

M1-MG
2022/2023

TER

PSL(2, \mathbb{R}) et groupes fuchsien

Nicolas Larroque
Université Grenoble-Alpes

Table des matières

1	Introduction	1
2	Le plan hyperbolique et ses isométries	1
2.1	Définition, métrique	1
2.2	Distance hyperbolique et géodésiques	2
2.3	Aire hyperbolique, Gauss-Bonnet et cinquième postulat d'Euclide	6
2.4	Étude du groupe des isométries	8
2.4.1	Point de vue des points fixes dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	9
2.4.2	Point de vue matriciel	9
3	Groupes discrets, groupes fuchsien	9
3.1	Généralités	10
3.2	Action proprement discontinue	11
3.3	Un critère pour les groupes fuchsien : agir proprement discontinument	13
3.4	Domaine fondamental, domaine de Dirichlet	14
4	Étude des groupes $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et $\Gamma(2)$	16

1 Introduction

Ce mémoire a pour objet un début d'étude des groupes dits fuchsien, qui sont une famille de sous-groupes de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Il s'agit non pas de voir ces groupes comme des groupes de matrices abstraits, mais de les faire agir sur un ensemble approprié : le demi-plan de Poincaré, l'un des modèles de la géométrie hyperbolique. Ces groupes sont ainsi envisagés en tant que groupes de transformations du plan hyperbolique, ce qui permet une approche géométrique plus visuelle et surtout efficace pour comprendre des groupes qui autrement peuvent se montrer difficiles à appréhender. Après avoir introduit le demi-plan de Poincaré et les notions de géométrie hyperbolique nécessaires à l'étude des groupes fuchsien, nous établissons des outils spécifiques à leur étude, puis nous utilisons ces outils sur deux exemples de bases : $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et $\Gamma(2)$.

2 Le plan hyperbolique et ses isométries

Dans cette première partie, nous introduisons le plan hyperbolique, sur lequel va notamment agir $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Plus précisément, nous étudierons un modèle du plan hyperbolique parmi d'autres, le demi-plan de Poincaré que nous noterons dans toute la suite \mathbb{H}^2 . Nous commencerons par une introduction générale, puis nous nous intéresserons plus particulièrement au groupe des isométries de \mathbb{H}^2 . On identifiera souvent \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} dans la suite.

2.1 Définition, métrique

Définition 2.1. On munit $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ de sa structure de variété classique en tant que ouvert de \mathbb{R}^2 . On note $T_z\mathbb{H}^2$ l'espace tangent à \mathbb{H}^2 en z , qui est réel de dimension deux.

- (i) Pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, on définit un produit scalaire sur $T_z\mathbb{H}^2$, appelé métrique hyperbolique, par $\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{\langle u, v \rangle}{\Im z}$ pour tous $u, v \in T_z\mathbb{H}^2$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien). On vérifie facilement que c'est bien un produit scalaire.
- (ii) La norme induite par la métrique hyperbolique s'appelle la norme hyperbolique, et est notée $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^2}$.
- (iii) On appelle bord à l'infini de \mathbb{H}^2 ou bord asymptotique l'ensemble $\partial_\infty\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = 0\} \cup \{\infty\}$.
- (iv) $(\mathbb{H}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^2})$ est appelé demi-plan de Poincaré.

Définition 2.2. Soient $z \in \mathbb{H}^2$, $u, v \in T_z\mathbb{H}^2$.

- (i) On appelle angle entre u et v le réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}^2}}{\|u\|_{\mathbb{H}^2} \|v\|_{\mathbb{H}^2}}$.
- (ii) On appelle angle orienté entre u et v , noté $\angle(u, v)$ le réel $\theta \in]-\pi, \pi[$ tel que $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}^2}}{\|u\|_{\mathbb{H}^2} \|v\|_{\mathbb{H}^2}}$ et $\theta > 0 \Leftrightarrow u_1v_2 - u_2v_1 > 0$.

Remarque 2.1. Remplacer la métrique hyperbolique par le produit scalaire usuel donne une définition équivalente de l'angle (orienté ou non) entre deux vecteurs, puisque les deux produits scalaires sont proportionnels en tout point de \mathbb{H}^2 .

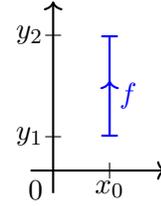
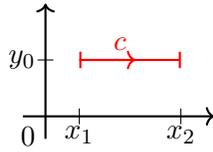
Définition 2.3. Soit $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{H}^2$ une courbe de classe C^1 . On appelle longueur de γ le réel

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{H}^2} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}}{\gamma_2(t)} dt$$

Exemple 2.1.

(1) Soit $c : t \in [0, 1] \mapsto (x_1 + t(x_2 - x_1), y_0)$ où x_1, x_2 et $y_0 > 0$ sont des réels fixés.

$$L_{\mathbb{H}^2}(c) = \int_0^1 \|c'(t)\|_{\mathbb{H}^2} dt = \int_0^1 \frac{x_2 - x_1}{y_0} dt = \frac{x_2 - x_1}{y_0}$$



(2) Soit $f : t \in [0, 1] \mapsto (x_0, y_1 + t(y_2 - y_1))$ où $0 < y_1 < y_2$ et x_0 sont des réels fixés.

$$L_{\mathbb{H}^2}(f) = \int_0^1 \|f'(t)\|_{\mathbb{H}^2} dt = \int_0^1 \frac{y_2 - y_1}{y_1 + t(y_2 - y_1)} dt = \ln(y_2) - \ln(y_1)$$

Remarque 2.2. On voit déjà des différences avec la géométrie euclidienne apparaitre. Un chemin horizontal de longueur euclidienne donnée est d'autant plus long qu'il est proche de l'axe réel (exemple (1)).

Il est facile de voir, en faisant un changement de variable, que la longueur d'une courbe ne dépend pas du paramétrage choisi. On peut également aisément définir la longueur d'une courbe C^1 par morceaux par recollement.

2.2 Distance hyperbolique et géodésiques

Nous allons dans cette partie munir \mathbb{H}^2 d'une distance, différente de la distance euclidienne usuelle et identifier les géodésiques de cet espace métrique, c'est à dire les objets qui sont au plan hyperbolique ce que les droites sont au plan euclidien, à savoir les trajectoires "de plus court chemin".

Définition 2.4. Soient $z, w \in \mathbb{H}^2$. On appelle distance hyperbolique entre z et w le réel

$$\rho(z, w) = \inf\{L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \mid \gamma \text{ chemin } C^1 \text{ par morceaux reliant } z \text{ et } w\}$$

ρ est clairement positive et symétrique. On verra plus loin qu'elle vérifie l'égalité triangulaire, ce qui en fait une distance sur \mathbb{H}^2 .

Définition 2.5. Une bijection $f : \mathbb{H}^2 \mapsto \mathbb{H}^2$ est appelée isométrie si elle préserve la distance hyperbolique sur \mathbb{H}^2 : pour tous $z, w \in \mathbb{H}^2$, $\rho(z, w) = \rho(f(z), f(w))$. On note $Isom(\mathbb{H}^2)$ le groupe des isométries de \mathbb{H}^2 .

Définition 2.6. On note $SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid ad - bc = 1 \right\}$. Le groupe des transformations de Möbius de \mathbb{C} est par définition

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

Remarque 2.3. Il est facile de voir que $PSL(2, \mathbb{R})$ est un groupe pour la composition, que la composée de deux éléments correspond au produit des matrices correspondantes, et que l'inverse d'un élément correspond à l'inverse de la matrice correspondante.

Chaque transformation de $PSL(2, \mathbb{R})$ est représentée par deux matrices $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ avec $A = -B$. Ainsi $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I_2\}$

$PSL(2, \mathbb{R})$ contient les transformations de la forme $T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ avec $ad - bc > 0$. Il suffit pour le voir de diviser le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{ad - bc}$ dans l'expression de T .

$PSL(2, \mathbb{R})$ contient en particulier les transformations $z \mapsto az + b$ avec $a > 0$ et $z \mapsto -\frac{1}{z}$.

Proposition 2.1. *PSL(2, ℝ) agit sur \mathbb{H}^2 par homéomorphismes.*

Démonstration. Soit $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, $T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ avec $ad - bc = 1$, et soit $z \in \mathbb{H}^2$.

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}$$

Donc $\Im T(z) = \frac{1}{2i}(T(z) - T(\bar{z})) = \frac{(ad - bc)z - (ad - bc)\bar{z}}{2i|cz + d|^2} = \frac{\Im z}{|cz + d|^2} > 0$. $T(z) \in \mathbb{H}^2$, on a donc bien une action de groupe, et T est un homéomorphisme car elle est clairement bicontinue. \square

Théorème 2.1. *PSL(2, ℝ) \subset Isom(\mathbb{H}^2).*

Démonstration. Soit $T : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$. Montrons que T préserve la métrique hyperbolique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^2}$. Soient $z \in \mathbb{H}^2$ et $u, v \in T_z \mathbb{H}^2$.

$$\langle DT_z(u), DT_z(v) \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{\langle DT_z(u), DT_z(v) \rangle}{\Im(T(z))^2} = \frac{|T'(z)| \langle u, v \rangle}{\Im(T(z))^2}$$

Or $T'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}$, donc $|T'(z)| = \frac{1}{|cz + d|^2}$ et on a vu précédemment

$$\text{que } \Im T(z) = \frac{\Im z}{|cz + d|^2}.$$

Ainsi $\langle DT_z(u), DT_z(v) \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{\langle u, v \rangle}{\Im z^2} = \langle u, v \rangle_{\mathbb{H}^2}$. T préserve la métrique hyperbolique donc la longueur des courbes et la distance hyperbolique (ces dernières étant définies uniquement à partir de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^2}$). \square

Définition 2.7. Une courbe $c :]a, b[\mapsto \mathbb{H}^2$ de classe C^1 par morceaux et régulière (en dehors des points de discontinuité de la dérivée) est appelée géodésique si elle minimise la distance hyperbolique entre n'importe quels deux points de son image, autrement dit si pour tous $t, s \in]a, b[$ avec $t < s$, $\rho(c(t), c(s)) = L_{\mathbb{H}^2}(c|_{]t, s[})$.

Une géodésique est dite complète si ses extrémités sont sur le bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.

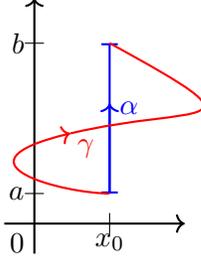
Remarque 2.4. Puisque les transformations de $PSL(2, \mathbb{R})$ préservent la métrique hyperbolique, l'image d'une géodésique par un élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ est aussi une géodésique.

Théorème 2.2. *Les géodésiques de \mathbb{H}^2 sont exactement les portions des demi-droites et demi-cercles orthogonaux à l'axe réel.*

Démonstration. Soient $z, w \in \mathbb{H}^2$.

cas 1 : $z = ia + x_0$ et $w = ib + x_0$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $0 < a < b$. Soit $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{H}^2$ un chemin C^1 reliant z à w (le cas C^1 par morceaux en découle facilement).

$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|\gamma_2'(t)|}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt = \ln \frac{b}{a}$. On a vu à l'exemple 2.1 que $\ln \frac{b}{a}$ est la longueur du chemin $\alpha : t \mapsto ia + it(b-a) + x_0$. α est donc une géodésique (et $\rho(z, w) = \ln \frac{b}{a}$).



cas 2 : $\Re z \neq \Re w$. Soit L_1 l'unique cercle euclidien orthogonal à \mathbb{R} par z et w (son centre est l'intersection de la médiatrice euclidienne de $[z, w]$ et de \mathbb{R} , voir figure 1). On note x_1, x_2 les points d'intersection de L_1 avec \mathbb{R} (avec $x_0 < x_1$), on pose $R = x_1 - x_0$ et $x_2 = x_1 + R$. Soit L_2 le cercle (euclidien) de centre x_1 et de rayon R et soit $T : \mathbb{C} \setminus \{x_1\} \mapsto \mathbb{C}$ l'inversion par rapport à L_2 : si $z \in \mathbb{C} \setminus \{x_1\}$, $T(z)$ se trouve sur la droite x_1z et à distance $\frac{R^2}{|z - x_1|}$ de x_1 . On étend L_2 à $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en posant $T(x_1) = \infty$ et $T(\infty) = x_1$.

$T(z) = x_1 + \frac{R^2}{\bar{z} - x_1} = -\frac{\frac{x_1}{R}\bar{z} + \frac{R^2 - x_1^2}{R}}{-\frac{1}{R}\bar{z} + \frac{x_1}{R}}$ pour tout $z \in \mathbb{H}^2$. Ainsi T est une isométrie : c'est un élément de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ composé avec $z \mapsto -\bar{z}$ qui est une isométrie (elle préserve les angles euclidiens et la partie imaginaire, donc elle préserve la métrique hyperbolique). T envoie z et w sur la demi-droite verticale d issue de x_0 ; en fait, $T(L_1) = d$ et $T(d) = T^{-1}(d) = L_1$. Le cas 1 permet de conclure que la courbe reliant z et w portée par L_1 est une géodésique.

Il n'y a pas d'autres géodésiques : dans l'inégalité du cas 1, il y a égalité si et seulement si $\gamma_1'(t) = 0 \forall t$, i.e. si et seulement si γ est portée par une demi-droite verticale. \square

Remarque 2.5. La transformation T de la preuve précédente n'est pas dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Cependant, on peut montrer que pour toute géodésique complète, il existe une transformation de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ qui envoie cette géodésique sur $i\mathbb{R}$. Si la géodésique est déjà verticale, une translation suffit.

Sinon, en composant la transformation T de la preuve précédente avec l'inversion par rapport au cercle de centre x_0 et de rayon 1 (puis en translatant à nouveau), on peut montrer qu'on obtient la transformation voulue.

D'une façon plus directe, si la géodésique intersecte \mathbb{R} en x_0 et x_1 , alors on peut vérifier que la transformation $z \mapsto -\frac{1}{z - x_0} + \frac{1}{x_0 - x_1}$ est bien de la forme souhaitée.

Corollaire 2.1. *Pour tous $z, w \in \mathbb{H}^2$, il existe une unique géodésique γ qui relie z et w , et $\rho(z, w) = L_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$. On note dans la suite cette géodésique $[z, w]$ (lorsque cela ne prête pas à confusion avec le segment euclidien $[z, w]$).*

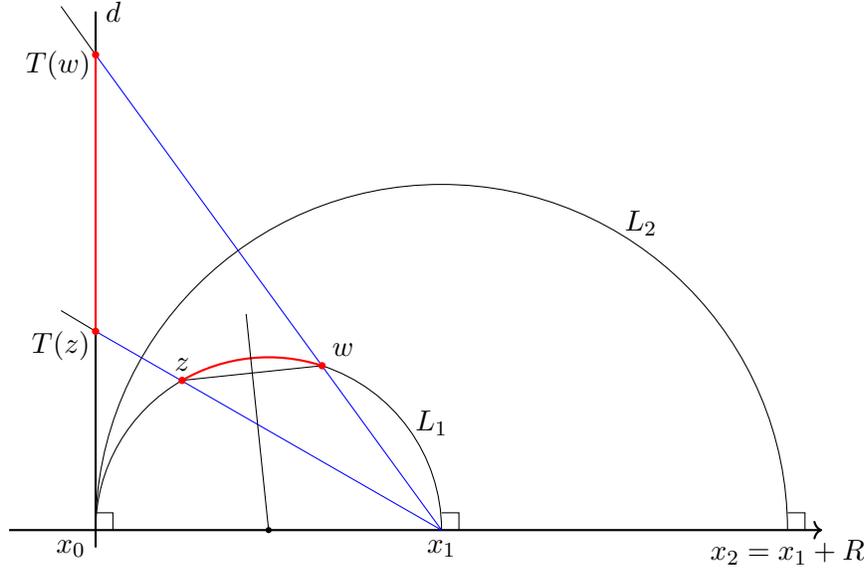


FIGURE 1

Démonstration. Immédiat d'après la preuve du théorème 2.2. □

Corollaire 2.2 (Inégalité triangulaire). *Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}^2$ trois points distincts. Alors $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$, et l'égalité a lieu si et seulement si $z_2 \in [z_1, z_3]$.*

Démonstration. Quitte à appliquer l'isométrie T de la preuve du théorème 2.2, on peut supposer que z_1 et z_3 sont sur la même droite verticale.

Soient α, β, γ les trois segments géodésiques reliant z_1 à z_2 , z_2 à z_3 et z_1 à z_3 respectivement. On note c la concaténation α et β . c est une courbe C^1 par morceaux reliant z_1 à z_3 . Le cas 1 de la preuve du théorème montre que $\rho(z_1, z_3) = L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \leq L_{\mathbb{H}^2}(c) = L_{\mathbb{H}^2}(\alpha) + L_{\mathbb{H}^2}(\beta) = \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$, et que l'égalité a lieu si et seulement si $c = \gamma$, i.e. si et seulement si $z_2 \in [z_1, z_3]$. □

Théorème 2.3. *Soient $z, w \in \mathbb{H}^2$. Les égalités suivantes sont vraies :*

- (i) $\rho(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$
- (ii) $\cosh(\rho(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\Im z \Im w}$
- (iii) $\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\Im z \Im w}}$
- (iv) $\cosh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{|z - \bar{w}|}{2\sqrt{\Im z \Im w}}$
- (v) $\tanh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \left|\frac{z - w}{z - \bar{w}}\right|$

Démonstration. On admet que toutes les égalités sont équivalentes et on prouve (iii). On sait que le côté gauche de l'égalité est invariant par transformation de PSL(2, ℝ). Le côté droit l'est aussi : on peut montrer par un calcul que pour tous $z, w \in \mathbb{H}^2$, pour tout $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $|T(z) - T(w)| = |z - w| \sqrt{|T'(z)T'(w)|}$. Soit L l'unique géodésique complète passant par z et w et $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$

qui envoie L sur $i\mathbb{R}$ (existe d'après la remarque 2.5). On pose $T(z) = ia$, $T(w) = b$ et on suppose $b > a$. On sait que $\rho(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}$, donc (iii) est vraie pour ia et ib et donc pour z et w . \square

Proposition 2.2. *Les cercles hyperboliques de \mathbb{H}^2 sont exactement ses cercles euclidiens (avec un centre différent). Ainsi la topologie induite par la distance hyperbolique est celle induite par la distance euclidienne.*

Démonstration. admis \square

2.3 Aire hyperbolique, Gauss-Bonnet et cinquième postulat d'Euclide

Dans cette partie, nous introduisons quelques notions géométriques qui seront utiles dans la suite et donnons un bref aperçu de la différence fondamentale entre la géométrie hyperbolique et la géométrie euclidienne.

Définition 2.8. Soit $A \subset \mathbb{H}^2$. On définit l'aire hyperbolique de A par $\mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2}$ si cette intégrale converge.

Théorème 2.4. *L'aire hyperbolique est invariante par action de PSL(2, ℝ) : si $A \subset \mathbb{H}^2$ est telle que $\mu(A)$ existe et si $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, alors $\mu(T(A))$ existe et vaut $\mu(A)$.*

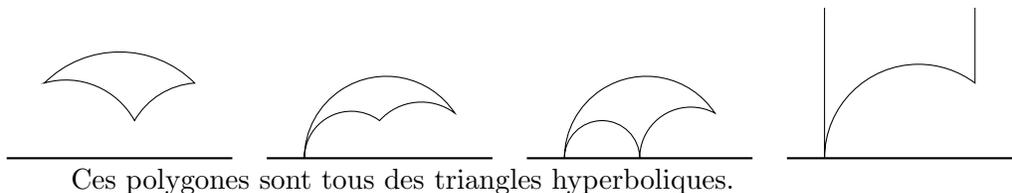
Démonstration. Soit $T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ une transformation de PSL(2, ℝ). T est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{H}^2 et $T'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}$. On a vu que $\Im T(z) = \frac{\Im z}{|cz + d|^2}$. Un changement de variable donne :

$$\mu(T(A)) = \int_{T(A)} \frac{dx dy}{y^2} = \int_A \frac{|T'(z)| dx dy}{(\Im T(z))^2} = \int_A \frac{|cz + d|^4 dx dy}{y^2 |cz + d|^4} = \mu(A)$$

\square

Définition 2.9. Un polygone hyperbolique à n côtés est un ensemble fermé de \mathbb{H}^2 dont la frontière est une union de segments hyperboliques. On autorise les sommets (i.e. les intersections des segments qui forment la frontière) à se trouver sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si un sommet est sur le bord à l'infini, le polygone a un angle nul en ce sommet.

Exemple 2.2.



Théorème 2.5 (théorème de Gauss-Bonnet). *Soit Δ un triangle hyperbolique d'angles α, β, γ . Alors $\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.*

Démonstration.

cas 1 : Un des sommets de Δ est sur le bord à l'infini. On peut supposer que ce sommet est ∞ quitte à appliquer une transformation de PSL(2, ℝ) l'envoyant sur ∞ (qui existe d'après la remarque 2.5) ce qui ne change pas les angles du triangle. Deux des côtés de Δ sont donc des demi-droites verticales, et le troisième est contenu dans un cercle euclidien orthogonal à \mathbb{R} . On peut supposer que ce dernier est centré en 0 et de rayon 1 (quitte faire une translation puis une homothétie de rapport positif, qui sont des transformations de PSL(2, ℝ)). Ainsi Δ est comme dans la figure 2. On note α et β les angles de Δ en A et B respectivement. On a $\widehat{AOC} = \alpha$ puisque α et \widehat{AOC} ont

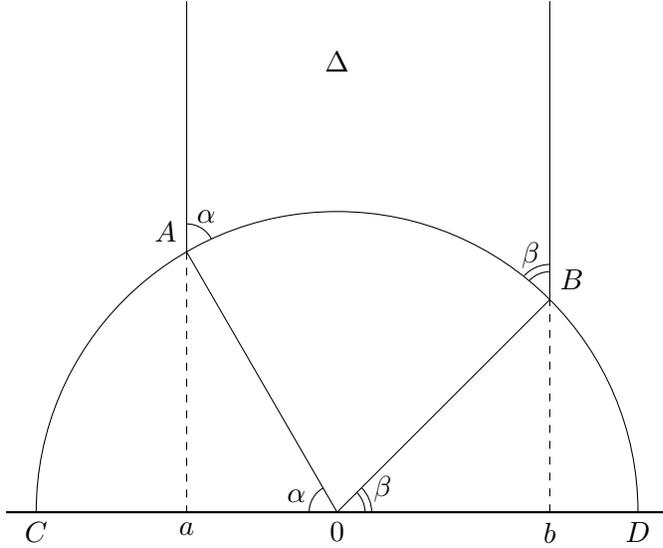


FIGURE 2

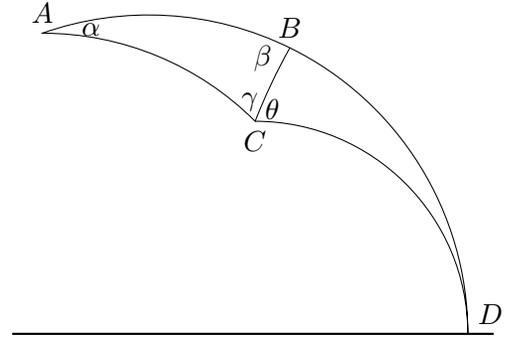


FIGURE 3

des côtés mutuellement perpendiculaires (il en va de même pour β et \widehat{BOD}).

$$\mu(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_a^b \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta d\theta}{\sin \theta} = \pi - \alpha - \beta$$

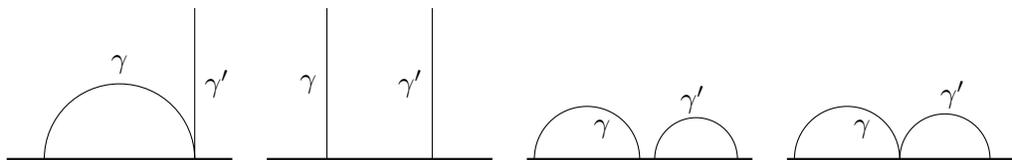
cas 2 : Δ n'a pas de sommet sur $\partial_{\infty} \mathbb{H}^2$. On peut supposer qu'aucun côté n'est vertical (quitte à prendre l'image par une transformation de PSL(2, ℝ)). La situation est représentée par la figure 3. On pose $\Delta_1 = ACD$, $\Delta_2 = BCD$. On a $\Delta = \Delta_1 \setminus \Delta_2$. Le cas 1 appliqué à Δ_1 et Δ_2 donne :

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2) = \pi - \alpha - (\theta + \gamma) - [\pi - (\pi - \beta) - \theta] = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

□

Définition 2.10. On dit que deux géodésiques complètes sont parallèles si elles n'ont aucun point en commun dans \mathbb{H}^2 .

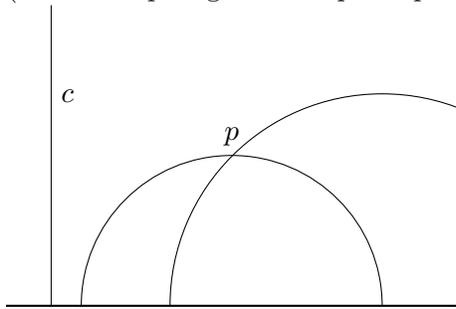
Exemple 2.3.



Théorème 2.6. $(\mathbb{H}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^2})$ vérifie les quatre premiers postulats d'Euclide mais pas le cinquième. Ces postulats sont les suivants :

1. Par deux points passe une unique géodésique complète.
2. Tout segment hyperbolique peut être prolongé infiniment de chaque côté.
3. Tous les angles droits sont congruents : si (c_1, c_2) et (c'_1, c'_2) sont deux paires de géodésiques se rencontrant avec un angle droit, alors il existe une isométrie de $(\mathbb{H}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^2})$ qui envoie c_1 sur c'_1 et c_2 sur c'_2 .
4. Pour tout $z \in \mathbb{H}^2$ et tout $r > 0$, il existe un cercle hyperbolique de centre z et de rayon r .
5. Si c est une géodésique et $p \in \mathbb{H}^2$ un point en dehors de c , il existe une unique géodésique parallèle à c passant par p .

Démonstration. On se contente ici de voir sur l'exemple de la figure qui suit que le cinquième postulat n'est pas vérifié. Il existe en fait une infinité de géodésiques parallèles à c passant par p . (On remarque également que le premier postulat a déjà été prouvé.)



□

2.4 Étude du groupe des isométries

Nous avons vu que $PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H}^2)$. En fait, nous avons presque totalement identifié les transformations de $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Théorème 2.7. Le groupe $Isom(\mathbb{H}^2)$ est engendré par $PSL(2, \mathbb{R})$ et la transformation $z \mapsto -\bar{z}$.

Démonstration. Soit $\phi \in Isom(\mathbb{H}^2)$. ϕ envoie $i\mathbb{R}$ sur une certaine géodésique, et d'après la remarque 2.5, il existe un élément g de $PSL(2, \mathbb{R})$ tel que $g\phi$ envoie $i\mathbb{R}$ sur lui-même. Quitte à composer par $z \mapsto -\frac{1}{z}$ et par une homothétie de rapport strictement positif, on peut supposer que $g\phi$ fixe i , 0 et l'infini, i.e. fixe $i\mathbb{R}$.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$, on note $g\phi(z) = u + iv$. Pour tout $t > 0$, on a

$$\rho(z, it) = \rho(g\phi(z), it) = \rho(u + iv, it)$$

D'après le théorème 2.3 (iii), $(x^2 + (y - t)^2)v = (u^2 + (v - t)^2)y$. En divisant des deux côtés par t^2 puis en passant à la limite lorsque $t \rightarrow \infty$, on obtient $v = y$ et $x^2 = u^2$.

Ainsi $g\phi(z) = z$ ou $-\bar{z}$. g et ϕ étant continues (clair pour g , ϕ est continue pour la topologie de la distance hyperbolique qui est aussi celle de la distance euclidienne), une seule des deux égalités est vraie pour tout $z \in \mathbb{H}^2$.

Si $g\phi(z) = z$ alors $\phi \in PSL(2, \mathbb{R})$, sinon ϕ est la composée d'un élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ avec la transformation $z \mapsto -\bar{z}$. □

Définition 2.11. Soit $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ avec $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ pour tout $z \in \mathbb{H}^2$ ($ad - bc = 1$). La trace de T est définie par $\text{tr}(T) = |a + d|$.

Nous allons maintenant étudier les éléments de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ selon leur trace, qui ne dépend pas du choix de la matrice représentant la transformation de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. On arrive à une même classification selon deux approches complémentaires : les points fixes de la transformation et la diagonalisabilité ou non de la matrice.

2.4.1 Point de vue des points fixes dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

On étend naturellement l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ à $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Soit $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ pour tout $z \in \mathbb{H}^2$ ($ad - bc = 1$). Soit $z \in \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{R}$.

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

Le discriminant de l'équation est $\Delta = (d - a)^2 - 4bc = d^2 - 2ad + a^2 - 4 + 4ad = (d + a)^2 - 4$.

- Si $\Delta > 0$ i.e. si $\text{tr}(T) > 2$, on dit que T est hyperbolique. T a alors deux points fixes distincts. Si $c \neq 0$, ils sont réels.
- Si $\Delta = 0$ i.e. si $\text{tr}(T) = 2$, on dit que T est parabolique. T a alors un point fixe qui est réel si $c \neq 0$.
- Si $\Delta < 0$ i.e. si $\text{tr}(T) < 2$, on dit que T est elliptique. T a alors deux points fixes dans \mathbb{C} qui sont conjugués, donc un seul point fixe dans \mathbb{H}^2 .

T fixe l'infini si et seulement si $c = 0$ autrement dit si et seulement si T est de la forme $z \mapsto az + b$. Si $a = 1$, T est parabolique et ne fixe que l'infini. Si $a \neq 1$, T est hyperbolique et fixe l'infini et $\frac{b}{1-a}$.

2.4.2 Point de vue matriciel

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique est $\chi_M = X^2 - \text{tr}(M)X + 1$.

- M est diagonalisable sur \mathbb{R} si et seulement si χ_M a deux racines réelles distinctes i.e. si et seulement si $|\text{tr}(M)| > 2$. On dit que M est hyperbolique et elle est alors conjuguée dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ ($\lambda \neq 1$).
- Si $|\text{tr}(M)| = 2$, M est seulement triangularisable sur \mathbb{R} et conjuguée (dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$) à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). M est dite parabolique.
- Si $|\text{tr}(M)| < 2$, M n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} mais l'est sur \mathbb{C} et est conjuguée (dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$) une matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ($\theta \in \mathbb{R}$). M est dite elliptique.

3 Groupes discrets, groupes fuchsien

Nous nous intéressons dans cette partie à une famille de sous-groupes de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ qui contient $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et nous développons des outils pour l'étudier.

3.1 Généralités

Nous commençons par rappeler des résultats plus ou moins généraux sur les groupes topologiques et les groupes discrets qui nous seront utiles par la suite.

Définition 3.1. Les ouverts de la topologie discrète d'un ensemble sont toutes les parties de cette ensemble. Un groupe topologique est dit discret si sa topologie est la topologie discrète.

Proposition 3.1. Si G est un groupe topologique et $g \in G$ tel que $\{g\}$ est ouvert, alors G est discret.

On munit $PSL(2, \mathbb{R})$ d'une topologie de la façon suivante : $GL(2, \mathbb{C})$ est muni de la topologie induite par la norme euclidienne de \mathbb{R}^4 . $SL(2, \mathbb{R})$ est muni de la même topologie en tant que sous groupe de $GL(2, \mathbb{C})$ et enfin $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ est muni de la topologie quotient. On munit $Isom(\mathbb{H}^2)$ d'une topologie de la même manière.

On admet que tout quotient d'un espace métrique est séquentiel, donc $PSL(2, \mathbb{R})$ est séquentiel. Ainsi un sous-groupe Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ est discret si et seulement si pour toute suite T_1, T_2, \dots d'éléments de Γ , si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers id , alors $T_n = id$ à partir d'un certain rang.

Proposition 3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$ si et seulement si il existe $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de matrices de $SL(2, \mathbb{R})$ et $A \in SL(2, \mathbb{R})$ représentant (g_n) et g respectivement tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ dans $SL(2, \mathbb{R})$.

Démonstration. (admis) □

Proposition 3.3. $PSL(2, \mathbb{R})$ est bien un groupe topologique, c'est à dire que l'inversion et la composition dans $PSL(2, \mathbb{R})$ sont bien continus pour la topologie décrite plus haut.

Démonstration. Nous ne montrerons que la continuité de l'inversion. Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$, alors il existe $(A_n)_{n \geq 0}$ et $A \in SL(2, \mathbb{R})$ comme dans la proposition. L'inversion est continue dans $SL(2, \mathbb{R})$ (qui est un groupe topologique) donc $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{-1} = A^{-1}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1} = g^{-1}$ grâce au critère de la proposition. □

Définition 3.2. Un sous groupe de $Isom(\mathbb{H}^2)$ est dit fuchsien si c'est un groupe discret et si tous ses éléments sont conformes, i.e un groupe fuchsien est un sous groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Lemme 3.1.

- (i) Tout sous-groupe discret non trivial de $(\mathbb{R}, +)$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.
- (ii) Tout sous-groupe discret de (\mathbb{S}^1, \times) est cyclique.

Démonstration.

- (i) Soit G un sous groupe discret non trivial de \mathbb{R} et soit $a > 0$ le plus petit élément strictement positif de G (a existe sans quoi G aurait un point d'accumulation en zéro). Soit $y \in \mathbb{R} \setminus a\mathbb{Z}$ (supposons $y > 0$ quitte à changer son signe). Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $an < y < a(n + 1)$ i.e. $0 < y - an < a$ donc $y \notin G$ par minimalité de a .

- (ii) Soit G un sous groupe discret non trivial de \mathbb{S}^1 , et $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it}$ morphisme de groupe surjectif et continu. $\phi^{-1}(G)$ est un sous-groupe discret de \mathbb{R} , donc par le cas (i) il existe $\theta > 0$ tel que $\phi^{-1}(G) = \theta\mathbb{Z}$ donc $G = \{e^{i\theta n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m\theta = 2\pi$ (sinon θ n'est pas le plus petit argument du groupe).

□

Théorème 3.1. *Soit G un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

- (i) *Si G est engendré par un élément hyperbolique ou parabolique, alors G est fuchsien.*
(ii) *Si G est engendré par un élément elliptique, alors G est fuchsien si et seulement si cet élément est d'ordre fini.*

Démonstration.

- (i) Si G est engendré par un élément hyperbolique T , représenté par $M \in SL(2, \mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\langle M \rangle$ est discret dans $GL(2, \mathbb{C})$. $\langle M \rangle$ est conjugué à $H = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^m & 0 \\ 0 & \lambda^{-m} \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$ pour un certain $\lambda \neq 1$. Soit $(A_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de H convergeant vers I_2 . On a donc une suite d'entiers $(m_k)_{k \geq 0}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{m_k} = 1$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{-m_k} = 1$.

Or si $\lambda > 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n} = 0$, donc $\{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ est fini. Pour k assez grand, nécessairement $m_k = 0$ i.e. $A_k = I_2$. Il en va de même si $\lambda < 1$. Ainsi H (et donc G) est discret.

Si G est engendré par un élément parabolique T , représenté par $M \in SL(2, \mathbb{R})$, $\langle M \rangle$ est conjugué à $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ pour un certain $\alpha \neq 0$. (Si $\alpha = 0$, G est trivial) Il est clair que ce groupe est discret. (On pourrait refaire exactement le même raisonnement que précédemment).

- (ii) Si G est engendré par un élément elliptique T , représenté par $M \in SL(2, \mathbb{R})$, $\langle M \rangle$ est conjugué à $\left\langle \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \right\rangle$ pour un certain $z \in \mathbb{S}^1$. G est isomorphe comme groupe topologique à $\langle z \rangle$ qui est un sous-groupe de \mathbb{S}^1 . D'après le lemme précédent, $\langle z \rangle$ est discret si et seulement si z est d'ordre fini.

□

3.2 Action proprement discontinue

Définition 3.3. Soit X un espace métrique localement compact. Une famille $(M_i)_{i \in I}$ de parties de X est dite localement finie si pour tout compact K inclus dans X on a $K \cap M_i = \emptyset$ sauf pour un nombre fini de $i \in I$.

Définition 3.4. Soit G un groupe d'isométries de X . On dit que G agit proprement discontinument sur X si pour tout $x \in X$, l'orbite Gx de x est localement finie, autrement dit la famille $\{g(x)\}_{g \in G}$ est localement finie, ou encore pour tout compact K inclus dans X , $g(x)$ n'est dans K que pour un nombre fini de $g \in G$.

Proposition 3.4. *G agit proprement discontinument sur X si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (1) *Chaque orbite sous G est sans point d'accumulation dans X.*
- (2) *L'ordre du stabilisateur de chaque point est fini.*

Remarque 3.1. Remarquons tout d'abord que si $x \in X$, tout point de l'orbite Gx de x est contenu dans Gx avec multiplicité égale à l'ordre du stabilisateur $Stab_G(x)$.

Démonstration. Si il existe $x \in X$ tel que Gx a pour point d'accumulation $g(x)$ pour un certain $g \in G$, soit K un voisinage compact de $g(x)$. Alors K ne vérifie pas la condition demandée. Si il existe $x \in X$ tel que $\text{card}(Stab_G(x)) = +\infty$, soit K un voisinage compact de x . Alors K ne vérifie pas la condition demandée.

Réciproquement, si l'action n'est pas proprement discontinue, il existe $x \in X$ et K compact tel que $g(x)$ appartient à K pour un nombre infini de $g \in G$. On peut construire une suite d'éléments de Gx convergeant vers x . Si (2) est faux, tous les éléments de la suite sont distincts, et il existe un point d'accumulation dans X . \square

Remarque 3.2. La condition (1) est équivalent à ce que chaque orbite soit discrète dans X (i.e. sans point d'accumulation dans elle-même). En effet, si il existe une suite g_1, g_2, \dots d'éléments de G tels que (g_n) converge vers $s \in X$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour n assez grand,

$$d(g_{n+1}^{-1}g_n(x), x) = d(g_n(x), g_{n+1}(x)) \leq d(g_n(x), s) + d(s, g_{n+1}(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Donc la suite $(g_{n+1}^{-1}g_n(x))$ converge vers $x \in Gx$, x est un point d'accumulation.

Exemple 3.1. $(\mathbb{Z}, +)$ agit proprement discontinument sur \mathbb{R} par translation. L'orbite du réel x est $x + \mathbb{Z}$ et est clairement discrète, et le stabilisateur de n'importe quel point est réduite à zéro.

Théorème 3.2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *G agit proprement discontinument sur X.*
- (ii) *Pour tout x dans X, il existe un voisinage V de x tel que $T(v) \cap V = \emptyset$ sauf pour un nombre fini de T dans G.*
- (iii) *Pour tout compact K inclus dans X, le cardinal de $\{T \in G \mid T(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.*

Démonstration.

(i) \Rightarrow (ii) Supposons que G agit proprement discontinument sur X . Soit $x \in X$. Gx est discret donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap Gx = \{x\}$. Soit $T \in G$. Si $T \notin Stab_G(x)$ (i.e. $T(x) \neq x$), alors $T(x) \notin B(x, \varepsilon)$ et donc $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(T(x), \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$.

Ainsi on a $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap T(B(x, \frac{\varepsilon}{2})) = B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(T(x), \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ si et seulement si $T \in Stab_G(x)$ qui est d'ordre fini par hypothèse. $V = B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ convient.

(ii) \Leftarrow (i) Supposons que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage V de x tel que $T(V) \cap V = \emptyset$ sauf pour un nombre fini de $T \in G$. Alors la condition (2) de la proposition est vraie sinon pour tout $T \in Stab_G(x)$ (qui est de cardinal infini), $T(V) \cap V = \{x\} \neq \emptyset$. La condition (1) est vraie également sinon il existe $x \in X$ tel que Gx admet un point d'accumulation s dans X : il existe $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments distincts de G telle que $T_n(x)$ tend vers s donc $T_n(x)$ est dans tout voisinage de s pour n assez grand.

(iii) \Leftarrow (ii) Immédiat.

(i) \Leftarrow (iii) Supposons que G agit proprement discontinument sur X . Soit $K \subset X$ un compact. Si $T \in G$ est tel que $T(K) \cap K \neq \emptyset$, alors il existe $x, y \in K$ tels que $x = T(y)$ i.e. il existe $y \in K$ tel que $T(y) \in K$, ce qui n'arrive que pour un nombre fini de $T \in G$ par définition. \square

3.3 Un critère pour les groupes fuchsiens : agir proprement discontinument

Lemme 3.2. Soient $z_0 \in \mathbb{H}^2$ et $K \in \mathbb{H}^2$ un compact. Alors l'ensemble

$$E = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid T(z_0) \in K\}$$

est compact.

Démonstration. On note $\Pi : SL(2, \mathbb{R}) \mapsto PSL(2, \mathbb{R})$ la surjection qui associe à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la transformation $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$. Π est continue et surjective. $E = \Pi(\Pi^{-1}(E))$ donc il suffit de montrer que $E_1 = \Pi^{-1}(E)$ est compact.

E_1 est fermé : en effet, $E_1 = \beta^{-1}(K)$ où $\beta : M \in SL(2, \mathbb{R}) \mapsto (\Pi(M))(z_0) \in \mathbb{H}^2$. β est continu car continu en les coefficients de M et K est fermé donc E_1 aussi.

E_1 est borné : soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$. On note $z_0 = x_0 + iy_0$. K est borné donc il existe $A_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}| \leq A_1$.

De plus K est compact dans \mathbb{H}^2 donc il existe $A_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A_2 \leq \Im(\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}) = \frac{\Im(z_0)}{(cz_0 + d)^2}$. Donc $|cz_0 + d| \leq \sqrt{\frac{\Im(z_0)}{A_2}}$. En remplaçant dans la première inégalité, on obtient $|az_0 + b| \leq A_1 \sqrt{\frac{\Im(z_0)}{A_2}}$. Ainsi a et b sont bornés et donc c et d aussi, donc E_1 est borné. \square

Lemme 3.3. Soit Γ un sous groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui agit proprement discontinument sur \mathbb{H}^2 , et soit $p \in \mathbb{H}^2$. Alors il existe un voisinage W de p tel que p est le seul point de W fixé par un élément non trivial de Γ .

Démonstration. Si pour tout voisinage V de p il existe $z \in V \setminus \{p\}$ et $S \in \Gamma \setminus \{id\}$ tels que $S(z) = p$, alors il existe une suite $(p_n)_{n \geq 0}$ de points de \mathbb{H}^2 convergeant vers p et une suite $(T_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de Γ telle que $T_n(p_n) = p$ pour tout $n \geq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. La boule hyperbolique fermée $K = \overline{B(p, 3\varepsilon)}$ est compacte. Comme Γ agit proprement discontinument sur \mathbb{H}^2 , l'ensemble $\{T \in \Gamma \mid T(p) \in K\}$ est fini. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, d'une part $T_n(p) \notin K$ (i.e. $\rho(T_n(p), p) > 3\varepsilon$) et d'autre part $\rho(p_n, p) < \varepsilon$. Ainsi

$$3\varepsilon < \rho(T_n(p), p) \leq \rho(T_n(p), T_n(p_n)) + \rho(T_n(p_n), p) = \rho(p, p_n) + \rho(p_n, p) < 2\varepsilon$$

Contradiction, c'est donc qu'un voisinage tel que décrit dans l'énoncé existe bien. \square

Théorème 3.3. Soit Γ un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$. Alors Γ est discret si et seulement si Γ agit proprement discontinument sur \mathbb{H}^2 .

Démonstration. Supposons que Γ est fuchsien. Soit $z_0 \in \mathbb{H}^2$, soit $K \subset \mathbb{H}^2$ un compact. On pose $E = \{T \in \Gamma \mid T(z_0) \in K\} = \{T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid T(z_0) \in K\} \cap \Gamma$. E est l'intersection d'un compact et d'un ensemble discret, donc E est fini. Donc Γz_0 est localement fini et Γ agit proprement discontinument sur \mathbb{H}^2 .

Réciproquement, supposons que Γ n'est pas fuchsien et agit proprement discontinument sur \mathbb{H}^2 . Alors il existe une suite $(T_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de Γ distincts deux à deux qui converge vers id (Γ n'est pas discret). D'après le lemme 3.3, il existe $s \in \mathbb{H}^2$ fixé seulement par id . Ainsi $(T_n(s))_{n \geq 0}$ converge vers s et $T_n(s) \neq s$ pour tout $n \geq 0$. L'orbite Γs n'est donc pas discrète et (critère (1) de la proposition 3.4) Γ n'agit pas proprement discontinument sur \mathbb{H}^2 . \square

Corollaire 3.1. *Si Γ est fuchsien, alors l'ensemble des points fixes des éléments elliptiques de Γ n'ont pas de point d'accumulation dans \mathbb{H}^2 .*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{H}^2$, soit $K \subset \mathbb{H}^2$ un compact tel que $z \in K$. Si $T \in \Gamma$ avec $T(z) = z$, alors $T(K) \cap K \neq \emptyset$. Ceci n'est possible que pour un nombre fini de T dans Γ . Donc il y a un nombre fini d'éléments elliptiques de Γ qui ont un point fixe dans K . \square

3.4 Domaine fondamental, domaine de Dirichlet

Soit X un espace métrique localement compact et soit G un groupe d'isométries de X .

Définition 3.5. Une partie fermée $F \subset X$ d'intérieur non vide est appelée domaine fondamental pour G si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\bigcup_{T \in G} T(F) = X$
- (ii) $\mathring{F} \cap T(\mathring{F}) = \emptyset \forall T \in G \setminus \{id\}$

La famille $(T(F))_{T \in G}$ est appelée pavage de X .

Exemple 3.2. \mathbb{Z}^2 agit par translations sur \mathbb{R}^2 . Un domaine fondamental est le carré ayant pour sommets $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$. Toute translation de ce carré est aussi un domaine fondamental.

Remarque 3.3.

- (i) $\Leftrightarrow F$ contient au moins un point de chaque Γ -orbite.
- (ii) $\Leftrightarrow \mathring{F}$ contient au plus un point de chaque Γ -orbite.

Théorème 3.4. *Soit Γ un groupe fuchsien, et soient F_1 et F_2 deux domaines fondamentaux pour Γ tels que $\mu(F_1) < +\infty$. Alors $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.*

Démonstration. $F_1 \supset F_1 \cap (\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathring{F}_2)) = F_1 \cap T(\mathring{F}_2)$ et cette dernière union est disjointe car F_2 est un domaine fondamental.

$$\text{Donc } \mu(F_1) \geq \sum_{T \in \Gamma} \mu(T^{-1}(F_1) \cap \mathring{F}_2) = \sum_{T \in \Gamma} \mu(F_1 \cap T(\mathring{F}_2)) = \sum_{S \in \Gamma} \mu(S(F_1) \cap \mathring{F}_2)$$

$$\text{Or } \bigcup_{S \in \Gamma} S(F_1) = \mathbb{H}^2 \text{ donc } \bigcup_{S \in \Gamma} (S(F_1) \cap \mathring{F}_2) = \mathring{F}_2.$$

Ainsi $\mu(F_1) \geq \sum_{S \in \Gamma} \mu(S(F_1) \cap \mathring{F}_2) \geq \mu(\bigcup_{S \in \Gamma} (S(F_1) \cap \mathring{F}_2)) = \mu(\mathring{F}_2) = \mu(F_2)$. En intervertissant le rôle de F_1 et F_2 on montre que $\mu(F_2) \geq \mu(F_1)$ et on a l'égalité. \square

Théorème 3.5. Soit G un sous groupe discret de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$, F un domaine fondamental pour G et K un sous-groupe de G d'indice n . On suppose qu'on ait la décomposition de G en classes modulo K suivante : $G = \bigcup_{1 \leq i \leq n} KT_i$.

Alors $F_1 = \bigcup_{1 \leq i \leq n} T_i(F)$ est un domaine fondamental pour K . De plus si $\mu(F) < +\infty$, alors $\mu(F_1) = n\mu(F)$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{H}^2$. Puisque F est un domaine fondamental de G , il existe $w \in F$ et $T \in G$ tels que $z = T(w)$. $T \in KT_i$ pour un certain $1 \leq i \leq n$, i.e. il existe $S \in K$ tel que $T = ST_i$. $z = S(T_i(w)) \in S(F_1) \subset \bigcup_{M \in K} M(F_1)$.

Si $x \in \mathring{F}_1 \cap S(\mathring{F}_1)$ pour un certain $S \in K$, montrons que $S = id$. Il existe $z \in \mathring{F}_1$ tel que $x = S(z) \in \mathring{F}_1$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B_h(z, \varepsilon) \subset \mathring{F}_1 = \bigcup_{1 \leq i \leq n} T_i(F)$. ($B_h(z, \varepsilon)$ est la boule ouverte centrée en z de rayon

hyperbolique ε .) Il existe $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ tels que $B_h(z, \varepsilon) \cap T_{i_l}(\mathring{F}) \neq \emptyset$ pour tout $1 \leq l \leq k$. De même $S(z) \in \mathring{F}_1$ donc $B_h(S(z), \varepsilon) \cap T_j(\mathring{F}) \neq \emptyset$ pour un certain $1 \leq j \leq n$.

Or $B_h(S(z), \varepsilon) = S(B_h(z, \varepsilon))$ (S est une isométrie) donc $B_h(z, \varepsilon) \cap S^{-1}T_j(\mathring{F}) \neq \emptyset$ et $S^{-1}T_j = T_{i_l}$ pour tout $1 \leq l \leq k$.

Ainsi $KT_j = KT_{i_l}$ donc $T_j = T_{i_l}$ et alors $S = id$. La dernière égalité est immédiate. \square

Définition 3.6. Soit Γ un groupe fuchsien et soit $p \in \mathbb{H}^2$ fixé par aucun élément de $\Gamma \setminus \{id\}$. (Un tel p existe d'après le lemme 3.3.) On appelle domaine de Dirichlet pour Γ basé en p l'ensemble :

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p)) \forall T \in \Gamma\} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, p) \leq \rho(T(z), p) \forall T \in \Gamma\}$$

Remarque 3.4.

- $p \in D_p(\Gamma)$.
- L'orbite Γp est discrète car Γ est fuchsien donc Γp n'a pas de point d'accumulation et $D_p(\Gamma)$ contient un voisinage de p .

Définition 3.7. Pour $T_1 \in \Gamma$, on pose $H_p(T_1) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T_1(p))\}$.

La médiatrice du segment géodésique $[z_1, z_2]$ est l'unique géodésique complète passant par w le milieu de $[z_1, z_2]$, orthogonale à $[z_1, z_2]$.

Lemme 3.4. La médiatrice du segment $[z_1, z_2]$ est l'ensemble $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z)\}$

Démonstration. Supposons (quitte à composer par une isométrie comme déjà vu plusieurs fois) que $z_1 = i$, $z_2 = ir^2$ avec $r > 0$. Alors le milieu de $[z_1, z_2]$ est $w = ir$. La médiatrice a pour équation $|z| = r$ ($z = x + iy$). D'après le théorème 2.3, $\rho(z_1, z) = \rho(z_2, z)$ équivaut à $\frac{|z - z_1|^2}{2y} = \frac{|z - z_2|^2}{2r^2y}$ ou encore $|z| = r$. \square

Dans la suite, on note $L_p(T_1)$ la médiatrice de $[p, T_1(p)]$ et $H_p(T_1)$ le demi-plan hyperbolique fermé qui contient p , de frontière $L_p(T_1)$.

Avec ces notations, il apparaît que $D_p(\Gamma) = \bigcap_{T \in \Gamma \setminus \{id\}} H_p(T)$. $D_p(\Gamma)$ est donc hyperboliquement convexe, fermé et d'intérieur non vide.

Théorème 3.6. *Si p n'est fixé par aucun élément non trivial de Γ , alors $D_p(\Gamma)$ est un domaine fondamental pour Γ .*

Démonstration. Montrons que $D_p(\Gamma)$ contient au moins un point de chaque Γ -orbite. Soit $z \in \mathbb{H}^2$. Γz est discrète donc il existe $w_0 \in \Gamma z$ avec $\rho(w_0, p)$ minimal dans Γz . Autrement dit, pour tout $T \in \Gamma$, $\rho(w_0, p) \leq \rho(T(z), p)$. Donc $w_0 \in D_p(\Gamma)$.

Montrons maintenant que si $z_1 \neq z_2$ sont dans l'intérieur de $D_p(\Gamma)$, alors leurs orbites sont disjointes. Soit $z \in \mathbb{H}^2$. Si il existe $T \in \Gamma \setminus \{id\}$ tel que $\rho(z, p) = \rho(T(z), p)$, alors $\rho(z, p) = \rho(z, T^{-1}(p))$ i.e. $z \in L_p(T^{-1})$ donc soit $z \notin D_p(\Gamma)$, soit $z \in \partial D_p(\Gamma)$. On en conclut que si z est dans l'intérieur de $D_p(\Gamma)$, alors pour tout $T \in \Gamma \setminus \{id\}$ on a $\rho(z, p) < \rho(z, T^{-1}(p)) = \rho(T(z), p)$.

Supposons que $\Gamma z_1 = \Gamma z_2$ avec $z_1 \neq z_2$. Il existe donc $T \in \Gamma \setminus \{id\}$ tel que $T(z_2) = z_1$. Alors

$$\rho(z_2, p) \leq \rho(T(z_2), p) = \rho(z_1, p) < \rho(T(z_2), p) = \rho(z_2, p)$$

La première inégalité vient du fait que $z_2 \in D_p(\Gamma)$, la seconde vient de ce qui précède. On obtient une contradiction, c'est donc que les orbites sont disjointes.

Enfin, $D_p(\Gamma)$ est connexe car connexe par arcs car convexe. □

Théorème 3.7. *Soit Γ un groupe fuchsien et F un domaine de Dirichlet pour Γ . Alors F est localement fini, c'est à dire que la famille $\{T(F)\}_{T \in \Gamma}$ est localement finie.*

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{H}^2$ qui ne soit fixé par aucun élément différent de l'identité et soit $F = D_p(\Gamma)$. On note $\sigma = \sup_{z \in K} (\rho(p, z))$.

σ est fini : si $a \in K$ et si $R > 0$ est tel tel que K soit inclus dans la boule hyperbolique de centre a et de rayon R , alors pour tout $z \in K$ on a $\rho(p, z) \leq \rho(p, a) + \rho(a, z) \leq \rho(p, a) + R < +\infty$.

Si F n'était pas localement fini, il existerait T_1, T_2, \dots suite d'éléments distincts de Γ telle que $T_j(F) \cap K \neq \emptyset$ pour tout $j \geq 1$, i.e. il existerait z_1, z_2, \dots suite d'éléments de F telle que $T_j(z_j) \in K$ pour tout $j \geq 1$. On aurait alors pour tout $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} \rho(T_j(p), p) &\leq \rho(T_j(p), T_j(z_j)) + \rho(T_j(z_j), p) \\ &\leq \rho(p, z_j) + \rho(T_j(z_j), p) \quad (T_j \text{ est une isométrie}) \\ &\leq \rho(p, T_j(z_j)) + \rho(T_j(z_j), p) \quad (z_j \in F = D_p(\Gamma)) \\ &\leq 2\sigma \quad (T_j(z_j) \in K) \end{aligned}$$

Ainsi, la suite de points distincts $T_1(p), T_2(p), \dots$ serait incluse dans la boule hyperbolique fermée de centre p et de rayon 2σ , ce qui est exclus puisque Γ agit proprement discontinument sur \mathbb{H}^2 . □

4 Étude des groupes PSL(2, ℤ) et Γ(2)

Ici on étudie PSL(2, ℤ) et Γ(2) avec les outils développés auparavant.

Définition 4.1. $PSL(2, \mathbb{Z}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4, ad - bc = 1\} \simeq SL(2, \mathbb{Z})/\{I_2\}$ est appelé le groupe modulaire. C'est un groupe fuchsien. (Il est clair que $SL(2, \mathbb{Z})$ est discret donc il s'ensuit que PSL(2, ℤ) est discret également.) Dans la suite on notera ce groupe Γ .

Théorème 4.1. *L'ensemble $F = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ est le domaine de Dirichlet de Γ basé en $2i$.*

Démonstration. Il convient tout d'abord de vérifier que $2i$ n'est fixé par aucun élément de Γ . Supposons que $T : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ soit dans $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et fixe $2i$. Puisque $T(2i) = 2i$, on en déduit $2a = d$ et $b = -4c$. T étant elliptique, sa trace vaut 0 ou 1, ce qui n'est possible que si $a = d = 0$. Enfin, $ad - bc = 1$ implique $4c^2 = 1$, ce qui est exclu car $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

On note dans la suite $T : z \mapsto z + 1$ et $S : z \mapsto -\frac{1}{z}$. Ce sont deux éléments de Γ . T est parabolique et fixe l'infini, S est elliptique et fixe i .

La médiatrice hyperbolique du segment reliant $2i$ et son image $2i + 1$ par T est la droite verticale d'équation $x = 1/2$ (voir Figure 4), et $H_{2i}(T) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Re(z) \leq 1/2\}$. De la même manière, $H_{2i}(T^{-1}) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Re(z) \geq -1/2\}$

La médiatrice hyperbolique du segment reliant $2i$ et son image $i/2$ par S est le demi-cercle centré en zéro et de rayon 1 (voir Figure 5), et $H_{2i}(S) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| \geq 1\}$.

Ainsi, $D_{2i}(\Gamma) \subset F = H_{2i}(S) \cap H_{2i}(T^{-1}) \cap H_{2i}(T)$.

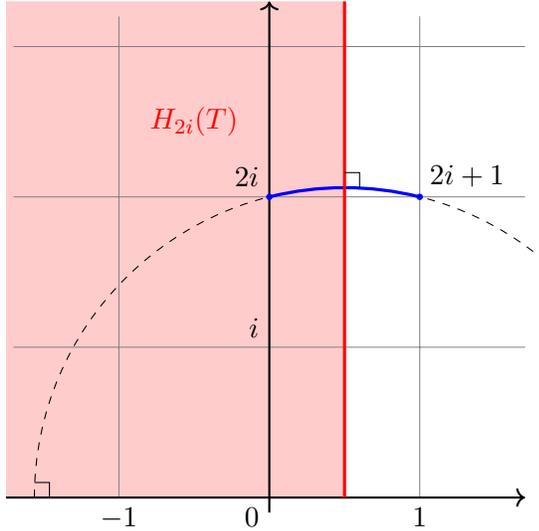


FIGURE 4 – $H_{2i}(T)$

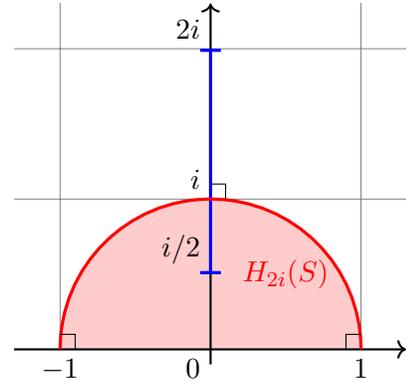


FIGURE 5 – $H_{2i}(S)$

Il s'agit ensuite de montrer l'inclusion réciproque. Procédons par l'absurde et supposons $D_{2i}(\Gamma) \neq F$. En particulier, F n'est pas un domaine fondamental pour Γ , donc F contient en son intérieur deux points ayant la même orbite sous Γ (la première inclusion implique que F contient au moins un point de chaque Γ -orbite). Autrement dit, il existe $x \in \mathring{F}$ et $h \in \Gamma \setminus \{id\}$ tels que $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathring{F}$.

$$\begin{aligned} |cx+d|^2 &= c^2 x \bar{x} + d^2 + 2cd \Re(x) \\ &> c^2 + d^2 - cd \\ &> c^2 + d^2 - |cd| \\ &> (c-d)^2 + |cd| > 0 \end{aligned}$$

La dernière égalité est stricte car l'égalité n'a lieu que si $c = d = 0$, ce qui est exclu puisque $ad - bc = 1$. c et d étant entiers, on a $|cx + d|^2 \geq 1$. Si on avait égalité, alors cx serait sur le cercle de centre $-d$ et de rayon 1. Si $|c| \geq 2$, c'est impossible car alors $\Im(cx) > 2$. Si $|c| = 1$, c'est aussi impossible puisque $x \in \overset{\circ}{F}$ qui est d'intersection vide avec le cercle ci-dessus. Enfin si $c = 0$, nécessairement $d = \pm 1$, mais alors $ad - bc = 1$ entraîne $a = d$, et h est une translation de b . Donc $h = id$ (sinon h ne peut envoyer x dans l'intérieur de F), ce qui est exclu.

Finalement, $|cx + d|^2 > 1$, et $\Im(h(x)) = \frac{\Im(x)}{|cx + d|^2} < \Im(x)$

En refaisant le même raisonnement mais en remplaçant x par $h(x)$ et h par h^{-1} , on obtient $\Im(x) = \frac{\Im(h(x))}{|cx + d|^2} < \Im(h(x))$, contradiction. C'est donc que $D_{2i}(\Gamma) = F$

□

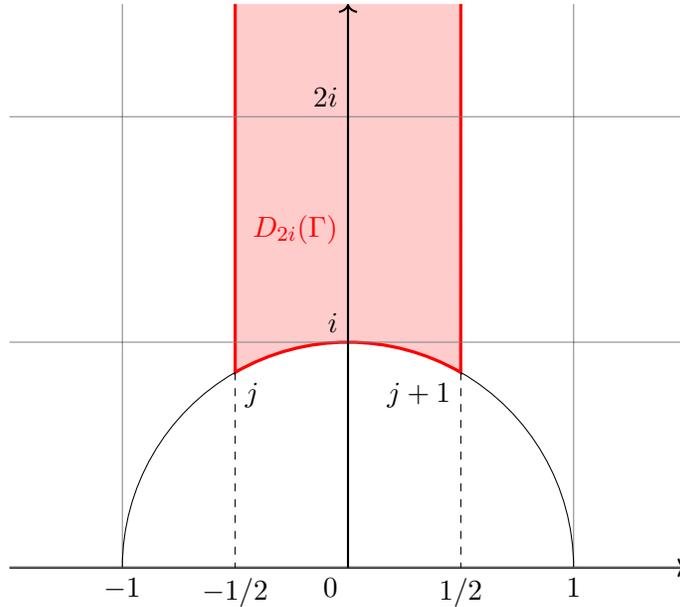


FIGURE 6 – Le domaine de Dirichlet de Γ basé en $2i$

Théorème 4.2. $PSL(2, \mathbb{Z})$ est engendré par les transformations $S : z \mapsto -\frac{1}{z}$ et $T : z \mapsto z + 1$.

Lemme 4.1. Soit $\Lambda = \langle T, S \rangle$ et soit $g \in \Gamma$ tel qu'il existe $h \in \Lambda$ pour lequel $g(F) \cap h(F) \neq \emptyset$. Alors $g \in \Lambda$.

Démonstration. On remarque tout d'abord que l'intersection ci-dessus est soit réduite à un point, soit égale à un côté de $g(F)$ (on suppose $h \neq g$).

Dans le second cas, $h^{-1}g(F)$ et F sont adjacents (i.e. ont un côté en commun) donc $h^{-1}g = S$ ou T , et $g \in \Lambda$.

Dans le cas où $g(F) \cap h(F) = \{x\}$ pour un certain $x \in \mathbb{H}^2$, x possède un voisinage compact K , qui n'intersecte qu'un nombre fini d'images de F par des éléments de Γ (F est localement fini d'après le théorème 3.7). Il existe donc f_1, f_2, \dots, f_n des éléments de Γ tels que $h(F)$ et $f_1(F)$ sont adjacents,

$f_n(F)$ et $g(F)$ sont adjacents et pour $1 \leq i \leq n-1$, $f_i(F)$ et $f_{i+1}(F)$ sont adjacents. Une récurrence facile sur n montre, en appliquant le premier cas à chaque étape, que $g \in \Lambda$. \square

On propose deux preuves du théorème 4.2, chacune utilisant le lemme 4.1.

Preuve 1 du Théorème 4.2. On pose $X = \bigcup_{g \in \Lambda} g(F)$ et $Y = \bigcup_{g \in \Gamma \setminus \Lambda} g(F)$. $X \neq \emptyset$ et X, Y sont disjoints d'après le lemme 4.1. X et Y sont de plus fermés : on va montrer que si $A \subset \Gamma$ alors $Z = \bigcup_{g \in A} g(F)$ est fermé. Si $(z_n)_{n \geq 0}$ est une suite de points de Z convergeant vers $z \in \mathbb{H}^2$, et si K est un voisinage compact de z , pour n assez grand la suite est incluse dans K , qui n'intersecte qu'un nombre fini d'images de F par des éléments de Γ . Ainsi la suite est incluse dans $g_1(F) \cup g_2(F) \cup \dots \cup g_r(F)$ avec $g_i \in A$ pour $1 \leq i \leq r$ ($r \geq 1$). Cette dernière réunion étant fermée, z est contenu dedans, donc contenu dans Z .

Finalement, la connexité de \mathbb{H}^2 implique $X = \mathbb{H}^2$ et $Y = \emptyset$, donc $\Lambda = \Gamma$. \square

Preuve 2 du Théorème 4.2.

- Version rapide : Soit $g \in \Gamma \setminus \{id\}$. Le segment hyperbolique $[2i, g(2i)]$ est compact donc n'intersecte qu'un nombre fini d'images de F par des éléments de Γ (théorème 3.7). Il existe donc une suite h_1, h_2, \dots, h_r d'éléments de Γ tels que $h_1(F) \cap F \neq \emptyset$, $h_r(F) \cap g(F) \neq \emptyset$ et pour $1 \leq i \leq r-1$, $h_i(F) \cap h_{i+1}(F) \neq \emptyset$. Une récurrence facile à l'aide du lemme 4.1 sur r montre que $g \in \Lambda$.
- Version détaillée : Pour $g \in \Gamma$ et $z \in \mathring{F}$, on note $B_{g,z} = \{T \in \Gamma \mid T(\mathring{F}) \cap [2i, g(z)] \neq \emptyset\}$ qui est fini d'après le théorème 3.7. On montre par récurrence sur $n \geq 2$ que pour tous $h \in \Gamma$, $z \in \mathring{F}$, si $card(B_{h,z}) = n$ alors $h \in \Lambda$:
Si $n = 2$, nécessairement $B_{h,z} = \{h, id\}$ donc $h(F) \cap F \neq \emptyset$ et $h \in \Lambda$ (lemme 4.1). Si la propriété est vraie au rang $n-1$, soient $g \in \Gamma$, $z \in \mathring{F}$, $h \in B_{g,z}$ tel que $h(F) \cap g(F) \neq \emptyset$ et $z' \in \mathring{F}$ avec $h(z') \in [2i, g(z)]$. $[2i, h(z')] \subset [2i, g(z)]$ et $[2i, h(z')] \cap g(F) = \emptyset$ donc $card(B_{h,z'}) < card(B_{g,z})$. Par hypothèse de récurrence, $h \in \Lambda$ et donc $g \in \Lambda$ par le lemme 4.1.

\square

Remarque 4.1. La démarche effectuée avec PSL(2, ℤ) se généralise à n'importe quel groupe pour lequel on a identifié les transformations qui appairent les côtés du domaine de Dirichlet (si elles existent).

Théorème 4.3. $\langle S, T \mid S^2 = 1, (ST)^3 = 1 \rangle$ est une présentation du groupe Γ

Démonstration. On vient de voir que S et T engendrent Γ , il est facile de vérifier que les relations données sont vraies, il reste donc seulement à montrer que ce sont les seules relations. Autrement dit, si on pose $X = ST$, il s'agit de montrer que tout mot réduit en S et X qui est égal à l'identité est le mot trivial. (Voir la figure 7).

Soit $g = X^{k_1} S X^{k_2} S \dots X^{k_n} S X^{k_{n+1}}$ avec $1 \leq k_i \leq 2$ si $i \leq n$ et $0 \leq k_{n+1} \leq 2$ (Si le mot commence par S on peut se ramener au mot ci-dessus en conjuguant par S). (Par convention on dit que si $n = 0$ alors $g = X^{k_1}$). Montrons que si $n \geq 1$, g ne peut pas être l'identité.

Posons $A = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Re(z) > 0\}$, $B = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z+1| < 1\}$, $C = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Re(z) < \frac{1}{2}\}$. On remarque que $S(\mathbb{H}^2 \setminus A) \subset A$ donc $S(B), S(C) \subset A$ et que $X^2(A), X(A) \subset B \cup C$.

On pose de plus $V = \mathbb{H}^2 \setminus A \cup B \cup C$ et $U = \mathring{V}$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que pour tout $x \in U$, $g(x) \in B \cup C$.

Si $n = 1$: soit $k_{n+1} = 0$ et alors comme $x \in A$, $S(x) \in A$ et $X^{k_1}S(x) \in B \cup C$. Soit $k_{n+1} \neq 0$, et alors $X^{k_{n+1}}(x) \in B$, $SX^{k_{n+1}}(x) \in A$ et $g(x) \in B \cup C$.

Si la propriété est vraie pour un certain $n \geq 1$, soit $g' = X^{k_1}SX^{k_2}S \dots X^{k_n}SX^{k_{n+1}}SX^{k_{n+2}}$ et $g = X^{k_2}S \dots X^{k_n}SX^{k_{n+1}}SX^{k_{n+2}}$. Par hypothèse de récurrence, $g(x) \in B \cup C$ et par le cas $n = 1$, $g'(x) \in B \cup C$. \square

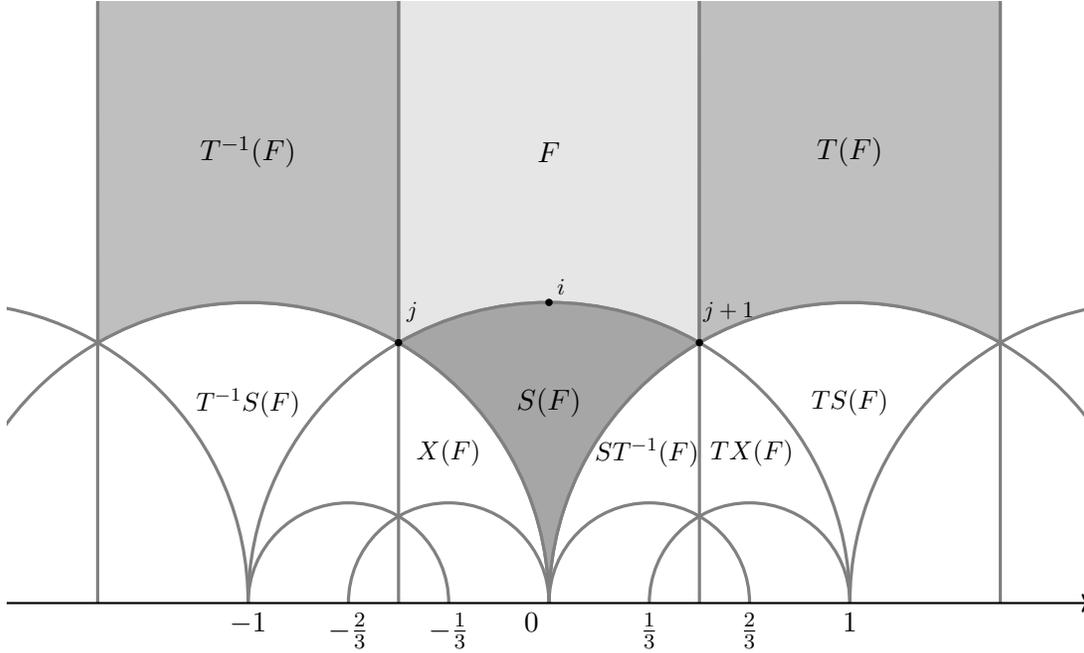


FIGURE 7 – Les actions de $S : z \mapsto -\frac{1}{z}$, $T : z \mapsto z + 1$ et de $X = ST$ sur $F = D_{2i}(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))$

Définition 4.2. $\Gamma(2) = \text{Ker}(\phi_2)$ où $\phi_2 : \text{SL}(2, \mathbb{Z})/\{\pm I_2\} \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/\{\pm I_2\} \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

On peut montrer que ϕ_2 est surjective donc $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{Z})/\Gamma(2)$.

Or $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi $\Gamma(2)$ est d'indice

6 dans $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Pour construire un domaine fondamental pour $\Gamma(2)$ on cherche un représentant de chaque classe modulo $\Gamma(2)$ dans Γ .

On pose donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Le théorème 3.5 nous permet de construire un domaine fondamental pour $\Gamma(2)$. (Voir figure 8.)

Nous allons maintenant directement construire le domaine de Dirichlet de $\Gamma(2)$ basé en i . On pose $A : z \mapsto z + 2$ et $B : z \mapsto \frac{z}{2z + 1}$. Ce sont tous les deux des éléments de $\Gamma(2)$. A est parabolique et fixe l'infini, B est parabolique et fixe zéro.

$A(i) = i + 2$ et $A^{-1}(i) = i - 2$ donc $H_i(A) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Re(z) \leq 1\}$ et $H_i(A^{-1}) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Re(z) \geq -1\}$.

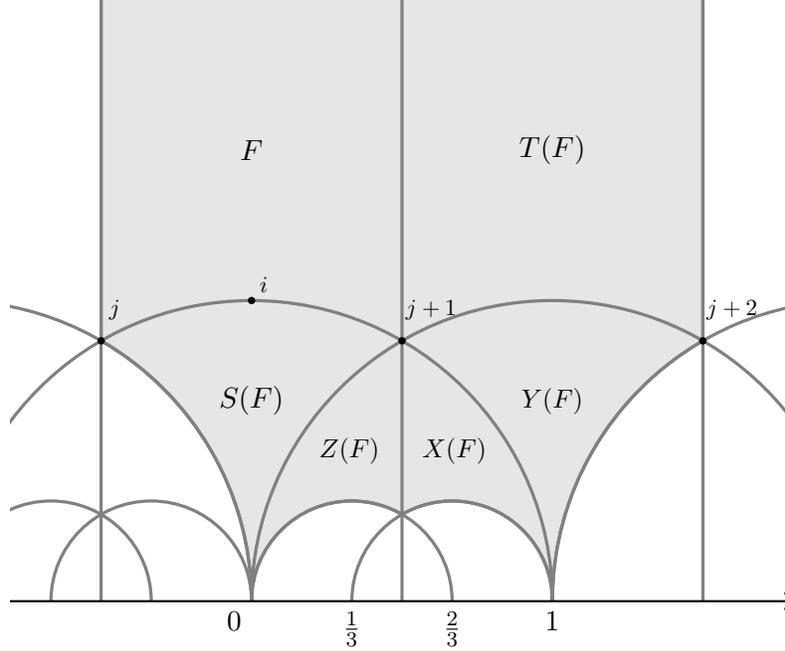


FIGURE 8 – Un domaine fondamental pour $\Gamma(2)$

$B^{-1}(i) = -\frac{2}{5} + \frac{i}{5}$. Des calculs simples de géométrie euclidienne permettent dans un premier temps de déterminer la médiatrice euclidienne du segment (euclidien) $[i, B^{-1}(i)]$, puis montrent que l'unique géodésique passant par i et $B^{-1}(i)$ est le demi-cercle orthogonal à l'axe des abscisses de centre 1 et de rayon $\sqrt{2}$. On sait qu'il existe $h \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ qui envoie i et $B^{-1}(i)$ sur la même demi-droite verticale. Pour trouver la médiatrice hyperbolique de $[i, B^{-1}(i)]$, il suffit de prendre la pré-image par h de la médiatrice de $[h(i), h(B^{-1}(i))]$ qui elle est facile à trouver. On trouve finalement que $L_i(B^{-1})$ est le demi-cercle de centre $\frac{1}{2}$ de rayon $\frac{1}{2}$. Ainsi $H_i(B^{-1}) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}\}$. Un calcul similaire donne $H_i(B) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}\}$.

Nous avons donc $D_i(\Gamma(2)) \subset F = H_i(B) \cap H_i(B^{-1}) \cap H_i(A^{-1}) \cap H_i(A)$; L'inclusion réciproque est vraie car F est un domaine fondamental. En effet il s'obtient à partir du domaine précédent (voir figure 8 et figure 9) de la façon suivante : B^{-1} envoie le triangle hyperbolique de sommets $0, 1$ et $\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$ sur le triangle de sommets $0, -1, j$, et A^{-1} envoie le triangle de sommets $1, j+2, \infty$ sur le triangle de sommets $-1, j, \infty$.

Puisque A et B appaireillent les côtés de $D_i(\Gamma(2))$, $\Gamma(2)$ est engendré par A et B d'après la remarque 4.1.

Nous allons avoir besoin d'un lemme qui généralise la démarche que nous avons effectuée au théorème 4.3. La preuve est essentiellement identique.

Lemme 4.2. *Lemme du ping-pong* Soit G un groupe, et soient H et K deux sous-groupes non triviaux de G , tels que H ou K ait au moins 3 éléments. On suppose que G agit sur un ensemble E ayant deux parties non vides X et Y telles que :

- X et Y sont d'intersection vide.

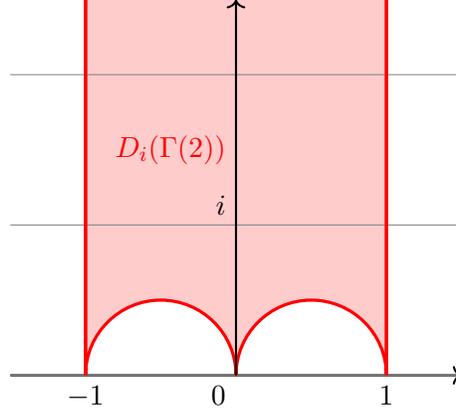


FIGURE 9 – Le domaine de Dirichlet de $\Gamma(2)$ basé en i

- Pour tout h dans $H \setminus \{e\}$, pour tout y dans Y , $h.y \in X$.
- Pour tout k dans $K \setminus \{e\}$, pour tout x dans X , $k.x \in Y$. Alors H et K sont en somme libre : en particulier, si H et K sont isomorphes à \mathbb{Z} , alors le sous-groupe qu'ils engendrent est un groupe libre à deux générateurs.

Théorème 4.4. $\Gamma(2)$ est libre.

Démonstration. On pose $U = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$, $V = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$, $X = U \cup V$ et $Y = X^c$. Soit $n \neq 0$. Il est clair que $A^n(X) \subset Y$ puisque X est contenu dans une bande de largeur 2. Montrons que $B^n(Y) \subset X$. On traite le cas où $n > 0$ (l'autre cas est analogue). On note d'abord que $B(0) = 0$, $B(1) = \frac{1}{3}$, $B(-1) = 1$, $B(-2) = \frac{2}{3}$, $B(\infty) = \frac{1}{2}$. Ainsi, B envoie l'ensemble délimité par les géodésiques $\{\Re(z) = -1\}$, $[-1, 0]$ et par la demi-droite \mathbb{R}_+ sur l'ensemble délimité par les géodésiques $[\frac{1}{2}, 1]$, $[0, 1]$, et le segment euclidien $[0, \frac{1}{2}]$, qui est inclus dans U donc dans X . (Voir figure 10.) Les puissances supérieures de B fixent 0 et envoient les réels entre 0 et 1 sur des réels positifs strictement inférieurs, donc l'ensemble de départ est encore envoyé dans X . De la même manière, l'ensemble $\{\Re(z) < -1\}$ est envoyé dans l'ensemble délimité par $[\frac{1}{2}, 1]$ et le segment euclidien $[\frac{1}{2}, 1]$. Puisque $A^n(X) \subset Y$ et $B^n(Y) \subset X$ pour tout $n \neq 0$ (et $X \cap Y = \emptyset$), le groupe $\Gamma(2)$ engendré par A et B est libre d'après le lemme du ping-pong. \square

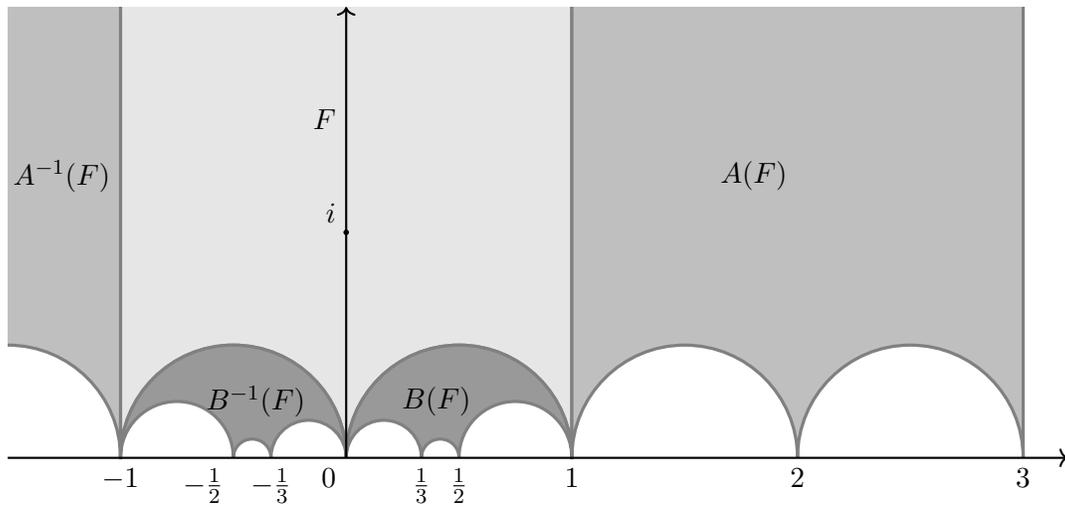


FIGURE 10 – Les actions de A et de B sur $F = D_i(\Gamma(2))$