2016-2017 **Contrôle continu 1** Algèbre 2 M1

Exercice 1. *(3 points)*

1. Donner la définition de la représentation régulière d'un groupe fini G sur un corps k.
2. Expliciter cette représentation dans le cas $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $k = \mathbb{C}$ et en donner une décomposition en somme de sous-représentations irréductibles.

Exercice 2. *(7 points)*

Soit G un groupe fini, et H un sous-groupe distingué de G. On note $\pi : G \to G/H$ la projection canonique.

1. (a) Montrer que si $\bar{\rho} : G/H \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G/H alors $(V, \bar{\rho} \circ \pi)$ est une représentation de G.

   (b) Montrer que $(V, \bar{\rho})$ est irreductible si et seulement si $(V, \bar{\rho} \circ \pi)$ est irreductible.
2. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$ une représentation complexe de G. On note

$$W^H = \{v \in W \mid \rho(h)(v) = v \ \forall h \in H\}.$$

   (a) Montrer que le sous-espace W^H est une sous-représentation de (W, ρ). On notera $\rho' : G \to \mathrm{GL}(W^H)$ le morphisme correspondant à la restriction de ρ à W^H.

   (b) Montrer que l'on peut construire un unique morphisme $\rho'' : G/H \to \mathrm{GL}(W^H)$ tel que $\rho' = \rho'' \circ \pi$.

   (c) Que dire de la décomposition en irréductibles de (W^H, ρ') dans le cas où H est le sous-groupe dérivé $\mathcal{D}(G)$ de G ?

Exercice 3. *(10 points)*

Soit $\rho : \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation complexe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. Notons $\tau = (12)$ et $\sigma = (123)$.

1. Montrer que τ et σ engendrent $\mathfrak{S}_3$.
2. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Pour $\ell = 0, 1, 2$ soit V_ℓ le sous-espace propre de $\rho(\sigma)$ associé à la valeur propre j^ℓ. Montrer que $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$.
3. Montrer que V_0 est stable par l'action de τ. En déduire que V_0 est une sous-repésentation de V.
4. Montrer que $\rho(\tau)(V_1) \subset V_2$ et $\rho(\tau)(V_2) \subset V_1$. Qu'en déduire pour les dimensions de V_1 et V_2 ?
5. Soit x un vecteur non nul de V_1. Montrer que $\mathrm{vect}(x, \tau(x))$ est une sous-représentation de dimension 2 de V qui ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix de x.
6. En déduire la liste des représentations irreductibles de $\mathfrak{S}_3$ (à isomorphisme près).

Exercice 1. On suppose que la table des caractères de G est donnée ci-dessous (on note C_i, $1 \leq i \leq 6$, les classes de conjugaison de G ; pour chaque i on notera g_i un élément de C_i et (V_i, ρ_i) une représentation de caractère χ_i).

	$C_1 = \{1\}$	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1		1	-1	-1
χ_3	1	-1		1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	-2	1	-1	0	0
χ_6	2					

1. (a) Déterminer le cardinal de G.
   (b) Remplir la ligne correspondant à χ_6 en justifiant.
   (c) En utilisant (par exemple) l'orthogonalité des colonnes, remplir la colonne C_3.
   (d) En déduire les cardinaux de chacune des classes de conjugaisons.
   (e) Vérifier que χ_5 est bien irréductible. Est-elle fidèle ?
2. (a) Déterminer la structure de l'abélianisé $G_{\text{ab}} = G/D(G)$ de G.
   (b) Décrire le sous–groupe dérivé $D(G)$ comme une union de classes de conjugaisons. A quel groupe est-il isomorphe ?
3. (a) Décrire le centre $Z(G)$ de G comme une union de classes. A quel groupe est-il isomorphe ?
   (b) Quelles représentations irreductibles ont-elles $Z(G)$ dans leur noyau ? En déduire la table de caractères de $G/Z(G)$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation complexe de G irréductible, on note χ le caractère associé. Soit Z le centre de G. On note $\rho' : Z \to \mathrm{GL}(V)$ la restriction de ρ à Z. On note χ' le caractère associé.

1. Soit $z \in Z$. Montrer que $\rho'(z)$ est un G-morphisme. En déduire qu'il existe $\lambda \in \hat{Z}$ tel que $\rho'(z) = \lambda(z)\mathrm{Id}_V$.
2. On considère l'application $\varphi : Z \times G \to G$ définie par $\varphi(z, g) = zg$. Montrer que φ est un morphisme de groupes.
3. On note $\tilde{\rho} : Z \times G \to \mathrm{GL}(V)$ la représentation définie par $\tilde{\rho} = \rho \circ \varphi$. Calculer $\tilde{\chi}(z, g)$ en fonction de χ et λ, puis de χ et χ'.
4. En déduire que $(V, \tilde{\rho})$ est irréductible.
5. On note $\rho' \boxtimes \rho$ le produit tensoriel externe de ρ' par ρ. Rappeler la définition de $\rho' \boxtimes \rho$.
6. Déduire des questions précédentes la décomposition en irréductibles de $\rho' \boxtimes \rho$.
7. Peut-on écrire $\tilde{\rho}$ comme le produit tensoriel externe d'une représentation de Z par une représentation de G ?

Examen du mercredi 17 mai 2017

Représentations des groupes

Durée : 3 heures

La clarté, la concision et la précision des réponses données seront des facteurs importants d'appréciation des copies. On justifiera chaque réponse donnée. Documents et calculatrices interdits.

Problème

L'anneau des représentations du groupe dicyclique

L'objectif de ce problème est d'étudier les représentations complexes du groupe dicyclique.

On note $\mathbf{Z}$ *l'anneau des entiers relatifs et* $\mathbf{C}$ *le corps des nombres complexes.*

Partie I

Compléments sur le produit semi-direct

Dans toute cette partie K *et* Q *désignent des groupes notés multiplicativement, dont les éléments neutres sont notés respectivement* 1_K *et* 1_Q. *On note* $\mathrm{Aut}(K)$ *le groupe des automorphismes de groupes de* K. *Soit*

$$\varphi : Q \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$$

un morphisme de groupes. On pose ${}^q k = \varphi(q)(k)$ *pour* $k \in K$ *et* $q \in Q$.

On note $K \rtimes_\varphi Q$ *l'ensemble* $K \times Q$ *muni de la loi interne que nous noterons* $\times$ *définie par*

$$(k_1, q_1) \times (k_2, q_2) = (k_1({}^{q_1}k_2), q_1 q_2)$$

pour tous $k_1, k_2 \in K$ *et tous* $q_1, q_2 \in Q$.

1. (a) Démontrer que la loi $\times$ est associative.

(b) Démontrer que $(1_K, 1_Q)$ est un élément neutre pour $\times$.

(c) Démontrer que tout élément de $K \rtimes_\varphi Q$ admet un inverse pour $\times$, qu'on explicitera.

2. (a) Démontrer que l'application $\iota : K \to K \rtimes_\varphi Q$ donnée par $k \mapsto (k, 1_Q)$ est un morphisme de groupes.

(b) Démontrer que l'application $\pi : K \rtimes_\varphi Q \to Q$ donnée par $(k, q) \mapsto q$ est un morphisme de groupes.

(c) Comparer $\mathrm{Im}(\iota)$ à $\mathrm{Ker}(\pi)$.

(d) Démontrer que l'application $s : Q \to K \rtimes_\varphi Q$ donnée par $q \mapsto (1_K, q)$ est un morphisme de groupes. Que peut-on dire de $\pi \circ s$?

(e) Vérifier la relation

$$\iota({}^q k) = s(q) \times \iota(k) \times s(q)^{-1}$$

pour tout $k \in K$ et tout $q \in Q$.

3. Soit G un groupe. Soient $\iota' : K \to G$ et $s' : Q \to G$ des morphismes de groupes tels que

$$\iota'({}^q k) = s'(q)\iota'(k)s'(q)^{-1}$$

pour tout $k \in K$ et tout $q \in Q$. Démontrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\psi : K \rtimes_\varphi Q \to G$ tel que $\psi \circ \iota = \iota'$ et $\psi \circ s = s'$.

Soient m et n des entiers strictement positifs. Dans la suite de cette partie, on suppose que K est le groupe cyclique $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et Q le groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On note $[a]_m$ (resp. $[a]_n$) l'image d'un entier a dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$).

4. (a) Démontrer que l'application $\rho \mapsto \rho([1]_m)$ définit une bijection du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ sur le groupe $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

(b) En déduire que tout morphisme de groupes

$$\varphi : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$$

envoie $[1]_n$ sur la multiplication par un élément $\lambda \in (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ tel que $\lambda^n = [1]_m$.

On fixe un tel morphisme φ et on note e un entier tel que $[e]_m = \varphi([1]_n)([1]_m)$. On note $D = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \rtimes_\varphi \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et on pose $a = \iota([1]_m) \in D$ et $b = s([1]_n)$. On note désormais gh pour $g \times h$ pour tous $g, h \in D$.

5. (a) Démontrer les relations $a^m = 1_D$, $b^n = 1_D$ et $bab^{-1} = a^e$ dans le groupe D.

(b) Soit K un corps commutatif et d un entier strictement positif. Construire une bijection entre les morphismes de groupes $\rho : D \to \mathrm{GL}_d(\mathrm{K})$ et les couples de matrices $A, B \in \mathscr{M}_d(\mathrm{K})$ à d lignes et colonnes telles que $A^m = I_d$, $B^n = I_d$ et $BAB^{-1} = A^e$. (On pourra d'abord vérifier que ces relations impliquent la relation $B^k A^l B^{-k} = A^{e^k l}$ pour des entiers positifs l et k.)

Partie II

Les représentations irréductibles complexes du groupe dicyclique

On reprend les notations de la fin de la partie 1, en prenant $m = 3$, $n = 4$ et $e = -1$. Le groupe D est donc le groupe $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes_\varphi \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et on dispose de deux éléments a et b de D tels que $a^3 = b^4 = 1_D$ et $bab^{-1} = a^{-1}$.

1. (a) Démontrer que tout élément de D s'écrit de manière unique $a^k b^l$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$ et $l \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(b) Démontrer que le centre de D est $\{1, b^2\}$.

(c) Démontrer que D possède six classes de conjugaison qu'on écrira en termes de a et de b.

(d) Démontrer que le groupe quotient $D/[D, D]$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, où $[D, D]$ désigne le sous-groupe dérivé de D.

(e) Commencer la table des caractères complexes de D en donnant les caractères des représentations de dimension 1 (on tracera la table complète en laissant pour le moment les autres cases vides).

(f) Déterminer, en la justifiant, la dimension des représentations irréductibles restantes.

2. (a) Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ telle que $A^3 = 1$. Quelles sont les valeurs propres possibles pour A ?

(b) On note $j = \exp(2i\pi/3)$. Soit $A = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B telle que $BA = A^2B$ et $B^2 = -I_2$.

(c) Prouver que A et B permettent de définir une représentation irréductible de dimension 2 de D.

(d) Compléter la table des caractères de D.

Partie III

Produit tensoriel des représentations de D

On conserve les notations de la partie précédente.

1. Pour chaque caractère χ d'une représentation L de dimension 1 et chaque caractère χ' d'une représentation irréductible S, donner le caractère du produit tensoriel $L \otimes_{\mathbf{C}} S$ en termes des caractères des représentations irréductibles. (On écrira le résultat sous la forme d'une « table de multiplication », c'est-à-dire d'un tableau à double entrée avec 6 colonnes et 4 lignes correspondant aux différents caractères concernés.)

2. Soient S_5 et S_6 des représentations irréductibles de dimension différente de 1 de D. On suppose que S_5 et S_6 ne sont pas isomorphes. On note χ_5 et χ_6 leur caractères respectifs.

(a) Calculer le caractère χ du produit tensoriel $S_5 \otimes_{\mathbf{C}} S_6$.

(b) Écrire χ dans la base des fonctions centrales donnée par les caractères des représentations irréductibles.

(c) Faire de même pour les représentations $S_5 \otimes_{\mathbf{C}} S_5$ et $S_6 \otimes_{\mathbf{C}} S_6$.

Partie IV

Induction

On conserve les notations de la partie précédente.

1. (a) Démontrer que D admet un sous-groupe distingué H de cardinal 6.

(b) Démontrer que le groupe des morphismes de H dans $\mathbf{C}^*$ admet un générateur qu'on notera ρ.

(c) Donner la table des caractères de H.

Soit L la représentation de H correspondant à ρ.

2. (a) Quelle est la dimension de la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^D(L)$?

(b) Décrire cette représentation en termes des représentations irréductibles de D. (On pourra pour cela calculer son caractère).

Examen de deuxième session du jeudi 22 juin 2017

Représentations des groupes

Durée : 3 heures

La clarté, la concision et la précision des réponses données seront des facteurs importants d'appréciation des copies. On justifiera chaque réponse donnée. Documents et calculatrices interdits.

Les parties I à IV sont indépendantes les unes des autres.

Problème

Classification des représentation réelles

L'objectif de ce problème est d'étudier les représentations *réelles* de dimension finie de groupes finis.

On note $\mathbf{Z}$ *l'anneau des entiers relatifs,* $\mathbf{R}$ *le corps des nombres réels et* $\mathbf{C}$ *celui des nombres complexes. On note* $\tau : z \mapsto \overline{z}$ *la conjugaison complexe et* i *un nombre complexe tel que* $i^2 = -1$.

Soit G *un groupe fini. Si* V *est une représentation de* G *sur* $\mathbf{R}$, *on note* $V_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V$ *la représentation complexe de* G *obtenue par extension des scalaires de* $\mathbf{R}$ *à* $\mathbf{C}$. *On rappelle que si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *désigne une base du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* V *alors* $(1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n)$ *est une base du* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* $V_{\mathbf{C}}$.

Inversement, si W *est une représentation complexe de* G, *on note* $W_{|\mathbf{R}}$ *la représentation obtenue par restriction des scalaires de* $\mathbf{C}$ *à* $\mathbf{R}$. *On rappelle que si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *désigne une base du* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* W *alors le* $2n$*-uplet* $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ *est une base du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $W_{|\mathbf{R}}$.

Dans ce problème, on note $R_{\mathbf{C}}(G)$ (resp. $R_{\mathbf{R}}(G)$) *l'ensemble des caractères des représentations complexes* (resp. *réelles*) *de dimension finie du groupe* G. *On notera* $R_{\mathbf{C}}(G)^\tau$ *l'ensemble des éléments de* $R_{\mathbf{C}}(G)$ *qui sont à valeurs réelles.*

Partie I

Premier exemple : le groupe $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$

1. (a) Écrire la table des caractères des représentations complexes irréductibles du groupe $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

(b) Soit L une représentation de dimension 1 d'un groupe fini G sur $\mathbf{R}$. Démontrer que son caractère est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

(c) Quelles sont les caractères des représentations réelles de dimension 1 de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$?

T.S.V.P

Soit E le plan $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On note $O(E)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ formé des isométries de E. On note $O^+(E)$ le sous groupe des isométries de déterminant 1.

2. (a) Donner la liste des morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ dans $O^+(E)$.

(b) Pour chacun des morphismes φ obtenus à la question précédente, donner le caractère χ_φ de la représentation réelle correspondante.

(c) Démontrer que la représentation réelle définie par un morphisme de groupes $\varphi : \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to O^+(E)$ est irréductible si et seulement si son image n'est pas contenue dans $\{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\}$.

3. Soit $\varphi : \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to O^+(E)$ un morphisme de groupes, soit V la représentation réelle correspondante de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

(a) Démontrer qu'il existe un isomorphisme de représentations de V sur une représentation de la forme $L_{|\mathbf{R}}$ où L est une représentation complexe de dimension 1 de G. (On pourra pour cela considérer un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{C}$).

(b) La représentation complexe L est-elle unique à isomorphisme près (on pourra distinguer deux cas) ?

4. Soit $\varphi : \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to O(E)$ un morphisme de groupes. On suppose que l'image de φ n'est pas contenue dans $O^+(E)$.

(a) Démontrer que l'image de φ est de cardinal 2.

(b) Démontrer que la représentation réelle définie par φ n'est pas irréductible.

Partie II

Deuxième exemple : le groupe D_6

On note D_6 le groupe diédral à 6 éléments, on rappelle que

$$D_6 = \{\mathrm{Id}_E, r, r^2, s, sr, sr^2\}$$

où E désigne $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure euclidienne orientée usuelle, r est la rotation vectorielle d'angle $2\pi/3$ et s désigne la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1. (a) Donner la liste des classes de conjugaison de D_6.

(b) Écrire la table des caractères des représentations complexes irréductibles de D_6.

2. (a) Pour chaque caractère χ d'une représentation complexe irréductible de D_6, construire une représentation réelle V telle que χ soit le caractère de la représentation complexe $V_\mathbf{C}$

(b) Les représentations réelles V construites à la question précédente sont-elles irréductibles ?

3. Soit W une représentation complexe de dimension finie de D_6. Existe-t-il une représentation réelle V de ce groupe telle que W soit isomorphe à $V_{\mathbf{C}}$?

Partie III

Caractères réels

Soit G un groupe fini.

1. (a) Soit V une représentation réelle de dimension finie de G, de caractère χ_V. On note $\chi_{V_{\mathbf{C}}}$ le caractère de la représentation complexe $V_{\mathbf{C}}$. Démontrer que

$$\chi_{V_{\mathbf{C}}} = \chi_V$$

(b) Démontrer l'inclusion $R_{\mathbf{R}}(G) \subset R_{\mathbf{C}}(G)^{\tau}$. (On rappelle que $R_{\mathbf{C}}(G)^{\tau}$ désigne l'ensemble des éléments de $R_{\mathbf{C}}(G)$ qui sont à valeurs réelles.)

2. (a) Soit W une représentation complexe de dimension finie de G. On note χ_W son caractère et $\chi_{W_{|\mathbf{R}}}$ le caractère de la représentation réelle $W_{|\mathbf{R}}$. Calculer $\chi_{W_{|\mathbf{R}}}$ en termes de χ_W.

(b) Démontrer l'inclusion $2R_{\mathbf{C}}(G)^{\tau} \subset R_{\mathbf{R}}(G)$, où $2R_{\mathbf{C}}(G)^{\tau}$ est l'ensemble des éléments de la forme 2χ pour $\chi \in R_{\mathbf{C}}(G)^{\tau}$.

3. Soit W une représentation complexe de dimension finie de G. On note $W^{\vee}$ la représentation contragrédiente. Démontrer qu'il existe une représentation réelle V de G telle que $W \oplus W^{\vee}$ soit isomorphe à $V_{\mathbf{C}}$.

Partie IV

Le cas des quaternions

Dans cette partie, on considère les matrices suivantes dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

On note Q le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ engendré par I et J.

1. (a) Donner la liste des éléments de Q.

(b) Donner la liste des classes de conjugaison dans Q.

Le morphisme d'inclusion $Q \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ définit une représentation complexe de dimension 2 de Q qu'on notera S.

2. (a) Calculer le caractère χ_S de S.

(b) Démontrer que S est irréductible.

3. (a) Soit v un élément de $S_{|\mathbf{R}}$ et soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. On pose

$$w = av + bIv + cJv + dKv.$$

Calculer $aw - bIw - cJw - dKw$.

(b) Démontrer que pour tout élément v non nul de $S_{|\mathbf{R}}$ la famille (v, Iv, Jv, Kv) est une famille libre du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $S_{|\mathbf{R}}$.

(c) Démontrer que $S_{|\mathbf{R}}$ est irréductible.

4. (a) Soit V une représentation réelle de dimension finie d'un groupe fini G. Démontrer que $(V_{\mathbf{C}})_{|\mathbf{R}}$ est isomorphe à la représentation $V \oplus V$.

(b) En déduire que le caractère χ_S n'appartient pas à $R_{\mathbf{R}}(Q)$.

5. (a) L'égalité $R_{\mathbf{R}}(G) = R_{\mathbf{C}}(G)^{\tau}$ est-elle vraie pour tout groupe fini G ?

(b) L'égalité $R_{\mathbf{R}}(G) = 2R_{\mathbf{C}}(G)^{\tau}$ est-elle vraie pour un groupe fini G ?