

La connexité rationnelle en arithmétique

Olivier Wittenberg

Une variété algébrique propre et lisse X sur un corps k de caractéristique 0 est dite *rationnellement connexe* si pour toute extension algébriquement close K de k , par tout couple de K -points de X passe une courbe rationnelle (définie sur K). Cette notion, introduite au début des années 1990 par Kollár, Miyaoka et Mori, et indépendamment par Campana, a d'abord joué un rôle important dans l'étude de la géométrie des variétés complexes. Le développement des techniques géométriques propres aux variétés rationnellement connexes s'est ensuite répercuté en arithmétique. Ainsi l'article fondateur de Kollár [66] établissait-il, pour toutes les variétés rationnellement connexes définies sur un corps p -adique, la finitude de la R -équivalence — une propriété de nature arithmétique qui jusque-là n'était connue que dans des cas très particuliers et qui n'avait même pu être envisagée dans cette généralité, faute de disposer de la notion de connexité rationnelle. Depuis une dizaine d'années, plusieurs autres résultats concernant l'arithmétique des variétés rationnellement connexes ont vu le jour. C'est sur ces résultats que nous nous proposons de faire le point dans le présent rapport.

Le premier chapitre introduit brièvement les principales questions qui se posent dans l'étude de l'arithmétique des variétés rationnellement connexes. Chacun des trois autres chapitres est concentré autour de la preuve d'un théorème général. Le second chapitre concerne les variétés rationnellement connexes sur les corps p -adiques. Le troisième chapitre concerne les variétés rationnellement connexes sur les corps dits pseudo-algébriquement clos (avec des applications aux corps finis et aux corps p -adiques). Le quatrième chapitre concerne quant à lui les variétés rationnellement connexes sur les corps finis. Les corps de nombres ne joueront qu'un rôle mineur dans ce texte, pour la simple raison qu'à ce jour, on ne connaît aucun résultat qui s'applique à toutes les variétés rationnellement connexes définies sur un corps de nombres (exception faite du corollaire 3.7 ci-dessous). Il existe une très abondante littérature consacrée à l'arithmétique de divers types de variétés rationnellement connexes sur les corps de nombres (surfaces rationnelles, espaces homogènes de groupes linéaires, intersections d'hypersurfaces de bas degré dans l'espace projectif, fibrations en des variétés de l'un de ces trois types) mais ce n'est pas le lieu ici de la survoler.

Version du 28 septembre 2008.

Les chapitres 2 et 3 font appel à des techniques de déformation de courbes rationnelles. Leur lecture présuppose un minimum de familiarité avec la plus simple de ces techniques dans le cas où le corps de base est algébriquement clos (voir par exemple [13, §4]).

Remerciements. Ces notes ont constitué le support d'une série de cinq exposés à la session SMF États de la Recherche « Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques » tenue à Strasbourg en mai 2008, dont je remercie les organisateurs. Je tiens d'autre part à remercier Jean-Louis Colliot-Thélène, Olivier Debarre, Hélène Esnault, Bruno Kahn et János Kollár pour leurs remarques et pour les réponses aux questions que je n'ai pas manqué de leur poser durant la préparation de ce texte.

Conventions. Une *variété* est un schéma de type fini sur un corps. Soit X une variété sur un corps k . Un *point rationnel* de X est un k -point de X . L'ensemble des points rationnels est noté $X(k)$. Soit K un corps algébriquement clos non dénombrable contenant k . On dit que la variété X est *rationnelle* (resp. *unirationnelle*) si $X \otimes_k K$ l'est, c'est-à-dire si $X \otimes_k K$ est birationnellement équivalente à un espace projectif (resp. s'il existe une application rationnelle dominante d'un espace projectif vers $X \otimes_k K$). Si X est propre sur k , on dit que X est *rationnellement connexe* (resp. *rationnellement connexe par chaînes, séparablement rationnellement connexe*) si $X \otimes_k K$ l'est (selon la définition donnée par exemple dans [13]). Nous convenons que ces cinq qualificatifs sous-entendent que $X \otimes_k K$ est irréductible (en particulier non vide). On dira que X est *k -rationnelle* (resp. *k -unirationnelle*) s'il existe une application rationnelle $\mathbf{P}_k^n \dashrightarrow X$ qui soit birationnelle (resp. dominante). Une *conique* (ou *conique projective*) est une courbe projective plane de degré 2 ; rappelons que toute courbe rationnelle propre et lisse est isomorphe à une conique.

Table des matières

1	Un aperçu de quelques problèmes concernant l'arithmétique des variétés rationnellement connexes	4
1.1	Corps (C_i)	4
1.1.1	Définition, exemples et théorèmes de transition	4
1.1.2	Le cas de \mathbf{Q}_p	6
1.1.3	Autres corps ; quelques questions ouvertes	7
1.1.4	Intersections d'hypersurfaces de bas degré dans l'espace projectif	9
1.2	Interlude : surfaces rationnelles et corps (C_1)	9
1.3	Groupe de Brauer	12

1.4	Obstruction élémentaire	15
1.5	Obstruction de Brauer–Manin	17
1.6	Groupe de Chow, R-équivalence	18
1.7	Quelques autres questions sur l’arithmétique des variétés rationnel- lement connexes	19
2	Variétés rationnellement connexes sur les corps fertiles	21
2.1	Énoncé du théorème principal ; conséquences	21
2.2	Preuve du théorème 2.4	23
2.2.1	Esquisse de l’argument	23
2.2.2	La preuve proprement dite	25
2.3	Preuve du corollaire 2.5	28
2.4	R-équivalence et R-équivalence directe sur les corps fertiles	29
3	Variétés rationnellement connexes sur les corps finis et sur les corps pseudo-algébriquement clos	31
3.1	Énoncé du théorème principal ; conséquences	32
3.2	Des corps pseudo-algébriquement clos aux corps finis	34
3.3	Preuve du théorème principal	37
3.3.1	Esquisse de l’argument	37
3.3.2	La preuve proprement dite	38
3.4	Preuve des corollaires 3.5 et 3.6	41
3.5	Application du théorème de type Lefschetz au problème de Galois inverse	42
4	Existence de points rationnels sur les corps finis : le point de vue motivique	44
4.1	Introduction	44
4.2	Preuve du théorème 4.1	45
4.2.1	Formules de Lefschetz	45
4.2.2	Valeurs propres de Frobenius et coniveau	48
4.2.3	Du groupe de Chow au coniveau	50
4.3	Au-delà du théorème 4.1	51
	Bibliographie	54

1 Un aperçu de quelques problèmes concernant l'arithmétique des variétés rationnellement connexes

1.1 Corps (C_i)

Le paragraphe 1.1 est consacré aux corps (C_i) ; les variétés rationnellement connexes n'y apparaissent qu'implicitement (sous la forme d'hypersurfaces projectives de bas degré ou d'intersections d'icelles). La propriété (C_1) , introduite par Artin [4], est notamment liée aux questions d'existence de points rationnels sur les variétés de Severi–Brauer ainsi que sur certaines variétés de Fano. (Les unes comme les autres sont des exemples de variétés rationnellement connexes (par chaînes), d'après les travaux de Campana, Kollár, Miyaoka et Mori.)

1.1.1 Définition, exemples et théorèmes de transition

Définition 1.1 (Artin, Lang) — Soient k un corps et $i \geq 0$ un entier. On dit que k est un corps (C_i) si pour tout n et tout d , toute hypersurface de \mathbf{P}_k^n de degré d avec $n \geq d^i$ admet un point k -rationnel.

Autrement dit, le corps k est (C_i) si les équations de la forme

$$f(x_0, \dots, x_n) = 0,$$

où $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ est un polynôme homogène de degré $d > 0$, admettent une solution $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ dès que $n \geq d^i$.

Les corps (C_0) sont les corps algébriquement clos. Chevalley [17] a démontré que les corps finis sont (C_1) :

Théorème 1.2 (Chevalley–Warning) — Soit k un corps fini de caractéristique p . Soit $H \subset \mathbf{P}_k^n$ une hypersurface de degré d avec $n \geq d$. Alors $\text{Card } H(k) \equiv 1 \pmod{p}$, et en particulier $H(k) \neq \emptyset$.

Démonstration (due à Ax) — Notons q le cardinal de k et $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ un polynôme homogène de degré d s'annulant sur H . Soit N le nombre de solutions dans k^{n+1} de l'équation $f = 0$. Comme $\text{Card } H(k) = (N - 1)/(q - 1)$, il suffit d'établir la congruence $N \equiv 0 \pmod{p}$.

Posons $F = 1 - f^{q-1}$. Le polynôme F ne prend sur k^{n+1} que les valeurs 0 et 1; il vaut 1 précisément sur les solutions de l'équation $f = 0$. D'où l'égalité

$$N = \sum_{\underline{x} \in k^{n+1}} F(\underline{x}). \tag{1}$$

Pour tout entier α tel que $0 \leq \alpha < q - 1$, on a $\sum_{x \in k} x^\alpha = 0$ (si $\alpha = 0$ c'est clair, sinon c'est un petit exercice). Par conséquent, pour $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}} x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n} = 0$$

dès que $\min(\alpha_i) < q - 1$, en particulier dès que $\alpha_0 + \dots + \alpha_n < (n + 1)(q - 1)$. Il s'ensuit que $\sum_{\underline{x} \in k^{n+1}} G(\underline{x}) = 0$ pour tout $G \in k[x_0, \dots, x_n]$ de degré strictement inférieur à $(n+1)(q-1)$. Appliquons ceci au polynôme F , qui est de degré $d(q-1)$, et combinons l'égalité obtenue avec (1) : on trouve que N s'annule dans k , autrement dit $N \equiv 0 \pmod{p}$. \square

Remarques — (i) L'hypothèse que le polynôme f est homogène n'a pas été utilisée. Ainsi le résultat prouvé est quelque peu plus général que celui énoncé.

(ii) Toujours sous les hypothèses du théorème de Chevalley–Warning, Ax [5] a démontré que l'on a même $\text{Card } H(k) \equiv 1 \pmod{q}$, où q désigne le cardinal de k .

À partir des corps algébriquement clos et des corps finis, il est facile de fabriquer des exemples de corps (C_i) pour $i > 1$ grâce à la propriété de transitivité suivante :

Théorème 1.3 (Tsen–Lang–Nagata) — *Soit k'/k une extension de corps de degré de transcendance $d < \infty$, et soit i un entier naturel. Si k est un corps (C_i) , alors k' est un corps (C_{i+d}) .*

En particulier, le corps $\mathbf{C}(t)$, et plus généralement le corps des fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos, est (C_1) (c'est le théorème de Tsen), et le corps des fonctions de toute variété algébrique intègre de dimension i sur un corps algébriquement clos (resp. fini) est un exemple de corps (C_i) (resp. (C_{i+1})), d'après le théorème de Chevalley).

Démonstration — Nous nous contentons ici de démontrer le cas particulier le plus important du théorème 1.3, c'est-à-dire celui où $k' = k(t)$ et où k est algébriquement clos. Pour le cas général, le principe est le même, mais il vaut mieux commencer par établir le théorème d'Artin–Lang–Nagata dont il est question au §1.1.4 ci-dessous. Nous renvoyons à [48, Chapter 3] pour une démonstration complète.

Soient donc k un corps algébriquement clos et $f \in k(t)[x_0, \dots, x_n]$ un polynôme homogène de degré $d \leq n$ à coefficients dans $k(t)$. Nous voulons prouver que l'équation $f = 0$ admet une solution dans $k(t)^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Écrivons f comme

$$f = \sum_{\underline{\alpha}=(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^{n+1}} c_{\underline{\alpha}} x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n} \tag{2}$$

avec $c_{\underline{\alpha}} \in k(t)$. Quitte à multiplier f par un scalaire, on peut supposer que les $c_{\underline{\alpha}}$ sont dans $k[t]$. Soit N un entier assez grand, à préciser. Posons

$$x_i = y_{i0} + ty_{i1} + \cdots + t^N y_{iN}$$

pour chaque $i \in \{0, \dots, n\}$, où les y_{ij} sont des indéterminées. Réécrivons (2) en termes des y_{ij} , développons, et rassemblons les monômes obtenus selon les puissances de t ; on aboutit à $f = \sum_{m \geq 0} t^m \varphi_m$ où les φ_m sont des polynômes en les y_{ij} et à coefficients dans k . Notant δ le maximum des degrés des polynômes $c_{\underline{\alpha}}$, on a $\varphi_m = 0$ pour $m > Nd + \delta$. Le système $\varphi_0 = \varphi_1 = \cdots = \varphi_{Nd+\delta} = 0$ est un système de $Nd + \delta + 1$ équations polynomiales homogènes en $(N+1)(n+1)$ variables, les y_{ij} . Comme $d < n+1$, ce système admettra une solution dans $k^{(N+1)(n+1)} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ si l'on choisit N assez grand, puisque k est algébriquement clos. Une telle solution est précisément ce que l'on cherche. \square

Soit maintenant A un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel κ , de corps des fractions K . Si κ est (C_i) , peut-on conclure que K est (C_{i+1}) ? En général non, comme il résulte du contre-exemple de Terjanian à la conjecture d'Artin (voir plus bas). Néanmoins la réponse est oui dans deux cas notables : le cas d'égalité caractéristique (Greenberg), et le cas où $i = 0$ (Lang). Pour ces deux résultats il n'est même pas nécessaire de supposer A complet ; il suffit qu'il soit hensélien et que le complété de K soit une extension séparable de K (ce qui bien sûr est automatique si K est de caractéristique 0). Nous renvoyons à [98] pour un résumé des résultats de Greenberg et à [47] pour les démonstrations. Les deux corollaires les plus importants sont :

Théorème 1.4 (Greenberg) — *Si k est un corps (C_i) , le corps $k((t))$ des séries formelles en une variable à coefficients dans k est (C_{i+1}) .*

Théorème 1.5 (Lang) — *Soit p un nombre premier. L'extension non ramifiée maximale de \mathbf{Q}_p (ou plus généralement d'un corps p -adique) est un corps (C_1) .*

1.1.2 Le cas de \mathbf{Q}_p

Le corps \mathbf{Q}_p lui-même n'est pas (C_1) : il est facile d'exhiber des coniques dépourvues de point rationnel sur \mathbf{Q}_p . Par exemple, si $p \neq 2$ et si $a \in \mathbf{Z}_p^*$ n'est pas un carré, la courbe d'équation homogène $x^2 - ay^2 + pz^2 = 0$ en est un exemple, tandis que si $p = 2$, la courbe d'équation homogène $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ en est un.

Artin avait conjecturé que \mathbf{Q}_p est (C_2) . Il est vrai que toute hypersurface de degré d dans $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^n$ avec $n \geq d^2$ admet un point \mathbf{Q}_p -rationnel si $d = 2$ (Hasse [54]) ou si $d = 3$ (Demjanov [37] pour $p \neq 3$ et Lewis [76] en général). Néanmoins, Terjanian [97] a exhibé un contre-exemple à la conjecture d'Artin, avec $d = 4$ et

$p = 2$. Ce contre-exemple fut ensuite généralisé par divers auteurs pour aboutir finalement au

Théorème 1.6 (Arkhipov–Karatsuba [3], Alemu [1]) — *Soit p un nombre premier. Soit k un corps p -adique. Alors k n'est (C_i) pour aucun $i \geq 0$.*

La question suivante semble n'être pas encore résolue (cf. [98, p. 6] et [102, p. 67]) : une hypersurface de \mathbf{P}_k^n de degré d , avec $n \geq d^2$, admet-elle nécessairement un point rationnel si k est p -adique et que d est impair ?

Dans le sens d'une réponse positive à la conjecture d'Artin, signalons le célèbre théorème d'Ax–Kochen [7] selon lequel pour d fixé, les corps \mathbf{Q}_p sont « (C_2) en degré d » sauf pour un nombre fini de p . (L'ensemble des mauvais p dépend de d de manière non explicite mais calculable — du moins en théorie.) On trouvera dans [98] une variante portant sur tous les corps p -adiques : pour tout d , il existe p_0 tel que pour tout $p \geq p_0$, tout corps p -adique est « (C_2) en degré d ». Dans le cas où $d = 5$, Leep et Yeomans [75] établissent le résultat plus précis suivant : pour tout corps p -adique k dont le corps résiduel possède au moins 47 éléments, toute hypersurface de \mathbf{P}_k^n de degré $d = 5$ avec $n \geq d^2 = 25$ admet un point k -rationnel.

La démonstration d'Ax et Kochen du théorème d'Ax–Kochen fait appel à la théorie des modèles. Denef a récemment annoncé une preuve géométrique de ce théorème, ainsi que de la généralisation conjecturée par Colliot-Thélène [27, §3]. Celle-ci étend le théorème d'Ax–Kochen à des variétés qui ne sont pas nécessairement des hypersurfaces de \mathbf{P}_k^n .

Si k est un corps p -adique et si $H \subset \mathbf{P}_k^n$ est une hypersurface de degré d avec $n \geq d^2$, Kato et Kuzumaki [61] conjecturent que H contient un 0-cycle de degré 1 (autrement dit : les degrés des points fermés de H sont premiers entre eux dans leur ensemble), et établissent cette conjecture dans le cas où d est premier. À ce sujet, voir également [27, Remarque 2].

1.1.3 Autres corps ; quelques questions ouvertes

Il est très facile de voir que le corps \mathbf{R} des nombres réels n'est lui non plus (C_i) pour aucun $i \geq 0$. Ceci implique (exercice!) que si X est une variété intègre lisse sur \mathbf{R} , et si $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, alors le corps des fonctions de X n'est (C_i) pour aucun $i \geq 0$. Lorsque $X(\mathbf{R}) = \emptyset$, la situation est moins claire :

Conjecture 1.7 (Lang [73]) — *Soit X une variété intègre sur \mathbf{R} (ou, plus généralement, sur un corps réel clos). Soit $i = \dim(X)$. Si $X(\mathbf{R}) = \emptyset$, alors le corps des fonctions de X est (C_i) .*

Cette conjecture audacieuse est ouverte même dans le cas où X est la conique réelle sans point réel, c'est-à-dire la courbe affine d'équation $x^2 + y^2 = -1$.

Lorsque X est de dimension 2, on ne sait même pas si toute hypersurface quadrique dans $\mathbf{P}_{\mathbf{R}(X)}^4$ admet un point rationnel.

Si maintenant k est un corps de nombres, il résulte du théorème 1.6 que k n'est (C_i) pour aucun $i \geq 0$. Cependant, le problème suivant est ouvert :

Conjecture 1.8 (Artin [4, p. x]) — *Le corps \mathbf{Q}^{ab} est (C_1) .*

Rappelons que \mathbf{Q}^{ab} , qui est par définition l'extension abélienne maximale de \mathbf{Q} , est aussi le sous-corps de $\overline{\mathbf{Q}}$ engendré par les racines de l'unité (théorème de Kronecker–Weber).

Si k est un corps algébriquement clos, le corps des séries formelles itérées $k((x))((y))$ est (C_2) d'après le théorème 1.4. La question de savoir si le corps des fractions $k((x, y))$ de l'anneau $k[[x, y]]$ est lui aussi (C_2) est en revanche ouverte, même si $k = \mathbf{C}$. Dans cette direction on dispose seulement d'un théorème dû à Choi, Dai, Lam et Reznick [18] selon lequel $k((x, y))$ est « (C_2) pour les hypersurfaces diagonales ». Plus généralement, on peut se demander si $k((x_1, \dots, x_n))$ est (C_n) .

Citons pour terminer une question soulevée par Ax sur la propriété (C_1) pour les corps pseudo-algébriquement clos. Un corps k est dit *pseudo-algébriquement clos* si toute variété géométriquement intègre sur k admet un point k -rationnel.

Question 1.9 (Ax [6, p. 270, Problem 3]) — *Tout corps parfait et pseudo-algébriquement clos est-il (C_1) ?*

Cette question est équivalente à la question suivante (cf. [45, Corollary 21.3.3] par exemple) : pour tout corps k et tout entier $n \geq 1$, toute hypersurface $H \subset \mathbf{P}_k^n$ de degré au plus n contient-elle une sous-variété géométriquement irréductible ?

Si k est un corps parfait pseudo-algébriquement clos, on sait que k est (C_1) dès que l'une au moins des trois hypothèses suivantes est vérifiée :

- le groupe de Galois absolu de k est abélien (Ax [6, Theorem D]) ;
- le corps k contient un corps algébriquement clos (Denef–Jarden–Lewis [38]) ;
- le corps k est de caractéristique nulle (Kollár [69]).

Kollár démontre en réalité dans [69] l'énoncé suivant, d'une portée bien plus large : sur un corps pseudo-algébriquement clos de caractéristique nulle, toute variété obtenue en faisant dégénérer une variété de Fano (qui n'est pas nécessairement une hypersurface ni même une intersection d'hypersurfaces de bas degré dans un espace projectif) admet un point rationnel. Hogadi et Xu [56] ont depuis généralisé ce résultat aux variétés rationnellement connexes (qui ne sont pas nécessairement de Fano).

1.1.4 Intersections d'hypersurfaces de bas degré dans l'espace projectif

Soient $i, n, r \geq 1$ des entiers, soit k un corps (C_i) et soient $H_1, \dots, H_r \subset \mathbf{P}_k^n$ des hypersurfaces. Notons $X = H_1 \cap \dots \cap H_r$ et supposons que $n \geq d_1^i + \dots + d_r^i$. Par définition de la propriété (C_i) , la variété X contient un point rationnel si $r = 1$, mais pour r quelconque, a-t-on nécessairement $X(k) \neq \emptyset$? En toute généralité, cette question est ouverte. On sait néanmoins qu'elle admet une réponse affirmative si $d_1 = \dots = d_r$ (Artin–Lang–Nagata [83]) ou si k possède une forme normique de niveau i et de degré d pour tout entier $d > 1$ (Lang [72, Theorem 4]). Une *forme normique de niveau i et de degré d* est un polynôme homogène f à coefficients dans k , de degré d , en d^i variables, tel que l'hypersurface projective d'équation $f = 0$ n'admette pas de point rationnel. La terminologie vient de ce que si ℓ/k est une extension finie, la norme de ℓ à k (exprimée dans une base quelconque du k -espace vectoriel ℓ) est une forme normique de niveau 1 et de degré $[\ell : k]$. En particulier un corps fini (et plus généralement tout corps admettant une extension finie de chaque degré) admet une forme normique de niveau 1 et de degré d pour tout $d > 1$. Pour la plupart des corps (C_i) que l'on rencontre en géométrie arithmétique, l'existence de formes normiques de tout degré est assurée par la propriété suivante (cf. [72, p. 377]) : s'il existe sur k une valuation discrète (de rang 1) dont le corps résiduel possède une forme normique de niveau $i - 1$ et de degré d , alors k possède une forme normique de niveau i et de degré d . (On prend pour convention qu'un corps algébriquement clos possède une forme normique de niveau 0 et de degré d pour tout $d > 1$.) Ainsi, notamment, le corps des fonctions d'une variété intègre de dimension i (resp. $i - 1$) sur un corps algébriquement clos (resp. sur un corps fini ou sur l'extension non ramifiée maximale d'un corps p -adique) possède une forme normique de niveau i et de degré d pour tout $d > 1$, de sorte que si k est un tel corps, alors on a bien $X(k) \neq \emptyset$.

1.2 Interlude : surfaces rationnelles et corps (C_1)

Jusqu'ici nous avons constaté que la propriété (C_1) pour le corps k exerce une influence sur les points rationnels des hypersurfaces de degré d dans \mathbf{P}_k^n si $n \geq d$ (par définition) et plus généralement sur les points rationnels des intersections d'hypersurfaces de degrés d_1, \dots, d_r dans \mathbf{P}_k^n si $n \geq \sum_{i=1}^r d_i$ (d'après le §1.1.4). Lorsqu'elles sont lisses, ces variétés sont rationnellement connexes, au moins si k est de caractéristique nulle. Inversement, si X est une variété propre, lisse, rationnellement connexe sur un corps k (de caractéristique nulle, disons), mais que X n'est pas donnée comme une intersection d'hypersurfaces de bas degré dans un espace projectif, il n'y a aucune raison *a priori* de s'attendre à ce que la propriété (C_1) pour k ait un quelconque impact sur l'ensemble $X(k)$. C'est pourtant ce qui se produit pour plusieurs classes de variétés rationnellement connexes,

comme l'illustrent l'exemple des variétés de Severi–Brauer (cf. §1.3 ci-après), le théorème de Springer–Steinberg (selon lequel si k est un corps parfait (C_1) , tout espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe sur k admet un point rationnel; cf. [92, III.2.4]), et le

Théorème 1.10 (Manin [77, §4], Colliot-Thélène [20]) — *Soit X une surface propre, lisse, rationnelle, sur un corps k . Si k est (C_1) alors $X(k) \neq \emptyset$.*

La démonstration s'appuie sur la classification des surfaces rationnelles sur un corps arbitraire, établie par Enriques, Manin et Iskovskikh [58] et qui s'énonce ainsi. Soit k un corps. Toute surface sur k propre, lisse et rationnelle s'obtient par un nombre fini d'éclatements de centre lisse à partir d'une surface de l'un des deux types suivants :

1. Les surfaces propres, lisses et géométriquement connexes dont le faisceau anti-canonique est ample.
2. Les surfaces X propres, lisses et géométriquement connexes telles qu'il existe une courbe C lisse, connexe, rationnelle et un morphisme $\pi: X \rightarrow C$ dont la fibre générique est lisse et dont les fibres sont toutes isomorphes à des coniques irréductibles géométriquement réduites.

Les surfaces de type 1 (resp. 2) sont dites *de del Pezzo* (resp. *fibrées en coniques au-dessus d'une conique*; la courbe C étant propre, lisse, rationnelle, est en effet isomorphe à une conique projective lisse *via* le plongement anti-canonique). Elles sont toujours rationnelles.

Esquisse de démonstration du théorème 1.10 — (Voir [65, IV.6.8] pour les détails.)

Soient k un corps (C_1) et X une surface propre, lisse, rationnelle, sur k . On peut supposer que X est de l'un des deux types standard d'Enriques–Manin–Iskovskikh.

Si $\pi: X \rightarrow C$ est une surface rationnelle fibrée en coniques, on a $C(k) \neq \emptyset$ puisque C est isomorphe à une conique et que k est (C_1) . Fixons alors $c \in C(k)$. La fibre de π en c admet à son tour un point rationnel, étant elle aussi isomorphe à une conique. D'où $X(k) \neq \emptyset$.

Supposons maintenant X de del Pezzo. On appelle *degré* de X le nombre d'auto-intersection de son faisceau canonique. Il est compris entre 1 et 9. Notons-le d . Pour $d \geq 3$, le faisceau anti-canonique est très ample et permet de voir X comme une sous-variété de degré d dans \mathbf{P}_k^d . Si $d = 3$, la surface X s'identifie ainsi à une surface cubique dans \mathbf{P}_k^3 , de sorte que $X(k) \neq \emptyset$ par définition de la propriété (C_1) . Si $d = 4$, la surface X est une intersection lisse de deux quadriques dans \mathbf{P}_k^4 . D'après Artin–Lang–Nagata, ceci entraîne à nouveau que $X(k) \neq \emptyset$ (cf. §1.1.4). Swinnerton-Dyer a montré que les surfaces de del Pezzo de degré 5 ont toujours un point rationnel, sans hypothèse sur le corps de base. Il en va de même pour les surfaces de del Pezzo de degrés 1 et 7, pour des raisons triviales (si $d = 1$, le

système linéaire anti-canonique admet un unique point base ; si $d = 7$, la surface est isomorphe à l'éclaté de \mathbf{P}_k^2 en deux points rationnels ou en un point fermé de degré 2). Les surfaces de del Pezzo de degré 9 sont les variétés de Severi–Brauer de dimension 2, *i.e.* les surfaces qui après une extension finie des scalaires deviennent isomorphes au plan projectif. Nous montrerons au §1.3 qu'elles admettent un point rationnel sur tout corps (C_1) . Un argument de même nature permet de traiter plus généralement les surfaces de del Pezzo de degré ≥ 6 (on se ramène à la propriété : sur un corps (C_1) , tout espace principal homogène sous un tore admet un point rationnel [90, X.7]). Restent les surfaces de del Pezzo de degré 2. Supposons pour simplifier que k soit de caractéristique $\neq 2$. Les surfaces de del Pezzo de degré 2 sur k sont alors les revêtements doubles de \mathbf{P}_k^2 ramifiés le long d'une courbe quartique lisse. Elles sont donc définies par une équation « homogène » de la forme $t^2 = f(x, y, z)$, où f est un polynôme homogène de degré 4 et où les variables x, y, z sont de poids 1 et t est de poids 2. Si tout élément de k est un carré, on a donc $X(k) \neq \emptyset$ de façon évidente. Sinon, il existe un polynôme homogène $g \in k[u, v]$ de degré 2, tel que l'équation $g(u, v) = 0$ n'ait pas de solution dans $k^2 \setminus \{(0, 0)\}$. L'équation $g(u, v)^2 = f(x, y, z)$ définit alors une hypersurface de degré 4 dans \mathbf{P}_k^4 . Comme k est (C_1) , cette hypersurface admet un k -point, d'où $X(k) \neq \emptyset$. \square

Ces diverses considérations nous amènent à poser la question suivante, qui fait partie du folklore :

Question 1.11 — *Soit X une variété propre, lisse, séparablement¹ rationnellement connexe, sur un corps k . Si k est (C_1) , a-t-on nécessairement $X(k) \neq \emptyset$?*

On sait que la réponse est affirmative si k est le corps des fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos (d'après Graber, Harris, Starr et de Jong, cf. [46] et [30]) ou si k est un corps fini (d'après Esnault, cf. §4 ci-dessous). Le cas particulier de la question 1.11 où k est l'extension non ramifiée maximale d'un corps p -adique mérite d'être énoncé séparément :

Question 1.12 — *Toute variété propre, lisse et rationnellement connexe sur un corps p -adique acquiert-elle un point rationnel après une extension finie non ramifiée des scalaires ?*

¹Une variété X géométriquement connexe sur k et de dimension > 0 est *séparablement rationnellement connexe* si et seulement s'il existe un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X \otimes_k \bar{k}$ tel que f^*T_X soit ample, où \bar{k} désigne une clôture algébrique de k . Si k est de caractéristique 0, il revient au même de demander que X soit rationnellement connexe. En caractéristique $p > 0$ la condition « séparablement rationnellement connexe » est strictement plus forte. Elle permet d'écarter certaines pathologies comme les variétés de type général qui sont en même temps rationnellement connexes [94].

La question 1.12 n'est pas sans lien avec le théorème de Graber, Harris, Starr et de Jong qui vient d'être mentionné (voir [26, Théorème 7.7, Remarque 7.8]).

Nous venons de rencontrer avec la question 1.12 un premier problème ouvert concernant l'arithmétique des variétés rationnellement connexes. Les questions 1.11 et 1.12 sont cependant en elles-mêmes d'une portée très limitée, ceci autant à cause de leurs hypothèses (beaucoup de corps ne sont pas (C_1) , surtout parmi les corps qui présentent un intérêt du point de vue de l'arithmétique) qu'à cause de la propriété qu'elles considèrent (savoir que $X(k) \neq \emptyset$ ne renseigne en rien sur la structure de l'ensemble $X(k)$, sur les courbes rationnelles géométriquement intègres contenues dans X , sur les groupes de Chow de X , etc).

L'un des buts de la seconde moitié du §1 sera de parvenir à la formulation de quelques grandes questions ouvertes au sujet de l'arithmétique des variétés rationnellement connexes. Au §1.3 nous introduisons la notion de groupe de Brauer. Elle intervient à plusieurs endroits dans la suite du texte. Au §1.4 nous définissons l'obstruction élémentaire (qui est une obstruction à l'existence de points rationnels sur un corps arbitraire) et l'utilisons pour formuler un analogue de la question 1.11 sur le corps $\mathbf{C}(x, y)$. Au §1.5, consacré à l'obstruction de Brauer–Manin, nous arrivons à une première question ouverte sur les variétés rationnellement connexes définies sur un corps de nombres. La R-équivalence et les groupes de Chow de 0-cycles forment le sujet du §1.6. Enfin, le §1.7 rassemble quelques questions ouvertes qui n'ont pas trouvé leur place dans les paragraphes précédents.

1.3 Groupe de Brauer

La notion de groupe de Brauer sera utilisée aux paragraphes 1.4 et 1.5. Elle est étroitement liée à la propriété (C_1) ainsi qu'à l'étude des variétés de Severi–Brauer, qui constituent l'exemple le plus simple de variétés rationnellement connexes. Nous nous bornons ici à donner une définition et quelques exemples. Dans ce paragraphe, la plupart des preuves sont omises. Le lecteur désireux d'en savoir plus consultera avec profit Platonov et Yanchevskiï [86].

Soient k un corps et \bar{k} une clôture séparable de k . Le groupe de Brauer de k est un groupe abélien de torsion défini comme suit.

Une *algèbre centrale simple* sur k est une k -algèbre (unitaire) A telle que la \bar{k} -algèbre $A \otimes_k \bar{k}$ soit isomorphe à l'algèbre de matrices $M_n(\bar{k})$ pour un $n \geq 1$. L'entier n est alors appelé le *degré* de A . Les corps gauches de centre k et de dimension finie sur k sont des algèbres centrales simples sur k . Si A est une algèbre centrale simple sur k , il existe un entier $r \geq 1$ et un corps gauche D de centre k tels que A soit isomorphe à la k -algèbre $D \otimes_k M_r(k)$. Le corps gauche D est déterminé par A à un k -isomorphisme près, on peut donc parler du corps gauche associé à A .

Deux algèbres centrales simples sur k sont *semblables* si les corps gauches qui leur sont associés sont k -isomorphes.

La relation $M_n(\bar{k}) \otimes M_m(\bar{k}) \simeq M_{nm}(\bar{k})$ montre que les algèbres centrales simples sont stables par produit tensoriel. De plus, si A, A', B et B' sont des algèbres centrales simples sur k , et si A est semblable à A' et que B est semblable à B' , alors $A \otimes_k B$ est semblable à $A' \otimes_k B'$. Par conséquent le produit tensoriel définit une opération sur les classes de similitude d'algèbres centrales simples sur k .

Le *groupe de Brauer* de k , noté $\text{Br}(k)$, est par définition l'ensemble des classes de similitude d'algèbres centrales simples sur k , muni du produit tensoriel. L'élément neutre est représenté par la k -algèbre k . Si A est une algèbre centrale simple sur k , l'inverse de la classe de A dans $\text{Br}(k)$ est représenté par l'algèbre opposée A° (par définition $A^\circ = A$ en tant que k -espace vectoriel, mais la multiplication de A° envoie $x, y \in A$ sur $yx \in A$); en effet $A \otimes_k A^\circ$ s'identifie à l'algèbre des endomorphismes du k -espace vectoriel A , par l'application qui à $a \otimes b$ associe l'endomorphisme $x \mapsto axb$.

Exemples — (i) Si k est séparablement clos, alors $\text{Br}(k) = 0$.

(ii) Si k est un corps fini, alors $\text{Br}(k) = 0$. C'est le théorème de Wedderburn, habituellement énoncé ainsi : « tout corps fini est commutatif ».

(iii) Les quaternions de Hamilton forment une algèbre centrale simple sur \mathbf{R} . Plus généralement, si k est un corps de caractéristique $\neq 2$ et si $a, b \in k^*$, la k -algèbre $k \oplus ke \oplus kf \oplus kef$ définie par $e^2 = a, f^2 = b, fe = -ef$ est une algèbre centrale simple sur k , de degré 2, encore appelée *algèbre de quaternions*. C'est un corps gauche si et seulement si la conique d'équation homogène $ax^2 + by^2 = z^2$ n'admet pas de point k -rationnel.

Notons $(a, b)_k \in \text{Br}(k)$ la classe de l'algèbre de quaternions associée à $a, b \in k^*$. L'application $k^* \times k^* \rightarrow \text{Br}(k)$, $(a, b) \mapsto (a, b)_k$ est \mathbf{Z} -bilinéaire symétrique et se factorise par $k^*/k^{*2} \times k^*/k^{*2}$.

(iv) Si \mathbf{R} est le corps des réels, on a $\text{Br}(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}/2$, engendré par la classe $(-1, -1)_{\mathbf{R}}$ des quaternions de Hamilton. Cette propriété fut prouvée à l'origine par Frobenius mais elle résulte immédiatement de l'interprétation cohomologique du groupe de Brauer (voir plus bas).

(v) Si k est un corps p -adique, la théorie du corps de classes locale fournit un isomorphisme canonique $\text{Br}(k) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

(vi) Si k est un corps de nombres, la théorie du corps de classes globale fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Br}(k) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Omega} \text{Br}(k_v) \xrightarrow{\sum \text{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0 \quad (3)$$

où Ω désigne l'ensemble des places de k et k_v est le complété de k en v , et où $\text{inv}_v: \text{Br}(k_v) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est l'isomorphisme évoqué en (v) si v est une place finie et

est l'inclusion évidente résultant de (iv) ou de (i) si v est infinie. La flèche de gauche envoie la classe d'une k -algèbre centrale simple A sur la famille des classes des k_v -algèbres centrales simples $A \otimes_k k_v$.

Avec l'exemple des algèbres de quaternions, on voit que le groupe de Brauer contrôle l'existence de points rationnels sur les coniques. Le phénomène est plus général. On dit qu'une variété X sur k est une *variété de Severi–Brauer* si $X \otimes_k \bar{k}$ est \bar{k} -isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}_{\bar{k}}^n$ pour un $n \geq 0$. Il y a une correspondance biunivoque entre les algèbres centrales simples sur k de degré n (à isomorphisme près) et les variétés de Severi–Brauer sur k de dimension $n - 1$ (à isomorphisme près). Les algèbres de quaternions correspondent aux coniques projectives lisses ; l'algèbre de matrices $M_n(k)$ correspond à l'espace projectif \mathbf{P}_k^{n-1} . On peut montrer qu'une variété de Severi–Brauer admettant un point rationnel est automatiquement isomorphe à l'espace projectif. Ainsi, à toute variété de Severi–Brauer X sur k est associée une classe de $\text{Br}(k)$, et cette classe est nulle si et seulement si $X(k) \neq \emptyset$.

Bien entendu, les variétés de Severi–Brauer sont séparablement rationnellement connexes. Pour que la question 1.11 soit raisonnable, il faudrait donc que toute variété de Severi–Brauer sur un corps (C_1) admette un point rationnel. C'est bien le cas :

Proposition 1.14 — *Le groupe de Brauer d'un corps (C_1) est nul.*

Démonstration — Soient k un corps (C_1) et D un corps gauche de centre k et de dimension finie sur k .

Choisissons une clôture séparable \bar{k} de k et un isomorphisme de \bar{k} -algèbres $\varphi: D \otimes_k \bar{k} \xrightarrow{\sim} M_n(\bar{k})$. L'application $D \otimes_k \bar{k} \rightarrow \bar{k}$, $x \mapsto \det(\varphi(x))$ est polynomiale, au sens où dans une base du k -espace vectoriel D elle s'écrit comme un polynôme en les coordonnées. Il résulte du théorème de Skolem–Noether, selon lequel tout automorphisme d'une algèbre centrale simple est intérieur, qu'elle ne dépend pas du choix de φ , et qu'elle est $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -équivariante — en effet, la conjuguer par $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ revient à remplacer φ par $\sigma\varphi\sigma^{-1}$, c'est-à-dire à changer le choix de φ . Elle provient donc par extension des scalaires d'une unique application polynomiale $D \rightarrow k$, appelée *norme réduite* et notée Nrd .

Dans une base de D sur k , la norme réduite est un polynôme homogène de degré n en n^2 variables. Ce polynôme ne s'annule qu'en $0 \in D$ puisque D est un corps gauche et que $\text{Nrd}(xy) = \text{Nrd}(x)\text{Nrd}(y)$ pour tous $x, y \in D$. Le corps k étant (C_1) , il s'ensuit que $n \geq n^2$, autrement dit $n = 1$ et donc $D = k$. \square

La proposition 1.14 implique en particulier que le groupe de Brauer d'un corps fini ou de $\mathbf{C}(t)$ est nul.

Le groupe de Brauer $\text{Br}(k)$ admet une interprétation cohomologique : il s'identifie au groupe de cohomologie galoisienne $H^2(k, \bar{k}^*)$ (cohomologie du groupe profini $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ à valeurs dans le module galoisien discret \bar{k}^*). Ceci entraîne qu'il est de torsion.

Grothendieck [49] a défini le groupe de Brauer (cohomologique) $\text{Br}(X)$ d'un schéma X par la formule $\text{Br}(X) = H_{\text{ét}}^2(X, \mathbf{G}_m)$. Si k est un corps et que $X = \text{Spec}(k)$, on retrouve le groupe $\text{Br}(k)$ considéré ci-dessus. Sous des hypothèses assez générales il existe une interprétation des éléments de $\text{Br}(X)$ en termes de familles d'algèbres centrales simples paramétrées par X , mais nous ne nous en servons pas. Nous nous contentons de noter que si X est une variété intègre lisse sur un corps k , alors $\text{Br}(X)$ est naturellement un sous-groupe de $\text{Br}(k(X))$, où $k(X)$ désigne le corps des fonctions de X . Ainsi, par exemple, le groupe de Brauer d'une courbe lisse sur un corps algébriquement clos est nul (d'après le théorème 1.3 et la proposition 1.14).

1.4 Obstruction élémentaire

Dans ce paragraphe nous définissons l'obstruction élémentaire ; c'est l'une des rares obstructions à l'existence d'un point rationnel qui ont un sens pour des variétés lisses arbitraires sur un corps arbitraire. Cette obstruction intervient dans la formulation des questions pertinentes concernant les variétés « rationnellement simplement connexes » sur le corps $\mathbf{C}(x, y)$.

Soit X une variété lisse et géométriquement intègre sur un corps k . Soient \bar{k} une clôture séparable de k et $\bar{k}(X)$ le corps des fonctions de $X \otimes_k \bar{k}$.

Proposition 1.15 — *Si $X(k) \neq \emptyset$, le morphisme de groupes $\bar{k}^* \hookrightarrow \bar{k}(X)^*$ admet une rétraction $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -équivariante.*

Démonstration — Soit $x \in X(k)$. Notons $n = \dim(X)$. Comme X est régulier, le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est k -isomorphe à $k[[t_1, \dots, t_n]]$. Le corps $\bar{k}(X)$ se plonge donc de manière $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -équivariante dans le corps de séries formelles itérées $\bar{k}((t_1)) \cdots ((t_n))$. Pour conclure on remarque que le morphisme de groupes $\bar{k}^* \hookrightarrow \bar{k}((t_1)) \cdots ((t_n))^*$ admet une rétraction équivariante évidente : celle obtenue en composant les n morphismes $\bar{k}((t_1)) \cdots ((t_i))^* \rightarrow \bar{k}((t_1)) \cdots ((t_{i-1}))^*$ qui à une série formelle en t_i et à coefficients dans $\bar{k}((t_1)) \cdots ((t_{i-1}))$ associent son coefficient non nul de plus bas degré. \square

Si le morphisme de groupes $\bar{k}^* \hookrightarrow \bar{k}(X)^*$ n'admet pas de rétraction équivariante, on dit, suivant Colliot-Thélène et Sansuc [28], qu'il y a une *obstruction élémentaire* à l'existence d'un k -point sur X . Il ne peut y avoir d'obstruction élémentaire si k

est un corps (C_1) (pour les variétés rationnellement connexes ceci résulte de [28]; voir [101, Th. 3.4.1] pour le cas général).

L'obstruction élémentaire est liée au problème de la descente de faisceaux inversibles sur $X \otimes_k \bar{k}$ dont la classe à isomorphisme près est invariante par $\text{Gal}(\bar{k}/k)$:

Proposition 1.16 — *Supposons que toute fonction inversible sur $X \otimes_k \bar{k}$ soit constante (par exemple X propre). Les flèches naturelles $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X \otimes_k \bar{k})$ et $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(X)$ s'inscrivent dans une suite exacte canonique*

$$0 \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \xrightarrow{\delta} \text{Br}(k) \longrightarrow \text{Br}(X).$$

Si l'obstruction élémentaire à l'existence d'un k -point sur X s'évanouit, alors $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(X)$ est injective, de sorte que $\text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$.

Démonstration — La première assertion résulte formellement de la suite spectrale de Hochschild–Serre $H^p(k, H_{\text{ét}}^q(X \otimes_k \bar{k}, \mathbf{G}_m)) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathbf{G}_m)$ et du théorème 90 de Hilbert (qui affirme que $H^1(k, \bar{k}^\times) = 0$). Si l'inclusion $\bar{k}^\times \hookrightarrow \bar{k}(X)^\times$ admet une rétraction $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -équivariante, la flèche $H^2(k, \bar{k}^\times) \rightarrow H^2(k, \bar{k}(X)^\times)$ qu'elle induit en cohomologie admet aussi une rétraction et est donc injective. Or d'une part $H^2(k, \bar{k}^\times) = \text{Br}(k)$, et d'autre part $H^2(k, \bar{k}(X)^\times)$ s'injecte dans $\text{Br}(k(X))$, comme il résulte à nouveau de la suite spectrale de Hochschild–Serre et du théorème 90 de Hilbert. Ceci démontre la proposition puisque $\text{Br}(X) \subset \text{Br}(k(X))$. \square

Exemple — Pour comprendre la proposition 1.16, prenons pour X une conique projective lisse sur k . Dans ce cas $X \otimes_k \bar{k}$ est isomorphe à $\mathbf{P}_{\bar{k}}^1$ et l'application « degré » détermine donc un isomorphisme $\text{Pic}(X \otimes_k \bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$. L'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $\text{Pic}(X \otimes_k \bar{k})$ est triviale. L'inclusion $\text{Pic}(X) \subset \text{Pic}(X \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ s'identifie à l'inclusion, dans \mathbf{Z} , du sous-groupe engendré par les degrés des points fermés de X ; donc à $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$ si $X(k) \neq \emptyset$ et à $2\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$ sinon. L'image de $1 \in \mathbf{Z} = \text{Pic}(X \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ par δ est (au signe près) la classe dans $\text{Br}(k)$ de la conique X vue comme variété de Severi–Brauer.

C'est *via* la proposition 1.16 que l'obstruction élémentaire joue un rôle dans l'étude des variétés « rationnellement simplement connexes » (voir [95]). La définition précise de la simple connexité rationnelle est en cours d'élaboration (travaux de de Jong et Starr [31]). Cette notion est à la connexité rationnelle ce qu'en topologie la simple connexité est à la connexité. L'espoir formulé par de Jong et Starr dans [31] est que sur le corps $\mathbf{C}(x, y)$, toute variété « rationnellement simplement connexe » pour laquelle l'obstruction élémentaire s'évanouit admette un point rationnel. Un tel énoncé serait l'analogie du théorème de Graber, Harris

et Starr [46] selon lequel sur le corps $\mathbf{C}(x)$, toute variété rationnellement connexe admet un point rationnel. Sur le corps $\mathbf{C}(x)$, qui est (C_1) , l'obstruction élémentaire ne joue pas de rôle ; mais sur $\mathbf{C}(x, y)$ elle ne peut être ignorée puisque même dans le cas des variétés dont la géométrie est la plus simple (les variétés de Severi–Brauer), elle ne s'annule pas en général.

Citons pour terminer l'étude systématique entreprise par Borovoi, Colliot-Thélène et Skorobogatov [14] de l'obstruction élémentaire pour les espaces homogènes de groupes algébriques.

1.5 Obstruction de Brauer–Manin

Les phénomènes globaux qui rendent l'arithmétique des corps de nombres plus complexe que celle des corps finis, des corps p -adiques, ou que celle des corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos, jouent bien sûr aussi un rôle important dans l'arithmétique des variétés rationnellement connexes définies sur un corps de nombres.

Ces phénomènes compliquent la théorie mais ils constituent en même temps des outils pour la comprendre.

Ainsi, en combinant la notion de groupe de Brauer d'une variété (introduite par Grothendieck) avec la théorie du corps de classes globale (et plus précisément la loi de réciprocité), Manin [78] a défini, pour toute variété X sur un corps de nombres k , un ensemble qui est en quelque sorte une « approximation » de l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X . Plus précisément, supposons la variété X propre et lisse et notons $X(\mathbf{A}_k)$ l'espace $\prod_{v \in \Omega} X(k_v)$, où Ω désigne l'ensemble des places de k et k_v le complété de k en v . Manin considère le sous-ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)$ constitué des familles $(P_v)_{v \in \Omega} \in X(\mathbf{A}_k)$ telles que pour tout $A \in \text{Br}(X)$, la somme $\sum_{v \in \Omega} \text{inv}_v A(P_v)$ soit égale à $0 \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. (On montre que cette somme est finie.) Ici $A(P_v) \in \text{Br}(k_v)$ désigne l'évaluation de A en P_v et $\text{inv}_v : \text{Br}(k_v) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est l'application apparaissant dans la suite exacte (3). Comme (3) est un complexe, l'ensemble $X(k)$, qui est naturellement un sous-ensemble de $X(\mathbf{A}_k)$, est même inclus dans $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}}$. En particulier, si $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}} = \emptyset$, alors $X(k) = \emptyset$; on dit dans ce cas qu'il y a une *obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un k -point sur X* .

Munissons $X(\mathbf{A}_k)$ de la topologie produit des topologies v -adiques. Le sous-ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}}$ est fermé dans $X(\mathbf{A}_k)$. Par conséquent, si $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}} \neq X(\mathbf{A}_k)$, l'ensemble $X(k)$ ne peut être dense dans $X(\mathbf{A}_k)$. On dit dans ce cas qu'il y a une *obstruction de Brauer–Manin à l'approximation faible sur X* .

Y a-t-il d'autres phénomènes que l'obstruction de Brauer–Manin qui peuvent empêcher qu'une variété rationnellement connexe sur un corps de nombres possède un point rationnel ou encore satisfasse à l'approximation faible ? La question est ouverte :

Question 1.18 (Colliot-Thélène [24, p. 174]) — Soient k un corps de nombres et X une variété propre, lisse, rationnellement connexe, sur k . L'ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}}$ coïncide-t-il nécessairement avec l'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbf{A}_k)$?

Que cette question admette une réponse affirmative dans le cas des surfaces est une conjecture de Colliot-Thélène et Sansuc. De très nombreux travaux ont été consacrés à ce problème, tant pour les surfaces rationnelles que pour d'autres types de variétés rationnellement connexes (notamment les compactifications lisses d'espaces homogènes de groupes algébriques linéaires ou encore les intersections complètes de bas degré dans \mathbf{P}^n). Nous renvoyons à [85] pour un survol et pour de nombreuses références supplémentaires à la littérature, et à [21, §4] pour une conjecture plus précise dans le cas des variétés rationnelles.

Notons qu'une réponse affirmative à la question 1.18 impliquerait que tout groupe fini est groupe de Galois sur \mathbf{Q} (cf. [91, §3.5]).

1.6 Groupe de Chow, R-équivalence

Soit X une variété sur un corps k .

Deux points rationnels $x, y \in X(k)$ sont *directement R-équivalents* s'il existe une application rationnelle $\varphi: \mathbf{P}_k^1 \dashrightarrow X$ définie en 0 et en ∞ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(\infty) = y$. La R-équivalence est par définition la plus petite relation d'équivalence sur $X(k)$ contenant la R-équivalence directe. Cette notion fut introduite par Manin [79]. L'ensemble des classes de R-équivalence est noté $X(k)/R$.

Un *0-cycle* sur X est un élément du \mathbf{Z} -module libre de base l'ensemble des points fermés de X . Deux 0-cycles sont *rationnellement équivalents* si leur différence est une combinaison linéaire de cycles de la forme $f_*(z)$, où $f: C \rightarrow X$ est un morphisme propre d'une courbe normale connexe vers X et z est un diviseur principal sur C . Le *groupe de Chow des 0-cycles sur X* est le quotient $\text{CH}_0(X)$ du groupe des 0-cycles sur X par le sous-groupe des 0-cycles rationnellement équivalents à 0. Si X est propre sur k , il y a une flèche « degré » de $\text{CH}_0(X)$ vers \mathbf{Z} ; son noyau est le *groupe de Chow des 0-cycles de degré 0 sur X* , noté $A_0(X)$.

Bien entendu, deux points R-équivalents sont rationnellement équivalents. En conséquence, l'étude du quotient $X(k)/R$ est liée à celle du groupe $A_0(X)$.

Il existe plusieurs grandes questions ouvertes concernant l'ensemble $X(k)/R$ et le groupe $A_0(X)$ pour les variétés séparablement rationnellement connexes. Nous énonçons dans ce paragraphe les plus significatives d'entre elles et renvoyons le lecteur au rapport de Colliot-Thélène [26, §10–§11] pour une discussion plus approfondie de ces questions, de questions connexes, et des résultats connus.

Question 1.19 (Colliot-Thélène [26]) — Soient k un corps (C_1) et X une variété propre, lisse, séparablement rationnellement connexe sur k . A-t-on nécessairement $\text{Card}(X(k)/R) \leq 1$ et $A_0(X) = 0$?

Comme Colliot-Thélène le remarque dans [26], si l'inégalité $\text{Card}(X(k)/\mathbf{R}) \leq 1$ était vérifiée pour toute surface rationnelle X sur le corps $k = \mathbf{C}(t)$, les variétés complexes de dimension 3 fibrées en coniques sur \mathbf{P}^2 seraient toutes unirationnelles (ce qui est peu vraisemblable). La question mérite néanmoins d'être posée, au vu de tous les résultats connus allant dans le sens d'une réponse positive. Entre autres, on a bien $A_0(X) = 0$ si k est un corps fini (Kato–Saito) ou si X est une surface rationnelle (Colliot-Thélène), et l'on a bien $\text{Card}(X(k)/\mathbf{R}) \leq 1$ si k est fini et de cardinal assez grand en un sens précis (Kollár–Szabó; ce théorème fera l'objet du §3). Voir [26] pour d'autres résultats et pour des références à la littérature.

Si maintenant k est un corps p -adique ou un corps de nombres, la mauvaise réduction a tendance à s'opposer à ce que $\text{Card}(X(k)/\mathbf{R}) \leq 1$ ou $A_0(X) = 0$. Kollár a néanmoins démontré que $X(k)/\mathbf{R}$ est un ensemble fini si X est une variété lisse rationnellement connexe sur un corps p -adique k . Ce théorème fera l'objet du §2. On peut de même espérer que les questions suivantes admettent une réponse positive :

Questions 1.20 (Colliot-Thélène [21], [22], [26]) — *Le groupe $A_0(X)$ est-il fini si X est une variété propre, lisse, rationnellement connexe sur un corps p -adique ? L'ensemble $X(k)/\mathbf{R}$ et le groupe $A_0(X)$ sont-ils finis si X est une variété propre, lisse, rationnellement connexe sur un corps de nombres ?*

Nous renvoyons à nouveau à [26] pour une discussion des cas connus (voir aussi [25, §5]). Si k est un corps de nombres, la question de la finitude de $X(k)/\mathbf{R}$ est ouverte même pour les surfaces rationnelles.

Si k est un corps de type fini sur son sous-corps premier et si X est propre, lisse, séparablement rationnellement connexe sur k , on ne sait pas si $A_0(X)$ est toujours fini ou non (cf. [26, §11]). En revanche Kollár [68] a fabriqué des exemples montrant que $X(k)/\mathbf{R}$ peut être infini, avec $k = \mathbf{Q}(t)$.

1.7 Quelques autres questions sur l'arithmétique des variétés rationnellement connexes

La conjecture suivante est un cas particulier d'une conjecture de Campana qui caractérise de façon purement géométrique, parmi les variétés définies sur un corps de nombres, celles dont les points rationnels sont « potentiellement denses ».

Conjecture 1.21 (Campana [15, Conjecture 9.20]) — *Soient k un corps de nombres et X une variété propre, lisse, rationnellement connexe sur k . Il existe une extension finie ℓ/k telle que $X(\ell)$ soit dense dans $X \otimes_k \ell$ pour la topologie de Zariski.*

On ignore même :

Question 1.22 — *Soit X une variété propre, lisse, séparablement rationnellement connexe sur un corps infini k . Si l'ensemble $X(k)$ n'est pas vide, est-il dense dans X pour la topologie de Zariski ?*

Il n'y a pas de raison d'espérer que dans cette généralité, la réponse à cette question soit positive. Cependant, il en va ainsi lorsque k est le corps des fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos, du moins si la variété X est projective (Kollár–Miyaoka–Mori [65, IV.6.10]). Pour $k = \mathbf{Q}$, la question 1.22 est ouverte même dans le cas des surfaces rationnelles.

Rosenlicht [89, p. 46] donne des exemples de corps k infinis et de courbes affines lisses rationnelles X telles que $X(k)$ soit fini et non vide. (Bien entendu, le corps k est imparfait et la compactification régulière de X n'est pas lisse sur k .) L'hypothèse de propreté est donc essentielle dans la question 1.22.

Une réponse affirmative à la question 1.18 entraînerait une réponse affirmative à la question 1.22 pour les corps de nombres, et donc impliquerait la validité de la conjecture 1.21. La conjecture 1.21 est connue pour toutes les variétés de Fano lisses de dimension 3 à l'exception des revêtements doubles de \mathbf{P}^3 ramifiés le long d'une surface sextique (Bogomolov, Harris, Tschinkel ; cf. [12]) mais elle est ouverte pour les variétés de dimension 3 fibrées en coniques sur \mathbf{P}^2 .

Jusqu'ici nous avons seulement considéré des questions de nature qualitative concernant les points rationnels et les 0-cycles sur les variétés rationnellement connexes. Sur un corps de nombres, les aspects quantitatifs donnent également lieu à des problèmes très intéressants (estimation asymptotique du nombre de points rationnels de hauteur bornée, interprétation des constantes qui apparaissent). Leur étude fut entamée par Manin à la fin des années 1980. Nous renvoyons à Peyre [84] pour un survol des conjectures et résultats connus en 2001.

Signalons enfin deux problèmes qui, à défaut d'être de nature arithmétique, sont directement inspirés de préoccupations arithmétiques : la question de l'approximation faible pour les variétés rationnellement connexes définies sur le corps des fonctions d'une courbe complexe, traitée en détail dans [55] ; et un problème analogue pour les variétés rationnellement connexes sur le corps des fonctions d'une courbe réelle. Par exemple on peut demander : si C est une courbe propre et lisse sur le corps \mathbf{R} des réels, si $f: X \rightarrow C$ est un morphisme propre de fibre générique géométrique lisse, rationnellement connexe (donc connexe), et si l'application $X(\mathbf{R}) \rightarrow C(\mathbf{R})$ induite par f admet une section continue à valeurs dans l'ouvert de lissité de f , alors le morphisme f admet-il une section ? Ce type de questions, qui trouve son origine dans les travaux de Witt, est abordé par Ducros [39], auquel nous renvoyons le lecteur pour davantage de références à la littérature.

2 Variétés rationnellement connexes sur les corps fertiles

Dans ce chapitre nous exposons les résultats obtenus par Kollár [66] en 1999 au sujet de l'arithmétique des variétés rationnellement connexes sur des corps tels que \mathbf{Q}_p ou \mathbf{R} , puis nous en évoquons quelques raffinements ultérieurs (dus à Kollár [68]). Ici entrent en jeu les techniques de déformation de courbes rationnelles; mais pour la première fois elles sont appliquées dans des situations où le corps de base n'est pas algébriquement clos.

2.1 Énoncé du théorème principal; conséquences

Soient k un corps, \bar{k} une clôture algébrique de k et X une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe et de dimension > 0 .

Que la variété X soit séparablement rationnellement connexe signifie que $X \otimes_k \bar{k}$ contient une courbe rationnelle très libre, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X \otimes_k \bar{k}$ tel que f^*T_X soit ample². D'après Kollár, Miyaoka et Mori, pour tout point de $X \otimes_k \bar{k}$ il existe une courbe rationnelle très libre sur $X \otimes_k \bar{k}$ passant par ce point. Lorsque k n'est pas algébriquement clos, on peut se demander si la même chose est vraie sans étendre les scalaires de k à \bar{k} :

Question 2.1 — *Soit $x \in X(k)$. Existe-t-il un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tel que f^*T_X soit ample et que $f(0) = x$?*

C'est là une question ouverte (cf. [2, §9]). Il est peu vraisemblable qu'elle admette une réponse affirmative en toute généralité (notamment pour k fini ou pour $k = \mathbf{C}(t)$). Le théorème principal de ce chapitre (théorème 2.4 ci-dessous) affirme néanmoins que tel est le cas lorsque le corps k est *fertile*.

Définition 2.2 (Pop [87]) — *Le corps k est dit fertile (« large » en anglais) si pour toute variété X connexe, lisse sur k et telle que $X(k) \neq \emptyset$, l'ensemble $X(k)$ est dense dans X pour la topologie de Zariski.*

Il est à noter que dans la définition 2.2, la variété X n'est pas supposée rationnellement connexe. D'autre part, on vérifie que le corps k est fertile si et seulement si pour toute courbe C lisse sur k telle que $C(k) \neq \emptyset$, l'ensemble $C(k)$ est infini.

²Rappelons que f^*T_X est isomorphe (comme tout faisceau de modules localement libre de type fini sur \mathbf{P}^1) à une somme directe $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$ pour des $a_i \in \mathbf{Z}$; il est ample si et seulement si $a_i > 0$ pour tout i .

Exemples — (i) Tout corps local usuel (c'est-à-dire les corps \mathbf{Q}_p , $\mathbf{F}_p((t))$, \mathbf{R} et leurs extensions finies) est fertile. Ceci résulte du théorème d'inversion locale pour les variétés analytiques [93, Part II, Th. III.9.2].

(ii) Tout corps réel clos et tout corps p -adiquement clos (*i.e.* tout corps dont le groupe de Galois absolu est isomorphe à celui de \mathbf{R} ou d'un corps p -adique; par exemple la fermeture algébrique de \mathbf{Q} dans \mathbf{Q}_p) est fertile (cf. [88, Theorem 7.8]).

(iii) Tout corps pseudo-algébriquement clos est fertile.

(iv) Tout corps dont le groupe de Galois absolu est un pro- p -groupe est fertile³.

(v) Le corps des fractions de tout anneau local hensélien intègre est fertile. En particulier, quels que soient le corps k et l'entier $n \geq 1$, le corps $k((x_1, \dots, x_n))$ est fertile.

(vi) Si k est un corps global et S un ensemble fini de places de k , la plus grande extension algébrique de k dans laquelle les places de S sont totalement décomposées est un corps fertile (cf. [81, 2.4.3]). En particulier le corps des nombres algébriques totalement réels est fertile.

Théorème 2.4 (Kollár) — *Soient k un corps fertile et X une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe et de dimension > 0 . Soit $x \in X(k)$. Il existe un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tel que $f(0) = x$ et que f^*T_X soit ample.*

Nous consacrerons le §2.2 à la preuve du théorème 2.4. Son corollaire le plus frappant (que nous prouverons au §2.3) concerne la \mathbf{R} -équivalence (cf. §1.6) :

Corollaire 2.5 — *Soit k un corps p -adique ou le corps \mathbf{R} des réels. Soit X une variété projective, lisse et rationnellement connexe sur k . L'ensemble $X(k)/\mathbf{R}$ est fini et les classes de \mathbf{R} -équivalence sont des parties ouvertes et fermées de $X(k)$. En particulier, si $k = \mathbf{R}$, les classes de \mathbf{R} -équivalence sont exactement les composantes connexes de $X(\mathbf{R})$.*

La finitude de $X(k)/\mathbf{R}$ lorsque k est un corps local n'était auparavant connue que dans un certain nombre de cas particuliers (les surfaces rationnelles, à l'exception des surfaces de del Pezzo de degré 1 ou 2; les intersections lisses de deux quadriques dans \mathbf{P}_k^n pour $n \geq 4$; les hypersurfaces cubiques lisses; les compactifications de groupes algébriques linéaires).

En revanche le théorème 2.4 ne dit rien sur la finitude de $A_0(X)$.

Un autre corollaire notable du théorème 2.4 concerne les variétés unirationnelles. Une variété X unirationnelle et lisse sur un corps k est-elle k -unirationnelle

³Lorsque le corps est parfait, cette remarque est due à Colliot-Thélène [23]. Mais l'argument de [23] s'applique aussi lorsque k n'est pas parfait, compte tenu que pour toute courbe lisse X sur k et tout ouvert dense $U \subset X$, tout diviseur sur U est linéairement équivalent, sur X , à un diviseur dont le support est lisse et inclus dans U (cf. [99, Lemma 3.16]).

dès que $X(k) \neq \emptyset$? Cette question est ouverte. Il semble probable que la réponse soit négative en général ; néanmoins le théorème 2.4 permet d'apporter une réponse positive pour certaines variétés X lorsque k est fertile. Le cas le plus simple est celui des surfaces fibrées en coniques (cf. §1.2), qui au moins sur les corps p -adiques avait déjà été établi par Yanchevskii [103] :

Corollaire 2.6 (Yanchevskii) — *Soit X une surface projective, lisse, rationnelle, fibrée en coniques, sur un corps k . Supposons k fertile. Alors X est k -unirationnelle si et seulement si $X(k) \neq \emptyset$.*

Démonstration — Si X est k -unirationnelle alors $X(k) \neq \emptyset$ de façon évidente. Réciproquement, supposons $X(k)$ non vide. Notons $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ une fibration en coniques sur X . D'après le théorème 2.4, il existe un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tel que f^*T_X soit ample. Le composé $\pi \circ f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ est fini (sinon l'image de f serait une courbe rationnelle contenue dans une fibre de π ; elle ne pourrait donc pas être très libre). Soit X' le produit fibré de $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ avec $\pi \circ f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow \mathbf{P}_k^1$. Le morphisme f induit une section de la seconde projection $\pi': X' \rightarrow \mathbf{P}_k^1$. Autrement dit, la fibre générique de π' , qui est une conique lisse, admet un point rationnel. Par conséquent elle est $k(\mathbf{P}_k^1)$ -rationnelle et la surface X' est donc k -rationnelle. Comme X' domine X , la k -unirationalité de X s'ensuit. \square

Le même argument permet d'établir la conclusion du corollaire 2.6 pour quelques autres classes de variétés unirationnelles que les surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une conique. Voir [66, Corollary 1.8].

Pour $k = \mathbf{Q}$, la question de la k -unirationalité des surfaces rationnelles X fibrées en coniques telles que $X(k) \neq \emptyset$ est une question ouverte (liée à la question 1.22).

Remarque — Soit X une variété projective, lisse et rationnellement connexe sur \mathbf{R} . Soit C la conique réelle sans point réel. Si $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, le théorème 2.4 entraîne l'existence d'un morphisme $C \rightarrow X$. La question de savoir si un tel morphisme existe toujours est ouverte (cf. [2, Remarks 20]). Une réponse affirmative à cette question résulterait de la conjecture 1.7 et d'une réponse affirmative à la question 1.11.

2.2 Preuve du théorème 2.4

2.2.1 Esquisse de l'argument

Le principe de la preuve est le suivant.

Soit X une variété projective et lisse sur un corps fertile k , séparablement rationnellement connexe et de dimension > 0 . Soit $x \in X(k)$. Soit \bar{k} une clôture séparable de k . Au moins si k est parfait, on sait qu'il existe une courbe rationnelle

(irréductible) très libre $B \subset X \otimes_k \bar{k}$ contenant x . On aimerait en exhiber une qui soit définie sur k . Pour cela faisons agir le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ sur B ; on obtient ainsi un nombre fini de courbes conjuguées B_1, \dots, B_n . Leur réunion $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$ est une courbe connexe contenue dans X et passant par x . Elle définit donc un point k -rationnel $[C]$ du schéma de Hilbert $\text{Hilb}(X, x)$ paramétrant les sous- k -schémas fermés de X contenant x .

Supposons un instant que $\text{Hilb}(X, x)$ soit lisse sur k en $[C]$ et que le point générique de la composante irréductible I de $\text{Hilb}(X, x)$ contenant $[C]$ corresponde à une courbe rationnelle sur $X \otimes_k k(I)$. Comme k est fertile et que la variété I possède un point rationnel lisse (à savoir $[C]$), l'ensemble $I(k)$ est alors dense dans I pour la topologie de Zariski. Un point de $I(k)$ situé en dehors d'un certain fermé strict de I fournit ainsi une courbe rationnelle $D \subset X$ contenant x ; un petit raffinement de cet argument permet d'imposer à D d'être très libre.

Cette esquisse est approximative mais elle contient néanmoins l'idée centrale de la démonstration : si l'on dispose d'un espace de modules M paramétrant un certain type d'objets sur un corps fertile k (par exemple des courbes connexes de genre arithmétique 0) et si l'on cherche à fabriquer un point rationnel d'un ouvert $M^0 \subset M$ (par exemple M^0 pourrait être l'ensemble des points de M qui correspondent à des courbes irréductibles), il suffit de fabriquer un point rationnel lisse de M situé sur la frontière de M^0 .

Il y a deux raisons pour lesquelles l'approche *via* $\text{Hilb}(X, x)$ fonctionne mal. La première est que l'étude infinitésimale de $\text{Hilb}(X, x)$ en $[C]$ est d'autant plus compliquée que la courbe C est singulière en x ; or on ne dispose d'aucun contrôle sur la singularité de C en x (même si les courbes B_i sont lisses, leurs intersections deux à deux en x ne sont pas nécessairement transverses). Vérifier la lissité de $\text{Hilb}(X, x)$ en $[C]$ ne saurait donc être une formalité. La seconde est que la courbe C n'est pas toujours de genre arithmétique nul (par exemple les B_i pourraient se rencontrer ailleurs qu'en x); il n'y a donc pas de raison d'espérer qu'elle se déforme (dans une famille plate) en une courbe rationnelle.

La manière la plus naturelle de contourner ces deux obstacles est de chercher à déformer non pas la courbe C mais une courbe réductible plus simple (un peigne), dont les singularités et le genre arithmétique sont contrôlés. La contrepartie est que la courbe n'est plus plongée dans X : elle est seulement munie d'un morphisme (non fini) vers X . Concrètement, lorsqu'on dispose d'un peigne et qu'on souhaite le déformer, la méthode la plus souple est de considérer l'espace de modules des courbes stables de Kontsevich (cf. [2, §8]). Néanmoins, pour prouver le théorème 2.4, une construction un peu artificielle mais techniquement beaucoup plus économique sera suffisante (comparer les arguments de [2, §4] et de [2, §10]). C'est la voie que nous suivrons (tout comme Kollár [66] mais contrairement à Araujo et Kollár [2, §9]).

2.2.2 La preuve proprement dite

Soient k un corps fertile et X une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe et de dimension > 0 , munie d'un point $x \in X(k)$. Notons \bar{k} une clôture séparable de k .

Définition 2.7 — *Un peigne sur k est une courbe C sur k , propre et réduite, munie d'une composante irréductible distinguée $C_0 \subset C$, telle que les conditions suivantes soient remplies :*

- la courbe C_0 (dite manche de C) est lisse et géométriquement connexe sur k ;
- les composantes irréductibles de $C \otimes_k \bar{k}$ autres que $C_0 \otimes_k \bar{k}$ (dites dents de C) sont des courbes rationnelles lisses deux à deux disjointes qui rencontrent chacune $C_0 \otimes_k \bar{k}$ en un unique point, l'intersection en ce point étant de plus transverse.

Nous allons construire un peigne à partir d'une courbe définie sur une extension finie galoisienne de k .

Lemme 2.8 — *Il existe une extension finie galoisienne ℓ/k et un ℓ -morphisme très libre $f_\ell: \mathbf{P}_\ell^1 \rightarrow X \otimes_k \ell$ tel que $f_\ell(0) = x$.*

Démonstration — L'espace de modules $\text{Hom}^0(\mathbf{P}_k^1, X; 0 \mapsto x)$ des morphismes très libres de \mathbf{P}_k^1 vers X envoyant 0 sur x est un k -schéma lisse (cf. [32, 2.6]) et non vide (puisqu'il admet un point dans une clôture algébrique de k , cf. [65, IV.3.9]). Par conséquent il admet un point dans une extension finie séparable de k ; d'où le lemme. \square

Fixons ℓ et f_ℓ comme dans le lemme. Soit $M \in \mathbf{A}_k^1$ un point fermé de corps résiduel ℓ . Soit $C \subset \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$ la réunion de $\{0\} \times \mathbf{P}_k^1$ et de $\mathbf{P}_k^1 \times M$. La courbe C est un peigne sur k , de manche $C_0 = \{0\} \times \mathbf{P}_k^1$. L'action de $\text{Gal}(\ell/k)$ sur l'ensemble des dents de $C \otimes_k \bar{k}$ est simplement transitive.

Le morphisme $\{0\} \times \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ constant égal à x et le morphisme $f_\ell: \mathbf{P}_k^1 \times M \rightarrow X$ coïncident sur $\{0\} \times M$ et se recollent donc pour former un k -morphisme $f: C \rightarrow X$. C'est ce peigne C , muni de ce morphisme $f: C \rightarrow X$, que l'on souhaite maintenant déformer en un morphisme de \mathbf{P}_k^1 vers X . Pour cela on commence par déformer abstraitement le peigne C en la courbe \mathbf{P}_k^1 , de façon *ad hoc* ; l'étude infinitésimale des schémas de Hilbert permettra ensuite de déformer le morphisme f .

Soit T une courbe connexe lisse sur k , munie d'un point rationnel $t \in T(k)$ (par exemple on peut prendre $T = \mathbf{P}_k^1$ et $t = 0$). Soit \mathcal{C} la surface lisse sur k obtenue en éclatant le point fermé $t \times M$ dans $T \times \mathbf{P}_k^1$. Notons $\pi: \mathcal{C} \rightarrow T$ la composée de l'éclatement et de la première projection. La courbe $\mathcal{C}_t = \pi^{-1}(t)$ est alors un peigne sur k (dont le manche est le transformé strict de $t \times \mathbf{P}_k^1$ et dont les dents sont

les diviseurs exceptionnels). Ce peigne est isomorphe à C , de sorte qu'en posant $\mathcal{X} = T \times X$ et en notant $\mathcal{X}_t = t \times X = X$, le morphisme $f: C \rightarrow X$ induit un morphisme $f_t: \mathcal{C}_t \rightarrow \mathcal{X}_t$.

Notons $\text{Hom}_T(\mathcal{C}, \mathcal{X})$ le schéma de Hilbert des T -morphisms de \mathcal{C} vers \mathcal{X} . C'est un T -schéma. Le morphisme f_t en définit un k -point situé au-dessus de $t \in T(k)$. Tout k -point de $\text{Hom}_T(\mathcal{C}, \mathcal{X})$ dont l'image dans T est *différente* de t fournit un morphisme $\mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$; mais l'image de ce morphisme peut ne pas contenir x . Pour y remédier, considérons l'image réciproque, par l'éclatement $\mathcal{C} \rightarrow T \times \mathbf{P}_k^1$, de la courbe $T \times \infty$. C'est une section de $\pi: \mathcal{C} \rightarrow T$. Notons-la $\infty_T \subset \mathcal{C}$ et posons $x_T = T \times x \subset \mathcal{X}$. Le morphisme f_t définit alors un k -point $[f_t]$ du schéma de Hilbert $\text{Hom}_T(\mathcal{C}, \mathcal{X}; \infty_T \mapsto x_T)$ des T -morphisms de \mathcal{C} vers \mathcal{X} qui envoient ∞_T sur x_T .

Proposition 2.9 — *Le T -schéma $\text{Hom}_T(\mathcal{C}, \mathcal{X}; \infty_T \mapsto x_T)$ est lisse au point $[f_t]$.*

Admettons un instant cette proposition. Elle implique, grâce à la fertilité de k , que le schéma $\text{Hom}_T(\mathcal{C}, \mathcal{X}; \infty_T \mapsto x_T)$ admet un k -point dont l'image dans T appartient à $T \setminus \{t\}$; autrement dit, qu'il existe un morphisme $\mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ envoyant $\infty \in \mathbf{P}^1(k)$ sur $x \in X(k)$. Pour trouver un morphisme très libre l'argument sera un peu plus élaboré.

Démonstration de la proposition 2.9 — L'étude infinitésimale des schémas de Hilbert fournit le critère de lissité suivant :

Proposition 2.10 (critère de lissité pour les schémas Hom) — *Soit T un schéma noethérien irréductible muni d'un point $t \in T$. Soit \mathcal{C} un T -schéma projectif et plat de dimension relative 1, à fibres géométriquement réduites. Soit \mathcal{X} un T -schéma lisse et quasi-projectif. Soit $M \subset \mathcal{C}$ un sous-schéma fermé fini et plat sur T tel que \mathcal{C} soit lisse sur T aux points de M . Soient enfin $g: M \rightarrow \mathcal{X}$ un T -morphisme et $f_t: \mathcal{C}_t \rightarrow \mathcal{X}_t$ un t -morphisme dont la restriction à M_t coïncide avec la restriction de g . Pour que le T -schéma $\text{Hom}_T(\mathcal{C}, \mathcal{X}; g)$ paramétrant les T -morphisms de \mathcal{C} vers \mathcal{X} dont la restriction à M coïncide avec g soit lisse au point $[f_t]$, il suffit que l'on ait*

$$H^1(\mathcal{C}_t, (f_t^* T_{\mathcal{X}_t}) \otimes \mathcal{I}_{M_t}) = 0$$

où $T_{\mathcal{X}_t}$ désigne le faisceau tangent de \mathcal{X}_t sur t et où $\mathcal{I}_{M_t} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{C}_t}$ désigne le faisceau (localement libre) d'idéaux du sous-schéma fermé $M_t \subset \mathcal{C}_t$.

Démonstration — Voir [65, II.1.7] et [32, 2.11]. □

Pour établir la proposition 2.9 il suffit donc de vérifier que l'on a

$$H^1(C, f^* T_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{I}_\infty) = 0,$$

où $\mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{O}_C$ désigne le faisceau d'idéaux défini par le point $(\{0\} \times \infty) \in C_0 \subset C$. Le \mathcal{O}_C -module $f^*T_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{I}_\infty$ est localement libre. Sa restriction à $C_0 \subset C$ est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)^{\dim(X)}$. Sa restriction aux dents de C est ample puisqu'elle coïncide avec la restriction de f^*T_X . Le lemme général suivant permet donc de conclure. \square

Lemme 2.11 — *Soit C un peigne sur un corps algébriquement clos. Supposons que le manche de C soit une courbe rationnelle. Soit E un \mathcal{O}_C -module localement libre dont la restriction à chaque dent est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$ pour des $a_i \geq 0$ et dont la restriction au manche est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$ pour des $a_i \geq -1$. Alors $H^1(C, E) = 0$.*

Démonstration — Notons M le manche de C et D la réunion des dents de C , de sorte que $C = M \cup D$. Notons $i_D: D \hookrightarrow C$ et $i_M: M \hookrightarrow C$ les inclusions. On a alors une suite exacte de \mathcal{O}_C -modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_M \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow i_{M*} \mathcal{O}_M \longrightarrow 0$$

d'où, après tensorisation par E , une suite exacte

$$0 \longrightarrow i_{D*} i_D^*(E \otimes \mathcal{I}_M) \longrightarrow E \longrightarrow i_{M*} i_M^* E \longrightarrow 0$$

(compte tenu de l'égalité $\mathcal{I}_M = i_{D*} i_D^* \mathcal{I}_M$). On en déduit une suite exacte

$$H^1(D, E|_D \otimes \mathcal{I}_{M \cap D}) \longrightarrow H^1(C, E) \longrightarrow H^1(M, E|_M).$$

L'hypothèse sur $E|_M$ entraîne tout de suite que $H^1(M, E|_M) = 0$. D'autre part, le \mathcal{O}_D -module $\mathcal{I}_{M \cap D}$ est localement libre et sa restriction à chaque dent est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)$. Vu l'hypothèse sur $E|_D$, il en résulte que $H^1(D, E|_D \otimes \mathcal{I}_{M \cap D}) = 0$. D'où le lemme. \square

Terminons maintenant la preuve du théorème 2.4. D'après la proposition 2.9, il existe une courbe connexe $B \subset \text{Hom}_T(\mathcal{C}, \mathcal{X}; \infty_T \mapsto x_T)$ lisse sur k , passant par le point $[f_t]$ et dominant T . La propriété universelle du schéma de Hilbert fournit un B -morphisme

$$\mathcal{C} \times_T B \longrightarrow \mathcal{X} \times_T B$$

envoyant $\infty_T \times_T B$ sur $x_T \times_T B$, ou de façon équivalente un k -morphisme

$$\varphi: \mathcal{C} \times_T B \longrightarrow X$$

tel que $\varphi(\infty_T \times_T B) = \{x\}$.

Comme $[f_t] \in B(k)$, on a $B(k) \neq \emptyset$. L'ensemble $B(k)$ est donc dense dans B puisque k est fertile. Notons $B^0 = B \times_T (T \setminus \{t\})$. Soit $b \in B^0(k)$. La restriction

de φ à $\mathcal{C} \times_{\mathbb{T}} b$ est un morphisme $\varphi_b: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ envoyant ∞ sur x . Que $\varphi_b^*T_X$ soit ample équivaut à ce que $H^1(\mathbf{P}_k^1, \varphi_b^*T_X(-2)) = 0$ (en effet $H^1(\mathbf{P}_k^1, \mathcal{O}(d)) = 0$ si et seulement si $d \geq -1$). Par conséquent, compte tenu de la densité de $B^0(k)$ dans B^0 et du théorème de semi-continuité supérieure, une condition suffisante pour qu'il existe un $b \in B^0(k)$ tel que $\varphi_b^*T_X$ soit ample est l'existence d'un diviseur effectif $D \subset \mathcal{C}$, de degré ≥ 2 sur les fibres de $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}$, tel que, si l'on pose $\mathcal{F} = \varphi^*T_X \otimes \mathcal{I}_{D \times_{\mathbb{T}} B}$, on ait $H^1(\mathcal{C} \times_{\mathbb{T}} [f_t], \mathcal{F}|_{\mathcal{C} \times_{\mathbb{T}} [f_t]}) = 0$. Ici $\mathcal{I}_{D \times_{\mathbb{T}} B}$ désigne le faisceau (localement libre) d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{C} \times_{\mathbb{T}} B}$ défini par $D \times_{\mathbb{T}} B$.

Prenons pour $D \subset \mathcal{C}$ la réunion de $\infty_{\mathbb{T}}$ et du transformé strict de $\mathbb{T} \times M$ par l'éclatement $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbf{P}_k^1$. Le diviseur $D_t \otimes_k \bar{k}$ sur le peigne $\mathcal{C}_t \otimes_k \bar{k} = (\mathcal{C} \times_{\mathbb{T}} [f_t]) \otimes_k \bar{k}$ est de degré 1 sur le manche et de degré 1 sur chaque dent. Par conséquent la restriction de $\mathcal{F}|_{\mathcal{C} \times_{\mathbb{T}} [f_t]}$ au manche est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)^{\dim(X)}$ et sa restriction à chaque dent est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$ pour des $a_i \geq -1$. Le lemme 2.11 permet donc de conclure.

2.3 Preuve du corollaire 2.5

Le corps k est maintenant un corps p -adique ou est le corps des réels.

Pour établir le corollaire il suffit de montrer que les classes de R-équivalence sont ouvertes. En effet elles seront alors automatiquement fermées, puisqu'elles forment une partition de $X(k)$. De plus, comme le corps k est localement compact et que la variété X est propre, l'espace topologique $X(k)$ est compact, de sorte que la finitude de $X(k)/R$ s'ensuivra également.

Soit donc $x \in X(k)$; nous allons prouver que la classe de R-équivalence de x dans $X(k)$ est un voisinage de x . On peut supposer que $\dim(X) > 0$. Fixons un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tel que $f(0) = x$ et que f^*T_X soit ample.

Que f^*T_X soit très ample signifie que la courbe $f(\mathbf{P}_k^1)$ se déforme dans toute direction donnée, en fixant le point x . On peut fabriquer ainsi de nombreux points R-équivalents à x , arbitrairement proches de x et distincts de x . Mais cela ne signifie pas pour autant que tout point suffisamment proche de x est R-équivalent à x . Pour obtenir ce résultat, il y a une astuce consistant à déformer la courbe $f(\mathbf{P}_k^1)$ en fixant un *autre* point que x , disons y . Les déformations du point x couvriront alors un voisinage de x et seront toutes R-équivalentes à y , donc à x puisque y est lui-même R-équivalent à x . Plus formellement :

Notons $H = \text{Hom}^0(\mathbf{P}_k^1, X; \infty \mapsto f(\infty))$ l'espace de modules des morphismes très libres de \mathbf{P}_k^1 vers X qui envoient ∞ sur $f(\infty)$. C'est un k -schéma localement de type fini (cf. [65, II.3.5.4]). Le morphisme d'évaluation $H \times \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ est lisse sur $H \times \mathbf{A}_k^1$ (cf. [65, II.3.5.3] ou [32, 4.8]). L'application induite $H(k) \times \mathbf{A}^1(k) \rightarrow X(k)$ est donc ouverte (théorème d'inversion locale). Ainsi son image est une partie ouverte de $X(k)$ contenant x (puisque $f(0) = x$) et incluse dans la classe de R-équivalence

de x (car incluse dans la classe de R-équivalence de $f(\infty)$, qui est R-équivalent à $f(0) = x$). La classe de R-équivalence de x est donc bien un voisinage de x .

2.4 R-équivalence et R-équivalence directe sur les corps fertiles

Soient k un corps et X une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe et de dimension > 0 . Nous venons de voir (théorème 2.4) que si k est fertile, par tout point rationnel de X passe une courbe rationnelle très libre. Si k est algébriquement clos, on sait que l'on peut même trouver une courbe rationnelle aussi libre que l'on veut passant par tout ensemble fini donné de points rationnels de X . Cette propriété ne saurait être satisfaite si le corps k est seulement supposé fertile : par exemple, si $k = \mathbf{R}$, deux points rationnels de X appartenant à des composantes connexes distinctes de $X(\mathbf{R})$ ne peuvent certainement pas être joints par une courbe rationnelle définie sur \mathbf{R} . Il se pose néanmoins la question de savoir s'il existe toujours une courbe rationnelle aussi libre que l'on veut passant par un ensemble fini donné de points rationnels tous R-équivalents entre eux. Kollár [68] a montré que tel est bien le cas si k est fertile, à l'aide d'une technique empruntée à Graber, Harris et Starr [46] :

Théorème 2.12 (Kollár [68]) — *Soient k un corps fertile et X une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe, de dimension ≥ 3 . Soient $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n \in X(k)$. Supposons les x_i deux à deux R-équivalents. Alors il existe une immersion fermée $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ telle que $(f^*T_X)(-n)$ soit ample et que $\{x_1, \dots, x_n\} \subset f(\mathbf{P}_k^1)$.*

L'hypothèse $\dim(X) \geq 3$ n'est pas essentielle. Elle permet d'exiger que f soit une immersion fermée, ce qui simplifie l'énoncé du théorème. De toute manière, si $\dim(X) = 2$, on peut appliquer le théorème à la variété $X \times \mathbf{P}_k^1$ et obtenir une conclusion presque aussi bonne. En particulier, le théorème 2.12 généralise⁴ le théorème 2.4.

Moret-Bailly [82, Corollaire 2] avait auparavant démontré un résultat très proche du théorème 2.12 dans la situation où X est le quotient de GL_n par un sous-groupe fini étale.

Le théorème 2.12 est une conséquence facile du théorème ci-dessous, qui en constitue donc véritablement le cœur :

Théorème 2.13 — *Soient k un corps fertile et X une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe et de dimension > 0 . Soient*

⁴La preuve du théorème 2.12 ne fait pas appel au théorème 2.4. En fait, le théorème 2.4 découle même du théorème 2.13 (appliqué à $x = y$).

$x, y \in X(k)$. Si x et y sont directement R-équivalents (cf. §1.6), il existe un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tel que f^*T_X soit ample et que $f(0) = x$, $f(\infty) = y$.

Esquisse de démonstration du théorème 2.12 à partir du théorème 2.13 — Tout d’abord on déduit du théorème 2.13 que la R-équivalence directe est une relation transitive sur $X(k)$ (de sorte qu’il n’y a pas de différence entre les notions de R-équivalence et de R-équivalence directe sur $X(k)$).

Pour cela, fixons $x, y, z \in X(k)$ tels que x soit directement R-équivalent à y et que y soit directement R-équivalent à z . D’après le théorème 2.13, il existe des morphismes très libres $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ et $g: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tels que $f(0) = x$, $f(\infty) = y$, $g(0) = y$ et $g(\infty) = z$. Comme f et g sont très libres, la technique de déformation employée au §2.2.2 montre que le morphisme du peigne à une dent vers X obtenu en recollant f et g se déforme en un morphisme $h: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tel que $h(0) = x$ et $h(\infty) = z$. Ainsi x et z sont bien directement R-équivalents.

Prouvons maintenant le théorème 2.12. Soient $x_1, \dots, x_n \in X(k)$ des points deux à deux R-équivalents. Fixons un point $y \in X(k)$ appartenant à la classe de R-équivalence des x_i (par exemple $y = x_1$). Comme y est R-équivalent aux x_i , il leur est même directement R-équivalent ; d’après le théorème 2.13, il existe donc des morphismes très libres $f_i: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tels que $f_i(0) = y$ et $f_i(\infty) = x_i$. On peut assembler les f_i en un morphisme d’un peigne vers X , le manche du peigne étant entièrement envoyé sur le point y . La technique du §2.2.2 montre que ce peigne et ce morphisme se déforment en un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tel que $(f^*T_X)(-n)$ soit ample et qu’il existe $y_1, \dots, y_n \in \mathbf{P}^1(k)$ vérifiant $f(y_i) = x_i$ pour tout i . Qu’en déformant f on puisse supposer que f est une immersion fermée résulte enfin de [65, II.3.14]. \square

Voici l’idée de la démonstration du théorème 2.13. Tout d’abord, quitte à remplacer X par $X \times \mathbf{P}_k^1$ et x, y par $x \times 0$ et $y \times \infty$, on peut supposer que $x \neq y$. Comme x et y sont par hypothèse directement R-équivalents, il existe $g: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tel que $g(0) = x$ et $g(\infty) = y$. Rappelons que si k est algébriquement clos, Kollár, Miyaoka et Mori ont montré qu’il suffit, pour trouver un g tel que g^*T_X soit de plus ample, de choisir un nombre suffisamment élevé de courbes rationnelles libres sur X rencontrant $g(\mathbf{P}_k^1)$ en des points deux à deux distincts ; ces courbes rationnelles libres forment les dents d’un peigne dont g est le manche ; un *sous-peigne* du peigne obtenu se déforme alors en un morphisme $g': \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ très libre vérifiant $g'(0) = x$, $g'(\infty) = y$. (Voir [13, §4.2] pour tout ceci.) Lorsque k n’est pas algébriquement clos, cette approche ne fonctionne plus. En effet, il y a en général une obstruction au problème de déformation considéré, *i.e.* l’espace de modules associé n’est pas lisse⁵ ; or la fertilité de k ne fournit pas de nouveaux points rationnels sur une

⁵Si C est un peigne de manche C_0 et si $f: C \rightarrow X$ est un morphisme, pour que $H^1(C, f^*T_X) = 0$ il faut que $H^1(C_0, f_0^*T_X) = 0$, où f_0 désigne la restriction de f à C_0 . Or cette condition n’a rien à

variété dont on sait seulement qu'elle admet un point rationnel singulier. Ce qui permet à l'argument d'aboutir lorsque k est algébriquement clos, ce n'est pas un calcul de lissité mais une comparaison des dimensions des espaces de modules correspondant aux déformations de tous les sous-peignes possibles (cf. [2, §5]).

Graber, Harris et Starr [46] se sont rendu compte que la situation est meilleure si l'on cherche à déformer non pas un morphisme $f: C \rightarrow X$ d'un peigne vers X mais le sous-schéma fermé $f(C) \subset X$ lui-même (du moins si f est une immersion fermée, ce qui, au cours de la preuve du théorème 2.13 est une condition que l'on peut toujours supposer satisfaite). Pour ce nouveau problème de déformation, l'obstruction s'évanouit si l'on ajoute au peigne un nombre élevé de dents libres suffisamment générales⁶.

Cette technique est discutée dans [95]. L'adaptation à un corps non algébriquement clos ne présente qu'une difficulté : comme le peigne construit doit être défini sur k , lorsqu'on ajoute une dent au peigne sur \bar{k} il faut aussi ajouter ses conjuguées sous l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Or il se pourrait que la dent rencontre le manche au même point que l'une de ses conjuguées, auquel cas on n'obtient plus un peigne. Un lemme de Kollár [68, Lemma 14] montre que ce phénomène peut être évité.

3 Variétés rationnellement connexes sur les corps finis et sur les corps pseudo-algébriquement clos

Ce chapitre reprend les résultats établis en 2003 par Kollár et Szabó [71] au sujet des variétés séparablement rationnellement connexes sur les corps finis. La présentation que nous en donnons diffère légèrement de celle de Kollár et Szabó en ceci que nous établissons d'abord un résultat sur les corps pseudo-algébriquement clos, duquel nous déduisons le théorème principal de [71] sur les corps finis, alors que Kollár et Szabó travaillent sur un corps parfait arbitraire pour obtenir un énoncé dont ils tirent ensuite des conséquences d'une part sur les corps parfaits pseudo-algébriquement clos et d'autre part sur les corps finis. Aucune perte de généralité ne résulte de cette façon de procéder et la présentation s'en trouve quelque peu allégée (notamment parce que les corps pseudo-algébriquement clos ont l'avantage d'être fertiles; mais aussi parce que nous n'avons pas besoin de

voir avec les dents du peigne. Si elle n'est pas satisfaite, on ne peut donc pas la forcer en ajoutant des dents à C .

⁶L'espace de modules en jeu ici est le schéma de Hilbert $\text{Hilb}(X, x, y)$ paramétrant les sous-schémas fermés de X qui contiennent x et y . L'étude infinitésimale de $\text{Hilb}(X, x, y)$ est gouvernée non par le faisceau f^*T_X mais par le faisceau normal de C dans X . La restriction de celui-ci à C_0 est sensible à l'ajout de dents au peigne (contrairement à f^*T_X).

suivre dans toute la preuve la dépendance des constructions intermédiaires par rapport aux entiers $\dim(X)$, $\deg(X)$ et $\deg(S)$ qui apparaissent dans [71, Th. 2]; et enfin parce que le recours aux espaces de courbes stables de Kontsevich devient superflu). Bien sûr la preuve reste la même.

Dans la démonstration de Kollár et Szabó intervient un théorème « de type Lefschetz » pour les courbes rationnelles sur les variétés rationnellement connexes. Au paragraphe 3.5 nous discutons une application de ce théorème au problème de Galois inverse.

3.1 Énoncé du théorème principal ; conséquences

Soit X une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe et de dimension > 0 . La question 2.1 admet une réponse positive si k est pseudo-algébriquement clos puisque tout corps pseudo-algébriquement clos est fertile. Comme on l’a discuté au §2.4, il n’est pas vrai en revanche que si k est fertile et si $S \subset X$ est un ensemble fini de points rationnels, il existe sur X une courbe rationnelle passant par S . Le théorème principal de ce chapitre affirme qu’une telle courbe existe bien lorsque k est pseudo-algébriquement clos. Les points de S n’ont même pas besoin d’être rationnels :

Théorème 3.1 (Kollár–Szabó) — *Soit k un corps pseudo-algébriquement clos. Soit X une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe, de dimension ≥ 2 . Soit $S \subset X$ une sous-variété de dimension 0 lisse sur k . Alors il existe un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tel que $(f^*T_X)(-\deg(S))$ soit ample et que l’inclusion $S \subset X$ se factorise par f . De plus, si $\dim(X) \geq 3$, on peut demander que f soit une immersion fermée.*

Si f est une immersion fermée, la condition « l’inclusion $S \subset X$ se factorise par f » est bien sûr équivalente à la condition « $S \subset f(\mathbf{P}_k^1)$ ». Du théorème 3.1 résulte immédiatement⁷ :

Corollaire 3.2 — *Soient k un corps pseudo-algébriquement clos et X une variété projective, lisse et séparablement rationnellement connexe sur k . Alors $\text{Card}(X(k)/R) = 1$ et $A_0(X) = 0$.*

Le corollaire 3.2 est à mettre en parallèle avec les questions 1.9 et 1.19.

⁷Le corollaire 3.2 est immédiat si k est parfait. Par ailleurs, l’assertion sur la R-équivalence est claire que k soit parfait ou non. Pour établir la nullité de $A_0(X)$ en général, fixons un point rationnel $x \in X(k)$. Il suffit de montrer que tout point fermé $z \in X$ est rationnellement équivalent à $\deg(z)x$. Pour cela il suffit de montrer que sur la variété $X \otimes_k k(z)$, les points rationnels x et z sont rationnellement équivalents. Mais ceci découle du théorème 3.1 appliqué à la variété $X \otimes_k k(z)$ sur le corps $k(z)$ (qui est encore pseudo-algébriquement clos d’après [45, 11.2.5]).

Du théorème 3.1 nous déduirons au §3.2 le même énoncé avec pour k un corps fini de cardinal assez grand devant $\dim(X)$, $\deg(X)$ et $\deg(S)$, où $\deg(X)$ désigne le degré de X dans un plongement projectif $X \subset \mathbf{P}_k^N$ donné :

Corollaire 3.3 — *Il existe une application $\Phi: \mathbf{N}^3 \rightarrow \mathbf{N}$ telle que l'assertion suivante soit vérifiée. Soit k un corps fini. Soit $X \subset \mathbf{P}_k^N$ une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe et de dimension ≥ 2 . Soit $S \subset X$ une sous-variété de dimension 0 lisse sur k . Si le cardinal de k est supérieur à $\Phi(\dim(X), \deg(X), \deg(S))$, il existe un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ tel que $(f^*T_X)(-\deg(S))$ soit ample et que l'inclusion $S \subset X$ se factorise par f . De plus, si $\dim(X) \geq 3$, on peut demander que f soit une immersion fermée.*

Sans hypothèse sur le cardinal du corps fini k , on ne peut pas espérer trouver un morphisme $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ qui soit une immersion fermée, même si $\dim(X) \geq 3$. En effet cela impliquerait que X admet au moins $\text{Card}(k) + 1$ points rationnels, or Swinnerton-Dyer [96] a donné un exemple d'une surface cubique lisse V sur un corps fini k telle que $\text{Card}(V(k)) = 1$. En posant $X = V \times V$ on a alors $\text{Card}(X(k)) = 1$ et $\dim(X) \geq 3$. Il se pourrait néanmoins que privé de sa dernière phrase, l'énoncé du corollaire 3.3 soit vrai sans hypothèse sur le cardinal de k ; c'est une question ouverte même dans le cas où $S = \emptyset$.

Le corollaire 3.3 implique tout de suite :

Corollaire 3.4 — *Il existe une application $\Phi: \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ telle que l'assertion suivante soit vérifiée. Soient k un corps fini et $X \subset \mathbf{P}_k^N$ une variété projective, lisse et séparablement rationnellement connexe sur k . Si $\text{Card}(k) \geq \Phi(\dim(X), \deg(X))$ alors $\text{Card}(X(k)/\mathbf{R}) = 1$.*

La question de savoir si l'énoncé du corollaire 3.4 reste vrai sans l'hypothèse sur le cardinal de k est ouverte.

On peut aussi déduire du corollaire 3.3 l'égalité $A_0(X) = 0$ pour X projective, lisse et séparablement rationnellement connexe sur un corps fini, et cette fois quel que soit le cardinal du corps de base (cf. [71]). Mais ce résultat était déjà connu. En effet, Kato et Saito [62] prouvent que pour toute variété projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini k , le groupe $A_0(X)$ est isomorphe au groupe fondamental abélianisé $\pi_1^{\text{ab}}(X \otimes_k \bar{k})$; or Kollár a montré (à l'aide du théorème de Graber, Harris, Starr et de Jong) que le groupe fondamental de toute variété projective, lisse et séparablement rationnellement connexe sur un corps algébriquement clos est trivial (cf. [33, 3.6]).

Le corollaire 3.3 a également des conséquences sur les corps p -adiques. Si X est une variété projective et lisse sur un corps p -adique k , on dit que X a *bonne réduction séparablement rationnellement connexe* si, notant \mathcal{O} l'anneau des entiers de k , il existe un \mathcal{O} -schéma projectif et lisse dont la fibre spéciale géométrique est

une variété séparablement rationnellement connexe et dont la fibre générique est isomorphe à X . Ceci entraîne que X elle-même est rationnellement connexe.

Nous prouverons les corollaires 3.5 et 3.6 au §3.4.

Corollaire 3.5 — *Il existe une application $\Phi: \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ telle que l'assertion suivante soit vérifiée. Soient k un corps p -adique et X une variété projective et lisse sur k , telle qu'il existe un modèle projectif $\mathcal{X} \subset \mathbf{P}_\mathcal{O}^N$ de X dont la fibre spéciale soit une variété lisse et séparablement rationnellement connexe. Si le cardinal du corps résiduel de k est $\geq \Phi(\dim(X), \deg(X))$, alors $\text{Card}(X(k)/\mathbf{R}) = 1$.*

Ici encore, c'est une question ouverte de savoir si le corollaire 3.5 reste vrai sans l'hypothèse sur le cardinal du corps résiduel de k .

Sur les corps p -adiques, le corollaire sur le groupe de Chow des 0-cycles est cette fois entièrement nouveau. L'énoncé ci-dessous n'était connu que dans le cas des surfaces rationnelles (grâce à Bloch, Colliot-Thélène, Sansuc ; cf. [19]).

Corollaire 3.6 — *Soient k un corps p -adique et X une variété projective et lisse sur k , ayant bonne réduction séparablement rationnellement connexe. Alors $A_0(X) = 0$.*

Des corollaires 3.5 et 3.6 résulte immédiatement :

Corollaire 3.7 — *Soient k un corps de nombres et X une variété projective, lisse et rationnellement connexe sur k . Pour presque toute place v de k , on a $\text{Card}(X(k_v)/\mathbf{R}) = 1$ et $A_0(X \otimes_k k_v) = 0$.*

L'énoncé du corollaire 3.7 avait été conjecturé par Colliot-Thélène (voir notamment [22, 3.1 (b)]).

3.2 Des corps pseudo-algébriquement clos aux corps finis

Dans ce paragraphe nous déduisons le corollaire 3.3 du théorème 3.1.

L'outil de départ est l'estimation donnée par Lang et Weil [74] du nombre de points rationnels d'une sous-variété fermée géométriquement irréductible X de \mathbf{P}_k^n , pour k fini, en fonction du cardinal de k , du degré de X dans \mathbf{P}_k^n et de la dimension de X . Celle-ci a pour conséquence :

Théorème 3.8 (Lang–Weil) — *Il existe une application $\Phi: \mathbf{N}^3 \rightarrow \mathbf{N}$ telle que l'assertion suivante soit vérifiée. Soient k un corps fini et X une variété quasi-projective et géométriquement irréductible sur k . Fixons une immersion $X \subset \mathbf{P}_k^n$. Notons \bar{X} l'adhérence de X dans \mathbf{P}_k^n et posons $\partial X = \bar{X} \setminus X$. Supposons enfin satisfaite l'inégalité $\text{Card}(k) \geq \Phi(n, \deg(\bar{X}), \deg(\partial X))$, où $\deg(Z)$ désigne ici, pour*

tout fermé $Z \subset \mathbf{P}_k^n$ (non nécessairement équidimensionnel), la somme des degrés des composantes irréductibles de Z . Alors $X(k) \neq \emptyset$.

Les corps pseudo-algébriquement clos auxquels on appliquera le théorème 3.1 seront fournis par le lemme général suivant :

Lemme 3.9 — *Pour tout corps k , il existe un corps pseudo-algébriquement clos K contenant k et dans lequel k est algébriquement fermé.*

Esquisse de démonstration — L'idée remonte à Merkurjev et Suslin et consiste *grosso modo* à construire K inductivement en partant de k et en remplaçant K par $K(X)$ chaque fois que X est une variété géométriquement intègre sur K . Cette construction est formulée de façon rigoureuse par exemple dans [27] (preuve du théorème 2.1). \square

Le lemme 3.9, le théorème de Lang–Weil et le théorème 3.1 entraînent de façon formelle que si k est un corps fini et si l'on se donne X et S vérifiant les hypothèses du corollaire 3.3, il existe un entier N tel que pour toute extension finie k'/k de degré $\geq N$, il existe un morphisme $f: \mathbf{P}_{k'}^1 \rightarrow X \otimes_k k'$ tel que l'inclusion $S \otimes_k k' \subset X \otimes_k k'$ se factorise par f et que $(f^*T_X)(-\deg(S))$ soit ample. Malheureusement ceci ne permet de démontrer aucun des corollaires 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7. Au minimum il faudrait pour cela que l'entier N ne dépende pas du choix de S (mais seulement de son degré). Pour le corollaire 3.7 il est crucial que N ne dépende même pas de la caractéristique de k . Le lemme suivant nous permettra de résoudre ces difficultés et d'établir le corollaire 3.3 dans toute sa généralité.

Lemme 3.10 — *Soient S un schéma de type fini sur \mathbf{Z} et $f: X \rightarrow S$ un morphisme de schémas localement de type fini. Supposons que pour tout corps pseudo-algébriquement clos L , l'application $X(L) \rightarrow S(L)$ induite par f soit surjective. Alors il existe un entier N tel que pour tout point $s \in S$ dont le corps résiduel est fini et de cardinal $\geq N$, la fibre $f^{-1}(s)$ possède un point rationnel.*

Démonstration — Quitte à remplacer S tour à tour par chacune de ses composantes irréductibles (munies de la structure de sous-schéma fermé réduit), on peut supposer S intègre. Notons $\kappa(S)$ le corps des fonctions de S . D'après le lemme 3.9, il existe un corps pseudo-algébriquement clos L contenant $\kappa(S)$ et tel que $\kappa(S)$ soit algébriquement fermé dans L . Comme l'application $X(L) \rightarrow S(L)$ est surjective, la fibre générique de f admet un L -point ; et comme f est localement de type fini, on en déduit qu'il existe une sous-extension de type fini $L_0/\kappa(S)$ de $L/\kappa(S)$ telle que la fibre générique de f admette un L_0 -point. Le corps L_0 est alors le corps des fonctions d'une variété intègre, affine et géométriquement irréductible sur $\kappa(S)$, puisque $\kappa(S)$ est séparablement fermé dans L_0 . D'où l'existence d'un ouvert affine

dense $S^0 \subset S$ et d'un S^0 -schéma W^0 affine, de type fini et à fibres géométriquement irréductibles, muni d'un S -morphisme $W^0 \rightarrow X$. Fixons une S^0 -immersion fermée $W^0 \subset \mathbf{A}_{S^0}^n$ pour un $n \geq 1$. Quitte à rétrécir S^0 , on peut supposer que pour $s \in S^0$, les degrés dans \mathbf{P}_s^n de \overline{W}_s^0 et de $\partial(W_s^0)$ sont indépendants de s (avec les notations du théorème 3.8 relatives à $W_s^0 \subset \mathbf{A}_s^n \subset \mathbf{P}_s^n$). Comme les fibres de $W^0 \rightarrow S^0$ sont géométriquement irréductibles, le théorème de Lang–Weil rappelé ci-dessus entraîne alors l'existence d'un entier N tel que pour tout point $s \in S^0$ dont le corps résiduel est fini et de cardinal $\geq N$, la fibre de $W^0 \rightarrow S^0$ en s possède un point rationnel. Compte tenu de l'existence d'un S -morphisme $W^0 \rightarrow X$, il en résulte que pour tout point $s \in S^0$ dont le corps résiduel est fini et de cardinal $\geq N$, la fibre $f^{-1}(s)$ admet un point rationnel. Pour conclure il ne reste plus qu'à établir la conclusion du lemme pour la restriction de f au-dessus de $S \setminus S^0$, ce qui est justiciable d'un raisonnement par récurrence puisque $\dim(S \setminus S^0) < \dim(S)$. \square

Remarque — Sous l'hypothèse que f est de type fini, on peut aussi démontrer le lemme 3.10 en considérant les corps L ultraproducts de corps finis (cf. [45, Proposition 7.8.1]).

Démontrons maintenant le corollaire 3.3. Fixons des entiers δ , d et r (ce seront respectivement la dimension de X , le degré de X et le degré de S) et posons $n = \delta + d - 1$. Quels que soient l'entier N et le corps k , toute sous-variété géométriquement irréductible de \mathbf{P}_k^N de degré d et de dimension δ est incluse dans un sous-espace projectif de \mathbf{P}_k^N de dimension au plus n (cf. [53, Corollary 18.12]). C'est ce qui nous permettra ci-dessous de nous borner à considérer les sous-variétés de \mathbf{P}_k^n de degré d (plutôt que les sous-variétés de \mathbf{P}_k^N de degré d et de dimension δ , avec N variable).

Soit $H_1 \subset \text{Hilb}(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n/\mathbf{Z})$ l'ensemble des points $h \in \text{Hilb}(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n/\mathbf{Z})$ tels que la sous-variété fermée correspondante de \mathbf{P}_h^n soit lisse (sur le corps résiduel de h), de degré d et séparablement rationnellement connexe. L'ensemble H_1 est un ouvert de $\text{Hilb}(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n/\mathbf{Z})$ (cf. [65, IV.3.11]). Notons $\mathcal{X}_1 \rightarrow H_1$ la famille universelle, de sorte que \mathcal{X}_1 est un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_{H_1}^n$ lisse sur H_1 . Soit $H_2 \subset \text{Hilb}(\mathcal{X}_1/H_1)$ l'ouvert constitué des points h tels que la sous-variété fermée correspondante de $\mathcal{X}_1 \times_{H_1} h$ soit lisse, de dimension 0 et de degré r (sur le corps résiduel de h). Posons $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \times_{H_1} H_2$ et notons $\mathcal{S}_2 \rightarrow H_2$ la famille universelle, de sorte que \mathcal{S}_2 est un sous-schéma fermé de \mathcal{X}_2 , fini étale de degré r sur H_2 . Notons $\text{Hom}_{H_2}^0(\mathbf{P}_{H_2}^1, \mathcal{X}_2) \subset \text{Hom}_{H_2}(\mathbf{P}_{H_2}^1, \mathcal{X}_2)$ le schéma de Hilbert des H_2 -morphisms $f: \mathbf{P}_{H_2}^1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ tels que $(f^*T_{\mathcal{X}_2/H_2})(-r)$ soit ample relativement à H_2 . Soit enfin M l'image réciproque, par le morphisme de composition

$$\text{Hom}_{H_2}(\mathcal{S}_2, \mathbf{P}_{H_2}^1) \times_{H_2} \text{Hom}_{H_2}^0(\mathbf{P}_{H_2}^1, \mathcal{X}_2) \longrightarrow \text{Hom}_{H_2}(\mathcal{S}_2, \mathcal{X}_2),$$

de la section de $\text{Hom}_{H_2}(\mathcal{S}_2, \mathcal{X}_2) \rightarrow H_2$ correspondant à l'inclusion $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{X}_2$.

Pour résumer le paragraphe ci-dessus, disons que l'on a défini, au-dessus de $\text{Spec}(\mathbf{Z})$, le schéma de modules H_2 paramétrant les données qui apparaissent dans le corollaire 3.3 : une sous-variété projective lisse et séparablement rationnellement connexe de degré d de l'espace projectif de dimension n (fibre de $\mathcal{X}_2 \rightarrow H_2$), munie d'une sous-variété lisse de dimension 0 et de degré r (fibre de $\mathcal{S}_2 \rightarrow H_2$). De plus on a défini un H_2 -schéma M dont la fibre au-dessus de chaque point de H_2 est l'espace de modules paramétrant les morphismes f que l'on cherche à construire. Tous ces schémas sont localement de type fini sur \mathbf{Z} .

Le théorème 3.1 affirme exactement que pour tout corps pseudo-algébriquement clos L , l'application induite $M(L) \rightarrow H_2(L)$ est surjective. Si H_2 est de type fini sur \mathbf{Z} , le lemme 3.10 appliqué à $M \rightarrow H_2$ entraîne donc immédiatement la validité du corollaire 3.3 : on définit $\Phi(\delta, d, r)$ comme étant l'entier N donné par le lemme 3.10. (Pour prouver la toute dernière assertion du corollaire 3.3 on raisonne de la même manière, à ceci près que l'on remplace M par l'ouvert de M obtenu en ajoutant la condition que le morphisme f est une immersion fermée ; il s'agit bien d'un ouvert de M d'après [65, I.6.2].)

Il suffit donc, pour conclure, de vérifier que le schéma H_2 est de type fini sur \mathbf{Z} (autrement dit, qu'il est quasi-compact, ou encore, qu'il ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes). C'est seulement ici que le fait d'avoir fixé δ , d et r va jouer un rôle. Le morphisme $H_2 \rightarrow H_1$ est quasi-compact car H_2 est inclus dans $\text{Hilb}_r(\mathcal{X}_1/H_1)$, qui est un H_1 -schéma projectif. (Ici $\text{Hilb}_r(\mathcal{X}_1/H_1)$ désigne le lieu dans $\text{Hilb}(\mathcal{X}_1/H_1)$ des sous-variétés de polynôme de Hilbert égal à r .) Il reste donc seulement à vérifier que le schéma H_1 est quasi-compact. Or ceci résulte tout de suite de la théorie des formes de Chow (cf. [65, I.6.6.1]). Ce qui compte ici est que H_1 paramètre des sous-variétés fermées réduites de degré borné dans un espace projectif de dimension bornée.

3.3 Preuve du théorème principal

Nous supposons dorénavant les hypothèses du théorème 3.1 satisfaites. En particulier, le corps k est pseudo-algébriquement clos.

3.3.1 Esquisse de l'argument

Le principe de la preuve est le suivant. Supposons, pour simplifier, que $\dim(X) \geq 3$ et que tous les points de S soient k -rationnels. Notons-les $S = \{x_1, \dots, x_n\}$. Nous voulons construire une courbe rationnelle sur X passant par tous les x_i . On commence par appliquer à chaque x_i le théorème principal du chapitre précédent (théorème 2.4), ce qui est licite puisque le corps k est fertile, étant pseudo-algébriquement clos. On obtient, pour chaque i , une courbe rationnelle très libre $C_i \subset X$ passant par x_i . On aimerait voir les C_i comme les

dents d'un peigne. Pour cela il faut construire un manche, c'est-à-dire trouver une courbe rationnelle sur X qui rencontre tous les C_i . Nous ne construirons une telle courbe qu'après avoir déformé les C_i . Plus précisément, comme les C_i sont des courbes rationnelles très libres, elles s'insèrent dans des familles qui d'une part sont paramétrées par des variétés lisses et qui d'autre part balayent un ouvert dense de X . En d'autres termes, pour chaque i il existe une variété lisse et connexe H_i munie d'un point rationnel $h_i \in H_i(k)$ et un morphisme dominant $\varphi_i: \mathbf{P}_{H_i}^1 \rightarrow X$ dont la restriction à $\mathbf{P}_{h_i}^1$ a pour image C_i et dont la restriction à \mathbf{P}_h^1 , pour tout $h \in H_i$, a pour image une courbe rationnelle très libre contenant x_i . « Fabriquer un manche quitte à déformer les C_i » revient alors à trouver une courbe rationnelle C_0 sur X dont l'image réciproque par φ_i contient, pour tout i , un point rationnel⁸. Comme k est pseudo-algébriquement clos, il suffit pour cela que la variété $\varphi_i^{-1}(C_0) \subset \mathbf{P}_{H_i}^1$ soit géométriquement irréductible sur k . Or $\mathbf{P}_{H_i}^1$ est lui-même géométriquement irréductible sur k puisque H_i est lisse et connexe et contient un point rationnel (à savoir h_i). On est ainsi ramené au problème suivant : étant donnée une variété géométriquement irréductible Y et un morphisme dominant $Y \rightarrow X$ (ici $\mathbf{P}_{H_i}^1$ et $\varphi_i: \mathbf{P}_{H_i}^1 \rightarrow X$), montrer que la restriction de Y au-dessus de « presque toute » courbe rationnelle sur X est encore une variété géométriquement irréductible. Ce problème, qui rappelle les théorèmes de Lefschetz sur les sections hyperplanes des variétés projectives et qui est essentiellement de nature géométrique, a été résolu par Kollár [67]. Le résultat de Kollár entraîne l'existence d'une famille de courbes rationnelles très libres sur X , paramétrée par une variété géométriquement irréductible H_0 , telle que pour tout i , l'image réciproque par φ_i de toute courbe apparaissant dans cette famille soit une variété géométriquement irréductible. Comme k est pseudo-algébriquement clos, on a $H_0(k) \neq \emptyset$. D'où finalement l'existence d'un peigne sur X dont le manche C_0 est une courbe rationnelle très libre et dont les dents C_1, \dots, C_n sont des courbes rationnelles très libres telles que $x_i \in C_i$ pour tout i . La technique déjà employée dans la preuve du théorème 2.4 montre alors que ce peigne se déforme en une courbe rationnelle lisse $C \subset X$ contenant tous les x_i et vérifiant la condition d'amplitude qui apparaît dans le théorème 2.4. (L'hypothèse $\dim(X) \geq 3$ sert à assurer que l'on peut choisir C lisse. Si C n'est pas lisse, la condition « C contient les x_i » n'est pas tout à fait celle qui nous intéresse.)

3.3.2 La preuve proprement dite

Soit $s \in S$. Comme le corps $k(s)$ est une extension finie séparable de k , c'est un corps pseudo-algébriquement clos (par restriction des scalaires à la Weil) et en particulier c'est un corps fertile. Par conséquent, d'après le théorème 2.4, le

⁸En toute rigueur il faut aussi s'assurer que deux dents ne rencontrent jamais le manche au même point ; sans cela on n'obtient pas un peigne.

$k(s)$ -schéma $\mathrm{Hom}^0(\mathbf{P}_{k(s)}^1, X \otimes_k k(s); 0 \mapsto s)$ qui paramètre les $k(s)$ -morphisms très libres de $\mathbf{P}_{k(s)}^1$ vers $X \otimes_k k(s)$ envoyant 0 sur s admet un point rationnel. Choisissons-en un et notons H_s un voisinage ouvert de ce point. Quitte à rétrécir H_s on peut supposer que H_s est une variété connexe. La variété H_s est alors géométriquement irréductible sur $k(s)$ puisqu'elle est lisse et connexe et qu'elle admet un point rationnel sur $k(s)$.

Notons $\varphi_s: \mathbf{P}_{k(s)}^1 \times H_s \rightarrow X \otimes_k k(s)$ le $k(s)$ -morphisme universel paramétré par H_s . C'est un morphisme dominant puisque sa restriction à $(\mathbf{P}_{k(s)}^1 \setminus \{0\}) \times H_s$ est lisse (cf. [65, II.3.5.3]). Le théorème de type Lefschetz que nous allons maintenant appliquer est le suivant :

Théorème 3.11 (Kollár [67, Theorem 6, Corollary 7 et §28]) — *Soient k un corps et X une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe et de dimension > 0 . Notons \bar{k} une clôture algébrique de k et $\mathrm{Hom}^0(\mathbf{P}_k^1, X)$ l'ouvert du schéma de Hilbert $\mathrm{Hom}(\mathbf{P}_k^1, X)$ constitué des morphismes très libres. Alors il existe un ouvert géométriquement intègre $U \subset \mathrm{Hom}^0(\mathbf{P}_k^1, X)$ tel que pour toute variété irréductible Y sur \bar{k} munie d'un morphisme dominant $\varphi: Y \rightarrow X \otimes_k \bar{k}$, il existe un ouvert dense $V \subset U$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $v \in V(\bar{k})$, le produit fibré de $\varphi: Y \rightarrow X \otimes_k \bar{k}$ avec $v: \mathbf{P}_{\bar{k}}^1 \rightarrow X \otimes_k \bar{k}$ est irréductible.*

Soit $U \subset \mathrm{Hom}^0(\mathbf{P}_k^1, X)$ comme dans le théorème 3.11. Quitte à rétrécir U , on peut supposer que pour tout s , la conclusion du théorème 3.11 pour $\varphi = \varphi_s \otimes_{k(s)} \bar{k}$ est satisfaite avec $V = U$. Quitte à rétrécir U à nouveau, on peut supposer de plus que l'image du morphisme universel $U \times \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ est disjointe de S (en effet le morphisme $U \times \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ est lisse [65, II.3.5.4] et S est de codimension ≥ 2 dans X). Choisissons alors $u \in U(k)$ (un tel choix est possible car k est pseudo-algébriquement clos et U est géométriquement intègre). Pour $s \in S$, considérons le carré

$$\begin{array}{ccc} D_s & \longrightarrow & \mathbf{P}_{k(s)}^1 \times H_s \\ \downarrow \psi_s & & \downarrow \varphi_s \\ \mathbf{P}_{k(s)}^1 & \xrightarrow{u \otimes_k k(s)} & X \otimes_k k(s) \end{array} \quad (4)$$

où D_s est défini comme le produit fibré de φ_s et de $u \otimes_k k(s)$ (et où ψ_s est la seconde projection).

Comme φ_s est lisse au-dessus du complémentaire de $S \otimes_k k(s)$ (cf. [65, II.3.5.3]), le morphisme ψ_s est lisse. En particulier il est dominant et D_s est une variété géométriquement intègre sur $k(s)$ (elle est géométriquement irréductible par construction). Comme k est pseudo-algébriquement clos, il en résulte que l'on peut choisir pour chaque $s \in S$ un $k(s)$ -point de D_s de telle façon que les images dans \mathbf{P}_k^1 de tous ces points (par $D_s \xrightarrow{\psi_s} \mathbf{P}_{k(s)}^1 \rightarrow \mathbf{P}_k^1$) soient deux à deux distinctes

et que le corps résiduel de chacune de ces images soit $k(s)$. Pour forcer cette dernière condition, il suffit de remarquer que trouver un $k(s)$ -point de D_s dont l'image par $D_s \xrightarrow{\psi_s} \mathbf{P}_{k(s)}^1 \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ ait pour corps résiduel $k(s)$ équivaut, en notant $R_{k(s)/k}$ la restriction des scalaires à la Weil, à trouver un point k -rationnel de $R_{k(s)/k}D_s$ dont l'image dans $R_{k(s)/k}\mathbf{P}_{k(s)}^1$ appartienne à l'ouvert complémentaire de la réunion des sous-variétés strictes $R_{k'/k}\mathbf{P}_{k'}^1$ où k' parcourt les sous-extensions de $k(s)/k$ distinctes de $k(s)/k$.

Autrement dit, il existe $(h_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} H_s(k(s))$, $(q_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} \mathbf{P}^1(k(s))$ et $(m_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} \mathbf{P}^1(k(s))$ satisfaisant l'égalité $u(m_s) = \varphi_s(q_s, h_s)$ dans $X(k(s))$ pour tout $s \in S$ et telles que les images dans \mathbf{P}_k^1 des m_s soient deux à deux distinctes et de corps résiduel $k(s)$; de plus, on a $q_s \neq 0$ pour tout s puisque $\varphi_s(0, h_s) = s$ alors que l'image de $U \times \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ est disjointe de S . Toutes ces données définissent un peigne (muni d'un morphisme vers X), que nous allons maintenant déformer en procédant exactement comme au §2.2.2.

Soit T une courbe lisse et connexe sur k munie d'un point rationnel $t \in T(k)$. Les points m_s définissent une immersion fermée $S \subset \mathbf{P}_k^1$. Soient \mathcal{C} la surface lisse obtenue en éclatant $t \times S$ dans $T \times \mathbf{P}_k^1$ et $\pi: \mathcal{C} \rightarrow T$ la composée de l'éclatement et de la première projection. Pour $s \in S$, notons $R_s \subset \mathcal{C}$ le transformé strict de $T \times s$ et $E_s \subset \mathcal{C}$ la fibre de l'éclatement $\mathcal{C} \rightarrow T \times \mathbf{P}_k^1$ au-dessus de $t \times s$. Posons enfin $R = \bigcup_{s \in S} R_s$ et notons $C_0 \subset \mathcal{C}$ le transformé strict de $t \times \mathbf{P}_k^1$. Sur E_s il y a deux points $k(s)$ -rationnels distingués : les points $E_s \cap C_0$ et $E_s \cap R_s$. Fixons un $k(s)$ -isomorphisme $E_s \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_{k(s)}^1$ envoyant le premier sur q_s et le second sur 0 . Les morphismes $\varphi_s(-, h_s): \mathbf{P}_{k(s)}^1 \rightarrow X \otimes_k k(s)$ et $u: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ se recollent alors en un morphisme $f_t: \mathcal{C}_t \rightarrow \mathcal{X}_t$ (où $\mathcal{X} = T \times X$ et $\mathcal{X}_t = t \times X = X$) tel que $f_t(R|_{\mathcal{C}_t}) = t \times S$.

Proposition 3.12 — *Le T -schéma $\text{Hom}_T(\mathcal{C}, \mathcal{X}; R \mapsto T \times S)$ est lisse au point $[f_t]$.*

Démonstration — D'après la proposition 2.10 il suffit de vérifier que

$$H^1(\mathcal{C}_t, f_t^* T_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}_t}} \mathcal{I}) = 0$$

où $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{C}_t}$ désigne le faisceau d'idéaux défini par $R|_{\mathcal{C}_t} \subset \mathcal{C}_t$. Or cela résulte du lemme 2.11, compte tenu que \mathcal{C}_t est un peigne et que les restrictions de $f_t^* T_X$ au manche et aux dents sont des faisceaux amples. \square

D'après la proposition 3.12, il existe une courbe $B \subset \text{Hom}_T(\mathcal{C}, \mathcal{X}; R \mapsto T \times S)$ lisse sur k , connexe, passant par $[f_t]$ et dominant T . Notons $\varphi: \mathcal{C} \times_T B \rightarrow X$ le morphisme donné par la propriété universelle de $\text{Hom}_T(\mathcal{C}, \mathcal{X}; R \mapsto T \times S)$ et posons $B^0 = B \times_T (T \setminus \{t\})$. Comme $[f_t] \in B(k)$ et que le corps k est fertile (étant

pseudo-algébriquement clos), l'ensemble $B(k)$ est dense dans B . Pour $b \in B^0(k)$, la restriction de φ à $\mathcal{C} \times_T b$ est un morphisme $\varphi_b: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$. L'inclusion $S \subset X$ se factorise par φ_b puisque $\varphi_b(R \times_T b) = S$. Il reste donc seulement à vérifier que l'on peut choisir b de sorte que le faisceau $(\varphi_b^* T_X)(-\deg(S))$ soit ample, c'est-à-dire que $H^1(\mathbf{P}_k^1, (\varphi_b^* T_X)(-\deg(S) - 2)) = 0$. Par semi-continuité de la cohomologie, il suffit pour cela qu'il existe une section $D \subset \mathcal{C}$ de $\pi: \mathcal{C} \rightarrow T$ telle que, si l'on pose $\mathcal{F} = \varphi^* T_X \otimes \mathcal{I}_{R \times_T B} \otimes \mathcal{I}_{D \times_T B}^{\otimes 2}$ (où $\mathcal{I}_{R \times_T B}$ et $\mathcal{I}_{D \times_T B}$ désignent respectivement les faisceaux (localement libres) d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{C} \times_T B}$ définis par $R \times_T B$ et $D \times_T B$), on ait $H^1(\mathcal{C} \times_T [f_i], \mathcal{F}|_{\mathcal{C} \times_T [f_i]}) = 0$. Fixons un point $z \in \mathbf{P}^1(k)$ tel que $z \notin S$ et prenons pour D l'image réciproque, par l'éclatement $\mathcal{C} \rightarrow T \times \mathbf{P}^1$, de $T \times z$. La restriction de $\mathcal{F}|_{\mathcal{C} \times_T [f_i]}$ au manche du peigne $\mathcal{C} \times_T [f_i] = \mathcal{C}_i$ est alors isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$ pour des $a_i \geq -1$ et sa restriction à chaque dent est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$ pour des $a_i \geq 0$; le lemme 2.11 permet donc de conclure.

Supposons enfin $\dim(X) \geq 3$ et prouvons la dernière assertion du théorème 3.1. Comme $(\varphi_b^* T_X)(-\deg(S))$ est ample et que $\dim(X) \geq 3$, le k -schéma

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{P}_k^1, X; S \mapsto S)$$

est lisse en $[\varphi_b]$ (cf. [32, 2.9]) et tout voisinage ouvert de $[\varphi_b]$ contient un ouvert non vide paramétrant des immersions fermées (cf. [65, II.3.14.3]). Par conséquent, compte tenu que k est fertile, tout voisinage ouvert de $[\varphi_b]$ contient un point rationnel correspondant à une immersion fermée $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$. Si l'on choisit un voisinage ouvert suffisamment petit, le faisceau $(f^* T_X)(-\deg(S))$ sera nécessairement ample.

3.4 Preuve des corollaires 3.5 et 3.6

Démonstration du corollaire 3.5 — Notons F le corps résiduel de \mathcal{O} et $\Phi: \mathbf{N}^3 \rightarrow \mathbf{N}$ l'application donnée par le corollaire 3.3. Soient $x, y \in X(k)$. Comme \mathcal{X} est propre sur \mathcal{O} , les points x et y s'étendent en des sections $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{X}(\mathcal{O})$. Quitte à remplacer X par $X \times \mathbf{P}_k^1$, \mathcal{X} par $\mathcal{X} \times \mathbf{P}_\mathcal{O}^1$ et x, y par $(x, 0), (y, 1)$, on peut supposer que $\tilde{x} \cap \tilde{y} = \emptyset$. Si l'inégalité $\mathrm{Card}(F) \geq \Phi(\dim(X), \deg(X), 2)$ est satisfaite, il existe alors un morphisme très libre $f: \mathbf{P}_F^1 \rightarrow \mathcal{X} \otimes_R F$ tel que $f(0) = \tilde{x} \otimes_\mathcal{O} F$ et $f(1) = \tilde{y} \otimes_\mathcal{O} F$. D'où un point rationnel $[f]$ de la fibre spéciale du \mathcal{O} -schéma $\mathrm{Hom}_\mathcal{O}(\mathbf{P}_\mathcal{O}^1, \mathcal{X}; 0 \mapsto \tilde{x}, 1 \mapsto \tilde{y})$. Ce \mathcal{O} -schéma est lisse en $[f]$ puisque f est très libre (cf. proposition 2.10). Par conséquent, et compte tenu que \mathcal{O} est un anneau local complet, on peut relever $[f]$ en une section de $\mathrm{Hom}_\mathcal{O}(\mathbf{P}_\mathcal{O}^1, \mathcal{X}; 0 \mapsto \tilde{x}, 1 \mapsto \tilde{y})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$; autrement dit, f est la restriction à \mathbf{P}_F^1 d'un morphisme $\mathbf{P}_\mathcal{O}^1 \rightarrow \mathcal{X}$ qui envoie 0 sur \tilde{x} et 1 sur \tilde{y} . La restriction de ce morphisme au-dessus du point générique de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ fournit une courbe rationnelle sur X reliant x à y . Ainsi a-t-on

prouvé que $\text{Card}(X(k)/\mathbb{R}) \leq 1$ dès que $\text{Card}(F) \geq \Phi(\dim(X), \deg(X), 2)$. D'autre part, il résulte du théorème de Lang–Weil que $\mathcal{X}(F) \neq \emptyset$, et donc $X(k) \neq \emptyset$, dès que $\text{Card}(F)$ est assez grand devant $\dim(X)$ et $\deg(X)$; d'où le corollaire. \square

Démonstration du corollaire 3.6 (due à Colliot-Thélène) — Soit $\mathcal{X} \subset \mathbf{P}_{\mathcal{O}}^N$ un modèle projectif de X , lisse sur \mathcal{O} et de fibre spéciale séparablement rationnellement connexe. Pour toute extension finie k'/k , la flèche $X \otimes_k k' \rightarrow X$ induit (par image directe) une application norme $A_0(X \otimes_k k') \rightarrow A_0(X)$ dont la composée avec la flèche de restriction $A_0(X) \rightarrow A_0(X \otimes_k k')$ est la multiplication par $[k' : k]$ sur $A_0(X)$. Pour que $A_0(X) = 0$, il suffit donc qu'il existe des extensions k'/k de degrés premiers entre eux telles que $A_0(X \otimes_k k') = 0$.

Comme F est fini, il existe pour chaque $n \geq 1$ une extension F_n/F de degré n . Celle-ci se relève en une extension non ramifiée k_n/k de degré n . D'après le corollaire 3.5, on a $\text{Card}(X(k_n)/\mathbb{R}) = 1$ pour tout n assez grand. En particulier on a $\text{Card}(X(k_m)/\mathbb{R}) = 1$ et $\text{Card}(X(k_n)/\mathbb{R}) = 1$ pour des entiers m et n premiers entre eux. Quitte à remplacer k par k_m et par k_n on peut donc supposer que $\text{Card}(X(k)/\mathbb{R}) = 1$, et même que $\text{Card}(X(k')/\mathbb{R}) = 1$ pour toute extension finie k'/k . Fixons alors $x \in X(k)$. Pour établir que $A_0(X) = 0$ il suffit de montrer que tout point fermé de X est rationnellement équivalent à un multiple de x . Pour ceci il suffit que pour tout point fermé $y \in X$, les points rationnels x et y de $X \otimes_k k(y)$ soient rationnellement équivalents sur $X \otimes_k k(y)$ (en effet la norme de $k(y)$ à k du 0-cycle $y - x$ sur $X \otimes_k k(y)$ est le 0-cycle $y - \deg(y)x$ sur X); or ils sont même \mathbb{R} -équivalents puisque $\text{Card}(X(k(y))/\mathbb{R}) = 1$. \square

3.5 Application du théorème de type Lefschetz au problème de Galois inverse

Tout groupe fini est-il le groupe de Galois d'une extension galoisienne de \mathbf{Q} ? L'une des approches permettant de répondre partiellement à cette question ouverte consiste à chercher des extensions finies galoisiennes du corps $\mathbf{Q}(t)$ de groupe de Galois donné. Par spécialisation, une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}(t)$ de groupe G fournit, pour une infinité de valeurs de t , une extension galoisienne de \mathbf{Q} ayant G pour groupe de Galois (théorème d'irréductibilité de Hilbert, cf. [91]).

Que tout groupe fini soit groupe de Galois sur $\mathbf{C}(t)$ est une conséquence classique du théorème d'existence de Riemann. On commence par construire un revêtement galoisien topologique (ramifié) de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ ayant le groupe de Galois désiré; le théorème d'existence de Riemann permet d'en déduire un revêtement de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ et, par suite, une extension finie de $\mathbf{C}(t)$. Par une méthode analogue, fondée sur la géométrie analytique rigide, Harbater [52] a démontré que tout groupe fini est le groupe de Galois d'une extension galoisienne de $\mathbf{Q}_p(t)$, et plus généralement de $k(t)$ pour tout corps k complet pour une valuation discrète. On a même :

Théorème 3.13 (Harbater [52], Pop [87]) — *Soit k un corps fertile. Tout groupe fini est le groupe de Galois d'une extension galoisienne de $k(t)$.*

Colliot-Thélène [23] a donné une démonstration nouvelle du théorème 3.13 lorsque k est de caractéristique nulle, s'appuyant sur la technique de déformation de courbes rationnelles employée dans le chapitre précédent. Le résultat principal de Colliot-Thélène [23] est plus précis : il affirme que pour tout groupe fini G et tout torseur T sur k sous G (c'est-à-dire : tout k -schéma fini étale T muni d'une action simplement transitive de G), il existe une extension galoisienne de $k(t)$ de groupe de Galois G , régulière sur k , qui en $t = 0$ se spécialise en le k -schéma T (c'est-à-dire : il existe une courbe C lisse et géométriquement connexe sur k et un revêtement (ramifié) $C \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ galoisien de groupe G , dont la fibre au-dessus de $0 \in \mathbf{P}^1(k)$ soit isomorphe à T). En prenant $T = \coprod_{g \in G} \text{Spec}(k)$ on retrouve le théorème 3.13 en caractéristique nulle ; mais l'assertion avec T arbitraire était inconnue dans cette généralité (problème dit de Beckmann–Black).

Le résultat de Colliot-Thélène [23] a été généralisé dans plusieurs directions. Moret-Bailly [81] l'a étendu aux corps fertiles de caractéristique quelconque (par une technique de recollement formel dans l'esprit de la preuve par Harbater du théorème 3.13). Kollár [67] a établi un théorème de type Lefschetz (le théorème 3.11 du §3.3.2, en réalité une légère variante) ayant pour corollaire une généralisation du théorème de Colliot-Thélène au cas où G est un groupe algébrique linéaire non nécessairement fini (toujours sous l'hypothèse de caractéristique nulle).

Nous nous contentons ici d'expliquer comment un théorème de type Lefschetz pour les courbes rationnelles sur les variétés rationnellement connexes peut avoir pour conséquence le théorème de Harbater–Pop.

La variante du théorème 3.11 dont nous avons besoin est la suivante :

Théorème 3.14 (Kollár [67, Theorem 3]) — *Soient k un corps et X une variété projective et lisse sur k , séparablement rationnellement connexe, de dimension > 0 . Soit $x \in X(k)$. Notons \bar{k} une clôture algébrique de k et $\text{Hom}^0(\mathbf{P}_k^1, X; 0 \mapsto x)$ l'ouvert du schéma de Hilbert $\text{Hom}(\mathbf{P}_k^1, X; 0 \mapsto x)$ constitué des morphismes très libres. Alors il existe un ouvert géométriquement intègre $U \subset \text{Hom}^0(\mathbf{P}_k^1, X; 0 \mapsto x)$ et une compactification $U \subset U'$ tels que U' possède un point rationnel lisse et que pour toute variété irréductible Y sur \bar{k} munie d'un morphisme dominant $\varphi : Y \rightarrow X \otimes_k \bar{k}$, il existe un ouvert dense $V \subset U$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $v \in V(\bar{k})$, le produit fibré de $\varphi : Y \rightarrow X \otimes_k \bar{k}$ avec $v : \mathbf{P}_{\bar{k}}^1 \rightarrow X \otimes_k \bar{k}$ est irréductible.*

Autrement dit il s'agit du même énoncé que le théorème 3.11, à ceci près qu'on ne considère que les courbes passant par un point rationnel donné de X et que l'ouvert U apparaissant dans la conclusion admet une compactification possédant un point rationnel lisse. En fait, Kollár déduit le théorème 3.11 du théorème 3.14 (en étendant les scalaires de k à $k(X)$ et en prenant pour x le point générique).

Démonstration du théorème 3.13 en caractéristique nulle — Soient k un corps fertile de caractéristique 0 et G un groupe fini. Choisissons un plongement $G \subset \mathrm{GL}_N$ pour un $N \geq 1$ et notons $Q = \mathrm{GL}_N/G$ le quotient. Comme k est de caractéristique 0, il existe, d’après Hironaka, une compactification lisse $Q \subset X$, une variété projective et lisse Y sur k et un morphisme $\varphi: Y \rightarrow X$ dont la restriction au-dessus de Q soit isomorphe à la projection $\mathrm{GL}_N \rightarrow \mathrm{GL}_N/G$. Notons $x \in Q(k) \subset X(k)$ l’image de $1 \in \mathrm{GL}_N(k)$ par φ . La variété X est (séparablement) unirationnelle puisque GL_N est un ouvert de l’espace affine. En particulier elle est (séparablement) rationnellement connexe et on peut donc lui appliquer le théorème 3.14. D’où U , U' et V comme dans la conclusion de ce théorème. Comme k est fertile et que U' admet un point rationnel lisse, l’ensemble $V(k)$ est non vide. Soit $v \in V(k)$. Soit $C \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ le produit fibré de $v: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ par $\varphi: Y \rightarrow X$. Par construction, C est une courbe géométriquement irréductible. Le revêtement ramifié $C \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ est galoisien de groupe G puisque $\varphi^{-1}(Q) \rightarrow Q$ est galoisien de groupe G et que l’image de $v: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ rencontre Q (à savoir, en x). Le groupe G est donc bien un groupe de Galois sur $k(t)$. \square

Il ressort de la preuve que G est même un groupe de Galois régulier sur $k(t)$. D’autre part, en variant le choix du point $x \in Q(k)$ dans l’argument, on contrôle à volonté la fibre de $C \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ au-dessus de $0 \in \mathbf{P}_k^1$ (ce qui résout le problème de Beckmann–Black pour k fertile de caractéristique 0).

4 Existence de points rationnels sur les corps finis : le point de vue motivique

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d’établir le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Esnault [40]) — *Sur un corps fini, toute variété propre, lisse et rationnellement connexe par chaînes admet un point rationnel.*

Ce théorème répond par l’affirmative à la question 1.11 dans le cas des corps finis. Il est à noter que la question 1.11 portait seulement sur les variétés séparablement rationnellement connexes ; l’hypothèse de connexité rationnelle par chaînes est bien plus faible (par exemple le théorème 4.1 s’applique aussi à des variétés de type général). Cependant la question 1.11 étendue à toutes les variétés rationnellement connexes par chaînes admet une réponse négative⁹.

⁹Considérer l’hypersurface de Fermat $w^n + tx^n + t^2y^n + t^3z^n = 0$ sur le corps $k((t))$, où k est algébriquement clos de caractéristique $p > 2$, pour un n bien choisi (cf. [94]) ; si on tient à un corps (C_1) parfait, cet exemple s’adapte à la clôture parfaite de $k((t))$.

Nous dirons qu'une variété X est *de Fano* si elle est propre et lisse et que le faisceau inversible $\det(T_X)$ est ample. Toute variété de Fano est rationnellement connexe par chaînes d'après un théorème dû à Campana et, indépendamment, à Kollár, Miyaoka et Mori (cf. [65, V.2.13]). Le théorème 4.1 entraîne donc :

Corollaire 4.2 — *Toute variété de Fano sur un corps fini admet un point rationnel.*

L'énoncé du corollaire 4.2 avait été conjecturé par Lang et Manin [80, §2.6].

Kollár [64] a construit des exemples de variétés de Fano qui ne sont pas séparablement rationnellement connexes. Il est donc crucial, pour obtenir le corollaire 4.2, que le théorème 4.1 ne se limite pas aux variétés séparablement rationnellement connexes. En ce sens, le théorème 4.1 est à rapprocher du théorème de Chevalley–Warning (cf. §1.1), qui lui aussi s'applique à des variétés de Fano sans supposer qu'elles sont séparablement rationnellement connexes. (La question de savoir si toute hypersurface lisse $X \subset \mathbf{P}^n$ de degré $d \leq n$ est séparablement rationnellement connexe est une question ouverte (cf. [70, §4.5]). Dans le cas des hypersurfaces de Fermat elle a été étudiée par Conduché [29].)

Que le théorème 4.1 s'applique à toute variété rationnellement connexe par chaînes signifie en même temps qu'il n'est pas question pour le démontrer d'utiliser des techniques de déformation de courbes rationnelles comme aux deux chapitres précédents. La géométrie de X ne jouera qu'un rôle mineur dans la démonstration. Le théorème sera établi en étudiant la cohomologie de X (son « motif »).

4.2 Preuve du théorème 4.1

La preuve du théorème 4.1 s'effectue en plusieurs étapes indépendantes, que nous détaillons dans les paragraphes 4.2.1 à 4.2.3.

Dans tout le §4.2 nous désignons par k un corps fini de cardinal q et de caractéristique p , par \bar{k} une clôture algébrique de k , par \mathbf{F}_{q^n} le sous-corps de \bar{k} de cardinal q^n , par X une variété propre, lisse et géométriquement connexe sur k (non nécessairement rationnellement connexe par chaînes) et par F l'endomorphisme de Frobenius $F: X \rightarrow X$, c'est-à-dire le morphisme de variétés sur k qui induit l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et qui agit sur \mathcal{O}_X par $f \mapsto f^q$.

4.2.1 Formules de Lefschetz

Pour étudier les points rationnels des variétés algébriques sur le corps fini k , on définit, suivant Weil, la *fonction zêta* de X par la formule

$$\zeta_X(t) = \exp \left(\sum_{s=1}^{\infty} N_s \frac{t^s}{s} \right)$$

où $N_s = \text{Card}(X(\mathbf{F}_{q^s}))$. C'est une série formelle en t , à coefficients rationnels (et même entiers).

En formulant ses célèbres « conjectures de Weil » (aujourd'hui démontrées grâce, notamment, aux travaux de Dwork, Grothendieck, Artin et Deligne), Weil donnait à la fonction zêta une interprétation cohomologique. Son intuition était la suivante. Comme le corps k est fini, l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X admet une définition purement géométrique : c'est l'ensemble des points de $X(\bar{k})$ fixes par F . Ainsi, pour étudier les points rationnels on peut oublier le corps de base et raisonner seulement sur la variété $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$ munie de l'endomorphisme $F \otimes_k \bar{k}$ (que l'on notera encore F). Les points fixes de F agissant sur \bar{X} sont les points d'intersection, dans $\bar{X} \times \bar{X}$, de la diagonale $\Delta \subset \bar{X} \times \bar{X}$ avec le graphe $\Gamma \subset \bar{X} \times \bar{X}$ de F . Or ces deux sous-variétés de $\bar{X} \times \bar{X}$ se rencontrent transversalement en tout point d'intersection (car la différentielle de F est nulle) ; ainsi N_s n'est autre que le nombre d'intersection de Δ avec Γ . Dans la situation classique de la géométrie différentielle, le calcul du nombre d'intersection de deux sous-variétés de codimensions complémentaires d'une variété donnée est bien connu pour être un problème de nature cohomologique. Poursuivant ce raisonnement jusqu'à son terme, Weil s'était rendu compte que l'existence d'une bonne théorie cohomologique pour les variétés sur k (qui est un corps de caractéristique $p > 0$) impliquerait formellement, pour la fonction zêta, des propriétés admirables (dont on trouvera la liste dans [100]).

À l'heure actuelle on dispose de deux bonnes théories cohomologiques pour les variétés définies sur un corps k de caractéristique p : la cohomologie (étale) ℓ -adique (dépendant du choix d'un nombre premier $\ell \neq p$), à coefficients dans \mathbf{Q}_ℓ , et la cohomologie rigide, à coefficients dans le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt de k . Dans le reste de ce chapitre on pourrait travailler avec l'une quelconque de ces deux théories. Le choix n'a aucune incidence sur la preuve, ce qui reflète son caractère « motivique ». Comme l'article originel [40] et le rapport [16] sont rédigés avec la cohomologie rigide, nous emploierons ci-dessous la cohomologie ℓ -adique. Fixons donc une fois pour toutes un nombre premier ℓ différent de p .

Pour $i \geq 0$, Grothendieck a défini le groupe de cohomologie ℓ -adique $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$. C'est un \mathbf{Q}_ℓ -espace vectoriel de dimension finie, nul si $i > 2 \dim(X)$. Le morphisme de Frobenius $F: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ induit un endomorphisme de $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$; on le note encore F . Voici maintenant comment la fonction zêta de X s'exprime en termes de la cohomologie ℓ -adique de X . Notons $P_i(t) = \det(1 - tF \mid H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)) \in \mathbf{Q}_\ell[t]$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ induit par F . D'après Grothendieck et Artin, on a alors l'égalité

$$\zeta_X(t) = \frac{P_1(t)P_3(t) \cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t) \cdots P_{2n}(t)} \quad (5)$$

dans le corps $\mathbf{Q}_\ell((t))$, où $n = \dim(X)$. En particulier $\zeta_X(t)$ est une fraction

rationnelle et l'égalité ci-dessus vaut dans $\mathbf{Q}_\ell(t)$. (En fait, d'après Deligne, les polynômes $P_i(t)$ appartiennent à $\mathbf{Q}(t)$ et l'égalité ci-dessus vaut donc dans $\mathbf{Q}((t))$, mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat.)

En prenant dans (5) les dérivées logarithmiques puis en évaluant en $t = 0$, on obtient la formule (équivalente)

$$\text{Card } X(k) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{Tr}(F | H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)), \quad (6)$$

appelée *formule des traces de Lefschetz*. Comme $H^0(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell) = \mathbf{Q}_\ell$ (avec action triviale de F), le terme $i = 0$ de la somme ci-dessus est égal à 1. Par conséquent :

Théorème 4.3 (Grothendieck, Artin) — *Supposons que pour tout $i > 0$, les valeurs propres de l'endomorphisme de $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ induit par F soient des entiers algébriques divisibles par q (i.e. appartiennent à $q\bar{\mathbf{Z}}$, où $\bar{\mathbf{Z}}$ désigne la fermeture intégrale de \mathbf{Z} dans une clôture algébrique de \mathbf{Q}_ℓ). Alors $\text{Card } X(k) \equiv 1 \pmod{q}$ et en particulier $X(k) \neq \emptyset$.*

Que les valeurs propres de Frobenius agissant sur $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ soient toujours des entiers algébriques (divisibles ou non) était l'une des propriétés attendues par Weil de toute bonne théorie cohomologique sur les corps finis. Pour la cohomologie ℓ -adique elle fut établie par Deligne [34].

Pour démontrer le théorème 4.1, nous prouverons que l'hypothèse du théorème 4.3 est satisfaite si X est rationnellement connexe par chaînes.

Remarques — (i) Que les valeurs propres de F soient divisibles par q est une condition non seulement suffisante pour que $\text{Card } X(k) \equiv 1 \pmod{q}$, mais aussi presque nécessaire. Plus précisément, comme les hypothèses du théorème 4.1 sont stables par extension finie des scalaires (étant même de nature géométrique), si l'on prouve que $\text{Card } X(k) \equiv 1 \pmod{q}$ alors on aura même prouvé que $N_s \equiv 1 \pmod{q^s}$ pour tout $s \geq 1$. Or cette dernière condition est équivalente à ce que les valeurs propres de F sur $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ soient divisibles par q pour tout $i > 0$. Ceci résulte de l'égalité

$$N_s = 1 + \sum_{i \geq 1} (-1)^i \text{Tr}(F^s | H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)) \quad (7)$$

(c'est-à-dire la formule (6) appliquée à la variété $X \otimes_k \mathbf{F}_{q^s}$ sur \mathbf{F}_{q^s}) et du lemme de Fatou (cf. [57, Lemma 8.3]), compte tenu de l'absence de simplifications dans la somme (7). (Par « absence de simplifications » on entend que les endomorphismes de $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ et de $H^j(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ induits par F n'ont aucune valeur propre en commun si $i \neq j$. Il s'agit là d'un corollaire de l'hypothèse de Riemann pour X , conjecturée par Weil et démontrée par Deligne. Nous ne nous servons pas de l'hypothèse de Riemann pour X dans la preuve du théorème 4.1.)

(ii) Il existe une autre formule de Lefschetz *a priori* plus prometteuse pour établir le théorème 4.1 : la *formule de Woods Hole*. C'est un avatar de la formule de Lefschetz en cohomologie cristalline mais son énoncé est élémentaire : elle ne fait intervenir que des groupes de cohomologie cohérente. Il s'agit de l'égalité

$$\text{Card } X(k) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{Tr}(F | H^i(X, \mathcal{O}_X)),$$

qui est une égalité entre éléments de k (puisque $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ est un k -espace vectoriel) et qui ne renseigne donc sur l'entier $\text{Card } X(k)$ que modulo p (et non modulo q). Voir [51, 6.13.2] pour une démonstration.

Il résulte de la formule de Woods Hole que l'on a $X(k) \neq \emptyset$ dès que $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $i > 0$. (Plus généralement, l'inégalité entre polygone de Newton et polygone de Hodge (cf. [57, 4.4(c)]) signifie que les valeurs propres de F agissant sur $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ sont divisibles par des puissances de q d'autant plus élevées que davantage de groupes de cohomologie de Hodge de X s'annulent. Ceci permet d'ailleurs d'obtenir une congruence modulo q (et non uniquement modulo p) à partir de l'hypothèse que les groupes $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ s'annulent pour $i > 0$.)

Il est bien vrai que $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $i > 0$ si X est une variété propre, lisse et rationnellement connexe sur un corps de caractéristique 0 (cf. [16, p. 16]). Malheureusement, sans hypothèse sur la caractéristique, il existe des variétés X propres, lisses et rationnellement connexes par chaînes (même unirationnelles) telles que $H^i(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ (cf. [16, p. 17]). C'est une question ouverte de savoir s'il existe de tels exemples parmi les variétés de Fano.

4.2.2 Valeurs propres de Frobenius et coniveau

Le but de ce paragraphe est de relier la condition de divisibilité sur les valeurs propres de Frobenius (l'hypothèse du théorème 4.3) à une condition de « coniveau » sur la cohomologie de X . Fixons un entier $i \geq 0$. La *filtration par le coniveau* sur $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ est la filtration décroissante de $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ définie par la formule

$$N^r H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell) = \bigcup \text{Ker} (H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(\bar{X} \setminus \bar{Z}, \mathbf{Q}_\ell))$$

où la réunion porte sur les fermés $Z \subset X$ de codimension $\geq r$. Elle fut introduite par Grothendieck [49, III, §10] (cf. [50, p. 300] pour un erratum ; cf. aussi [57, p. 118]). Bien entendu les sous-espaces $N^r H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell) \subset H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ sont stables par F .

Théorème 4.4 (Deligne, Esnault, Katz) — *Pour tout $i \geq 0$ et tout $r \geq 0$, les valeurs propres de l'endomorphisme de $N^r H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ induit par F sont des entiers algébriques divisibles par q^r .*

Démonstration du théorème 4.4 — Le théorème 4.4 repose sur un dévissage et sur le théorème d'intégralité de Deligne [34]. Celui-ci affirme que si U est une variété lisse et séparée sur k (non nécessairement propre), alors pour tout i , les valeurs propres de l'endomorphisme de $H^i(\bar{U}, \mathbf{Q}_\ell)$ induit par F sont des entiers algébriques¹⁰.

Le formalisme de la cohomologie ℓ -adique comprend une notion de cohomologie à supports : si U est une variété sur k et si $A \subset U$ est un fermé de U , Grothendieck a défini les groupes $H_{\bar{A}}^i(\bar{U}, \mathbf{Q}_\ell)$ de cohomologie de \bar{U} à supports dans \bar{A} . (En topologie on parlerait de la cohomologie de \bar{U} relative à $\bar{U} \setminus \bar{A}$.) Ce sont des \mathbf{Q}_ℓ -espaces vectoriels de dimension finie. Ils s'insèrent dans une suite exacte longue du triple

$$H_{\bar{B}}^i(\bar{U}, \mathbf{Q}_\ell) \longrightarrow H_{\bar{A}}^i(\bar{U}, \mathbf{Q}_\ell) \longrightarrow H_{\bar{A} \setminus \bar{B}}^i(\bar{U} \setminus \bar{B}, \mathbf{Q}_\ell) \longrightarrow H_{\bar{B}}^{i+1}(\bar{U}, \mathbf{Q}_\ell) \longrightarrow \dots \quad (8)$$

chaque fois que l'on a des fermés $B \subset A \subset U$. En outre, il y a une flèche d'oubli de support $H_{\bar{A}}^i(\bar{U}, \mathbf{Q}_\ell) \rightarrow H^i(\bar{U}, \mathbf{Q}_\ell)$, qui est un isomorphisme si $A = U$. Tous ces espaces sont munis d'un endomorphisme induit par l'endomorphisme de Frobenius de U ; la suite (8) commute aux Frobenius.

La suite exacte longue de la paire (*i.e.* la suite (8) appliquée à $U = X$, $A = X$, $B = Z$) montre que le sous-espace $N^r H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell) \subset H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ est engendré par les images des flèches d'oubli de support $H_{\bar{Z}}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell) \rightarrow H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ pour $Z \subset X$ de codimension $\geq r$. Il suffit donc, pour établir le théorème, de vérifier que les valeurs propres de F agissant sur $H_{\bar{Z}}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ sont des entiers algébriques divisibles par q^r si $Z \subset X$ est un fermé de codimension $\geq r$.

Si $Z \subset X$ est lisse sur k et purement de codimension r , le théorème de pureté (analogue au théorème d'isomorphisme de Thom pour les variétés topologiques orientées) affirme que la cohomologie de \bar{X} à supports dans \bar{Z} en degré i s'identifie à la cohomologie de \bar{Z} en degré $i - 2r$, à ceci près que l'on doit « tordre » le Frobenius pour obtenir cette identification. Plus précisément, l'espace vectoriel $H_{\bar{Z}}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ muni de l'endomorphisme F est isomorphe (non canoniquement) à l'espace vectoriel $H^{i-2r}(\bar{Z}, \mathbf{Q}_\ell)$ muni de l'endomorphisme $q^r F$. Il s'ensuit que les valeurs propres de l'endomorphisme de $H_{\bar{Z}}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ induit par F sont des entiers algébriques divisibles par q^r .

Si $Z \subset X$ n'est pas lisse, posons $Z_0 = Z$ et notons $Z_1 \subset Z_0$ le lieu singulier de Z_0 , puis $Z_2 \subset Z_1$ le lieu singulier de Z_1 , etc. Compte tenu des suites exactes

$$H_{\bar{Z}_{j+1}}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell) \longrightarrow H_{\bar{Z}_j}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell) \longrightarrow H_{\bar{Z}_{j+1} \setminus \bar{Z}_j}^i(\bar{X} \setminus \bar{Z}_j, \mathbf{Q}_\ell)$$

et de la vacuité de Z_j pour j assez grand, il suffit pour conclure de montrer que les valeurs propres de F agissant sur $H_{\bar{Z}_{j+1} \setminus \bar{Z}_j}^i(\bar{X} \setminus \bar{Z}_j, \mathbf{Q}_\ell)$ sont des entiers

¹⁰En toute rigueur, cette affirmation n'apparaît pas explicitement dans [34] mais elle résulte tout de suite de [34, Corollaire 5.3.3 (iii)] combiné avec la dualité de Poincaré.

algébriques divisibles par q^r . Mais ceci résulte, comme précédemment, de la pureté et du théorème d'intégralité de Deligne (appliqué aux composantes connexes de $\bar{Z}_{j+1} \setminus \bar{Z}_j$, qui sont bien lisses ; noter qu'ici il est important de disposer du théorème d'intégralité de Deligne pour des variétés lisses qui ne sont pas propres). \square

En combinant les théorèmes 4.3 et 4.4 on obtient :

Théorème 4.5 — *Supposons que pour tout $i > 0$ on ait $N^1 H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell) = H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$. Alors $\text{Card } X(k) \equiv 1 \pmod{q}$ et en particulier $X(k) \neq \emptyset$.*

4.2.3 Du groupe de Chow au coniveau

Un argument connu sous le nom de *décomposition de la diagonale* et utilisé par Bloch [10] pour étendre en caractéristique arbitraire un théorème de Mumford sur le groupe de Chow des 0-cycles de certaines surfaces complexes permet d'établir :

Lemme 4.6 — *Soit K une clôture algébrique de $k(X)$. Si $\text{CH}_0(X \otimes_k K) = \mathbf{Z}$ alors $N^1 H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell) = H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ pour tout $i > 0$.*

Remarque — L'hypothèse du lemme équivaut à ce que la flèche degré induise un isomorphisme $\text{CH}_0(X \otimes_k K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$, d'après un théorème de Roitman complété par Milne (cf. [16, Remarque 6.5]).

Démonstration — Quitte à remplacer k par une extension finie, on peut supposer que $X(k) \neq \emptyset$. Fixons $x \in X(k)$. Notons $\Delta \subset X \times X$ la diagonale de X et définissons un cycle algébrique z de dimension $\dim(X)$ sur $X \times X$ par la formule $z = \Delta - (x \times X)$. La restriction z' de z à $X \times \eta$, où η désigne le point générique de X , est un 0-cycle de degré 0 sur la $k(X)$ -variété $X \times \eta = X \otimes_k k(X)$. D'après l'hypothèse, sa classe dans $\text{CH}_0(X \otimes_k k(X))$ s'annule dans $\text{CH}_0(X \otimes_k K)$ et donc dans $\text{CH}_0(X \otimes_k L)$ pour une certaine extension finie $L/k(X)$. Compte tenu de l'existence d'une application norme $\text{CH}_0(X \otimes_k L) \rightarrow \text{CH}_0(X \otimes_k k(X))$ dont la composée avec la flèche de restriction $\text{CH}_0(X \otimes_k k(X)) \rightarrow \text{CH}_0(X \otimes_k L)$ est égale à la multiplication par $[L : k(X)]$ sur $\text{CH}_0(X \otimes_k k(X))$, il en résulte qu'un multiple non nul de z' est rationnellement équivalent à 0 sur $X \otimes_k k(X)$. D'où l'existence d'un entier $N \geq 1$ et d'un ouvert dense $U \subset X$ tels que Nz soit rationnellement équivalent à 0 sur $X \times U$. On a alors, dans $\text{CH}_{\dim(X)}(X \times X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, la relation

$$[\Delta] = [x \times X] + \frac{1}{N}[w] \tag{9}$$

où w est un cycle sur $X \times X$ dont le support ne rencontre pas $X \times \eta$: c'est la décomposition de la diagonale.

Le groupe $\mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ agit sur $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ par $c(\alpha) = q_*(\mathrm{cl}(c) \smile p^*\alpha)$ pour $c \in \mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et $\alpha \in H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$, où $p, q: X \times X \rightarrow X$ sont les deux projections, où \smile désigne le cup-produit et où $\mathrm{cl}(c) \in H^{2\dim(X)}(\overline{X} \times \overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ est la classe de cohomologie du cycle c . Le cycle Δ agit sur $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ par l'identité; le cycle $x \times X$ agit sur $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ par 0 pour $i > 0$ puisque

$$\mathrm{cl}(x \times X) \smile p^*\alpha = p^*\mathrm{cl}(x) \smile p^*\alpha = p^*(\mathrm{cl}(x) \smile \alpha) \in p^*H^{2\dim(X)+i}(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$$

et $H^{2\dim(X)+i}(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell) = 0$ pour $i > 0$; enfin, le cycle w agit sur $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ par un endomorphisme dont l'image est incluse dans $N^1H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$. La décomposition (9) montre donc que l'identité de $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ est à valeurs dans $N^1H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ pour tout $i > 0$. \square

En emboîtant le théorème 4.5 avec le lemme 4.6 on obtient :

Théorème 4.7 — *Soit K une clôture algébrique de $k(X)$. Si $\mathrm{CH}_0(X \otimes_k K) = \mathbf{Z}$ alors $\mathrm{Card} X(k) \equiv 1 \pmod{q}$ et en particulier $X(k) \neq \emptyset$.*

Une variété rationnellement connexe par chaînes vérifie de façon évidente l'hypothèse du théorème 4.7 puisque tous les points rationnels de $X \otimes_k K$ sont même \mathbf{R} -équivalents. Le théorème 4.1 est donc prouvé.

4.3 Au-delà du théorème 4.1

Soient k un corps fini de cardinal q et X une variété projective sur k .

Le théorème 4.7 affirme que si X est lisse et rationnellement connexe par chaînes, alors $\mathrm{Card} X(k) \equiv 1 \pmod{q}$.

Le théorème de Chevalley–Warning amélioré par Ax [5, p. 260] affirme que si X est l'intersection d'hypersurfaces de \mathbf{P}_k^n de degrés d_1, \dots, d_r avec $\sum_{i=1}^r d_i \leq n$, alors $\mathrm{Card} X(k) \equiv 1 \pmod{q}$.

Dans l'énoncé (et dans la preuve) du théorème de Chevalley–Warning (et de l'amélioration due à Ax), la lissité de X ne joue aucun rôle. Le théorème 4.7 n'est donc pas optimal et il est naturel de chercher à généraliser sa démonstration de façon à retrouver les résultats de Chevalley–Warning et d'Ax.

Malheureusement, si X n'est pas lisse, la preuve présentée au §4.1 s'effondre : d'une part la décomposition de la diagonale (9) ne fournit plus l'information cohomologique du lemme 4.6, faute de disposer d'une application classe de cycle $\mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times X) \rightarrow H^{2\dim(X)}(\overline{X} \times \overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$; d'autre part, du théorème d'intégralité de Deligne (qui reste vrai sans hypothèse de lissité, cf. [9, 1.2]) il n'est plus possible de déduire la divisibilité des valeurs propres de Frobenius agissant sur $N^1H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$,

faute de pouvoir appliquer le théorème de pureté (et de fait, le théorème 4.4 est faux pour les variétés singulières ; cf. [36, 0.5]).

En outre, pour X singulière, il peut y avoir des « simplifications » dans la formule des traces de Lefschetz (cf. remarque (i) après le théorème 4.3), de sorte que la congruence $\text{Card } X(k) \equiv 1 \pmod{q}$ pourrait être satisfaite sans que les valeurs propres de Frobenius agissant sur $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ ne soient divisibles par q pour $i > 0$. Cependant, dans la situation considérée par Chevalley, Warning et Ax, la théorie des motifs fournit des indications¹¹ qui permettent de s'attendre à ce que les valeurs propres de Frobenius agissant sur $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ soient quand même divisibles par q pour tout $i > 0$ (cela a d'ailleurs été vérifié *a posteriori*, c'est-à-dire en se servant des résultats de Chevalley–Warning et d'Ax, par Esnault et Katz [42]). Bloch, Esnault et Levine [11] ont ainsi réussi à adapter la preuve du théorème 4.7, en établissant une variante de la décomposition de la diagonale, pour retrouver *via* le théorème 4.3 la congruence $\text{Card } X(k) \equiv 1 \pmod{q}$ si X est une hypersurface de \mathbf{P}_k^n de degré d avec $d \leq n$. Mais leur résultat ne couvre pas le cas plus général des intersections d'hypersurfaces de degrés d_1, \dots, d_r avec $\sum_{i=1}^r d_i \leq n$ et ne permet pas non plus de retrouver les énoncés plus précis d'Ax et Katz [63] donnant des congruences modulo des puissances supérieures de q .

Plutôt que d'essayer d'adapter la méthode de preuve du théorème 4.1, on peut aussi chercher un énoncé qui généralise à la fois le théorème 4.1 et le théorème de Chevalley–Warning. Le premier espoir venant à l'esprit serait que toute variété projective rationnellement connexe par chaînes (non nécessairement lisse) sur un corps fini admette un point rationnel. En effet les intersections dans \mathbf{P}_k^n d'hypersurfaces de degrés d_1, \dots, d_r avec $\sum_{i=1}^r d_i \leq n$ contiennent toutes une sous-variété rationnellement connexe par chaînes (puisque la connexité rationnelle par chaînes est préservée par spécialisation équidimensionnelle (cf. [65, IV.3.5.2]) et que l'intersection d'hypersurfaces génériques de \mathbf{P}_k^n de degrés d_1, \dots, d_r avec $\sum_{i=1}^r d_i \leq n$ est rationnellement connexe par chaînes, étant lisse et de Fano). Mais Kollár a construit un exemple montrant que cet espoir est trop optimiste (cf. [44, Remark 3.4] ; il s'agit d'une variété normale). Fakhruddin et Rajan [44] se sont ensuite rendu compte que l'existence d'une déformation lisse et rationnellement connexe par chaînes de X suffit à assurer que $X(k) \neq \emptyset$. Plus précisément, ils ont établi le théorème suivant, qui généralise à la fois le théorème 4.1 et le théorème de Chevalley–Warning revu par Ax :

¹¹Il existe une profonde analogie, due à Grothendieck et Deligne, entre la divisibilité par q^κ des valeurs propres de Frobenius agissant sur $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ (lorsque k est fini) et la trivialité des κ premiers gradués de la filtration de Hodge sur $H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ (lorsque $k = \mathbf{C}$). (Au moins si X est lisse, ces deux propriétés devraient rendre compte de la « divisibilité » du motif effectif $H^i(X)$ par le motif de Tate $\mathbf{Q}(-\kappa)$.) Or il est bien vrai que si X est une intersection d'hypersurfaces de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$ de degrés d_1, \dots, d_r avec $\sum_{i=1}^r d_i \leq n$, le premier gradué de la filtration de Hodge sur $H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ est nul pour $i > 0$ (cf. [43]). Pour plus de détails on pourra consulter [35] ou [9, §1].

Théorème 4.8 (Fakhruddin–Rajan [44, Corollary 1.2]) — *Soit k un corps fini de cardinal q . Soit $f: Y \rightarrow S$ un morphisme propre et surjectif entre variétés irréductibles et lisses sur k . Notons Z la fibre générique de f et K une clôture algébrique de $k(Y)$. Si $\mathrm{CH}_0(Z \otimes_{k(S)} K) = \mathbf{Z}$ alors $\mathrm{Card} f^{-1}(s)(k) \equiv 1 \pmod{q}$ pour tout $s \in S(k)$.*

Le théorème 4.8 est à comparer avec le théorème de Hogadi et Xu (cf. §1.1.3) : ces deux énoncés affirment, sous certaines hypothèses, qu’une variété singulière obtenue en faisant dégénérer une variété rationnellement connexe contient une sous-variété géométriquement irréductible (et même une sous-variété géométriquement irréductible birationnellement équivalente à une variété rationnellement connexe).

Esnault a étendu le théorème 4.8 à une situation d’inégale caractéristique :

Théorème 4.9 (Esnault [41]) — *Soit R un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel fini. Notons K le corps des fractions de R et k son corps résiduel. Soit Y une variété projective, lisse et géométriquement connexe sur K admettant un modèle régulier \mathcal{Y} projectif sur R . Notons \bar{Y} la variété déduite de Y par extension des scalaires de K à une clôture algébrique de K et fixons un nombre premier ℓ inversible dans K . Si $N^1 H^i(\bar{Y}, \mathbf{Q}_\ell) = H^i(\bar{Y}, \mathbf{Q}_\ell)$ pour tout $i > 0$, alors $\mathrm{Card} \mathcal{Y}(k) \equiv 1 \pmod{q}$, où q désigne le cardinal de k .*

Même lorsque R est d’égale caractéristique, le théorème 4.9 représente une amélioration par rapport au théorème 4.8 (du moins pour $\dim(S) = 1$) puisque l’hypothèse sur le groupe de Chow de la fibre générique géométrique est remplacée par l’hypothèse de coniveau sur sa cohomologie. Les deux hypothèses devraient être équivalentes (ceci résulterait d’une généralisation de la conjecture de Bloch, cf. [59, §3]) mais l’hypothèse de coniveau est parfois plus facile à vérifier que l’hypothèse sur le groupe de Chow (par exemple, si K est de caractéristique 0, elle est satisfaite pour toute surface Y telle que $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ et $H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$; cf. [41, §1]).

Signalons enfin que Blickle et Esnault [8] ont étendu le théorème 4.7 à une classe de variétés non nécessairement lisses (mais dont les singularités sont « Witt-rationnelles », cf. [8, Définition 2.3]).

Dans une toute autre direction, Kahn [60] a donné une nouvelle preuve des théorèmes 4.1 et 4.7, à l’aide de la notion de motif birationnel (due à Kahn et Sujatha). Il établit notamment :

Théorème 4.10 (Kahn [60, Corollary 9.6]) — *Soient k un corps fini de cardinal q et X, Y des variétés projectives et lisses sur k . Supposons qu’il existe des variétés projectives lisses rationnellement connexes par chaînes X' et Y' sur k et des applications rationnelles dominantes $X \times X' \dashrightarrow Y$ et $Y \times Y' \dashrightarrow X$. Alors $\mathrm{Card} X(k) \equiv \mathrm{Card} Y(k) \pmod{q}$.*

En prenant $X' = Y = \text{Spec}(k)$ et $Y' = X$, on retrouve le théorème 4.1. En prenant $X' = Y' = \text{Spec}(k)$, on retrouve, au moins dans le cas projectif, un théorème d'Ekedahl revu par Chambert-Loir (cf. [16]). Nous renvoyons à [60] pour d'autres énoncés de ce type.

Références

- [1] Y. Alemu, *On zeros of forms over local fields*, Acta Arith. **45** (1985), no. 2, 163–171.
- [2] C. Araujo et J. Kollár, *Rational curves on varieties*, Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, Berlin, 2003, 13–68.
- [3] G. I. Arkhipov et A. A. Karatsuba, *On local representation of zero by a form*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **45** (1981), no. 5, 948–961 (en russe), traduit dans Math. USSR Izv. **19** (1982), no. 2, 231–240.
- [4] E. Artin, *The collected papers of Emil Artin*, edited by Serge Lang and John T. Tate, Addison–Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1965.
- [5] J. Ax, *Zeros of polynomials over finite fields*, Amer. J. Math. **86** (1964), 255–261.
- [6] ———, *The elementary theory of finite fields*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), no. 2, 239–271.
- [7] J. Ax et S. Kochen, *Diophantine problems over local fields I*, Amer. J. Math. **87** (1965), 605–630.
- [8] M. Blickle et H. Esnault, *Rational singularities and rational points*, Pure Appl. Math. Q. **4** (2008), no. 3, 729–741.
- [9] M. Blickle, H. Esnault et K. Rülling, *Characteristic 0 and p analogies, and some motivic cohomology*, Global aspects of complex geometry, Springer, Berlin, 2006, 59–82.
- [10] S. Bloch, *On an argument of Mumford in the theory of algebraic cycles*, Journées de Géométrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, 217–221.
- [11] S. Bloch, H. Esnault et M. Levine, *Decomposition of the diagonal and eigenvalues of Frobenius for Fano hypersurfaces*, Amer. J. Math. **127** (2005), no. 1, 193–207.
- [12] F. A. Bogomolov et Yu. Tschinkel, *On the density of rational points on elliptic fibrations*, J. reine angew. Math. **511** (1999), 87–93.

- [13] L. Bonavero, *Variétés rationnellement connexes sur un corps algébriquement clos*, notes pour le mini-cours donné à la session SMF États de la Recherche à Strasbourg en 2008.
- [14] M. Borovoi, J-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *The elementary obstruction and homogeneous spaces*, Duke Math. J. **141** (2008), no. 2, 321–364.
- [15] F. Campana, *Orbifolds, special varieties and classification theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 3, 499–630.
- [16] A. Chambert-Loir, *Points rationnels et groupes fondamentaux : applications de la cohomologie p -adique (d’après P. Berthelot, T. Ekedahl, H. Esnault, etc.)*, Astérisque (2004), no. 294, viii, 125–146, Séminaire Bourbaki 2002/2003, Exp. no. 914.
- [17] C. Chevalley, *Démonstration d’une hypothèse de M. Artin*, Hamb. Abh. **11** (1935).
- [18] M. D. Choi, Z. D. Dai, T. Y. Lam et B. Reznick, *The Pythagoras number of some affine algebras and local algebras*, J. reine angew. Math. **336** (1982), 45–82.
- [19] J-L. Colliot-Thélène, *Hilbert’s Theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. math. **71** (1983), no. 1, 1–20.
- [20] ———, *Arithmétique des variétés rationnelles et problèmes birationnels*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1 (Berkeley, Calif., 1986) (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, 641–653.
- [21] ———, *L’arithmétique des variétés rationnelles*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **1** (1992), no. 3, 295–336.
- [22] ———, *L’arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles*, J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995), no. 1, 51–73.
- [23] ———, *Rational connectedness and Galois covers of the projective line*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 1, 359–373.
- [24] ———, *Points rationnels sur les fibrations*, Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, Berlin, 2003, 171–221.
- [25] ———, *Un théorème de finitude pour le groupe de Chow des zéro-cycles d’un groupe algébrique linéaire sur un corps p -adique*, Invent. math. **159** (2005), no. 3, 589–606.
- [26] ———, *Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences*, cours au CIME (septembre 2007), à paraître.
- [27] ———, *Fibre spéciale des hypersurfaces de petit degré*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (2008), no. 1–2, 63–65.

- [28] J-L. Colliot-Thélène et J-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles II*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, 375–492.
- [29] D. Conduché, *Courbes rationnelles et hypersurfaces de l'espace projectif*, thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2006.
- [30] A. J. de Jong et J. Starr, *Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point*, Amer. J. Math. **125** (2003), no. 3, 567–580.
- [31] ———, *Low degree complete intersections are simply rationally connected*, manuscrit.
- [32] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [33] ———, *Variétés rationnellement connexes (d'après T. Graber, J. Harris, J. Starr et A. J. de Jong)*, Astérisque (2003), no. 290, Séminaire Bourbaki 2001/2002, Exp. no. 905.
- [34] P. Deligne, *Théorèmes d'intégralité*, appendice à l'exposé XXI, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 II), Lecture Notes in Mathematics, vol. 340, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [35] P. Deligne et A. Dimca, *Filtrations de Hodge et par l'ordre du pôle pour les hypersurfaces singulières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **23** (1990), no. 4, 645–656.
- [36] P. Deligne et H. Esnault, appendice à [41].
- [37] V. B. Demjanov, *On cubic forms in discretely normed fields*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **74** (1950), 889–891.
- [38] J. Denef, M. Jarden et D. J. Lewis, *On Ax-fields which are C_i* , Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **34** (1983), no. 133, 21–36.
- [39] A. Ducros, *L'obstruction de réciprocité à l'existence de points rationnels pour certaines variétés sur le corps des fonctions d'une courbe réelle*, J. reine angew. Math. **504** (1998), 73–114.
- [40] H. Esnault, *Varieties over a finite field with trivial Chow group of 0-cycles have a rational point*, Invent. math. **151** (2003), no. 1, 187–191.
- [41] ———, *Deligne's integrality theorem in unequal characteristic and rational points over finite fields*, Ann. of Math. (2) **164** (2006), no. 2, 715–730.
- [42] H. Esnault et N. M. Katz, *Cohomological divisibility and point count divisibility*, Compos. Math. **141** (2005), no. 1, 93–100.
- [43] H. Esnault, M. V. Nori et V. Srinivas, *Hodge type of projective varieties of low degree*, Math. Ann. **293** (1992), no. 1, 1–6.

- [44] N. Fakhruddin et C. S. Rajan, *Congruences for rational points on varieties over finite fields*, Math. Ann. **333** (2005), no. 4, 797–809.
- [45] M. D. Fried et M. Jarden, *Field arithmetic*, troisième éd., Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [46] T. Graber, J. Harris et J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.
- [47] M. J. Greenberg, *Rational points in Henselian discrete valuation rings*, Publ. Math. IHES **31** (1966), 59–64.
- [48] ———, *Lectures on forms in many variables*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- [49] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I, II, III*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, 46–66.
- [50] ———, *Hodge’s general conjecture is false for trivial reasons*, Topology **8** (1969), 299–303.
- [51] ———, *Formule de Lefschetz*, exposé III, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5), Lecture Notes in Mathematics, vol. 589, Springer-Verlag, Berlin, 1977 (rédigé par L. Illusie).
- [52] D. Harbater, *Galois coverings of the arithmetic line*, Number theory (New York, 1984–1985), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1240, Springer, Berlin, 1987, 165–195.
- [53] J. Harris, *Algebraic geometry : a first course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [54] H. Hasse, *Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper*, J. reine angew. Math. **153** (1924), 113–130.
- [55] B. Hassett et Yu. Tschinkel, *Weak approximation for hypersurfaces of low degree*, à paraître dans les actes de l’AMS Summer Institute in Algebraic Geometry (Seattle, 2005).
- [56] A. Hogadi et C. Xu, *Degenerations of rationally connected varieties*, à paraître à Trans. Amer. Math. Soc.
- [57] L. Illusie, *Miscellany on traces in ℓ -adic cohomology : a survey*, Japan. J. Math. **1** (2006), no. 1, 107–136.
- [58] V. A. Iskovskih, *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 19–43 (en russe), traduit dans Math. USSR Izv. **14** (1980), no. 1.
- [59] U. Jannsen, *Motivic sheaves and filtrations on Chow groups*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 245–302.

- [60] B. Kahn, *Zeta functions and motives*, Pure Appl. Math. Q. **5** (2009), no. 1, 507–570.
- [61] K. Kato et T. Kuzumaki, *The dimension of fields and algebraic K-theory*, J. Number Theory **24** (1986), no. 2, 229–244.
- [62] K. Kato et S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 2, 241–275.
- [63] N. M. Katz, *On a theorem of Ax*, Amer. J. Math. **93** (1971), 485–499.
- [64] J. Kollár, *Nonrational hypersurfaces*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 1, 241–249.
- [65] ———, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [66] ———, *Rationally connected varieties over local fields*, Ann. of Math. (2) **150** (1999), no. 1, 357–367.
- [67] ———, *Rationally connected varieties and fundamental groups*, Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, Berlin, 2003, 69–92.
- [68] ———, *Specialization of zero cycles*, Publ. RIMS (Kyoto Univ.) **40** (2004), no. 3, 689–708.
- [69] ———, *A conjecture of Ax and degenerations of Fano varieties*, Israel J. Math. **162** (2007), 235–251.
- [70] ———, *Looking for rational curves on cubic hypersurfaces*, prépublication (notes par U. Derenthal).
- [71] J. Kollár et E. Szabó, *Rationally connected varieties over finite fields*, Duke Math. J. **120** (2003), no. 2, 251–267.
- [72] S. Lang, *On quasi algebraic closure*, Ann. of Math. (2) **55** (1952), no. 2, 373–390.
- [73] ———, *The theory of real places*, Ann. of Math. (2) **57** (1953), no. 2, 378–391.
- [74] S. Lang et A. Weil, *Number of points of varieties in finite fields*, Amer. J. Math. **76** (1954), 819–827.
- [75] D. B. Leep et C. C. Yeomans, *Quintic forms over p -adic fields*, J. Number Theory **57** (1996), no. 2, 231–241.
- [76] D. J. Lewis, *Cubic homogeneous polynomials over p -adic number fields*, Ann. of Math. (2) **56** (1952), no. 3, 473–478.
- [77] Yu. I. Manin, *Rational surfaces over perfect fields*, Publ. Math. IHES **30** (1966), 55–113.

- [78] ———, *Le groupe de Brauer–Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, 401–411.
- [79] ———, *Cubic forms*, seconde éd., North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986.
- [80] ———, *Notes on the arithmetic of Fano threefolds*, Compositio Math. **85** (1993), no. 1, 37–55.
- [81] L. Moret-Bailly, *Construction de revêtements de courbes pointées*, J. Algebra **240** (2001), no. 2, 505–534.
- [82] ———, *R-équivalence simultanée de toseurs : un complément à l'article de P. Gille*, J. Number Theory **91** (2001), no. 2, 293–296.
- [83] M. Nagata, *Note on a paper of Lang concerning quasi algebraic closure*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math. **30** (1957), 237–241.
- [84] E. Peyre, *Points de hauteur bornée et géométrie des variétés (d'après Yu. Manin et al.)*, Astérisque (2002), no. 282, 323–344, Séminaire Bourbaki 2000/2001, Exp. no. 891.
- [85] ———, *Obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible*, Astérisque (2005), no. 299, 165–193, Séminaire Bourbaki 2003/2004, Exp. no. 931.
- [86] V. P. Platonov et V. I. Yanchevskii, *Finite-dimensional division algebras*, Algebra IX, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 77, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 121–233.
- [87] F. Pop, *Embedding problems over large fields*, Ann. of Math. (2) **144** (1996), no. 1, 1–34.
- [88] A. Prestel et P. Roquette, *Formally p -adic fields*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1050, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [89] M. Rosenlicht, *Some rationality questions on algebraic groups*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **43** (1957), 25–50.
- [90] J-P. Serre, *Corps locaux*, troisième éd., Hermann, Paris, 1968.
- [91] ———, *Topics in Galois theory*, Research Notes in Mathematics, vol. 1, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.
- [92] ———, *Cohomologie galoisienne*, cinquième éd., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [93] ———, *Lie algebras and Lie groups*, 1964 lectures given at Harvard University, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1500, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

- [94] T. Shioda, *An example of unirational surfaces in characteristic p* , Math. Ann. **211** (1974), 233–236.
- [95] J. Starr, *Rational points of rationally connected and rationally simply connected varieties*, notes pour le mini-cours donné à la session SMF États de la Recherche à Strasbourg en 2008.
- [96] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Universal equivalence for cubic surfaces over finite and local fields*, Symposia Mathematica, Vol. XXIV (Sympos., INDAM, Rome, 1979), Academic Press, London, 1981, 111–143.
- [97] G. Terjanian, *Un contre-exemple à une conjecture d’Artin*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **262** (1966), A612.
- [98] ———, *Progrès récents dans l’étude de la propriété C_i des corps*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : 1966/67, Théorie des Nombres, Fasc. 2, Exp. 13, Secrétariat mathématique, Paris, 1966/1967, 7.
- [99] V. Voevodsky, *Cohomological theory of presheaves with transfers*, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, 87–137.
- [100] A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 497–508.
- [101] O. Wittenberg, *On Albanese torsors and the elementary obstruction*, Math. Ann. **340** (2008), no. 4, 805–838.
- [102] T. D. Wooley, *Diophantine problems in many variables : the role of additive number theory*, Topics in number theory (University Park, PA, 1997), Math. Appl., vol. 467, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 49–83.
- [103] V. I. Yanchevskii, *K-unirationality of conic bundles over large arithmetic fields*, Astérisque (1992), no. 209, 311–320, Journées arithmétiques de Genève, 9–13 septembre 1991.