en couronne

Rappel : Soient H, K deux groupes, $\phi : K \mapsto \text{Aut}(H)$ et $H \rtimes_{\phi} K$ le produit semi-direct associé. Soient $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$. On a de façon générale : $(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 \phi(k_1)(h_2), k_1 k_2)$.

2.1.1 Définition

Soient H un groupe, I un ensemble quelconque et pour tout $i \in I$, H_i une copie de H . Alors $(\bigoplus_{i \in I} H_i)$ est le groupe des suites valant le neutre de H à partir d'un certain rang, indexées par I .

Soit maintenant R un groupe muni d'une action sur I par permutation, notée $\sigma : R \times I \rightarrow I$. Cette action induit un morphisme $\tilde{\sigma} : R \rightarrow \text{Aut}(\bigoplus_{i \in I} H_i)$ tel que $\tilde{\sigma}(r) : (h_i)_{i \in I} \mapsto (h_{\sigma(r^{-1}, i)})_{i \in I}$.

Notons qu'il s'agit d'un r^{-1} dans la définition de $\tilde{\sigma}(r)$ afin d'avoir un morphisme. En effet, fixons i ;

$$\tilde{\sigma}(r_1 r_2)(h_i) = (h_{\sigma(r_2^{-1} \cdot r_1^{-1}, i)}) = (h_{\sigma(r_2^{-1}, \sigma(r_1^{-1}, i))}) = \sigma(r_1)(\sigma(r_2)(h_i))$$

(la deuxième égalité vient du fait que σ est une action de groupe).

Ce morphisme permet de définir un produit semi-direct $(\bigoplus_{i \in I} H_i) \rtimes_{\tilde{\sigma}} R$. Ce produit est appelé **produit en couronne de H par R à travers σ** , et est noté $H \wr_{\sigma} R$.

2.1.2 Les exemples principaux

- Soient H un groupe, $I = \{1, \dots, n\}$, $R = \mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de I ; alors $H \wr R = (\bigoplus_{i=1}^n H_i \rtimes \mathfrak{S}_n)$; l'action étant celle des permutations des coordonnées dans $\bigoplus_{i=1}^n H_i$.
- Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Posons $I = R = \mathbb{Z}^n$, avec R agissant par ϕ l'addition de deux éléments de I coordonnée par coordonnée. Posons enfin $H = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Alors $H \wr_{\tilde{\phi}} R = (\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}^n} (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})_i) \rtimes_{\tilde{\phi}} \mathbb{Z}^n$. Nous noterons ce produit en couronne de la façon suivante : $\mathbf{L}_{k,n} := (\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}^n} (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})_i) \rtimes_{\tilde{\phi}} \mathbb{Z}^n$.
- En particulier, le produit en couronne $\mathbf{L}_{2,1} = (\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_i) \rtimes_{\tilde{\phi}} \mathbb{Z}$ est le **groupe de l'allumeur de réverbères**.

Remarque. Nous expliciterons ϕ et $\tilde{\phi}$ dans la section 2.2.1

2.1.3 Notations spécifiques

Soient H un groupe, I un ensemble, R un groupe muni d'une action sur I par permutation σ . Nous noterons un élément g de $H \wr_{\sigma} R$ de la façon suivante :

$$g = ((\epsilon_i(g))_{i \in I}, n(g))$$

Dans cette notation, $(\epsilon_i(g))_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} H_i$ (c'est-à-dire $(\epsilon_i(g))_{i \in I}$ est une suite presque nulle d'éléments de H), et $n(g) \in R$.

Cependant, lorsque le contexte sera suffisamment clair pour le permettre, nous écrirons plutôt $g = ((\epsilon_i)_{i \in I}, n)$.

Dans le cas où $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, connaître $(\epsilon_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} H_i$ revient à connaître son support $\{j \in I \mid \epsilon_j \neq 0\}$ que l'on notera $\text{supp}((\epsilon_i)_{i \in I})$. Par définition, ce support sera toujours fini. Nous nous permettrons donc dans certains cas, la notation abusive de remplacer $(\epsilon_i)_{i \in I}$ par son support.

En pratique, cela signifie que si $\text{supp}((\epsilon_i)_{i \in I}) = \{i_1, \dots, i_k\}$, on aura $(\{i_1, \dots, i_k\}, n) = ((\epsilon_i)_{i \in I}, n)$.

Dans la suite, sauf annonce du contraire, nous travaillerons dans $\mathbf{L}_{2,1}$.

2.1.4 Heuristique sur l'allumeur de réverbères

Pourquoi nomme-t-on $\mathbf{L}_{2,1}$ ($(\oplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))_i \rtimes_{\tilde{\phi}} \mathbb{Z}$ pour rappel), le groupe de l'allumeur de réverbères ?

Nous pouvons penser à \mathbb{Z} comme une rue infiniment grande, indexée par des entiers relatifs. Associée à chaque entier, il y a une lampe, représentée par une copie de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Chaque lampe possède deux états, allumée ou éteinte (0 ou 1 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Nous pouvons ensuite imaginer qu'un allumeur de réverbères circule dans cette rue, partant toujours de la position neutre du groupe $(\{\}, 0)$ (voir figure 1 ci-dessous) et allumant ou éteignant des lampes.

Soit $g \in \mathbf{L}_{2,1}$, s'écrivant $((\epsilon_i(g))_{i \in \mathbb{Z}}, n(g))$. Alors, dans cette situation, l'entier $n(g)$ correspond à la position finale de l'allumeur de réverbères et $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ à l'état final des lampes : la lampe i est allumée si $\epsilon_i = 1$, éteinte sinon.

Garder cette image au long de ce TER nous permettra notamment de représenter de façon graphique les éléments de $\mathbf{L}_{2,1}$ ainsi que certaines de ses propriétés. En voici un premier exemple :

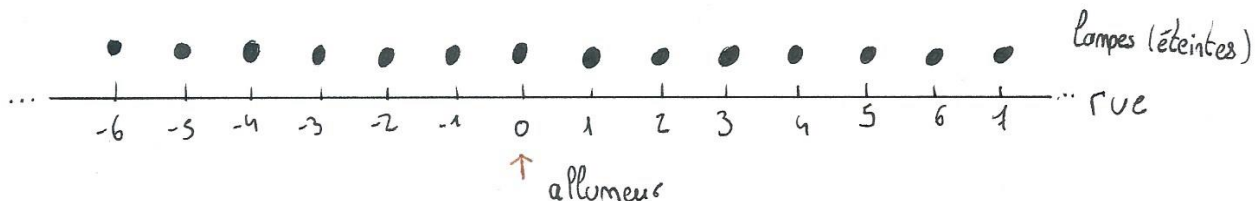


FIGURE 1 – Une première illustration d'un élément du groupe de l'allumeur de réverbères : l'élément neutre

Remarque. Sur les illustrations, sauf mention du contraire, les lampes non représentées seront considérées comme éteintes.

2.2 Premières propriétés du groupe de l'allumeur de réverbères

2.2.1 Produit de deux éléments de $\mathbf{L}_{2,1}$

Soit ϕ l'action servant à définir $\mathbf{L}_{2,1}$, donnée dans le deuxième exemple de la section 2.1.2, à savoir l'addition coordonnée par coordonnée.

On a $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{S}_n$, telle que $\phi(k) : z \mapsto z + k$. Il est clair que ceci définit une action de groupe.

On définit donc naturellement l'application induite $\tilde{\phi} : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\oplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))_i$ telle que $\tilde{\phi}(k) = \phi_k$, où $\phi_k((\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (\epsilon_{i-k})_{i \in \mathbb{Z}}$.

Remarque. Contrairement à ce que l'écriture de ϕ_k semble indiquer à première vue, il s'agit bien d'une addition de coordonnées. En effet, par exemple, on peut vérifier que ϵ_0 sera envoyé en k -ième position en regardant coefficient $i = k$ de l'image : $(\epsilon_{i-k})_{i \in \mathbb{Z}} = (\epsilon_0)$.

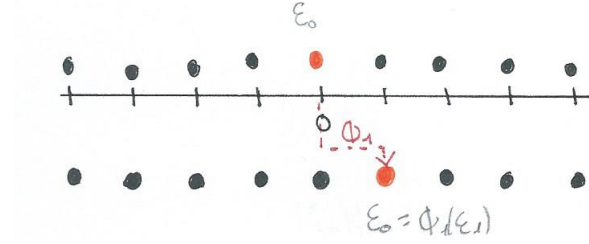


FIGURE 2 – Exemple : ϕ_1 appliquée à $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où $\epsilon_0 = 1, \epsilon_i = 0$ pour tout $i \neq 0$.

Maintenant que nous avons explicité le morphisme du produit semi-direct, écrivons à quoi correspond la multiplication de deux éléments de $\mathbf{L}_{2,1}$.

Proposition 2.1. Soient $g = ((\epsilon_i(g))_{i \in \mathbb{Z}}, n(g))$ et $h = ((\epsilon_i(h))_{i \in \mathbb{Z}}, n(h)) \in \mathbf{L}_{2,1}$. Le produit de h par g est $hg = ((\epsilon_i(h) + \epsilon_{i-n(h)}(g))_{i \in \mathbb{Z}}, n(h) + n(g))$.

Démonstration. Soient g, h comme dans l'énoncé ; alors on a en appliquant la définition du produit semi-direct :

$$\begin{aligned} hg &= ((\epsilon_i(h))_{i \in \mathbb{Z}} + \phi_{n(h)}((\epsilon_i(g))_{i \in \mathbb{Z}}), n(h) + n(g)) \\ &= ((\epsilon_i(h))_{i \in \mathbb{Z}} + (\epsilon_{i-n(h)}(g))_{i \in \mathbb{Z}}, n(h) + n(g)) \\ &= ((\epsilon_i(h) + \epsilon_{i-n(h)}(g))_{i \in \mathbb{Z}}, n(h) + n(g)) \end{aligned}$$

□

Heuristique : La multiplication de deux éléments h, g de $\mathbf{L}_{2,1}$ correspond à la concaténation de ces deux actions pour l'allumeur de réverbères ; c'est-à-dire que l'allumeur de réverbères effectue h en partant de la position 0 puis effectue g depuis la position finale de h , en éteignant une lumière si celle-ci avait été allumée par h .

Exemple : Soient $h = (\{2, 6\}, 6)$, et $g = (\{0, 1\}, 2)$ dans $\mathbf{L}_{2,1}$. Alors $hg = (\{2, 7\}, 8)$. En effet, l'allumeur de réverbères effectue g mais en partant de la position finale 6 de h , il éteint donc la lampe 6, car elle était déjà allumée, et allume la suivante, 7, et finit en position $6 + 2 = 8$. Voir figure 3.

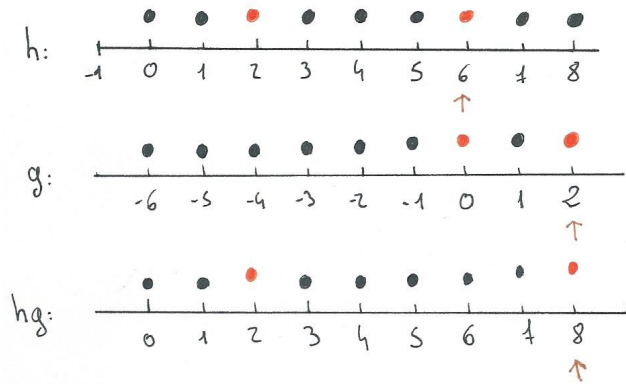


FIGURE 3 – Exemple de multiplication de deux éléments

Remarque. En reprenant les h et g de l'exemple ci-dessus, nous pouvons vérifier que $gh = (\{0, 1, 2, 4, 8\}, 8)$. En particulier : $\mathbf{L}_{2,1}$ n'est pas un groupe abélien.

Remarque. Soit $g \in \mathbf{L}_{2,1}$. Le calcul du produit de deux éléments de $\mathbf{L}_{2,1}$ nous permet en particulier d'explicitier g^{-1} . On peut vérifier directement que si $g = ((\epsilon_i(g))_{i \in \mathbb{Z}}, n(g))$, alors : $n(g^{-1}) = -n(g)$ et $(\epsilon_i(g^{-1}))_{i \in \mathbb{Z}} = (\epsilon_{i-n(g)}(g))_{i \in \mathbb{Z}}$.

N.B : Nous verrons $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et \mathbb{Z} comme des groupes additifs. En revanche, $(\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ sera vu avec des notations multiplicatives (puisqu'il n'est pas commutatif).

2.2.2 Une représentation linéaire pratique

Dans ce paragraphe, nous allons introduire une représentation linéaire particulière de $\mathbf{L}_{2,1}$. Cette représentation nous simplifiera les calculs lorsque nous analyserons les propriétés de groupe de $\mathbf{L}_{2,1}$, dans le paragraphe suivant.

Définition 2.2. Soit A un anneau commutatif. L'anneau des polynômes de Laurent sur A est l'anneau des polynômes $A[X, Y]$ à deux indéterminées, quotienté par l'idéal $(XY - 1)$, de sorte que Y soit l'inverse de X . On le notera $A[t, t^{-1}]$.

En particulier, Un polynôme de Laurent sur A est de la forme $p(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i$, où pour tout i , $a_i \in A$ et les a_i sont presque tous nuls.

Notation : dans la suite nous noterons certaines fois \mathbb{F}_2 pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans un souci de lisibilité.

Nous allons nous intéresser à la représentation (V, ρ) suivante :

— $V = (\mathbb{F}_2[t, t^{-1}])^2$. Donc $GL(V) = GL_2(\mathbb{F}_2[t, t^{-1}])$

— $\rho : \mathbf{L}_{2,1} \rightarrow GL(V)$ tel que $\rho((\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, m) = \begin{pmatrix} t^m & P_g(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $P_g(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \epsilon_i t^i$.

Puisque les $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont presque tous nuls, P_g est bien un polynôme de Laurent comme défini ci-dessus avec $A = \mathbb{F}_2[t, t^{-1}]$.

Montrons que ρ est bien un morphisme. On notera pour cette preuve $\alpha : \mathbf{L}_{2,1} \mapsto \mathbb{F}_2[t, t^{-1}]$ telle que $\alpha(g) = P_g$.

1. $\rho(1_{L_{2,1}}) = \rho(\{\}, 0) = \begin{pmatrix} t^0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_G$
2. Soient $g = ((\epsilon_i(g))_{i \in \mathbb{Z}}, n(g))$, $h = ((\epsilon_i(h))_{i \in \mathbb{Z}}, n(h)) \in \mathbf{L}_{2,1}$.

$$\begin{aligned} \rho(g) \cdot \rho(h) &= \rho((\epsilon_i(g))_{i \in \mathbb{Z}}, n(g)) \cdot \rho((\epsilon_i(h))_{i \in \mathbb{Z}}, n(h)) \\ &= \begin{pmatrix} t^{n(g)} & P_g(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{n(h)} & P_h(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^{n(g)+n(h)} & P_g(t) + t^{n(g)}P_h(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$- \rho(gh) = \begin{pmatrix} t^{n(g)+n(h)} & \tilde{P}(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } \tilde{P} \text{ correspond à l'image de } gh \text{ par } \alpha.$$

Or $\alpha(gh) = P_g + t^{n(g)}P_h$ par définition du produit semi-direct. Donc $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$.

On a donc bien montré que ρ est un morphisme.

Proposition 2.3. $\left\{ \begin{pmatrix} t^m & P(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z}, P(t) \in \mathbb{F}_2[t, t^{-1}] \right\}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{F}_2[t, t^{-1}])$ isomorphe à $\mathbf{L}_{2,1}$.

Démonstration. On note G l'ensemble $\{M_g(t) = \begin{pmatrix} t^m & P(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z}, P(t) \in \mathbb{F}_2[t, t^{-1}]\}$.

1. **G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{F}_2[t, t^{-1}])$:**
 G est l'image d'un groupe par le morphisme ρ défini ci-dessus. C'est donc bien un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{F}_2[t, t^{-1}])$.
2. **G est isomorphe à $\mathbf{L}_{2,1}$:**
Par abus, notons encore $\rho : \mathbf{L}_{2,1} \mapsto G$ la restriction de ρ de $\mathbf{L}_{2,1}$ dans son image.
Reste à voir que ρ est injectif, mais c'est évident puisqu'un polynôme est déterminé de façon unique par ses coefficients.

Donc ρ est bien un isomorphisme entre $\mathbf{L}_{2,1}$ et $\{M_g(t) = \begin{pmatrix} t^m & P(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z}, P(t) \in \mathbb{F}_2[t, t^{-1}]\}$. □

Exemples : Soit ρ l'isomorphisme de la preuve précédente :

$$- \rho(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$- \rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculons $\rho(a_k)$:

$$\begin{aligned} \rho(a_k) &= \rho(t)^k \rho(a) \rho(t)^{-k} \\ &= \begin{pmatrix} t^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$- \text{Soit } g \in \mathbf{L}_{2,1} \text{ tel que } \rho(g) = \begin{pmatrix} t^{n(g)} & P_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Alors } \rho(gt) = \begin{pmatrix} t^{n(g)+1} & P_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(ga) = \begin{pmatrix} t^{n(g)} & t^{n(g)} + P_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Propriétés de théorie de groupe pour $\mathbf{L}_{2,1}$

Définition 2.4. Soit G un groupe. Le **groupe dérivé de G** , noté $D(G)$, est le groupe des commutateurs de G , i.e $D(G) = \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle$ (où, pour rappel, $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$).

Lemme 2.5. Soient G un groupe, H un groupe abélien, $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupe. Alors $D(G) \subset \ker(f)$.

Démonstration. Soient $g, h \in G$.

$$\begin{aligned} f(ghg^{-1}h^{-1}) &= f(g)f(h)f(g^{-1})f(h^{-1}) \\ &= 1 \quad \text{car } H \text{ est abélien} \end{aligned}$$

□

Proposition 2.6. Soit G un groupe. On a que $D(G)$ est distingué dans G .
On peut donc définir l'**abélianisé** de G comme étant $G/D(G)$.

Démonstration. Soit G un groupe, $g, h, k \in G$.

$$\begin{aligned} k[g, h]k^{-1} &= kghg^{-1}h^{-1}k^{-1} \\ &= k g k^{-1} k h k^{-1} k g^{-1} k^{-1} k h^{-1} k^{-1} \\ &= [k g k^{-1}, k h k^{-1}] \quad \text{qui appartient bien à } D(G) \end{aligned}$$

□

Proposition 2.7. L'abélianisé de $\mathbf{L}_{2,1}$ est isomorphe à \mathbb{Z} .

Démonstration. Soit $f : \mathbf{L}_{2,1} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $((\epsilon_i(g))_{i \in \mathbb{Z}}, n(g)) \mapsto n(g)$

On a $\ker(f) = \{((\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, 0) \mid (\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \oplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{F}_2)_i\}$.

Puisque \mathbb{Z} est abélien, par le lemme, il suffit de montrer que $\ker(f) \subset D(\mathbf{L}_{2,1})$.

Calcul d'un élément de $D(\mathbf{L}_{2,1})$: Soient $g, h \in \mathbf{L}_{2,1}$ de matrices respectives $\begin{pmatrix} t^{n(g)} & P_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^{n(h)} & P_h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le calcul dans le preuve de la proposition 2.2 donne $g^{-1} = \begin{pmatrix} t^{-n(g)} & -P_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2^{-1} = \begin{pmatrix} t^{-n(h)} & -P_h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\begin{aligned} [g, h] &= ghg^{-1}h^{-1} \simeq \begin{pmatrix} t^{n(g)+n(h)} & P_g + t^{n(g)}P_h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{n(g)-n(h)} & -P_g - t^{-n(g)}P_h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t^{n(g)+n(h)}(-P_g - t^{n(g)}P_h) + (P_g + t^{n(g)}P_h) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & P_g \cdot (1 - t^{n(g)+n(h)}) + P_h \cdot (t^{n(g)} - t^{n(h)}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque l'on peut choisir $P_g, P_h, n(g), n(h)$ comme nous le souhaitons, on peut se convaincre que $D(L_{2,1})$ contient toutes les matrices de la forme :

$\begin{pmatrix} 1 & P_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec P_k polynôme de Laurent sur \mathbb{F}_2 . Il s'agit exactement des représentations des éléments du noyau de f .

De plus, il est évident que f est surjective (prendre par exemple les éléments $(\{ \}, k)$, $k \in \mathbb{Z}$). Le théorème de factorisation donne donc le résultat. \square

Remarque. La fonction f de la preuve est alors appelée **l'abélianisation** de $\mathbf{L}_{2,1}$.

Proposition 2.8. $\mathbf{L}_{2,1}$ est résoluble d'ordre 2.

Démonstration. Le calcul de la preuve précédente montre que les éléments de $D(G)$ sont de la forme matricielle $\begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (où \star n'a pas d'importance dans cette preuve).

Or, le groupe des matrices triangulaires supérieures 2×2 de diagonale 1 est abélien. En effet, $\begin{pmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_1 + c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout c_1, c_2 .

Donc $D(\mathbf{L}_{2,1})$ est abélien. Puisque $\mathbf{L}_{2,1}$ ne l'est pas, on a bien $\mathbf{L}_{2,1}$ résoluble d'ordre exactement 2. \square

Remarque. On a montré dans la preuve de la proposition 2.3 que

$$D(\mathbf{L}_{2,1}) = \{((\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, 0) \mid (\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{F}_2)_i\}.$$

Ce groupe n'est pas de type fini.

Définition 2.9. Soit G un groupe fini et soit (V, σ) une représentation G ; où V est un espace vectoriel et σ est un morphisme de G dans $GL(V)$.

(V, σ) est dite **fidèle** si σ est injective.

Proposition 2.10. Il n'existe pas de représentation linéaire (V, σ) de $\mathbf{L}_{2,1}$ telle que V soit complexe et qui soit fidèle.

Démonstration. Soit (\mathbb{C}^n, σ) une représentation de $\mathbf{L}_{2,1}$. Soit $N \in \mathbb{N}$, σ induit par restriction un morphisme $\bar{\sigma}$ sur $\bigoplus_{i=-N}^N (\mathbb{F}_2)_i$. Montrons que $\bar{\sigma}$ n'est pas injective pour N bien choisi.

Le théorème de *Maschke* nous fournit l'existence de sous-représentations irréductibles $(V_1, \sigma_1), \dots, (V_{k_N}, \sigma_{k_N})$ telles que $(\mathbb{C}^n, \bar{\sigma}) = \bigoplus_{j=1}^{k_N} (V_j, \sigma_j)$.

Rappelons le lemme de Frobenius : toute représentation irréductible sur \mathbb{C} d'un groupe abélien est de dimension 1.

L'espace \mathbb{C}^n étant complexe et $\bigoplus_{i=-N}^N (\mathbb{F}_2)_i$ abélien, on conclut que $\dim(V_j) = 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, k_N \rrbracket$, et donc $k_N = n$ (par argument sur les dimensions).

Par définition de sous-représentation, chaque V_j est stable par $\bar{\sigma}((\epsilon_i)_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket})$, pour tout $(\epsilon_i)_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket} \in \bigoplus_{i=-N}^N (\mathbb{F}_2)_i$. Puisque V_j est de dimension 1, il existe $z_j \in \mathbb{C}$ tel que $V_j = \langle z_j \rangle$. On en conclut que z_j est vecteur propre de chaque $\bar{\sigma}((\epsilon_i)_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket})$.

Donc $(z_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forme une base B de diagonalisation simultanée pour tous les $\bar{\sigma}((\epsilon_i)_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket})$.

D'autre part, soit $(\epsilon_i)_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket} \in \bigoplus_{i=-N}^N (\mathbb{F}_2)_i$. On a alors que $(\epsilon_i)_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket}$ est d'ordre 1 ou 2 donc $\bar{\sigma}((\epsilon_i)_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket})^2 = Id$.

En particulier, $sp(\bar{\sigma}((\epsilon_i)_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket})) \subset \{-1, 1\}$. On en déduit que dans la base B , $\bar{\sigma}((\epsilon_i)_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket})$ est de la forme $Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_i \in \{-1, 1\}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, il n'y a que 2^n images possibles pour $(\epsilon_i)_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket}$.

On voit alors que si $|\oplus_{i=-N}^N (\mathbb{F}_2)_i| > 2^n$, $\bar{\sigma}$ ne peut être injective. Par ailleurs on a que $|\oplus_{i=-N}^N (\mathbb{F}_2)_i| = 2^{2N+1}$. Donc en particulier, $|\oplus_{i=-N}^N (\mathbb{F}_2)_i| > 2^n$ dès que $N > n$. □

2.2.4 Générateurs de $\mathbf{L}_{2,1}$

Notation : Dans la suite, nous noterons $a = 1 \in (\mathbb{F}_2)_0$, $t = 1 \in \mathbb{Z}$ (en particulier $t^{-1} = -1$ et $a^{-1} = a$).

Remarque. Dans $\mathbf{L}_{2,1}$, la multiplication de a par la droite correspond à actionner la lampe sur laquelle l'allumeur se situe, et t à déplacer l'allumeur d'un pas vers la droite. On assimilera donc a à l'élément $(\{0\}, 0) \in \mathbf{L}_{2,1}$ ainsi que t à $(\{1\}, 1) \in \mathbf{L}_{2,1}$.

Exemple (manipulation de ces deux éléments) : Soit $k \in \mathbb{Z}$. Par définition du produit semi-direct, $t^k = (\{k\}, k)$, $t a t^{-1} = (\{1\}, 0)$ et $t^k a t^{-k} = (\{k\}, 0)$. Autrement dit, la suite d'actions $t^k a t^{-k}$ permet d'allumer la lampe k puis de revenir à 0. Cette action sera utile et sera notée $a_k := t^k a t^{-k}$ dans la suite.

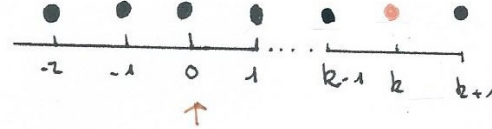


FIGURE 4 – $a_k \in \mathbf{L}_{2,1}$

Fait : Pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$, a_k et a_l commutent.

Démonstration.

$$\begin{aligned} a_k a_l &= t^k a t^{-k} t^l a t^{-l} \\ &= t^k a t^{k-l} a t^l \\ &= (\{k, l\}, 0) \\ &= (\{l, k\}, 0) \\ &= a_l a_k \end{aligned}$$

□

Proposition 2.11. $\{a, t\}$ engendre $\mathbf{L}_{2,1}$.

Démonstration. Notons $S = \{s_1 \dots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in \{a, t, t^{-1}\}, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\}$, le groupe engendré par $\{a, t\}$.

Par définition de a et t , et la remarque précédente, $S \subset (\oplus_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{F}_2) \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}$.

Soit $g = (\{i_1, \dots, i_k, -j_1, \dots, -j_l\}, m) \in \mathbf{L}_{2,1}$. On peut vérifier que $a_{i_1} \dots a_{i_k} a_{-j_1} \dots a_{-j_l} t^m = g$. Donc $\mathbf{L}_{2,1} \subset S$. □

Remarque. Soit $H \wr_{\sigma} R$ un produit en couronne. On peut montrer plus généralement que si l'action de σ est transitive sur I , l'ensemble des copies de H , alors le groupe $H \wr_{\sigma} R$ est engendré par H_{i_0} et R .

Idée de démonstration : Soit $((\epsilon_i)_{i \in I}, n)$. On a que n appartient à R , il est donc clair qu'il est dans le groupe généré par H_{i_0} et R . Il faut voir que, puisque l'action de R est transitive, elle peut envoyer i_0 sur un i quelconque dans I et le morphisme $\tilde{\sigma}$ qu'elle engendre peut prendre (ϵ_i) dans H_{i_0} et l'envoyer dans H_i . □

Exemples :

1. $tat^2a = (\{1, 3\}, 3) \in \mathbf{L}_{2,1}$
2. $tat^2aa \in \mathbf{L}_{2,1}$ mais on n'utilisera que des notations réduites : nous noterons cet élément tat^2

2.2.5 Présentation de $\mathbf{L}_{2,1}$

Définition 2.12. Soit G un groupe, S une partie génératrice de G . Le **groupe libre sur S** est l'ensemble F_S des mots réduits sur $S \cup S^{-1}$, la loi de groupe étant la concaténation suivie de la réduction.

Remarque. On admettra que F_S est bien un groupe, l'associativité étant pénible à démontrer.

Soient G, S, F_S comme dans la définition. On observe qu'il existe une unique $\phi : F_S \rightarrow G$ telle que $\phi|_{S \cup S^{-1}} = id_{S \cup S^{-1}}$ (puisque $S \cup S^{-1}$ engendre F_S).

Soit $K \subset F_S$ tel que $\ker(\phi) = \langle\langle K \rangle\rangle$. Par le théorème de factorisation, on a que $G \simeq F_S / \langle\langle K \rangle\rangle$

Définition 2.13. Soit G un groupe, S une partie génératrice de G . Avec les notations précédentes, on pose $\langle S \mid K \rangle := F_S / \langle\langle K \rangle\rangle$. On dit que $\langle S \mid K \rangle$ est une **présentation de G (par générateurs et relations)** sur S .

Si $K = \{m_1, m_2, \dots\}$, alors les (m_i) sont des **relations dans G** .

Remarque. En pratique, trouver une présentation d'un groupe G à partir d'une partie génératrice S revient donc à chercher une partie génératrice de toutes les relations possibles dans G à partir des éléments de S .

Exemples :

- $\mathbb{Z}^2 \simeq \langle a, b \mid [a, b] \rangle$
- $\mathbb{F}_2 \simeq \langle a \mid a^2 \rangle$
- $D_{2n} \simeq \langle r, s \mid r^n, s^2, srs^{-1}r \rangle$

Proposition 2.14. $\mathbf{L}_{2,1} = \langle a, t \mid a^2, [t^k at^{-k}, a], k \in \mathbb{Z} \rangle$.

Démonstration. Notons $v = a^2, w_k = [t^k at^{-k}, a], k \in \mathbb{Z}$.

Remarque préliminaire : $[t^i at^{-i}, t^j at^j] \in \langle\langle v, w_k, k \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$.

En effet, $t^j [t^{i-j} at^{-(i-j)}, a] t^{-j} = [t^i at^{-i}, t^j at^j]$, qui est bien dans le sous-groupe distingué engendré par $\{v, w_k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Considérons $f : F_{\{a,t\}}/\langle\langle v, w_k, k \in \mathbb{Z} \rangle\rangle \rightarrow L_{2,1}$ (qui existe toujours, c'est un résultat venant de la théorie des groupes libres). Si on prouve que $\ker(f) = \{0\}$, le théorème de factorisation donne le résultat voulu.

On considère à présent $\pi : F_{\{a,t\}}/\langle\langle v, w_k, k \in \mathbb{Z} \rangle\rangle \rightarrow (F_{\{a,t\}}/\langle\langle v, w_k, k \in \mathbb{Z} \rangle\rangle)/\langle\langle a \rangle\rangle$, la projection sur $\langle\langle a \rangle\rangle$. Mais $(F_{\{a,t\}}/\langle\langle v, w_k, k \in \mathbb{Z} \rangle\rangle)/\langle\langle a \rangle\rangle = F_{\{a,t\}}/\langle\langle a \rangle\rangle$ car si $\bar{a} = 1$, alors $\bar{v} = 1 = \bar{w}_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

De plus, on a de façon directe que $F_{\{a,t\}}/\langle\langle a \rangle\rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Notons $N = \langle t^k a t^{-k}, k \in \mathbb{Z} \rangle$. On affirme que $\ker(\pi) = N$. En effet :

— Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\pi(t^k a t^{-k}) = \pi(t^k) + \pi(a) + \pi(t^{-k}) = 0$ car $\pi(a) = 0$ et π est un morphisme. Donc $N \subset \ker(\pi)$.

— Pour l'autre inclusion : par définition, $\ker(\pi) = \langle\langle a \rangle\rangle$; il suffit donc de voir que le conjugué de a par un élément quelconque de $F_{\{a,t\}}/\langle\langle v, w_k, k \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$ est dans N :

Soit $t^{k_1} a t^{k_2} a \dots a t^{k_n} \in F_{\{a,t\}}/\langle\langle v, w_k, k \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$ un élément quelconque. Le calcul de la conjugaison de a par cet élément général étant assez pénible, nous nous contenterons d'expliciter le calcul pour $n = 2$ (la technique calculatoire à utiliser pour un n plus grand sera exactement la même, seules les notations se complexifient) :

$$t^{k_1} a t^{k_2} a t^{-k_2} a t^{-k_1} = \underbrace{t^{k_1} a t^{-k_1}}_{\in N} \underbrace{t^{k_2+k_1} a t^{-k_1-k_2}}_{\in N} \underbrace{t^{k_1} a t^{-k_1}}_{\in N}$$

Donc $\ker(\pi) \subset N$ et on a bien l'égalité.

Soit $g \in \ker(f)$. On a $f(g) = (\{\}, 0)$, et donc $\pi(g) = 0$ et $g \in \ker(\pi)$.

Donc g est de la forme $t^{k_1} a t^{-k_1} t^{k_2} a \dots t^{k_n} a t^{-k_n}$ (*) (forme générale d'un élément du noyau de π par ce qui précède).

On peut supposer les k_i deux à deux distincts car, dans le quotient, on a que $[t^{k_i} a t^{-k_i}, t^{k_j} a t^{-k_j}] = 1$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$. Donc si deux sont identiques on peut les regrouper.

On a alors que $f(g) = (\{k_1, \dots, k_n\}, 0)$, mais $g \in \ker(f)$ donc $n = 0$ et $g = 1_{L_{1,2}}$ par (*).

On a donc bien prouvé que $\ker(f) = \{0\}$. □

Remarque. On peut en fait voir que $\mathbf{L}_{2,1}$ n'admet aucune présentation sur $\{a, t\}$ avec un nombre fini de relations.

On en déduit qu'il n'existe aucun système de générateurs qui induit une présentation avec un nombre fini de relations; sinon on pourrait exprimer les mots de ce système ainsi que les relations uniquement en fonction de a et t . Nous obtiendrions alors un nombre fini de relations sur les générateurs a et t .

3 Longueur et métrique de mots

3.1 Définitions et propriétés (les géodésiques)

Définition 3.1. Soit $g \in \mathbf{L}_{2,1}$. Un *chemin vers g* est une suite finie d'éléments $g_0, g_1, \dots, g_N \in \mathbf{L}_{2,1}$ tels que :

1. $g_0 = 1_{L_{2,1}}$ et $g_N = g$
2. pour tout $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $g_{i+1} = g_i s_{i+1}$ où $s_{i+1} \in \{a, t, t^{-1}\} \setminus \{s_i\}$

Exemples : Soit $g = (\{0, 1\}, 1)$.

$g_0^1 = (\{\},) \rightsquigarrow g_1^1 = g_0^1 t = (\{\}, 1) \rightsquigarrow g_2^1 = g_1^1 a = (\{1\}, 1) \rightsquigarrow g_3^1 = g_2^1 t^{-1} = (\{1\}, 0)$
 $\rightsquigarrow g_4^1 = g_3^1 a = (\{1, 0\}, 0) \rightsquigarrow g_5^1 = g_4^1 t(\{1, 0\}, 1)$ est un chemin vers g .

$g_0^2 = (\{\},) \rightsquigarrow g_1^2 = g_0^2 a = (\{0\},) \rightsquigarrow g_2^2 = g_1^2 t = (\{0\}, 1) \rightsquigarrow g_3^2 = g_2^2 a = (\{0, 1\}, 1)$ est un autre chemin vers g .

Remarque. Sur cet exemple, on a que $g_5^1 = t a t^{-1} a t$. On peut donc lire le chemin (g_i^1) sur son dernier élément. Dans la suite, il sera donc possible de confondre un chemin vers g et une écriture de g à partir de générateurs.

Définition 3.2. Soit $g \in \mathbf{L}_{2,1}$. Soit g_0, g_1, \dots, g_N chemin vers g . On dit que N est **la longueur de ce chemin**.

Reprenons les chemins de l'exemple précédent : la longueur de $(g_i^1)_i$ est 5, tandis que la longueur de $(g_i^2)_i$ est 3.

Définition 3.3. Soit $g \in \mathbf{L}_{2,1}$. La **longueur de g** est l'infimum de l'ensemble $\{N \in \mathbb{N} \mid g_0, g_1, \dots, g_N \text{ chemin vers } g\}$. Elle est notée $|g|$ (c'est en fait l'infimum des longueurs de chemin vers g).

Si g_1, \dots, g_N est un chemin tel que $N = |g|$, on dit que ce chemin est **géodésique** (vers g).

Théorème 3.4. Soit $g = (\{i_1, \dots, i_k, -j_1, \dots, -j_l\}, m) \in \mathbf{L}_{2,1}$, avec $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$ distincts et positifs.

On a que $|g| = k + l + \min(2j_l + i_k + |m - i_k|, 2i_k + j_l + |m + j_l|)$.

Démonstration. Soit $g = (\{i_1, \dots, i_k, -j_1, \dots, -j_l\}, m) \in \mathbf{L}_{2,1}$.

1. Montrons qu'il existe un chemin vers g de longueur exactement :

$$k + l + \min(2j_l + i_k + |m - i_k|, 2i_k + j_l + |m + j_l|)$$

— Si $m \leq 0$:

Soit g_1, \dots, g_N un chemin vers g tel que g_N s'écrive $g_N = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_{-j_1} \dots a_{-j_l} t^m$, où l'on rappelle que $a_i = t^i a t^{-i}$. L'élément g s'écrit donc $t^{i_1} a t^{-i_1} \dots t^{-j_l} a t^{j_l} t^m$.

$$\begin{aligned}
N &= \underbrace{i_1 + \sum_{s=1}^{k-1} (i_{s+1} - i_s)}_{\text{Nombre de } t \text{ pour allumer les lampes positives}} + i_k \\
&+ \underbrace{j_1 + \sum_{s=1}^{j-1} (j_{s+1} - j_s)}_{\text{Nombre de } t \text{ pour allumer les lampes négatives}} \\
&\underbrace{|m + j_l|}_{\text{aller à la position finale depuis } j_l} \\
&+ \underbrace{k + l}_{\text{nombre de } a} \\
N &= 2i_k + j_l + |m + j_l| + k + l \quad \text{sommes télescopiques} \\
&= k + l + \min(2j_l + i_k + |m - i_k|, 2i_k + j_l + |m + j_l|) \quad \text{car } m \leq 0
\end{aligned}$$

— Si $m > 0$:

On peut adapter ce calcul pour $g'_N = a_{-j_1} \cdots a_{-j_l} a_{i_1} \cdots a_{i_k} t^m$

2. Montrons que tous les chemins vers g sont au moins de la longueur considérée :

Soit g_0, \dots, g_N un chemin vers g . Soit $N_M \in \llbracket 0, N \rrbracket$ le plus petit indice tel que la lampe i_k soit allumée.

On a donc $g_{N_M} = (((\epsilon_i(g_{N_M})), m(g_{N_M})))$ où $i_k \in \text{supp}((\epsilon_i))$. Par minimalité de N_M , $g_{N_M} = g_{N_M-1}a$.

Donc $m(g_{N_M}) = i_k$.

Alors $N_M \geq i_k$ car il faut à l'allumeur de réverbères au moins i_k générateurs t pour accéder à la position i_k .

On raisonne par disjonction de cas :

— Si $-j_l \notin \text{supp}((\epsilon_i(g_{N_M})))$ (c'est-à-dire si, à ce stade, la lampe $-j_l$ n'est pas allumée) :
Soit $N_m \in \llbracket 0, N \rrbracket$ le plus petit indice tel que la lampe $-j_l$ soit allumée. Par hypothèse, $N_m \geq N_M$. Par le même raisonnement que précédemment, par minimalité de N_m , $g_{N_m} = (((\epsilon_i(g_{N_m})), -j_k))$. Comme $g_{N_M} = (((\epsilon_i(g_{N_M})), i_k))$, il faut au moins $i_k + j_l$ générateurs t pour atteindre g_{N_m} depuis g_{N_M} . Puisque $g_{N_m} = (((\epsilon_i(g_{N_m})), -j_k))$, il faut encore au moins $|m + j_l|$ t pour atteindre la position finale g .

Au total, il aura donc fallu $2i_k + j_l + |m + j_l|$ t .

— Si $-j_l \in \text{supp}((\epsilon_i(g_{N_M})))$ (c'est-à-dire si, à ce stade, la lampe $-j_l$ était déjà allumée) :
Par un raisonnement similaire, on déduit que $N_M \geq 2j_l + i_k$ car il a fallu que l'allumeur se déplace jusqu'à la lampe $-j_l$ avant d'atteindre la position de g_{N_M} . Il faut ensuite encore au moins $|m - i_k|$ générateurs t pour atteindre la position finale m .

Au total, il aura donc fallu $2j_l + i_k + |m - i_k|$ t .

Si l'on prouve qu'il faut au moins $k + l$ générateurs a pour allumer les lampes, la preuve sera terminée.

Lemme 3.5. Soit $g \in \mathbf{L}_{2,1}$, c_g le nombre de lampes allumées en g . Alors c_g est inférieur au nombre de a utilisés pour engendrer g .

Démonstration. On introduit la notation $|g|_a$, le nombre de a utilisés pour engendrer g . On montre le résultat par récurrence sur la longueur de g :

$|g|=0$: Alors $g = 1_{\mathbf{L}_{2,1}}$, $c_g = 0$, $|g|_a \geq 0$.

Supposons $c_g \leq |g|_a$ pour tout g de longueur N : Soit $g \in \mathbf{L}_{2,1}$ de longueur $N + 1$. Il existe $\tilde{g} \in \mathbf{L}_{2,1}, s \in \{a, t, t^{-1}\}$ tels que $g = \tilde{g}s$ avec \tilde{g} de longueur N .

- Si $s \in \{t, t^{-1}\}$, $|g|_a = |\tilde{g}|_a$ et $c_g = c_{\tilde{g}}$. Donc le résultat est prouvé par hypothèse de récurrence.
- Si $s = a$: (On note $\tilde{g} = ((\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, m)$)
 - Si $m \in \text{supp}((\epsilon_i))$, $g = (\text{supp}((\epsilon_i)) \setminus \{m\}, m)$. Alors $|g|_a = |\tilde{g}|_a + 1$, tandis que $c_g = c_{\tilde{g}} - 1$. Donc par hypothèse de récurrence, on a bien le résultat.
 - Si $m \notin \text{supp}((\epsilon_i))$, $g = (\text{supp}((\epsilon_i)) \cup \{m\}, m)$. Alors $|g|_a = |\tilde{g}|_a + 1$ et $c_g = c_{\tilde{g}} + 1$. Par récurrence, le résultat est encore vrai.

□

□

Remarque. La preuve donne un algorithme pour trouver un chemin géodésique vers un élément $g = (\{i_1, \dots, i_k, -j_1, \dots, -j_l\}, m) \in \mathbf{L}_{2,1}$:

- si $m \leq 0$:
 1. Bouger jusqu'à i_1 (la plus petite lampe positive) et l'allumer
 2. Continuer de bouger à droite en allumant les lampes sur le chemin, jusqu'à ce que la lampe i_k soit allumée
 3. Revenir à gauche jusqu'à atteindre $-j_1$ (la plus petite lampe négative en valeur absolue) à allumer.
 4. Continuer de bouger à gauche en allumant les lampes sur le chemin, jusqu'à ce que la lampe $-j_l$ soit allumée
 5. Aller directement jusqu'à la position finale m .
- si $m > 0$:
 1. Bouger jusqu'à $-j_1$ (la plus petite lampe négative en valeur absolue) et l'allumer
 2. Continuer de bouger à gauche en allumant les lampes sur le chemin, jusqu'à ce que la lampe $-j_l$ soit allumée
 3. Revenir à droite jusqu'à atteindre i_1 (la plus petite lampe positive à allumer).
 4. Continuer de bouger à gauche en allumant les lampes sur le chemin, jusqu'à ce que la lampe i_k soit allumée
 5. Aller directement jusqu'à la position finale m .

Remarque. Si nous avons trouvé un algorithme simple qui crée un chemin géodésique vers chaque $g \in \mathbf{L}_{2,1}$, le problème est beaucoup plus compliqué dès que la dimension augmente. Par exemple, pour $\mathbf{L}_{2,2}$ (c'est-à-dire \mathbb{Z}^2 au lieu de \mathbb{Z}), on ne connaît pas d'algorithme capable de répondre en temps polynomial ; il s'agit du problème du voyageur de commerce.

3.2 Conséquences : les impasses dans $\mathbf{L}_{2,1}$

Définition 3.6. Soit $g \in \mathbf{L}_{2,1}$. g est une *impasse* si pour tout $s \in \{a, t, t^{-1}\}$, $|gs| \leq |g|$.

Exemples : $d_1 = (\{-1, 0, 1\}, 0)$ est une impasse :

- Par le théorème 3.1 : $|d_1|=7$
- $|d_1a|=|(\{-1, 1\}, 0)|=6$
- $|d_1t|=|(\{-1, 0, 1\}, 1)|=6$
- $|d_1t^{-1}|=|(\{-1, 0, 1\}, -1)|=6$

d_1 est donc bien une impasse.

Définition 3.7. Soit $g \in \mathbf{L}_{2,1}$ un impasse. La *profondeur* de cette impasse est le nombre $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $s_1, \dots, s_n \in \{a, t, t^{-1}\}$, $|gs_1 \dots s_n| \leq |g|$ et il existe $s_1, \dots, s_n, s_{n+1} \in \{a, t, t^{-1}\}$ tels que $|gs_1 \dots s_n s_{n+1}| = |g| + 1$.

Exemples : La profondeur de d_1 , de notre exemple précédent, est de 2 : Par ce que l'on a déjà vu, il suffit de montrer que pour tout $s_1, s_2 \in \{a, t, t^{-1}\}$ (tels que $s_2 \neq s_1^{-1}$), $|d_1s_1s_2| \leq 7$ et que $|d_1s_1s_2s_3|=8$ pour certains $s_1s_2s_3$.

- $|d_1at|=6$
- $|d_1at^{-1}|=6$
- $|d_1ta|=6$
- $|d_1t^{-1}a|=6$
- $|d_1tt|=7$
- $|d_1t^{-1}t^{-1}|=7$
- $|d_1t^3|=8=|d_1|+1$

Théorème 3.8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $g \in \mathbf{L}_{2,1}$ tel que g soit une impasse de profondeur n .

Démonstration. 1. **Construction d'impasses :**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $d_n = (\llbracket -n, n \rrbracket, 0)$ (voir figure 5 ci-dessous). Montrons que d_n est une impasse.

Par le théorème 3.1 : $|d_n| = n + n + 1 + 2n + n + |0 - n| = 6n + 1$. Il faut maintenant voir que pour tout $s \in \{a, t, t^{-1}\}$, $|d_ns| \leq |d_n|$.

— $d_na = (\llbracket -n, n \rrbracket \setminus \{0\}, 0)$,

$$\begin{aligned} |d_na| &= n + n + 2n + n + |0 - n| \\ &= 6n \end{aligned}$$

— $d_nt = (\llbracket -n, n \rrbracket, 1)$,

$$\begin{aligned} |d_nt| &= n + n + 1 + \min(3n + |1 - n|, 3n + |1 + n|) \\ &= 2n + 1 + 3n + n - 1 \\ &= 6n \end{aligned}$$

— Même calcul : $|d_nt^{-1}| = 6n$

Donc d_n est bien une impasse.

2. **Montrons que la profondeur de d_n est au moins $\lfloor n/2 \rfloor$:**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $H_n \subset \mathbf{L}_{2,1}$ tel que $H_n = \{(A_g, m_g) \mid A_g \subset \llbracket -n, n \rrbracket, m_g \in \llbracket -n, n \rrbracket\}$. Montrons que pour tout $g \in H_n$, $|g| \leq |d_n|$.

Soit $g = (\{i_1, \dots, i_k, -j_1, \dots, -j_l\}, m) \in H_n$. Supposons que $m \geq 0$.

On a vu que $|g| = k + l + 2j_l + i_k + |m - i_k|$. Comme $g \in H_n$, $k + l \leq 2n + 1$, $j_l, i_k \leq n$ et $|m - i_k| \leq n$ car $m, i_k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Donc, $|g| \leq 6n + 1 = |d_n|$.

On peut faire le même calcul pour $m < 0$, car alors $|g| = k + l + 2i_k + j_l + |m + j_l|$.

On en déduit donc que pour tout $s_1, \dots, s_k \in \{a, t, t^{-1}\}$ tels que $d_n s_1 \dots s_k \in H_n$, $|d_n s_1 \dots s_k| \leq |d_n|$.

Il reste donc à voir que pour tout $s_1, \dots, s_{\lfloor n/2 \rfloor} \in \{a, t, t^{-1}\}$, $d_n s_1 \dots s_{\lfloor n/2 \rfloor} \in H_n$.

Puisque H_n contient toutes les combinaisons possibles de lampes entre $-n$ et n , il est clair que pour que $d_n s_1 \dots s_{\lfloor n/2 \rfloor} \notin H_n$, il faudrait atteindre une position supérieure à n ou inférieure à $-n$. La façon la plus efficace pour cela est donc de n'utiliser que des générateurs t , c'est ce que nous dit l'algorithme de la partie précédente (ou t^{-1} par symétrie du problème). Supposons que $s_1 = \dots = s_{\lfloor n/2 \rfloor} = t$. Alors $d_n s_1 \dots s_{\lfloor n/2 \rfloor} = (\llbracket -n, n \rrbracket, \lfloor n/2 \rfloor)$ qui appartient toujours à H_n .

Donc d_n est bien une impasse de profondeur au moins $\lfloor n/2 \rfloor$. □

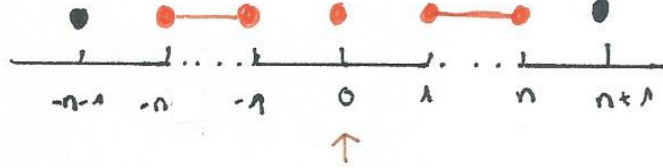


FIGURE 5 – $d_n \in \mathbf{L}_{2,1}$

4 Géométrie du groupe $\mathbf{L}_{2,1}$

4.1 Graphes de Diestel-Leader

4.1.1 Définitions

Définition 4.1. Soit $T = (V, E)$ un arbre, où V est l'ensemble de ses sommets et E l'ensemble de ses arêtes orientées (pairs de sommets). Si chaque sommet possède le même nombre d'arêtes d , on dit que T est de **valence** d .

Dans la suite nous ne travaillerons qu'avec des arbres de valence d , où chaque sommet possède $d - 1$ arêtes sortantes et une entrante. On remarque que de tels arbres ont forcément un nombre infini de sommets (et d'arêtes).

Définition 4.2. Soit $T = (V, E)$ un arbre de valence d avec $d - 1$ arêtes sortantes et une entrante à chaque sommet. Soit e_0 un point base de V . Alors on définit la **hauteur** $h : T \rightarrow \mathbb{Z}$ comme la fonction valant 0 sur e_0 et pour tout sommet $e \in V$, $h(e) = h(e') + 1$ où e' est l'unique sommet relié à l'arête entrante de e . (voir figure 6)

Remarque. Dans la suite nous nous permettrons de définir la fonction hauteur d'un arbre sans préciser de point base. En effet, le choix de e_0 importe peu puisque tous les sommets ont même valence.

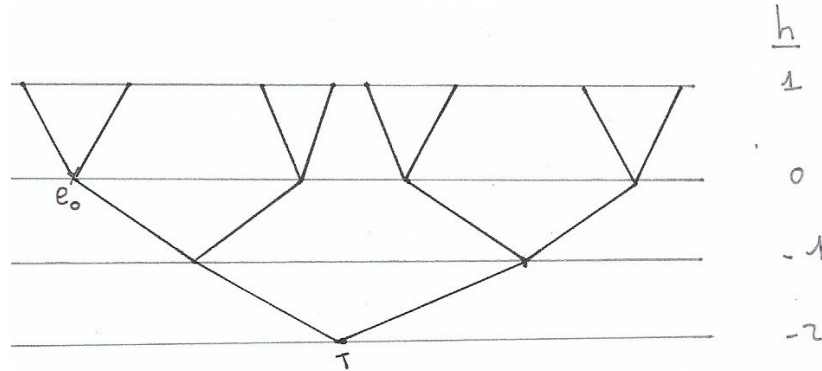


FIGURE 6 – Illustration de la fonction hauteur sur un arbre de valence 3 : tous les sommets sur la même ligne ont même hauteur

Définition 4.3. Soient $T_1 = (V_1, E_1), T_2 = (V_2, E_2)$ deux arbres de valence d_1, d_2 respectivement, munis de leur fonction hauteur h_1 et h_2 . Le **graphe de Diestel-Leader** associé à (T_1, T_2) , noté $DL_2(d_1, d_2)$, est le graphe (V_D, E_D) tel que :

- $V_D = \{(t_1, t_2) \mid t_1 \in V_1, t_2 \in V_2, h_1(t_1) + h_2(t_2) = 0\}$
- $E_D = \{((t_1, t_2), (s_1, s_2)) \mid (t_1, t_2) \in V_D, (s_1, s_2) \in V_D, (t_1, s_1) \in E_1, (t_2, s_2) \in E_2\}$

Autrement dit, pour que deux couples de sommets $(t_1, t_2), (s_1, s_2) \in V_D$ soient voisins, il faut

$$\begin{cases} h(t_1) = h(s_1) + 1 \\ h(t_2) = h(s_2) - 1 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} h(t_1) = h(s_1) - 1 \\ h(t_2) = h(s_2) + 1 \end{cases}$$

Remarque. – Avec les notations précédentes, $DL_2(d_1, d_2)$ est un graphe de valence $(d_1 - 1) \cdot (d_2 - 1)$.
– Lorsque $d_1 = d_2$, nous noterons $DL_2(d_1)$ pour $DL_2(d_1, d_2)$.

De façon visuelle : nous représenterons les deux arbres T_1 et T_2 avec leur point base alignés ; un arbre pointant vers le haut, l'autre vers le bas. De cette façon, les sommets du graphe de Diestel-Leader associé sont exactement les paires de points sur la même ligne. Ainsi représentés, les voisins d'une paire de sommets (t_1, t_2) sont les paires (s_1, s_2) telles que t_1 et s_1 sont voisins, t_2, s_2 également, et pour passer de t_1 à s_1 , on se déplace dans le même sens que pour passer de t_2 à s_2 .

Exemple : Soit $DL_2(3)$ le graphe de Diestel-Leader réalisé par le produit des arbres T_1, T_2 de la figure 7 ci-après. Notons V_D ses sommets, E_D ses arêtes.

- $(a_1, e_2) \in V_D, (b_1, e_2) \in D, (c_1, c_2) \notin V_D$.
- $((c_1, e_2), (f_1, a_2))$ et $((c_1, e_2), (f_1, b_2))$ sont dans E_D . En revanche $((a_1, e_2), (e_1, g_2))$ n'est pas une arête de $DL_2(3)$.

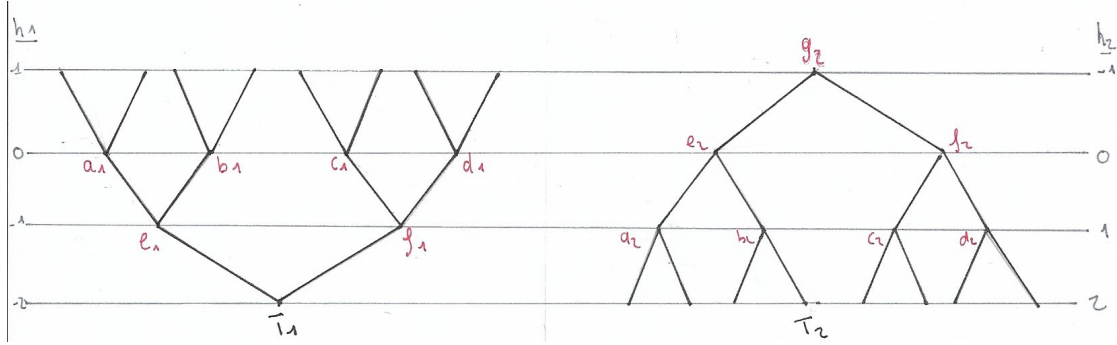


FIGURE 7 – Représentation de deux arbres de valence 3 de façon à comprendre le graphe de Diestel-Leader $DL_2(3)$

Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à des arbres de valence 3.

Remarque. Le graphe $DL_2(3)$ est de valence $(3 - 1) \cdot (3 - 1) = 4$.

Définition 4.4. Soit G un groupe, S une partie génératrice de G . Le **graphe de Cayley** de G sur S est le graphe qui a G pour ensemble des sommets ; ses arêtes sont l'ensemble : $\{(g_1, g_2) \mid g_1, g_2 \in G, g_1 = g_2 \cdot s, s \in S \cup S^{-1}\}$. On notera ce graphe $\Gamma(G, S)$.

Remarque. Soit G un groupe, S une partie génératrice de G . Le graphe de Cayley de G sur S est de valence $\text{card}(S)$.

Le but de la section suivante est de montrer que le graphe de Cayley de $\mathbf{L}_{2,1}$ est isomorphe au graphe de Diestel-Leader $DL_2(3)$.

4.1.2 Isomorphisme de graphes

Attention : Dans cette partie nous changeons l'ensemble des générateurs de $\mathbf{L}_{2,1}$, nous prendrons $\{t, at\}$. C'est ce système qui va nous permettre de construire un isomorphisme de graphes entre le graphe de Cayley de $\mathbf{L}_{2,1}$ et le graphe de Diestel-Leader $DL_2(3)$.

On remarque qu'il s'agit bien d'un ensemble générateur puisque $a = at \cdot t^{-1}$. On peut également se convaincre que les chemins géodésiques vont fonctionner de la même façon et que l'algorithme de la partie précédente est toujours valable.

Soient T_1, T_2 deux arbres de valence 3, $DL_2(3)$ le graphe de Diestel-Leader associé.

1. *Nommage des arêtes de T_1 (resp. T_2) :*

Nous allons nommer chaque arête par 0 ou 1. Pour cela, on se place en chaque sommet, et on nomme l'arête sortante gauche 0, la droite 1 (dans la convention où l'arbre est représenté de bas en haut).

Définition 4.5. *Soit v un sommet d'un arbre T de valence 3 dont les arêtes ont été étiquetées comme ci-dessus. Le **chemin descendant de v** est la suite $a_0a_1 \cdots$ telle que $a_i \in \{0, 1\}$ et l'unique arête descendante partant de v soit étiquetée par a_0 ; puis notant v_1 le point ainsi atteint, l'unique arête descendante de v_1 est étiquetée par a_1 et ainsi de suite.*

On supposera dans la suite qu'il existe v_1 un sommet de T_1 (resp. v_2 de T_2) tel que le chemin descendant n'est étiqueté que de 0. Autrement dit, il existe une branche de T_1 (resp. T_2) "la plus à gauche".

2. *Identification d'un élément de T_1 (resp. T_2) :*

Lemme 4.6. *Soit T un arbre de valence 3 tel qu'il existe un sommet v_0 ayant un chemin descendant étiqueté uniquement de 0. Alors, tout sommet v de T est uniquement déterminé par une hauteur et un chemin descendant. De plus, ce chemin descendant est nul à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Soit $T = (V, E)$ un arbre vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On définit la fonction $l : V \rightarrow \mathbb{N}$ qui à $v \in V$ associe le nombre d'arêtes strictement à gauche de v , à la même hauteur. Par hypothèse, il existe une branche la plus à gauche, donc $l(v)$ est fini pour tout v .

Soit $v \in V$, ayant $((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, k)$ comme identification dans T ; où k est la hauteur de v et $((a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ le chemin descendant partant de v . Montrons que $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

On sait que $l(v)$ est finie. Notons $va_0 \cdots a_n$ le sommet obtenu en partant de v et en effectuant le chemin $a_0 \cdots a_n$. Alors $l(va_0 \cdots a_n) < l(va_0 \cdots a_{n-1})$ par définition d'un chemin descendant. Donc l est strictement décroissante le long du chemin et on en déduit qu'à partir d'un certain rang N , pour tout $n > N$, $l(va_0 \cdots a_n) = 0$. C'est-dire qu'à partir de N arêtes, le chemin est sur la branche la plus à gauche : le chemin descendant à partir de ce rang ne contient que des 0.

Supposons maintenant que l'on se donne une hauteur k et une suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de 0 et de 1. Montrons que le couple $((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, k)$ correspond à un unique point.

Commençons par montrer que ce chemin mène à au moins un sommet. Soit N le premier rang à partir duquel la suite est nulle. Notons v_0 le sommet sur la branche la plus à gauche tel que sa hauteur soit $k - N$. En effectuant le chemin remontant $a_{N-1}a_{N-2} \cdots a_0$ à partir de v_0 (toujours possible car à chaque sommet, les arêtes 0 et 1 sont disponibles), on sera alors à hauteur k et on aura par définition pris le bon chemin.

Supposons maintenant que $((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, k)$ mène à deux sommets e_1 et e_2 . Notons e'_1 (resp. e'_2) le premier sommet sur le chemin descendant partant de e_1 (resp. e_2) tel que $l(e'_1) = 0$ (resp. $l(e'_2) = 0$). Si $e'_1 = e'_2$, on remonte le chemin et on tombe sur $e_1 = e_2$. Sinon, puisque e'_1 et e'_2 sont sur la même branche, l'un à une hauteur strictement plus grande que l'autre.

Cependant, on remarque que pour aller de e_1 à e'_1 , on a utilisé le même nombre d'arêtes que pour aller de e_2 à e'_2 . En effet, par minimalité des e'_i , ils ont été atteints juste après avoir pris le dernier 1 dans $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Mais alors c'est impossible que e'_1 ne soit pas à la même hauteur de e'_2 . Absurde.

□

On identifiera donc chaque sommet de T_1 (resp. T_2) par un couple $((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, k)$ où $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de 0 et de 1 nulle à partir d'un certain rang et k une hauteur.

Exemple : Sur le graphe ci-après, le chemin descendant de v est $(1, 0, 1, 0, 0, \dots)$. Son identification est donc $((1, 0, 1, 0, 0, \dots), 2)$.

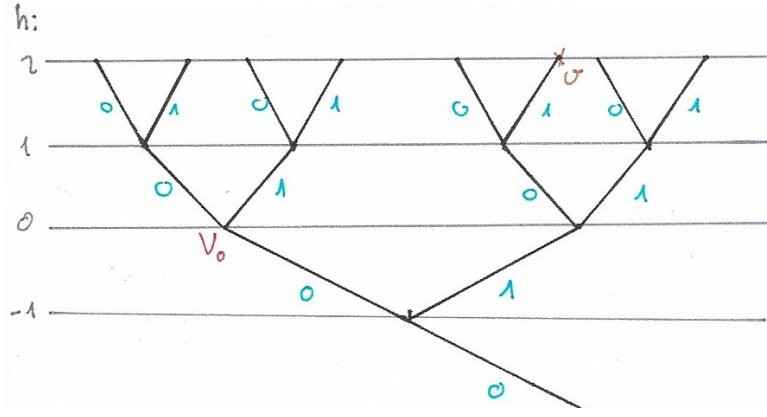


FIGURE 8 – Exemple d'étiquetage d'un arbre de valence 3 ayant une branche la plus à gauche

3. Identification d'un élément de $DL_2(3)$:

Soit $(t_1, t_2) \in DL_2(3)$. On note $t_1 = ((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, k_1)$, $t_2 = ((b_i)_{i \in \mathbb{N}}, k_2)$ leur identification dans leurs arbres respectifs. On sait de plus que $k_2 = -k_1$ par définition de $DL_2(3)$. Pour identifier (t_1, t_2) dans $DL_2(3)$, on aura donc besoin du 3-uplet $((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}}, k_1)$.

Dans la suite, nous effectuerons le changement de point de vue suivant :

Soit $((\tilde{a}_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\tilde{b}_i)_{i \in \mathbb{N}}, k) \in DL_2(3)$. Nous noterons $(a_{k-i})_{i \in \mathbb{N}^*} := (\tilde{a}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(a_i)_{i \geq k} := (\tilde{b}_i)_{i \in \mathbb{N}}$; de sorte que $a_{k-1} = \tilde{a}_0$, $a_{k-2} = \tilde{a}_1, \dots$, et $a_k = b_0, a_{k+1} = b_1, \dots$. Ainsi, nous noterons plutôt un sommet de $DL_2(3)$ de la façon suivante : $((a_{k-i})_{i > 0}, (a_i)_{i \geq k}, k)$. En faisant cela, nous ne perdons aucune information mais il sera plus simple de se repérer dans la preuve du théorème suivant :

Théorème 4.7. *Le graphe de Cayley de $L_{2,1}$ sur $\{t, at\}$ est isomorphe à $DL_2(3)$.*

Démonstration. 1. **Bijection entre les ensembles de sommets :**

Soit $g \in L_{2,1}$. On rappelle la correspondance entre $L_{2,1}$ et les polynômes de Laurent : Si $g = ((\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, k)$, on lui associera le couple $(P(t), t^k)$ où $P(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \epsilon_i t^i$. C'est un polynôme de Laurent de l'anneau $\mathbb{F}_2[t, t^{-1}]$.

Soit $g \in \mathbf{L}_{2,1}$ tel que $g = (\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i, k)$. Soit ψ l'application qui associe à g le sommet de $DL_2(3)$: $((a_{k-i})_{i>0}, (a_i)_{i \geq k}, k)$. On remarque que par définition d'un polynôme, ses coefficients sont presque tous nuls donc $(a_{k-i})_{i>0}$ et $(a_i)_{i \geq k}$ le sont aussi et on a bien pris un élément de la forme de l'identification précédente. De plus, par ce qui précède, g est associé à un unique sommet de $DL_2(3)$ et ψ est bien définie.

Inversement, soit $((a_{k-i})_{i>0}, (a_i)_{i \geq k}, k)$ un sommet de $DL_2(3)$. Notons ϕ l'application qui à ce sommet associe $(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i, k)$. On vérifie directement que cette application soit l'inverse de ψ .


Nous avons donc bien exhibé une bijection entre les sommets de $\mathbf{L}_{2,1}$ et de $DL_2(3)$. Montrons maintenant que ϕ est un isomorphisme de graphe. Notons $\Gamma(\mathbf{L}_{2,1}, \{t, at\})$ le graphe de Cayley de $\mathbf{L}_{2,1}$ sur $\{t, at\}$.


2. Isomorphisme de graphes : les sommets adjoints sont envoyés sur des sommets adjoints


Nous avons en particulier montré que ϕ induit une bijection entre les sommets des graphes qui nous intéressent. Il nous reste donc à voir que les arêtes de chaque graphe sont bien envoyées dans les arêtes de l'autre.

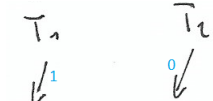
Pour cela nous allons considérer l'application $\phi : DL_2(3) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{L}_{2,1}, \{t, at\})$ définie dans la partie précédente.


Pour identifier les images des différentes arêtes de $DL_2(3)$ par ϕ , nous allons considérer chacune des huit possibilités de déplacement sur l'arbre (qui ne seront pas toutes disponibles en chaque sommet de l'arbre). Nous représenterons ces possibilités comme des déplacements sur $DL_2(3)$ représenté à la façon de la figure 7 :

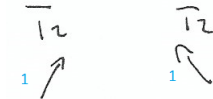
(a)  Cette situation correspond à un chemin de la forme $((0, a_{k-2}, a_{k-3}, \dots), (a_k, a_{k+1}, \dots), k)$ car l'arête descendante sur T_1 est étiquetée d'un 0. Ce chemin devient en prenant l'arête du dessin : $((a_{k-2}, a_{k-3}, \dots), (1, a_k, a_{k+1}, \dots), k-1)$ car sur T_2 nous avons pris une arête étiquetée 1. Ceci correspond dans $\Gamma(\mathbf{L}_{2,1}, \{t, at\})$ à l'action d'aller à gauche puis d'allumer, donc à l'arête $t^{-1}a$.


(b)  Chemin de la forme $((1, a_{k-2}, a_{k-3}, \dots), (a_k, a_{k+1}, \dots), k)$ qui devient en prenant l'arête du dessin : $((a_{k-2}, a_{k-3}, \dots), (1, a_k, a_{k+1}, \dots), k-1)$. Ceci correspond dans $\Gamma(\mathbf{L}_{2,1}, \{t, at\})$ à l'action d'aller à gauche sans allumer de lampes (ou plutôt éteindre ici) ; donc à l'arête t^{-1} .


(c)  Chemin de la forme $((0, a_{k-2}, a_{k-3}, \dots), (a_k, a_{k+1}, \dots), k)$ qui devient en prenant l'arête du dessin : $((a_{k-2}, a_{k-3}, \dots), (0, a_k, a_{k+1}, \dots), k-1)$. Ceci correspond à aller à gauche sans allumer de lampe donc à t^{-1} .

(d)  Chemin de la forme $((1, a_{k-2}, a_{k-3}, \dots), (a_k, a_{k+1}, \dots), k)$ qui devient en prenant l'arête du dessin : $((a_{k-2}, a_{k-3}, \dots), (0, a_k, a_{k+1}, \dots), k-1)$. Ceci correspond à aller à gauche et éteindre une lampe donc à $t^{-1}a$.

(e)  Cette arête correspond à l'inverse de (d) donc au générateur at .

(f)  Cette arête correspond à l'inverse de (b) donc à t .

(g)  Cette arête correspond à l'inverse de (c) donc à t .

(h)  Cette arête correspond à l'inverse de (a) donc à at .

Il reste maintenant à voir qu'à chaque configuration de sommet, nous avons bien exactement un antécédent de t , t^{-1} , at et $t^{-1}a$. Remarquons que nous savons déjà que l'arbre $DL_2(3)$ est bien de valence 4.

Pour cela nous allons examiner chaque situation possible, toutes décrites sur la figure 9 ci-après.

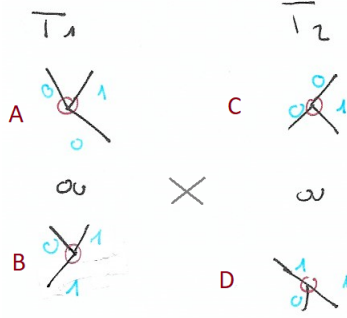


FIGURE 9 – En chaque sommet (représentés en rouge), il y a deux configurations possibles pour l'arbre T_1 et deux pour T_2

Ci-dessous le premier élément du produit est la situation sur T_1 , l'autre sur T_2 . Les lettres minuscules correspondent aux mouvements disponibles (c.f la liste ci-dessus) :

- **AxC** : (g) $\rightsquigarrow t$; (e) $\rightsquigarrow at$; (a) $\rightsquigarrow t^{-1}a$; (c) $\rightsquigarrow t^{-1}$.
- **AxD** : (h) $\rightsquigarrow at$; (f) $\rightsquigarrow t$; (a) $\rightsquigarrow t^{-1}a$; (c) $\rightsquigarrow t^{-1}$.
- **BxC** : (g) $\rightsquigarrow t$; (e) $\rightsquigarrow at$; (d) $\rightsquigarrow t^{-1}a$; (b) $\rightsquigarrow t^{-1}$.
- **BxD** : (h) $\rightsquigarrow at$; (f) $\rightsquigarrow t$; (d) $\rightsquigarrow t^{-1}a$; (b) $\rightsquigarrow t^{-1}$.

Chaque configuration possède donc exactement une arête envoyée sur chaque générateur de notre système $\{t, at\}$ ainsi que sur leur inverse ; c'est-à-dire sur chaque arête de $\Gamma(\mathbf{L}_{2,1}, \{t, at\})$. On a donc montré que chaque arête de $DL_2(3)$ était envoyée sur une arête différente de $\Gamma(\mathbf{L}_{2,1}, \{t, at\})$. Pour terminer il faudrait montrer que les arêtes de $\Gamma(\mathbf{L}_{2,1}, \{t, at\})$ sont bien envoyées par l'application réciproque sur des arêtes de $DL_2(3)$. C'est ici automatique car les deux arbres ont même valence (4 pour rappel).

□

4.2 Marches aléatoires

4.2.1 Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d

Définition 4.8. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{Z}^d est **récurrente** si elle passe une infinité de fois par chaque point presque sûrement.

Définition 4.9. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On définit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la **marche aléatoire uniforme** sur \mathbb{Z}^d par $(S_n) = \sum_{i=1}^n X_i$; où les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont i.i.d de loi uniforme sur $\{e_1, \dots, e_d\} \cup \{-e_1, \dots, -e_d\}$; où les (e_i) sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{Z}^d .

Proposition 4.10. La marche aléatoire uniforme est récurrente sur \mathbb{Z}^d si et seulement si il existe $v \in \mathbb{Z}^d$ tel que la marche passe une infinité de fois par v presque sûrement.

Démonstration. — Le sens direct est clair.

— Soit (S_n) la marche aléatoire uniforme sur \mathbb{Z}^d . Soit (X_k) une suite de variables aléatoires i.i.d sur \mathbb{Z}^d telle que $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Soit $v \in \mathbb{Z}^d$ un point tel que la marche aléatoire passe par v une infinité de fois presque sûrement. Soit N tel que $S_N = v$.

On a que $\mathbb{P}(S_{N+1} \in \bigcup_{i=1}^d \{v \pm e_i\} \mid S_N = v) = 1$ par définition de la marche aléatoire.

Puisqu'il existe une infinité de tels N , et qu'un nombre fini de voisins de v , on en déduit qu'il existe $i_0 \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que la marche aléatoire passe une infinité de fois par $v + e_{i_0}$ ou $v - e_{i_0}$.

Supposons que ce soit $v + e_{i_0}$ pour la clarté de la preuve (le même raisonnement pouvant être appliqué à $v - e_{i_0}$).

Comme les X_k suivent la loi uniforme sur \mathbb{Z}^d , on a que $\mathbb{P}(X_1 = e_{i_0}) = \mathbb{P}(X_1 = e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. De plus les variables sont indépendantes donc en particulier, X_{N+1} est indépendante de S_N . Le calcul suivant en découle :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{N+1} = v + e_{i_0} \mid S_N = v) &= \mathbb{P}(X_{N+1} = e_{i_0} \mid S_N = v) \\ &= \mathbb{P}(X_{N+1} = e_{i_0}) \\ &= \mathbb{P}(X_{N+1} = e_i) \quad \text{pour tout } i \in \llbracket 1, d \rrbracket \\ &= \mathbb{P}(X_{N+1} = e_i \mid S_N = v) \\ &= \mathbb{P}(S_{N+1} = v + e_i \mid S_N = v) \end{aligned}$$

On en déduit que la marche passe une infinité de fois par tous les $v + e_i$ et $v - e_i$, pour i de 1 à d (presque sûrement). On a donc que la marche aléatoire passe une infinité de fois par chaque voisin de v dans le graphe de \mathbb{Z}^d . On conclut donc par récurrence en ré-applicant ce raisonnement sur chaque voisin (le graphe de \mathbb{Z}^d étant connexe, le raisonnement passera par chaque point de \mathbb{Z}^d en temps fini). □

Définition 4.11. *Si une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d ne passe qu'un nombre fini de fois en chaque point, (c'est-à-dire, par la proposition, si elle n'est pas récurrente), on dit qu'elle est **transitoire**.*

Théorème 4.12 (de Pólya, 1921). *La marche aléatoire uniforme sur \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^2 est récurrente. Elle est transitoire sur \mathbb{Z}^d , pour tout $d > 2$.*

Remarque. *Par la proposition 4.1, pour prouver le théorème de Pólya, il suffit donc de vérifier si la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0 ou non.*

Rappels préliminaires pour la preuve de ce théorème :

Formule de Stirling : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Lemme 4.13 (de Borel-Cantelli). *Soit (Ω, A, \mathbb{P}) un espace probabilisé. Soit (A_n) une suite d'événements dans A . Si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est finie, alors $\mathbb{P}(\limsup_n(A_n)) = 0$.*

Proposition 4.14. *Soit (S_n) une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d , $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\{S_n = 0\}) = +\infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup\{S_n = 0\}) = 1$.*

Remarque. 1. **Attention :** *La proposition précédente n'est vraie que dans le cadre d'une marche aléatoire. Dans le cas général, on demande que les événements observés soient indépendants; ce qui n'est pas le cas des $(\{S_n = 0\})_{n \in \mathbb{N}}$*

2. $\limsup(\{S_n = 0\}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} (S_n = 0)$, i.e $x \in \limsup(\{S_n = 0\})$ si pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq k$ telle que $x \in \{S_n = 0\}$.

Donc $\mathbb{P}(\limsup(\{S_n = 0\})) = 1$ si et seulement si la marche passe une infinité de fois par 0.

3. La proposition et le lemme de Borel-Cantelli montrent que la marche aléatoire est récurrente si et seulement si $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(\{S_k = 0\}) = +\infty$.

Démonstration de la proposition 4.2. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ avec les X_k i.i.d. On suppose que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\{S_n = 0\}) = +\infty$. On note $A = \limsup(\{S_n = 0\})$, et B l'évènement "La marche aléatoire ne passe par 0 qu'un nombre fini de fois". D'après la proposition 4.1, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$; pour démontrer le résultat, il suffit donc de montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$.

Or, $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\{S_n = 0\} \cap \{S_k \neq 0, k > n\})$ *on partitionne selon le dernier passage n en 0*
 $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\{S_n = 0\} \cap \{S_k - S_n \neq 0, k > n\})$ *car on sait déjà que $S_n = 0$*
 $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\{S_n = 0\} \cap \{S_{i+n} - S_n \neq 0, i > 0\})$ *changement d'indice $k = i + n$*
 $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\{S_n = 0\} \cap \{\sum_{j=1}^i X_{n+j} \neq 0, i > 0\})$. *par définition de S_n*

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap \{\sum_{j=1}^i X_{n+j} \neq 0, i > 0\}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(\{S_n = 0\}) \mathbb{P}(\{\sum_{j=1}^i X_{n+j} \neq 0, i > 0\})) \quad \text{car } (S_n) \text{ est indépendante des } X_j \text{ dès que } j > n \\ &= \mathbb{P}(\{\sum_{j=1}^i X_j \neq 0\}) \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(\{S_n = 0\})) \quad \text{car les variables sont i.i.d.} \end{aligned}$$

On sait que $\mathbb{P}(B) \in [0, 1]$ et par hypothèse, $\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(\{S_n = 0\}))$ diverge. On a donc nécessairement $\mathbb{P}(\{\sum_{j=1}^i X_j \neq 0\}) = 0$, d'où $\mathbb{P}(B) = 0$. \square

Démonstration du théorème de Pólya. On note $S_n^{(d)}$ la marche aléatoire uniforme sur \mathbb{Z}^d , (e_1, \dots, e_d) les vecteurs de la base canonique. Par ce qui précède, on veut montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{S_n^{(d)} = 0\})$ diverge pour $d \leq 2$, converge pour $d \geq 3$. On notera à chaque fois $S_n^{(d)} = \sum_{k=1}^n X_k$ où X_k suit la loi uniforme sur $(\pm e_1, \dots, \pm e_d)$

— $d=1$:

On a que $\mathbb{P}(S_n^{(1)} = 0) = 0$ dès que n est impair. On a également :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{2n}^{(1)} = 0) &= \mathbb{P}(\text{"faire autant de pas à droite qu'à gauche"}) \\ &= \binom{2n}{n} \mathbb{P}(X_1 = 1)^n \mathbb{P}(X_1 = -1)^n \\ &= \binom{2n}{n} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{1}{2^{2n}} \\ &\sim \frac{2\sqrt{\pi n} (\frac{2n}{e})^{2n}}{2\pi n (\frac{n}{e})^{2n}} \times \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

Ce qui est bien le terme général d'une série divergente. La marche est donc récurrente.

— d=2 : De même que dans le cas précédent, $\mathbb{P}(S_n^{(2)} = 0) = 0$ dès que n est impair. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{2n}^{(2)} = 0) &= \mathbb{P}(\text{"faire autant de pas à droite qu'à gauche, et autant de pas en haut qu'en bas"}) \\
&= \sum_{k_1+k_2=n} \binom{2n}{k_1} \binom{2n-k_1}{k_1} \binom{2n-2k_1}{k_2} \mathbb{P}(X_1 = e_1)^{k_1} k_2 \mathbb{P}(X_1 = -e_1)^{k_1} k_2 \mathbb{P}(X_1 = e_2)^{k_2} \mathbb{P}(X_1 = -e_2)^{k_2} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \binom{2n}{n} \quad \text{C'est un argument de dénombrabilité}^{(*)} \\
&= \left(\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right)^2 \\
&\sim \frac{1}{\pi n} \quad \text{Par la formule de Stirling, de la même manière que dans le cas précédent}
\end{aligned}$$

Ceci est bien le terme général d'une série divergente.

(*) En effet, chaque terme de la somme revient à découper un espace de $2n$ éléments en deux espaces de n éléments puis d'en choisir k dans le premier, $n-k$ dans le second. Au total, la somme donne donc toutes les possibilités de choisir n éléments parmi $2n$.

— d=3 : Par le même raisonnement encore, $\mathbb{P}(S_n^{(3)} = 0) = 0$ dès que n est impair et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{2n}^{(3)} = 0) &= \sum_{l+m \leq n} \binom{2n}{l} \binom{2n-l}{l} \binom{2n-2l}{m} \binom{2n-2l-m}{m} \binom{2n-2l-2m}{n-l-m} \\
&\times \mathbb{P}(X_1 = e_1)^l \mathbb{P}(X_1 = -e_1)^l \mathbb{P}(X_1 = e_2)^m \mathbb{P}(X_1 = -e_2)^m \mathbb{P}(X_1 = e_3)^{n-l-m} \mathbb{P}(X_1 = -e_3)^{n-l-m} \\
&= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{l+m \leq n} \frac{(2n)!}{(m!l!(n-l-m)!)^2} \\
&= \frac{1}{6^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{l+m \leq n} \frac{(n!)^2}{(m!l!(n-l-m)!)^2} \\
&\leq \frac{1}{6^{2n}} \binom{2n}{n} \max_{l+m \leq n} \left\{ \left(\frac{n!}{m!l!(n-l-m)!} \right) \right\} \times \sum_{l+m \leq n} \frac{n!}{m!l!(n-l-m)!}
\end{aligned}$$

Intéressons nous à la somme dans la dernière ligne :

$$\begin{aligned}
\sum_{l+m \leq n} \frac{n!}{m! l! (n-l-m)!} &= \sum_{l+m \leq n} \binom{n}{l+m} \binom{l+m}{m} \\
&\leq \sum_{l+m \leq n} \binom{n}{l+m} (l+m)! \\
&\leq n! \sum_{l+m \leq n} \binom{n}{l+m} \\
&\leq n! n \sum_{j \leq n} \binom{n}{j} \\
&= n! n \times 2^n \text{ La somme est exactement le nombre de parties} \\
&\quad \text{d'un ensemble à } n \text{ éléments, c'est à dire } 2^n
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\max_{l+m \leq n} \left\{ \frac{n!}{m! l! (n-l-m)!} \right\} = \frac{n!}{\min_{n_1, n_2, n_3} \{ (n_1! n_2! n_3! \mid n_1 + n_2 + n_3 = n, |n_i - n_j| \leq 1 \}}$$

En effet, si par exemple $n_1 - n_2 > 1$, alors $n_1! n_2! n_3! > (n_1 - 1)! (n_2 + 1)! n_3!$.

Donc $n_1, n_2, n_3 \geq \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$, et $\min_{n_1, n_2, n_3} \{ n_1! n_2! n_3! \} \geq \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor!^3$.

Revenons au terme total que l'on voulait majorer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{2n}^{(3)} = 0) &\leq \frac{1}{6^{2n}} \frac{\binom{2n}{n} n! n 2^n}{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor!^3} \\
&\sim \frac{(2n)!}{n! (\frac{n-2}{3})!^3}
\end{aligned}$$

La formule de Stirling nous dit qu'il s'agit du terme général d'une série convergente. La marche dans \mathbb{Z}^3 est donc transitoire.

— $d > 3$:

Prenons $S_n^{(d,3)}$ la projection de $S_n^{(d)}$ sur \mathbb{Z}^3 . Par ce qui précède, $S_n^{(d,3)}$ est transitoire, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq k$, $S_n^{(d,3)} \neq (0, 0, 0)$ presque sûrement.

Donc, pour tout $n \geq k$, $S_n^{(d)} \neq (0, 0, 0, x_3, \dots, x_d)$, pour tout $x_3, \dots, x_d \in \mathbb{Z}$. En particulier pour tout $n \geq k$, $S_n^{(d)} \neq (0, 0, 0, 0, \dots, 0)$.

La marche est donc transitoire par définition. □

4.2.2 Lien avec $L_{2,d}$

Imaginons que l'allumeur de réverbères ne se déplace plus selon une séquence donnée mais au hasard dans sa rue. À chaque pas il allume la lampe sur laquelle il se trouve, l'éteignant si elle était en fonctionnement.

Par ce qui précède sur les marches aléatoires sur \mathbb{Z} , si l'on regarde la rue sur un temps très long, nous ne verrions que des lampes clignoter indéfiniment. Il en serait de même si l'allumeur se déplaçait dans une ville (i.e dans \mathbb{Z}^2).

En revanche, si l'allumeur pouvait se déplacer en dimension plus grande, en des temps infiniment grands nous observerions tout autre chose. Puisque l'allumeur ne passerait qu'un nombre fini de fois par chaque réverbère, chacun d'eux aurait une position fixe au bout d'un certain temps. En regardant les lumières allumées, nous pourrions donc suivre le parcours effectué par l'allumeur de réverbères.

4.2.3 Marche aléatoire dans $L_{2,1}$ (heuristique)

Définition 4.15. Soit G un groupe quelconque et S un ensemble générateur. On définit **marche aléatoire uniforme** sur $\Gamma(G, S)$ (graphe de Cayley de G sur S) comme : $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ telle que les X_k sont i.i.d de loi uniforme sur $S \cup S^{-1}$.

Théorème 4.16. La marche aléatoire uniforme sur $\Gamma(L_{2,1}, \{t, at\})$ est transitoire.

Commentaires :

1. Bien que la marche aléatoire sur \mathbb{Z} est récurrente, la marche aléatoire sur $(\oplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_i) \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}$ est transitoire, ce qui peut être contre-intuitif a priori, il s'agit donc d'un résultat notable.
2. Nous ne démontrerons pas ce théorème, la preuve faisant appel à de nombreux résultats préalables peu en lien avec ce que l'on se propose d'étudier dans ce TER.
3. Dans l'énoncé de ce théorème nous précisons le système de générateurs pour le graphe de Cayley de $L_{2,1}$ mais le résultat est encore vrai pour n'importe quelle partie génératrice du groupe de l'allumeur de réverbères.
4. Nous pouvons toutefois donner une heuristique sur ce résultat. On peut regarder la représentation de $L_{2,1}$ sous la forme de son graphe de Diestel Leader puis la projection sur un des deux arbres. Puisqu'il est de valence 3 et qu'il possède deux branches sortantes, on a environ 2 chances sur 3 de s'éloigner de l'origine, donc la marche est transitoire.
En pratique, le mouvement sur le premier arbre n'est pas indépendant du mouvement sur le deuxième donc les estimations seront bien plus complexes que cela. De plus, comme nous l'avons vu, progresser dans l'arbre ne signifie pas toujours s'éloigner de l'origine puisque nous avons des impasses de profondeur arbitraire.

5 Références :

- Jennifer Taback, *Lamplighter Groups*, chapitre 15 de *Office Hours with a Geometric Group Theorist*, Princeton, ed. Matt Clay, Dan Margalit, 2017.
- Eric Luçon, UPMC, *Théorème de Polyà* : <https://www.lpsm.paris/pageperso/eric/polya.pdf>
- J. Franchi, UdS, *Cours de probabilité* : <https://irma.math.unistra.fr/~franchi/CoursPM.pdf>