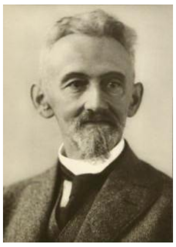


Felix Hausdorff
(allemand, 1868-1942)

Travail Encadré de Recherche

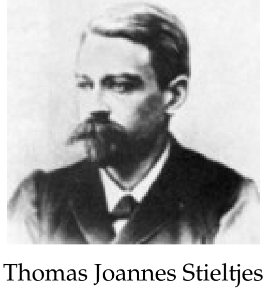
PROBLÈME DES MOMENTS

Mathieu Delamare (M1)

Responsable : M. Christophe Leuridan

mai 2011

Hans Ludwig Hamburger
(allemand, 1889-1956)



Thomas Joannes Stieltjes
(néerlandais, 1856-1894)

Table des matières

Introduction

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit $(c_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $c_0 = 1$.
Résoudre le problème des moments sur I consiste à trouver des conditions d'existence et d'unicité d'une mesure borélienne positive μ portée par I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \, \mathrm{d}\mu(x)$$

La normalisation $c_0 = 1$ impose alors à μ d'être une mesure de probabilité sur I. Ainsi, cela revient à chercher des conditions d'existence, et d'unicité en loi, d'une variable aléatoire presque sûrement à valeurs dans I, telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $c_n = \mathbb{E}(Z^n)$.

Dans la littérature, on rencontre principalement trois cas dans lesquels ce problème est résolu :
- le cas où $I = [0, 1]$: problème des moments de *Hausdorff*,
- le cas où $I = \mathbb{R}$: problème des moments de *Hamburger*,
- le cas où $I = \mathbb{R}^+$: problème des moments de *Stieltjes*.

L'objectif de ce TER est de donner un critère d'existence et d'unicité pour le problème de Hausdorff, et d'établir des conditions suffisantes d'unicité pour les problèmes de Hamburger et de Stieltjes. La démarche proposée pour le problème de Hausdorff est celle employée par William Feller (1906-1970) dans [1]. Concernant les problèmes de Hamburger et de Stieltjes, on citera sans démonstration les résultats d'existence. Le principal critère d'unicité sera obtenu via le théorème de *Denjoy-Carleman* sur les classes quasi-analytiques.

Notations et définitions préalables

Notations

Commençons par des notations et conventions qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.

On se donne pour tout le mémoire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

L'expression « variable aléatoire » désigne une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Si U est une variable aléatoire, on note ϕ_U sa fonction caractéristique et f_U sa densité si elle existe.

On confond les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec leurs fonctions polynomiales associées.

Définitions

Introduisons maintenant quelques notions commodes qui serviront à éviter un recours systématique à des variables aléatoires en se contentant de travailler sur leurs lois. Cela permettra parfois d'alléger la présentation de certains résultats, ou de mieux formuler certaines démonstrations. Il arrivera toutefois que le langage des variables soit plus adapté. C'est pourquoi le lien entre ces deux points de vue est explicité à la fin du paragraphe qui suit.

Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Etant donnée une fonction $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu)$, on notera $\langle \mu, f \rangle$ l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure μ.

(ii) On dit que μ *admet un moment d'ordre* k lorsque $\int_{\mathbb{R}} |x|^k \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty$.
Dans ce cas, on appelle *moment d'ordre* k de μ la quantité :

$$m_k(\mu) := \int_{\mathbb{R}} x^k \, \mathrm{d}\mu(x) = \langle \mu, X^k \rangle.$$

(iii) On dit que μ est *portée par* I lorsque $\mu(\mathbb{R} \setminus I) = 0$.

Remarquons que si μ est une probabilité portée par I, et Z une variable aléatoire de loi μ :
- Z est presque sûrement à valeurs dans I ;
- μ admet un moment d'ordre k si et seulement si $\mathbb{E}(|Z|^k) < \infty$ et on a alors $m_k(\mu) = \mathbb{E}(Z^k)$;
- pour $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu)$, $\langle \mu, f \rangle = \mathbb{E}(f(Z))$.

1 Premiers résultats

Nous allons, dans cette section, énoncer des résultats préliminaires sur le problème des moments.

1.1 De la non-trivialité du problème des moments

Il est tout d'abord nécessaire de justifier que la loi d'une variable aléatoire n'est pas toujours complètement caractérisée par la suite de ses moments. A cet effet, établissons un petit lemme de calcul, qui généralise légèrement celui de la fonction caractéristique d'une gaussienne centrée réduite.

Lemme 1 (*Transformée de Fourier de* $x \mapsto \exp(-x^2/2)$)

Quel que soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{izx} \, \mathrm{d}x = e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Démonstration : • Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{izx} \, \mathrm{d}x.$$

Montrons que φ est entière. Soit $r > 0$.
Nous allons établir l'holomorphie de φ sur $B_r := \{z \in \mathbb{C} \ / \ |\mathrm{Im}\, z| < r\}$.
On pose pour tout $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $F(z, x) := e^{-\frac{x^2}{2}} e^{izx}$.

⊛ Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(\cdot, x)$ est une fonction holomorphe sur B_r.

⊛ Soit $z \in B_r$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|F(z, x)| = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\mathrm{Re}(izx)} = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-x \, \mathrm{Im}\, z} \leqslant e^{-\frac{x^2}{2}} e^{rx} = e^{\frac{r^2}{2}} e^{-\frac{(x-r)^2}{2}}.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-r)^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, \mathrm{d}y < \infty.$$

Le théorème d'holomorphie des intégrales dépendant d'un paramètre montre que φ est holomorphe sur B_r. Comme r était arbitraire, φ est entière.

• Comme $z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}$ est elle aussi entière, on peut se contenter d'établir l'identité souhaitée pour z imaginaire pur, par prolongement analytique.

Pour $z = it$, $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-tx} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+t)^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}x = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, \mathrm{d}y = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{(it)^2}{2}} = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Le résultat s'en déduit aussitôt. ■

A présent, nous allons exhiber un contre-exemple, qui justifiera l'existence de variables aléatoires dont la loi n'est pas complètement déterminée par la seule donnée des moments de tous ordres.

Fait 1

Soit $Y := e^U$, où U est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \sin(\pi x)\right)$. Alors :

(i) f est une densité de probabilité ;

(ii) si V désigne une variable aléatoire de densité f, la variable aléatoire $Z := e^V$ a la même suite des moments que Y, mais n'a pas la même loi que Y.

Démonstration : **(i)** f est clairement positive, et puisque $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(\pi x)$ est impaire intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \sin(\pi x)\right) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

(ii) Soit V désigne une variable aléatoire de densité f et $Z := e^V$. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left(Z^k\right) = \mathbb{E}\left(e^{kV}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{kx} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \sin(\pi x)\right) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{kx} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} e^{kx} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x \right).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
2i \int_{\mathbb{R}} e^{kx} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} e^{kx} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{i\pi x} \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} e^{kx} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\pi x} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{i(\pi - ik)x} - \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{i(-\pi - ik)x} \\
&= \sqrt{2\pi} \left(e^{-\frac{(\pi - ik)^2}{2}} - e^{-\frac{(\pi + ik)^2}{2}} \right) \quad \text{par le lemme précédent} \\
&= \sqrt{2\pi} \left(e^{\frac{-\pi^2 + k^2}{2}} e^{i\pi k} - e^{\frac{-\pi^2 + k^2}{2}} e^{-i\pi k} \right) \\
&= 2i\sqrt{2\pi} e^{\frac{-\pi^2 + k^2}{2}} \sin(\pi k) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}\left(Z^k\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{kx} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \mathbb{E}\left(e^{kU}\right) = \mathbb{E}\left(Y^k\right).$$

De plus, puisque $x \mapsto \sin(\pi x)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, 1]$,

$$\mathbb{P}(Z \in [1, e]) - \mathbb{P}(Y \in [1, e]) = \mathbb{P}(V \in [0, 1]) - \mathbb{P}(U \in [0, 1]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x > 0.$$

Donc, Y et Z n'ont pas même loi. ■

Cela étant dit, une condition simple mais plutôt restrictive nous assure qu'une variable aléatoire est complètement déterminée par ses moments :

1.2 Moments et variables aléatoires bornées

La bornitude est en effet un critère suffisant, et il est relativement simple de le démontrer.

Proposition 1

Deux variables aléatoires bornées qui ont les mêmes moments ont la même loi.

Démonstration : Soient Y et Z deux variables aléatoires bornées. Il est clair que Y et Z admettent alors des moments de tous ordres. On choisit $A \geqslant 0$ tel que $|Y| \leqslant A$ et $|Z| \leqslant A$.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y^n) = \mathbb{E}(Z^n)$.
Alors, par linéarité, quel que soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\mathbb{E}(P(Y)) = \mathbb{E}(P(Z))$.

Fixons $t \in \mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$.
L'application $x \mapsto e^{itx}$ est continue sur $[-A, A]$, donc par le théorème d'approximation de Weierstrass (voir la proposition 3 dans la suite du mémoire pour une démonstration), il existe $P_\varepsilon \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall x \in [-A, A], \quad \left| e^{itx} - P_\varepsilon(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Etant donné que Y et Z sont à valeurs dans $[-A, A]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(e^{itY}\right)-\mathbb{E}\left(e^{itZ}\right)\right| &= \left|\mathbb{E}\left(e^{itY}-P_\varepsilon(Y)\right)+\mathbb{E}(P_\varepsilon(Y))-\mathbb{E}(P_\varepsilon(Z))-\mathbb{E}\left(e^{itZ}-P_\varepsilon(Z)\right)\right| \\ &= \left|\mathbb{E}\left(e^{itY}-P_\varepsilon(Y)\right)-\mathbb{E}\left(e^{itZ}-P_\varepsilon(Z)\right)\right| \\ &\leqslant \mathbb{E}\left|e^{itY}-P_\varepsilon(Y)\right|+\mathbb{E}\left|e^{itZ}-P_\varepsilon(Z)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on en déduit que $\mathbb{E}(e^{itY}) = \mathbb{E}(e^{itZ})$, et ce, quel que soit $t \in \mathbb{R}$.
Donc Y et Z ont même fonction caractéristique, donc même loi. ■

Intéressons-nous à présent au problème de Hausdorff, pour lequel nous allons établir une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de la solution.

2 Problème des moments de Hausdorff

La démarche proposée par W. Feller utilise abondamment des propriétés algébriques liées à un *opérateur aux différences finies*. Nous allons donc commencer par établir quelques notations et lemmes de calcul, apparemment sans rapport avec le problème de Hausdorff, mais qui s'avéreront tant utiles qu'agréables lorsque l'on voudra énoncer et établir les résultats qui le résoudront.

2.1 Notations de calcul des différences finies

Etant donnée une suite $a = (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose :

$$\Delta^0(a) := a \qquad \Delta(a) := (a_{n+1} - a_n)_n \qquad \text{puis pour tout } k \in \mathbb{N},\ \Delta^{k+1}(a) := \Delta\left(\Delta^k(a)\right).$$

Afin d'alléger l'écriture, on notera, pour $k, n \in \mathbb{N}$, $\Delta^k a_n$ le terme de rang n de la suite $\Delta^k(a)$.

Lemme 2

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \Delta^r a_i = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} a_{i+j}.$$

Démonstration : Soit $r \in \mathbb{N}$. On définit l'opérateur de translation T sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $T((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$. On obtient alors la relation $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. Comme T et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ commutent dans l'anneau des endomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on peut leur appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\Delta^r = (T - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} T^j \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^{r-j} = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} T^j.$$

Il est clair par récurrence immédiate que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^k((a_n)_n) = (a_{n+k})_n$. On applique alors la relation ci-dessus à la suite $(a_n)_n$, ce qui donne, avec les abus de notations adoptés, l'identité souhaitée. ■

Lemme 3 (*Formule de réciprocité et formule d'inversion*)

Soient $(a_n)_n, (c_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{N}$:

(i) $\forall i \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{r=0}^{s} c_r \binom{s}{r} \Delta^r a_i = \sum_{j=0}^{s} a_{i+j} \binom{s}{j} (-1)^{s-j} \Delta^{s-j} c_j$;

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}, c_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} (-1)^{s-j} \Delta^{s-j} c_{k+j}$.

Démonstration : Soit $s \in \mathbb{N}$.

(i) Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{s} c_r \binom{s}{r} \Delta^r a_i &= \sum_{r=0}^{s} c_r \binom{s}{r} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} a_{i+j} \qquad \text{par le lemme 2}\\ &= \sum_{j=0}^{s} a_{i+j} \left(\sum_{r=j}^{s} \binom{s}{r}\binom{r}{j} (-1)^{r-j} c_r \right).\end{aligned}$$

Or, pour $0 \leqslant r \leqslant j \leqslant s$:

$$\binom{s}{r}\binom{r}{j} = \frac{s!}{(s-r)!j!(r-j)!} = \frac{s!(s-j)!}{j!(s-j)!(s-r)!(r-j)!} = \binom{s}{j}\binom{s-j}{r-j}.$$

Donc, pour $j \in [\![0, s]\!]$,

$$\begin{aligned}\sum_{r=j}^{s} \binom{s}{r}\binom{r}{j} (-1)^{r-j} c_r &= \sum_{k=0}^{s-j} \binom{s}{j}\binom{s-j}{k} (-1)^k c_{j+k} \qquad \text{changement d'indice } k = r - j\\ &= (-1)^{s-j} \binom{s}{j} \sum_{k=0}^{s-j} \binom{s-j}{k} (-1)^{s-j-k} c_{j+k}\\ &= (-1)^{s-j} \binom{s}{j} \Delta^{s-j} c_j \qquad \text{(lemme 2)} .\end{aligned}$$

D'où l'égalité souhaitée.

(ii) Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, d_n := c_{n+k}$. Il s'agit d'appliquer (i) pour (a_n) valant constamment 1 et en remplaçant (c_n) par (d_n). On a alors, par le lemme 2 et la formule du binôme de Newton, $\forall i \in \mathbb{N}, \Delta^0 a_i = 1$ et $\Delta^k a_i = 0$ dès que $k \geqslant 1$.

La formule « de réciprocité » (i) permet d'obtenir que $d_0 = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} (-1)^{s-j} \Delta^{s-j} d_j$.

Le résultat vient aussitôt en utilisant la définition de (d_n). ■

Exemple. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $r \in \mathbb{N}$, $c_r := \theta^r$.
Alors par le lemme 2 et la formule du binôme, pour tous $k, r \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^r c_k = (-1)^r \theta^k (1-\theta)^r. \tag{1}$$

La formule de réciprocité donne alors, pour $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $s, i \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{r=0}^{s} \theta^r \binom{s}{r} \Delta^r a_i = \sum_{j=0}^{s} a_{i+j} \binom{s}{j} \theta^j (1-\theta)^{s-j}.$$

2.2 Généralisation aux fonctions

Etant donnés $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on pose $\underset{h}{\Delta} u(x) := \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$ ($\underset{h}{\Delta} u(x)$ est le taux d'accroissement de u entre x et $x + h$).
On remarque que, posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k(u, x, h) := u(x + kh)$, on a la relation :

$$\underset{h}{\Delta} u(x) = \frac{1}{h} \Delta a_0(u, x, h).$$

On définit alors, pour $r \in \mathbb{N}$,

$$\underset{h}{\Delta^r} u(x) := \frac{1}{h^r} \Delta^r a_0(u, x, h) \underset{\text{lemme 2}}{=} \frac{1}{h^r} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} u(x + jh). \tag{2}$$

A présent cherchons à établir un petit lemme de calcul, qui servira à démontrer le fait (intuitif) que, sous conditions (en fait par la seule dérivabilité r fois en x), $\underset{h}{\Delta^r} u(x) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} u^{(r)}(x)$.

Lemme 4

(i) $\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_{r-1}[X], \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} P(j) = 0\,;$

(ii) $\forall r \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} j^r = r!.$

Démonstration : On définit la suite $(P_s)_{s\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$P_s := X(X-1)\cdots(X-s+1) = \prod_{i=0}^{s-1}(X-i) \text{ si } s \geqslant 1 \text{ et } P_0 := X^0.$$

(i) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors, $(P_s)_{0\leqslant s\leqslant r-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ (polynômes « de degrés échelonnés »).
Montrons que, pour tout $s \in [\![0, r-1]\!]$, $\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j}(-1)^{r-j} P_s(j) = 0$.
Soit $s \in [\![0, r-1]\!]$. Remarquons que, par (2),

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} P_s(j) = \underset{1}{\Delta}^r P_s(0).$$

Par ailleurs, si $s \geqslant 1$:

$$\underset{1}{\Delta} P_s(X) = P_s(X+1) - P_s(X) = (X+1)\prod_{i=0}^{s-2}(X-i) - (X-s+1)\prod_{i=0}^{s-2}(X-i) = s\prod_{i=0}^{s-2}(X-i) = sP_{s-1}(X).$$

Et, si $s = 0$, on a clairement $\underset{1}{\Delta}^r P_s(X) = 0$. Donc, par récurrence immédiate, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\underset{1}{\Delta}^k P_s(X) = \begin{cases} s(s-1)\cdots(s-k+1)P_{s-k}(X) & \text{si } k \leqslant s \\ 0 & \text{si } k > s. \end{cases}$$

Ainsi, comme $s < r$, $\underset{1}{\Delta}^r P_s(0) = 0$ et on a le résultat.

(ii) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme $X^r - P_r$ appartient à $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ et on peut lui appliquer le point (i) pour obtenir :

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} (j^r - P_r(j)) = 0,$$

soit encore :

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} j^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} P_r(j).$$

Mais $P_r(j)$ vaut 0 pour $0 \leqslant j < r$. D'où :

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} j^r = P_r(r) = r!.$$

■

Proposition 2 (*lien entre différence d'ordre r et dérivée r$^{\text{ème}}$*)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x \in I$ et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application r fois dérivable en x. Alors :

$$\underset{h}{\Delta}^r u(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} u^{(r)}(x).$$

Démonstration : Par le théorème de Taylor-Young, on a, pour tout $j \in [\![0, r]\!]$:

$$u(x+jh) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{r} \frac{u^{(k)}(x)}{k!}(jh)^k + o(h^r).$$

Ainsi, par définition de $\underset{h}{\Delta}^r u(x)$, il vient :

$$\begin{aligned}\underset{h}{\Delta}^r u(x) &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h^r}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}\left(\sum_{k=0}^{r}\frac{u^{(k)}(x)}{k!}(jh)^k\right)+o(1)\\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h^r}\sum_{k=0}^{r}\frac{u^{(k)}(x)}{k!}h^k\left(\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}j^k\right)+o(1).\end{aligned}$$

Or, pour tout $k\in[\![0,r]\!]$, $\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}j^k = r!\delta_{kr}$ par le lemme 4. Ainsi :

$$\underset{h}{\Delta}^r u(x) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h^r}h^r\frac{u^{(r)}(x)}{r!}r!+o(1) \underset{h\to 0}{=} u^{(r)}(x)+o(1).$$

■

2.3 Approximation de Bernstein

Etant donnés $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on définit l'élément([1]) de $\mathbb{R}[X]$ suivant :

$$B_nf := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}. \tag{3}$$

On peut alors énoncer le célèbre résultat suivant :

Proposition 3 (*Théorème d'approximation de Bernstein*)

Soit $f\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Alors $(B_nf)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Démonstration : On choisit, pour $\theta\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $Y_{n,\theta}$ une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et θ. On pose $Z_{n,\theta} := \frac{Y_{n,\theta}}{n}$. La variable aléatoire $Z_{n,\theta}$ est à valeurs dans $[0,1]$, et :

$$\mathbb{E}\left(f(Z_{n,\theta})\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k} = B_nf(\theta).$$

Donc, quels que soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in[0,1]$,

$$|B_nf(\theta)-f(\theta)| = |\mathbb{E}\left(f(Z_{n,\theta})\right)-f(\theta)|.$$

Soit $\varepsilon>0$. Par uniforme continuité de f sur le compact $[0,1]$, il existe $\delta>0$ tel que :

$$\forall x\in[0,1],\quad \forall\theta\in[0,1],\quad |x-\theta|\leqslant\delta \Longrightarrow |f(x)-f(\theta)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

On écrit alors, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}|B_nf(\theta)-f(\theta)| &\leqslant \int_{\{|Z_{n,\theta}-\theta|\leqslant\delta\}}|f(Z_{n,\theta})-f(\theta)|\,\mathrm{d}\mathbb{P}+\int_{\{|Z_{n,\theta}-\theta|>\delta\}}|f(Z_{n,\theta})-f(\theta)|\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{P}(|Z_{n,\theta}-\theta|\leqslant\delta)+2\|f\|_\infty\mathbb{P}(|Z_{n,\theta}-\theta|>\delta)\\ &= \frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|_\infty\mathbb{P}(|Z_{n,\theta}-\mathbb{E}(Z_{n,\theta})|>\delta) \qquad \text{en notant que } \mathbb{E}(Z_{n,\theta})=\theta\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|_\infty\frac{\mathrm{Var}(Z_{n,\theta})}{\delta^2} \qquad \text{par l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev}\\ &= \frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|_\infty\frac{\theta(1-\theta)}{n\delta^2}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2\|f\|_\infty}{n\delta^2}.\end{aligned}$$

1. parfois appelé polynôme de Bernstein d'ordre n associé à f

On choisit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{2\|f\|_\infty}{n\delta^2} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Alors, il vient :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \forall \theta \in [0,1], \quad |B_n f(\theta) - f(\theta)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Remarque 1

Une conséquence immédiate de cette proposition est le théorème d'approximation de Weierstrass qui affirme que toute fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. On a même ici une formule explicite pour les polynômes approchants.

2.4 Suites complètement monotones

On est amené, pour résoudre le problème des moments de Hausdorff, à introduire une certaine classe de suites qualifiées de *complètement monotones*.

Définition 1 (*Suites complètement monotones*)

Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est *complètement monotone* lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \mathbb{N}, \quad (-1)^r \Delta^r c_k \geqslant 0.$$

Exemple. Si $\theta \in [0,1]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}, c_k = \theta^k$, alors par l'exemple (1), on a

$$\forall k, r \in \mathbb{N}, \quad (-1)^r \Delta^r c_k = \theta^k (1-\theta)^r \geqslant 0.$$

Il apparaît que ce critère de classification des suites semble intéressant pour notre problème. En effet, d'une part, la suite des moments d'une variable aléatoire est toujours complètement monotone, et d'autre part, il y a un moyen de reconstituer en un sens à préciser, par les propriétés de monotonie complète, une variable aléatoire donnée à partir de la seule suite de ses moments. C'est ce qu'exprime la proposition suivante.

Proposition 4

Soit μ une probabilité portée par $[0,1]$. Alors :

(i) $(m_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

(ii) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Delta^{n-j} m_j(\mu) \delta_{\frac{j}{n}}$.

(μ_n) est une suite de probabilités portées par $[0,1]$ ne dépendant que de la suite $(m_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\langle \mu_n, u \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \mu, u \rangle$ pour toute $u \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Démonstration : Pour simplifier l'écriture, on note Z une variable aléatoire de loi μ.

(i) Soient r et k dans $\mathbb{N}$. Par le lemme 2, on a :

$$(-1)^r \Delta^r m_k(\mu) = (-1)^r \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \mathbb{E}(Z^{k+j}) = (-1)^r \,\mathbb{E}\left(Z^k \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} Z^j \right) = \mathbb{E}(Z^k (1-Z)^r).$$

Comme Z est presque sûrement à valeurs dans $[0,1]$, $\mathbb{E}(Z^k(1-Z)^r) \geqslant 0$, et on obtient le résultat.

(ii) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
Par la formule d'inversion (lemme 3), on a :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Delta^{n-j} m_j(\mu) = m_0(\mu) = 1.$$

Donc μ_n est bien une probabilité ; elle est clairement portée par $[0,1]$. En outre :

$$\begin{aligned}
\langle \mu, B_n u\rangle &= \mathbb{E}(B_n u(Z)) \\
&= \sum_{j=0}^{n} u\left(\frac{j}{n}\right)\binom{n}{j}\mathbb{E}(Z^j(1-Z)^{n-j}) \qquad \text{par (3) : définition de } B_n u \\
&= \sum_{j=0}^{n} u\left(\frac{j}{n}\right)\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\Delta^{n-j}m_j(\mu) \qquad \text{par le même calcul qu'au (i)} \\
&= \langle \mu_n, u\rangle.
\end{aligned}$$

De plus, comme $B_n u \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ uniformément sur $[0,1]$ par la proposition 3, alors

$$\langle \mu, B_n u\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \mu, u\rangle.$$

D'où le résultat. ■

Remarque 2

Le point **(ii)** signifie que l'on peut réaliser une variable aléatoire Z de loi μ comme **limite en loi** d'une suite de variables aléatoires construites uniquement à partir de la suite de ses moments.

Bien sûr, il ne s'agit pas là de la solution au problème de Hausdorff, car aucune variable aléatoire ne nous est donnée à l'avance : il faudra en construire une directement à partir d'une suite possédant de bonnes propriétés (donc au moins complètement monotone). Toutefois, on déduit immédiatement de cette proposition le résultat d'**unicité en cas d'existence** de la solution au problème de Hausdorff. Remarquons que ce résultat peut aussi être obtenu de manière immédiate par la proposition 1, en invoquant le fait que toute variable aléatoire solution au problème de Hausdorff est bornée.

Corollaire 1

Soient μ et ν deux probabilités portées par $[0,1]$.
Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_k(\mu) = m_k(\nu)$, alors $\mu = \nu$.

Démonstration : Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_k(\mu) = m_k(\nu)$. Soit Y (resp. Z) une variable aléatoire de loi μ (resp. ν). On vient de voir que Y et Z sont chacune limite en loi d'une suite de variables aléatoires construites exclusivement à partir de la suite de leurs moments respectifs. Les moments de Y et Z étant les mêmes, on en déduit que Y et Z sont limites en loi d'une même suite de variables aléatoires (T_n). ϕ_Y et ϕ_Z sont donc toutes deux limites simples de ϕ_{T_n}, d'où $\phi_Y = \phi_Z$. Ainsi Y et Z ont même loi, c'est-à-dire $\mu = \nu$. ■

Il s'agit maintenant de parvenir, à partir d'une suite complètement monotone quelconque $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (pas nécessairement celle des moments d'une probabilité donnée à l'avance) à reconstituer une variable aléatoire dont la suite des moments coïncidera avec $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nous allons essayer d'adapter la preuve de la proposition précédente, tout d'abord en se restreignant au cas de $u = X^k$ (ce qui revient par linéarité à u polynomiale). Puis, une extension partielle par densité à $u \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ quelconque est proposée.

Lemme 5

Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle complètement monotone vérifiant $c_0 = 1$. On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![0,n]\!]$, $p_j^{(n)} := \binom{n}{j}(-1)^{n-j}\Delta^{n-j}c_j$, et $\mu_n := \sum_{j=0}^{n} p_j^{(n)}\delta_{\frac{j}{n}}$. Alors :

- **(i)** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, μ_n est une probabilité portée par $[0,1]$;
- **(ii)** pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_k(\mu_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c_k$;
- **(iii)** pour toute $u \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, la suite $(\langle \mu_n, u\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : **(i)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par monotonie complète de (c_k) et par la formule d'inversion (lemme 3), les $p_j^{(n)}$, $j \in [\![0, n]\!]$, sont des réels positifs de somme $c_0 = 1$.

(ii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $u := X^k$. Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, notant $h := \frac{1}{n}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\langle \mu_n, u \rangle &= \sum_{j=0}^{n} u(jh) p_j^{(n)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j(u, 0, h) \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Delta^{n-j} c_j \\
&= \sum_{r=0}^{n} c_r \binom{n}{r} \underset{h}{\Delta^r} a_0(u, 0, h) \qquad \text{par la formule de réciprocité (lemme 3)} \\
&= \sum_{r=0}^{n} c_r \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} \underset{h}{\Delta^r} u(0) \qquad \text{par la relation (2) .}
\end{aligned}$$

Montrons que pour $r > k$, $\underset{h}{\Delta^r} u(0) = 0$. Si $r > k$, on a, par (2) :

$$\underset{h}{\Delta^r} u(0) = n^r \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} u\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} u_n(j) \qquad \text{où } u_n := \frac{X^k}{n} \in \mathbb{R}_k[X] \subseteq \mathbb{R}_{r-1}[X].$$

Par le point (i) du lemme 4, le résultat s'ensuit. Ainsi :

$$\forall n \geqslant k, \sum_{r=0}^{n} c_r \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} \underset{h}{\Delta^r} u(0) = \sum_{r=0}^{k} c_r \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} \underset{h}{\Delta^r} u(0).$$

Or, pour tout r dans $[\![0, k]\!]$,

$$\binom{n}{r} \frac{1}{n^r} = \frac{1}{r!} \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{r!}$$

et par la proposition 2,

$$\underset{h}{\Delta^r} u(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{(r)}(0) = r! \delta_{kr}.$$

Par somme finie, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mu_n, u \rangle = \sum_{r=0}^{k} c_r \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} \underset{h}{\Delta^r} u(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{r=0}^{k} c_r \delta_{kr} = c_k.$$

(iii) Soient $u \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
Par le théorème de Bernstein (proposition 3), il existe $P_\varepsilon \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|u - P_\varepsilon\|_{[0,1]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|\langle \mu_n, u - P_\varepsilon \rangle| \leqslant \int_{[0,1]} |u(x) - P_\varepsilon(x)| \, \mathrm{d}\mu_n(x) \underset{\mu_n([0,1])=1}{\leqslant} \|u - P_\varepsilon\|_{[0,1]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par ailleurs, la suite $(\langle \mu_n, P_\varepsilon \rangle)_n$ étant convergente via le point (ii) étendu par linéarité,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p, q \geqslant n_0 \quad |\langle \mu_p, P_\varepsilon \rangle - \langle \mu_q, P_\varepsilon \rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors, pour tous $p, q \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}
|\langle \mu_p, u \rangle - \langle \mu_q, u \rangle| &= |\langle \mu_p, u - P_\varepsilon \rangle + \langle \mu_p, P_\varepsilon \rangle - \langle \mu_q, P_\varepsilon \rangle - \langle \mu_q, u - P_\varepsilon \rangle| \\
&\leqslant |\langle \mu_p, u - P_\varepsilon \rangle| + |\langle \mu_q, u - P_\varepsilon \rangle| + |\langle \mu_p, P_\varepsilon \rangle - \langle \mu_q, P_\varepsilon \rangle| \\
&\leqslant 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

2.5 Théorème de Hausdorff

En fait, il apparaît, comme le laissaient à penser les résultats que l'on vient d'obtenir, que le critère de monotonie complète est le bon pour caractériser les suites $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir desquelles on peut reconstituer une loi de probabilité portée par $[0,1]$ dont la suite des moments coïncide avec $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ce joli résultat est dû à Felix Hausdorff.

Théorème 1 (*Hausdorff*)

> Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle complètement monotone telle que $c_0 = 1$.
> Alors il existe une unique probabilité μ portée par $[0,1]$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = m_k(\mu)$.

Nous allons proposer **deux démonstrations différentes** pour ce théorème : la première, rapide, court-circuite les arguments en invoquant un théorème puissant de théorie de la mesure. Elle a l'avantage d'être facile à lire, mais masque la profondeur du résultat. La seconde, moins digeste, mais plus réaliste, propose une construction « manuelle » de μ en passant par la fonction de répartition associée.

2.5.1 Commencement de la démonstration

Donnons dès maintenant les premières étapes du raisonnement, qui sont communes aux deux variantes proposées ; nous nous arrêterons au moment où les versions commencent à diverger.

Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle complètement monotone telle que $c_0 = 1$. Remarquons tout de suite que l'unicité en cas d'existence est déjà établie (conséquence immédiate du corollaire 1). Nous allons donc essayer de construire une probabilité qui répond au problème.
On reprend les notations du lemme 5 : on pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![0,n]\!]$, $p_j^{(n)} := \binom{n}{j}(-1)^{n-j}\Delta^{n-j}c_j$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n := \sum_{j=0}^{n} p_j^{(n)}\delta_{\frac{j}{n}}$ est une probabilité portée par $[0,1]$.
Etant donnée $u \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, on pose, en vertu du point (iii) du lemme 5 :

$$M(u) := \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n, u\rangle.$$

Les propriétés de linéarité et de positivité de l'intégrale ainsi qu'un passage à la limite permettent d'obtenir immédiatement la propriété suivante :

$$M \text{ est une forme linéaire positive sur } \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}). \qquad (\clubsuit)$$

2.5.2 Première version de la démonstration

La propriété $(\clubsuit)$ permet d'invoquer le théorème de représentation de Riesz (cf. [2]), qui donne aussitôt l'existence d'une mesure μ sur $[0,1]$, positive finie sur les compacts, telle que :

$$\forall u \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), \quad M(u) = \int_{[0,1]} u \,\mathrm{d}\mu.$$

En particulier pour $k \in \mathbb{N}$ et $u = X^k$, on a, par le lemme 5,

$$M(u) = \lim_{n\to\infty} m_k(\mu_n) = c_k.$$

Or

$$\int_{[0,1]} u \,\mathrm{d}\mu = m_k(\mu).$$

Donc $c_k = m_k(\mu)$, d'où le résultat.

2.5.3 Deuxième version de la démonstration

Nous allons maintenant établir quelques résultats préliminaires qui seront utiles pour mener à bien la seconde version de la démonstration.

Commençons par un petit lemme qui interviendra à la fin du raisonnement.

Lemme 6 (*Moments et fonction de répartition*)

Soient μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ et F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi μ. Si μ est portée par $\mathbb{R}^+$, alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$m_r(\mu) = \int_0^\infty r x^{r-1} \mu(]x,\infty[)\,\mathrm{d}x.$$

Et lorsque μ est portée par $[0,1]$:

$$m_r(\mu) = 1 - r\int_0^1 x^{r-1} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration : La preuve étrangement simple repose exclusivement sur le théorème de Fubini-Tonelli.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty r x^{r-1}\mu(]x,\infty[)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty r x^{r-1}\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{]x,\infty[}(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(r x^{r-1}\mathbb{1}_{]x,\infty[}(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\mu(y) \qquad \text{par Fubini-Tonelli} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y r x^{r-1}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\mu(y) \\
&= \int_0^\infty y^r\,\mathrm{d}\mu(y) \\
&= m_r(\mu).
\end{aligned}$$

Si μ est portée par $[0,1]$, alors en remarquant que pour $x \in \mathbb{R}$, $\mu(]x,\infty[) = 1 - F(x)$ et vaut 0 pour $x \geqslant 1$, on écrit :

$$\int_0^\infty r x^{r-1}\mu(]x,\infty[)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 r x^{r-1}(1-F(x))\,\mathrm{d}x = \left[x^r\right]_0^1 - r\int_0^1 x^{r-1}F(x)\,\mathrm{d}x.$$

ce qui donne le résultat. ∎

Introduisons maintenant une famille de fonctions affines par morceaux sur $[0,1]$.
Etant donnés $\varepsilon > 0$ et $t \in [0,1]$, on note $u_{t,\varepsilon}$ la fonction réelle définie sur $[0,1]$ par :
$u_{t,\varepsilon}(0) = u_{t,\varepsilon}(t) = 1$, $u_{t,\varepsilon}(t+\varepsilon) = u_{t,\varepsilon}(1) = 0$ et $u_{t,\varepsilon}$ affine sur $[0,t]$, $[t,t+\varepsilon] \cap [0,1]$ et $[t+\varepsilon,1]$

Avec des formules, cela donne ([2]) :

$$\forall x \in [0,1], \quad u_{t,\varepsilon}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,t] \\ \frac{-1}{\varepsilon}x + 1 + \frac{t}{\varepsilon} & \text{si } x \in [t,t+\varepsilon] \\ 0 & \text{si } x \in [t+\varepsilon,1]. \end{cases}$$

Donnons trois petites propriétés de cette famille de fonctions, qui nous seront utiles par la suite.

2. étant entendu que certains des intervalles mentionnés peuvent être vides ou déborder de $[0,1]$, ce qui n'a pas d'incidence sur la consistance de la définition (qui vaut uniquement pour x dans $[0,1]$)

Fait 2

(i) Pour tous $\varepsilon > 0$ et $t \in [0,1]$, $u_{t,\varepsilon}$ est continue positive et majorée par 1 sur $[0,1]$.

(ii) Soient $t \in [0,1]$, et $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$. Alors $u_{t,\varepsilon_1} \leqslant u_{t,\varepsilon_2}$.

(iii) Soient $\varepsilon > 0$ et $t, \tau \in [0,1]$ avec $t \leqslant \tau$. Alors $u_{t,\varepsilon} \leqslant u_{\tau,\varepsilon}$ et $\max\limits_{[0,1]}(u_{\tau,\varepsilon} - u_{t,\varepsilon}) \leqslant \dfrac{\tau - t}{\varepsilon}$.

Démonstration : **(i)** est évident.

(ii) est graphiquement clair. Vérifions-le par le calcul :

$$\forall x \in [0,1], \quad (u_{t,\varepsilon_2} - u_{t,\varepsilon_1})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,t] \cup [t+\varepsilon_2, 1] \\ \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)(x-t) & \text{si } x \in [t, t+\varepsilon_1] \\ \frac{-1}{\varepsilon_2} x + 1 + \frac{t}{\varepsilon_2} & \text{si } x \in [t+\varepsilon_1, t+\varepsilon_2] \end{cases} \geqslant 0.$$

(iii) Le fait que $u_{t,\varepsilon} \leqslant u_{\tau,\varepsilon}$ est graphiquement clair ; on peut aussi l'observer sur les calculs suivants qui vont servir à justifier que $\max\limits_{[0,1]}(u_{\tau,\varepsilon} - u_{t,\varepsilon}) \leqslant \frac{\tau - t}{\varepsilon}$.

- Si $t + \varepsilon \leqslant \tau$ (voir figure 1), $(u_{\tau,\varepsilon} - u_{t,\varepsilon})(\tau) = 1$. Donc par (i), $\max\limits_{[0,1]}(u_{\tau,\varepsilon} - u_{t,\varepsilon}) = 1 \leqslant \frac{\tau - t}{\varepsilon}$.
- Si $t + \varepsilon > \tau$ (voir figure 2), alors quel que soit $x \in [0,1]$,

$$(u_{\tau,\varepsilon} - u_{t,\varepsilon})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,t] \cup [\tau+\varepsilon, 1] \\ \frac{x-t}{\varepsilon} & \text{si } x \in [t, \tau] \\ \frac{\tau - t}{\varepsilon} & \text{si } x \in [\tau, t+\varepsilon] \\ \frac{-1}{\varepsilon} x + 1 + \frac{\tau}{\varepsilon} & \text{si } x \in [t+\varepsilon, \tau+\varepsilon] \end{cases} \leqslant \frac{\tau - t}{\varepsilon}.$$

■

On définit, pour tous $\varepsilon > 0$ et $t \in [0,1]$, $U_\varepsilon(t) := M(u_{t,\varepsilon})$, où $u_{t,\varepsilon}$ est définie ci-avant. On a alors :

(a) Pour tout $\varepsilon > 0$, U_ε est positive croissante et continue sur $[0,1]$.

En effet, la positivité est claire, et pour $\varepsilon > 0$ fixé, si $0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant 1$, on obtient par le fait 2, que $u_{t,\varepsilon} \leqslant u_{\tau,\varepsilon}$. Puis on déduit de (♣) que M est croissante, d'où : $M(u_{t,\varepsilon}) \leqslant M(u_{\tau,\varepsilon})$, ce qui donne la croissance de U_ε.

Pour la continuité, soient $t_0 \in [0,1]$ et $\eta > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [0,1], |t - t_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |U_\varepsilon(t) - U_\varepsilon(t_0)| \leqslant \eta.$$

Quel que soit $t \in [0,1]$, on a : $|U_\varepsilon(t) - U_\varepsilon(t_0)| = |M(u_{t,\varepsilon} - u_{t_0,\varepsilon})| = \lim\limits_{n\to\infty} |\langle \mu_n, u_{t,\varepsilon} - u_{t_0,\varepsilon}\rangle|$.

Or, pour tous $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|\langle \mu_n, u_{t,\varepsilon} - u_{t_0,\varepsilon}\rangle| \leqslant \displaystyle\int_{[0,1]} |u_{t,\varepsilon} - u_{t_0,\varepsilon}| \,\mathrm{d}\mu_n \underset{\mu_n([0,1])=1}{\overset{\text{fait 2}}{\leqslant}} \frac{|t - t_0|}{\varepsilon}$.

Ainsi, choisissant $\delta := \varepsilon\eta$, on obtient bien le résultat.

(b) Pour tout $t \in [0,1]$, $\varepsilon \longmapsto U_\varepsilon(t)$ a une limite finie en 0^+.

En effet, pour t fixé dans $[0,1]$, si $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$, on obtient, toujours par le fait 2, que $u_{t,\varepsilon_1} \leqslant u_{t,\varepsilon_2}$. La croissance de M, donnée par (♣), indique aussitôt que $0 \leqslant U_{\varepsilon_1}(t) \leqslant U_{\varepsilon_2}(t)$. Par un argument classique, il vient $U_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \inf\limits_{\varepsilon>0} U_\varepsilon(t) \in \mathbb{R}$.

On pose, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\widetilde{F}(t) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} U_\varepsilon(t).$$

Alors $\widetilde{F}$ est croissante (d'après (a) et un passage à la limite) et vérifie $\widetilde{F}(1) = 1$ (car $\widetilde{F}(1) = M(\mathbb{1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n([0,1]) = 1$). On sait qu'alors l'ensemble des points de discontinuité de $\widetilde{F}$ est au plus dénombrable. En changeant éventuellement la valeur de $\widetilde{F}$ en ces points, on construit une application F continue à droite égale $\widetilde{F}$ partout sauf aux possibles points de discontinuité de $\widetilde{F}$.

Notons pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, F_n la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi μ_n ([3]).
Soient $\delta > \varepsilon > 0$ et $t \in [0,1]$.
On a clairement, de par les définitions de $u_{t-\delta,\varepsilon}$ et $u_{t,\varepsilon}$, l'encadrement :

$$u_{t-\delta,\varepsilon} \leqslant \mathbb{1}_{[0,t]} \leqslant u_{t,\varepsilon}.$$

En l'intégrant par rapport à μ_n, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\langle \mu_n, u_{t-\delta,\varepsilon} \rangle \leqslant F_n(t) \leqslant \langle \mu_n, u_{t,\varepsilon} \rangle.$$

En passant à la limite inférieure dans l'inégalité de gauche et à la limite supérieure dans celle de droite, on obtient :

$$U_\varepsilon(t-\delta) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(t) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n(t) \leqslant U_\varepsilon(t).$$

Faisant tendre ε vers 0^+, il vient :

$$\widetilde{F}(t-\delta) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(t) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n(t) \leqslant \widetilde{F}(t).$$

Puis, si $\widetilde{F}$ est continue en t, ce qui implique que $\widetilde{F}(t) = F(t)$, on obtient en passant à la limite $\delta \to 0^+$:

$$F_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(t).$$

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Par le lemme 6,

$$m_k(\mu_n) = 1 - k \int_0^1 x^{k-1} F_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme pour tout $x \in [0,1]$, $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ et $0 \leqslant x^{k-1}F_n(x) \leqslant 1$, il est immédiat par convergence dominée que :

$$1 - k \int_0^1 x^{k-1} F_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - k \int_0^1 x^{k-1} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or, on a montré au point (ii) du lemme 5 que $m_k(\mu_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c_k$. Ainsi :

$$1 - k \int_0^1 x^{k-1} F(x)\,\mathrm{d}x = c_k.$$

On sait par ailleurs que, F étant croissante, continue à droite, tendant vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en ∞, c'est la fonction de répartition d'une unique variable aléatoire réelle. On note μ la loi de cette variable aléatoire. μ est portée par $[0,1]$ car, en tant que limite de F_n, F est nulle sur $]-\infty, 0[$ et vaut 1 sur $]1, \infty[$. Alors par le lemme 6, la dernière égalité devient :

$$m_k(\mu) = c_k$$

et, cette égalité étant clairement vraie aussi pour $k = 0$, c'est précisément ce que l'on voulait obtenir ! La prochaine section de ce mémoire va aborder les deux autres problèmes des moments principalement présents dans la littérature.

3 Problèmes des moments de Hamburger et de Stieltjes

3.1 Résultats d'existence pour les problèmes de Hamburger et de Stieltjes

Comme annoncé dans l'introduction, nous nous contentons ici d'énoncer, sans justification, les résultats d'existence concernant les problèmes des moments de Hamburger et Stieltjes. On pourra trouver dans [3] des démonstrations de ces résultats faisant appel à la *théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints*, qui dépasse le cadre de ce TER.

3. ou *fonction cumulative* de μ_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $F_n(t) = \mu_n(]-\infty, t]) = \mu_n([0,t])$

Théorème 2 (*conditions d'existence d'une solution aux problèmes de Hamburger et Stieltjes*)

Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(i) (m_n) est la suite des moments d'une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ si et seulement si :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall(\beta_0, \dots, \beta_N) \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} \beta_k \overline{\beta_l} m_{k+l} \geqslant 0;$$

(ii) (m_n) est la suite des moments d'une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ portée par $\mathbb{R}^+$ si et seulement si :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall(\beta_0, \dots, \beta_N) \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} \beta_k \overline{\beta_l} m_{k+l} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} \beta_k \overline{\beta_l} m_{k+l+1} \geqslant 0.$$

Démonstration du fait que les conditions sont nécessaires : **(i)** Supposons qu'il existe une mesure μ borélienne positive sur $\mathbb{R}$ telle que $m_n = \langle \mu, X^n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $(\beta_0, \dots, \beta_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{N} \beta_k \overline{\beta_\ell} m_{k+\ell} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{N} \beta_k \overline{\beta_\ell} x^{k+\ell} \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^{N} \beta_k x^k \right|^2 \mathrm{d}\mu(x) \geqslant 0.$$

(ii) Supposons qu'il existe une mesure μ borélienne positive sur $\mathbb{R}$, portée par $\mathbb{R}^+$, telle que $m_n = \langle \mu, X^n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $(\beta_0, \dots, \beta_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$. Alors, la première relation est vérifiée pour les même raisons qu'en (i). En outre, le fait que μ soit portée par $\mathbb{R}^+$ permet d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{N} \beta_k \overline{\beta_\ell} m_{k+\ell+1} = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{N} \beta_k \overline{\beta_\ell} x^{k+\ell+1} \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_0^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{N} \beta_k x^{k+\frac{1}{2}} \right|^2 \mathrm{d}\mu(x) \geqslant 0. \qquad \blacksquare$$

Nous allons à présent nous focaliser jusqu'à la fin du mémoire sur la recherche de conditions suffisantes, les moins restrictives possibles, d'unicité en cas d'existence des solutions aux problèmes de Hamburger et de Stieltjes.

3.2 Une condition suffisante simple d'unicité

Commençons par énoncer une propriété importante des fonctions caractéristiques.

Proposition 5

Soit T une variable aléatoire admettant des moments de tous ordres. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n := \mathbb{E}(T^n)$ et $\mu_n := \mathbb{E}|T^n|$. On suppose que la limite supérieure de $\left(|m_n/(n!)|^{1/n}\right)$ est finie, et on désigne par R son inverse ($R > 0$). Alors :

(i) pour tout $r \in [0, R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!} r^n < \infty$;

(ii) ϕ_T se prolonge en une fonction holomorphe sur $B_R := \{z \in \mathbb{C} \ / \ |\operatorname{Im} z| < R\}$.

Démonstration : **(i)** Soit $r \in [0, R[$.

Par la formule de Hadamard, R est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{m_n}{n!} z^n$. De plus, on sait que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n\frac{m_n}{n!} z^n$ est aussi égal à R. Donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_{2n}}{(2n)!} r^{2n} < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) \frac{m_{2n+2}}{(2n+2)!} r^{2n+2} < \infty. \tag{4}$$

Par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_{2n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(m_{2n} + m_{2n+2}\right).$$

Cela vient de ce que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant (|x|-1)^2 = x^2 - 2|x| + 1$, inégalité qu'on multiplie ensuite par $x^{2n} \geqslant 0$, et qu'on intègre contre la loi de T.

On obtient ainsi, en supposant $r \neq 0$ (sinon le résultat est clair) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!} r^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{2n}}{(2n)!} r^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{2n+1}}{(2n+1)!} r^{2n+1} \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_{2n}}{(2n)!} r^{2n} + \frac{r}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_{2n}}{(2n)!} r^{2n} + \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) \frac{m_{2n+2}}{(2n+2)!} r^{2n+2} < \infty \quad \text{par (4).}\end{aligned}$$

(ii) On définit pour tout $z \in B_R$, $\widetilde{\phi_T}(z) := \mathbb{E}\left(e^{izT}\right)$. On va employer le théorème d'holomorphie sous le signe somme, qui montrera à la fois que $\widetilde{\phi_T}$ est bien définie et qu'elle est holomorphe sur B_R.
Soit $r \in]0, R[$. On définit $F : \begin{array}{ccc} B_r \times \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z, \omega) & \longmapsto & e^{izT(\omega)} \end{array}$.

- Il est clair que pour tout $\omega \in \Omega$, $F(\cdot, \omega)$ est holomorphe sur B_r.
- Quel que soit $(z, \omega) \in B_r \times \Omega$, on a :

$$|F(z,\omega)| = \left|e^{izT(\omega)}\right| = e^{-T(\omega)\,\mathrm{Im}\, z} \leqslant e^{|T(\omega)\,\mathrm{Im}\, z|} \leqslant e^{r|T(\omega)|}.$$

Or, par le théorème de Fubini-Tonelli et le point (i) :

$$\mathbb{E}\left(e^{r|T|}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|T^n|}{n!} r^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|T^n|}{n!} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!} r^n < \infty,$$

et ainsi,

$$|F| \leqslant e^{r|T|} \in \mathscr{L}^1(\Omega).$$

On en déduit que $\widetilde{\phi_T}$ est holomorphe sur B_r, et ce pour $r \in]0, R[$ quelconque. ∎

Cette propriété permet d'établir une condition simple d'unicité en cas d'existence, pour le problème de Hamburger ou de Stieltjes. Nous nous attacherons ensuite à donner une condition un peu moins restrictive, mais plus délicate à établir.

Corollaire 2

Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $m_0 = 1$.
Si $\limsup_{n\to\infty} |m_n/(n!)|^{1/n} < \infty$, alors le problème de Hamburger (ou de Stieltjes) associé à (m_n) possède au plus une solution. Autrement dit, la suite des moments (m_n) détermine la loi.

Démonstration : Supposons que $\limsup_{n\to\infty} |m_n/(n!)|^{1/n} < \infty$. On pose

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |m_n/(n!)|^{1/n}} > 0.$$

Soient Y et Z deux variables aléatoires admettant des moments de tous ordres, telles que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y^n) = \mathbb{E}(Z^n) =: m_n$. On note encore ϕ_Y (resp. ϕ_Z) le prolongement holomorphe de la fonction caractéristique de Y (resp. Z) à $B_R := \{z \in \mathbb{C} \ / \ |\mathrm{Im}\, z| < R\}$, bien défini d'après la proposition précédente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_Y^{(n)}(0) = \mathbb{E}\left((iY)^n\right) = i^n m_n = \phi_Z^{(n)}(0).$$

Donc les fonctions ϕ_Y et ϕ_Z, coïncident sur $D(0,R)$, puisqu'elles ont le même développement en série entière sur ce disque. Comme elles sont holomorphes sur l'ouvert connexe B_R, on a $\phi_Y = \phi_Z$ sur B_R, et *a fortiori* sur $\mathbb{R}$. Donc Y et Z ont même loi. ∎

Nous allons établir une condition suffisante d'unicité un peu plus générale reposant sur le théorème de Denjoy-Carleman. Pour cela, nous avons besoin d'introduire les notions de suites convexes et log-convexes, ainsi que d'en établir certaines propriétés plus ou moins élémentaires.

3.3 Suites convexes

Définition 2 (*Suites convexes et log-convexes*)

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
On dit que (a_k) est *convexe* lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_k + a_{k+2}\right).$$

(M_k) sera dite *log-convexe* si la suite $(\log M_k)$ est convexe.

Enonçons quelques propriétés découlant de cette définition, qui seront utilisées par la suite.

Proposition 6

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Alors :

(i) (a_k) est convexe si et seulement si $(a_{k+1} - a_k)$ est croissante ;

(ii) si (a_k) est convexe, alors quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{a_k - a_p}{k-p}\right)_{k>p}$ est croissante ;

(iii) si (a_k) est convexe et $\frac{a_k}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, alors $\left(\frac{a_k}{k}\right)$ est croissante à partir d'un certain rang ;

(iv) (M_k) est log-convexe si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_{k+1}^2 \leqslant M_k M_{k+2}$;

(v) (M_k) est log-convexe si et seulement si $\left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)$ est croissante.

Démonstration : (i) $(a_{k+1} - a_k)$ est croissante si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (a_{k+2} - a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k) \geqslant 0 \qquad \text{i.e. si et seulement si} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+2} - a_k \geqslant 2a_{k+1},$$

ce qui équivaut à dire que (a_k) est convexe.

(ii) Supposons (a_k) convexe. Soit $p \in \mathbb{N}$. Quel que soit $k > p$, on a :

$$\frac{a_{k+1} - a_p}{k+1-p} - \frac{a_k - a_p}{k-p} = \frac{(a_{k+1} - a_p)(k-p) - (a_k - a_p)(k-p+1)}{(k-p)(k-p+1)}.$$

Or :

$$(a_{k+1} - a_p)(k-p) - (a_k - a_p)(k-p+1) = \left(\sum_{n=p}^{k}(a_{n+1} - a_n)\right)(k-p) - \left(\sum_{n=p}^{k-1}(a_{n+1} - a_n)\right)(k-p+1)$$
$$\geqslant (k-p+1)(a_{p+1} - a_p)(k-p) - (k-p)(a_{p+1} - a_p)(k-p+1) = 0 \qquad \text{par croissance de } (a_{k+1} - a_k).$$

Donc $\left(\frac{a_k - a_p}{k-p}\right)_{k>p}$ croît.

(iii) Supposons (a_k) convexe et $\frac{a_k}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{a_m}{m} = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{k}$, et si $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_k}{k} = \frac{ka_{k+1} - (k+1)a_k}{k(k+1)}.$$

D'autre part :

$$\left((k+1)a_{k+2} - (k+2)a_{k+1}\right) - \left(ka_{k+1} - (k+1)a_k\right) = (k+1)(a_{k+2} + 2a_{k+1} + a_k) \geqslant 0,$$

par convexité de (a_k). Et donc pour tout $k \geqslant m$:

$$ka_{k+1} - (k+1)a_k \geqslant ma_{m+1} - (m+1)a_m = m(m+1)\left(\frac{a_{m+1}}{m+1} - \frac{a_m}{m}\right) \geqslant 0 \quad \text{par choix de } m.$$

Ainsi, $\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_k}{k} \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant m$; d'où le résultat.

(iv) s'obtient par simple passage à l'exponentielle dans la définition de la log-convexité de (M_k).

(v) s'obtient immédiatement à partir de (iv) en notant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{M_{k+2}}{M_{k+1}} \frac{M_k}{M_{k+1}} = \frac{M_k M_{k+2}}{M_{k+1}^2}$. ■

Comme illustration du point (iv) de cette proposition, donnons un exemple de suite log-convexe qui sera réutilisé plus loin.

Exemple. Soit Z une variable aléatoire positive.
La suite des moments de Z est log-convexe, car, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}(Z^{n+1})^2 = \mathbb{E}\left(Z^{\frac{n+2}{2}} Z^{\frac{n}{2}}\right)^2 \leqslant \mathbb{E}(Z^{n+2})\mathbb{E}(Z^n).$$

Nous arrivons maintenant à une notion importante que l'on nommera « régularisée convexe ». Au moins intuitivement, il s'agit pour une suite (a_k) telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{k} = \infty$, de construire l'enveloppe convexe du nuage de points de coordonnées (k, a_k).

Proposition 7 (*Régularisée convexe*)

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Si $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{k} = \infty$, alors la suite (α_k) définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k := \sup\{\beta_k, (\beta_n) \text{ suite convexe de réels minorant } (a_n)\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

(i) (α_k) est une suite de réels, convexe, qui minore (a_k) ;

(ii) il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$, $a_{\varphi(k)} = \alpha_{\varphi(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et (α_k) est arithmétique sur $[\![\varphi(i), \varphi(i+1)]\!]$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$.

On dira que (α_k) est la *régularisée convexe* de (a_k).

On appellera *régularisée log-convexe* d'une suite (M_k) de réels strictement positifs l'exponentielle de la régularisée convexe de $(\log M_k)$.

Démonstration : Supposons que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{k} = \infty$.

(i) Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $C_k := \{\beta_k, (\beta_n) \text{ suite convexe de réels minorant } (a_n)\}$. Comme $\frac{a_k}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, alors, *a fortiori*, $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ et donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k$.
La suite constante et égale à a_m est une suite convexe minorant (a_n), donc $a_m \in C_k$ et $C_k \neq \varnothing$.
En outre, C_k est clairement majoré par a_k. Ainsi α_k est réel.
La convexité de (α_k) et le fait qu'elle minore (a_k) sont évidents par construction.

(ii) • Comme (α_k) est convexe, alors quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{\alpha_k - \alpha_p}{k-p}\right)_{k>p}$ est croissante. Donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqslant p, \quad a_n \geqslant \alpha_n \geqslant \alpha_p + (\alpha_{p+1} - \alpha_p)(k-p). \tag{5}$$

• Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe $q > p$ tel que $a_q = \alpha_q = \alpha_p + (\alpha_{p+1} - \alpha_p)(q-p)$.
La suite $\left(\frac{a_k - \alpha_p}{k-p}\right)_{k>p}$ tend vers ∞ car :

$$\frac{a_k - \alpha_p}{k-p} = \frac{a_k}{k-p} - \frac{\alpha_p}{k-p} = \frac{a_k}{k}\frac{k}{k-p} - \frac{\alpha_p}{k-p} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Ainsi, il existe $r > p$ tel que $\frac{a_r - \alpha_p}{r-p} = \inf\limits_{k>p} \frac{a_k - \alpha_p}{k-p} =: C$.

La suite (h_k) définie par $h_k = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } k \leqslant r \\ \alpha_r + C(k-r) & \text{si } k \geqslant r \end{cases}$ est un minorant convexe de (a_k).

En effet, on a vu que $h_k = \alpha_k \leqslant a_k$ pour $k \leqslant r$. Et, pour $k \geqslant r$, $\alpha_r + C(k-r) \leqslant a_k$ par définition de C.
Pour la convexité, on calcule pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$h_{k+2} - 2h_{k+1} + h_k = \begin{cases} \alpha_{k+2} - 2\alpha_{k+1} + \alpha_k & \text{si } k+2 \leqslant r \\ \alpha_{r-1} - \alpha_r + C & \text{si } k = r-1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant r. \end{cases}$$

Cette quantité est clairement positive pour $k \neq r-1$. Etudions le cas restant.
Comme (α_k) minore (a_k) et $\left(\frac{\alpha_k - \alpha_r}{k-r}\right)_{k>r}$ est croissante par la proposition 6, on a :

$$\forall k > r, \quad \frac{a_k - \alpha_r}{k-r} \geqslant \frac{\alpha_k - \alpha_r}{k-r} \geqslant \alpha_{r+1} - \alpha_r.$$

D'où $C \geqslant \alpha_{r+1} - \alpha_r \geqslant \alpha_r - \alpha_{r-1}$, c'est-à-dire $h_{k+2} - 2h_{k+1} + h_k \geqslant 0$ pour $k = r-1$.
On obtient donc bien la convexité de (h_k).

Donc, par définition de (α_k), il vient $h_k \leqslant \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
En particulier, $\alpha_r + C(r+1-r) \leqslant \alpha_{r+1}$. Or, on a déjà $C \geqslant \alpha_{r+1} - \alpha_r$. D'où :

$$C = \alpha_{r+1} - \alpha_r.$$

Donc, choisissant $q := r$, on obtient par (5) que :

$$\forall k \in [\![p, q]\!], \quad \alpha_k \geqslant \alpha_p + C(k-p),$$

avec égalité pour $k = q$, car, puisque $\frac{\alpha_q - \alpha_p}{q-p} \leqslant \frac{a_q - \alpha_p}{q-p} = C$, on a $\alpha_q \leqslant \alpha_p + C(q-p)$.
En particulier, $\alpha_q = \alpha_p + \frac{a_q - \alpha_p}{q-p}(q-p) = a_q$.

• Montrons que (α_k) arithmétique sur $[\![p, q]\!]$.
Quel que soit $k \in [\![p, q]\!]$, on a la relation : $\frac{\alpha_q - \alpha_p}{q-p}(k-p) + \alpha_p \leqslant \alpha_k$, puisque $\frac{\alpha_q - \alpha_p}{q-p} \geqslant \frac{\alpha_k - \alpha_p}{k-p}$ par la proposition 6. Or, $\alpha_q = \alpha_p + C(q-p)$. D'où $C(k-p) + \alpha_p \geqslant \alpha_k$, pour tout $k \in [\![p, q]\!]$. Or, on sait déjà que $\alpha_k \geqslant \alpha_p + C(k-p)$. Ainsi (α_k) arithmétique sur $[\![p, q]\!]$.

• Posons enfin $\varphi(0) := 0$, et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi(k+1) := \min\{q > \varphi(k) \text{ t.q. } \alpha_q = a_q \text{ et } (\alpha_n) \text{ arithmétique sur } [\![\varphi(k), q]\!]\}.$$

Par ce qui précède, φ est bien définie. Par construction, elle vérifie les propriétés voulues. ■

On va maintenant établir une inégalité qui permettra d'établir ensuite un résultat important de convergence ou divergence simultanée de trois séries numériques.

Lemme 7 (*Inégalité de Carleman-Collingwood*)

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On a la relation :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Démonstration : Cette inégalité est en fait une conséquence de l'inégalité arithmético-géométrique (IAG).
Nous allons suivre la démonstration de Pólya donnée dans [4].
Pour toute suite (c_n) strictement positive, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_1 a_1 c_2 a_2 \cdots c_n a_n}{c_1 c_2 \cdots c_n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\underset{\text{IAG}}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} (c_1 c_2 \cdots c_n)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k a_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} (c_1 c_2 \cdots c_n)^{-\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

l'interversion des sommes étant justifiée par le fait que tous les termes sont positifs. En particulier si l'on prend, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $c_n := \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, on obtient $c_1c_2\cdots c_n = (n+1)^n$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_kc_k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_kc_k\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\\
&\leqslant e\sum_{k=1}^{\infty} a_k,
\end{aligned}$$

la dernière ligne découlant de l'inégalité de convexité $1+\frac{1}{k}\leqslant e^{\frac{1}{k}}$. ■

La proposition suivante jouera un rôle crucial dans la suite. En effet, l'une des équivalences qu'elle énonce sera utilisée pour la démonstration du résultat principal de cette section, à savoir le théorème de Denjoy-Carleman. Une autre sera utilisée pour déduire de ce théorème la condition d'unicité voulue pour les problèmes de Hamburger et Stieltjes. Pour établir le résultat qui suit, nous allons faire souvent appel aux préliminaires qui viennent d'être établis à propos des suites log-convexes.

Proposition 8

Soit $(M_k)\in(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} M_k^{1/k}=\infty$. On note (M'_k) la régularisée log-convexe de (M_k). On pose pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\beta_k := \inf\limits_{p\geqslant k} M_p^{1/p}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k}<\infty$ **(ii)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{{M'_k}^{1/k}}<\infty$ **(iii)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M'_k}{M'_{k+1}}<\infty$

Démonstration : Nous allons suivre la démonstration de Mandelbrojt donnée dans [4] p. 23.

On note $(M'_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (M'_n) telle que $\varphi(0)=0$, $M_{\varphi(k)}=M'_{\varphi(k)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, et $(\log M'_k)$ est arithmétique sur $[\![\varphi(i),\varphi(i+1)]\!]$ pour chaque $i\in\mathbb{N}$.

• Comme $\frac{\log M'_k}{k}\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty$ et (M'_k) log-convexe, on sait, par la proposition 6, que $\left(\frac{\log M'_k}{k}\right)$ est croissante à partir d'un certain rang $k_0\in\mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$\forall k\geqslant k_0,\quad \beta_k=\inf_{n\geqslant k} M_n^{1/n}\geqslant \inf_{n\geqslant k} {M'_n}^{1/n}\geqslant {M'_k}^{1/k}>0.$$

D'où :

$$\forall k\geqslant k_0,\quad 0\leqslant\frac{1}{\beta_k}\leqslant\frac{1}{{M'_k}^{1/k}}. \tag{6}$$

• On pose, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\widetilde{M_{\varphi(k)}}:=M_{\varphi(k)}$, $\widetilde{M_k}:=\infty$ si $k\notin\varphi(\mathbb{N})$, puis $\gamma_k:=\inf\limits_{n\geqslant k}\widetilde{M_n}^{1/n}$.

Puisque, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\beta_k\leqslant M_n^{1/n}\leqslant\widetilde{M_n}^{1/n}$, alors pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\beta_k\leqslant\gamma_k$.
D'autre part, si $i>k_0$ et $n\in\,]\!]\varphi(i-1),\varphi(i)]\!]$, alors $\gamma_n=M_{\varphi(i)}^{1/\varphi(i)}$ (car $\widetilde{M_n}=\infty$ pour $n\in\,]\!]\varphi(i-1),\varphi(i)[\![$ et $({M'_k}^{1/k})_{k\geqslant k_0}$ est croissante). En outre, pour tous $i>k_0$ et $n\in\,]\!]\varphi(i-1),\varphi(i)]\!]$:

$$\frac{\log M_{\varphi(i)}}{\varphi(i)}\leqslant\frac{\log M_{\varphi(i)}-\log M_{\varphi(i-1)}}{\varphi(i)-\varphi(i-1)}=\log M'_n-\log M'_{n-1}.$$

En effet, on a $\frac{\log M_{\varphi(i)}}{\varphi(i)} \geqslant \frac{\log M_{\varphi(i-1)}}{\varphi(i-1)}$ par croissance de $\left(\frac{\log M'_k}{k}\right)_{k \geqslant k_0}$. Donc,

$$\varphi(i-1) \log M_{\varphi(i)} \geqslant \varphi(i) \log M_{\varphi(i-1)}.$$

D'où

$$\big(\varphi(i-1) - \varphi(i)\big) \log M_{\varphi(i)} \geqslant \varphi(i)\big(\log M_{\varphi(i-1)} - \log M_{\varphi(i)}\big).$$

On en déduit l'inégalité voulue, l'égalité qui suit étant due au fait que $(\log M'_k)$ est arithmétique sur $[\![\varphi(i-1), \varphi(i)]\!]$. On obtient alors que $M_{\varphi(i)}^{1/\varphi(i)} \leqslant \frac{M'_n}{M'_{n-1}}$. D'où :

$$\sum_{n=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)} \frac{1}{\gamma_n} = \sum_{n=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)} \frac{1}{M_{\varphi(i)}^{1/\varphi(i)}} \geqslant \sum_{n=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)} \frac{M'_{n-1}}{M'_n} = \sum_{n=\varphi(i-1)}^{\varphi(i)-1} \frac{M'_n}{M'_{n+1}}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=\varphi(k_0+1)}^{\infty} \frac{M'_n}{M'_{n+1}} \leqslant \sum_{i=k_0+1}^{\infty} \sum_{n=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)} \frac{1}{\gamma_n} \underset{\beta_n \leqslant \gamma_n}{\leqslant} \sum_{i=k_0+1}^{\infty} \sum_{n=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)} \frac{1}{\beta_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n}. \tag{7}$$

• Enfin, on applique l'inégalité de Carleman-Collingwood (lemme 7) à $a_n = \frac{M'_{n-1}}{M'_n}$, $n \geqslant 1$, et on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M'_0}{M'_1} \frac{M'_1}{M'_2} \cdots \frac{M'_{n-1}}{M'_n}\right)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M'_{n-1}}{M'_n},$$

soit encore :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{M'_n}^{1/n}} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M'_{n-1}}{M'_n}. \tag{8}$$

• On obtient finalement la chaîne d'implications suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M'_k}{M'_{k+1}} < \infty \underset{(8)}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{M'_k}^{1/k}} < \infty \underset{(6)}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} < \infty \underset{(7)}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M'_k}{M'_{k+1}} < \infty.$$

La proposition s'en déduit aussitôt. ■

3.4 Quasi-analyticité et théorème de Denjoy-Carleman

Le théorème de Denjoy-Carleman, que nous allons démontrer en suivant la démarche de P.J. Cohen dans [5], fournit un critère pour obtenir une propriété importante de certaines classes de fonctions que nous allons définir.

Etant donnée une suite $M = (M_k)$ de réels strictement positifs, on notera :

$$\mathscr{C}(M) := \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad / \quad \exists (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(k)}(x)| \leqslant ab^k M_k\}.$$

Remarque 3

Soit $M = (M_k)$ une suite de réels strictement positifs.

(i) $\mathscr{C}(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;

(ii) $\mathscr{C}(M)$ est stable par composition à droite par les fonctions affines ;

(iii) si $M_k = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors tout élément de $\mathscr{C}(M)$ est une fonction analytique.

Démonstration : (i) Soient $f, g \in \mathscr{C}(M)$, et $\mu \in \mathbb{C}$.
Alors, il existe $a_1, a_2, b_1, b_2 \geqslant 0$ tels que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|(f+\mu g)^{(n)}(x)\right| = \left|f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)\right| \leqslant a_1 b_1^n M_n + |\mu| a_2 b_2^n M_n \leqslant 2 \max(a_1, |\mu| a_2) \max(b_1, b_2)^n M_n.$$

(ii) Soient $f \in \mathscr{C}(M)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha x + \beta \end{array}$. Alors, il existe $a, b \geqslant 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|(f \circ \varphi)^{(n)}(x)\right| = |\alpha^n f^{(n)}(\alpha x + \beta)| \leqslant a\big(|\alpha| b\big)^n M_n.$$

(iii) Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle qu'il existe $a, b \geqslant 0$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f^{(n)}\|_\infty \leqslant a b^n n!.$$

Si $a = 0$ ou $b = 0$, f est nulle, donc analytique sur $\mathbb{R}$. Supposons $a, b > 0$.
Montrons que f est analytique en 0.
Soit $r \in \left]0, \frac{1}{b}\right[$. Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a, pour tout $x \in [0, r]$:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| &\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(t)| \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant a b^{n+1} \int_0^x (n+1)(x-t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= a b^{n+1} x^{n+1} \leqslant a(br)^{n+1}. \end{aligned}$$

De manière analogue, pour tout $x \in [-r, 0]$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant a b^{n+1} |x|^{n+1} \leqslant a(br)^{n+1}.$$

Ainsi :

$$\sup_{|x| \leqslant r} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant a(br)^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Donc, la série de Taylor de f converge (uniformément) vers f au voisinage de 0 : f est analytique en 0.
Si x_0 est un réel quelconque, alors, en considérant $f(\cdot + x_0)$, qui vérifie les mêmes hypothèses que f, on en déduit que f est analytique en x_0. Finalement, f est analytique sur $\mathbb{R}$. ■

Définissons maintenant la notion de *quasi-analyticité*, portant sur les classes de fonctions précédemment introduites. Son appellation peut se justifier par la remarque 3 (iii) énoncée plus haut.

Définition 3 (*Classes quasi-analytiques*)

Soit $M \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On dit que la classe $\mathscr{C}(M)$ est *quasi-analytique* lorsque tout élément de $\mathscr{C}(M)$ s'annulant, ainsi que toutes ses dérivées, en un point de $\mathbb{R}$, est identiquement nul sur $\mathbb{R}$.

Il est un cas où l'on obtient immédiatement la quasi-analyticité à l'aide d'une récurrence :

Lemme 8

Soit $M \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Si $\liminf_{n \to \infty} M_n^{1/n} < \infty$, alors $\mathscr{C}(M)$ est quasi-analytique.

Démonstration : Supposons que $\liminf_{n \to \infty} M_n^{1/n} < \infty$. Soit $g \in \mathscr{C}(M)$. On suppose que g et toutes ses dérivées s'annulent en un point x_0 de $\mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que g est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
On se ramène en zéro en posant $f : x \longmapsto g(x + x_0)$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = g^{(n)}(\cdot + x_0)$, et ainsi il existe $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0 \text{ et } \left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leqslant \left\| g^{(n)} \right\|_\infty \leqslant a b^n M_n. \tag{9}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va établir par récurrence finie « descendante » que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M_n a b^n \frac{|x|^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Cela est clairement vérifié pour $k = n$ par (9). Supposons la relation vraie pour un $k \in [\![1, n]\!]$. Etablissons-la alors au rang $k-1$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ (on raisonne symétriquement pour $x \in \mathbb{R}^-$).

$$\begin{aligned}
\left|f^{(k-1)}(x)\right| &= \left|\int_0^x f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \qquad \text{car } f^{(k)}(0) = 0 \\
&\leqslant \int_0^x \left|f^{(k)}(t)\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant M_n a b^n \int_0^x \frac{|t|^{n-k}}{(n-k)!} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= M_n a b^n \frac{x^{n-k+1}}{(n-k+1)(n-k)!} = M_n a b^n \frac{x^{n-(k-1)}}{(n-(k-1))!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $k = 0$ on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \frac{M_n a b^n |x|^n}{n!}.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \neq 0$, il vient :

$$|f(x)|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{M_n^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} b|x|}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{M_n^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} b|x|}{(2\pi)^{\frac{1}{2n}} \frac{n}{e}} \qquad \text{par la formule de Stirling.}$$

Passant à la limite inférieure, on obtient l'absurdité $1 \leqslant 0$. Donc f puis g sont identiquement nulles. ■

Nous en arrivons maintenant à énoncer le théorème principal de cette section, qui donne un critère pour qu'une classe donnée soit quasi-analytique. Nous allons ensuite mentionner, en justifiant, ses conséquences concernant le problème des moments. Enfin, nous nous attacherons à le démontrer.

Théorème 3 (*Denjoy-Carleman*)

Soit $M \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n := \inf_{k \geqslant n} M_k^{1/k}$. Alors :

$$\mathscr{C}(M) \text{ est quasi-analytique si et seulement si } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty.$$

Corollaire 3 (*Lien avec les problèmes des moments de Stieltjes et de Hamburger*)

Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $m_0 = 1$ et $m_{2n} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Si $m_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-\frac{1}{n}} = \infty$, alors le problème de Stieltjes associé à (m_n) a au plus une solution.

(ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}^{-\frac{1}{2n}} = \infty$, alors le problème de Hamburger associé à (m_n) a au plus une solution.

Démonstration : **(i)** On suppose que $m_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-\frac{1}{n}} = \infty$.

Soient Y et Z deux variables aléatoires positives presque sûrement, admettant des moments de tous ordres, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y^n) = \mathbb{E}(Z^n) = m_n$. Il s'agit de montrer que Y et Z ont même loi.

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m_n = 0$, alors, comme Y^n et Z^n sont positives, elles sont nulles presque sûrement, donc $Y = Z = 0$ presque sûrement.

Supposons à présent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n > 0$. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_Y^{(n)}(t) = \mathbb{E}\left[(iY)^n e^{itY}\right], \tag{10}$$

et l'on a évidemment la même formule pour Z. Donc, quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\left|\phi_Y^{(n)}(t)\right| \leqslant \mathbb{E}(Y^n) \qquad \text{et} \qquad \left|\phi_Z^{(n)}(t)\right| \leqslant \mathbb{E}(Z^n).$$

Ainsi $\phi_Y, \phi_Z \in \mathscr{C}\big((m_n)\big)$, et donc $\phi_Y - \phi_Z \in \mathscr{C}\big((m_n)\big)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\phi_Y - \phi_Z)^{(n)}(0) = i^n \big(\mathbb{E}(Y^n) - \mathbb{E}(Z^n)\big) = 0.$$

Pour en déduire que $\phi_Y - \phi_Z \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, et donc que Y et Z ont même loi, il suffit de vérifier que $\mathscr{C}\big((m_n)\big)$ est quasi-analytique.
Si $\liminf\limits_{n\to\infty} m_n^{1/n} < \infty$, on peut appliquer directement le lemme 8. Sinon, on a déjà justifié, pour illustrer la proposition 6, que la suite (m_n) est log-convexe comme suite des moments d'une variable aléatoire positive. Elle est donc sa propre régularisée log-convexe. L'hypothèse, combinée avec la proposition 8, montre alors que le critère de quasi-analyticité de Denjoy-Carleman est vérifié.

Ainsi Y et Z ont même loi.

(ii) Le raisonnement est similaire, mais nécessite l'emploi d'une astuce pour pallier à l'absence de positivité. On suppose que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_{2n}^{-\frac{1}{2n}} = \infty$. Soient Y et Z deux variables aléatoires admettant des moments de tous ordres, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y^n) = \mathbb{E}(Z^n) = m_n$.
Il s'agit de montrer que Y et Z ont même loi.

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m_{2n} = 0$, alors, on conclut immédiatement comme en (i).

Supposons à présent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_{2n} > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons

$$M_n := \begin{cases} m_n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \sqrt{m_{n-1} m_{n+1}} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors, par (10), quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\phi_Y^{(n)}(t)\right| \leqslant \mathbb{E}(|Y|^n) \leqslant M_n.$$

En effet, pour n pair c'est évident et pour n impair, cela découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}(|Y|^n) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(|Y|^{n-1})\,\mathbb{E}(|Y|^{n+1})}.$$

Donc, $\phi_Y \in \mathscr{C}(M)$ et de même $\phi_Z \in \mathscr{C}(M)$, d'où $\phi_Y - \phi_Z \in \mathscr{C}(M)$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\phi_Y - \phi_Z)^{(n)}(0) = 0$, il reste à vérifier que $\mathscr{C}(M)$ est quasi-analytique.

Si $\liminf\limits_{n\to\infty} M_n^{1/n} < \infty$, on applique le lemme 8.
Dans le cas contraire, notant $M' = (M'_n)$ la régularisée log-convexe de (M_n), il suffit, par la proposition 8 et le théorème de Denjoy-Carleman, d'établir que : $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{{M'_k}^{1/k}} = \infty$.
Cela a bien lieu par hypothèse car :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{M'_k}^{1/k}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{M'_{2n}}^{1/2n}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_{2n}^{1/2n}} = \infty.$$

D'où $\phi_Y - \phi_Z \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, et Y et Z ont même loi. ∎

Les deux paragraphes qui suivent présentent une démonstration du théorème de Denjoy-Carleman, telle qu'elle est proposée dans [5].

3.4.1 La condition est nécessaire

Raisonnons par contraposée et supposons que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\beta_n} < \infty$. Alors $\beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. D'après la proposition 7, on définit alors (M'_n) la régularisée log-convexe de $(M_n) := M$.

On a ainsi, par la proposition 8, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{M'_k}{M'_{k+1}} < \infty$.

Il s'agit de montrer que $\mathscr{C}(M)$ n'est pas quasi-analytique, autrement dit de trouver une fonction dans $\mathscr{C}(M)$ qui s'annule, ainsi que toutes ses dérivées, en un réel, sans être identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Avec la convention $M'_{-1} = 1$, on définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n := \frac{M'_{n-1}}{M'_n} \qquad \text{et} \qquad A := \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k < \infty.$$

On considère une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est à valeurs dans $[-\mu_n, \mu_n]$ et suit la loi uniforme sur $[-\mu_n, \mu_n]$. La série de variables aléatoires de terme général U_k converge donc normalement sur Ω. On pose :

$$\forall n \geqslant -1, \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} U_k, \qquad R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k \qquad \text{et} \qquad S := \sum_{k=0}^{\infty} U_k.$$

Par passage à la limite, il est clair que S est à valeurs dans $[-A, A]$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n-1} = U_n + R_n$ avec U_n et R_n indépendantes.
Donc R_{n-1} possède une densité donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{R_{n-1}}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{U_n}(x-y)\, \mathrm{d}\mathbb{P}_{R_n}(y).$$

Comme $f_{U_n} = \frac{1}{2\mu_n}\mathbb{1}_{[-\mu_n,\mu_n]}$, on a : $0 \leqslant f_{R_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2\mu_n}$ partout.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc, par indépendance de U_n et R_n :

$$f_{R_{n-1}} = f_{U_n} * f_{R_n}.$$

Et, comme $f_{U_n} \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $f_{R_n} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $f_{R_{n-1}}$ est continue.

• En particulier, $S = R_{-1}$ a une densité continue, nulle hors de $[-A, A]$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Lambda_m := \{-1, 1\}^m$, un élément $\varepsilon \in \Lambda_m$ étant toujours noté $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{m-1})$.
On peut alors démontrer le résultat suivant, qui va permettre de conclure.

Fait 3

(i) Quel que soit n dans $\mathbb{N}$, $f_{R_{n-1}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_{R_{n-1}}(x) = \frac{1}{2\mu_n}\left(f_{R_n}(x+\mu_n) - f_{R_n}(x-\mu_n)\right).$$

(ii) f_S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_S^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n \mu_0 \cdots \mu_{n-1}} \sum_{\varepsilon \in \Lambda_n} \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{n-1} f_{R_{n-1}}\left(x + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \mu_i\right).$$

(iii) Quel que soit n dans $\mathbb{N}$, $\left\| f_S^{(n)} \right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} M'_n \leqslant \frac{1}{2} M_n$.

Démonstration : **(i)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f_{R_{n-1}} = f_{U_n} * f_{R_n}$. Ainsi, quel que soit x dans $\mathbb{R}$:

$$f_{R_{n-1}}(x) = \frac{1}{2\mu_n}\int_{-\mu_n}^{\mu_n} f_{R_n}(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mu_n}\left[F_n(x+\mu_n) - F_n(x-\mu_n)\right],$$

où F_n est une primitive de f_{R_n} sur $\mathbb{R}$ (qui existe par continuité de f_{R_n}).
On obtient donc la dérivabilité de $f_{R_{n-1}}$ sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_{R_{n-1}}(x) = \frac{1}{2\mu_n}\left(f_{R_n}(x+\mu_n) - f_{R_n}(x-\mu_n)\right).$$

(ii) On procède par récurrence. Le cas $n = 1$ est clair par (i). Supposons donc que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, f_S est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_S^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n \mu_0 \cdots \mu_{n-1}} \sum_{\varepsilon \in \Lambda_n} \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{n-1} f_{R_{n-1}} \left(x + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \mu_i \right).$$

Alors $f_S^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $f_{R_{n-1}}$ l'est), et pour tout réel x, $2^n \mu_0 \cdots \mu_{n-1} f_S^{(n+1)}(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} & \sum_{\varepsilon \in \Lambda_n} \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{n-1} \frac{1}{2\mu_n} \left[f_{R_n} \left(x + \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon_i \mu_i + \mu_n \right) - f_{R_n} \left(x + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \mu_i - \mu_n \right) \right] \\ = \; & \frac{1}{2\mu_n} \sum_{\varepsilon \in \Lambda_{n+1}} \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n f_{R_n} \left(x + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \mu_i \right). \end{aligned}$$

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel que soit x réel,

$$\begin{aligned} \left| f_S^{(n)}(x) \right| & \underset{\text{(ii)}}{\leqslant} \frac{1}{2^n \mu_0 \cdots \mu_{n-1}} \sum_{\varepsilon \in \Lambda_n} \left| f_{R_{n-1}} \left(x + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \mu_i \right) \right| \\ & \leqslant \frac{1}{2^n \mu_0 \cdots \mu_{n-1}} \sum_{\varepsilon \in \Lambda_n} \left\| f_{R_{n-1}} \right\|_\infty \\ & = \frac{1}{\mu_0 \cdots \mu_{n-1}} \left\| f_{R_{n-1}} \right\|_\infty \\ & \leqslant \frac{1}{\mu_0 \cdots \mu_{n-1}} \frac{1}{2\mu_n} \\ & = \frac{1}{2} M'_n \leqslant \frac{1}{2} M_n, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. ■

Finalement, par les points (ii) et (iii) du fait précédent, la fonction f_S appartient à $\mathscr{C}(M)$. Etant à support compact (inclus dans $[-A, A]$), elle s'annule avec toutes ses dérivées en un point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas identiquement nulle en tant que densité de probabilité. Elle démontre donc que $\mathscr{C}(M)$ n'est pas quasi-analytique, comme voulu.

3.4.2 La condition est suffisante

Supposons $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty$. Par définition de β_n, $\lim_{n \to \infty} \beta_n = \liminf_{k \to \infty} M_k^{1/k}$.

Si $\lim_{n \to \infty} \beta_n < \infty$, le problème est déjà résolu par le lemme 8.

On suppose maintenant que $\lim_{n \to \infty} \beta_n = \infty$. Soit (M'_n) la régularisée log-convexe de M (proposition 7). On a ainsi, par la proposition 8, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M'_k}{M'_{k+1}} = \infty$. On note $(M'_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (M'_n) telle que $\varphi(0) = 0$, $M_{\varphi(k)} = M'_{\varphi(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $(\log M'_k)$ est arithmétique sur $[\![\varphi(i), \varphi(i+1)]\!]$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $\mathscr{C}(M)$ est quasi-analytique. Soit donc f dans $\mathscr{C}(M)$ telle que f et toutes ses dérivées s'annulent en un point ξ de $\mathbb{R}$. Quitte à remplacer f par $\widetilde{f} : x \longmapsto \frac{1}{a} f(bx + \xi)$, pour $a, b > 0$ convenables, on peut supposer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leqslant M_n.$$

Commençons par introduire une famille de nombres.
Etant donné $\alpha \in]0, 1[$, on pose, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ avec $j \geqslant i$:

$$B_{0,j} := 0 \qquad B_{i,i} := 1 \text{ si } i \geqslant 1 \qquad B_{i+1,j+1} := B_{i,j+1} + \alpha B_{i+1,j} \text{ si } j > i.$$

Remarque 4

Par récurrence immédiate, on établit que :

⊛ $\forall i \geqslant j \geqslant 0, B_{i,j} \geqslant 0$,

⊛ $\forall j \in \mathbb{N}^*, B_{1,j} = \alpha^{j-1}$,

⊛ Si $j > i \geqslant 0$, alors pour tout $k \in [\![i, j-1]\!]$, $B_{k,j} \geqslant B_{i,j}$.

Etablissons une propriété importante de cette famille de nombres.

Lemme 9

Soit $\alpha_0 := \frac{e-1}{2e^2} < 1$. Si α est choisi dans l'intervalle $]0, \alpha_0]$, alors :

$$\forall j > i \geqslant 1, \qquad B_{i,j} \leqslant 2e\alpha.$$

Démonstration : Notons $C := \frac{e^2}{e-1}$ et posons, pour tous $i \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\phi_i(x) := \left(\frac{Cx}{i}\right)^i$ et $\phi_0(x) = 1$.

• Montrons que, pour tous $j \geqslant i \geqslant 1$, $\phi_{i-1}(j) + \phi_i(j-1) \leqslant \phi_i(j)$.
Soient $j \geqslant i \geqslant 1$. Alors, si $i \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\frac{\phi_{i-1}(j)+\phi_i(j-1)}{\phi_i(j)} &= \frac{\left(\dfrac{Cj}{i-1}\right)^{i-1} + \left(\dfrac{C(j-1)}{i}\right)^{i}}{\left(\dfrac{Cj}{i}\right)^{i}} \\ &= \frac{1}{C}\left[\frac{i}{j}\left(\frac{i}{i-1}\right)^{i-1} + C\left(\frac{j-1}{j}\right)^{i}\right] \qquad \text{en simplifiant par } \frac{C^{i-1}j^i}{i^i}.\end{aligned}$$

Or, $\left(\frac{j-1}{j}\right)^i = \exp\left(i\log\left(1-\frac{1}{j}\right)\right) \leqslant e^{-\frac{i}{j}}$ et $\left(\frac{i}{i-1}\right)^{i-1} = \exp\left((i-1)\log\left(1+\frac{1}{i-1}\right)\right) \leqslant e$.

Ainsi :

$$\frac{\phi_{i-1}(j)+\phi_i(j-1)}{\phi_i(j)} \leqslant \frac{1}{C}\left(\frac{i}{j}e + Ce^{\frac{-i}{j}}\right) \leqslant 1 + \left(\frac{e}{C} + e^{-1} - 1\right)\frac{i}{j},$$

la dernière relation découlant de l'inégalité de convexité : $e^{-x} \leqslant 1 + (e^{-1}-1)x$, valable pour $x \in [0,1]$.
Comme $C = \frac{e^2}{e-1}$, on a $\frac{e}{C} + e^{-1} - 1 = 0$, d'où le résultat voulu.

Si $i = 1$, le résultat a encore lieu, car :

$$\frac{\phi_0(j)+\phi_1(j-1)}{\phi_1(j)} = \frac{1+C(j-1)}{Cj} = 1 + \frac{1-C}{Cj} \leqslant 1 \qquad \text{puisque } C \geqslant 1.$$

• Définissons maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion :

$$\mathscr{H}_n : \text{« } \forall j \geqslant i \geqslant 0, \quad i+j=n \Longrightarrow B_{i+1,j+1} \leqslant \sum_{k=0}^{i} \phi_{i-k}(j-k)\alpha^{j-k} \text{ »},$$

et démontrons-la par récurrence.

$\mathscr{H}_0$ est clairement vraie, car $B_{1,1} = 1 = \phi_0(0)\alpha^0$.

Supposons à présent que $\mathscr{H}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
Soient $j \geqslant i \geqslant 0$, tels que $i + j = n + 1$.

⊛ Si $(i, j) = (0, n+1)$, alors $B_{i+1,j+1} = B_{1,n+2} = \alpha^{n+1}$.

⊛ Si $i = j$, $B_{i+1,j+1} = 1 = \phi_0(0)\alpha_0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \phi_{i-k}(j-k)\alpha^{j-k}$.

⊛ Sinon, $i-1 \geqslant 0$ et $j-1 \geqslant i$, et l'on a :

$$\begin{aligned}
B_{i+1,j+1} &= B_{i,j+1} + \alpha B_{i+1,j} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{i-1} \phi_{i-1-k}(j-k)\alpha^{j-k} + \sum_{k=0}^{i} \phi_{i-k}(j-1-k)\alpha^{j-k} \qquad \text{par } \mathscr{H}_n \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} \big(\phi_{i-1-k}(j-k) + \phi_{i-k}(j-1-k)\big)\alpha^{j-k} + \phi_0(j-1-i)\alpha^{j-i} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{i-1} \phi_{i-k}(j-k)\alpha^{j-k} + \phi_0(j-i)\alpha^{j-i} \qquad \text{par le premier point et car } \phi_0 \equiv 1 \\
&= \sum_{k=0}^{i} \phi_{i-k}(j-k)\alpha^{j-k},
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad B_{i+1,i+2} \leqslant \sum_{k=0}^{i} \phi_{i-k}(i+1-k)\alpha^{i+1-k}.$$

Or pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,i]\!]$,

$$\begin{aligned}
\phi_{i-k}(i+1-k) &= \left(\frac{C(i+1-k)}{i-k}\right)^{i-k} \\
&= C^{i-k}\left(\frac{(i+1-k)}{i-k}\right)^{i-k} \\
&= C^{i-k}\exp\left((i-k)\log\left(1+\frac{1}{i-k}\right)\right) \\
&\leqslant eC^{i-k}.
\end{aligned}$$

Soit $\alpha_0 := \frac{1}{2C}$. Alors, pour $\alpha \in]0,\alpha_0]$ et $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
B_{i+1,i+2} &\leqslant \sum_{k=0}^{i} eC^{i-k}\alpha^{i+1-k} \\
&= e\sum_{\ell=0}^{i} C^{\ell}\alpha^{\ell+1} \\
&\leqslant e\alpha\sum_{\ell=0}^{\infty} (C\alpha)^{\ell} \\
&= \frac{e\alpha}{1-C\alpha} \leqslant \frac{e\alpha}{1-\frac{1}{2}} = 2e\alpha.
\end{aligned}$$

Finalement, si $\alpha < \alpha_0$ et $j > i \geqslant 1$, $B_{i,j} \leqslant B_{j-1,j} \leqslant 2e\alpha$. ■

Lemme 10

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, tous réels $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{m-1} < x$, et toute fonction $g \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a :

$$\left|g(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\left|g^{(k)}(\xi_{m-k-1})\right|}{k!}(x-\xi_{m-k-1})^k + \frac{\left\|g^{(m)}\right\|_{[\xi_0,x]}}{m!}(x-\xi_0)^m.$$

Démonstration : Procédons par récurrence.

• Pour $m=1$, soient des réels $\xi_0 < x$ et $g \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On a, par le théorème des accroissements finis :

$$\left|\frac{g(x)-g(\xi_0)}{x-\xi_0}\right| \leqslant \|g'\|_{[\xi_0,x]}.$$

D'où

$$|g(x)| \leqslant |g(\xi_0)|(x-\xi_0) + \frac{\|g'\|_{[\xi_0,x]}}{1!}(x-\xi_0).$$

• Supposons que la propriété soit vérifiée au rang $m-1$ pour un certain $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Soient des réels $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{m-1} < x$, et $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Appliquons l'hypothèse de récurrence à g'. Il vient :

$$|g'(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{m-2} \frac{|g^{(k+1)}(\xi_{m-k-2})|}{k!}(x-\xi_{m-k-2})^k + \frac{\|g^{(m)}\|_{[\xi_0,x]}}{(m-1)!}(x-\xi_0)^{m-1}.$$

Puis :

$$\int_{\xi_{m-1}}^x |g'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-2} \frac{|g^{(k+1)}(\xi_{m-k-2})|}{k!}\int_{\xi_{m-1}}^x (t-\xi_{m-k-2})^k\,\mathrm{d}t + \frac{\|g^{(m)}\|_{[\xi_0,x]}}{(m-1)!}\int_{\xi_{m-1}}^x (t-\xi_0)^{m-1}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $k \in [\![0, m-2]\!]$,

$$\int_{\xi_{m-1}}^x (t-\xi_{m-k-2})^k\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\xi_{m-k-2}}^x (t-\xi_{m-k-2})^k\,\mathrm{d}t = \frac{(x-\xi_{m-k-2})^{k+1}}{k+1}.$$

Ainsi,

$$\int_{\xi_{m-1}}^x |g'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \frac{|g^{(k)}(\xi_{m-k-1})|}{k!}(x-\xi_{m-k-1})^k + \frac{\|g^{(m)}\|_{[\xi_0,x]}}{m!}(x-\xi_0)^m.$$

Etant donné que, par ailleurs :

$$|g(x)| - |g(\xi_{m-1})| \leqslant |g(x) - g(\xi_{m-1})| = \left|\int_{\xi_{m-1}}^x g'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\xi_{m-1}}^x |g'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

le résultat s'en déduit aussitôt. ■

Fait 4

(i) Il existe $\alpha_1 \in \,]0,1[$ tel que :

$$\forall \alpha \in \,]0,\alpha_1], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k!}\alpha^k \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall j > i \geqslant 1, \quad B_{i,j} \leqslant 2e\alpha \leqslant \frac{1}{2}.$$

(ii) Soit α_1 comme ci-dessus. Fixons $\alpha \in \,]0,\alpha_1]$ et $n \in \varphi(\mathbb{N})$. On définit :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad x_i := \alpha \sum_{k=1}^{i} \frac{M'_{n-k}}{M'_{n-k+1}} \qquad (x_0 = 0).$$

Alors, pour toute $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que pour $n \in \mathbb{N}$, $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M_n$ et $f^{(n)}(0) = 0$, on a :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \forall j \in [\![0,n-i+1]\!], \quad \forall x \in [0,x_i], \quad \left|f^{(j)}(x)\right| \leqslant B_{i,n-j+1}M'_j.$$

Démonstration : **(i)** $\dfrac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)!}\dfrac{k!}{(k+1)^k} = \left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} e.$

Donc, par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(k+1)^k}{k!}x^k$ est $\frac{1}{e}$. La série de fonctions associée converge alors normalement sur tout compact de $\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$, et en particulier sa somme (nulle en 0) est continue en 0. Ainsi il existe $\alpha'_1 > 0$ tel que pour $0 < \alpha \leqslant \alpha'_1$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^k}{k!}\alpha^k \leqslant \frac{1}{2}$.

Par la lemme 9, il suffit alors de prendre $\alpha_1 := \min\left(\alpha'_1, \frac{e-1}{2e^2}, \frac{1}{4e}\right)$.

(ii) Nous allons raisonner par récurrence.
On définit pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, l'assertion :

$$\mathscr{H}_i : \text{« } \forall j \in [\![0,n-i+1]\!], \quad \forall x \in [0,x_i], \quad \left|f^{(j)}(x)\right| \leqslant B_{i,n-j+1}M'_j \text{ ».}$$

$\mathscr{H}_0$ est clairement vérifiée car $x_0 = 0$ et $f^{(j)}(0) = 0$ pour tout j.

Supposons $\mathscr{H}_0, \ldots, \mathscr{H}_{i-1}$ vérifiées pour un certain $i \in [\![1, n]\!]$. $\mathscr{H}_i$ a lieu pour $x \in [0, x_{i-1}]$. En effet, puisque, pour tout $j \in [\![0, n-i+1]\!]$, $j \leqslant n-i+2$, alors, d'après $\mathscr{H}_{i-1}$, nous avons :

$$\forall x \in [0, x_{i-1}], \quad \left|f^{(j)}(x)\right| \leqslant B_{i-1,n-j+1}M'_j \leqslant B_{i,n-j+1}M'_j.$$

Soit maintenant $x \in]x_{i-1}, x_i]$.

1) Montrons d'abord $\mathscr{H}_i$ pour $j = n-i+1$. Dans ce cas, $B_{i,n-j+1} = B_{i,i} = 1$.

- Si $M'_{n-i+1} = M_{n-i+1}$, on a la majoration voulue puisque $\left\|f^{(n-i+1)}\right\|_\infty \leqslant M_{n-i+1}$.
- Sinon, on note p et q les termes consécutifs de la suite $(\varphi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ tels que $p < n-i+1 < q$ (ces indices existent d'après la proposition 7). Comme, par hypothèse, $n \in \varphi(\mathbb{N})$, on a donc $q \leqslant n$. On note $\ell := q - (n-i+1) = i-1+(q-n)$. On a donc $\ell \leqslant i-1$.

  On pose $R := \frac{M'_p}{M'_{p+1}} = \cdots = \frac{M'_{q-1}}{M'_q}$. Ces rapports sont tous égaux car la suite $(\log M'_k)$ est arithmétique sur $[\![p, q]\!]$.

  On applique alors le lemme 10 avec $m = \ell$, $\xi_k = x_{i-\ell+k}$ pour tout $k \in [\![0, \ell-1]\!]$, et $g = f^{(n-i+1)}$:

$$\left|f^{(n-i+1)}(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\left|f^{(n-i+1+k)}(x_{i-k-1})\right|}{k!}(x-x_{i-k-1})^k + \frac{\left\|f^{(q)}\right\|_{[x_{i-\ell},x]}}{\ell!}(x-x_{i-\ell})^\ell.$$

  Par ailleurs, pour $k \in [\![0, \ell]\!]$:

  ⊛ Comme $i-1 \geqslant i-1-k \geqslant i-1-\ell \geqslant 0$, on peut invoquer l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}_{i-k-1}$, qui permet d'écrire que :

$$\left|f^{(n-i+1+k)}(x_{i-k-1})\right| \leqslant B_{i-1-k,i-k}M'_{n-i+1+k} \leqslant \frac{1}{2}M'_{n-i+1+k}.$$

  ⊛ $x_i - x_{i-k-1} = \alpha\left(\frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} + \frac{M'_{n-i+1}}{M'_{n-i+2}} + \cdots + \frac{M'_{n-i+k}}{M'_{n-i+k+1}}\right) = \alpha(k+1)R$, puisque

$$p \leqslant n-i \leqslant n-i+k \leqslant n-i+\ell = q-1. \tag{11}$$

  On obtient donc :

$$\begin{aligned}\left|f^{(n-i+1)}(x)\right| &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\ell-1} M'_{n-i+1+k}\frac{(\alpha(k+1)R)^k}{k!} + \left\|f^{(q)}\right\|_{[x_{i-\ell},x]}\frac{(\alpha(\ell+1)R)^\ell}{\ell!} \\ &\leqslant \frac{1}{2}M'_{n-i+1} + \sum_{k=1}^{\ell-1} M'_{n-i+1+k}\frac{(\alpha(k+1)R)^k}{k!} + M'_q\frac{(\alpha(\ell+1)R)^\ell}{\ell!}.\end{aligned}$$

  Or, par définition de R, et d'après (11), on a, pour $k \in [\![1, \ell]\!]$, $M'_{n-i+1} = R^k M'_{n-i+1+k}$. Donc :

$$\begin{aligned}\left|f^{(n-i+1)}(x)\right| &\leqslant \frac{1}{2}M'_{n-i+1} + \sum_{k=1}^{\ell-1} M'_{n-i+1}\frac{(\alpha(k+1))^k}{k!} + M'_{n-i+1}\frac{(\alpha(\ell+1))^\ell}{\ell!} \\ &= M'_{n-i+1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\ell}\frac{(\alpha(k+1))^k}{k!}\right) \\ &\leqslant M'_{n-i+1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^k}{k!}\alpha^k\right) \\ &\leqslant M'_{n-i+1} \qquad \text{car } \alpha \leqslant \alpha_1 \\ &= B_{i,i}M'_{n-i+1},\end{aligned}$$

  ce qui montre $\mathscr{H}_i$ pour $j = n-i+1$.

2) Montrons maintenant $\mathscr{H}_i$ pour $j \in [\![0, n-i]\!]$.

- Etablissons, par récurrence « descendante » sur $j \in [\![0, n-i]\!]$, la propriété suivante :

$$\mathscr{P}_j : \text{« } \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad \left|f^{(j)}(x)\right| \leqslant \left|f^{(j)}(x_{i-1})\right| + \alpha \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} B_{i,n-j} M'_{j+1} \text{ ».}$$

  ⊛ Quel que soit $x \in [x_{i-1}, x_i]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n-i)}(x) - f^{(n-i)}(x_{i-1})\right| &\leqslant (x - x_{i-1}) \left\|f^{(n-i+1)}\right\|_{[0,x_i]} && \text{par accroissements finis} \\
&\leqslant (x_i - x_{i-1}) M'_{n-i+1} && \text{d'après } \mathscr{H}_i \text{ pour } j = n-i+1 \\
&= \alpha B_{i,n-(n-i)} \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} M'_{(n-i)+1} && \text{car } B_{i,i} = 1.
\end{aligned}$$

  Donc, par l'inégalité triangulaire, $\mathscr{P}_{n-i}$ a lieu.

  ⊛ Supposons $\mathscr{P}_j$ vérifiée pour un certain $j \in [\![1, n-i]\!]$. Soit $x \in [x_{i-1}, x_i]$. On a donc :

$$\forall t \in [x_{i-1}, x], \quad \left|f^{(j)}(t)\right| \leqslant \left|f^{(j)}(x_{i-1})\right| + \alpha \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} B_{i,n-j} M'_{j+1}.$$

  D'où :

$$\begin{aligned}
\left|f^{(j-1)}(x) - f^{(j-1)}(x_i)\right| &= \left|\int_{x_{i-1}}^{x} f^{(j)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x} \left|f^{(j)}(t)\right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant (x - x_{i-1}) \left(\left|f^{(j)}(x_{i-1})\right| + \alpha \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} B_{i,n-j} M'_{j+1} \right) \\
&\leqslant \alpha \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} \left(B_{i-1,n-j+1} M'_j + \alpha B_{i,n-j} \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} M'_{j+1} \right) && \text{par } \mathscr{H}_{i-1} \\
&\leqslant \alpha \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} \left(B_{i-1,n-j+1} + \alpha B_{i,n-j} \right) M'_j && \text{car } \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} \leqslant \frac{M'_j}{M'_{j+1}} \\
&= \alpha \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} M'_j B_{i,n-(j-1)}.
\end{aligned}$$

  Donc, par l'inégalité triangulaire, $\mathscr{P}_{j-1}$ est vraie, ce qui achève cette récurrence.

- On obtient ainsi, pour tout $j \in [\![0, n-i]\!]$,

$$\begin{aligned}
\forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad \left|f^{(j)}(x)\right| &\leqslant \left|f^{(j)}(x_{i-1})\right| + \alpha \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} B_{i,n-j} M'_{j+1} \\
&\leqslant B_{i-1,n-j+1} M'_j + \alpha B_{i,n-j} \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} M'_{j+1} && \text{par } \mathscr{H}_{i-1} \\
&\leqslant \left(B_{i-1,n-j+1} + \alpha B_{i,n-j} \right) M'_j && \text{car } \frac{M'_{n-i}}{M'_{n-i+1}} \leqslant \frac{M'_j}{M'_{j+1}} \\
&= B_{i,n-j+1} M'_j.
\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{H}_i$ est vraie pour $j \in [\![0, n-i]\!]$.

Finalement, on a établi que $\mathscr{H}_i$ est vraie quel que soit $j \in [\![0, n-i+1]\!]$, ce qui achève la démonstration. ■

Comme conséquence immédiate de ce résultat, on obtient la conclusion de notre raisonnement, qui clôt la démonstration du théorème de Denjoy-Carleman :

Corollaire 4

Si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M_n$ et $f^{(n)}(0) = 0$,
alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : On reprend toutes les notations du fait 4. Soit $x > 0$. Fixons $\alpha \in]0, \alpha_1]$.

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{M'_{n-k}}{M'_{n-k+1}} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{M'_{\ell}}{M'_{\ell+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, on a, pour tout n assez grand, $\displaystyle\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{M'_{n-k}}{M'_{n-k+1}} > x$.

On peut donc choisir $n \in \varphi(\mathbb{N})$ vérifiant cette inégalité. En utilisant les notations et le résultat du fait 4 (pour $i = n$ et $j = 0$), on obtient $x_n > x$ et $|f(x)| \leqslant B_{n,n+1} M'_0 \leqslant 2e\alpha M'_0$. Cela étant valable pour $\alpha \in]0, \alpha_1]$ quelconque, on fait tendre α vers 0, pour obtenir que $f(x) = 0$.
Donc f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est de plus nulle en zéro par hypothèse.

On considère alors $\check{f} : x \longmapsto f(-x)$, qui vérifie les mêmes hypothèses que f, et qui est donc nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Finalement f est nulle sur $\mathbb{R}$. ■

Références

[1] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II. John Wiley & Sons, 1966. p. 219-227.

[2] T. GALLAY, « Théorie de la mesure et de l'intégration ». `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/enseignement/IMG/pdf/integrationa.pdf`, 2008-2009. p. 51.

[3] M. REED et B. SIMON, *Fourier Analysis, Self-Adjointness*, vol. 2. Academic Press, 1975. p. 145, 341.

[4] S. MANDELBROJT, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*. Gauthier-Villars, 1952.

[5] P.-J. COHEN, « A simple proof of the Denjoy-Carleman theorem », *in American Mathematical Monthly*, vol. 75, p. 26–31, janvier 1968.

Figures

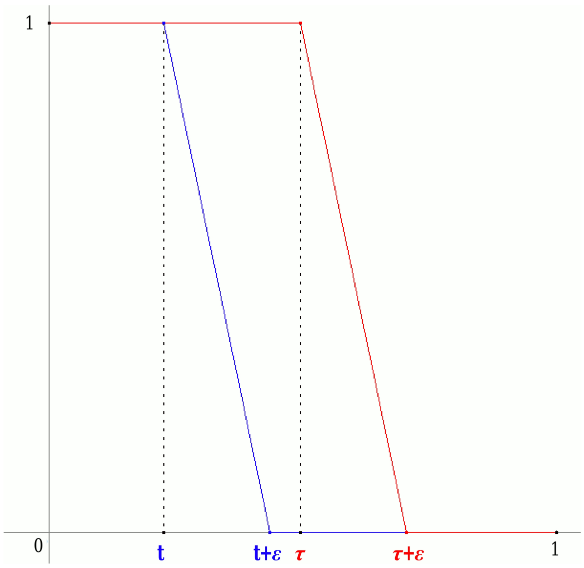


FIGURE 1 – courbes représentatives de $u_{t,\varepsilon}$ et $u_{\tau,\varepsilon}$ pour $t+\varepsilon \leqslant \tau$

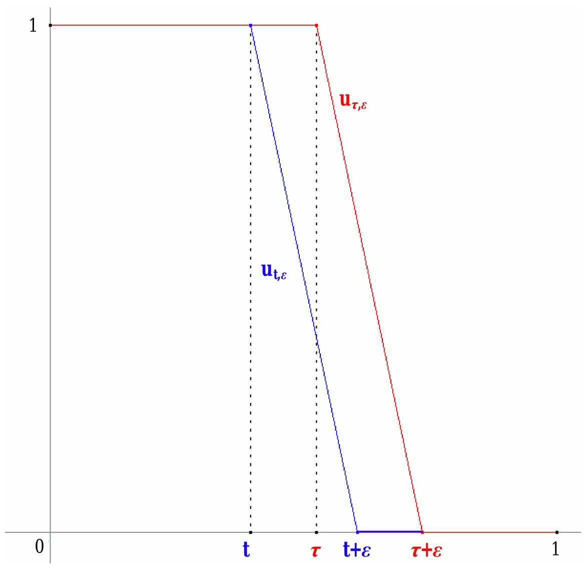


FIGURE 2 – courbes représentatives de $u_{t,\varepsilon}$ et $u_{\tau,\varepsilon}$ pour $t+\varepsilon > \tau$