| | |
|---|---|
| Université Joseph Fourier | 2014-2015 |
| Master 1 | Majeure Mathématiques |

**Propositions de sujet de TER**

(1) Distributions homogènes.
(2) Harmoniques sphériques
(3) $C^\star$ -algèbres.
(4) Le trou noir de Schwarzschild.
(5) Groupes libres et présentations
(6) Sous–groupes finis des groupes linéaires
(7) Quelques propriétés des réseaux
(8) Cônes convexes et variétés toriques
(9) Groupe fondamental et classification des surfaces compactes
(10) Représentations de carquois et thèorème de Gabriel
(11) Equations aux dérivées partielles sur le segment $[0, 1]$.
(12) Dynamique générique des équations différentielles.
(13) Moyennisation d'équations différentielles.
(14) Solutions entropiques de lois de conservations
(15) Le modèle de Curie-Weiss
(16) Un modèle d'accrochage de polymère.
(17) Principe des grandes déviations
(18) Théorie de Kubo et Ando des moyennes d'opérateurs positifs.
(19) Magnétisation spontanée
(20) Cycles et poids (récurrence-transience 1D pour les marches au hasard $+2/-1$)
(21) Intégrale de Daniell
(22) Loi infiniement divisible et théorème central limite

| | |
|---|---|
| Université Joseph Fourier | 2014-2015 |
| Master 1 | Majeure Mathématiques |

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre

Distributions homogènes.

## 2. Résumé

Le but est de d'étudier certaines distributions homogènes sur $\mathbb{R}^n$. Il est clair que les fonctions homogènes sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme $x^z$, avec $z \in \mathbb{C}$. Si $\mathrm{Re}(z) > 0$, on a un fonction continue ; si $\mathrm{Re}(z) > -1$, on a une fonction localement intégrable. Si $\mathrm{Re}(z) \leq -1$, il est possible d'étendre $x^z$ en une distribution homogène, et plus $\mathrm{Re}(z)$ est petite, plus la distribution a un ordre élevé.

On définira de même les distributions homogènes suivantes :

$$x_+^z,\ x_-^z,\ |x|^z,\ \mathrm{sgn}(x)|x|^z,\ (x+i0)^z,\ (x-i0)^z.$$

Ces distributions sont holomorphes en $z$, c'est à dire qu'on a des applications holomorphes de $\mathbb{C}$ à valeur dans l'espace des distributions (on définira proprement cette notion). En fait ces fonctions sont méromorphes ; elles ne peuvent pas être définies pour certaines valeurs spéciales. Malgré tout, elles ont des singularités finies en ces poles, et on peut déterminer leurs résidus. On calculera aussi la transformée de Fourier de chacune de ces distributions.

On donnera quelques exemples d'utilisation, par exemple pour la régularisation des intégrales singulières du type

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-n} f(x) dx,$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$. Si le temps le permet, on étudiera des équivalents dans $\mathbb{R}^n$.

## 3. Prérequis

- Théorie des distributions sur $\mathbb{R}$.
- Transformée de Fourier d'une fonction ou d'une distribution.
- Fonctions holomorphes et méromorphes. Théorème des résidus.

## 4. Références bibliographiques


- Gel'fand and Shilov, "Generalized functions, Vol.1"
- Hörmander "The analysis of linear partial differential operators I"

Université Joseph Fourier — 2014-2015
Master 1 — Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre

Harmoniques sphériques.

## 2. Résumé

Une harmonique sphérique est un polynôme homogène et harmonique sur $\mathbb{R}^d$. Sur $\mathbb{R}^2$, il n'y a que les deux polynômes

$$(x + iy)^n, \ (x - iy)^n$$

et leurs combinaisons linéaires.

On étudiera certaines propriétés de ces polynômes, par exemple le fait qu'ils généralisent le séries de Fourier à $\mathbb{R}^d$. On peut aussi voir les harmoniques sphériques comme les valeurs propres du Laplacien sphérique, c'est-à-dire la partie tangentielle du Laplacien en coordonnée polaires. Cette définition permet de caractériser les fonctions de carré intégrables, les fonctions de classe $C^\infty$, et même les distributions, aux moyen de leurs coefficients harmoniques.

## 3. Prérequis

— Géométrie differentielle (sur une sphère).
— Séries de Fourier.
— Distributions.

## 4. Références bibliographiques

— Stein, E. M. and Weiss, G., "Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces",
— Hörmander, "The analysis of partial differential operators I".

Université Joseph Fourier 2014-2015

Master 1 Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre

Equations aux dérivées partielles sur le segment $[0, 1]$.

## 2. Résumé

On considère des équations aux dérivées partielles, soit du type réaction-diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x,t) + f(x, u(x,t)) & (x,t) \in ]0,1[\times\mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

(EDP qui intervient par exemple dans des modèles de dynamique des populations ou de diffusion de composées chimiques), soit du type ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x,t) & (x,t) \in ]0,1[\times\mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

(très bon modèle pour les vibrations d'une corde de guitare ou l'évolution de la pression dans le tube d'une flûte).

Dans un premier temps, nous utiliserons les séries de Fourier pour énoncer des théorèmes d'existence et unicité de solutions pour ces EDPs. La suite du stage sera modulable en fonction des envies du stagiaire : étude de la dynamique, écriture de programmes pour effectuer des simulations numériques, discussion sur des modèles basiques d'instruments de musique...

## 3. Prérequis

Séries de Fourier, l'espace $L^2$ et des notions d'espaces de Sobolev.

## 4. Références bibliographiques

Le stage ne s'appuiera pas sur un livre ou article précis. Le stagiaire devra donc savoir chercher des informations dans diverses sources et être autonome pour effectuer ses calculs mathématiques.

Université Joseph Fourier 2014-2015
Master 1 Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre

Dynamique générique des équations différentielles.

## 2. Résumé

On considère une équation différentielle engendrée par un champ de vecteurs sur un variété compacte. Certaines propriétés de ce champ sont importantes pour comprendre la dynamique qualitative du flot de l'équation différentielle. Par exemple, si tous les points d'équilibre du flot sont hyperboliques, alors ils sont isolés, en nombre fini, et on peut construire leur variétés stable et instable et comprendre localement la dynamique qualitative près de ces équilibres.

Le but de ce TER est de montrer qu'une propriété comme l'hyperbolicité des points d'équilibre est une propriété « presque toujours » vraie, dans le sens où elle est vraie pour un ensemble générique de champs de vecteurs.

## 3. Prérequis

— Un minimum de connaissances sur les équations différentielles et leur dynamique : théorèmes d'existence de solutions, ce qu'est un point d'équilibre...

— Un minimum de maîtrise de la géométrie et topologie élémentaire : théorème de Baire, notion de variété compacte...

Des connaissances plus approfondies de la dynamique des équations différentielles (hyperbolicité, variétés stables et instables...) sont bienvenues mais pas indispensables.

## 4. Références bibliographiques

Anatole Katok et Boris Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* Encyclopedia of Mathematics and its Applications n°54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995, CR-EMA-54.

Université Joseph Fourier 2014-2015
Master 1 Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre

Le modèle de Curie-Weiss

## 2. Résumé

Le modèle de Curie-Weiss est un modèle, du phénomène de ferromagnétisme : certains matériaux ont la propriété de s'aimanter (après exposition temporaire à un champ magnétique externe), mais perdent cette propriété lorsque la température est trop élevée. Le modèle de Curie-Weiss permet de reproduire de manière théorique une telle transition de phase à partir d'un modèle microscopique très simple. On montrera rigoureusement l'existence de cette transition de phase et on l'étudiera de manière plus ou moins approfondie, notamment á l'aide du concept de grandes déviations.

## 3. Prérequis

Le cours de probabilités du premier semestre.

## 4. Références bibliographiques

Richard S. Ellis. Entropy, large deviations, and statistical mechanics. Classics in Maths. Springer-Verlag, 2006.

Université Joseph Fourier | 2014-2015
Master 1 | Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre

Un modèle d'accrochage de polymère.

## 2. Résumé

Un modèle (très) simplifié de polymère consiste à représenter cette longue chaine de monomères comme un chemin orienté de longueur $N$ dans $N \times \mathbb{Z}^2$, partant de l'origine. On veut étudier l'accrochage de ce polymère sur la ligne $N \times \{0\}$ : on définit l'énergie $H(S)$ d'un chemin $S = S_0, \ldots, S_N$ comme le nombre de fois où il touche la ligne d'accrochage, puis on introduit un paramètre $h$ et une mesure de probabilité (appelée mesure de Gibbs) sur ces chemins : à un chemin $S$ donné, elle associe un poids proportionnel à $\exp(hH(S))$. On peut alors montrer qu'il existe une transition de phase de localisation : pour $h < 0$, le polymère va être délocalisé, c'est à dire loin de la ligne d'accrochage et pour $h > 0$, il va être localisé, c'est à dire qu'il va toucher de nombreuses fois (de l'ordre de $N$) la ligne. On pourra ensuite étudier l'effet du désordre sur ce phénomène en perturbant l'énergie $H$ par des poids aléatoires.

## 3. Prérequis

Cours de Probabilités du premier semestre.

## 4. Références bibliographiques

(1) Cours de Giacomin à Saint-Flour : "Disorder and critical phenomena through basic probability models". `http://people.math.jussieu.fr/~giacomin/SFLN_march15.pdf`

(2) Thèse de Quentin Berger, introduction et chapitre 1 : `http://dornsife.usc.edu/assets/sites/406/do`

Université Joseph Fourier — 2014-2015
Master 1 — Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Groupes libres et présentations

### 2. Résumé

Un groupe $G$ est dit libre sur $S$ une partie de $G$ si tout élément de $G$ s'écrit de façon unique comme produit "réduit" d'éléments de $S$ et de leurs inverses. Les morphismes de $G$ dans un groupe $H$ sont alors en bijection (par prolongement) avec les applications de $S$ dans $H$.

On étudiera une construction et les premières propriétés du groupe libre $F(S)$ sur l'ensemble $S$. En particulier son rang $r = \mathrm{card} S$ est bien défini. On pourra étudier le théorème remarquable de Nielsen et Schreier (vers 1925) : Tout sous–groupe d'un groupe libre est libre, peut être de rang infini ; le rang des sous-groupes d'indice fini $d$ est $d(r-1)+1$, donc supérieur à $r$ si $d, n \geq 2$.

Dans un deuxième temps, la notion de groupe libre permet de présenter tout groupe engendré par une partie $S$ comme groupe quotient du groupe libre sur $S$ par certaines relations $(R)$. Ainsi la donnée du couple $< S|R >$ détermine entièrement la loi du groupe. Par exemple :

- $< a|\, a^n = 1 >$ est une présentation du groupe cyclique d'ordre $n$,
- $< a, b \,|\, ab = ba >$ est une présentation du groupe $\mathbb{Z}^2$.

Une telle présentation permet de décrire simplement tous les morphismes du groupe $G$ dans un autre ; ceci est utile pour trouver les automorphismes, les représentations linéaires de $G$...

On étudiera quelques exemples classiques de présentations (groupes diédraux, symétriques, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,..).

### 3. Prérequis

Cours d'algèbre de L3 (groupes)

### 4. Références bibliographiques

On utilisera notamment :

Arnaudiès Bertin, *Groupes, Algèbre et géométrie T1*, IX 1.
Ramis, Warusfel, Moulin *Cours de mathématiques volume 1, Algèbre et géométrie*, I 4.
Calais, *Éléments de théorie des groupes*, IX.

## 5. Sous–groupes finis des groupes linéaires

### 6. Résumé

Il s'agira de montrer que les sous–groupes finis d'un groupe linéaire donné sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$ ne sont pas quelconques :

- d'une part sur le corps $\mathbb{C}$ le théorème de Jordan affirme que tout sous–groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ possède un sous–groupe distingué et abélien d'indice inférieur à un entier $d(n)$ qui ne dépend que de $n$. On établira une telle borne explicite (le sous–groupe $S_{n+1}$ fournit $d(n) \geq (n+1)!$).

- d'autre part pour $GL_n(\mathbb{Q})$, on étudiera les bornes sur le cardinal obtenues par Minkowski et Schur, notamment en utilisant la réduction à des corps finis (exemple d'un sous–groupe : dans $GL_n(\mathbb{Z})$ les matrices monomiales forment un sous–groupe d'ordre $2^n n!$).

Ces résultats apportent un point de vue complémentaire de celui du cours d'Algèbre 2, qui a pour objet de classifier les morphismes d'un groupe fini $G$ dans les groupes $GL_n(\mathbb{C})$ (c.-à-d. les "représentations" de $G$).

## 7. Prérequis

Cours d'algèbre de L3 ; les cours d'algèbre de M1 (extensions de corps, puis représentations) pourront aussi être utiles.

## 8. Références bibliographiques

On utilisera notamment :

Antetomaso R., *Autour du théorème de Jordan sur les sous–groupes finis de* $GL_n(\mathbb{C})$, RMS vol. 124, 2013-14.

Guralnick et Lorenz *Orders of finite groups of matrices* , ArXiv 2005 (première partie).

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Réseaux

## 2. Résumé

Nous étudierons quelques propriétés des réseaux, c'est-à-dire des sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$, en lien avec la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Nous verrons que les réseaux sont des copies de $\mathbb{Z}^n$, et nous examinerons quelques résultats sur la répartition des points d'un réseau.

## 3. Prérequis

le cours d'algèbre 1 du M1.

## 4. Références bibliographiques

TOSEL, Réseaux et théorèmes de finitude, RMS 2004-2005
JACOBSON, basic algebra

Université Joseph Fourier — 2014-2015
Master 1 — Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre : Loi infiniement divisible et théorème central limite

## 2. Résumé

Le but de ce projet est de comprendre le théorème central limite dans une très grande généralité. Soit $(X_{n,i})_{\substack{n\geqslant 1\\ 1\leqslant i\leqslant k_n}}$ une famille de variables aléatoires réelles, où $(k_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'entiers $\geqslant 1$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty.$$

On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la famille $(X_{n,i})_{1\leqslant i\leqslant k_n}$ est indépendante, et on désigne par $S_n$ la somme

$$\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}.$$

On cherche à comprendre le comportement asymptotique des lois de probabilités des $S_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Il s'avère que, sous une hypothèse très modérée comme la suite

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant k_n} \mathbb{P}(|X_{n,i}| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

l'ensemble de toutes les lois limites possibles de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ s'identifie à l'ensemble des lois de probabilités infiniement divisibles.

Rappelons qu'une loi de probabilité $\nu$ sur $\mathbb{R}$ est dite *infiniement divisible* si, pour chaque entier $n \geqslant 1$, il existe des variables aléatoires indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ suivant la même loi, telles que $Y_1 + \cdots + Y_n$ suive la loi $\nu$. C'est une famille de lois de probabilité très intéressantes, qui contient beaucoup de lois de probabilités usuelles, comme par exemple les lois gausiennes, les lois de Poisson, les lois de Gamma etc. L'étude de ces lois de probabilité a une importance centrale dans la théorie de probabilité et le calcul stochastique. Les tâches de ce projet consistent de comprendre les propriétés fondamentales des lois infiniement divisibles, ainsi que la démonstration du théorème central limite général.

## 3. Prérequis

Le cours M1 théorie des probabilités.

## 4. Références bibliographiques

Petrov V., *Sums of independent random variables*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 82, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975, x+346.

| | |
|---|---|
| Université Joseph Fourier | 2014-2015 |
| Master 1 | Majeure Mathématiques |

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre

Théorie de Kubo et Ando des moyennes d'opérateurs positifs.

## 2. Résumé

Une matrice $n \times n$ est dite positive si toutes ses valeurs propres sont positives, ce qui revient à demander que $A$ soit auto-adjointe et que $\langle v, Av \rangle \geq 0$ pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$. Cette dernière définition caractérise aussi les applications linéaires positives (opérateurs positifs) sur un espace de Hilbert de dimension infinie. On obtient ainsi une relation d'ordre sur ces opérateurs en écrivant $A \leq B$ si $B - A$ est positif. Une fonction réelle $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dite *opérateur-monotone* si $A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$ pour tout couple $(A, B)$ d'opérateurs positifs. La condition d'opérateur-monotonicité est plus forte qu'elle n'y paraît : par exemple, $f(x) = x^2$ ne la satisfait pas. Le théorème de Löwner caractérise les fonctions opérateur-monotones en terme de mesures sur $\mathbb{R}_+$. Dans ce TER, on s'intéressera à la notion de moyenne d'opérateurs positifs introduite par Kubo et Ando, qui généralise la moyenne arithmétique $(A + B)/2$. Il s'agit de comprendre la jolie correspondance établie par ces auteurs entre les moyennes d'opérateurs et les fonctions opérateur-monotones.

## 3. Prérequis

Même si l'article de Kubo et Ando s'applique à des opérateurs positifs bornés sur un espace de Hilbert de dimension infinie (qui seront étudiés dans le cours d'analyse fonctionnelle du second semestre), on peut très bien le lire en supposant que ce sont des matrices finies. Le seul prérequis est donc d'avoir de bonnes connaissances en algèbre linéaire.

## 4. Références bibliographiques

— F. Kubo et T. Ando, *Means of Positive Linear operators*, Math. Ann. **246**, 205-224 (1980)
— R. Bhatia, *Matrix Analysis* (Springer, 1991)
— E.A. Carlen, *Trace inequalities and quantum entropy : An introductory course*, in : *Entropy and the quantum*, R. Sims and D. Ueltschi (eds.), 73-140, Contemp. Math. **529** (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010). Sur internet :
http ://www.mathphys.org/AZschool/material/AZ09-carlen.pdf

Université Joseph Fourier 2014-2015
Master 1 Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre : Loi infiniement divisible et théorème central limite

## 2. Résumé

Le but de ce projet est de comprendre le théorème central limite dans une très grande généralité. Soit $(X_{n,i})_{\substack{n\geqslant 1\\ 1\leqslant i\leqslant k_n}}$ une famille de variables aléatoires réelles, où $(k_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'entiers $\geqslant 1$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty.$$

On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la famille $(X_{n,i})_{1\leqslant i\leqslant k_n}$ est indépendante, et on désigne par $S_n$ la somme

$$\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}.$$

On cherche à comprendre le comportement asymptotique des lois de probabilités des $S_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Il s'avère que, sous une hypothèse très modérée comme la suite

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant k_n} \mathbb{P}(|X_{n,i}| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

l'ensemble de toutes les lois limites possibles de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ s'identifie à l'ensemble des lois de probabilités infiniement divisibles.

Rappelons qu'une loi de probabilité $\nu$ sur $\mathbb{R}$ est dite *infiniement divisible* si, pour chaque entier $n \geqslant 1$, il existe des variables aléatoires indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ suivant la même loi, telles que $Y_1 + \cdots + Y_n$ suive la loi $\nu$. C'est une famille de lois de probabilité très intéressantes, qui contient beaucoup de lois de probabilités usuelles, comme par exemple les lois gausiennes, les lois de Poisson, les lois de Gamma etc. L'étude de ces lois de probabilité a une importance centrale dans la théorie de probabilité et le calcul stochastique. Les tâches de ce projet consistent de comprendre les propriétés fondamentales des lois infiniement divisibles, ainsi que la démonstration du théorème central limite général.

## 3. Prérequis

Le cours M1 théorie des probabilités.

## 4. Références bibliographiques

Petrov V., *Sums of independent random variables*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 82, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975, x+346.

# 1 Titre

$C^*$-algèbres.

# 2 Description

Les $C^*$- algèbres sont une généralisation de la structure de certaines algèbres d'opérateurs autoadjoints sur des espaces de Hilbert. Un rôle particulier est joué par les CAR resp. CCR algèbres qui ont une importance cruciale en physique et décrivent des fermions rep. des bosons. Pendant ce stage nous allons étudier les propriétés fondamentales de ces algèbres.

# 3 Prérequis

Algèbre 1. Pour ce stage il est indispensable que l'étudiant(e) suive en même temps le cours d'analyse fonctionnelle.

# 4 Références

O. Bratelli, D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics 1, 2*, Springer (1997).

# 1 Titre

Le trou noir de Schwarzschild.

# 2 Description

L'espace-temps de Schwarzschild est une solution exacte des équations d'Einstein découverte par K. Schwarzschild en 1916. Il s'agit d'une variété lorentzienne qui décrit un trou noir. Bon nombre de prédictions de la relativité générale sont basées sur les propriétés de cette solution particulière. Le but de ce stage est de comprendre ces prédictions physiques à partir d'une étude des propriétés géométriques de l'espace-temps de Schwarzschild. Le stage se divise en deux parties :

1. Apprentissage des notions de base de la géométrie lorentzienne.
2. Etude détaillée de la métrique de Schwarzschild.

# 3 Prérequis

Bonne maîtrise du calcul différentiel. Pour ce stage il est indispensable que l'étudiant(e) suive en même temps le cours "Géométrie différentielle et dynamique".

# 4 Références

Robert M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press (1984).

## 1 Titre

Magnétisation spontanée

## 2 Description

Il s'agit de comprendre la preuve donnée par le physicien Rudolf Peierls en 1936 du phénomène de magnétisation spontanée du modèle d'Ising en dimension 2 à basse température. Avant d'aborder la preuve proprement dite, on commencera bien sûr par définir ces termes mathématiquement. On pourra ensuite s'intéresser au calcul exact du point de Curie et à la résolution du modèle proposée par Lars Onsager en 1942.

## 3 Prérequis

Cours de probabilités du premier semestre et une absence d'aversion pour les modèles mathématiques inspirés de la physique.

## 4 Références

Ross Kindermann, J. Laurie Snell. Markov Random Fields and their Applications. *J. Amer. Math. Soc.* 1, 1-22. Disponible sur le web à l'adresse :
`http://www.ams.org/online_bks/conm1`
Barry Cipra. An Introduction to the Ising Model. *Amer. Math. Monthly* 94, 937-959, 1987. Disponible sur le web à l'adresse :
`http://www.genetics.ucla.edu/labs/sabatti/Stat202c/ising.pdf`
Robert B. Griffiths, Peierls proof of spontaneous magnetization in a two-dimensional Ising ferromagnet. *Phys. Rev.* 136, A437-A439 (1964). Disponible sur le web à l'adresse :
`http://prola.aps.org/abstract/PR/v136/i2A/pA437_1`

Université Joseph Fourier | 2014-2015
Master 1 | Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre

Principe des grandes déviations

## 2. Résumé

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli ($X_n = 0$ ou 1 avec probabilité $p_0 = p_1 = 1/2$) indépendantes. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et

$$S_N = N^{-1} \sum_{n=1}^{N} X_n \ .$$

On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(S_N \in ]1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon[) \to 1$ quand $N \to \infty$ (loi des grands nombres). Un calcul simple montre de plus que si $z > 1/2$, alors

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln\left(\mathbb{P}(S_N \geq z)\right) = -I(z)$$

où $I(z)$ est la fonction convexe positive

$$I(z) = \begin{cases} z\ln(2z) + (1-z)\ln(2-2z) & \text{si } z \in [0,1] \\ \infty & \text{si } z \notin [0,1]. \end{cases}$$

Comme $I(z) > 0$ pour $z > 1/2$, ce résultat nous dit que l'évènement "$S_N$ est plus grand que $z$", où $z$ est choisi strictement plus grand que la valeur moyenne 1/2 de $S_N$, est exponentiellement rare quand $N \to \infty$. Dans le cas de variables aléatoires réelles $X_n$ indépendantes identiquement distribuées de loi quelconque, le théorème de Cramér permet d'obtenir un résultat analogue et donne une formule générale pour la fonction convexe $I(z)$ (entropie). Le but de ce TER est d'apprendre quelques techniques probabilistes permettant d'analyser ces "événements rares".

## 3. Prérequis

Cours de probabilités du premier semestre.

## 4. Références bibliographiques

— R. Durrett, *Probability : Theory and Examples, 2nd Ed.* (Wadsworth Publishing Company, USA, 1996), chapitre 1

— A. Dembo et O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques* (Jones and Bartlett Publishers, London, 1993)

— R.S. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1985), chapitres 1 et 2

| | |
|---|---|
| Université Joseph Fourier | 2014-2015 |
| Master 1 | Majeure Mathématiques |

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre

Représentations de carquois et thèorème de Gabriel

## 2. Résumé

Un carquois est un graphe orienté avec un nombre fini de sommets et de flèches. Une représentation sur un corps $k$ d'un carquois est la donnée d'un $k$-espace vectoriel pour chaque sommet et d'une application linéaire pour chaque flèche. On peut ensuite définir la notion de somme directe de deux représentations, ainsi que la notion l'isomorphisme de représentations. Une représentation est dite indécomposable si elle n'est pas isomorphe à la somme directe de deux sous-représentations non triviales.

L'objet de ce travail sera de comprendre les notions de bases de la théorie des représentations de carquois. Le but sera ensuite de démontrer le théorème de Gabriel, qui établit qu'un carquois n'admet qu'un nombre fini de représentations indécomposables si et seulement si son graphe sous-jacent est de type Dynkin.

## 3. Prérequis

Algèbre linéaire L3 et Cours d'Algèbre du premier semestre (notions d'algèbres et de modules).

## 4. Références bibliographiques

(1) Cours de Bill Crawley-Boevey (en anglais) sur les Representations de carquois, disponible à l'adresse url : http ://www1.maths.leeds.ac.uk/ pmtwc/quivlecs.pdf

(2) Bernstein, I. N. ; Gelfand, I. M. ; Ponomarev, V. A. (1973), Coxeter functors, and Gabriel's theorem, Russian mathematical surveys 28 (2) : 17–32, English translation.

(3) I. Reiten, Dynkin diagrams and the representation theory of algebras. Notices of the AMS (1997), n˚5.

Université Joseph Fourier — 2014-2015
Master 1 — Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre

Groupe fondamental et classification des surfaces compactes

## 2. Résumé

L'objet de ce travail sera l'étude de quelques notions de base de topologie algébrique, comme la notion de groupe fondamental, de triangulation, de caractéristique d'Euler. Cela permettra de procéder à la classification des surfaces compactes. Si le temps le permet, on abordera aussi la notion d'homologie singulière.

## 3. Prérequis

## 4. Références bibliographiques

William S. Massey, A basic course in Algebraic topology, Springer-Verlag.

Université Joseph Fourier 2014-2015
Master 1 Majeure Mathématiques

**Propositions de sujet de TER**

## 1. Titre : Intégrale de Daniell

## 2. Résumé

L'intégrale de Daniell est une approche fonctionnelle de la théorie d'intégration. Elle généralise naturellement l'intégrale de Riemann et permet de reconstruire la théorie d'intégration de Lebesgue sans faisant appel à la théorie des mesures. L'approche de Daniell a un caractéristique axiomatique. On commence par un espace vectoriel $S$ de fonctions définies sur un ensemble non-vide $\Omega$ et une forme linéaire $I$ sur $S$. Dans la pratique, $S$ est l'ensemble des fonctions "simples" dont l'intégrale peut être facilement définie. Par exemple, dans le cas où $\Omega$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on peut prendre $S$ comme l'espace des fonctions étagées. Pour que la théorie d'intégration à la Daniell soit bien établie, il faut imposer trois conditions comme la suite :

(1) pour toutes fonctions $f, g \in S$, on a $\min(f, g) \in S$,

(2) si $f$ et $g$ sont des fonctions dans $S$ telles que $f \leqslant g$, alors $I(f) \leqslant I(g)$,

(3) si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions dans $S$ qui converge simplement vers la fonction nulle, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I(f_n) = 0$.

Ces conditions permettent d'étendre l'opérateur $I$ sur l'ensemble des limites monotones des fonctions dans $S$. On désigne par $S^\uparrow$ l'ensemble des fonctions réelles sur $\Omega$ qui peuvent s'écrire comme la limite croissante d'une suite dans $S$. Il s'avère que l'opérateur $I$ s'étend par passage à la limite en une application de $S^\uparrow$ vers $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. De façon similaire, l'opérateur $I$ s'étend naturellement à l'ensemble $S^\downarrow$ des fonctions réelles sur $\Omega$ qui s'écrivent comme la limite d'une suite décroissante dans $S$. Daniell a montré que, l'ensemble $\widetilde{S}$ des fonctions $h : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{g\in S^\downarrow,\, g\leqslant h} I(g) = \inf_{f\in S^\uparrow,\, f\geqslant h} I(f) \in \mathbb{R}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ qui est stable par l'opérateur $(f, g) \mapsto \min(f, g)$. De plus, la forme linéaire $I$ s'étend de façon unique en une forme linéaire sur $\widetilde{S}$ qui vérifie les conditions (2) et (3) comme ci-dessus. Cette construction est très similaire à l'intégrale de Riemann : il suffit de remplacer dans la formule précédente les ensembles $S^\uparrow$ et $S^\downarrow$ par $S$ pour retrouver la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann. En même temps, dans le cas où $S$ est l'espace des fonctions étagées et $I$ est l'opérateur d'inégration usuel, l'ensemble $\widetilde{S}$ contient toutes les fonctions intégrables au sens de Lebesgue, et la forme linéaire étendue coïncide avec l'intégrale de Lebesgue.

Le but de ce projet est donc de comprendre cette théorie d'intégration et ses liens avec d'autres théories d'intégration apprises dans les cours.

## 3. Prérequis

Cours d'intégration de L3.

## 4. Références bibliographiques

Daniell P.J., A general form of integral, *Annals of Mathematics, Second series*, **19**(1918), no.4, 279-294.

Richard Maurice Ingle, *The Daniell approach to integration and measure*, mémoire de master, Georgia Institute of Technology, 1969. `https://smartech.gatech.edu/bitstream/handle/1853/28658/ingle_richard_m_196905_ms_236285.pdf`

# 1 Titre

Moyennisation d'équations différentielles.

# 2 Description

Un problème de Kepler consistait à comprendre le mouvement de deux corps célestes (tels que la Terre et la Lune) soumis à l'interaction gravitationnelle.

En assimilant chaque corps à une masse ponctuelle, et en considérant que l'interaction est donnée par le potentiel $V(r) = -G/r$ (où $r$ est la distance entre les corps, et $G$ est la constante gravitationnelle), Clairaut (au XVIIIème siècle) a complètement résolu ce problème en donnant une description explicite du mouvement relatif des deux corps.

Si on tient compte de perturbations dans ce modèle (influence d'autres astres, forme non sphérique de la Terre...), on n'a plus de solution explicite aux équations du mouvement (qui forment un système d'équations différentielles ordinaires), mais les techniques de moyennisation permettent de comprendre l'influence des perturbations en ajoutant des termes correctifs à la solution non perturbée, et en évaluant le temps pendant lequel cette correction est valide. On démontrera de tels résultats de moyennisations dans un cadre abstrait, et on pourra les appliquer au système Terre-Lune.

# 3 Prérequis

Équations différentielles ordinaires : théorème de Cauchy-Lipshitz.

# 4 Références

J.A. Sanders et F. Verhulst. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems.* Applied Mathematical Sciences, volume 59. Springer-Verlag, 1985.

**Solutions entropiques de lois de conservations**

Pour des équations aux dérivées partielles provenant de conservations physiques, on verra la notion de solutions faibles (i.e. peu régulières, par exemple discontinues) et leur existence, ainsi que l'utilité, pour avoir unicité de la solution, de donner des conditions "d'entropie".

**Prérequis :** le cours d'intégration du L3.

**Références :**

D. Serre, *Systèmes de lois de conservation I. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc* (Fondations, Diderot éd., 1996).
E. Godlewski et P.-A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws* (Mathématiques et applications, Ellipses, 1991).