

UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

RAPPORT TER :

---

## Problème de l'aiguille de Kakeya

---



FIGURE 1 – Sōichi Kakeya, 18 janvier 1886 – 9 janvier 1947

### RÉSUMÉ :

Le problème de Kakeya est un célèbre problème d'analyse, proposé en 1917 par le mathématicien japonais Sōichi Kakeya. Ce problème d'apparence simple, a pourtant une difficulté profonde puisque de nombreux mathématiciens, comme par exemple Jean Bourgain ou Terence Tao, se sont penchés sur le problème et qu'une partie du problème, à savoir la conjecture de Kakeya, n'est à ce jour toujours pas résolue.

DUHAMEL CLÉMENT

Tuteur : M. PAJOT

Année 2017-2018

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Le cas des corps finis</b>	<b>3</b>
1.1 Une première borne intéressante . . . . .	3
1.2 La preuve de Zeev Dvir . . . . .	6
<b>2 Mesure et dimension de Hausdorff</b>	<b>10</b>
2.1 Mesure de Hausdorff . . . . .	10
2.2 Dimension de Hausdorff . . . . .	12
<b>3 Construction d'un ensemble de Kakeya</b>	<b>15</b>
3.1 Notions de rectifiabilité . . . . .	15
3.2 L'ensemble de Cantor 4-coins est purement non-rectifiable . .	16
3.3 Construction d'un ensemble de Kakeya . . . . .	22
<b>4 Le problème actuel de Kakeya</b>	<b>26</b>
4.1 La conjecture actuelle . . . . .	26
4.2 Le cas résolu de la dimension 2 . . . . .	26
<b>Conclusion</b>	<b>28</b>

# Introduction :

Le problème initial posé en 1917 est le suivant : Quelle est l'aire minimale pour retourner une aiguille de longueur 1 de 180 degrés dans le plan ? Abram Besicovitch (1891-1970) a démontré que l'on peut retourner l'aiguille de 180 degrés dans une aire aussi petite que l'on souhaite, grâce à la construction d'ensembles de mesure nulle qui contiennent des droites dans toutes les directions.

Cependant, l'histoire ne s'arrête pas là, puisque nous verrons que tout ensemble de Besicovitch (c'est-à-dire qui contient une droite dans chaque direction) du plan est de dimension de Hausdorff 2, et il est naturel de se demander ce qu'il en est en dimension supérieure. La réponse à cette question n'est pour l'instant pas connue mais la conjecture actuelle dit que tout ensemble de Besicovitch de  $\mathbb{R}^n$  est de dimension de Hausdorff égale à  $n$ .

Cela montre clairement la richesse du problème de Kakeya, qui plus de 100 ans après sa création n'a toujours pas été entièrement résolu. Cette conjecture a néanmoins été résolue dans le cas des corps finis, mais cette preuve ne semble pas s'étendre au cas général car elle utilise des résultats très spécifiques au corps finis.

Dans ce rapport, nous commencerons par étudier le cas des corps finis, car même s'il est très restrictif, il permet de comprendre les bases du problème.

Ensuite, nous passerons au cas euclidien, en commençant par introduire les notions de mesures de Hausdorff et de dimensions de Hausdorff qui nous seront fondamentales pour la suite.

Nous nous intéresserons après cela à la construction effective d'un ensemble de Besicovitch de mesure nulle (ensemble de Kakeya) à partir de l'ensemble de Cantor 4-coins, qui est un exemple d'ensemble purement non rectifiable du plan.

Enfin, nous parlerons de la conjecture actuelle de Kakeya, qui dit que tout ensemble de Besicovitch de  $\mathbb{R}^n$  est de dimension de Hausdorff  $n$ , et nous proposerons une démonstration dans le cas particulier de la dimension 2.

# Chapitre 1

## Le cas des corps finis

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas particulier des corps finis, sur lesquels la conjecture de Kakeya, dont nous avons parlé en introduction, est résolue. Ceci est dû principalement, à un chercheur de l'université de Princeton nommé Zeev Dvir, qui donna en 2008, une preuve surprenante de cette conjecture.

### 1.1 Une première borne intéressante

On considère  $V$  un  $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On note alors  $V = \mathbb{F}_{q^n}$  qui est un corps fini à  $q^n$  éléments.

**Définition 1.** On appelle ensemble de Besicovitch un sous ensemble  $E$  de  $V$  qui contient une droite dans toutes les directions c'est-à-dire :

$$\forall e \in V \setminus \{0\}, \exists a \in V, a + te \in E, \forall t \in \mathbb{F}_q$$

L'intérêt de l'étude du problème de Kakeya dans le contexte restreint des corps finis, est qu'il permet d'avoir une borne pour le cardinal de  $E$  en  $q^n$ , autrement dit il existe une constante  $C_n$  tel que  $|E| \geq C_n^{-1} q^n$  (Preuve de Dvir). Cependant, on ne peut pas étendre cette borne au cas euclidien. Nous allons donc commencer par nous intéresser à une borne moins forte de ce cardinal en  $q^{\frac{n+2}{n}}$  qui s'étend au cas euclidien.

**Théorème 1.** Soit  $E$  un ensemble de Besicovitch, alors il existe une constante  $C_n$  ne dépendant que de  $n$  tel que :  $|E| \geq C_n^{-1} q^{\frac{n+2}{n}}$

*Démonstration.*

**Cas  $n=2$  :**

On commence par montrer un résultat plus fort dans le cas  $n = 2$  qui nous sera utile par la suite, pour le cas  $n \geq 3$ .

On suppose donc que  $E$  contient au moins  $\frac{q}{2}$  points sur  $m$  droites  $\{l_j\}_{j=1}^m$  dont les directions sont toutes différentes, montrons qu'alors  $|E| \gtrsim mq$ . On a d'abord :

$$\left( \sum_{j=1}^m |E \cap l_j| \right)^2 = \left( \sum_{x \in E} \left( \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{l_j}(x) \right) \right)^2 \leq |E| \left( \sum_{x \in E} \left( \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{l_j}(x) \right)^2 \right)$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \sum_{x \in E} f(x)g(x)$  et en notant que  $|E| = \sum_{x \in E} \mathbf{1}_{l_j}(x)^2$

$$\begin{aligned} \text{Or } \sum_{x \in E} \left( \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{l_j}(x) \right)^2 &= \sum_{x \in E} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \mathbf{1}_{l_j}(x) \mathbf{1}_{l_k}(x) \quad (\text{propriétés de l'indicatrice}) \\ &= \sum_{1 \leq j, k \leq m} \sum_{x \in E} \mathbf{1}_{l_j \cap l_k}(x) \quad (\text{sommées finies}) \\ &\leq \sum_{1 \leq j, k \leq m} |l_j \cap l_k| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \left( \sum_{j=1}^m |E \cap l_j| \right)^2 &\leq |E| \sum_{1 \leq j, k \leq m} |l_j \cap l_k| \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^m |E \cap l_j| \leq |E|^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{1 \leq j, k \leq m} |l_j \cap l_k| \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ensuite, comme  $n=2$  deux droites  $l_j$  et  $l_k$   $j \neq k$  s'intersectent en un unique point (car par hypothèse les directions sont toutes différentes) donc :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j, k \leq m} |l_j \cap l_k| &= \sum_{j=1}^m |l_j \cap l_j| + \sum_{j=1}^m \sum_{k \neq j} |l_j \cap l_k| \\ &= mq + m(m-1) \\ &= m(m-1+q) \end{aligned} \quad (1.2)$$

On remarque également que  $m \leq q+1$ . En effet, on cherche à dénombrer le nombre de directions possibles pour des droites dans  $\mathbb{F}_q^2$ . Tout d'abord, multiplier la direction par un  $\lambda$  appartenant à  $\mathbb{F}_q$  conserve la même droite. Or, on a  $q^2-1$  choix possibles de vecteurs  $(v_1, v_2)$  qui pourraient représenter nos  $m$  directions (car on enlève le cas  $(0,0)$ ). À cela, on doit cependant diviser par le nombre de  $\lambda$  tel que  $(\lambda v_1, \lambda v_2)$  nous donne la même direction. On obtient donc  $\frac{q^2-1}{q-1} = q+1$  directions possibles différentes (car  $\lambda \in \mathbb{F}_q$  et  $\lambda \neq 0$ ). Finalement on a donc montré que :

$$m \leq q+1 \Leftrightarrow m-1 \leq q \quad (1.3)$$

On peut donc conclure :

$$\frac{1}{2}qm \leq \sum_{j=1}^m |E \cap l_j| \quad \text{car } E \text{ contient au moins } \frac{q}{2} \text{ points sur chaque droite}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}qm \leq |E|^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{1 \leq j, k \leq m} |l_j \cap l_k| \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{d'après (1.1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}qm \leq |E|^{\frac{1}{2}} (m(m-1+q))^{\frac{1}{2}} \quad \text{d'après (1.2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}qm \leq |E|^{\frac{1}{2}} (m(2q))^{\frac{1}{2}} \quad \text{d'après (1.3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}qm \leq \sqrt{2}|E|^{\frac{1}{2}}(mq)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow |E|^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}(mq)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow |E| \geq \frac{1}{8}mq$$

Finalement, on a bien montré que si  $E$  possède au moins  $\frac{q}{2}$  points sur  $m$  droites  $\{l_j\}_{j=1}^m$  dont les directions sont toutes différentes alors  $|E| \gtrsim mq$ . Le résultat du théorème pour  $n = 2$  se déduit en prenant  $m = q + 1$ .

**Cas  $n \geq 3$  :**

Traisons maintenant le cas  $n \geq 3$  : On se fixe  $\mu > 0$ ,

On commence par donner la définition suivante :

On dit que  $l_k$  est une droite de haute multiplicité (par rapport à  $\mu$ ) s'il existe au moins  $\frac{q}{2}$  points de  $l_k$  parmi les  $q$  points de  $l_k$ , qui appartiennent chacun à au moins  $\mu + 1$  droites, c'est-à-dire si l'on note  $x$  un tel point, on doit avoir :  $|\{j, x \in l_j\}| \geq \mu + 1$ . On distingue alors deux sous-cas :

**1<sup>er</sup> sous-cas : il n'existe pas de droite de haute multiplicité :**

On considère l'ensemble  $F$  des points de  $E$  qui appartiennent à moins de  $\mu$  droites  $l_j$  :

$$F = \{x \in E, |\{j, x \in l_j\}| \leq \mu\}$$

On remarque que  $F$  intersecte chaque  $l_j$  en au moins  $\frac{q}{2}$  points car sinon il y aurait une contradiction avec la non-existence d'une droite de haute multiplicité. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe un  $j$  tel que  $l_j$  intersecte le complémentaire de  $F$  en au moins  $\frac{q}{2}$  points, c'est-à-dire que  $l_j$  est une droite de haute multiplicité.

On remarque également qu'il y a environ  $q^{n-1}$  droites différentes dans  $\mathbb{F}_q^n$ . En effet, on cherche à dénombrer le nombre de directions possibles pour des droites dans  $\mathbb{F}_q^n$ . On a toujours, comme pour le cas  $n = 2$ , que multiplier la direction par un  $\lambda$  appartenant à  $\mathbb{F}_q$  conserve la même droite. Or, on a  $q^n - 1$  choix possibles de vecteurs  $(v_1, \dots, v_n)$  qui pourraient représenter nos directions (car on enlève le cas  $(0, \dots, 0)$ ). A cela, on doit cependant diviser par le nombre de  $\lambda$  tel que  $(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n)$  nous donne la même direction. On obtient donc  $\frac{q^n - 1}{q - 1} \approx q^{n-1}$  droites possibles différentes (car  $\lambda \in \mathbb{F}_q$  et  $\lambda \neq 0$ ).

Finalement on a donc montré qu'il y a environ  $q^{n-1}$  droites possibles.

On a :  $|E| \geq |F|$

or chaque point de  $F$  appartient à moins de  $\mu$  droites  $l_j$  donc  $\sum_j |F \cap l_j| \leq \mu |F|$

$$\Rightarrow |E| \geq \mu^{-1} \sum_j |F \cap l_j| \quad (\text{or d'après la première remarque } |F \cap l_j| \geq \frac{q}{2})$$

$$\Rightarrow |E| \geq \mu^{-1} C_n q q^{n-1} \quad \text{d'après la deuxième remarque}$$

avec  $C_n$  une constante ne dépendant que de  $n$

$$\Rightarrow |E| \gtrsim \mu^{-1} q^n$$

**2<sup>eme</sup> sous-cas : il existe une droite de haute multiplicité  $l_k$  :**

On considère  $\{\pi_i\}$  des plans contenant  $l_k$ .

On commence par faire la remarque suivante. Par définition de la haute multiplicité, il y a au moins  $\frac{\mu q}{2}$  droites  $l_j$ ,  $j \neq k$  qui intersectent  $l_k$ .

Chacune des  $l_j$  est contenue dans un unique plan  $\pi_i$  et contient  $q - 1$  points de  $l_j$  non contenus dans  $l_k$  (car deux droites s'intersectent en au plus un point et une droite contient  $q$  points).

Soit  $\mathcal{L}_i$  l'ensemble des droites contenues dans un  $\pi_i$  donné.

On utilise le fait que les ensembles  $\pi_i \cap (V \setminus l_k)$  sont disjoints 2 à 2 pour dire que :

$$|E| = \sum_i |E \cap \pi_i \cap (V \setminus l_k)|$$

Or le cas  $n = 2$  nous donne :  $|E \cap \pi_i \cap (V \setminus l_k)| \gtrsim q |\mathcal{L}_i|$

$$\Rightarrow |E| \gtrsim q \sum_i |\mathcal{L}_i|$$

$$\Rightarrow |E| \gtrsim q \frac{\mu q}{2} \text{ d'après la remarque}$$

$$\Rightarrow |E| \gtrsim \mu q^2$$

**Conclusion :**

Maintenant, on prend  $\mu$  de l'ordre de  $q^{\frac{n-2}{2}}$  on a alors :

$$\rightarrow \text{dans le premier sous-cas } |E| \gtrsim q^{-\frac{n}{2}+1} q^n = q^{\frac{n+2}{2}}$$

$$\rightarrow \text{dans le deuxième sous-cas } |E| \gtrsim q^{\frac{n-2}{2}} q^2 = q^{\frac{n+2}{2}}$$

Donc dans les deux cas, on a bien montré que  $|E| \gtrsim q^{\frac{n+2}{2}}$ . □

## 1.2 La preuve de Zeev Dvir

On s'intéresse maintenant à la preuve de Zeev Dvir qui permet de valider la conjecture de Kakeya dans le cas des corps finis. En effet, on va montrer que tout ensemble de Besicovitch sur  $\mathbb{F}_q^n$  est de cardinal au moins  $C_n q^n$  où  $C_n$  est une constante qui ne dépend que de  $n$ . Cette preuve consiste à trouver un lien fort entre l'ensemble des zéros d'un polynôme à  $n$  indéterminées et son degré. Pour cela, on commence par rappeler le cas  $n = 1$ , qui nous servira d'ailleurs par la suite. On considère un corps  $\mathbb{K}$ , et on note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à une variable à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

**Lemme 1.** *Soient  $x \in \mathbb{K}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$   
 $x$  est racine du polynôme  $P$  si et seulement si  $X - x$  divise  $P$ .*

*Démonstration.*

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $x \in \mathbb{K}$ .

On effectue la division euclidienne de  $P$  par  $X - x$  :

$$\exists Q, R \in \mathbb{K}[X], P = Q(X - x) + R \text{ avec } \deg(R) < 1$$

On a donc  $P = Q(X - x) + R$  avec  $R$  constante appartenant à  $\mathbb{K}$

On évalue l'égalité en  $x$ , et on a donc :  $P(x) = R$

d'où le résultat :  $x$  est racine de  $P$  si et seulement si  $X - x$  divise  $P$ . □

**Corollaire 1.** *Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{K}^k$ ,  
 $x_1, \dots, x_k$  sont des racines distinctes du polynôme  $P$   
si et seulement si  $\prod_{i=1}^k (X - x_i)$  divise  $P$ .*

*Démonstration.*

On procède par récurrence sur le nombre de racines :

-Initialisation : Il s'agit du lemme 1.

-Hérédité : On suppose que  $P$  a  $n$  racines distinctes  $x_1, \dots, x_n$  et se factorise

comme décrit.

On a :  $P(X) = Q(X) \prod_{i=1}^n (X - x_i)$  avec  $Q \in \mathbb{K}[X]$

On prend  $x_{n+1}$  une autre racine.

On a donc  $P(x_{n+1}) = 0$ , c'est-à-dire  $Q(x_{n+1}) \prod_{i=1}^n (x_{n+1} - x_i) = 0$

Or les  $(x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$  sont tous différents de  $x_{n+1}$  donc  $Q(x_{n+1}) = 0$

On applique le lemme 1 à  $Q$  et on obtient la factorisation souhaitée.

-Conclusion : On a donc montré que si  $x_1, \dots, x_k$  sont des racines distinctes du polynôme  $P$ , alors  $\prod_{i=1}^k (X - x_i)$  divise  $P$ . La réciproque est triviale.  $\square$

**Théorème 2.** Soit  $d \geq 1$  un entier.

1) Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un polynôme non nul de degré au plus  $d$ , alors l'ensemble  $\{x \in \mathbb{K}, P(x) = 0\}$  est de cardinal au plus  $d$ .

2) Réciproquement, étant donné un ensemble  $E \subset \mathbb{K}$  de cardinal au plus  $d$ , il existe un polynôme non nul  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré au plus  $d$  qui s'annule sur  $E$ .

*Démonstration.*

1) Soit  $P$  un polynôme non nul de degré au plus  $d$  ( $d \geq 1$ )

Supposons par l'absurde que l'ensemble  $\{x \in \mathbb{K}, P(x) = 0\}$  est de cardinal au moins  $d + 1$ ;

d'après le corollaire 1, on a donc l'existence d'un polynôme de degré  $d + 1$  qui divise  $P$  ce qui contredit le fait que  $P$  est de degré au plus  $d$ .

2) On considère un ensemble  $E$  de cardinal au plus  $d$ ,

- Si  $E = \emptyset$ , on considère  $P(X) = 1$  qui s'annule sur  $E$  et tel que  $\deg(P) = 1 \leq d$

- Si  $E \neq \emptyset$ , on considère  $P(X) = \prod_{x \in E} (X - x)$  qui s'annule sur  $E$  et tel que  $\deg(P) \leq d$ , par définition de  $E$  et de  $P$ .  $\square$

Ces deux résultats nous disent essentiellement que pour contrôler la taille d'un ensemble  $E$  sur un corps  $\mathbb{K}$ , il suffit de contrôler le degré d'un polynôme qui s'annule sur  $E$ . Il existe des résultats similaires à ces deux énoncés en dimension supérieur que nous allons voir maintenant, et qui nous serviront à démontrer la conjecture de Kakeya dans le cas des corps finis.

**Lemme 2.** Soit  $E \subset \mathbb{F}_{q^n}$  un ensemble de cardinal strictement inférieur à

$\binom{n+d}{n}$  pour  $d \geq 0$  un entier. Alors il existe un polynôme non nul

$P \in \mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_n]$  de  $n$  variables et de degré au plus  $d$  qui s'annule sur  $E$ .

*Démonstration.*

Soit  $V$  l'espace vectoriel des polynôme  $P \in \mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_n]$  de degré inférieur ou égal à  $d$ .

Une base de cet espace vectoriel est l'ensemble des  $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$ ,

avec  $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$  et  $\sum_{i=1}^n k_i \leq d$

On remarque que  $|\{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^n k_i = d\}| = \binom{n+d-1}{d} = \binom{n+d-1}{n-1}$

Donc par récurrence sur  $d$ , et en utilisant la formule du triangle de Pascal, on

obtient que :  $|\{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^n k_i \leq d\}| = \binom{n+d}{n}$



Donc  $V$  est de dimension  $\binom{n+d}{n}$

D'autre part, l'espace vectoriel  $\mathbb{F}_q^E$  des fonctions  $f : E \rightarrow \mathbb{F}_q$  est de cardinal  $p^{|E|}$ .  $\mathbb{F}_q^E$  est de dimension  $|E|$  en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbb{F}_q$  car une base de  $\mathbb{F}_q^E$  est l'ensemble des fonctions de la forme

$$de_i : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{F}_q \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = e_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad \text{pour } e_i \text{ parcourant } E.$$

Or par hypothèse  $|E| < \binom{n+d}{n}$  donc  $\mathbb{F}_q^E$  est de dimension  $< \binom{n+d}{n}$

On considère l'application  $pr : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{F}_q^E \\ P \longmapsto (P(x))_{x \in E} \end{cases}$

Cette application n'est pas injective car  $\dim V > \dim \mathbb{F}_q^E$

Donc le noyau de  $pr$  n'est pas réduit à  $\{0\}$  (car non injective et linéaire).

Donc il existe un polynôme non nul dans  $V$  (donc de degré inférieur ou égal à  $d$ ) tel que la projection sur  $\mathbb{F}_q^E$  soit nulle, c'est-à-dire qui s'annule sur  $E$ .  $\square$

**Proposition 1.** Soit  $P \in \mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_n]$  un polynôme de degré au plus  $|\mathbb{F}_q| - 1$  qui s'annule sur un ensemble de Besicovitch  $E$ , alors,  $P$  est le polynôme nul.

*Démonstration.*

On suppose par l'absurde que  $P$  n'est pas nul.

On décompose  $P$  comme somme de ses composantes homogènes :

$P = \sum_{i=0}^d P_i$  où  $0 \leq d \leq |\mathbb{F}_q| - 1$  est le degré de  $P$  et  $P_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante homogène de  $P$ .

Comme  $P$  n'est pas le polynôme nul, on a que  $P_d$  n'est pas le polynôme nul.

De plus, par hypothèse,  $P$  s'annule sur  $E \neq \emptyset$

Donc  $P$  ne peut pas être constant et donc  $d$  n'est pas nul.

Soit  $v \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$ . Comme  $E$  est un ensemble de Besicovitch,

$E$  contient une droite  $D_v$  dans la direction  $v : D_v = \{x_v + tv, t \in \mathbb{F}_q\}$

pour un certain  $x_v \in \mathbb{F}_q^n$ . Or  $P$  s'annule sur  $E \supset D_v$

Donc  $P(x_v + tv) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{F}_q$ .

Le membre de gauche de l'égalité est un polynôme en  $t$  de degré au plus  $|\mathbb{F}_q| - 1$  comme composition de polynômes.

On peut donc appliquer le théorème sur les polynômes à une indéterminée,

et on obtient que le polynôme  $\begin{cases} \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q^n \\ t \longmapsto P(x_v + tv) \end{cases}$  est le polynôme nul.

Le coefficient en  $t^d$  de ce polynôme est  $P_d(v)$  qui est donc nul pour tout  $v \in \mathbb{F}_q^n$ . Donc  $P_d$  est identiquement nul sur  $\mathbb{F}_q^n$  ce qui donne une contradiction.

On en conclut donc par l'absurde, que tout polynôme  $P \in \mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_n]$  de degré au plus  $|\mathbb{F}_q| - 1$ , qui s'annule sur un ensemble de Besicovitch est le polynôme nul.  $\square$

**Corollaire 2.** Soit  $E$  un ensemble de Besicovitch dans  $\mathbb{F}_q^n$ , alors  $|E| \geq \binom{|\mathbb{F}_q| + n - 1}{n}$ .

*Démonstration.*

Supposons par l'absurde que  $|E| < \binom{|\mathbb{F}_q| + n - 1}{n}$ , d'après le lemme 2, il existe un polynôme non nul  $P \in \mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_n]$  de degré au plus  $|\mathbb{F}_q| - 1$  qui s'annule sur  $E$ . On applique la proposition 1 à ce polynôme et on obtient que  $P$  est le polynôme nul, ce qui donne une contradiction car  $P$  est supposé non nul.  $\square$

On arrive ensuite au théorème majeur de cette partie qui répond véritablement au problème de Kakeya dans le cas des corps finis et qui s'avère être un corollaire du résultat précédent.

**Théorème 3.** Soit  $E \subset \mathbb{F}_q^n$  un ensemble de Besicovitch. Alors,  $|E| \geq C_n |\mathbb{F}_q|^n$  où  $C_n$  est une constante ne dépendant que de  $n$ .

*Démonstration.*

D'après le corollaire 2 :  $|E| \geq \binom{|\mathbb{F}_q| + n - 1}{n}$

or  $\binom{|\mathbb{F}_q| + n - 1}{n} = \frac{(|\mathbb{F}_q| + n - 1)(|\mathbb{F}_q| + n - 2) \dots (|\mathbb{F}_q|)}{n!} = \frac{|\mathbb{F}_q|^n}{n!} + O_n(|\mathbb{F}_q|^{n-1})$

On a donc  $|E| \geq C_n |\mathbb{F}_q|^n$  en prenant  $C_n = \frac{1}{n!}$   $\square$

Malheureusement, cette méthode polynomiale est extrêmement dépendante de la structure algébrique des corps finis et ne semble pas s'étendre directement au cas euclidien.

## Chapitre 2

# Mesure et dimension de Hausdorff

La notion de dimension de Hausdorff sur un espace métrique séparable a été introduite pour la première fois en 1918 par Felix Hausdorff, puis développée par Adam Besicovitch. Avant de définir la notion de dimension de Hausdorff, nous avons besoin de la notion de mesure de Hausdorff. Etant donné l'utilisation souhaitée, on se restreint au cas euclidien  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 1$  muni de la distance euclidienne.

On commence par rappeler la notion de mesure extérieure :

**Définition 2.** On appelle mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^n$  une application positive  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que :

$$* \mu(\emptyset) = 0$$

$$* \forall A \subset B \subset \mathbb{R}^n, \mu(A) \leq \mu(B)$$

$$* \forall (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}, \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$$

**Remarque 1.** Pour une mesure extérieure, la propriété de  $\sigma$ -additivité de la notion classique de mesure est remplacée par une propriété de  $\sigma$ -sous additivité. Dans le cas d'une mesure extérieure, il n'y a pas à priori de tribu associée.

Cependant, si l'on considère l'ensemble des parties  $\mu$ -mesurables de  $\mathbb{R}^n$  :

$$M_\mu = \{A \subset \mathbb{R}^n, \forall B \subset \mathbb{R}^n, \mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)\}$$

alors  $M_\mu$  est une tribu et la restriction de  $\mu$  à  $M_\mu$  est une mesure sur  $(\mathbb{R}^n, M_\mu)$ .

### 2.1 Mesure de Hausdorff

Soient  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $s > 0$  et  $\varepsilon > 0$

On appelle  $\varepsilon$ -recouvrement de  $A$  un recouvrement de  $A$  par des parties  $X \subset \mathbb{R}^n$  telles que  $\text{diam}(X) \leq \varepsilon$  avec  $\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) | x \in X, y \in X\}$ .

On note  $R_\varepsilon(A)$  l'ensemble des  $\varepsilon$ -recouvrements au plus dénombrables de  $A$ .

On commence par remarquer que  $R_\varepsilon(A) \neq \emptyset$  :

En effet,  $\mathbb{R}^n$  est une réunion dénombrable de parties compactes :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m \text{ avec } K_m \text{ compact.}$$

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , comme  $K_m$  est compact, on peut extraire du recouvrement  $(B(x, \frac{\varepsilon}{2}))_{x \in K_m}$  un sous-recouvrement fini.

On peut donc écrire  $\mathbb{R}^n$  comme réunion dénombrable d'ensembles de diamètres inférieur ou égal à  $\varepsilon$ . On intersecte ensuite  $A$  avec chaque boule de ce recouvrement, et on obtient un  $\varepsilon$ -recouvrement de  $A$  au plus dénombrable donc  $R_\varepsilon(A) \neq \emptyset$ .

Avant d'introduire la mesure de Hausdorff, nous avons besoin de la notion suivante :

On considère l'application  $\mathcal{H}_\varepsilon^s : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ A & \longmapsto & \inf_{D \in R_\varepsilon(A)} \sum_{X \in D} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(X)}{2} \right)^s \end{cases}$

avec  $\alpha(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2} + 1)$  où  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler.

**Proposition 2.** *Les applications  $\mathcal{H}_\varepsilon^s$  sont des mesures extérieures sur  $\mathbb{R}^n$ . Aussi, pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'$  on a que  $\mathcal{H}_\varepsilon^s \geq \mathcal{H}_{\varepsilon'}^s$ .*

*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$ , On veut montrer que  $\mathcal{H}_\varepsilon^s$  est une mesure extérieure :

\*  $\mathcal{H}_\varepsilon^s(\emptyset) = \inf_{D \in R_\varepsilon(\emptyset)} \sum_{X \in D} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(X)}{2} \right)^s$

or  $\{\emptyset\} \in R_\varepsilon(\emptyset)$  et  $\sum_{X \in \{\emptyset\}} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(X)}{2} \right)^s = 0$

donc  $\mathcal{H}_\varepsilon^s(\emptyset) = 0$

\* Soient  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ,

Tout  $\varepsilon$ -recouvrement au plus dénombrable de  $B$  donne un  $\varepsilon$ -recouvrement au plus dénombrable de  $A$ . ( $R_\varepsilon(B) \subset R_\varepsilon(A)$ )

On a donc  $\mathcal{H}_\varepsilon^s(A) \leq \mathcal{H}_\varepsilon^s(B)$ .

\* Soit  $(A_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ,

Pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , si  $(A_{m,l})_l$  est un  $\varepsilon$ -recouvrement au plus dénombrable de  $A_m$  alors  $(A_{m,l})_{m,l}$  est un  $\varepsilon$ -recouvrement au plus dénombrable de  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ .

On a alors :

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s \left( \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \right) \leq \sum_{(m,l) \in \mathbb{N}^2} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(A_{m,l})}{2} \right)^s = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(A_{m,l})}{2} \right)^s \right)$$

Ceci étant vrai quelque soit les  $\varepsilon$ -recouvrements au plus dénombrables  $(A_{m,l})_l$  de  $A_m$ , on a donc que :

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s \left( \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \right) \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \inf_{(A_{m,l})_l \in R_\varepsilon(A_m)} \left( \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(A_{m,l})}{2} \right)^s \right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A_m)$$

On a finalement montré que les applications  $\mathcal{H}_\varepsilon^s$  sont des mesures extérieures sur  $\mathbb{R}^n$ .

Deuxièmement,

soient  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'$  et  $A \subset \mathbb{R}^n$

on a alors  $R_\varepsilon(A) \subset R_{\varepsilon'}(A)$  donc  $\mathcal{H}_\varepsilon^s(A) \geq \mathcal{H}_{\varepsilon'}^s(A)$ . □

On peut maintenant donner la définition de  $s$ -mesure de Hausdorff. L'idée est la suivante : on a défini les applications  $\mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$  comme des bornes inférieures sur un ensemble de  $\varepsilon$ -recouvrements de  $A$ . Cette famille de fonctions étant décroissante par rapport à  $\varepsilon$ , on définit la  $s$ -mesure de Hausdorff comme la borne supérieure sur  $\varepsilon$  de ces fonctions, c'est-à-dire la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

**Définition 3.** Soit  $s > 0$ , on appelle  $s$ -mesure de Hausdorff sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\text{l'application suivante : } \mathcal{H}^s : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ A & \longmapsto \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A) \end{cases}$$

Autrement dit,  $\mathcal{H}^s = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \mathcal{H}_\varepsilon^s$  d'après le second point de la proposition précédente.

**Théorème 4.** Soit  $s > 0$ , la  $s$ -mesure de Hausdorff est une mesure extérieure.

*Démonstration.*

D'après la proposition précédente, pour tout  $\varepsilon > 0$ , les applications  $\mathcal{H}_\varepsilon^s$  sont toutes des mesures extérieures sur  $\mathbb{R}^n$ , on a donc pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$* \mathcal{H}_\varepsilon^s(\emptyset) = 0$$

$$* \forall A \subset B \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{H}_\varepsilon^s(A) \subset \mathcal{H}_\varepsilon^s(B)$$

$$* \forall (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}, \mathcal{H}_\varepsilon^s \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A_k)$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 dans les trois points ci-dessus, comme  $\mathcal{H}^s = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \mathcal{H}_\varepsilon^s$ ,

on a donc que la  $s$ -mesure de Hausdorff est une mesure extérieure.  $\square$

**Exemples :**

·  $s = 0$  :  $\mathcal{H}^0$  est la mesure de comptage.

·  $s = 1$  :  $\mathcal{H}^1(\Gamma)$  est la longueur d'une courbe  $\Gamma$ . (où  $\Gamma$  est un lacet simple)

·  $s = n$  :  $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$  (où  $\mathcal{L}^n$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ )

Ceci explique donc la normalisation en  $\frac{\alpha(s)}{2^s}$ .

## 2.2 Dimension de Hausdorff

Dans cette section, on considère toujours l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 1$  fixé. On va étudier le rôle de  $s > 0$  que l'on a fixé jusqu'à maintenant. On va montrer dans un premier temps que la  $s$ -mesure de Hausdorff est nulle pour  $s$  suffisamment grand et vaut l'infini pour  $s$  suffisamment petit. On va alors définir la dimension de Hausdorff comme le  $s$  "intermédiaire" entre les  $s$  grands qui donnent une mesure nulle et les petits qui donnent une mesure infinie. On commence par le lemme suivant :

**Lemme 3.** Soient  $0 \leq s < t < +\infty$  et  $A \subset \mathbb{R}^n$ , on a :

1) Si  $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$  alors  $\mathcal{H}^t(A) = 0$

2) Si  $\mathcal{H}^t(A) > 0$  alors  $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$

*Démonstration.*

1) Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$ , on veut montrer que  $\mathcal{H}^t(A) = 0$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on considère  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  un  $\varepsilon$ -recouvrement au plus dénombrable de  $A$  tel que  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(X_i)}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}_\varepsilon^s(A) + 1$

(Ceci est possible car  $\mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$  est définie comme une borne inférieure).

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\varepsilon^t(A) &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(t) \left( \frac{\text{diam}(X_i)}{2} \right)^t \\
\Leftrightarrow \mathcal{H}_\varepsilon^t(A) &\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(X_i)}{2} \right)^s \left( \frac{\text{diam}(X_i)}{2} \right)^{t-s} \\
\Leftrightarrow \mathcal{H}_\varepsilon^t(A) &\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^{t-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(X_i)}{2} \right)^s \\
\Leftrightarrow \mathcal{H}_\varepsilon^t(A) &\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^{t-s} (\mathcal{H}_\varepsilon^s(A) + 1)
\end{aligned}$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient que  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ .

2) Il s'agit de la contraposée de 1). □

**Théorème 5.** Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$ , il existe un unique  $d \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  tel que :

·  $\forall s < d, \mathcal{H}^s(A) = +\infty$

·  $\forall s > d, \mathcal{H}^s(A) = 0$

On appelle dimension de Hausdorff de l'ensemble  $A$  le réel  $d$  obtenu, on le note  $\dim_H(A)$ .

*Démonstration.*

· Pour l'existence, on pose  $d = \inf\{s \geq 0, \mathcal{H}^s(A) < +\infty\}$ .

Par définition, si  $s < d, \mathcal{H}^s(A) = +\infty$ .

Si  $s > d$ , il existe  $t \in ]d, s[$  tel que  $\mathcal{H}^t(A) < +\infty$ ,

par le lemme précédent, on a que  $\mathcal{H}^s(A) = 0$ .

· Pour l'unicité, supposons qu'il existe  $d \neq d'$ , par exemple  $d < d'$ , qui satisfassent les deux propriétés, alors il existe  $t \in ]d, d'[$  tel que  $\mathcal{H}^t(A) = +\infty$  (car  $t < d'$ ) et  $\mathcal{H}^t(A) = 0$  (car  $t > d$ ) ce qui aboutit à une contradiction. □

**Exemple 1 :** L'ensemble triadique de Cantor

En général, il n'est pas facile de calculer la dimension de Hausdorff d'un ensemble. Commençons par un exemple relativement simple : l'ensemble triadique de Cantor. On se place sur l'intervalle  $I_0 := [0, 1]$ , on découpe  $I_0$  en trois intervalles fermés de même longueur, on enlève la partie centrale et on garde les deux parties restantes, et on note  $I_1$  cet ensemble. On a alors  $I_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . On réitère le procédé sur chaque composante connexe de  $I_1$  pour obtenir

$I_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$  et ainsi de suite.

Pour  $j \in \mathbb{N}^*$ , on a alors  $I_j = \bigcup_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{3^j-1} [\frac{k}{3^j}, \frac{k+1}{3^j}] \cap I_{j-1}$  et  $I_0 = [0, 1]$

On définit l'ensemble triadique de Cantor par :  $E_1 = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} I_j$



FIGURE 2.1 – Les 6 premières étapes de la construction de l'ensemble triadique de Cantor

On a que  $\dim_H(E_1) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ .

Bien que la preuve ne soit pas évidente, on peut essayer de se convaincre de la pertinence de ce résultat :

On écrit  $I_j = \bigcup_k I_j^k$  où les  $I_j^k$  sont les  $2^j$  intervalles de longueur  $3^{-j}$  donnés dans la définition de  $I_j$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , on considère l' $\varepsilon$ -recouvrement au plus dénombrable (ici fini) de  $E_1$  défini par les  $I_j^k$  avec  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{diam}(I_j^k) = 3^{-j} \leq \varepsilon$ .

On a alors :

$$\sum_k \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(I_j^k)}{2} \right)^s = \sum_k \alpha(s) \frac{(3^{-j})^s}{2^s} = \alpha(s) 2^{-s} 3^{-js} 2^j$$

Pour que cette somme converge non trivialement, il faut que  $2^j 3^{-js}$  converge non trivialement, et donc il faut que  $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ .

On a donc une idée intuitive de ce que peut être la dimension de Hausdorff dans le cas de l'ensemble triadique de Cantor, mais attention, ceci n'est pas une preuve car nous n'avons considéré que des recouvrements particuliers alors que la mesure extérieure  $\mathcal{H}_\varepsilon^s$  est définie comme une borne inférieure sur l'ensemble des  $\varepsilon$ -recouvrements au plus dénombrables.

### Exemple 2 : L'ensemble de Cantor 4-coins

On s'intéresse maintenant à un deuxième exemple qui nous sera utile plus tard lors de la construction d'un ensemble de Kakeya, c'est-à-dire d'un ensemble de mesure nulle contenant une droite dans chaque direction, il s'agit de l'ensemble de Cantor 4-coins. Voici la construction de cet ensemble :

Soit  $F_0 = [0, 1]^2$  le carré unité de  $\mathbb{C}$ .

On découpe  $F_0$  en 16 carrés identiques et on note  $F_1$  l'union des 4 carrés situés dans les coins de  $F_0$ . On refait le même découpage sur chacun des carrés de  $F_1$  et on note  $F_2$  l'union des carrés situés dans les coins des carrés de  $F_1$ . En itérant ce processus, on obtient une suite de sous ensemble  $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}$ . On remarque que chacun des  $F_j$  est formé de  $4^j$  carrés de côté  $4^{-j}$  qui sont situés dans les coins des carrés de  $F_{j-1}$ .

On définit :  $E_2 = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} F_j$  que l'on appelle l'ensemble de Cantor 4-coins.

Un raisonnement analogue à celui concernant la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor permet de montrer intuitivement que  $\dim_H(E_2) = 1$ .

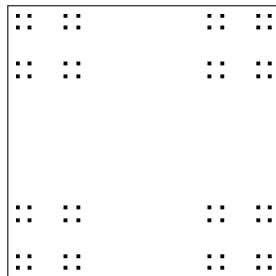


FIGURE 2.2 – L'intersection des premières étapes de la construction de l'ensemble de Cantor 4-coins

## Chapitre 3

# Construction d'un ensemble de Kakeya

### 3.1 Notions de rectifiabilité

On commence par définir la notion de rectifiabilité d'un ensemble. Bien qu'il soit possible de définir la rectifiabilité dans des espaces de dimension finie quelconque, on se restreint au cas du plan complexe et des ensembles 1-rectifiables.

Soit  $E \subset \mathbb{C}$ , on dit que  $E$  est 1-rectifiable (ou simplement rectifiable) s'il existe une famille dénombrable d'applications lipschitziennes  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $\mathcal{H}^1(E \setminus \bigcup_i f_i(\mathbb{R})) = 0$ . Autrement dit,  $E$  est 1-rectifiable si  $E$  peut être recouvert par une union dénombrable de courbes (localement) rectifiables, c'est-à-dire de longueur finie, à un ensemble de 1-mesure de Hausdorff nulle près.

Soit  $F \subset \mathbb{C}$ . On dit que  $F$  est purement non 1-rectifiable (ou simplement purement non rectifiable) si pour toute application lipschitzienne  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , on a  $\mathcal{H}^1(F \cap f(\mathbb{R})) = 0$ . De façon équivalente, on a que  $F$  est purement non 1-rectifiable si pour tout ensemble rectifiable  $E \subset \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{H}^1(F \cap E) = 0$ .

On présente maintenant une caractérisation des ensembles rectifiables et des ensembles purement non rectifiables en termes de taille des projections. Soit  $\theta \in [0, \pi]$ , on note  $P_\theta$  la projection orthogonale dans  $\mathbb{C}$  sur la direction qui fait un angle de  $\theta$  avec l'horizontale.

**Théorème 6.** *Soit  $E \subset \mathbb{C}$  un ensemble  $\mathcal{H}^1$ -mesurable tel que  $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$ .*  
*i)  $E$  est rectifiable si et seulement si, pour tout sous ensemble  $\mathcal{H}^1$ -mesurable  $F$  de  $E$  avec  $\mathcal{H}^1(F) > 0$ , on a :  $\mathcal{H}^1(P_\theta(F)) > 0$  pour presque tout  $\theta \in [0, \pi]$ .*  
*ii)  $E$  est purement non rectifiable si et seulement si,  $\mathcal{H}^1(P_\theta(E)) = 0$  pour presque tout  $\theta \in [0, \pi]$ .*

La théorie de la rectifiabilité n'étant pas le cœur du sujet, on admet ce théorème.



Soit  $E \subset \mathbb{C}$ , on définit la longueur de Favard de  $E$  par :

$$\text{Fav}(E) = \frac{1}{\pi} \int_{[0, \pi]} |P_\theta(E)| d\theta$$

où  $|\cdot|$  est la mesure de Lebesgue.

On peut interpréter  $\text{Fav}(E)$  comme un "moyennage" des mesures de Lebesgue des projections d'angle  $\theta$  pour  $\theta$  compris entre 0 et  $\pi$ . On remarque que

$\text{Fav}(E) = 0$  si et seulement si, pour presque tout  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\mathcal{H}^1(P_\theta(E)) = 0$ .

Et donc d'après le point ii) du théorème 6,  $\text{Fav}(E) = 0$  si et seulement si  $E$  est purement non rectifiable.

On peut naturellement se poser la question de l'existence de tels ensembles. Dans ce qui suit, nous allons montrer que l'ensemble de Cantor 4-coins est purement non rectifiable. On rappelle que l'ensemble de Cantor 4-coins est un ensemble autosimilaire tel que :

$$E_2 = \bigcup_{i=1}^4 \left( \frac{1}{4} E_2 + e_i \right) \text{ avec } e_1 = (0, 0), e_2 = \left( \frac{3}{4}, 0 \right), e_3 = \left( 0, \frac{3}{4} \right), e_4 = \left( \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

on rappelle aussi qu'un ensemble autosimilaire est un compact invariant par un système fini de similitude  $(S_1, \dots, S_N)$  autrement dit :  $K = \bigcup_{i=1}^N S_i(K)$ .

### 3.2 L'ensemble de Cantor 4-coins est purement non-rectifiable

Le théorème qui suit montre que l'ensemble de Cantor 4-coins est purement non rectifiable car on a montré qu'un ensemble  $E$  est tel que  $\text{Fav}(E) = 0$  si et seulement si  $E$  est purement non rectifiable.

**Théorème 7.** *Pour presque tout  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\mathcal{L}^1(P_\theta(E_2)) = 0$  ou de façon équivalente  $\text{Fav}(E_2) = 0$ .*

*Démonstration.*

On commence par remarquer que :

$$\begin{aligned} P_\theta(E_2) &= P_\theta \left( \bigcup_{i=1}^4 \left( \frac{1}{4} E_2 + e_i \right) \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^4 P_\theta \left( \frac{1}{4} E_2 + e_i \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^4 \left( \frac{1}{4} P_\theta(E_2) + P_\theta(e_i) \right) \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

On se ramène ainsi à étudier des ensembles auto-similaires sur la droite réelle, c'est-à-dire des ensembles compacts  $K$  tel qu'il existe  $m \geq 2$  et  $d_1, \dots, d_m$  tous différents tel que  $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$  avec  $K_i = \frac{1}{m} K + d_i$ .

On utilisera ces notations dans la suite. On a besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.** *i) Si  $i \neq j$ ,  $\mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) = 0$   
ii) Il existe  $i \neq j$  tel que  $K_i \cap K_j \neq \emptyset$*

*Démonstration.*

i) Soient  $i \neq j$  on veut montrer que  $\mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) = 0$ .

On a premièrement que :

$$\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket, \quad \mathcal{L}^1(K_k) = \frac{1}{m} \mathcal{L}^1(K) \quad (3.1)$$

car  $K_k$  est obtenu par dilatation de rapport  $\frac{1}{m}$  et translation de  $d_k$ .

De plus :

$$\mathcal{L}^1(K_i \cup K_j) = \mathcal{L}^1(K_i) + \mathcal{L}^1(K_j) - \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) \quad (3.2)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(K_i \cup K_j) &= \mathcal{L}^1((K_i \cup K_j) \cap (K_i \cap K_j)) + \mathcal{L}^1((K_i \cup K_j) \setminus (K_i \cap K_j)) \\ &= \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) + \mathcal{L}^1(K_i \setminus (K_i \cap K_j)) + \mathcal{L}^1(K_j \setminus (K_i \cap K_j)) \\ &= \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) + \mathcal{L}^1(K_i) + \mathcal{L}^1(K_j) - 2\mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) \\ &= \mathcal{L}^1(K_i) + \mathcal{L}^1(K_j) - \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(K) &= \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^m K_k\right) \\ &\leq \mathcal{L}^1(K_i \cup K_j) + \sum_{k \neq i, j} \mathcal{L}^1(K_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathcal{L}^1(K_k) - \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) \quad \text{d'après (3.2)} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} \mathcal{L}^1(K) - \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) \quad \text{d'après (3.1)} \\ &= \mathcal{L}^1(K) - \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\mathcal{L}^1(K) \leq \mathcal{L}^1(K) - \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) = 0$$

d'où le résultat.

ii) On veut montrer qu'il existe  $i \neq j$  tel que  $K_i \cap K_j \neq \emptyset$ .

Supposons par l'absurde que  $\forall i \neq j, K_i \cap K_j = \emptyset$ .

Comme les  $K_i$  sont compacts, et en nombre fini, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que

$\forall i \neq j, d(K_i, K_j) > \varepsilon_0$ . (d est la distance usuelle)

On a donc :  $\forall i \neq j, V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(K_i) \cap V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(K_j) = \emptyset$

avec  $V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(K_i)$  un voisinage de  $K_i$  de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{2}$  :  $V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(K_i) = \{x \in \mathbb{R}, d(x, K_i) < \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ .

On remarque ensuite que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(K_k)) &= \mathcal{L}^1\left(V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}\left(\frac{1}{m}K + d_k\right)\right) \\
&= \mathcal{L}^1\left(V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}\left(\frac{1}{m}K\right)\right) \\
&= \mathcal{L}^1\left(\left\{x \in \mathbb{R}, d\left(x, \frac{1}{m}K\right) < \frac{\varepsilon_0}{2}\right\}\right) \\
&= \mathcal{L}^1\left(\left\{x \in \mathbb{R}, d(mx, K) < m\frac{\varepsilon_0}{2}\right\}\right) \\
&= \frac{\mathcal{L}^1\left(V_{\frac{m\varepsilon_0}{2}}(K)\right)}{m}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(K)) &= \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^m V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(K_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^m \mathcal{L}^1\left(V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(K_k)\right) \quad \text{car l'union est disjointe} \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{\mathcal{L}^1\left(V_{\frac{m\varepsilon_0}{2}}(K)\right)}{m} \quad \text{d'après (3.3)} \\
&= \mathcal{L}^1\left(V_{\frac{m\varepsilon_0}{2}}(K)\right)
\end{aligned}$$

Ceci est une contradiction car  $V_{\frac{m\varepsilon_0}{2}}(K)$  est un ouvert contenant strictement l'ouvert  $V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(K)$  donc on doit avoir  $\mathcal{L}^1\left(V_{\frac{m\varepsilon_0}{2}}(K)\right) > \mathcal{L}^1\left(V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(K)\right)$   $\square$

On a besoin de quelques notations :

On pose  $I = \llbracket 1; m \rrbracket$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_k = \{p = (i_1, \dots, i_k); \forall j \in \llbracket 1; k \rrbracket, i_j \in I\}$ , autrement dit  $I_k$  est l'ensemble des k-uplets à valeurs dans  $I = \llbracket 1; m \rrbracket$ .

On peut alors écrire que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $K = \bigcup_{p \in I_k} K_p$  avec  $K_p = \frac{1}{m^k}K + d_p$

pour des  $d_p$  bien choisis car  $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$  avec  $K_i = \frac{1}{m}K + d_i$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , on dit que  $K_p$  et  $K_q$  sont proches à  $\varepsilon$  près si :

- i)  $p, q \in I_k$  pour un certain  $k$  et  $p \neq q$
- ii)  $K_q = K_p + x$  pour un  $x \in \mathbb{R}$  et  $|x| \leq \varepsilon \text{diam}(K)$ .

On remarque que si  $p, q \in I_k$ , alors la deuxième condition ne nous apporte que le côté petit de la translation de  $K_p$  vers  $K_q$ , l'existence étant déjà acquise. Aussi, on note que d'après le lemme précédent que si  $p, q \in I_k$ , avec  $p \neq q$ , on a  $\mathcal{L}^1(K_p \cap K_q) = 0$ .

Toujours dans l'idée de démontrer le théorème sur le côté purement non rectifiable de l'ensemble de Cantor 4-coins, nous aurons besoin d'un lemme que nous énoncerons plus tard, qui utilise un résultat de théorie de la mesure que nous commençons donc par énoncer puis démontrer. Nous présentons ce résultat sous la forme du lemme suivant :

**Lemme 5.** *Soit  $F \subset \mathbb{R}$  un compact tel que  $\mathcal{L}^1(F) > 0$ . Pour tout  $\delta > 0$ , il existe un intervalle  $J$  tel que :*

$$\mathcal{L}^1(F \cap J) \geq (1 - \delta)\mathcal{L}^1(J)$$

*Démonstration.*

Soit  $F \subset \mathbb{R}$  un compact tel que  $\mathcal{L}^1(F) > 0$ . Soit  $\delta > 0$ , on veut montrer qu'il existe un intervalle  $J$  tel que  $\mathcal{L}^1(F \cap J) \geq (1 - \delta)\mathcal{L}^1(J)$ .

Tout d'abord, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $F \subset [-n, n]$  car  $F$  est compact dans  $\mathbb{R}$ .

On regarde le complémentaire de  $F$  :  $F^c$  est ouvert, donc  $F^c$  s'écrit comme une réunion disjointe dénombrable d'intervalles ouverts :  $F^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i$ .

On peut supposer, quitte à réordonner les  $O_i$ , que  $(\mathcal{L}^1(O_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle positive décroissante tendant vers 0.

On choisit alors un nombre fini  $N$  de  $O_i$  tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i\right) - \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{i=1}^N O_i\right) &< \delta \mathcal{L}^1(F) \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{i > N} O_i\right) &< \delta \mathcal{L}^1(F) \end{aligned} \quad (3.4)$$

On comprendra plus tard pourquoi on choisit  $\delta \mathcal{L}^1(F)$ , ceci étant vrai en remplaçant  $\delta \mathcal{L}^1(F)$  par  $\varepsilon > 0$  quelconque.

On regarde maintenant le complémentaire de  $\bigcup_{i=1}^N O_i$  dans  $[-n, n]$ .

Il s'agit d'une réunion d'au plus  $N + 1$  intervalles fermés  $J_1, \dots, J_n$  et  $F \subset \bigcup_{i=1}^{N+1} J_i$  par définition des  $J_i$ . Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^{N+1} J_i\right) \cap F^c &= \left(\bigcup_{i=1}^N O_i\right)^c \cap \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i\right) \\ &= \bigcup_{i > N} O_i \end{aligned}$$

Or d'après (3.4),  $\mathcal{L}^1\left(\bigcup_{i > N} O_i\right) < \delta \mathcal{L}^1(F)$

Donc  $\mathcal{L}^1\left(\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} J_i\right) \cap F^c\right) < \delta \mathcal{L}^1(F)$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N+1} \mathcal{L}^1(J_i \cap F^c) < \delta \mathcal{L}^1(F)$  par union disjointe

On définit les  $a_i$ , pour  $i$  allant de 1 à  $N + 1$  par  $\mathcal{L}^1(J_i \cap F^c) = a_i \mathcal{L}^1(J_i)$ .  
On a alors :

$$\sum_{i=1}^{N+1} a_i \mathcal{L}^1(J_i) < \delta \mathcal{L}^1(F) \quad (3.5)$$

On veut trouver un  $J_i$  tel que ;

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^1(J_i \cap F) \geq (1 - \delta) \mathcal{L}^1(J_i) \\ \Leftrightarrow & \mathcal{L}^1(J_i) - \mathcal{L}^1(J_i \cap F^c) \geq \mathcal{L}^1(J_i) - \delta \mathcal{L}^1(J_i) \\ \Leftrightarrow & \mathcal{L}^1(J_i \cap F^c) \leq \delta \mathcal{L}^1(J_i) \\ \Leftrightarrow & a_i \mathcal{L}^1(J_i) \leq \delta \mathcal{L}^1(J_i) \\ \Leftrightarrow & a_i \leq \delta \quad \text{car on peut supposer } \mathcal{L}^1(J_i) > 0 \end{aligned}$$

Supposons alors par l'absurde qu'il n'en existe pas, c'est-à-dire

$\forall i \in \llbracket 1; N + 1 \rrbracket$ ,  $a_i > \delta$ . Comme  $F \subset \bigcup_{i=1}^{N+1} J_i$  on a :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} J_i\right) \geq \mathcal{L}^1(F) \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{N+1} \mathcal{L}^1(J_i) \geq \mathcal{L}^1(F) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Or d'après (3.5),  $\sum_{i=1}^{N+1} a_i \mathcal{L}^1(J_i) < \delta \mathcal{L}^1(F)$  et  $\forall i \in \llbracket 1; N + 1 \rrbracket$ ,  $a_i > \delta$  donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N+1} \delta \mathcal{L}^1(J_i) < \delta \mathcal{L}^1(F) \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{N+1} \mathcal{L}^1(J_i) < \mathcal{L}^1(F) \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.6) et (3.7) nous permettent d'aboutir à une contradiction.

On a donc l'existence d'un  $i_0 \in \llbracket 1; N + 1 \rrbracket$  tel que  $a_{i_0} \leq \delta$  c'est-à-dire  $J_{i_0}$  est tel que  $\mathcal{L}^1(F \cap J_{i_0}) \geq (1 - \delta) \mathcal{L}^1(J_{i_0})$ , d'où le résultat.  $\square$

Grâce au résultat précédent, on peut maintenant démontrer le lemme suivant qui nous permettra de faire la démonstration du théorème :

**Lemme 6.** *Supposons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k$  et  $p, q \in I_k$  avec  $p \neq q$  tels que  $K_p$  et  $K_q$  sont proches à  $\varepsilon$  près. Alors, on a  $\mathcal{L}^1(K) = 0$*

*Démonstration.*

Supposons par l'absurde que  $\mathcal{L}^1(K) > 0$ .

D'après le lemme précédent, il existe un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$  tel que :

$$\mathcal{L}^1(J \cap K) \geq 0.9 \mathcal{L}^1(J)$$

On utilise l'hypothèse avec  $\varepsilon = \frac{\mathcal{L}^1(J)}{2m^k \text{diam}(K)}$ .

Il existe  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p, q \in I_k$  avec  $p \neq q$  tels que  $K_p$  et  $K_q$  soient proches à  $\varepsilon$  près, c'est-à-dire  $K_p = \frac{1}{m^k} + d_p$ ,  $K_q = \frac{1}{m^k} + d_q$  et  $|d_p - d_q| \leq \varepsilon \text{diam}(K)$ .

Si on pose :

$$J_p = \frac{1}{m^k} J + d_p \text{ et } J_q = \frac{1}{m^k} J + d_q$$

alors  $J_p = J_q + (d_p - d_q)$  avec :

$$|d_p - d_q| \leq \varepsilon \text{diam}(K) = \frac{\mathcal{L}^1(J)}{2m^k} = \frac{\mathcal{L}^1(J_p)m^k}{2m^k} = \frac{\mathcal{L}^1(J_p)}{2}$$

On a également par les propriétés de  $\mathcal{L}^1$  :

$$\mathcal{L}^1(J_p \cap K_p) \geq 0.9\mathcal{L}^1(J_p) \text{ et } \mathcal{L}^1(J_q \cap K_q) \geq 0.9\mathcal{L}^1(J_q)$$

Voyons désormais que nous pouvons aboutir à une contradiction en remarquant que, comme 90% de  $J_p$  est dans  $K_q$  et que 50% de  $J_q$  est dans  $J_p$ , alors il y a au moins 40% de  $J_p$  dans  $K_q$ . Mais on sait aussi qu'il y a 90% de  $J_p$  dans  $K_p$ , donc il y a au moins 30% de  $J_p$  dans  $K_p \cap K_q$  et on obtient la contradiction voulue car  $\mathcal{L}^1(K_p \cap K_q) = 0$  d'après le lemme 4.i) donc :

$$0 = \mathcal{L}^1(K_p \cap K_q) \geq \mathcal{L}^1(K_p \cap K_q \cap J_p) \geq 0.3\mathcal{L}^1(J_p) > 0$$

On en conclut donc que  $\mathcal{L}^1(K) = 0$ . □

Désormais, nous pouvons démontrer le théorème 7 qui montre que l'ensemble de Cantor 4-coins est purement non rectifiable. À savoir, on veut montrer que pour presque tout  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\mathcal{L}^1(P_\theta(E_2)) = 0$ .

Pour simplifier, on pose  $E_2^\theta = P_\theta(E_2) \subset \mathbb{R}$  pour  $\theta \in [0, \pi]$ . On utilise les notations de la partie précédente en remplaçant  $K$  par  $E_2^\theta$ , c'est-à-dire, on peut écrire pour des  $d_p \in \mathbb{R}$  bien choisis et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$E_2^\theta = \bigcup_{p \in I_k} E_{2,p}^\theta \text{ avec } E_{2,p}^\theta = \frac{1}{m^k} E_2^\theta + d_p$$

On fixe  $\varepsilon > 0$  et on pose :

$V_\varepsilon = \{\theta \in [0, \pi], \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists p \neq q \in I_k \text{ tels que } E_{2,p}^\theta \text{ et } E_{2,q}^\theta \text{ sont proches à } \theta\text{-près}\}$

On commence par remarquer qu'il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{L}^1([0, \pi] \setminus V_\varepsilon) = 0$ . En effet, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1\left([0, \pi] \setminus \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon\right) &= \mathcal{L}^1\left([0, \pi] \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} V_{\frac{1}{j}}\right) \\ &= \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} ([0, \pi] \setminus V_{\frac{1}{j}})\right) \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \mathcal{L}^1([0, \pi] \setminus V_{\frac{1}{j}}) \quad \text{par union dénombrable} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et donc, pour presque tout  $\theta \in [0, \pi]$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists k \in \mathbb{N}^*, \exists p \neq q \in I_k$  tels que  $E_{2,p}^\theta$  et  $E_{2,q}^\theta$  sont proches à  $\varepsilon$ -près et on obtient d'après le lemme 6 que pour presque tout  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\mathcal{L}^1(P_\theta(E_2)) = 0$ .

Il reste donc à montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{L}^1([0, \pi] \setminus V_\varepsilon) = 0$  : L'idée de la preuve est de démontrer que pour tout intervalle de  $[0, \pi]$ , il existe un pourcentage fixe de sa longueur (qui dépend de  $\varepsilon$  mais pas de la longueur de l'intervalle) qui est contenu dans  $V_\varepsilon$ , puis d'utiliser la contraposée du lemme 5 pour conclure. On considère  $\varepsilon > 0$  et  $\theta \in [0, \pi]$ , par le lemme 4.ii), on a l'existence de  $i \neq j$  tels que  $E_{2,i}^\theta \cap E_{2,j}^\theta \neq \emptyset$ , autrement dit, il existe  $x \in E_{2,i}$  et  $y \in E_{2,j}$  tels que  $P_\theta(x) = P_\theta(y)$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors il existe  $p \neq q \in I_k$  tels que  $P_\theta(x) \in E_{2,p}^\theta$  et  $P_\theta(y) \in E_{2,q}^\theta$ . Il existe toujours un  $\theta_0 \in [0, \pi]$  tel que les projections orthogonales suivant la direction  $\theta_0$  de  $E_{2,p}$  et  $E_{2,q}$  sont confondues, autrement dit,  $E_{2,p}^{\theta_0}$  et  $E_{2,q}^{\theta_0}$  sont confondues.

Il vient que si  $C$  est une constante suffisamment petite, pour tout  $\phi \in [0, \pi]$  tel que  $|\phi - \theta_0| \leq C\varepsilon 4^{-k}$ ,  $E_{2,p}^\phi$  et  $E_{2,q}^\phi$  sont proches à  $\varepsilon$ -près.

Par conséquent, par définition de  $V_\varepsilon$ , il existe donc une constante  $C' > 0$  telle que l'ensemble  $[\theta - C'4^{-k}, \theta + C'4^{-k}] \cap V_\varepsilon$  contient un intervalle de longueur  $C\varepsilon 4^{-k}$ .  $k$  étant quelconque, on a donc montré que pour tout intervalle de  $[0, \pi]$  il existe un pourcentage fixe de sa longueur (qui ne dépend pas de  $k$ ) qui est contenu dans  $V_\varepsilon$ .

On a donc l'existence d'un  $\delta > 0$  tel que pour tout intervalle  $J$  :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^1([0, \pi] \cap J \cap V_\varepsilon) > \delta \mathcal{L}^1(J) \\ \Rightarrow & \mathcal{L}^1([0, \pi] \cap J \cap V_\varepsilon) > \mathcal{L}^1(J) - (1 - \delta) \mathcal{L}^1(J) \\ \Leftrightarrow & \mathcal{L}^1(J) - \mathcal{L}^1([0, \pi] \cap J \cap V_\varepsilon) < (1 - \delta) \mathcal{L}^1(J) \\ \Leftrightarrow & \mathcal{L}^1([0, \pi] \setminus V_\varepsilon \cap J) < (1 - \delta) \mathcal{L}^1(J) \\ \Leftrightarrow & \mathcal{L}^1(F \cap J) < (1 - \delta) \mathcal{L}^1(J) \quad \text{en posant : } F = [0, \pi] \setminus V_\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la contraposée du lemme 5, on a alors que  $\mathcal{L}^1(F) = 0$  autrement dit  $\mathcal{L}^1([0, \pi] \setminus V_\varepsilon) = 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut donc conclure la preuve d'après la remarque initiale.  $\square$

On a donc montré que l'ensemble de Cantor 4-coins est purement non rectifiable.

### 3.3 Construction d'un ensemble de Kakeya

Le but de cette partie est de construire un ensemble de Kakeya dans le plan, c'est-à-dire un ensemble du plan de mesure de Lebesgue nulle, qui contient une droite dans toutes les directions.

Pour cela, commençons par introduire quelques notions utiles :

Soient  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , on note  $L(a, b)$  la droite d'équation :  $y = a + bx$

Si  $E \subset \mathbb{R}^2$ , on note  $L(E) = \bigcup_{(a,b) \in E} L(a, b)$

c'est-à-dire l'ensemble de toutes les droites paramétrées par des points de  $E$ .

Attention,  $L(E)$  n'est pas l'ensemble des droites passant par des points de  $E$ .

Soit  $c \in \mathbb{R}$ , on note  $L_c$  la droite d'équation  $x = c$ .

Suite à l'introduction de ces notations, nous allons voir un lien fort entre l'intersection des droites paramétrées par un ensemble  $E$  avec une certaine droite verticale et la projection orthogonale d'angle  $\theta \in [0, \pi]$  de  $E$ .

Pour cela, commençons par remarquer que, si  $<$ ,  $>$  désigne le produit scalaire

usuel dans  $\mathbb{R}^2$  :  $L(a, b) \cap L_c = (c, a + bc) = (c, \langle (1, c), (a, b) \rangle)$ .  
Ainsi si  $E \subset \mathbb{R}^2$  :

$$L(E) \cap L_c = \{(c, \langle (1, c), (a, b) \rangle), (a, b) \in E\}$$

Or le produit scalaire par rapport au vecteur  $(1, c)$  nous donne la projection d'angle  $\theta$  en prenant  $c = \tan \theta$ , car dans ce cas  $(1, c)$  est un vecteur directeur de la droite d'angle  $\theta$  suivant laquelle on souhaite projeter. Cependant, le vecteur  $(1, c)$  n'étant pas unitaire, il y a un rapport de l'ordre de  $\|(1, c)\| = \sqrt{1 + c^2}$ . On a donc montré que  $L(E) \cap L_c$  est similaire à  $P_\theta(E)$  avec un rapport de  $\sqrt{1 + c^2}$ .

Cela implique donc que :

$$\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^1(P_\theta(E)) = 0 \quad (3.8)$$

On peut appeler ce résultat principe de dualité de Besicovitch.

Nous allons maintenant démontrer grâce à ce résultat le lemme suivant qui nous servira pour la construction d'un ensemble de Kakeya dans le plan.

**Lemme 7.** *Soit  $E \subset \mathbb{R}^2$  avec  $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$ . Alors  $L(E)$  est  $\mathcal{L}^2$ -mesurable. De plus, si  $E$  est purement non rectifiable ( $\text{Fav}(E) = 0$ ), alors  $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ .*

*Démonstration.*

Commençons par remarquer que si  $E$  est ouvert (resp. fermé) alors  $L(E)$  est ouvert (resp. fermé). Ainsi, si  $E$  est une intersection dénombrable d'ouverts (resp. union dénombrable de fermés) alors  $L(E)$  est une intersection dénombrable d'ouverts (resp. union dénombrable de fermés).

\* Supposons que  $\mathcal{H}^1(E) = 0$ .

Par régularité de  $\mathcal{H}^1$ , on peut trouver une intersection dénombrable d'ouverts que l'on note  $E_0$  telle que  $E \subset E_0$  et  $\mathcal{H}^1(E_0) = 0$ .

(Se donner pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$  une famille  $(O_{i,j})_{j \in \mathbb{N}^*}$  telle que  $\sum_{j=1}^{\infty} |O_{i,j}| <$

$$\mathcal{H}^1(E) + \frac{1}{i} \text{ puis prendre } E_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} O_{i,j} )$$

Or, la projection n'augmente pas les distances (1-lipschitzienne) :

$$\forall x, y \in E, |P_\theta(x) - P_\theta(y)| \leq |x - y|$$

Donc  $\forall \theta \in [0, \pi], \mathcal{L}^1(P_\theta(E_0)) \leq \mathcal{L}^1(E_0) = 0$

Ce qui est équivalent d'après (3.8) à :  $\forall c \in \mathbb{R}, \mathcal{L}^1(L(E_0) \cap L_c) = 0$

Mais  $L(E_0)$  est une intersection dénombrable d'ouverts d'après la remarque initiale donc  $\mathcal{L}^2$ -mesurable.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini, et on obtient que  $\mathcal{L}^2(L(E_0)) = 0$  et comme  $L(E) \subset L(E_0)$ , on a alors que  $L(E)$  est mesurable et  $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ .

\* Prenons maintenant  $E$  de 1-mesure de Hausdorff finie (pas nécessairement nulle). On peut écrire  $E = E_0 \cup F$  où  $E_0$  est une union dénombrable de fermés et  $F$  est tel que  $\mathcal{H}^1(F) = 0$ .

On a alors que  $L(E) = L(E_0) \cup L(F)$  est  $\mathcal{L}^2$ -mesurable comme union de deux ensembles  $\mathcal{L}^2$ -mesurables.

Supposons que  $E$  est purement non rectifiable,

on a alors pour presque tout  $\theta$ ,  $\mathcal{L}^1(P_\theta(E)) = 0$ .

On a donc par (3.8) que pour presque tout  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0$ .



$L(E)$  étant  $\mathcal{L}^2$ -mesurable, le théorème de Fubini nous permet de conclure que :

$$\mathcal{L}^2(L(E)) = \sum_{c \in \mathbb{R}} \mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0$$

□

Désormais, nous sommes en mesure de démontrer le théorème suivant concernant l'existence d'un ensemble de Kakeya dans le plan.

**Théorème 8.** *Il existe un ensemble du plan de mesure de Lebesgue nulle et qui contient une droite dans toutes les directions.*

*Démonstration.*

On commence par remarquer que si  $E \subset \mathbb{R}^2$  et si  $b \in P_{\frac{\pi}{2}}(E)$  alors  $L(E)$  contient une droite de coefficient directeur  $b$ . En effet, si  $(a, b) \in E$ , alors  $P_{\frac{\pi}{2}}(a, b) = b$  qui est simplement le coefficient directeur de la droite  $L(a, b) \in L(E)$ .

Cette remarque est importante car elle implique que si  $P_{\frac{\pi}{2}}(E) = \mathbb{R}$  alors  $L(E)$  contient une droite dans toutes les directions.

On prend  $E$  une copie de l'ensemble de Cantor 4-coins obtenue à partir de l'original par rotation (d'angle  $\frac{3\pi}{8}$ ), de telle façon que  $P_{\frac{\pi}{2}}(E)$  contienne l'intervalle  $[0, 1]$ . Ceci est possible car l'ensemble de Cantor 4-coins est un ensemble auto-similaire tel que pour la première étape dans la construction de cet ensemble, la projection d'angle  $\frac{\pi}{8}$  contienne l'intervalle  $[0, 1]$  et donc par auto-similarité, l'ensemble de Cantor 4-coins est un ensemble tel que la projection d'angle  $\frac{\pi}{8}$  contienne l'intervalle  $[0, 1]$ . Ainsi, en faisant une rotation d'angle  $\frac{3\pi}{8}$  (et de centre  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ) de l'ensemble de Cantor 4-coins, on obtient un ensemble  $E$  tel que  $P_{\frac{\pi}{2}}(E)$  contienne l'intervalle  $[0, 1]$ . On appelle toujours  $E$  l'union de cet ensemble avec sa symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On a alors que  $P_{\frac{\pi}{2}}(E)$  contient l'intervalle  $[-1, 1]$ .

D'après la remarque précédente, on a alors que  $L(E)$  contient une droite de direction  $\lambda$  pour tout  $\lambda \in [-1, 1]$ . De plus,  $E$  est purement non rectifiable, donc d'après le lemme 7,  $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ . On a donc construit un ensemble du plan de mesure nulle et qui contient une droite dans toutes les directions  $\lambda \in [-1, 1]$ . On prend maintenant l'union de cet ensemble avec l'image de cet ensemble par la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre l'origine, pour avoir toutes les directions possibles. En effet, comme l'ensemble ne contient que des droites, on peut, sans pertes de généralité, regarder comment se comporte une rotation sur une droite. Et, la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  envoie une droite sur une autre droite perpendiculaire à la première. Ainsi, comme le premier ensemble contient des droites dans toutes les directions  $\lambda \in [-1, 1]$  et que le deuxième est la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre l'origine du premier ensemble, l'union des deux est un ensemble qui contient une droite dans toutes les directions du plan.

On a donc obtenu un ensemble de mesure nulle (union de deux ensembles de mesure nulle) qui contient une droite dans toutes les directions, d'où l'existence d'un ensemble de Kakeya.

□

Nous allons terminer cette partie par un problème ouvert. On rappelle que l'ensemble de Cantor 4-coins  $E_2$  est l'intersection des  $F_j$  pour  $j \in \mathbb{N}$  où les  $F_j$  sont obtenus à partir de  $F_{j-1}$  en formant  $4^j$  carrés de côté  $4^{-j}$  qui sont situés dans les coins des carrés de  $F_{j-1}$  et  $F_0 = [0, 1]^2$ . Or on sait que :

$$\text{Fav}(E_2) = 0 \Leftrightarrow \text{Fav}\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} F_j\right) = 0 \Rightarrow \lim_{j \rightarrow +\infty} \text{Fav}(F_j) = 0$$

La question que l'on peut se poser est de savoir à quelle vitesse s'effectue cette convergence. La conjecture actuelle est qu'il existe des constantes  $c, C > 0$  telles que pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{c}{j} \leq \text{Fav}(F_j) \leq \frac{C}{j}$$

L'inégalité de gauche est connue, tandis que celle de droite reste un problème ouvert qui semble malheureusement avoir découragé tous les mathématiciens qui s'y sont penchés.

## Chapitre 4

# Le problème actuel de Kakeya

### 4.1 La conjecture actuelle

On se place maintenant dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $k < n$  un entier. Un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un  $(n, k)$ -ensemble de Kakeya s'il est de  $n$ -mesure de Lebesgue nulle et s'il contient un translaté de tout sous espace vectoriel de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans la partie précédente, on a montré l'existence d'un ensemble du plan de mesure nulle contenant une droite dans chaque direction c'est-à-dire un  $(2, 1)$ -ensemble de Kakeya. En prenant le produit cartésien avec  $\mathbb{R}^{n-2}$ , on voit bien que l'on peut obtenir des  $(n, 1)$ -ensembles de Kakeya, cependant si  $k$  devient trop grand, on ne peut pas toujours espérer trouver des  $(n, k)$ -ensembles de Kakeya.

Dans la suite, on s'intéresse aux  $(n, 1)$ -ensembles de Besicovitch (ensemble contenant une droite dans chaque direction mais pas nécessairement de mesure nulle). On appelle plus simplement ces ensembles : ensembles de Besicovitch (ou de Kakeya s'ils sont de mesure nulle). Le célèbre problème de Kakeya consiste en fait, à valider ou à réfuter la conjecture suivante :

**Conjecture 1.** *Tout ensemble de Besicovitch de  $\mathbb{R}^n$  est de dimension de Hausdorff égale à  $n$ .*

**Remarque 2.**

*i) La conjecture n'a de l'intérêt que pour les ensembles de Kakeya, les autres ayant une mesure de Lebesgue non nulle sont forcément de dimension de Hausdorff égale à  $n$ .*

*ii) Le résultat est connu en dimension 2, nous allons le démontrer dans la suite.*

### 4.2 Le cas résolu de la dimension 2

On commence par énoncer deux résultats du livre de Falconer [1] que l'on admet et qui nous permettent de démontrer la conjecture de Kakeya dans le cas de la dimension 2. On énonce ces résultats dans des cas plus particuliers que

ceux énoncés dans le livre de Falconer, mais suffisants pour l'utilisation que l'on souhaite en faire.

**Lemme 8.** *Soit  $E \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble défini par une intersection dénombrable d'ouverts et tel que  $\dim_{\mathbb{H}}(E) = s$ . Si  $s \leq 1$ , alors  $\dim_{\mathbb{H}}(P_{\theta}(E)) = s$  pour presque tout  $\theta \in [0, \pi]$ .*

**Lemme 9.** *Soient  $E \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble,  $A$  un sous ensemble de l'axe des abscisses et  $t, s > 0$ . Supposons qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que :  $\forall x \in A, \mathcal{H}^t(E \cap L_x) > c$ . Alors il existe une constante  $b > 0$  telle que*

$$\mathcal{H}^{t+s}(E) \geq bc\mathcal{H}^s(A)$$

**Théorème 9.** *Si  $F$  est un ensemble du plan qui contient une droite dans chaque direction, alors sa dimension de Hausdorff est égale à 2.*

*Démonstration.*

Soit  $F \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble du plan qui contient une droite dans chaque direction. Tout ensemble étant inclus dans un ensemble de même dimension et défini comme une intersection dénombrables d'ensembles d'ouverts, on peut, sans perte de généralité, considérer que  $F$  est un tel ensemble.

On pose  $E = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, L(a, b) \subset F\}$ , où  $L(a, b)$  est toujours la droite d'équation :  $y = a + bx$ .  $E$  est donc l'ensemble des points qui paramètrent les droites incluses dans  $F$ . On a alors  $L(E) \subset F$ .

Comme  $F$  contient une droite dans chaque direction, on a alors que  $P_{\frac{\pi}{2}}(E)$  est l'axe des ordonnées tout entier.

Puisque pour tout  $\theta \in [0, \pi]$  la projection d'angle  $\theta$  est 1-lipschitzienne, on a en particulier que  $\mathcal{H}^1(P_{\frac{\pi}{2}}(E)) \leq \mathcal{H}^1(E)$  et donc  $\mathcal{H}^1(E) = +\infty$ .

Ainsi la dimension de Hausdorff de  $E$  est au moins égale à 1. De plus, la dimension de Hausdorff de  $E$  ne peut pas être plus grande que 1, donc elle est égale à 1. On remarque que  $E$  est un ensemble défini comme une intersection dénombrable d'ouverts car  $F$  l'est et :

$$E = \bigcap_{r=1}^{+\infty} \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, L(a, b) \cap B_r(0) \subset F \cap B_r(0)\}.$$

Donc on peut appliquer le lemme 8 et on a alors que  $\dim_{\mathbb{H}}(P_{\theta}(E)) = 1$  pour presque tout  $\theta \in [0, \pi]$ .

On a donc par le principe de dualité (3.8) que  $\dim_{\mathbb{H}}(L(E) \cap L_c) = 1$  pour presque tout  $c \in \mathbb{R}$ . Ainsi, on a montré que presque toutes les "tranches verticales" de  $L(E)$  sont de dimension de Hausdorff 1.

Cela implique grâce au théorème 9 (en prenant  $r = 1, s = 1, c = \frac{1}{2}$  et  $A = \{c \in \mathbb{R}, \dim_{\mathbb{H}}(L(E) \cap L_c) = 1\}$  de 1-mesure de Hausdorff infinie) que  $\mathcal{H}^2(L(E)) = +\infty$  et donc  $\dim_{\mathbb{H}}(L(E)) = 2$ .

Ce résultat, bien que difficile, peut se comprendre intuitivement car presque toutes les "tranches verticales" sont de dimension de Hausdorff 1, donc si on intègre sur  $\mathbb{R}$  pour avoir toutes les "tranches verticales", il est naturel de penser que l'on obtient un ensemble de dimension de Hausdorff 2. On conclut en disant que  $L(E) \subset F$  donc  $\dim_{\mathbb{H}}(F) = 2$ .  $\square$

## Conclusion :

Le problème de Kakeya est un problème ancien de plus de 100 ans, qui a fasciné de nombreux mathématiciens, à l'image de Terence Tao qui considère ce problème comme l'un de ces problèmes préférés. La question initiale, proposée par Kakeya en 1917, a évolué grandement au cours des décennies, grâce notamment à Besicovitch, Tao, Bourgain, Dvir et tant d'autres.

Actuellement, la question est de savoir si tout ensemble de Besicovitch de  $\mathbb{R}^n$  est de mesure de Hausdorff égale à  $n$ . Nous avons montré deux choses en rapport avec cette conjecture : la première est que ce résultat est vrai en dimension 2 et la deuxième est qu'il existe un résultat analogue, dont la preuve est relativement simple, dans le cas des corps finis.

Cependant, le cas général reste à l'état de conjecture et semble même avoir découragé les plus grands mathématiciens de notre génération, tant la difficulté à résoudre ce problème paraît cyclopéenne.

Pour finir, cette conjecture a été reliée à de nombreuses questions relatives à d'autres domaines des mathématiques. L'application la plus connue du problème de Kakeya est due à Charles Fefferman en 1971, qui a établi un lien avec l'analyse harmonique. L'analyse harmonique est l'étude des représentations de fonctions ou de signaux comme superposition d'ondes de bases et peut être vue comme une généralisation des notions de séries de Fourier et de transformées de Fourier.

# Bibliographie

- [1] K.J.FALCONER *The Geometry of Fractals Sets*, Cambridge Tracts in Mathematics., vol. 85, Cambridge University Press, 1986.
- [2] H.PAJOT *Autour du Problème de Kakeya*, Institut Fourier, 2017  
url : [www.math.polytechnique.fr/xups/xups17-02.pdf](http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups17-02.pdf)
- [3] T.TAO *Dvir's Proof of the Finite Field Kakeya Conjecture*,  
url : <https://terrytao.wordpress.com/2008/03/24/dvirs-proof-of-the-finite-field-kakeya-conjecture/>
- [4] T.DEHEUVELS *Mesures et Dimension de Hausdorff*,  
url : [w3.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/thibaut.deheuvels/Mesures-Hausdorff.pdf](http://w3.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/thibaut.deheuvels/Mesures-Hausdorff.pdf)
- [5] B.FARHI *Mesure et Dimension de Hausdorff*, Université de Béjaïa,  
url : [farhi.bakir.free.fr/index\\_fichiers/Hausdorff.pdf](http://farhi.bakir.free.fr/index_fichiers/Hausdorff.pdf)