

TER

La loi du demi-cercle

GUERITEAU Léa

19 mai 2017

Table des matières

Introduction	2
1 Résultats préliminaires	6
1.1 Chemins et nombres de Catalan	6
1.2 Arbres et chemins	10
1.3 Moments de la loi du demi-cercle	13
1.4 Condition suffisante de convergence presque sûre	16
2 Théorème de Wigner	19
2.1 Enoncé	19
2.2 Simulation XCAS	20
3 Preuve du théorème de Wigner	24
3.1 Convergence presque sûre des moments de L_n	24
3.1.1 Convergence de l'espérance	25
3.1.2 Majoration de la variance	31
3.2 Convergence faible de L_n	37
Conclusion	41
Annexe	42
Références	45

Introduction

Dans plusieurs branches des mathématiques, de la physique ou de l'informatique, il se peut que l'on soit amené à étudier plusieurs variables aléatoires simultanément. On peut, par exemple, considérer des vecteurs de variables aléatoires et ainsi penser à l'étude des vecteurs gaussiens en processus stochastiques.

En physique, travailler sur le spectre d'atomes lourds, revient à étudier un ensemble fini de valeurs propres de **matrices aléatoires** :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

où M_{11}, \dots, M_{nn} sont n^2 variables aléatoires.

Le but de ce TER est de donner une démonstration du théorème de Wigner, qui donne une description de la distribution asymptotique, c'est-à-dire lorsque $n \rightarrow +\infty$, des valeurs propres de matrices aléatoires spécifiques.

Le contexte dans lequel nous nous plaçons est le suivant :

On considère une famille de variables aléatoires réelles indépendantes

$(X_{i,j})_{1 \leq i \leq j < +\infty}$, d'espérance nulle et de variance 1. On pose par la suite

$(X_{j,i}) := (X_{i,j})$, pour $i < j$. Dans le cas de notre étude, nous supposons que

les variables aléatoires $(X_{i,j})$, avec $i < j$, sont identiquement distribuées, et

que les variables aléatoires $(X_{i,i})$ sont également identiquement distribuées, éventuellement selon une autre loi.

On remplit donc ainsi la matrice aléatoire A_n :

$$A_n = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \dots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & \dots & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelé **matrice de Wigner réelle**.

Cette matrice est symétrique réelle, d'après le théorème spectral elle est donc diagonalisable et on va noter λ_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ses n valeurs propres réelles. Par convention,

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Comme nous nous intéressons au comportement de ses valeurs propres lorsque n tend vers $+\infty$, nous allons tout d'abord déterminer la normalisation appropriée pour obtenir une limite intéressante. Pour cela :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 &= \text{Tr}\left(\frac{1}{n} A_n^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A_n^2)_{ii} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{i,j} X_{j,i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 \text{ par symétrie} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{(i,j)} X_{i,j}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} X_{ij}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i,i}^2 \end{aligned}$$

Or, d'après la loi forte des grands nombres, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i,i}^2 \xrightarrow{p.s.} E(X_{i,i}^2) \text{ et } \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} X_{i,j}^2 \xrightarrow{p.s.} E(X_{i,j}^2)$$

De plus,

comme $\mathbb{E}(X_{i,j}) = 0 = \mathbb{E}(X_{i,i})$, on a $\mathbb{E}(X_{i,j}^2) = \text{Var}(X_{i,j}) = 1 = \mathbb{E}(X_{i,i}^2)$.

Donc d'après la loi forte des grands nombres, on a que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ est d'ordre $O(n)$. En refaisant le même calcul avec $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}}\right)^2$, on obtient que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}}\right)^2$ est d'ordre $O(1)$. On va donc renormaliser les valeurs propres par $\frac{1}{\sqrt{n}}$, pour obtenir une limite significative.

On définit ensuite L_n la mesure de probabilité sur \mathbb{R} attribuant une masse $\frac{1}{n}$ à chaque valeur propre de $\frac{1}{\sqrt{n}}A_n$,

$$L_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i/\sqrt{n}}$$

où δ_x représente la mesure de Dirac avec masse en $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire : $\forall A$ borélien,

$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_{x \in A} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On appelle L_n la **mesure spectrale empirique** associée à la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}A_n$, on remarquera que L_n est une mesure de comptage aléatoire et que :

$$\int f(x) L_n(dx) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}}\right).$$

Dans ce dossier, nous nous intéressons à la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$: le théorème de Wigner garantit, qu'après renormalisation, la **loi du demi-cercle** apparaît comme distribution limite des valeurs propres des matrices de Wigner, quand la taille des matrices tend vers l'infini.

Pour cela, nous exposerons tout d'abord quelques résultats préliminaires

qui nous seront utiles pour la démonstration du théorème : nous allons introduire la notion d'arbres, de chemins et leurs liens avec les nombres de Catalan, calculer les moments de la loi du demi-cercle, et finalement donner une condition suffisante de convergence presque sûre. Nous énoncerons ensuite le théorème de Wigner, et enfin, nous en ferons la preuve en plusieurs étapes.

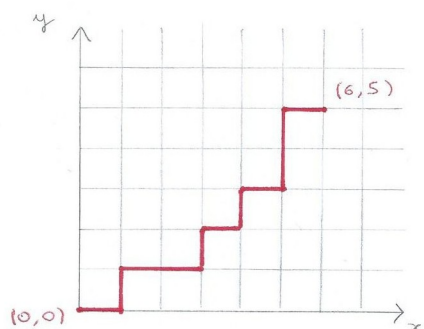
Chapitre 1

Résultats préliminaires

1.1 Chemins et nombres de Catalan

On considère $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et le réseau passant par les points de coordonnées entières. On imagine une personne se déplaçant sur ce réseau seulement dans les directions Nord ou Est, c'est-à-dire que si la personne est au point de coordonnées (x, y) , elle va soit en $(x + 1, y)$ soit en $(x, y + 1)$.

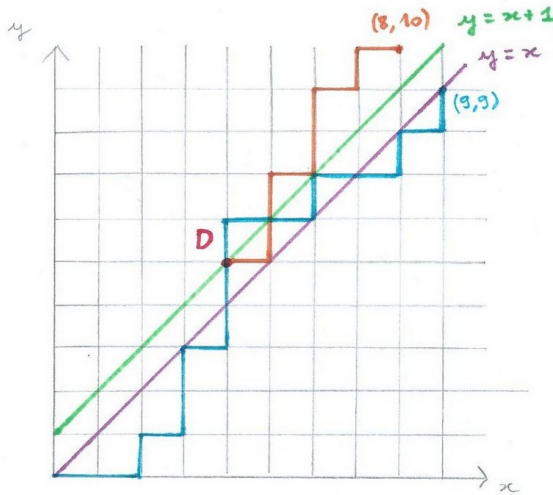
Voici un exemple de chemin de $(0, 0)$ à $(6, 5)$:



Cherchons le nombre de chemins allant de $(0, 0)$ à (p, q) . Un tel chemin est une liste de $p + q$ mouvements : p vers la droite, q vers le haut. Il est déterminé par la position dans cette liste des q déplacements vers le haut (par exemple). Donc le nombre de chemins allant de $(0, 0)$ à (p, q) est : $\binom{p+q}{q}$.

Il y a également $\binom{p+q}{q}$ chemins entre (a, b) et $(p+a, q+b)$, où $0 \leq a \leq p$ et $0 \leq b \leq q$. On en déduit donc qu'il y a $\binom{p-a+q-b}{q-b}$ chemins allant de (a, b) à (p, q) .

Nous allons maintenant compter le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, n) qui restent en dessous de la diagonale (en étant autorisés à la toucher), que nous allons noter α_n .



On peut observer pour cela qu'il suffit de calculer le nombre de chemins allant de $(0, 0)$ à (n, n) en intersectant la droite d'équation $y = x + 1$ (ce nombre de chemins sera noté β_n).

En effet, si un chemin reste en-dessous de la diagonale et touche pour la première fois la diagonale en (x, x) , soit il va dans la direction Est, c'est-à-dire en $(x+1, x)$, et reste donc en-dessous de la diagonale, soit il va dans la direction Nord, c'est-à-dire en $(x, x+1)$ et franchit ainsi la droite $y = x + 1$.

Le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, n) qui restent en dessous de la diagonale (en étant autorisés à la toucher) est donc égal au nombre de chemins allant de $(0, 0)$ à (n, n) moins le nombre de chemins allant de $(0, 0)$ à (n, n) en intersectant la droite d'équation $y = x + 1$.

On a donc : $\alpha_n = \binom{2n}{n} - \beta_n$.

Montrons que l'ensemble des chemins allant de $(0, 0)$ à (n, n) en intersectant la droite d'équation $y = x + 1$ est en bijection avec l'ensemble des chemins allant de $(0, 0)$ à $(n - 1, n + 1)$.

Soit \mathcal{B} un chemin allant de $(0, 0)$ à (n, n) en intersectant la droite d'équation $y = x + 1$. Soit $D(k, k + 1)$ le premier point de \mathcal{B} situé strictement au-dessus de la diagonale.

On définit \mathcal{B}' de la façon suivante :

- On conserve les $2k + 1$ mouvements qui amènent de $(0, 0)$ à $D(k, k + 1)$
- On inverse chacun des mouvements suivants de \mathcal{B} (tout déplacement vers le haut est transformé en déplacement vers la droite, et vice-versa).

Ce chemin amène du point $(0, 0)$ au point $(n - 1, n + 1)$.

En effet, une fois arrivé en $D(k, k + 1)$ (donc après $2k + 1$ mouvements) il reste à \mathcal{B} $n - k$ déplacements vers la droite à effectuer et $n - k - 1$ vers le haut. \mathcal{B}' va faire l'inverse, son point d'arrivée a donc pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = k + n - k - 1 = n - 1 \\ y = k + 1 + n - k = n + 1 \end{cases}$$

On considère donc l'application allant de l'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à (n, n) en intersectant la droite d'équation $y = x + 1$ dans l'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à $(n - 1, n + 1)$ et qui à \mathcal{B} associe \mathcal{B}' .

Sur l'exemple ci-dessus, \mathcal{B} est le chemin en bleu, et \mathcal{B}' est le chemin qui commence en bleu et qui finit en orange.

Cette application est surjective, car si on prend un chemin allant de $(0, 0)$ à $(n - 1, n + 1)$, et qu'à partir de son premier dépassement de la diagonale (c'est-à-dire en $D(k, k + 1)$) on effectue le chemin "inverse", on va trouver un chemin allant de $(0, 0)$ à (n, n) en intersectant la droite d'équation $y = x + 1$, par construction.

Cette application est également injective car si on prend deux chemins allant de $(0, 0)$ à $(n - 1, n + 1)$ égaux (notés \mathcal{B}'_1 et \mathcal{B}'_2), cela signifie que leurs antécédents sont égaux. En effet, de $(0, 0)$ à $D(k, k + 1)$, \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont égaux

par définition. Enfin, s'ils n'étaient pas égaux de $D(k, k + 1)$ à $(n - 1, n + 1)$, leurs images \mathcal{B}'_1 et \mathcal{B}'_2 ne pourraient pas être égales.

On a donc bien une bijection entre l'ensemble des chemins allant de $(0, 0)$ à (n, n) en intersectant la droite d'équation $y = x + 1$ et l'ensemble des chemins allant de $(0, 0)$ à $(n - 1, n + 1)$.

On sait donc maintenant que le nombre de chemins allant de $(0, 0)$ à (n, n) en intersectant la droite d'équation $y = x + 1$ est égal au nombre des chemins allant de $(0, 0)$ à $(n - 1, n + 1)$.

On a donc : $\beta_n = \binom{2n}{n-1}$.

D'où :

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \\
 &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
 &= \frac{(2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1)}{n!} - \frac{(2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1)n}{(n+1)n!} \\
 &= \frac{(n+1)[(2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1)] - (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1)n}{(n+1)n!} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1)}{n!} \\
 &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}
 \end{aligned}$$

Le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, n) qui restent en dessous de la diagonale (en étant autorisés à la toucher) est donc égale à :

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} := C_n$$

Ce nombre est appelé $n^{\text{ième}}$ **nombre de Catalan**.

1.2 Arbres et chemins

Un **graphe** est une paire $(V = \{v_1, \dots, v_k\}, E = \{e_1, \dots, e_m\})$ de sommets et d'arêtes, où chaque arête $e_i = (v_{i1}, v_{i2})$ lie une paire de sommets. Une **boucle** est une suite d'arêtes $e_i = (v_i, v_{i+1})$ telle que $v_{p+1} = v_1$ pour un certain $p \geq 1$. Un **arbre** est un graphe connexe sans boucles. On dit qu'un arbre est **planaire** s'il est dessiné (plongé) dans le plan \mathbb{R}^2 . On dit qu'un arbre est **enraciné** si on spécifie une arête orientée, appelée **racine**.

Lemme 1.2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Alors :*

$$|V| \leq |E| + 1$$

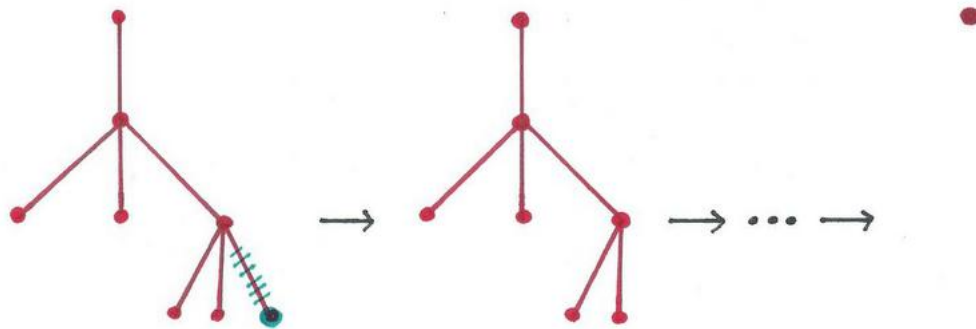
avec égalité si et seulement si G est un arbre.

Démonstration.

Tout d'abord on suppose que $G = (V, E)$ est un arbre.

On supprime de cet arbre un sommet de degré 1 (c'est-à-dire un sommet ayant une seule arête le reliant aux autres) et l'unique arête qui lui est incidente. On obtient à nouveau un arbre. On réitère cette opération jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un unique sommet (et aucune arête).

Voici le procédé mis en application sur un exemple :

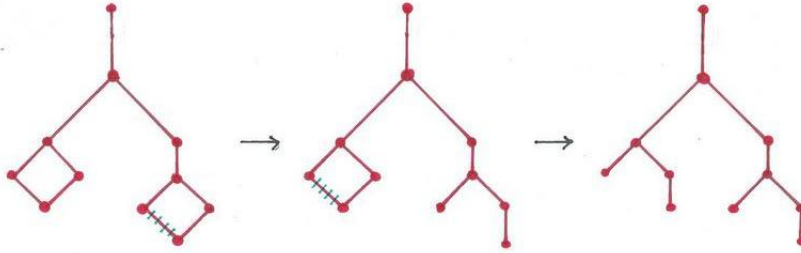


Ce procédé nous montre bien que : $|V| = |E| + 1$.

On suppose maintenant que $G = (V, E)$ n'est pas un arbre. Comme un arbre est un graphe connexe sans boucle, il existe donc au moins une boucle.

On peut ainsi supprimer au moins une arête $e \in E$ tel que G privé de cette arête reste connexe. On enlève donc cette arête et on répète cette opération jusqu'à ce que le graphe obtenu soit un arbre.

Voici le procédé mis en application sur un exemple :



Comme on a dû enlever au moins une arête à G , on a donc :

$$|V| < |E| + 1.$$

□

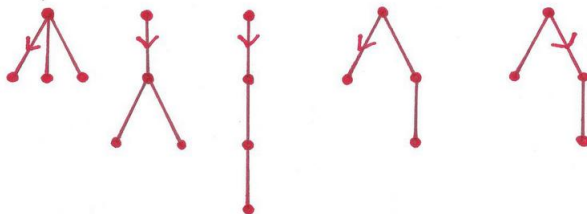
Lemme 1.2.2. *Le nombre d'arbres planaires enracinés composés de k arêtes est égal au $k^{\text{ème}}$ nombre de Catalan.*

Démonstration.

Pour se fixer les idées, dessinons tous les arbres planaires enracinés composés de 2 arêtes.



De même, nous avons dessiné ici tous les arbres planaires enracinés composés de 3 arêtes.



Exhibons une bijection entre les arbres planaires enracinés composés de k arêtes et l'ensemble des chemins Nord-Est allant de $(0, 0)$ à (k, k) qui restent en-dessous de la diagonale (ils sont autorisés à la toucher).

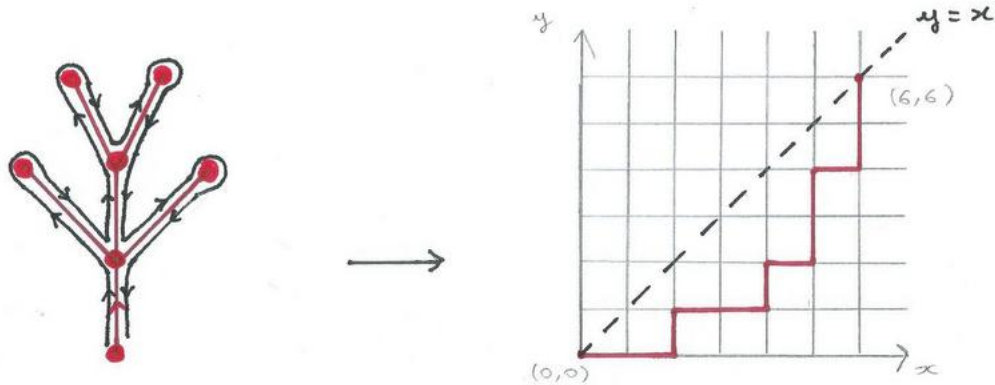
A un arbre planaire enraciné, on applique la "fonction de contour" et on obtient le tracé qu'effectue une particule qui fait le "tour" de l'arbre (dans le sens horaire) et qui s'arrête lorsqu'elle a exploré toutes les arêtes de l'arbre et est revenue à la racine.

On construit l'application ainsi :

- à chaque fois que la particule "grimpe" dans l'arbre (c'est-à-dire passe d'un nœud à ses descendants) la marche fait un mouvement vers l'Est ;
- à chaque fois qu'elle "descend" (c'est-à-dire passe d'un nœud à son ancêtre), la marche fait un mouvement vers le Nord.

(La notion d'ancêtre et de descendant provient de l'orientation de la racine.)

On donne ici un exemple d'un arbre planaire enraciné et de l'image de sa fonction de contour :



A un arbre planaire enraciné on associe donc bien un chemin allant de $(0, 0)$ à (k, k) qui reste en dessous de la diagonale.

Cette application est surjective par construction : si on utilise le même procédé "à l'envers" à partir d'une marche allant de $(0, 0)$ à (n, n) qui reste en dessous de la diagonale, on construit un arbre planaire enraciné composé de k arêtes.

Elle est également injective par construction.

Par conséquent, le nombre d'arbres planaires enracinés composés de k arêtes est égal au nombre de chemins Nord-Est allant de $(0, 0)$ à (k, k) qui restent en-dessous de la diagonale tout en étant autorisés à la toucher.

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons vu que ce nombre est égal au $k^{\text{ème}}$ nombre de Catalan.

□

1.3 Moments de la loi du demi-cercle

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose : $\mu(dx) := \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} \mathbb{1}_{|x| \leq 2} dx$ et $m_k := \int x^k \mu(dx)$.

Lemme 1.3.1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$m_{2k+1} = 0 \text{ et } m_{2k} = C_k$$

où les C_k , $k \geq 0$, sont les **nombre de Catalan**, $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$.

Démonstration.

On se place tout d'abord dans le cas pair.

$$\begin{aligned} m_{2k} &= \int x^{2k} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} \mathbb{1}_{|x| \leq 2} dx \\ &= \int_0^2 x^{2k} \frac{1}{\pi} \sqrt{4-x^2} dx \text{ car } x \mapsto x^{2k} \sqrt{4-x^2} \text{ est paire} \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $x = 2 \sin \theta$, il vient :

$$\begin{aligned}
 m_{2k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (2 \sin \theta)^{2k} 2 \cos \theta \sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 4^k \sin^{2k} \theta \cos \theta 4 \sqrt{1 - \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= \frac{4^{k+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \theta \cos^2 \theta d\theta
 \end{aligned}$$

On effectue une intégration par partie en posant :

$$\begin{aligned}
 u &= \cos \theta, \quad u' = -\sin \theta \\
 v' &= \sin^{2k} \theta \cos \theta, \quad v = \frac{\sin^{2k+1} \theta}{2k+1}
 \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
 m_{2k} &= \frac{4^{k+1}}{\pi} \left(\left[\cos \theta \frac{\sin^{2k+1} \theta}{2k+1} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k+2} \theta}{2k+1} d\theta \right) \\
 &= \frac{4^{k+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k+2} \theta}{2k+1} d\theta \tag{1.1} \\
 &= \frac{4^{k+1}}{\pi(2k+1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \theta \sin^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{2^{2k+2}}{\pi(2k+1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \theta d\theta - \frac{2^{2k+2}}{\pi(2k+1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \theta \cos^2 \theta d\theta
 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } m_{2k-2} = \frac{2^{2k}}{\pi(2k-1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \theta d\theta \text{ d'après (1.1).}$$

Donc :

$$m_{2k} = \frac{2^2(2k-1)}{2k+1} m_{2k-2} - \frac{1}{2k+1} m_{2k}$$

$$\text{D'où : } \frac{2k+2}{2k+1} m_{2k} = \frac{4(2k-1)}{2k+1} m_{2k-2}$$

C'est-à-dire :

$$m_{2k} = \frac{2(2k-1)}{k+1} m_{2k-2}$$

De plus,

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{1-\sin^2\theta} 2\cos\theta d\theta \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} 1 d\theta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2\theta) d\theta \\ &= 1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} = 1 \end{aligned}$$

Donc : $m_0 = 1$.

On se place maintenant dans le cas impair.

$$\begin{aligned} m_{2k+1} &= \int_{-2}^2 x^{2k+1} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \int_{-2}^0 x^{2k+1} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx + \int_0^2 x^{2k+1} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \int_2^0 y^{2k+1} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-y^2} dy + \int_0^2 x^{2k+1} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx \quad (\text{en posant } y = -x) \\ &= - \int_0^2 y^{2k+1} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-y^2} dy + \int_0^2 x^{2k+1} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$m_{2k+1} = 0$$

Vérifions que les nombres de Catalan satisfont à la même relation de récurrence.

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} = \frac{1}{k+1} \frac{(2k)(2k-1)\cdots(k+2)(k+1)}{k!}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}
 \frac{2(2k-1)}{k+1}C_{k-1} &= \frac{2(2k-1)}{k+1} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \\
 &= \frac{2(2k-1)}{k(k+1)} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} \\
 &= \frac{2(2k-1)!}{(k+1)k!(k-1)!} \\
 &= \frac{1}{(k+1)k!} \frac{2(2k-1)(2k-2)\cdots(k+1)k}{1} \\
 &= \frac{1}{k+1} \frac{(2k)(2k-1)(2k-2)\cdots(k+1)}{k!}
 \end{aligned}$$

On a donc : $\frac{2(2k-1)}{k+1}C_{k-1} = C_k$
 De plus, $C_0 = 1$.

Comme les nombres de Catalan satisfont à la même relation de récurrence, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, m_{2k+1} = 0 \text{ et } m_{2k} = C_k.$$

□

1.4 Condition suffisante de convergence presque sûre

Lemme 1.4.1. *Soit X_n une suite de variables aléatoires telle que :*

$$\mathbb{E}X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}X_n < +\infty$$

$$\text{Alors : } X_n \xrightarrow[p.s.]{} \mu.$$

Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$.

On considère $\mathbb{P}(|X_n - \mu| > \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n + \mathbb{E}X_n - \mu| > \epsilon)$.

D'après l'inégalité triangulaire,

$\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| + |\mathbb{E}X_n - \mu| > \epsilon) \geq \mathbb{P}(|X_n - \mu| > \epsilon)$.

Comme $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu$,

$\exists n_0$ tel que : $\forall n \geq n_0, |\mathbb{E}X_n - \mu| < \epsilon/2$.

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| + |\mathbb{E}X_n - \mu| > \epsilon) \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| + |\mathbb{E}X_n - \mu| > \epsilon) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| + |\mathbb{E}X_n - \mu| > \epsilon) \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| + |\mathbb{E}X_n - \mu| > \epsilon)}_{\text{somme finie}} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| > \epsilon/2) \end{aligned}$$

On veut donc montrer que $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| > \epsilon/2) < +\infty$.

On applique l'inégalité de Tchebychev :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| > \epsilon/2) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^2 \text{Var} X_n}{\epsilon^2} < +\infty \text{ par hypothèse.}$$

On a donc :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - \mu| > \epsilon) < +\infty.$$

On applique alors Borel-Cantelli :

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \in \mathbb{N}} |X_n - \mu| > \epsilon) = 0.$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \geq n} |X_j - \mu| > \epsilon\right) = 0.$$

On pose $\epsilon = \frac{1}{m}$, $m > 0$ et $A_n^m = \left\{ |X_n - \mu| > \frac{1}{m} \right\}$.

On a donc : $\mathbb{P}(\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n^m) = 0$.

Or, $A^m = \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n^m \subset \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{m+1} = A^{m+1}$

On a donc : $\forall m \in \mathbb{N}, A^m \subset A^{m+1}$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\mathbb{P}(A^m)}_{=0} = 0$$

Or, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m\right) = 0$ signifie que :

$$\mathbb{P}\left(\forall m > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |X_n - \mu| < \frac{1}{m}\right) = 1.$$

On a donc montré que : $X_n \xrightarrow[p.s.]{} \mu$.

□

Chapitre 2

Théorème de Wigner

2.1 Énoncé

Théorème 2.1.1. *Théorème du demi-cercle de Wigner*

Soit $(X_{i,j})_{1 \leq i < j < +\infty}$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes, d'espérance nulle et de variance 1. On pose ensuite $(X_{j,i}) = (X_{i,j})$, pour $i < j$. Supposons que les variables aléatoires $(X_{i,j})$, avec $i < j$, sont identiquement distribuées, et que les variables aléatoires $(X_{i,i})$ sont également identiquement distribuées, éventuellement selon une autre loi. On définit la matrice aléatoire A_n :

$$A_n = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & \cdots & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, ses n valeurs propres réelles (ordonnées de façon croissante).

Supposons également que $\forall k \geq 1$,

$$B_k := \mathbb{E}(|X_{1,1}|^k) \vee \mathbb{E}(|X_{1,2}|^k) < +\infty$$

Soit μ la loi du demi-cercle,

$$\mu(dx) := \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{|x| \leq 2} dx$$

Alors, presque sûrement, la mesure spectrale empirique $L_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i/\sqrt{n}}$ converge faiblement vers μ , c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) L_n(dx) = \int f(x) \mu(dx)$$

presque sûrement, pour toute fonction f continue et bornée.

2.2 Simulation XCAS

Avant de démontrer ce théorème, testons-le expérimentalement avec le logiciel XCAS.

Nous remplissons tout d'abord une matrice triangulaire supérieure, de taille $n \times n$, avec des variables aléatoires de loi normale standard, que nous complétons ensuite en une matrice symétrique.

Par la suite, on diagonalise la matrice, et nous divisons les valeurs propres par \sqrt{n} .

On teste pour $n = 600$ et $n = 3000$, et l'expérience se révèle concluante.

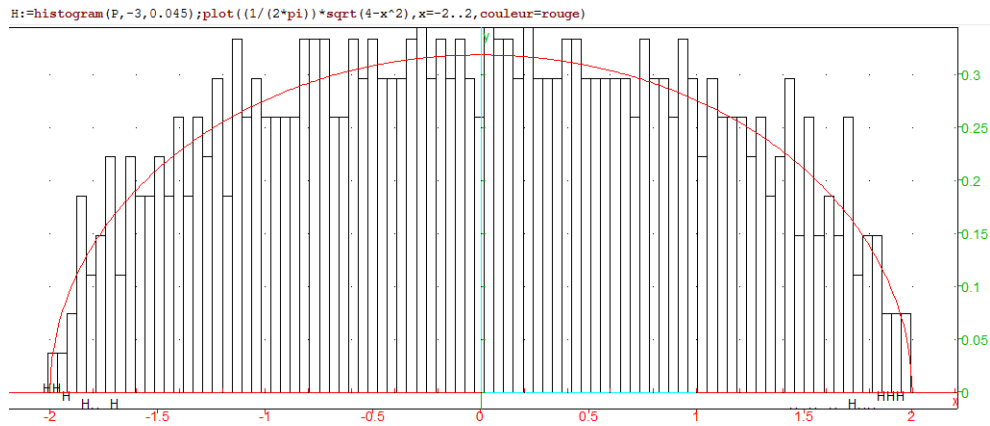
Voici le code XCAS utilisé :

```
MatriceWigner(n) := {
local A,k,j;
A:=matrix(n,n);
pour k de 0 jusque n-1 faire
pour j de k jusque n-1 faire
A[k,j] := randnorm(0,1);
A[j,k] := A[k,j];
fpour;
```

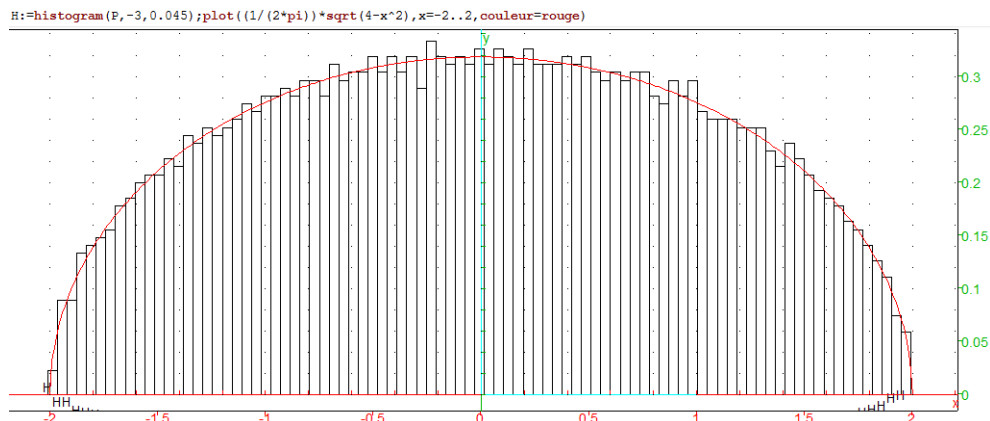
```
fpour;
return A;
} ;
```

```
A:=MatriceWigner(600)
V:=eigenvals(A)
P:=apply(x->x/sqrt(600), [V])
```

Comparons tout d'abord l'histogramme des valeurs propres de la matrice construite (en noir) avec la loi du demi-cercle (en rouge) pour $n = 600$:



Pour $n = 3000$, nous avons ensuite obtenu la figure satisfaisante suivante :



Remplissons ensuite une matrice triangulaire supérieure, de taille $n \times n$, avec des variables aléatoires qui prennent sur la diagonale les valeurs 1 ou -1 de manière équiprobable (cela donne bien des variables aléatoires d'espérance 0 et de variance 1), et avec des variables aléatoires de loi normale standard au-dessus de la diagonale. Nous la complétons en une matrice symétrique. Diagonalisons, par la suite, cette matrice et divisons les valeurs propres par \sqrt{n} .

En testant pour $n = 3000$, l'expérience se révèle également concluante.

Voici le code XCAS utilisé :

```
MatriceWigner(n) := {
local A,k,j,a,b;
A:=matrix(n,n);
pour k de 0 jusque n-1 faire
a:=alea(2);
b:=2*a-1;
A[k,k]:=b; pour j de k+1 jusque n-1 faire
A[k,j]:= randnorm(0,1);
A[j,k]:= A[k,j];
fpour;
fpour;
return A;
} ;
```

```
A:=MatriceWigner(3000)
V:=eigenvals(A)
P:=apply(x->x/sqrt(3000), [V])
```

CHAPITRE 2. THÉORÈME DE WIGNER



Chapitre 3

Preuve du théorème de Wigner

Ce chapitre est consacré à la preuve du théorème du demi-cercle de Wigner, qui est composée de deux parties. Dans tout ce chapitre, on se place sous les hypothèses du théorème.

3.1 Convergence presque sûre des moments de L_n

Proposition 3.1.1. $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $M_k^{(n)} := \int x^k L_n(dx)$. Alors :

$$\mathbb{E}M_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m_k \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}(M_k^{(n)}) < +\infty.$$

Nous allons démontrer cette proposition en deux étapes.

3.1.1 Convergence de l'espérance

Montrons dans un premier temps que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}M_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m_k$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \int x^k L_n(dx) &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right)^k \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right)^k \right] \\
 &= \frac{1}{n^{1+k/2}} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \right) \\
 &= \frac{1}{n^{1+k/2}} \mathbb{E} (Tr A_n^k) \\
 &= \frac{1}{n^{1+k/2}} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n X_{i, i_1} X_{i_1, i_2} \dots X_{i_{k-1}, i} \right) \\
 &= \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \mathbb{E} (X_{i, i_1} X_{i_1, i_2} \dots X_{i_{k-1}, i}) \\
 &= \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \mathbb{E} (X_{i_1, i_2} X_{i_2, i_3} \dots X_{i_k, i_1})
 \end{aligned}$$

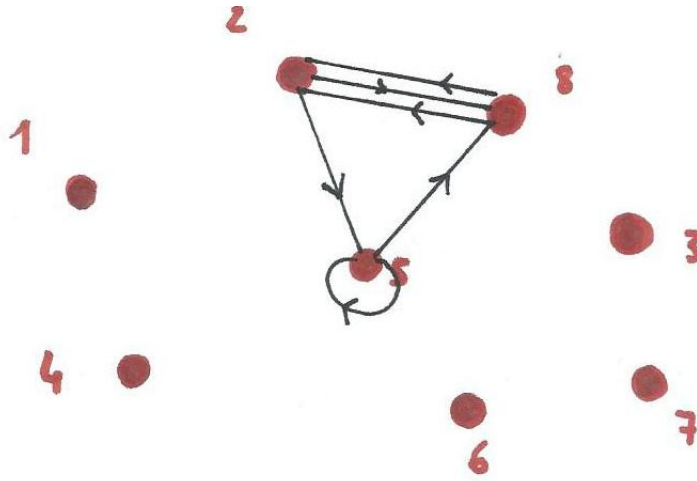
On note $\mathbf{i} := (i_1, \dots, i_k)$ et $\rho_{\mathbf{i}} := \mathbb{E}(X_{i_1, i_2} X_{i_2, i_3} \dots X_{i_k, i_1})$.

À chaque \mathbf{i} , on fait correspondre un chemin orienté fermé $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ partant de i_1 , puis visitant successivement les sommets i_2, \dots, i_k, i_1 .

Notons que le chemin peut passer plusieurs fois par le même sommet, il peut effectuer plusieurs fois la même transition, et il est également possible de faire du "sur place", c'est-à-dire d'avoir des transitions du type (i, i) .

Faisons un exemple pour fixer les idées. On prend $n = 8, k = 6$ et $\mathbf{i} = (2, 5, 5, 3, 2, 3)$. On a ainsi : $\rho_{\mathbf{i}} := \mathbb{E}(X_{2,5} X_{5,5} X_{5,3} X_{3,2} X_{2,3} X_{3,2})$.

Voici son chemin $\vec{\pi}(\mathbf{i})$:

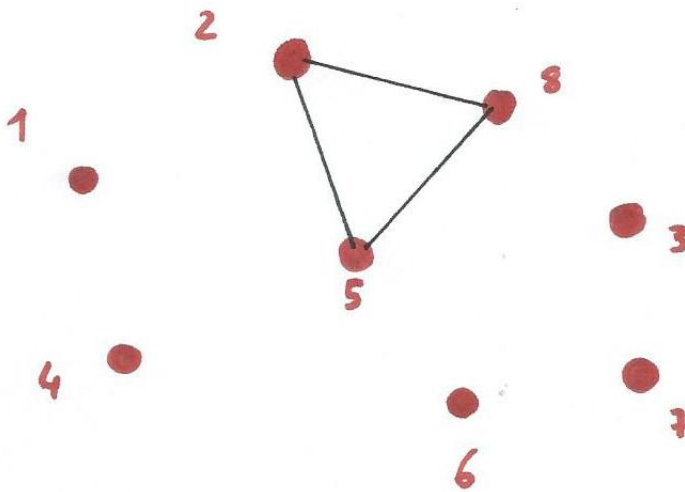


On associe ensuite au chemin $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ le graphe connexe non orienté

$$G(\mathbf{i}) = (V(\mathbf{i}), E(\mathbf{i})),$$

avec $V(\mathbf{i}) = \{i_1, \dots, i_k\}$ et une arête entre les sommets i et j de $V(\mathbf{i})$ si et seulement si le chemin $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ contient (au moins une fois) la transition (i, j) ou la transition (j, i) .

Le graphe $G(\mathbf{i})$ correspondant à l'exemple pris précédemment est le suivant :



Revenons à la démonstration. Comme les $X_{i,j}$ sont indépendants, on a :

$$\rho_{\mathbf{i}} = \prod_{e \in E(\mathbf{i})} \mathbb{E}(X_e^{l_e(\mathbf{i})})$$

où $l_e(\mathbf{i}) \in \{1, \dots, k\}$ est le nombre de passage de $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ à travers l'arête $e \in E(\mathbf{i})$ dans n'importe quelle direction et où l'on a écrit $X_e = X_{i,j}$ si $e = (i, j)$.

On a donc :

$$\rho_{\mathbf{i}} \leq (1 \vee \sup_{1 \leq m \leq k} B_m)^k \equiv \overline{\rho}_k < +\infty.$$

De plus, si l'arête e n'est traversée qu'une seule fois, on a :

$$\rho_{\mathbf{i}} = \mathbb{E}(X_e) \mathbb{E} \left(\prod_{e' \in E(\mathbf{i}), e' \neq e} X_{e'}^{l_{e'}(\mathbf{i})} \right) = 0$$

car $\mathbb{E}(X_{i,j}) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$.

Donc pour avoir $\rho_{\mathbf{i}} > 0$, si $e = (i, j) \in E(\mathbf{i})$, il faut que $l_e(\mathbf{i}) \geq 2$.

On en conclut donc que $|E(\mathbf{i})| \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, lorsque $\rho_{\mathbf{i}} > 0$.

On utilise ensuite le **Lemme 1.2.1** : lorsque $\rho_{\mathbf{i}} > 0$, $|V(\mathbf{i})| \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$.

On introduit la notation suivante pour la suite : $|\vec{\pi}(\mathbf{i})|$ désigne la longueur du chemin $\vec{\pi}(\mathbf{i})$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int x^k L_n(dx) &= \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \rho_{\mathbf{i}} \\ &\leq \frac{1}{n^{1+k/2} \overline{\rho}_k} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n 1 \\ &\leq \frac{1}{n^{1+k/2} \overline{\rho}_k} \text{card} \left\{ \mathbf{i} : |\vec{\pi}(\mathbf{i})| = k, |V(\mathbf{i})| \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \right\} \\ &\leq \frac{1}{n^{1+k/2} \overline{\rho}_k} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} \text{card} \{ \mathbf{i} : |\vec{\pi}(\mathbf{i})| = k, |V(\mathbf{i})| = l \} \end{aligned}$$

Nous allons donner une borne grossière sur $\text{card} \{\mathbf{i} : |\vec{\pi}(\mathbf{i})| = k, |V(\mathbf{i})| = l\}$ et cela suffira.

Or, il y a au plus n^l façons de tirer l éléments de $\{1, \dots, n\}$ et une fois les l éléments tirés, on peut y faire passer un chemin de longueur k d'au plus l^k manières différentes, on a donc :

$$\text{card} \{\mathbf{i} : |\vec{\pi}(\mathbf{i})| = k, |V(\mathbf{i})| = l\} \leq n^l l^k$$

D'où :

$$\mathbb{E} \int x^k L_n(dx) \leq \frac{1}{n^{1+k/2}} \overline{\rho}_k \sum_{l=1}^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} n^l l^k$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} n^l l^k &\leq \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\right)^k \sum_{l=1}^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} n^l \\ &\leq \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\right)^k \frac{n - n^{\lfloor k/2 \rfloor + 2}}{1 - n} \\ &\leq \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\right)^k \frac{n^{\lfloor k/2 \rfloor + 2} - n}{n - 1} \\ &\leq \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\right)^k \frac{n(n^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} - 1)}{n - 1} \\ &\leq \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\right)^k \frac{n}{n - 1} n^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} \\ &\leq \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\right)^k 2n^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int x^k L_n(dx) &\leq \frac{1}{n^{1+k/2}} \overline{\rho}_k 2 \left(\lfloor k/2 \rfloor + 1\right)^k n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} \\ &\leq M(k) n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \frac{k}{2}} \end{aligned}$$

où $M(k)$ est une constante, indépendante de n .

On suppose tout d'abord k impair. Alors :

$$\mathbb{E} \int x^k L_n(dx) \leq \frac{M(k)}{n^{1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'où : $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int x^k L_n(dx) = 0 \text{ si } k \text{ est impair.}}$

On suppose maintenant k pair.

Le même argument que précédemment montre que l'apport des \mathbf{i} tel que $|V(\mathbf{i})| < \frac{k}{2} + 1$ à $\mathbb{E} \int x^k L_n(dx)$ disparaît lorsque n tend vers $+\infty$. On se restreint donc aux \mathbf{i} tels que $|V(\mathbf{i})| = \frac{k}{2} + 1$. Dans ce cas-là,

$$\frac{k}{2} + 1 = |V(\mathbf{i})| \leq |E(\mathbf{i})| + 1 \leq \frac{k}{2} + 1.$$

On en conclut donc que : $|E(\mathbf{i})| = \frac{k}{2}$.

Toujours d'après le **Lemme 1.2.1**, on en conclut que $G(\mathbf{i})$ est un arbre, et donc que $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ parcourt précisément chaque arête de $G(\mathbf{i})$ deux fois : une fois dans chaque direction. Donc, pour de tels \mathbf{i} ,

$$\rho_{\mathbf{i}} = \prod_{(i,j) \in E(\mathbf{i})} \mathbb{E}(X_{i,j}^2) = 1 \text{ car } \text{Var}(X_{i,j}) = 1 = \mathbb{E}(X_{i,j}^2) - \underbrace{\mathbb{E}(X_{i,j})^2}_{=0}.$$

Donc, pour k pair,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int x^k L_n(dx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \rho_{\mathbf{i}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\{\mathbf{i} \text{ tel que } |E(\mathbf{i})|=k/2\}} 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+k/2}} \text{card} \left\{ \mathbf{i} : G(\mathbf{i}) \text{ est un arbre et } |V(\mathbf{i})| = \frac{k}{2} + 1 \right\} \end{aligned}$$

On cherche à calculer : $\text{card} \left\{ \mathbf{i} : G(\mathbf{i}) \text{ est un arbre et } |V(\mathbf{i})| = \frac{k}{2} + 1 \right\}$.

Pour cela, on utilise le fait qu'à chaque \mathbf{i} de ce type, on peut associer un arbre

contenant $\frac{k}{2}$ arêtes et un chemin fermé $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ partant de i_1 , parcourant tous les sommets de l'arbre en passant précisément deux fois par chaque arête (une fois dans chaque direction).

L'information fournie par le chemin permet d'enraciner l'arbre (le point de départ du chemin nous donne la racine) et de le plonger dans le plan (l'orientation de l'arbre plongé étant donnée par le chemin).

Etant donné un tel arbre planaire enraciné, on peut reconstruire les \mathbf{i} correspondants en étiquetant ses sommets à l'aide de $\frac{k}{2} + 1$ éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$.

On utilise ensuite le **Lemme 1.2.2**, il vient :

$$\begin{aligned} & \text{card} \left\{ \mathbf{i} : G(\mathbf{i}) \text{ est un arbre et } |V(\mathbf{i})| = \frac{k}{2} + 1 \right\} \\ &= \underbrace{\binom{n}{\frac{k}{2} + 1}}_{\text{on choisit } \frac{k}{2} + 1 \text{ sommets}} \underbrace{\left(\frac{k}{2} + 1\right)!}_{\text{on choisit l'ordre}} \underbrace{C_{k/2}}_{\text{nombre d'arbres}} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int x^k L_n(dx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+k/2}} \binom{n}{\frac{k}{2} + 1} \left(\frac{k}{2} + 1\right)! C_{k/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+k/2}} C_{k/2} \left(\frac{k}{2} + 1\right)! \frac{n!}{(n - \frac{k}{2} - 1)! \left(\frac{k}{2} + 1\right)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_{k/2} \frac{n!}{n^{1+k/2} (n - \frac{k}{2} - 1)!} \end{aligned}$$

Or, la formule de Stirling s'écrit : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$,

On trouve grâce à cette formule : $\frac{n!}{n^{1+k/2} (n - \frac{k}{2} - 1)!} \sim 1$

On obtient donc : $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int x^k L_n(dx) = C_{k/2} \text{ si } k \text{ est pair.}}$

Au vu des résultats de la première étape, on a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}M_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m_k}$$

3.1.2 Majoration de la variance

On cherche maintenant à montrer que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Var} M_k^{(n)} < +\infty.$$

Les calculs précédents ont montré que : $M_k^{(n)} = \frac{1}{n^{1+k/2}} \text{Tr} A_n^k$
 On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Var} M_k^{(n)} &= \frac{1}{n^{2+k}} \text{Var}(\text{Tr} A_n^k) \\ &= \frac{1}{n^{2+k}} [\mathbb{E}((\text{Tr} A_n^k)^2) - (\mathbb{E}(\text{Tr} A_n^k))^2] \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \text{Tr} A_n^k = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n X_{i_1, i_2} X_{i_2, i_3} \dots X_{i_k, i_1}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\text{Tr} A_n^k)^2 &= \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n X_{i_1, i_2} X_{i_2, i_3} \dots X_{i_k, i_1} \right) \left(\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n X_{j_1, j_2} X_{j_2, j_3} \dots X_{j_k, j_1} \right) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_k=1}}^n X_{i_1, i_2} X_{i_2, i_3} \dots X_{i_k, i_1} X_{j_1, j_2} X_{j_2, j_3} \dots X_{j_k, j_1} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}((\text{Tr} A_n^k)^2) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_k=1}}^n \mathbb{E}(X_{i_1, i_2} X_{i_2, i_3} \dots X_{i_k, i_1} X_{j_1, j_2} X_{j_2, j_3} \dots X_{j_k, j_1})$$

Notons $\rho_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = \mathbb{E}(X_{i_1, i_2} X_{i_2, i_3} \dots X_{i_k, i_1} X_{j_1, j_2} X_{j_2, j_3} \dots X_{j_k, j_1})$.

On rappelle que : $\rho_{\mathbf{i}} = \mathbb{E}(X_{i_1, i_2} X_{i_2, i_3} \dots X_{i_k, i_1})$.

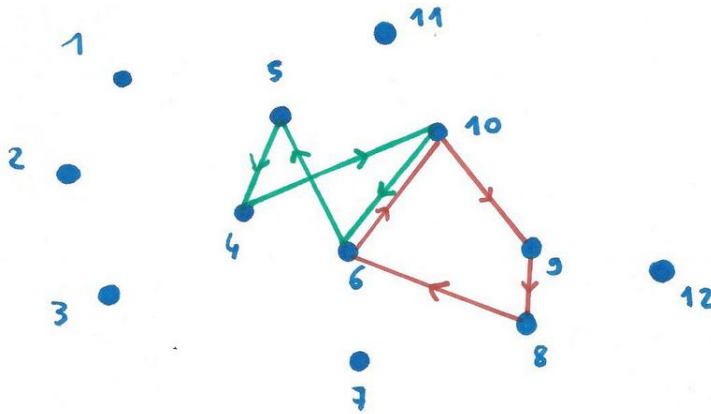
CHAPITRE 3. PREUVE DU THÉORÈME DE WIGNER

Il vient donc :

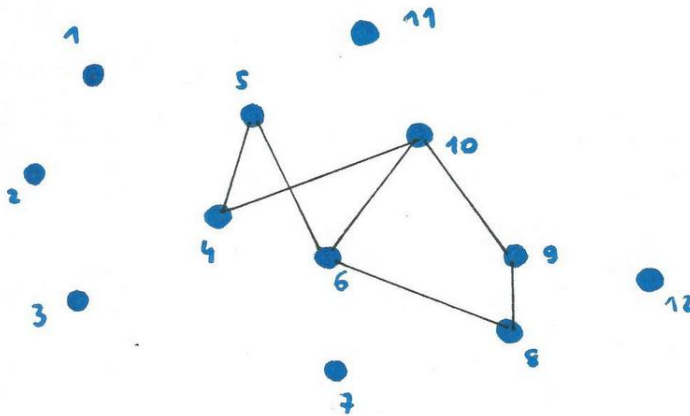
$$Var M_k^{(n)} = \frac{1}{n^{2+k}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_k=1}}^n (\rho_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} - \rho_{\mathbf{i}} \rho_{\mathbf{j}})$$

De la même façon que pour l'espérance, on associe à \mathbf{i} et \mathbf{j} les chemins fermés $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ et $\vec{\pi}(\mathbf{j})$, et les graphes $G(\mathbf{i})$ et $G(\mathbf{j})$. On considère également le chemin $\vec{\pi}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \vec{\pi}(\mathbf{i}) \sqcup \vec{\pi}(\mathbf{j})$, qui est la concaténation des chemins $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ et $\vec{\pi}(\mathbf{j})$, et le graphe $G(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (V(\mathbf{i}, \mathbf{j}), E(\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ avec sommets $V(\mathbf{i}) \cup V(\mathbf{j})$ et une arête entre $i, j \in V(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ si $(i, j) \in E(\mathbf{i})$ ou $(i, j) \in E(\mathbf{j})$.

Pour fixer les idées, on prend $n = 12, k = 4, \mathbf{i} = (5, 4, 10, 6)$ et $\mathbf{j} = (6, 10, 9, 8)$. $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ est tracé en vert, et $\vec{\pi}(\mathbf{j})$ est tracé en rouge.



En noir en-dessous, on a tracé le graphe correspondant $G(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.



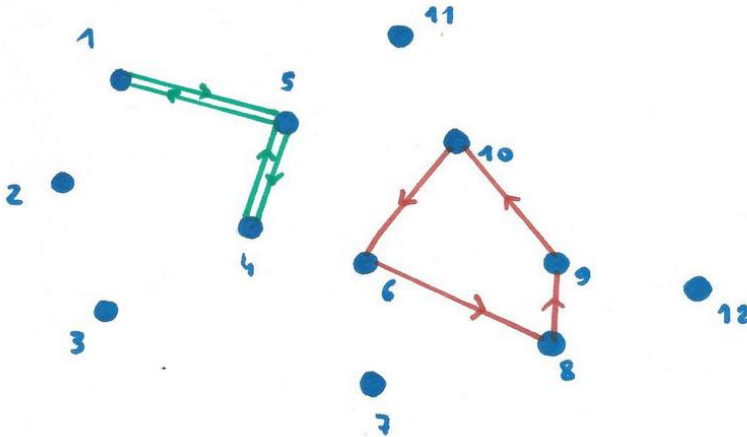
Supposons que le graphe $G(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ne soit pas connexe : cela signifie qu'il existe au moins deux sommets qui ne sont pas reliés par une suite finie d'arêtes consécutives. Comme $G(\mathbf{i})$ et $G(\mathbf{j})$ sont connexes et que $G(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ est l'union des deux, cela implique que $G(\mathbf{i})$ et $G(\mathbf{j})$ n'ont pas de sommet en commun. On a donc :

$$\mathbb{E}(X_{i_1, i_2} X_{i_2, i_3} \dots X_{i_k, i_1} X_{j_1, j_2} X_{j_2, j_3} \dots X_{j_k, j_1}) = \mathbb{E}(X_{i_1, i_2} X_{i_2, i_3} \dots X_{i_k, i_1}) \mathbb{E}(X_{j_1, j_2} X_{j_2, j_3} \dots X_{j_k, j_1}).$$

C'est-à-dire : $\rho_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = \rho_{\mathbf{i}} \rho_{\mathbf{j}}$.

En effet, prenons l'exemple suivant : $n = 12$, $k = 4$, $\mathbf{i} = (1, 5, 4, 5)$ et $\mathbf{j} = (6, 8, 9, 10)$ tracés ci-dessous. On a alors :

$$\mathbb{E}(X_{1,5} X_{5,4} X_{4,5} X_{5,1} X_{6,8} X_{8,9} X_{9,10} X_{10,6}) = \mathbb{E}(X_{1,5} X_{5,4} X_{4,5} X_{5,1}) \mathbb{E}(X_{6,8} X_{8,9} X_{9,10} X_{10,6}).$$



À partir de maintenant, on ne s'intéresse qu'aux graphes $G(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ connexes (puisque les non-connexes ont une contribution nulle à la variance).

Comme avec l'espérance, il faut que toute arête de $E(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ soit traversée au moins deux fois, sinon, $\rho_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = 0 = \rho_{\mathbf{i}} \rho_{\mathbf{j}}$.

On en conclut que $|E(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \leq k$ et donc d'après le **Lemme 1.2.1**,

$$|V(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \leq k + 1.$$

On va maintenant montrer que les paires \mathbf{i}, \mathbf{j} telles que $|V(\mathbf{i}, \mathbf{j})| = k + 1$ ne contribuent pas à la variance.

Supposons donc que $|V(\mathbf{i}, \mathbf{j})| = k + 1$. On a donc :

$$k + 1 = |V(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \leq |E(\mathbf{i}, \mathbf{j})| + 1 \leq k + 1$$

Il vient donc que $|V(\mathbf{i}, \mathbf{j})| = |E(\mathbf{i}, \mathbf{j})| + 1$, et donc toujours d'après le **Lemme 1.2.1**, on sait que le graphe $G(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ est un arbre, et que chacune des arêtes est parcourue exactement deux fois. Trois cas peuvent donc se présenter :

- Cas 1 : les deux traversées sont dans $\vec{\pi}(\mathbf{i})$
- Cas 2 : les deux traversées sont dans $\vec{\pi}(\mathbf{j})$
- Cas 3 : une traversée a lieu dans $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ et l'autre dans $\vec{\pi}(\mathbf{j})$

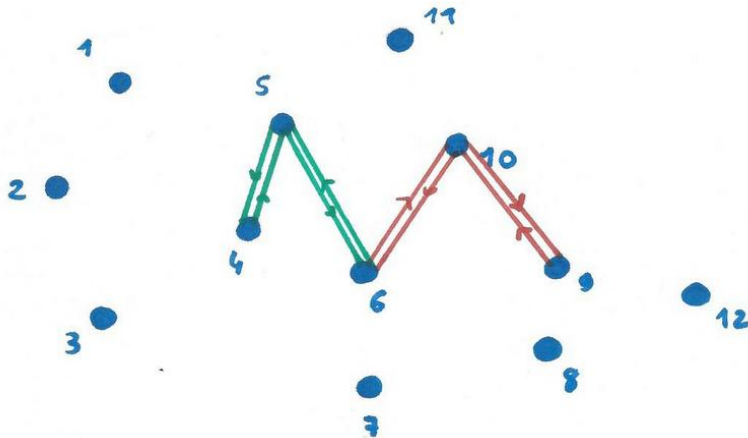
Si les cas 1 ou 2 se présentent pour toutes les arêtes, alors $G(\mathbf{i})$ et $G(\mathbf{j})$ n'ont aucune arête en commun, et on a donc : $\rho_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = \rho_{\mathbf{i}} \rho_{\mathbf{j}}$.

Pour illustrer notre propos, nous avons pris l'exemple suivant :

$n = 12, k = 4, \mathbf{i} = (6, 5, 4, 5)$ et $\mathbf{j} = (6, 10, 9, 10)$.

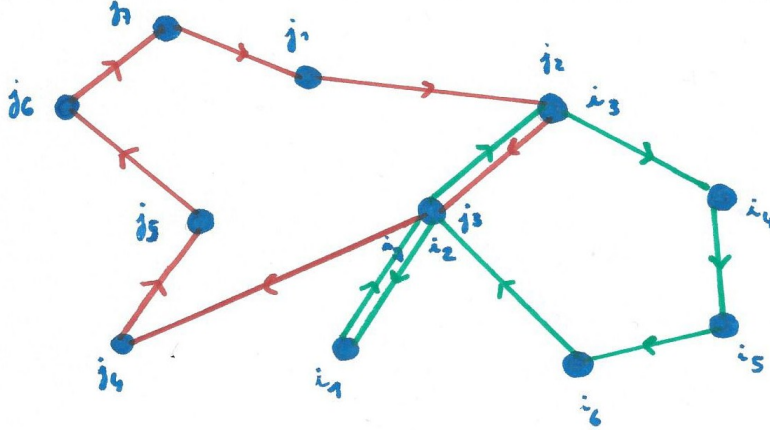
On a alors :

$$\mathbb{E}(X_{6,5} X_{5,4} X_{4,5} X_{5,6} X_{6,10} X_{10,9} X_{9,10} X_{10,6}) = \mathbb{E}(X_{6,5} X_{5,4} X_{4,5} X_{5,6}) \mathbb{E}(X_{6,10} X_{10,9} X_{9,10} X_{10,6}).$$



Pour que la contribution à la variance ne soit pas nulle, il faut donc que le cas 3 se présente pour au moins une arête.

Mais on s'aperçoit que ceci est impossible. En effet, supposons pour fixer les idées que ce soit l'arête entre i_2 et i_3 qui est traversée une fois par $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ et une fois par $\vec{\pi}(\mathbf{j})$, comme dans l'exemple suivant.



Comme $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ est un chemin fermé sur $G(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, on doit revenir sur i_1 dans $\vec{\pi}(\mathbf{i})$. Comme on ne peut pas retraverser cette arête dans l'autre sens, $\vec{\pi}(\mathbf{i})$ contient nécessairement une boucle. Or, $G(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ne contient pas de boucles puisque c'est un arbre. On aboutit à une contradiction !

Donc les paires \mathbf{i}, \mathbf{j} telles que $|V(\mathbf{i}, \mathbf{j})| = k + 1$, n'ont pas de contribution à la variance. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \text{Var} M_k^{(n)} &= \frac{1}{n^{2+k}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_k=1}}^n (\rho_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} - \rho_{\mathbf{i}} \rho_{\mathbf{j}}) \\
 &\leq \frac{1}{n^{2+k}} 2\overline{\rho}_{2k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_k=1}}^n 1 \\
 &\leq \frac{1}{n^{2+k}} 2\overline{\rho}_{2k} \text{card} \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) : |\vec{\pi}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| = 2k, |V(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \leq k\} \\
 &\leq \frac{1}{n^{2+k}} 2\overline{\rho}_{2k} \sum_{l=1}^k \text{card} \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) : |\vec{\pi}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| = 2k, |V(\mathbf{i}, \mathbf{j})| = l\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{n^{2+k} 2^{\rho_{2k}}} \sum_{l=1}^k n^l l^{2k} \\
 &\leq \frac{1}{n^{2+k} 2^{\rho_{2k}}} \sum_{l=1}^k n^k k^{2k} \\
 &\leq \frac{1}{n^{2+k} 2^{\rho_{2k}}} k n^k k^{2k} \\
 &\leq \frac{N(k)}{n^2}
 \end{aligned}$$

où $N(k)$ est une constante, indépendante de n .

On a donc bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Var} M_k^{(n)} < +\infty}$$

Nous avons donc montré que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E} M_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m_k \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Var} M_k^{(n)} < +\infty.$$

On applique maintenant le **lemme 1.4.1**, il vient :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, M_k^{(n)} \xrightarrow[p.s.]{} m_k.}$$

3.2 Convergence faible de L_n

Lors de la section précédente, on a donc montré que : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$M_k^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k L_n(dx) \xrightarrow[p.s.]{} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k d\mu(x) := m_k$$

Lemme 3.2.1. *Cela implique que :*

$$\int f(x) L_n(dx) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int f(x) \mu(dx)$$

presque sûrement, pour toute f continue bornée.

Démonstration.

Rappelons le théorème d'approximation de **Weierstrass** :

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Alors, il existe une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

Soit $B > 2$ et $\delta > 0$.

En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, on peut trouver un polynôme P_δ tel que :

$$\sup_{|x| < B} |f(x) - P_\delta| \leq \delta.$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \left| \int f(x) L_n(dx) - \int f(x) \mu(dx) \right| \\ &= \left| \int f(x) L_n(dx) - \int f(x) \mu(dx) + \int P_\delta(x) L_n(dx) - \int P_\delta(x) L_n(dx) \right. \\ & \quad \left. + \int P_\delta(x) \mu(dx) - \int P_\delta(x) \mu(dx) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left| \int f(x)L_n(dx) - \int P_\delta(x)L_n(dx) \right| + \left| \int P_\delta(x)\mu(dx) - \int f(x)\mu(dx) \right| \\
 &+ \left| \int P_\delta(x)L_n(dx) - \int P_\delta(x)\mu(dx) \right| \\
 &\leq \left| \int (f(x) - P_\delta(x))L_n(dx) \right| + \left| \int (P_\delta(x) - f(x))\mu(dx) \right| \\
 &+ \left| \int P_\delta(x)L_n(dx) - \int P_\delta(x)\mu(dx) \right|
 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \left| \int (P_\delta(x) - f(x))\mu(dx) \right| &\leq \int_{-2}^2 |P_\delta(x) - f(x)| \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx \\
 &\leq \delta \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \\
 &\leq \delta \frac{1}{\pi} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \\
 &\leq \delta
 \end{aligned}$$

(en effectuant le changement de variable $x = 2 \sin \theta$ par exemple).

Ensuite, d'après la section précédente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int P_\delta(x)L_n(dx) - \int P_\delta(x)\mu(dx) \right| = 0 \text{ presque sûrement.}$$

En effet, on écrit $P_\delta(x) = \sum_{k=1}^p a_k x^k$.

où p désigne le degré du polynôme P_δ .

Alors :

$$\begin{aligned}
 \int P_\delta(x)L_n(dx) &= \int \sum_{k=1}^p a_k x^k L_n(dx) \\
 &= \sum_{k=1}^p \int a_k x^k L_n(dx) \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
 &= \sum_{k=1}^p a_k \int x^k L_n(dx)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p a_k \int x^k \mu(dx) \text{ d'après la section précédente} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int \sum_{k=1}^p a_k x^k \mu(dx) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int P_\delta(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

Par la suite, on décompose $|\int (f(x) - P_\delta(x)) L_n(dx)|$ en deux parties :

$$\begin{aligned} \left| \int (f(x) - P_\delta(x)) L_n(dx) \right| &\leq \left| \int_{|x| < B} (f(x) - P_\delta(x)) L_n(dx) \right| \\ &\quad + \left| \int_{|x| > B} (f(x) - P_\delta(x)) L_n(dx) \right| \end{aligned}$$

Pour commencer, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| < B} (f(x) - P_\delta(x)) L_n(dx) \right| &\leq \delta \left| \int_{|x| < B} L_n(dx) \right| \\ &\leq \delta \left| \int L_n(dx) \right| \\ &\leq \delta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\ &\leq \delta \end{aligned}$$

Ensuite,

f étant bornée, il existe une constante $K = K(\delta, B) < +\infty$ telle que :

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| > B} (f(x) - P_\delta(x)) L_n(dx) \right| &\leq K \int_{|x| > B} |x|^p L_n(dx) \\ &\leq K B^{-p-2q} \int x^{2(p+q)} L_n(dx) \end{aligned}$$

où $q \in \mathbb{N}^*$, et comme $|x| > B$, $|x|^{p+2q} > B^{p+2q}$ donc $|x|^{p+2q} B^{-p-2q} \geq 1$.

On utilise encore une fois le théorème précédent, il vient :

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{|x| > B} (f(x) - P_\delta(x)) L_n(dx) \right| \\
 & \leq KB^{-p-2q} \int x^{2(p+q)} \mu(dx) \\
 & \leq KB^{-p-2q} C_{p+q} \text{ d'après les calculs sur les moments de la loi du demi-cercle.}
 \end{aligned}$$

Or, les nombres de Catalan satisfont l'inégalité : $C_k \leq 2^{2k}$, $\forall k \geq 0$.

En effet, $C_k \leq \binom{2k}{k}$ et $\binom{2k}{k} \leq 2^{2k}$ car :

$$\binom{2n}{n} - 2^{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - 2^{2n} = \frac{(2n)! - 2^{2n}(n!)^2}{(n!)^2}$$

On regarde le numérateur :

$$\begin{aligned}
 & (2n)(2n-1)(2n-2)\dots(2)(1) - \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{2n \text{ fois}} \cdot n(n-1)\dots(2)(1) \\
 & = (2n)(2n-1)\dots(2)(1) - (2n)(2n-2)\dots(4)(2) \cdot (2n)(2n-2)\dots(4)(2) \\
 & = \underbrace{(2n)(2n-2)\dots(2)}_{\text{pairs}} \underbrace{[(2n-1)(2n-3)\dots(1) - (2n)(2n-2)\dots(4)(2)]}_{\substack{\text{impairs} \\ \leq 0}}
 \end{aligned}$$

On a donc bien $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$ et donc $C_k \leq 2^{2k}$, $\forall k \geq 0$.

On fait alors tendre q vers $+\infty$, il vient :

$$\left| \int_{|x| > B} (f(x) - P_\delta(x)) L_n(dx) \right| \leq K 2^{2k} \frac{1}{B^{p+2q}}$$

donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{|x| > B} (f(x) - P_\delta(x)) L_n(dx) \right| = 0$ presque sûrement.

Pour finir, on fait tendre δ vers 0, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int f(x) L_n(dx) - \int f(x) \mu(dx) \right| = 0 \text{ presque sûrement.}$$

□

Conclusion

Pour démontrer le **théorème du demi-cercle de Wigner**, nous avons donc procédé en plusieurs étapes.

Premièrement, on a calculé les moments de la loi du demi-cercle :

pour tout $k \in \mathbb{N}$, en posant $m_k := \int x^k \mu(dx)$, on a :

$$m_{2k+1} = 0 \text{ et } m_{2k} = C_k$$

où les C_k , $k \geq 0$, sont les **nombre de Catalan**, $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$.

Le cœur du travail a ensuite été de montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, en posant $M_k^{(n)} := \int x^k L_n(dx)$, on a :

$$\mathbb{E}M_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m_k \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Var} M_k^{(n)} < +\infty.$$

Un résultat préliminaire nous affirme alors que :

$$M_k^{(n)} \xrightarrow[p.s.]{} m_k.$$

Enfin, nous avons démontré que ceci impliquait que :

$$\int f(x) L_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f(x) \mu(dx)$$

presque sûrement, pour toute f continue bornée.

On a donc bien montré le **théorème du demi-cercle de Wigner** :

Presque sûrement, la mesure spectrale empirique L_n converge faiblement vers μ .

Annexe

Dans la section *Convergence faible de L_n* du chapitre 3, nous avons utilisé le **théorème d'approximation de Weierstrass** :

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Alors il existe une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Démonstration. De façon probabiliste.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit $\epsilon > 0$.

Comme f est continue sur un compact :

- f est uniformément continue d'après le théorème de Heine, c'est-à-dire :

$$\exists \delta_\epsilon > 0, \forall x, y \in [0, 1], (|x - y| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$$

- f est bornée :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq M$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $x \in [0, 1]$, on définit la variable aléatoire $B_{n,x}$ de loi binomiale de paramètres n et x .

On a ainsi :

$$\mathbb{P}(B_{n,x} = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$\mathbb{E}(B_{n,x}) = nx$$

$$\text{Var}(B_{n,x}) = nx(1-x)$$

On définit à présent $T_{n,x} = \frac{B_{n,x}}{n}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{n,x}) &= x \\ \text{Var}(T_{n,x}) &= \frac{x(1-x)}{n}\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Tchebychev :
 $\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(|T_{n,x} - x| > \alpha) \leq \frac{\text{Var}(T_{n,x})}{\alpha^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}$

On pose maintenant :

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \mathbb{E}(f(T_{n,x})) \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(B_{n,x} = k) \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}|P_n(x) - f(x)| &= |\mathbb{E}(f(T_{n,x})) - f(x)| \\ &\leq \mathbb{E}(|f(T_{n,x}) - f(x)|) \\ &\leq \int_{\{|T_{n,x}-x|\leq\delta_\epsilon\}} |f(T_{n,x}) - f(x)| d\mathbb{P} \\ &\quad + \int_{\{|T_{n,x}-x|>\delta_\epsilon\}} |f(T_{n,x}) - f(x)| d\mathbb{P} \\ &\leq \epsilon \mathbb{P}(|T_{n,x} - x| \leq \delta_\epsilon) + 2M \mathbb{P}(|T_{n,x} - x| > \delta_\epsilon) \\ &\leq \epsilon + 2M \frac{x(1-x)}{n\delta_\epsilon^2}\end{aligned}$$

On pose $\Delta_n = \sup_{x \in [0,1]} |P_n(x) - f(x)|$.

Alors : $\Delta_n \leq \epsilon + \frac{M}{2n\delta_\epsilon^2}$ car $\sup_{x \in [0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$.

On a donc : $0 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n \leq \epsilon$.

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0$.

Cela signifie bien que : $P_n \xrightarrow{\text{uniformément}} f$ sur $[0, 1]$.

□

Références

[1] Alice Guionnet. *Large Random Matrices : Lectures on Macroscopic Asymptotics*, volume 1957 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.

[2] Yvan Velenik. Notes de cours. Dans *Chapitres choisis de théorie de probabilités*, chapitre 3, pages 19-28, 2009.

[3] Mireille Capitaine. Notes de cours. Dans *Introduction aux grandes matrices aléatoires cours M2R*, chapitre 1, pages 2-43, 2012.