# Variétés de courbure de Ricci presque minorée : inégalités géométriques optimales et stabilité des variétés extrémales

E. Aubry

# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Sylvain Gallot, qui, de la licence à la thèse, m'a fait progressivement découvrir la géométrie riemannienne (gràce a ses excellents cours) et le métier de chercheur. Je le remercie aussi chaleureusement pour ses nombreux conseils de rédaction sans lesquels cette thèse ne serait pas ce qu'elle est.

Jozeph Dodziuk, Hermann Karcher et Jacques Lafontaine m'ont fait l'honneur d'accepter d'écrire un rapport sur ma thèse, je les en remercie vivement.

De même, je remercie Yves Colin de Verdière, Étienne Ghys et, de nouveau, Jacques Lafontaine d'avoir accepté d'être membre de mon jury de thèse.

Je remercie les membres de l'équipe de géométrie riemannienne de Grenoble, pour l'ambiance à la fois studieuse et chaleureuse qui règne en séminaire et en groupe de travail. J'ai une pensée particulière pour les thésards, Laurent Chaumard (pour les nombreuses discussions, mathématiques ou non), Vincent Bayle (pour avoir supporté mes bavardages intempestifs pendant ces 3 années passées dans le même bureau et m'avoir appris l'art du tir au but), Guillemette Reviron, Constantin Vernicos et Richard Peyrerol.

Je remercie le personnel administratif de l'institut Fourier pour son efficacité et son dévouement, notamment Arlette qui m'a toujours simplifié les formalités administratives.

Je n'oublierai pas mes collègues thésards de l'institut Fourier, en commençant par Alice, la petite dernière du bureau 304 ; Vincent, Luc, Xavier, Stéphane, Bertrand, Alexis, Dan, l'équipe de foot de l'institut Fourier (sans oublier notre sélectionneur, Laurent Bonavero) ; et les nombreux autres thésards cotoyés au cours de ces 4 années passées à Grenoble.

Enfin, je tiens à remercier ma famille pour son soutien et sa patience durant ces 4 années de thèse, et la famille Besse (ma seconde famille) pour son soutien et son accueil chaleureux.

Pour finir, je ne saurais trouver des mots de remerciement assez forts pour toi, ma Flo qui, par l'amour dont tu m'entoures, tes encouragements permanents et ta confiance en moi m'a fourni les forces nécessaires à l'aboutissement de cette thèse.

# Introduction

La courbure de Ricci d'une variété riemannienne $(M^n, g)$ est le 2-tenseur symétrique défini sur $T_xM$ par la formule :

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_i \mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{e_i}, \mathrm{Y}, \mathrm{e_i}),$$

où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée quelconque de $(T_xM, g_x)$ et R désigne le 4-tenseur de courbure de la variété. On dit qu'une variété riemannienne est de courbure de Ricci minorée (resp. majorée) par un réel $k$ lorsque les deux formes quadratiques Ric et $g$ vérifient l'inégalité $\mathrm{Ric} \geq k.g$ (resp. $\mathrm{Ric} \leq k.g$), ce qui signifie que, en restriction à $T_xM$ les valeurs propres de la forme bilinéaire symétrique $\mathrm{Ric}(x)$ par rapport au produit scalaire $g_x$ sont minorées (resp. majorées) par $k$. Il est évident qu'une borne sur la courbure de Ricci est une hypothèse plus faible qu'une borne sur la courbure sectionnelle : par exemple, supposer la courbure sectionnelle négative ou nulle est une hypothèse très restrictive qui, par le théorème de Cartan-Hadamard, implique en particulier que la variété est revêtue par $\mathbb{R}^n$. Au contraire, des résultats de J. Lohkamp (voir [68]) prouvent que toute variété différentiable compacte (de dimension $n \geq 3$) admet un gros ensemble (en fait $C^0$-dense) de métriques de courbure de Ricci négative (ou plus généralement majorée par un nombre $k$ fixé). Si l'hypothèse de "courbure de Ricci majorée par $k$" ne donne aucune information sur la structure différentiable (et peu de renseignements sur la géométrie), en revanche, une hypothèse de "courbure de Ricci minorée par une constante $k$" donne des informations qui commencent à être à peu près comprises, surtout depuis les travaux récents de T. Colding et J. Cheeger [38], [39], [40], [29], [30], [31] et [32] qui ont fourni une version "en moyenne" du théorème de Toponogov complétant efficacement l'arsenal technique déjà disponible, composé essentiellement des théorèmes de comparaison sur le volume à la Bishop-Gromov (et de leurs extensions que sont, par exemple, l'inégalité de Heintze-Karcher, le contrôle du profil isopérimétrique à la Gromov-Bérard-Besson-Gallot), de la formule de Bochner et des estimées analytiques à la Abresch-Gromoll.

Dans cette thèse, on s'intéresse aux propriétés géométriques des variétés riemanniennes dont la courbure de Ricci vérifie certaines hypothèses intégrales qui s'avèrent beaucoup plus faibles que l'hypothèse de courbure de Ricci minorée. Plus précisément, on note $\underline{\mathrm{Ric}}(x)$ la plus petite valeur propre de la forme bilinéaire symétrique $\mathrm{Ric}(x)$ sur $T_xM$ relativement au produit scalaire $g_x$ et, pour tout réel $k$, on définit la fonction $\rho_k = \big(\underline{\mathrm{Ric}} - k(n{-}1)\big)^- = \max\big(0, -\underline{\mathrm{Ric}} + k(n{-}1)\big)$ ; les variétés riemanniennes étudiées dans cette thèse seront de dimension $n \geq 2$ et telles que la fonction $\rho_k$ admette une norme $L^p$ (pour au moins un $p > n/2$) locale ou globale plus petite qu'une constante fixée. On parlera alors de variétés de courbure de Ricci presque minorée par $k(n-1)$ (remarquez toutefois que cette appellation revêt plusieurs sens possibles qui seront précisés dans les énoncés ultérieurs de nos résultats).

Les premiers travaux sur les variétés complètes vérifiant ce type d'hypothèses furent réalisés par S. Gallot (notons que, dans le même temps, M. Anderson et L. Gao établissaient des résultats de convergence sur les variétés dont la courbure sectionnelle est majorée en norme $L^{\frac{n}{2}}$) ; en particulier, il a montré dans [50] que toute variété riemannienne complète de diamètre plus petit que $D$ et dont la courbure de Ricci vérifie l'inégalité $\left(\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M \rho_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \zeta(n,p,k,D)$ (où $p$ est un réel strictement plus grand que $\frac{n}{2}$, $k$ est un réel négatif et $\zeta(n,p,k,D)$ est une constante universelle strictement positive) voit certaines de ses constantes isopérimétriques minorées par des constantes universelles. S. Gallot en déduit alors des majorants universels des constantes de Sobolev de ces variétés et des majorations universelles du premier nombre de Betti des variétés de diamètre majoré par $D$ et de courbure de Ricci presque positive. L'étude de ce type d'hypothèse intégrale sur la courbure de Ricci a été poursuivie, plus récemment, par P. Petersen et G. Wei dans [81] et [82] lorsque la courbure de Ricci est presque supérieure à une constante négative ou nulle[1] et par P. Petersen et C. Sprouse dans [79] lorsque la courbure de Ricci est presque supérieure à une constante positive[2].

[1]Les auteurs démontrent dans [81] des minorations des volumes relatifs des boules géodésiques à la Bishop-Gromov : le volume relatif d'une boule géodésique de rayon $R_1$ dans une boule concentrique de rayon $R_2$ plus grand est minoré (à un facteur correctif près qui tend vers 1 lorsque la norme $L^p$ de $\rho_k$ sur la boule de rayon $R_2$ tend vers 0) par le rapport des volumes des boules de rayons $R_1$ et $R_2$ dans la variété riemannienne simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à $k$. Ce résultat permet essentiellement de démontrer la précompacité pour la distance de Gromov-Haudsorff de l'ensemble des variétés riemanniennes de diamètre majoré par $D$ et de courbure de Ricci presque minorée par $k$. P. Petersen et G. Wei ont ensuite démontré dans [82] un équivalent de la majoration de Cheng et Yau du gradient des fonctions harmoniques et un équivalent des estimées d'Abresch et Gromoll sur la fonction excès $x \mapsto d(x,x_0) + d(x,x_1) - d(x_0,x_1)$ d'un couple de points $x_0$ et $x_1$.

[2]les auteurs démontrent alors (modulo une erreur, dans leur démonstration de la majoration du diamètre des variétés de courbure de Ricci presque minorée par une constante $k(n-1) > 0$, dont il sera fait mention dans le chapitre **4** de cette thèse) que le résultat à la Bishop-Gromov de [81] s'étend aux variétés de courbure de Ricci presque minorée par $k(n-1) > 0$ ; cependant, sans la majoration du diamètre, leur méthode ne conclut que pour des boules de rayon inférieur à $(\frac{\pi}{\sqrt{k}} - \alpha)$, avec un terme correcteur qui tend vers l'infini lorsque $\alpha$ tend vers zéro). Les auteurs démontrent aussi (avec la même restriction) que leur méthode permet de généraliser l'inégalité de Heintze-Karcher sur le volume des voisinages tubulaires des hypersurfaces de courbure moyenne constante dans le cas où ces voisinages sont de rayon inférieur à $\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}} - \alpha\right)$. Mais, en l'absence d'une démonstration du fait que le diamètre de ces variétés est majoré par une constante proche de $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, ces résultats ne peuvent être appliqués de manière intéressante.

## Courbure de Ricci presque supérieure à celle de la sphère

### Inégalités géométriques optimales

Dans le chapitre **4** de cette thèse, on répond à une question posée par les travaux de P. Petersen et C. Sprouse sur les variétés de courbure de Ricci presque minorée par une constante strictement positive (voir [79]). Plus précisément, on s'intéresse à l'extension, au cas où la courbure de Ricci est presque minorée par $(n-1)$, des inégalités géométriques optimales suivantes, qui sont classiques lorsque la courbure de Ricci est supérieure ou égale à $(n-1)$ (rappelons que la courbure de Ricci de la sphère est égale à $n-1$) :

**Théorème 0 (Myers, Bishop, Gromov, Lichnerowicz, Gallot-Meyer).** — *Toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$ vérifie les inégalités suivantes :*

*(Myers)* $\mathrm{Diam}(M^n, g) \leq \mathrm{Diam}(\mathbb{S}^n, can) = \pi$,

*(Bishop) pour tout $R > 0$ et tout point $x \in M$, $\mathrm{Vol}\, B(x, R) \leq A_1(R)$ ; en particulier* $\mathrm{Vol}(M^n, g) \leq \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can)$,

*(Bishop-Gromov) pour tout couple $(r, R)$ tels que $0 < r \leq R$ et tout point $x$ de $M$ on a* $\frac{\mathrm{Vol}\, B(x,r)}{Vol B(x,R)} \geq \frac{A_1(r)}{A_1(R)}$,

*(Lichnerowicz)* $\lambda_1^0(M^n, g) \geq \lambda_1^0(\mathbb{S}^n, can) = n$,

*(Gallot-Meyer)* $\lambda_1^1(M^n, g) \geq \lambda_1^1(\mathbb{S}^n, can) = n$,

*où $A_1(r)$ est le volume d'une boule géodésique de rayon $r$ de la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$, où $\lambda_1^0(M^n, g)$ est la plus petite valeur propre non nulle du laplacien usuel de $(M^n, g)$ et où $\lambda_1^1(M^n, g)$ est la plus petite valeur propre du laplacien de Hodge sur les 1-forme de $(M^n, g)$.*

Lorsqu'on cherche à généraliser ces inégalités aux variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$ on se rend compte que l'obtention d'une généralisation optimale de l'inégalité de Myers est déterminante pour obtenir une généralisation des autres inégalités sous cette hypothèse (les démonstrations classiques des inégalités de Bishop et Bishop-Gromov utilisent également le résultat de Myers, sans quoi ces inégalités ne seraient valables que lorsque les boules considérées sont de rayons inférieurs à $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, comme dans le résultat de [79] ; de plus, pour généraliser les estimées spectrales, on a besoin d'un bon contrôle de la fonction "profil isopérimétrique" ou des constantes de Sobolev des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$, ce contrôle ne devant pas dépendre d'une borne a priori sur le diamètre de ces variétés, voir le théorème 4.17). Or la démonstration classique du théorème de Myers consiste à construire $(n-1)$ champs de vecteurs le long de toute géodésique de sorte que, si la variété est de courbure de Ricci supérieure à $n-1$ et si la géodésique est de longueur strictement supérieure à $\pi$, ces champs de vecteurs permettent de montrer que la moyenne du Hessien de la fonctionnelle énergie de cette géodésique dans ces directions est strictement négative. Cette géodésique est alors d'indice non nul, et ne peut donc pas être minimisante. Ce schéma de preuve se prête bien à des généralisations du théorème de Myers où l'on remplace l'hypothèse globale sur la courbure de Ricci par une hypothèse de positivité des intégrales de la courbure de Ricci le long de toutes les géodésiques d'une variété riemannienne complète (chacune de ces intégrales étant généralement calculée par rapport à la mesure de longueur $dt$ de la géodésique), ou par des hypothèses qui permettent de s'y ramener (voir, par exemple, les résultats de Ambrose, Calabi, Avez, Markvorsen, Cheeger-Gromov-Taylor, Itokawa, Rosenberg, Wu et Sprouse [2], [24], [14], [70], [34], [63], [91], [89]). Sous les hypothèses qui nous intéressent, on ne contrôle pas l'intégrale de la courbure de Ricci le long de chaque géodésique, mais seulement la moyenne de ces intégrales dans toutes les directions de géodésiques issues d'un même point $x_0$. Plus précisément, on ne minore que la moyenne, par rapport aux vecteurs $v \in \mathbb{S}^{n-1}_{x_0}$, de l'intégrale, le long des géodésiques $\gamma_v$ (de vecteur vitesse initiale $v$) et pour la mesure $\theta(t,v)dt$, de la courbure de Ricci ; ce qui revient à calculer la moyenne de la courbure de Ricci sur $\mathbb{S}^{n-1}_{x_0} \times ]0, R_0[$, par rapport à la mesure riemannienne $\theta(v,t)\, dv\, dt$ (où $\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}$ est la sphère unitaire de $(T_{x_0}M, g_{x_0})$, où $R_0$ est un réel positif fixé et où $\theta(v,t)$ est le jacobien de l'application $(v,t) \mapsto \exp_{x_0}(tv)$). Si on se refuse (comme ce sera notre cas) à faire une hypothèse supplémentaire de minoration uniforme de la courbure de Ricci (une telle hypothèse est faite dans le travail de C. Sprouse [89] qui utilise les travaux de J. Cheeger et T.Colding pour majorer le diamètre des variétés de courbure de Ricci supérieure à $-(n-1)$ et telles qu'une norme $L^1$ de $\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-$ soit petite), on ne peut déduire, de la donnée d'un minorant de cette moyenne globale, une minoration de l'intégrale de la courbure de Ricci sur chaque géodésique (ou, plus précisément, sur au moins une des géodésiques qui joignent les paires de points de $(M^n, g)$ situés à une distance proche du diamètre), qui est la condition nécessaire au fonctionnement de l'argument sur l'indice du Hessien de l'énergie évoqué ci-dessus (remarquons que la difficulté est de contrôler l'intégrale de la courbure de Ricci le long de ces géodésiques à la mesure de longueur $dt$, et non pas par rapport à la mesure $\theta(v,t)\, dt$). C'est pourquoi, dans le chapitre **4** de cette thèse, on généralise le théorème de Myers en passant par l'inéquation de Riccati qui relie la courbure moyenne d'une sphère-géodésique en un de ses points aux valeurs de la courbure de Ricci le long du rayon géodésique passant par ce point : cette courbure moyenne étant la dérivée logarithmique de la forme volume des sphères géodésique, un bon contrôle intégral de cette courbure moyenne sur les sphères permet d'obtenir un contrôle du volume des boules et des sphères géodésiques (du type Bishop et Bishop-Gromov) assez fin pour conclure. On obtient alors le résultat suivant :

**Théorème A.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > \frac{n}{2}$ et $R > 0$. Il existe des constantes universelles $C(p,n)$ et $\alpha(p,n)$ (calculées au chapitre* **4***), telles que :*

*(i) Si $R \leq 4\pi$, toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ de dimension $n$, telle que $\sup_{x\in M}\Big(\frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x,R)}\int_{B(x,R)}\big[\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\big]^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon \leq \alpha(p,n)$, vérifie l'inégalité :*

$$\mathrm{Diam}(M^n, g) \leq \pi\big(1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\big)$$

*En particulier, $M$ est compacte.*

*(ii) Si $R > 4\pi$, les mêmes conclusions sont valables sous l'hypothèse plus restrictive $R^2 \sup_{x\in M}\Big(\frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x,R)}\int_{B(x,R)}\big[\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\big]^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon \leq \alpha(p,n)$.*

Nous verrons aussi qu'à condition de remplacer $R$ par $6\pi$, l'hypothèse intégrale du théorème **A** $(i)$ n'a besoin d'être vérifiée que pour un seul point $x$ de $M$. Cette majoration du diamètre des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$ nous permet d'obtenir des généralisations optimales des inégalités géométrique citées plus haut :

**Théorème B.** — *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème précédent, il existe une constante $C(p,n)$, calculée au chapitre* **4***, telle qu'on ait les inégalités :*

$$\mathrm{Vol}(M^n, g) \leq \mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n\big(1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4p-n-1}}\big)$$

$$\lambda_1^0(M^n, g) \geq n\big(1 - C(p,n)\epsilon\big)$$

$$\lambda_1^1(M^n, g) \geq n\big(1 - C(p,n)\epsilon\big), \text{ et donc } H^1(M) = \{0\}$$

*où $\lambda_1^0$ est la première valeur propre non nulle du laplacien usuel, où $\lambda_1^1$ est la première valeur propre du laplacien de Hodge sur les 1-formes et où $H^1(M)$ est le premier groupe de cohomologie réelle de $M^n$. De plus, en posant $\delta = 1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4(2p-1)}}$, on a les inégalités :*

*(i) pour tous les rayons $r > 0$, et tous les points $x$ de $M^n$ :*

$$\mathrm{Vol}\big(B(x,r)\big) \leq \Big(1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4p-n-1}}\Big)A_1(r)$$

$$\text{"}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,r)\big)\text{"} \leq \Big(1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}}\Big)L_1(\delta r)$$

*où " $\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,r)\big)$" désigne le volume $(n-1)$-dimensionnel de la partie régulière de la sphère $\partial B(x,r)$ (voir la section 4.1.2 pour une définition précise), et où $L_1(r)$ (resp. $A_1(r)$)*

*est le volume $(n-1)$-dimensionnel d'une sphère (resp. le volume d'une boule) géodésique de rayon $r$ de la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$.*

*(ii) pour tous les couples de nombres réels tels que $0 < r \leq R$, et tous les points $x$ de $M^n$,*

$$\frac{\mathrm{Vol}\big(B(x,r)\big)}{\mathrm{Vol}\big(B(x,R)\big)} \geq \Big(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4p-n-1}}\Big)\frac{A_1(r)}{A_1(R)}$$

$$\Big(\frac{\text{"}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,R)\big)\text{"}}{L_1(\delta R)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} - \Big(\frac{\text{"}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,r)\big)\text{"}}{L_1(\delta r)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}}(R-r)^{\frac{2p-n}{2p-1}}$$

*Les constantes qui interviennent dans ces inégalités sont précisées dans le chapitre* **4**.

Dans le chapitre **4** de cette thèse, on construit de plus une suite de variétés riemanniennes qui contredit les énoncés des théorèmes **A** et **B** lorsqu'on prend $p = n/2$ (et $n \geq 3$) dans l'hypothèse intégrale sur la courbure de Ricci.

### Métriques presqu'extrémales

Dans le chapitre **5**, on s'intéresse aux variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$ dont les invariants riemanniens, bornés par les théorèmes **A** et **B** qui précèdent, prennent des valeurs presque extrémales. Rappelons que les inégalités géométriques optimales du théorème **0** sont telles que, si une variété riemannienne complète de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$ réalise le cas d'égalité dans l'une de ces inégalités, alors cette variété est nécessairement isométrique à la sphère canonique (c'est une conséquence des travaux de S.Y. Cheng [35] et M. Obata [73]). Une autre manière d'exprimer cette propriété est de dire que, sur l'ensemble des variétés de courbure de Ricci supérieure ou égale à $n-1$ (modulo isométries), la fonctionnelle qui, à chaque variété riemannienne $(M^n, g)$, associe son diamètre (resp. son volume, resp. son $\lambda_1^0$, resp. son $\lambda_1^1$) atteint son extremum absolu pour la sphère canonique, et pour la sphère seulement. De plus, J. Cheeger et T. Colding ont démontré le résultat suivant de stabilité des métriques presqu'extrémales de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$ (*cf* [38], [39] et [30]) :

**Théorème (J. Cheeger-T. Colding [30]).** — *Il existe une constante $\varepsilon = \varepsilon(n)$ telle que toute variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de courbure de Ricci supérieure à n-1 et vérifiant l'inégalité :*

$$\mathrm{Vol}(M^n, g) \geq (1-\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can)$$

*soit difféomorphe à $\mathbb{S}^n$.*

La constante universelle $\varepsilon(n)$ (qui n'est pas explicitable par la preuve) ne dépend pas de bornes a priori sur la courbure sectionnelle. Ce point est l'amélioration fondamentale apportée par T. Colding et J. Cheeger aux travaux antérieurs de Shiohama, Perelman, Otsu-Shiohama, Yamaguchi, *etc.* (*cf* [88]). T. Colding et J. Cheeger ont aussi démontré les variantes de ce théorème consistant à remplacer l'hypothèse de presque maximalité du volume par la presque maximalité du Radius ou la proximité, en distance de Gromov-Hausdorff, avec la sphère canonique. P. Petersen [77] a, quant à lui, remplacé l'hypothèse sur le volume par l'hypothèse $\lambda^0_{n+1} \leq n + \epsilon$.

La preuve de ce théorème par T. Colding et J. Cheeger se décompose en deux étapes :

1) La première étape est un résultat de co-stabilité de certains invariants géométriques de la sphère canonique en courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$. Plus précisément, T. Colding a montré dans [38] et [39] que, sur l'ensemble des variétés riemanniennes complètes de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, il équivalent d'être de volume proche de celui de la sphère, d'être de radius proche de celui de la sphère ou d'être proche de $(\mathbb{S}^n, can)$ en distance de Gromov-Hausdorff. P. Petersen complète ces équivalences dans [77] en montrant que chacune de ces 3 conditions est équivalente à ce que $\lambda^0_{n+1}$ soit proche de $n$.

2) Dans un second temps, T. Colding et J. Cheeger ont démontré dans [30] que, si une suite de variétés riemanniennes, compactes et de courbure de Ricci uniformément minorée, converge (en distance de Gromov-Hausdorff) vers une variété riemannienne compacte fixée de même dimension, alors tous ses éléments sont difféomorphes à la variété-limite à partir d'un certain rang.

Dans un premier temps, le chapitre **5** est consacré à l'extension de la première étape de la preuve du théorème de Colding-Cheeger au cas des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$. On démontre le résultat de co-stabilité suivant :

**Théorème C.** — *Il existe des constantes $C(p,n)$ et $\beta(n)$ telles que, si l'on considère toutes les variétés riemanniennes complètes $(M^n, g)$ qui vérifient les hypothèses de courbure du théorème **A** et l'une des trois inégalités suivantes :*

$$\mathrm{Vol}(M^n,g) \geq (1-\epsilon)\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can) \qquad ou \qquad \lambda^0_n(M^n,g) \leq n+\epsilon$$

$$ou \qquad \mathrm{Radius}(M^n,g) \geq (1-\epsilon)\,\mathrm{Radius}(\mathbb{S}^n, can),$$

*toutes ces variétés sont à distance de Gromov-Hausdorff de $(\mathbb{S}^n, can)$ plus petite que $C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}$.*

*Réciproquement, si la distance de Gromov-Hausdorff entre $(M^n, g)$ et $(\mathbb{S}^n, can)$ est plus petite que $\epsilon$, alors $Vol(M^n,g) \geq \left(1 - C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}\right) \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can)$, $\lambda^0_{n+1}(M^n,g) \leq n + C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}$ et $\mathrm{Radius}(M^n,g) \geq \left(1 - C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}\right) \mathrm{Radius}(\mathbb{S}^n, can)$.*
*Les constantes $C(p,n)$ et $\beta(n)$ sont explicitables.*

On remarquera que, pour prouver que la distance de Gromov-Hausdorff entre $(M^n, g)$ et $(\mathbb{S}^n, can)$ est petite, il n'est pas nécessaire de supposer que le laplacien de la variété possède $(n+1)$ valeurs propres presque inférieures à $n$ : en effet, il suffit que la variété en possède $n$ pour obtenir la même conclusion. Appliqué dans le cas particulier où la courbure de Ricci est supérieure à $(n-1)$, ceci améliore le résultat de P. Petersen en établissant le :

**Corollaire D.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Il existe des constantes universelles strictement positives $\epsilon(n)$, $\beta(n)$ et $C(n)$ (explicitement calculables) telles que, si $(M^n, g)$ est une variété riemannienne de dimension $n$ qui vérifie $\mathrm{Ric}(M^n, g) \geq (n-1)$ et $\lambda_n^0(M^n, g) \leq n+\epsilon(n)$, alors $M$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^n$ et $d_{GH}\big((M^n, g), (\mathbb{S}^n, can)\big) \leq C(n)\big(\lambda_n^0 - n\big)^{\beta(n)}$.*

On montre que ce corollaire est optimal, au moins en ce qui concerne la deuxième conclusion, en construisant une suite de métriques $g_k$ sur $\mathbb{S}^n$, de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, telle que la suite $\big(\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, g_k)\big)_k$ tende vers 0, la suite $\big(\mathrm{Rad}(\mathbb{S}^n, g_k)\big)_k$ tende vers $\frac{\pi}{2}$ et la suite $\big((\mathbb{S}^n, g_k)\big)_k$ tende (au sens de Gromov-Hausdorff) vers l'hémisphère de dimension $n-1$ munie de sa métrique canonique, mais telle que la suite $\big(\lambda_i^0(\mathbb{S}^n, g_k)\big)_k$ tende vers $n$ pour tout $i \leq n-1$. C'est encore un problème ouvert de savoir si $n$ est le plus petit des entiers $p$ tels que toute suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variétés riemanniennes de dimension $n$ et de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, telles que $\lambda_p^0(M_k)$ tende vers $n$ lorsque $k \to +\infty$, soit formée de variétés qui sont toutes difféomorphes à $\mathbb{S}^n$ à partir d'une certain rang (rappelons que M. Anderson [4] et Y. Otsu [74] ont construit des variétés de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, non homotopes à $\mathbb{S}^n$, dont le $\lambda_1$ est arbitrairement proche de $n$).

La méthode de démonstration du théorème **C** est une application des résultats de comparaison du chapitre **4** et d'estimées analytiques (démontrées dans la première partie de la thèse, au chapitre **3**) sur les combinaisons linéaires de sections propres des opérateurs (laplacien+potentiel) agissant sur les sections d'un fibré riemannien. Par exemple, dans la sous-section 5.4.2, on s'inspire des travaux de S. Gallot dans [46] et de P. Petersen dans [77] en définissant une application :

$$\begin{cases} \Phi : M & \to & \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ \quad x & \mapsto & \Phi(x) = F(x)/\|F(x)\| \end{cases}$$

où $F(x) = \big(f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)\big)$ et où $(f_i)_{1\leq i\leq n+1}$ est une famille $L^2$-orthonormée de fonctions propres du laplacien de $(M^n, g)$ associées à des valeurs propres proches de $n$. Pour montrer que l'application $\Phi$ est correctement définie et étudier ses propriétés, on construit un fibré riemannien $E \to M$ de rang $(n+1)$ et des sections $S_i$ de ce fibré associées aux fonctions $f_i$. On montre alors que, sous nos hypothèses, les sections $S_i$ sont des sections propres associées à des petites valeurs propres d'un opérateur (laplacien+potentiel) de potentiel presque positif ; une version faible du principe de Bochner, démontrée dans le chapitre **3** de cette thèse, implique que les sections $S_i$ forment un repère presqu'orthonormé du fibré $E$ en $\epsilon$-presque tout point de la variété $M$ (i.e. sur une partie $M_\epsilon$ de $M$ telle que $\frac{\mathrm{Vol}\, M_\epsilon}{\mathrm{Vol}\, M} > 1-\epsilon$). Les $S_i$ permettent ainsi de définir une application linéaire de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $E_x$, qui est une presque-isométrie pour $\epsilon$-presque tout point $x$ de $M$ et dont la restriction à $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$ est partout proche de ${}^t d_x\Phi$ ; on en déduit que $\Phi$ est une fonction définie sur tout $M$, surjective, de degré $\pm 1$, qui réalise une $C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}$-approximation de Hausdorff de $(M^n, g)$ sur $(\mathbb{S}^n, can)$ (notez que, contrairement à ce qui est fait dans les travaux de T. Colding, nous construisons explicitement l'approximation de Hausdorff).

Dans la section **5.5**, nous étudions (en l'état actuel de nos recherches) les extensions possibles aux variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ de la deuxième étape de la démonstration du théorème de Colding et Cheeger. En particulier, nous discutons d'un outil qui joue un rôle fondamental dans les travaux de Colding et Cheeger sur la finitude du type différentiable en courbure de Ricci minorée (voir par exemple le résultat cité ci-dessus) ; cet outil nous semble difficile à étendre au cas de courbure de Ricci presque minorée par $(n-1)$. Toutefois, nous démontrons dans cette section que, si on suppose l'existence d'une borne $L^p$ a priori sur la courbure sectionnelle (i.e. $\|\mathrm{R}\|_{\mathrm{L^p(M)}} \leq \mathrm{A}$) ou $L^\infty$ sur la courbure de Ricci (i.e. $\|\operatorname{Ric}\|_\infty \leq A$), alors l'application $\Phi$ devient un difféomorphisme de constante de Lipschitz $C(p,n,A)\epsilon^{\beta(n,A)}$-proche de 1. Ceci découle encore des résultats analytiques de la première partie de la thèse où on démontre que des combinaisons linéaires de sections propres associées à des petites valeurs propres d'un opérateur (laplacien+potentiel) presque positif sont presque parallèles si on suppose le potentiel et la courbure du fibré bornés en norme intégrale.

On finit le chapitre **5** en étendant au cas des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ un résultat de S. Ilias [62]. En fait, nous montrons le :

**Théorème E.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$, $R$ et $A$ des nombres réels arbitraires tels que $p > n/2$, $R > 0$ et $A > 0$. Il existe une fonction $\alpha(p,n,A)$ (universelle et calculable) telle que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, de dimension $n$, qui vérifie $\sup_x \|(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1))^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \alpha(p,n,A)$ et $\|R\|_{2p} \leq A$, on ait :*

$$\text{Si } \lambda_1 \leq n + \alpha(p,n,A), \text{ alors } M \text{ est homéomorphe à } \mathbb{S}^n.$$

$$\text{Si } \operatorname{Diam}(M) \geq \pi - \alpha(p,n,A), \text{ alors } M \text{ est homéomorphe à } \mathbb{S}^n.$$

Les contre-exemples de M. Anderson ([4]) et Y. Otsu ([74]) déjà cités ci-dessus prouvent qu'on ne peut, dans ce cas, s'affranchir de l'hypothèse sur la courbure sectionnelle.

## Courbure de Ricci presque positive

Dans le chapitre **2** de cette thèse, on s'intéresse à la généralisation d'un résultat de rigidité en courbure de Ricci positive ou nulle dû à Bochner :

**Théorème (Bochner).** — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne compacte telle que* $\mathrm{Ric}_g \geq 0$. *Alors son premier nombre de Betti $b_1 = dim\, H^1(M, \mathbb{R})$ est inférieur à $n$. Si de plus $b_1 = n$ alors $(M^n, g)$ est isométrique à un tore plat.*

La démonstration de ce théorème combine le principe de Bochner sur les opérateurs (laplacien+potentiel positif) et l'utilisation de l'application d'Albanese : soit $(\alpha_i)$ une base $L^2$-orthonormée de 1-formes harmoniques, il existe une application $Alb\ :\ M \to \mathbb{T}^{b_1}$ dont la différentielle est donnée par les $\alpha_i$. De la positivité de l'opérateur $D^*D$ on déduit que toute 1-forme harmonique est parallèle en courbure de Ricci supérieure ou égale à 0, puis que l'application d'Albanese $Alb$ est un isométrie si $b_1 = n$.

Ce résultat a déjà été généralisé par T. Colding et J. Cheeger de la manière suivante :

**Théorème du tore (Colding [40] ; Colding-Cheeger [30]).** — *Il existe une constante $\epsilon(n) > 0$ telle que pour toute variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ vérifiant la condition* $\mathrm{Diam}(M)^2\underline{\mathrm{Ric}} \geq -\epsilon$, *on ait $b_1 \leq n$. Si de plus $b_1 = n$, alors $(M^n, g)$ est $\epsilon$-proche d'un tore $\mathbb{T}^n$ plat en distance de Gromov-Hausdorff et $M$ est difféomorphe à $\mathbb{T}^n$.*

Ici, c'est la caractérisation du cas où $b_1 = n$ qui est le résultat nouveau, la majoration $b_1 \leq n$ était un résultat antérieur de M. Gromov et de S. Gallot. Le schéma de preuve de ce résultat (tel qu'il est revisité dans [51]) est le suivant : sous ces hypothèses de presque positivité de la courbure de Ricci, les estimées analytiques de la première partie de la thèse nous donnent que $\frac{\|\alpha\|_\infty}{\|\alpha\|_2} \simeq 1$ et $\mathrm{Diam}(M)\|D\alpha\|_2 \leq \epsilon$ pour toute 1-forme harmonique de la variété $(M^n, g)$. On en déduit que $(\alpha_i)$ est une famille $\epsilon$-presque orthonormée au-dessus d'un ensemble de volume presque égal à celui de $M$. Gràce au lemme de Toponogov $L^2$, on montre que, dans un $\epsilon$-voisinage de tout couple de points de $M$, il existe un couple de points reliés par une géodésique minimisante sur laquelle $(\alpha_i)$ est $\epsilon$ presque-orthonormée sur $\epsilon$-presque toute sa longueur. On en déduit que l'application d'albanese $Alb$ est une $\epsilon$-approximation de Hausdorff. Le difféomorphisme découle du théorème de finitude du genre différentiable (en courbure de Ricci minorée) de Colding et Cheeger cité plus haut. Remarquez que, dans ce théorème, on ne contrôle plus la métrique au sens Lipschitz et on ne connait pas le difféomorphisme. Toutefois, si on rajoute une borne $L^p$ sur la courbure sectionnelle, les estimées analytiques de la première partie de cette thèse nous donnent que $\mathrm{Diam}(M)\|D\alpha\|_\infty \leq \epsilon$ pour toute 1-forme harmonique, et donc la famille $(\alpha_i)$ est partout $\epsilon$-presque-orthonormée. $Alb$ devient alors un difféomorphisme presque-isométrique.

Il découle des travaux de S. Gallot sur les variétés compactes de courbure de Ricci presque positive que leur laplacien de Hodge sur les 1-formes a au plus $n$ petites valeurs propres. Si on suppose qu'il en a exactement $n$, on obtient le résultat suivant (*cf* la deuxième partie de cette thèse) :

**Théorème F.** — *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, pour tout $p > n$ et tout $\epsilon \in ]0,1]$, il existe des constantes $\zeta(p,n) > 0$ et $\beta(p,n) > 0$ telles que toute variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \mathrm{Diam}(M)^2 \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} < \epsilon.\zeta(p,n)\big(1 + \mathrm{Diam}(M)^2 \|\mathrm{R}\|_{\mathrm{q/2}}\big)^{-\beta(\mathrm{p,n})} \\ \mathrm{Diam}(M)^2 \lambda_n^1 < \epsilon.\zeta(p,n)\big(1 + \mathrm{Diam}(M)^2 \|\mathrm{R}\|_{\mathrm{q/2}}\big)^{-\beta(\mathrm{p,n})} \end{cases}$$

*(où $q = \max(p,4)$, $\epsilon \in ]0,1]$ et $\lambda_n^1$ est la n-ième valeur propre du laplacien de Hodge sur les 1-formes différentielles) est difféomorphe à une nilvariété, i.e. à un quotient d'un groupe nilpotent simplement connexe $G$ par un sous groupe discret $\Gamma$. De plus, il existe une métrique $g_0$, invariante à gauche sur $G$, qui passe au quotient sur $M = \Gamma \setminus G$ en une métrique $\epsilon$-proche de $g$.*
*Dans le cas où le laplacien de Hodge sur les 1-formes de $(M^n, g)$ admet seulement $n-1$ petites valeurs propres, alors soit $M$ est difféomorphe à une nilvariété, soit $M$ est difféomorphe à une infra-nilvariété non-orientable. Dans les deux cas, la métrique est proche d'une métrique invariante à gauche.*

Ce théorème semble beaucoup plus faible que le résultat de T. Colding et J. Cheeger puisqu'il suppose une borne sur la courbure sectionnelle ; pourtant cette faiblesse n'est qu'apparente : l'hypothèse supplémentaire (i.e. la borne $L^{\frac{q}{2}}$ sur la courbure sectionnelle) est en quelle que sorte le prix à payer pour un problème qui s'avère beaucoup plus complexe que les théorèmes de la sphère et du tore de T. Colding et de J. Cheeger et T. Colding (*cf* les deux énoncés ci-dessus). En effet, dans le théorème de la sphère, on comparait la variété $(M^n, g)$ à un modèle géométrique unique : la sphère canonique. La situation est déjà plus compliquée dans la théorème du tore : ici le modèle géométrique (un tore plat à choisir en fonction de $(M^n, g)$) n'est plus unique, c'est son revêtement universel (l'espace euclidien) qui est unique ; une grande partie de la difficulté dans la preuve de T. Colding, vient du fait qu'une fois prouvé que le revêtement universel de $(M^n, g)$ est proche (en distance de Gromov-Hausdorff pointée) de l'espace euclidien, il faut définir et contrôler métriquement l'action induite par $\Pi_1(M)$ sur $\mathbb{R}^n$ de sorte que l'approximation de Hausdorff passe au quotient en une approximation de Hausdorff de $(M^n, g)$ sur un tore plat.
Dans le théorème **F**, la situation est encore plus complexe, puisque toute nilvariété est un modèle qui doit être pris en considération : en effet, toute nilvariété admet une métrique invariante à gauche qui vérifie les hypothèses du théorème **F**, ce qui apporte une justification à ces hypothèses (voir la proposition 5.1 de la deuxième partie de cette thèse). En fait, cette hypothèse supplémentaire sur la courbure sectionnelle est indispensable : en adaptant des contre-exemples dus à M. Anderson, nous prouvons (dans la proposition 4.1 de la deuxième partie de cette thèse) que, pour tout $n \geq 4$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une infinité de variétés riemanniennes (non homotopes entre elles), de dimension $n$, de diamètre inférieur à 1,

de courbure de Ricci minorée par $-\epsilon$ et telles que les $n$ premières valeurs propres du laplacien de Hodge soient inférieures à $\epsilon$. On aura compris qu'une des difficultés nouvelles rencontrées dans la preuve de notre théorème **F** (si on la compare à celle du théorème du tore de T. Colding et J. Cheeger) réside dans le fait que les formes propres du laplacien de Hodge correspondant à des petites valeurs propres non nulles ne sont plus fermées, mais cofermées.

Le théorème **F** ci-dessus (et la discussion et les contre-exemples qui le suivent) est le fruit d'une collaboration avec B. Colbois, P. Ghanaat et E. Ruh. Ce théorème se place dans l'esprit du théorème de M. Gromov sur les variétés presque-plates (*cf* [23] pour une rédaction complète, due à P. Buser et H. Karcher) ; rappelons que ce théorème dit que toute variété riemannienne qui vérifie $\mathrm{Diam}(M)^2\|\mathrm{R}\|_{\mathrm{L}^\infty} < \epsilon(\mathrm{n})$ (où $\epsilon(n)$ est une constante universelle strictement positive) est difféomorphe à une nilvariété. Cependant la preuve en est différente, puisqu'elle repose sur des arguments d'analyse. En revanche, le fait que toute nilvariété admette une famille $g_\epsilon$ de métriques invariantes à gauche qui vérifient (pour la même valeur de $\epsilon$) les hypothèses du théorème **G** repose sur un calcul fait par M. Gromov (*cf* [23] p. 126). Pour démontrer ceci, M. Gromov prouve que, si $\omega \ : \ T(\Gamma \setminus G) \to \mathbb{R}^n$ est la 1-forme de Maurer-Cartan de la Nilvariété, elle vérifie $\mathrm{Diam}(g_\epsilon)\|d\omega\|_\infty \leq \epsilon$ pour une métrique $g_\epsilon$ bien choisie. Notre preuve du théorème **F** s'appuie sur une réciproque de ce résultat, due à P. Ghanaat, qui étend aux variétés trivialisables un théorème prouvé par Zassenhauss, Kazhdan, Margulis dans le cas des groupes de Lie :

**Théorème (Ghanaat [54]).** — *Il existe des constantes $\epsilon(n) > 0$, $C(n) > 0$ telles que toute variété compacte admettant une trivialisation $\omega \ : \ TM \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ qui vérifie $\mathrm{Diam}(M)\|d\omega\|_\infty \leq \epsilon(n)$ (pour la métrique $g_\omega = \omega^* can$) est difféomorphe à une nilvariété $\Gamma \setminus G$. De plus, il existe alors une trivialisation $\overline{\omega}$ de $T\big(\Gamma \setminus G\big) = TM$ qui est invariante par $G$ et telle que :*

$$\|\omega - \overline{\omega}\|_\infty + \mathrm{Diam}(M)\|d\omega - d\overline{\omega}\|_\infty \leq C(n)\,\mathrm{Diam}(M)\|d\omega\|_\infty .$$

Pour montrer que les variétés qui vérifient les hypothèses de notre théorème **F** satisfont les hypothèses du théorème 0.5 de Ghanaat, nous construisons une application de $TM$ dans $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont les $n$ formes propres $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq n}$ correspondant aux $n$ petites valeurs propres du laplacien de Hodge. La preuve du fait que ceci constitue une trivialisation repose sur nos estimées du chapitre **3** de la première partie de cette thèse : sous les hypothèses du théorème **F**, toute combinaison linéaire $\alpha$ des $\alpha_i$ vérifie :

$$1 - \frac{\inf|\alpha|}{\sup|\alpha|} < C'(p,n)\epsilon^{\beta'(p,n)},$$

où $\beta'(p,n)$ et $C'(p,n)$ sont des constantes universelles positives. La preuve du fait que les $\|d\alpha_i\|_{L^\infty}$ sont petits repose sur le fait (banal) que $\|d\alpha_i\|_{L^2}^2 \leq \lambda_n \|\alpha_i\|_{L^2}^2$ et sur la majoration du rapport $\frac{\|d\alpha_i\|_{L^\infty}}{\|d\alpha_i\|_{L^2}}$ donnée au chapitre **3** de la première partie de cette thèse.

La première partie de cette thèse (correspondant aux chapitres 1, 2 et 3) met en place les outils analytiques nécessaires dans les autres parties de la thèse et dans le preprint [11]. Son aspect technique la rend un peu austère, c'est pourquoi nous conseillons au lecteur spécialiste de géométrie de commencer la lecture de cette thèse par les parties **II** et **III**, et de revenir sur cette partie **I** lorsque le besoin des démonstrations l'exige. C'est aussi pourquoi, pour la description des résultats de cette première partie (des estimées analytiques du type Sobolev ou Harnack sur les sections des fibrés riemanniens qui, lorsqu'elles sont appliquées à des combinaisons linéaires de sections propres d'un opérateur (laplacien+potentiel), donnent des généralisations de la technique de Bochner au cas où le potentiel est de signe quelconque) nous renvoyons à l'introduction du premier chapitre de cette thèse.

Notez enfin que, parmi les applications de ces estimées analytiques, nous avons développé une technique d'approximation explicite des valeurs propres d'une variété riemannienne compacte, mais nous n'avons pas pu rédiger cette partie dans les temps impartis (nous renvoyons donc le lecteur intéressé au preprint [11] en cours de rédaction). Pour décrire brièvement cette méthode, disons qu'on utilise les résultats du chapitre **3** de la première partie pour borner (en norme $L^\infty$) le gradient et le Hessien des éléments $f$ appartenant à la somme des espaces propres associés aux $k$ premières valeurs propres du laplacien d'une variété riemannienne $(M^n, g)$. Ces résultats permettent de contrôler précisément les variations de $f$ et de $df$ au voisinage des points d'un $\epsilon$-réseau discrétisant la variété $(M^n, g)$, et de calculer des approximations des normes $L^2$ de $f$ et de $df$ sur la variété à partir des valeurs prises par la fonction discrétisée aux différents points du réseau. Le but est de calculer des approximations de chaque valeur propre du laplacien de $(M^n, g)$ par diagonalisation d'une matrice (construite par une méthode de discrétisation de la variété à partir d'un $\epsilon$-réseau) et de pouvoir assurer a priori (sans connaître la variété) que l'erreur faite sur le calcul de la $k$-ième valeur propre est inférieure à une fonction universelle $C_k(\epsilon)$ de la taille $\epsilon$ de la maille du réseau (ce qui signifie que $C_k(\epsilon)$ ne dépend ni de la variété ni de sa discrétisation par un $\epsilon$-réseau, pourvu que celles-ci appartiennent à un ensemble de variétés et de discrétisations délimitées par certaines bornes géométriques) ; on cherche donc une majoration absolue $C_k(\epsilon)$ de l'erreur, valable pour tout $\epsilon$ inférieur à une constante $\alpha$, déterminée de manière universelle, et non simplement une estimation asymptotique de cette erreur, valable pour des $\epsilon$ infiniment petits[3].

[3]Plus précisément, les méthodes développées dans [11] consistent à considérer des discrétisations de la

variété sous forme de graphes finis géodésiquement plongés ou de triangulations ou de pseudo-triangulations et de construire, sur l'ensemble $\mathbb{R}^S$ des fonctions définies sur le $\epsilon$-réseau $S$ formé par les sommets de la discrétisation donnée, deux formes quadratiques discrètes et géométriques qui approximent respectivement la norme $L^2$ des combinaisons linéaires finies de fonctions propres de $(M^n, g)$ et la norme $L^2$ de leur gradient. C'est le spectre de la deuxième forme quadratique discrète par rapport à la première (qui s'avère être un produit scalaire) qui sert d'approximation des valeurs propres de la variété riemannienne. Le majorant de l'erreur sur le calcul de la $i$-ième valeur propre est alors une fonction universelle de $i$, de certaines bornes sur la géométrie de la variété $(M^n, g)$ (bornes sur la courbure sectionnelle et le diamètre, minorant du rayon d'injectivité) et de sa discrétisation (minorant des angles entre les arêtes et majorant $\epsilon$ de la taille de la maille du graphe plongé) ; il tend vers 0 avec $\epsilon$.

# Table des matières

**Introduction** **7**

**I Inégalités analytiques de type Sobolev et Harnack dans les fibrés riemanniens** **23**

**1 Introduction, Notations et Définitions** **25**

1.1 Introduction . . . . . . . . . . 25

1.2 Fibrés euclidiens et opérateurs (laplacien+potentiel) . . . . . . . . . . 28

1.3 Outils analytiques . . . . . . . . . . 30

1.3.1 Inégalité d'interpolation . . . . . . . . . . 30

1.3.2 Inégalités de Sobolev et de Harnack . . . . . . . . . . 31

**2 Sections quelconques** **33**

2.1 Majoration de $\|S\|_\infty/\|S\|_2$ . . . . . . . . . . 33

2.2 Majoration de $\|DS\|_\infty$ en fonction de $\|DS\|_2$ . . . . . . . . . . 36

2.3 Majoration de $\|DS\|_r$ $(r > n)$ en fonction de $\|DS\|_2$ . . . . . . . . . . 44

2.4 Majoration de $\mathbf{sup}|S| - \mathbf{inf}|S|$, résultats de non annulation . . . . . . . . . . 52

**3 Combinaisons linéaires de sections propres** **57**

3.1 Majoration de $\|S\|_\infty/\|S\|_2$, spectre et quasi-trivialisations . . . . . . . . . . 58

3.2 Majoration de $\|DS\|_\infty$ en fonction de $\|DS\|_2$ . . . . . . . . . . 70

3.3 Majoration de $\|DS\|_r$ en fonction de $\|DS\|_2$ . . . . . . . . . . 72

3.4 Majoration de $\mathbf{sup}|S| - \mathbf{inf}|S|$ et trivialisation des fibrés . . . . . . . . . . 75

**II Caractérisation spectrale des Nilvariétés** **81**

**III Théorèmes de comparaison et théorèmes de la sphère en courbure**

**de Ricci presque-minorée** **101**

**4 Théorèmes de comparaison en courbure de Ricci presque-minorée** **103**

4.1 Introduction, Notations et Définitions . . . 103

4.1.1 Introduction . . . 103

4.1.2 Forme volume, Boules et Sphères géodésiques . . . 107

4.1.3 Courbure moyenne des Sphères . . . 108

4.1.4 Lemme fondamental et Volume des Sphères . . . 110

4.2 Minorant négatif de la courbure de Ricci . . . 118

4.2.1 Comparaison des volumes . . . 118

4.2.2 Retour sur les hypothèses intégrales de courbure . . . 123

4.3 Minorant positif de la courbure de Ricci . . . 125

4.3.1 Majoration du Diamètre . . . 126

4.3.2 comparaison des volumes . . . 137

4.3.3 Constantes de Sobolev . . . 142

4.3.4 minoration du $\lambda_1$ . . . 144

4.3.5 Annulation du premier groupe de cohomologie . . . 145

**5 Théorèmes de la Sphère avec hypothèses intégrales de courbure** **151**

5.1 Introduction . . . 151

5.2 Notations . . . 157

5.3 Rappels sur la sphère $(\mathbb{S}^n, can)$ . . . 158

5.4 Stabilité des invariants géométriques . . . 160

5.4.1 Variétés de Radius presque maximal . . . 161

5.4.2 Variétés vérifiant $\lambda_{n+1} \leq n+\epsilon$ . . . 168

5.4.3 L'approximation de Hausdorff . . . 182

5.5 Caractérisation du type différentiable . . . 184

5.6 Autres théorèmes de la sphère . . . 188

5.6.1 Variétés vérifiant $\lambda_n \leq n + \epsilon$ . . . 188

5.6.2 $\lambda_1 \leq n + \epsilon$ ou $\mathrm{Diam}(M) \geq \pi - \epsilon$ . . . 199

**Bibliographie** **205**

## Première partie

# Inégalités analytiques de type Sobolev et Harnack dans les fibrés riemanniens

# Chapitre 1

# Introduction, Notations et Définitions

## 1.1 Introduction

Cette première partie de la thèse met en place les outils fondamentaux et principes communs aux deux autres parties qui suivent. Il s'agit de généralisations de la technique de Bochner et de ses dérivées.

Plus précisément, la situation à laquelle on s'intéresse est celle d'un fibré riemannien $E \to M$ au-dessus d'une variété riemannienne $(M^n, g)$ compacte sans bord[1] de dimension $n$ et d'un opérateur (laplacien+potentiel) $\overline{\triangle}+V$ agissant sur les sections de $E$ (où $V$ est un champ d'endomorphismes symétriques de la fibre, généralement exprimable, dans les applications géométriques visées, en fonction de la courbure de $(M, g)$). L'étude des sections propres de tels opérateurs est un problème fécond en applications géométriques et topologiques. En effet, beaucoup d'invariants topologiques et géométriques peuvent s'exprimer comme le noyau d'un opérateur (laplacien+potentiel) (nous parlerons alors d'invariant harmonique) agissant sur les sections d'un fibré ad hoc : c'est le cas, par exemple, des groupes de cohomologie réelle, des 1-jets d'isométries, des 1-jets de transformations biholomorphes, conformes, projectives, etc. D'autres invariants sont majorés par le nombre de valeurs propres d'un opérateur (laplacien+potentiel) inférieures à un nombre $\lambda$ donné (on parle alors d'invariants sous-harmoniques) : c'est le cas de la dimension des espaces de modules (par exemple de l'espace des modules des métriques d'Einstein sur une variété donnée), de l'indice de l'opérateur "variation seconde" d'une sous-variété minimale (ou de courbure moyenne constante), du nombre de valeurs propres du laplacien situées dans un

[1]Les propositions de cette partie ont des analogues dans le cas de variétés $(M^n, g)$ complètes ou à bord, mais les applications qui sont données dans les parties **II** et **III** ne concernant que les variétés compactes, nous n'avons pas jugé utile de les énoncer, pour ne pas alourdir une partie déjà assez technique.

intervalle $[0, \lambda]$ donné, ou des invariants donnés par le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer (par exemple, l'indice de l'opérateur de Dirac, ou $\hat{A}$-genre).

La méthode de Bochner classique permet de contrôler la dimension du noyau d'un opérateur (laplacien+potentiel) de potentiel positif ou nul. Dans ce cas, la positivité de l'opérateur $\overline{\triangle}$ implique immédiatement que toute section harmonique de l'opérateur $\overline{\triangle}+V$ est parallèle. Toute famille $L^2$-orthonormée de sections harmoniques est donc orthonormée en restriction à la fibre de $E$ au-dessus de tout point $m$ de la variété $M$, et on obtient que la dimension de $Ker\big(\overline{\triangle}+V\big)$ est majorée par la dimension de la fibre de $E$. L'étude des cas où le potentiel $V$ est de signe quelconque a été initiée par P. Li dans le cas de l'opérateur de Hodge sur les p-formes différentielles ([66]), améliorée et généralisée par S. Gallot, et S. Gallot et D. Meyer, aux fibrés et opérateurs (laplacien+potentiel) quelconques ([46], [48], [49], [50], [47] et [53]). Leur approche consiste à remarquer que la dimension d'un sous-espace $F$ de sections de $E$ peut-être majorée par une fonction universelle du rang $rg(E)$ de $E$ et des variables $\sup_{S\in F\setminus\{0\}} \frac{\|S\|_p}{\|S\|_2}$ et $p$ ($p$ étant un réel de $]2, +\infty]$). Pour majorer le nombre de valeurs propres d'un opérateur (laplacien+potentiel) (comptées avec leur multiplicité) inférieures à un réel $\lambda$ donné (on note $E_\lambda$ le sous-espace de $E$ engendré par les sections propres associées à ces valeurs propres), il suffit de majorer (uniformément sur $E_\lambda \setminus \{0\}$) le rapport $\frac{\|S\|_p}{\|S\|_2}$. Cela se fait aisément par un procédé d'itération d'inégalités de Sobolev à la De Giorgi-Moser.

Dans cette partie, nous généralisons et systématisons ce genre d'estimées. Notre méthode s'applique aux sections $S$ du fibré qui sont des combinaisons linéaires de sections propres de l'opérateur (laplacien+potentiel) $\overline{\triangle}+V$ correspondant à des valeurs propres inférieures ou égales à 0 (ou à un nombre $\lambda$ donné) ou, plus généralement, à des sections $S$ de $E$ telles que la norme $\|\big(\overline{\triangle}+V\big)S\|_{\frac{n+\alpha}{2}}$ soit bornée (pour $\alpha > 0$ arbitraire). On obtient alors, pour de telles sections, une majoration explicite des rapports $\frac{\|S\|_\infty}{\|S\|_2}$ (voir les propositions 2.1 et 3.1), $\frac{\|DS\|_\infty}{\|DS\|_2}$ (voir les propositions 2.2 et 3.6), $\frac{\|DS\|_r}{\|DS\|_2}$ (voir entre autres les propositions 2.4 et 3.7) et $\frac{\sup|S|}{\inf|S|}$ (voir entre autres les propositions 2.10 et 3.11). Pour ces majorations, nous nous sommes imposé de respecter les deux contraintes suivantes, par ailleurs nécessaires à la plupart des applications visées dans cette thèse :

(i) Ces majorants doivent être «universels», i.e. ils doivent se calculer (explicitement) a priori, sans avoir à préciser quelle est la variété sur laquelle on travaille ni sa métrique. Les seules informations nécessaires étant un majorant d'une constante de Sobolev d'un plongement $H^{1,2}(M) \to L^{\frac{2q}{q-2}}$ (pour au moins un $q \geq n$), un majorant du diamètre de la variété $(M, g)$ et une borne $L^{\frac{n+\alpha}{2}}$ de la partie négative du potentiel $V$ (dans le cas de la majoration du rapports entres normes $L^p$ et $L^2$ de $DS$, il faut rajouter une norme $L^{\frac{n+\alpha}{2}}$ de la courbure du fibré et du potentiel $V$, et pour les inégalités de Harnack, il faut rajouter un majorant d'une constante de Sobolev d'un plongement $H^{1,q}(M) \to L^\infty$). Les travaux de S. Gallot ([48], [49], [50]) permettent de se dispenser des hypothèses sur les constantes de Sobolev, qui sont alors remplacées par une hypothèse intégrale sur la courbure de Ricci. Un des impératifs auxquels doit obéir, en particulier, cette condition d'universalité est que le majorant du rapport entre normes intégrales de $S$ (resp. $DS$) reste uniformément borné sur une suite de variétés riemanniennes qui s'effondrent (i.e. dont le volume ou le rayon d'injectivité tend vers 0 tout en étant de courbure et de diamètre bornés).

(ii) Ces majorants doivent être «optimaux», ce qui signifie qu'il doit être possible de déterminer a priori (i.e. indépendamment de la variété considérée, comme au point (i)) une fonction universelle $\eta(\epsilon)$ (tendant vers 0 avec $\epsilon$) telle que les rapports entres les normes $L^p$ $(2 < p \leq \infty)$ et $L^2$ de $S$ et $DS$ soient majorés par $(1+\eta(\epsilon))$ quand les normes $L^{\frac{n+\alpha}{2}}$ de $\big(\overline{\triangle} + V\big)S$ et de la partie négative de $V$ sont inférieures à $\epsilon$.

A titre de point de repère, les résultats de P. Li ([66]) cités plus haut n'obéissaient à aucun des deux impératifs $(i)$ et $(ii)$, ceux de S. Gallot y obéissaient uniquement dans le cas de la majoration de $\frac{\|S\|_p}{\|S\|_2}$.

Parmi les généralisations du principe de Bochner (décrit plus haut) que permet cette méthode, on peut citer les résultats géométriques et qualitatifs suivants : la majoration du rapport entre les normes $L^\infty$ et $L^2$ de $S$ permet de montrer qu'un opérateur (laplacien+potentiel) à potentiel presque positif (c'est à dire dont la norme $L^{\frac{n+\alpha}{2}}$ de la partie négative du potentiel est universellement petite) ne peut avoir un nombre de petites valeurs propres (i.e. inférieures à une constante universelle strictement positive) plus grand que la dimension de la fibre de $E$ (voir les propositions 3.2 et 3.4 pour des énoncés précis). De plus, toute famille $L^2$-orthonormée de sections propres associées à des petites valeurs propres est presque-orthonormée en restriction à la fibre au-dessus de chaque point d'un ensemble $M'$ de volume presqu'égal au volume de $M$ (voir le lemme 3.5 pour un énoncé précis). Enfin, si on se fixe un majorant d'une norme $L^{\frac{n+\alpha}{2}}$ de la courbure du fibré $E$, alors toute combinaison linéaire de sections propres d'un opérateur (laplacien+potentiel) à potentiel presque positif (la notion de petitesse dépendant maintenant de la borne sur la courbure de $E$) associées à des petites valeurs propres est presque parallèle et toute famille $L^2$-orthonormée de sections propres associées à des petites valeurs propres est presque-orthonormée en restriction à la fibre au-dessus de chaque point $m$ de la variété $M$ (voir les propositions 2.5 et 3.12).

La plupart des résultats de cette partie ne sont que des extensions de résultats déjà contenus dans les travaux de de P. Li et S. Gallot cités plus haut, ou dans les travaux de S. Ilias [62] et de M. Le Couturier et G. Robert [65], majorant le rapport $\|DS\|_p/\|DS\|_2$. Par exemple les propositions 3.1, 3.2 et 3.4 sont déjà contenues dans ces travaux, mais sont redémontrés dans cette partie dans le but de fournir un exposé complet et unifié des outils techniques utilisés dans la suite. La principale originalité de cette partie réside dans les énoncés du chapitre consacré aux sections quelconques et dans l'extension, aux combinaisons linéaires quelconques de sections propres de l'opérateur (laplacien+potentiel), des majorations des rapports entre les normes $L^p$ et $L^2$ de $DS$ (et du rapport $\frac{\sup|S|}{\inf|S|}$ qui en découle), qui n'étaient valables que pour les sections harmoniques dans [62] et [65]. On remarquera (ce qui est important pour les applications) que les majorants que nous donnons ici (quand on les applique à des combinaisons linéaires de sections propres) ne dépendent pas du nombre de valeurs propres mises en jeu, mais uniquement d'une borne de ces valeurs propres. Nous avons également du modifier la preuve de la majoration de $\frac{\|DS\|_p}{\|DS\|_2}$ donnée dans [65], de manière à ce qu'elle reste valable en dimension inférieure à 4.

## 1.2 Fibrés euclidiens et opérateurs (laplacien+potentiel)

Dans toute la thèse (sauf mention explicite du contraire) $(M^n, g)$ désignera une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $n$. Dans cette partie, on se donne aussi un fibré vectoriel riemannien $E \to M$ sur $M$ (c'est-à-dire un fibré vectoriel muni d'un *produit scalaire* $<.,.>_E$ lisse et d'une *connexion linéaire* $D$ *compatible* avec $<.,.>_E$) et $W = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigotimes^k T^*M\right) \otimes E$ *le fibré des tenseurs covariants de* $M$ *à valeurs dans* $E$. *On note* $l$ *la dimension de la fibre de* $E$.

Notez que $W$ est lui même canoniquement muni d'une structure de fibré riemannien. En effet, le produit scalaire de $E$ s'étend canoniquement à $W$ par :

$$< T, T' >_W (m) = \sum_{i_1,\dots,i_k} < T(i_1,\dots,i_k), T'(i_1,\dots,i_k) >_E,$$

où $T(i_1,\dots,i_k)$ est une notation abrégée pour $T(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$ et où $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de $(T_mM, g_m)$. La connexion riemannienne de $E$ s'étend aussi de manière unique en une connexion linéaire sur $W$ qui commute avec la contraction : c'est-à-dire *qu'on convient que, pour toute section* $\alpha$ *de* $W$,

$$D^E_X(\alpha(Y_1,\dots,Y_n)) = (D^W_X\alpha)(Y_1,\dots,Y_n) + \sum_{i=1}^k \alpha(Y_1,\dots,D^M_X Y_i,\dots,Y_n),$$

où $D^M$ est la connexion de Levi-Civita de la variété $(M, g)$. La connexion $D^W$ ainsi construite est compatible avec le produit scalaire $<.,.>_W$ défini ci-dessus.

*On note* $R^E$ *(resp.* $R^W$*) le tenseur de courbure associé à la connexion* $D^E$ *(resp.* $D^W$*).* Rappelons que, par définition, on a :

$$R^E(X,Y)S = D^2_{X,Y}S - D^2_{Y,X}S = D^E_X(D^E_Y S) - D^E_Y(D^E_X S) - D^E_{[X,Y]}S.$$

Le produit scalaire sur $E$ (ou sur $W$) et la mesure riemannienne de $(M, g)$ permettent de *définir un produit scalaire* $L^2$ *sur l'ensemble des sections* $C^\infty$ de $E$ (ou de $W$) par :

$$(T|T') = \frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M < T, T' > dv_g$$

(*toutes les normes $L^p$, notées $\|.\|_p$, seront relatives à la mesure de probabilité riemannienne $\frac{dv_g}{\mathrm{Vol}\, M}$ sur $M$). Soit $D^*$ l'adjoint formel de l'opérateur $D$ pour ce produit scalaire* (la notation $D$ étant ici utilisée pour $D^W$). On a donc :

$$(D^*T)(i_1, \dots, i_{p-1}) = -\sum_{k=1}^{n} DT(e_k, e_k, i_1, \dots, i_{p-1})$$

pour tout $p$-tenseur à valeurs dans $E$. *On définit alors le laplacien brut agissant sur $W$* par :

$$\overline{\triangle} T = D^*DT = -\sum_{k=1}^{n} D^2T(e_k, e_k; \cdot, \dots, \cdot)$$

*On note* $\mathrm{Sym}(E)$ *le fibré des endomorphismes symétriques de E. On appelle opérateur (laplacien+potentiel) un opérateur agissant sur les sections $C^\infty$ de $E$ de la forme* $\overline{\triangle} + V$, où $V$ est un élément de $\mathrm{Sym}(E)$. Parmi les exemples standards d'opérateurs (laplacien+potentiel) intervenant en géométrie riemannienne signalons le cas où $E$ est le fibré cotangent $T^*M$ et où l'opérateur (laplacien+potentiel) est $\triangle_g = \overline{\triangle} + \mathrm{Ric}$ (où Ric est la courbure de Ricci de $(M, g)$) agissant sur les 1-formes différentielles de $M$. D'après la formule de Böchner, cet opérateur est *le laplacien de Hodge, plus souvent défini par la formule $\triangle_g = d\delta + \delta d$ où $d$ est la différentielle extérieure des formes différentielles et $\delta$ est l'adjointe $L^2$ de $d$.* De façon plus générale, l'opérateur de Hodge sur les p-formes différentielles est un opérateur (laplacien+potentiel) (voir [52] pour le calcul exact du potentiel et quelques-unes de ses propriétés ; voir aussi [64] pour une introduction aux formules de Weitzenbock en général). Cette famille d'opérateurs contient en particulier tous les laplaciens naturels agissant sur les fibrés vectoriels de $M$ associés au même $O(n)$-fibré principal que le fibré tangent de $M$ (dans ce cas $V$ dépend linéairement du tenseur de courbure $R$ de $E$, cf [21], Sections 1.134 à 1.156). En dehors des laplaciens naturels, on peut citer trois grandes sources d'opérateurs (laplacien+potentiel) intéressants en géométrie riemannienne :

1) l'étude des transformation infinitésimales de métriques. L'algèbre de Lie du groupe des isométrie d'une variété riemannienne peut s'identifier au noyau de l'opérateur $\overline{\triangle} - \mathrm{Ric}$ agissant sur les champs de vecteur sur $TM$. Ces champs sont appelés les champ de Killing de la variété riemannienne. De façon générale, les 1-jets des déformations conformes, Einstein, biholomorphes, projectives, etc. peuvent s'identifier au noyau d'un opérateur (laplacien+potentiel).

2) le calcul des variations. L'équation d'Euler Lagrange (ou formule de la variation seconde d'une fonctionnelle «énergie» au voisinage d'un point critique) donne naissance à un opérateur (laplacien+potentiel) dont l'indice renseigne sur la stabilité du point critique. Par exemple, les champs de Jacobi sont les sections harmoniques d'un opérateur (laplacien+potentiel) sur le fibré "tiré en arrière" $\gamma^*TM$ au-dessus d'une géodésique $\gamma$ de $(M^n, g)$, cet opérateur intervient dans le calcul de la variation seconde de la fonctionnelle

énergie au voisinage du chemin minimisant $\gamma$. On peut également interpréter à partir d'un opérateur (laplacien+potentiel) la variation seconde de l'aire d'une sous-variété minimale. La formule de Eells-Sampson pour les applications harmoniques est un autre exemple de formule de variation où intervient un opérateur (laplacien+potentiel). Signalons aussi le problème de Yamabe (trouver une métrique de courbure scalaire constante dans chaque classe de conforme ou minimiser la courbure scalaire totale) qui donne naissance au laplacien conforme $4\frac{n-1}{n-2}\triangle + Scal(M^n, g)$ agissant sur les fonctions de $M$ (aussi appelé opérateur de Yamabe).

3) les opérateurs «classiques». Outre le laplacien de Hodge sur les formes différentielles, on peut citer le carré de l'opérateur de Dirac des variétés spinorielles ou le laplacien complexe des variétés Kählériennes. (voir [22] et [21] pour plus de détails).

Enfin, pour finir avec les notations de cette section, pour toute section $V$ du fibré des endomorphismes symétriques, *on notera* $\underline{V}(m)$ *sa plus petite valeur propre* pour l'action restreinte à la fibre $E_m$ et, pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$, *on notera* $f^-(m) = \max(0, -f(m))$ *sa partie négative (Resp.* $f^+(m) = \max(0, f(m))$ *sa partie positive). La fonction* $\underline{V}^-$ *est alors appelée la partie négative du potentiel* $V$.

## 1.3 Outils analytiques

### 1.3.1 Inégalité d'interpolation

Par souci de simplifier la lecture de cette première partie de la thèse, nous rappelons et démontrons un corollaire classique de l'inégalité de Hölder qui servira beaucoup dans la suite (rappelons que nous nous plaçons dans le cas d'une mesure de probabilité) :

**Lemme 1.1.** — *Soient* $a$, $b$, $c$ *des nombres réels strictement positifs et* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *des nombres de* $]0, +\infty]$ *tels que* $a = b + c$ *et* $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}$. *Alors, pour toute fonction* $u \in L^{\max(\beta,\gamma)}$, *on a :*

$$\|u\|_\alpha^a \leq \|u\|_\beta^b \|u\|_\gamma^c$$

**Démonstration.** — On se ramène facilement au cas $a = 1$. On suppose donc qu'il existe des réels $b$ et $c$ tels que $b + c = 1$ et $\frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = \frac{1}{\alpha}$. On a alors $\frac{1}{\alpha}$ compris entre $\frac{1}{\beta}$ et $\frac{1}{\gamma}$, ce dont on déduit l'existence d'un réel $t$ de $[0, 1]$ tel que $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$. On peut alors exprimer $b$ et $c$ en fonction de $t$, $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. On trouve $b = \frac{\beta t}{\alpha}$ et $c = \frac{\gamma(1-t)}{\alpha}$. L'inégalité de Hölder, pour les couples $p = \frac{1}{t}$ et $q = \frac{1}{1-t}$ nous donne alors :

$$\|u\|_\alpha = \|u\|_{t\beta+(1-t)\gamma} \leq \|u\|_\beta^{\frac{t\beta}{\alpha}} \|u\|_\gamma^{\frac{\gamma(1-t)}{\alpha}}$$

d'où le résultat. $\square$

Dans cette première partie de la thèse, on cherche à majorer des rapports de la forme $\frac{\|S\|_p}{\|S\|_q}$ pour des couples $p > q$. On déduit de l'inégalité précédente que, si on a une majoration du type $\|S\|_p \leq C\|S\|_q$, alors on a une majoration du même type pour tout couple $(p, q')$. C'est évident si $q' \geq q$. Si on suppose que $q' < q\,(< p)$, il existe alors une constante $t \in [0,1]$ telle que $\|S\|_q \leq \|S\|_{q'}^t \|S\|_p^{1-t}$ et $\frac{1}{q} = \frac{t}{q'} + \frac{1-t}{p}$ d'après le lemme précédent (i.e. $t = \frac{q'(p-q)}{q(p-q')}$). On en déduit que $\|S\|_p \leq C^{\frac{q(p-q')}{q'(p-q)}} \|S\|_{q'}$ si $q' < q$. Dans ce qui suit, on se contentera donc d'énoncer des majorations du rapport $\frac{\|S\|_p}{\|S\|_2}$ (ou $\frac{\|DS\|_p}{\|DS\|_2}$) ce qui, d'après ce qui précède, est suffisant pour obtenir des majorants des rapports $\frac{\|S\|_p}{\|S\|_q}$ (ou $\frac{\|DS\|_p}{\|DS\|_q}$) pour tout couple $p > q \geq 1$.

### 1.3.2 Inégalités de Sobolev et de Harnack

Pour toute variété riemannienne compacte $(M^n, g)$, *on notera* $S_q(M,g)$ *la plus petite constante telle que toute fonction* $u$ *de* $H^{1,2}(M)$ *vérifie l'inégalité de Sobolev :*

$$\|u\|_{\frac{2q}{q-2}} \leq S_q(M,g)\,\mathrm{Diam}(M)\|du\|_2 + \|u\|_2.$$

*On notera de même,* $S'_q(M,g)$ *la plus petite constante telle que toute fonction* $u$ *de* $H^{1,q}(M)$ *vérifie l'inégalité de Harnack :*

$$\sup\ u - \inf\ u \leq S'_q(M,g)\,\mathrm{Diam}(M)\|du\|_q.$$

On sait que la constante $S_q(M,g)$ existe pour tout réel $q \geq n$ ($q > n$ si $n = 2$) d'aprés le théorème plongement de Sobolev (voir par exemple [7], théorème 2.10 page 35). La constante $S'_q(M,g)$ existe quant à elle pour tout réel $q > n$. Dans la suite, les résultats énoncés seront valables pour toute une famille de variétés riemanniennes compactes vérifiant $S_q(M,g) \leq C$ et $S'_{q'}(M,g) \leq C'$ pour $q \geq n$, $q' > n$, $C > 0$ et $\infty \geq C' > 0$ des réels fixés. Toutefois, dans les applications pratiques, il est souvent plus satisfaisant de travailler sur des familles de variétés riemanniennes compactes vérifiant des inégalités (a priori) sur des invariants métriques plus courants, comme le diamètre et la courbure (voire le volume et le rayon d'injectivité). Pour ramener nos énoncés à ce cadre, on peut utiliser plusieurs résultats fournissant des majorants des constantes $S_q(M,g)$ et $S'_{q'}(M,g)$ en fonctions de bornes sur les invariants cités plus-haut. Parmi ces résultats, nous pouvons citer un résultat de S. Gallot (dans [48], amélioré dans [50]), qui sera utilisé dans la partie II de cette thèse, et qui a l'avantage de respecter la contrainte (i) (citée en introduction) imposée à nos majorations (c'est-à-dire de majorer universellement les constantes de Sobolev utilisées dans nos énoncés sur une famille de variétés ; cette famille de variétés contenant en particulier des suites qui s'effondrent ou qui convergent vers des variétés-limite singulières) :

**Théorème 1.2.** — *Pour tout entier $n$ ($n \geq 2$) et pour tout couple de réels $(p, q)$ tels que $q \geq p > n$, il existe des constantes $\zeta(p, n) > 0$ $C(p, n)$ et $C'(p, q, n)$ telles que, si $(M^n, g)$ est une variété riemannienne compacte qui vérifie* $\mathrm{Diam}(M)^2 \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} \leq \zeta(p, n)$, *alors, pour toute fonction $u$ de $H^{1,2}(M)$, on a :*

$$\|u\|_{\frac{2q}{q-2}} \leq C(p, n) \,\mathrm{Diam}(M) \|du\|_2 + \|u\|_2$$

*et, si de plus $q > p$ pour toute fonction $u$ de $H^{1,q}(M)$, on a :*

$$\sup u - \inf u \leq C'(p, q, n) \,\mathrm{Diam}(M) \|du\|_q$$

Remarquer que, dans le cas où on s'intéresse à des variétés dont on suppose pincée (en norme intégrale) la partie de la courbure de Ricci inférieure à $(n-1)$, on démontre dans la partie **III** de cette thèse que le diamètre est automatiquement borné par $2\pi$. On obtient alors, comme corollaire du résultat précédent, le théorème 4.17, qui sera utilisé dans la partie **III** de cette thèse et qui permet de s'affranchir d'une borne a priori sur le diamètre.

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient immédiatement la version plus générale suivante :

**Corollaire 1.3.** — *Pour tout entier $n$ ($n \geq 2$) et tous les réels $p$, $q$ tels que $p > n$ et $q > n$, il existe des constantes $\zeta(p, q, n) > 0$ $C(p, q, n)$ et $C'(p, q, n)$ telles que, si $(M^n, g)$ est une variété riemannienne compacte qui vérifie* $\mathrm{Diam}(M)^2 \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} \leq \zeta(p, q, n)$, *alors, pour toute fonction $u$ de $H^{1,2}(M)$, on a :*

$$\|u\|_{\frac{2q}{q-2}} \leq C(p, q, n) \,\mathrm{Diam}(M) \|du\|_2 + \|u\|_2$$

*et pour toute fonction $u$ de $H^{1,q}(M)$, on a :*

$$\sup u - \inf u \leq C'(p, q, n) \,\mathrm{Diam}(M) \|du\|_q$$

Pour d'autres résultats du même type, en particulier des résultats permettant de borner $S_n(M, g)$, on pourra consulter [48] et [61] (où des majorations optimales sont établies en courbure de Ricci minorée (au sens usuel)), ou [60] pour le cas des sous-variétés plongées (les majorations des constantes $S_n$ et $S'_q$ dépendent alors de la courbure de la variété ambiante et de la courbure moyenne de la sous-variété).

# Chapitre 2

# Sections quelconques

## 2.1 Majoration de $\|S\|_\infty/\|S\|_2$

Nous commençons par une proposition permettant de majorer le rapport $\frac{\|S\|_\infty}{\|S\|_2}$ d'une section $S$ quelconque du fibré $E$, en fonction d'une norme $L^p$ de $(\overline{\triangle}+V)S$, d'un majorant d'une constante de Sobolev de la base $M$ du fibré et d'un «minorant» du potentiel $V$. Cette proposition est une application de la méthode d'itération à la De Giorgi-Moser décrite dans [17].

**Proposition 2.1.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$), soient $p$, $q$ et $C$ des nombres réels tels que $\infty \geq p > q \geq n$ ($q > n$ si $n = 2$). Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$, de dimension $n$, qui vérifie $S_q(M^n, g) \leq C$, alors, pour toute section $S$ de $E$ et tout opérateur (laplacien+potentiel) $\overline{\triangle} + V$ sur $E$, on a :*

$$\|S\|_\infty \leq \big(1 + a(p,q,C)\Lambda\big)^{\frac{pq}{2(p-q)}} \|S\|_2$$

*où $a(p,q,C) = 1 + e^{\frac{Cq}{(\nu^{1/2}-1)(q-2)}(2+\frac{q(p-2)}{2(p-q)})^{\frac{1}{2}}}$, $\nu = \frac{q(p-2)}{p(q-2)}$ si $p < +\infty$ (le cas p=$\infty$ s'obtient par passage à la limite) et où :*

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\left(\frac{\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{p/2}}{\|S\|_\infty} + \|\underline{V}^-\|_{p/2}\right)}$$

**Remarque 1.** — Au vu de la démonstration qui suit, il suffit que la section $S$ soit dans $L^2(E)$ et $(\overline{\triangle}+V)S$ dans $L^{p/2}(E)$ pour que l'inégalité annoncée ait lieu.

**Remarque 2.** — *Cette estimation est optimale dans la mesure où le rapport $\frac{\|S\|_\infty}{\|S\|_2}$ tend vers 1 lorsque $\Lambda$ tend vers 0 (si $\Lambda = 0$, alors $V$ est positif ou nul et $(\overline{\triangle}+V)S = 0$. On en déduit que $\|DS\|_2^2 + \int_M (VS,S) = 0$, et donc $DS = 0$. Autrement dit, lorsque $\Lambda = 0$,*

*$\|S\|$ est une fonction constante et donc $\|S\|_\infty = \|S\|_2$).* De plus elle implique l'inégalité suivante :

$$\frac{\|S\|_\infty^{1+\gamma/2}}{\left[A\|S\|_\infty^{1/2}+B\right]^\gamma} \le \|S\|_2,$$

où $\begin{cases} \gamma &= \frac{pq}{2(p-q)} \\ A &= 1+a(p,q,C)\,\mathrm{Diam}\,M\|\underline{V}^-\|_{p/2}^{1/2} \\ B &= a(p,q,C)\,\mathrm{Diam}(M)\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{p/2}^{1/2} \end{cases}$

Le membre de gauche de cette inégalité étant une fonction croissante de $\|S\|_\infty$, on obtient une majoration de $\|S\|_\infty$ par une fonction $M(A,B,X)$ dès que $\|S\|_2$ est majoré par $X$ (ce majorant tend vers 0 quand $X$ tend vers 0). D'aprés le théorème des fonctions implicites, on a $\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial A} = \frac{\gamma M}{2A\sqrt{M}+B(2+\gamma)}$ et $\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial B} = \frac{\gamma\sqrt{M}}{2A\sqrt{M}+B(2+\gamma)}$, ce majorant est donc une fonction croissante des variables $A$ et $B$. En d'autres termes, $\|S\|_\infty$ est majorable par une fonction universelle, que l'on peut calculer a priori en fonction de majorants de $\|S\|_2$, de $A$ et de $B$ (cette fonction convergeant uniformément vers 0 lorsque sa première variable tend vers 0, et que les autres variables restent fixées).

**Démonstration.** — Le cas $p=+\infty$ se déduit facilement du cas fini par passage à la limite. On suppose donc dans la suite que $p$ est fini.

Posons $u=\sqrt{|S|^2+\epsilon^2}$ pour $\epsilon>0$. D'aprés l'inégalité de Kato :

$$\begin{aligned} u\triangle u &= \tfrac{1}{2}\triangle(u^2)+|du|^2 \le \tfrac{1}{2}\triangle(|S|^2)+|DS|^2 = <\overline{\triangle}S,S> \\ &\le |(\overline{\triangle}+V)S|u+\underline{V}^-u^2. \end{aligned}$$

Cette inégalité, la formule de Green et l'inégalité de Hölder nous donnent alors, pour tout réel $k>1/2$ :

$$\begin{aligned} \|d(u^k)\|_2^2 &= \frac{k^2}{2k-1}\int_M <du,d(u^{2k-1})> = \frac{k^2}{2k-1}\int_M (u\triangle u)u^{2k-2} \\ &\le \frac{k^2}{2k-1}\left[\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{\frac{p}{2}}\|u\|_{\frac{(2k-1)p}{p-2}}^{2k-1}+\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}}\|u\|_{\frac{2kp}{p-2}}^{2k}\right] \end{aligned}$$

En appliquant à la fonction $u^k$ l'inégalité de Sobolev donnée par l'hypothèse $S_q(M)\le C$, puis en faisant tendre $\epsilon$ vers 0, on obtient :

$$\|S\|_{\frac{2kq}{q-2}}^k \le \|S\|_{2k}^k + \frac{Ck\,\mathrm{Diam}(M)}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{\frac{p}{2}}\|S\|_{\frac{(2k-1)p}{p-2}}^{2k-1}+\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}}\|S\|_{\frac{2kp}{p-2}}^{2k}} \quad (*)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient les inégalités suivantes, valables pour tout $k>1/2$ :

$$\|S\|_{\frac{2kq}{q-2}} \le \left(\|S\|_\infty^{1/2}+\frac{Ck\,\mathrm{Diam}(M)}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{p/2}\|S\|_\infty+\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{\frac{p}{2}}}\right)^{1/k}\|S\|_{\frac{(2k-1)p}{p-2}}^{1-1/2k} \quad (**)$$

Remarquer que, sous l'hypothèse $p > q$, l'inégalité précédente donne un contrôle d'une norme $L^{q'}$ de $S$ par une norme $L^{p'}$ de $S$ où $q' > p'$. L'idée (de De-Giorgi et Moser) pour contrôler la norme $L^\infty$ de $S$ par sa norme $L^2$ est d'itérer l'inégalité précédente pour des valeurs de $k$ bien choisies. Pour cela on pose $\nu = \frac{q(p-2)}{p(q-2)} > 1$ et $k = a_n \frac{(p-2)}{2p} + \frac{1}{2}$, où $(a_n)_{n\in N}$ est la suite définie par la relation de récurrence : $a_0 = \frac{2p}{p-2}$ et $a_{n+1} = \nu a_n + \frac{q}{q-2}$ (on a alors $a_n = a_0\nu^n + \left(\frac{\nu^n-1}{\nu-1}\right)\frac{q}{q-2}$). L'inégalité $(**)$ se réécrit :

$$\left(\frac{\|S\|_{a_{n+1}}}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{a_{n+1}}{\nu^{n+1}}} \leq \left(1 + C\sqrt{a_n\frac{p-2}{p}}\Lambda\right)^{\frac{2q}{(q-2)\nu^{n+1}}}\left(\frac{\|S\|_{a_n}}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{a_n}{\nu^n}}$$

où on a utilisé l'inégalité $\frac{k}{\sqrt{2k-1}} \leq \sqrt{2k-1}$, valable du fait que $k \geq \frac{3}{2}$. D'où, puisque $\left(\frac{a_n}{\nu^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers une limite finie :

$$1 = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\|S\|_{a_n}}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{a_n}{\nu^n}} \leq \left[\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1 + C\sqrt{a_i\frac{p-2}{p}}\Lambda\right)^{\frac{2q}{(q-2)\nu^i}}\right]\left(\frac{\|S\|_{a_0}}{\|S\|_\infty}\right)^{a_0}$$

Or, on a :

$$\|S\|_{\frac{2p}{p-2}} \leq \|S\|_\infty^{2/p}\|S\|_2^{1-2/p}$$

d'aprés l'inégalité d'interpolation rappelée en introduction (lemme 1.1). On en déduit que :

$$\|S\|_\infty \leq \left[\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1 + C\sqrt{a_i\frac{p-2}{p}}\Lambda\right)^{\frac{1}{\nu^i}}\right]^{\frac{q}{(q-2)}}\|S\|_2$$

Enfin, pour obtenir la forme plus maniable de l'énoncé, on utilise la concavité de la fonction ln :

$$\begin{aligned}
\ln\left[\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + Ca_i^{1/2}\sqrt{\tfrac{p-2}{p}}\Lambda\right)^{\frac{1}{\nu^i}}\right] &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^i}\ln\left(1 + Ca_i^{1/2}\sqrt{\tfrac{p-2}{p}}\Lambda\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^i}\left[\ln(1+\Lambda) + \ln\left(1 + (C\sqrt{\tfrac{p-2}{p}}a_i^{1/2} - 1)\tfrac{\Lambda}{1+\Lambda}\right)\right]\\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^i}\left[\ln(1+\Lambda) + C\sqrt{\tfrac{p-2}{p}}a_i^{1/2}\tfrac{\Lambda}{1+\Lambda}\right]\\
&\leq \frac{1}{\nu-1}\ln(1+\Lambda) + C\sqrt{\tfrac{p-2}{p}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i^{1/2}}{\nu^i}\frac{\Lambda}{1+\Lambda}
\end{aligned}$$

Or, on a $\frac{a_i^{1/2}}{\nu^i} \leq \frac{(\frac{2p}{p-2}+\frac{pq}{2(p-q)})^{1/2}}{\nu^{i/2}}$. Si on pose $b(p,q,C) = C\frac{q}{q-2}\sqrt{\frac{p-2}{p}}\frac{(\frac{2p}{p-2}+\frac{pq}{2(p-q)})^{1/2}}{\nu^{1/2}-1}$, on obtient l'inégalité :

$$\|S\|_\infty \leq (1+\Lambda)^{\frac{pq}{2(p-q)}}(1 + a'(p,q,C)\frac{\Lambda}{1+\Lambda})\|S\|_2,$$

où $a'(p,q,C) = e^{b(p,q,C)}$. Pour cela, on utilise la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et la croissance de ln, qui impliquent que :

$$\ln\left(1 + e^b\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right) \geq \frac{\Lambda}{1+\Lambda}\ln\left(1+e^b\right) \geq b\frac{\Lambda}{1+\Lambda}$$

Enfin, en remarquant que $1+a'\frac{\Lambda}{1+\Lambda}=\frac{1+(1+a')\Lambda}{1+\Lambda}$ et que $\frac{pq}{2(p-q)}\geq 1$, on déduit de l'inégalité précédente :

$$\|S\|_\infty \leq \big(1+(1+a')\Lambda\big)^{\frac{pq}{2(p-q)}}\|S\|_2,$$

$\square$

**Variantes**

**1.** On pourrait remplacer le rapport $\frac{\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{p/2}}{\|S\|_\infty}$ par $\frac{\|((\overline{\triangle}+V)S,S)\|_{p/2}}{\|S\|_\infty^2}$ dans la proposition 2.1.

**2.** Si on a seulement besoin d'un majorant du rapport $\|S\|_r/\|S\|_2$ avec $r<+\infty$, il y a une méthode plus directe (sans itération), mais plus restrictive sur les valeurs de $p$ et $q$, à partir de l'inégalité $(*)$ de la démonstration de la proposition 2.1 : en posant $k=\frac{r(p-2)}{2p}$ dans cette inégalité (mais alors l'inégalité qui suit n'est valable que si $r>\frac{p}{p-2}$, pour que $k>\frac{1}{2}$) et en remplaçant alors l'argument d'itération de l'inégalité $(**)$ par l'usage de l'inégalité de Hölder $\|S\|_r^{1+1/\gamma}\leq\|S\|_2^{1/\gamma}\|S\|_{\frac{rq(p-2)}{p(q-2)}}$ (où $\gamma=\frac{q(p-2)(r-2)}{4(p-q)}$ d'après l'inégalité d'interpolation 1.1) on obtient finalement :

$$\frac{\|S\|_r}{\left(1+\frac{r}{2}\sqrt{\frac{p-2}{p}}\frac{1}{\sqrt{r-\frac{p}{p-2}}}C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{p/2}+\frac{\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{\frac{p}{2}}}{\|S\|_r}}\right)^{\frac{pq(r-2)}{2(p-q)r}}}\leq\|S\|_2.$$

Nous revenons plus en détail sur cette méthode dans la démonstration de la proposition 2.4.

**3.** Dans la démonstration de la proposition 2.1, on utilise $p>q$ pour pouvoir contrôler une norme intégrale de $S$ par une norme intégrale de $S$ d'indice plus petit (inégalité $(**)$). Toutefois, dans le cas limite $p=q\geq n$ ($q>n$ si $n=2$), on peut utiliser l'inégalité $(*)$ pour établir l'inégalité :

$$\|S\|_{\frac{2kq}{q-2}}\leq\Big(1-\frac{C\,\mathrm{Diam}(M)k}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}+\frac{\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{\frac{q}{2}}}{\|S\|_\infty}}\Big)^{-\frac{1}{k}}\|S\|_{2k}$$

Inégalité que l'on peut itérer comme précédemment (en partant de $k\geq 1$), tant que la condition $\sqrt{k}C\Lambda=\sqrt{k}C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}+\frac{\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{\frac{q}{2}}}{\|S\|_\infty}}<1$ est vérifiée. On peut ainsi obtenir une majoration du rapport $\frac{\|S\|_r}{\|S\|_2}$ (où $r$ est fini) dès que $C\Lambda$ est plus petit qu'une constante dépendant de $r$ (ce majorant du rapport $\frac{\|S\|_r}{\|S\|_2}$ tendant vers 1 lorsque $\Lambda$ tend vers 0).

## 2.2 Majoration de $\|DS\|_\infty$ en fonction de $\|DS\|_2$

En appliquant de nouveau une technique d'itération de De Giorgi-Möser, nous allons majorer $\|DS\|_\infty$ en fonction de $\|DS\|_2$. Le résultat obtenu est une généralisation d'un résultat du même type de M. Le Couturier et G. Robert dans [65] (notez que dans leur cas, $S$ doit être une section harmonique pour un opérateur (laplacien+potentiel) et qu'ils ne majorent que la norme $\|DS\|_r$ pour $r$ fini (Voir aussi la section 2.3)) et de S. Ilias dans [62] (celui-ci s'intéresse au cas où $S = df$, où $f$ est une fonction propre du laplacien sur les fonctions. S. Ilias obtient dans ce cas une estimée analogue à celle de la proposition 2.2, à ceci près que les normes intégrales de courbure qui interviennent dans le calcul du coefficient $\Lambda$ de l'inégalité de la proposition 2.2 sont, dans les travaux de S. Ilias, remplacées par des normes $L_\infty$) :

**Proposition 2.2.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$), soient $p$, $q$ et $C$ des nombres réels tels que $\infty \geq p > q \geq n$ ($q > n$ si $n = 2$). Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie $S_q(M,g) \leq C$. Alors, pour toute section $S$ de $E$, on a :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_\infty}{\|S\|_\infty} \leq \left(1 + a'(p,q,C)\Lambda^{1/2}\right)^{\frac{pq}{p-q}}$$
$$\times \max\left[\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}, \left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{2(p-q)}{2(p-q)+pq}}\right],$$

*où $a'(p,q,C) = 1 + a(p,q,2\sqrt{2C})$ ($a$ est la même fonction que dans la proposition 2.1), et où :*

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p}{2}} + \mathrm{Diam(M)}^2\left[\frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|_\mathrm{p}^2}{\|\mathrm{S}\|_\infty^2} + \frac{\|\mathrm{R^E S}\|_\mathrm{p}^2}{\|\mathrm{S}\|_\infty^2}\right]}.$$

**Remarque.** — Dans cet énoncé, $\Lambda$ peut-être remplacé par :

$$\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p}{2}}} + \mathrm{Diam}(M)^2\left[\frac{\|\overline{\triangle}S\|_p}{\|S\|_\infty} + \frac{\|\mathrm{R^E S}\|_\mathrm{p}}{\|S\|_\infty}\right]$$

La démonstration de cette proposition suit le même schéma que celle de la proposition 2.1, bien qu'elle soit toutefois compliquée par le fait que l'opérateur $\overline{\triangle}$ ne commute pas avec la dérivée covariante. Si on note cette fois $u = \sqrt{|DS|^2 + \epsilon^2}$, la formule de Kato ne suffit plus à majorer $\triangle u$ par un polynôme en $u$. Commençons donc par établir un lemme préliminaire qui nous permettra de majorer le terme $< \overline{\triangle} DS, DS >$. Ce lemme, qui calcule le défaut de commutation entre $D$ et $\overline{\triangle}$ est déjà présent dans les travaux de S. Gallot [46] et S. Ilias [62] sous une forme particulière (voir à ce propos la fin de cette section) et est énoncé sous sa forme générale dans [65] :

**Lemme 2.3.** — *Pour toute section $S$ de $E$, on a :*

$$\frac{1}{2}\triangle\left(|DS|^2\right) + |D^2S|^2 \leq \quad < D^* R^E S, DS > + \underline{\mathrm{Ric}}^-|DS|^2 + < D\overline{\triangle}S, DS > + \|R^E\|.|DS|^2,$$

*où* $\|R^E\|$ *est la norme de l'application linéaire induite par* $\mathrm{R}^{\mathrm{E}}$ *:*

$$R^E \ : \ \begin{cases} \bigwedge^2 T_m M & \rightarrow \ \bigwedge^2 \ E_m^* \\ \quad u \wedge v & \mapsto \ R^E(u,v) \end{cases}$$

*où* $R^E(u \wedge v)(T,S) = < R^E(u,v)T, S >$.

**Démonstration du Lemme 2.3.** — On déduit de la formule classique $< \overline{\triangle} T, T > = \frac{1}{2}\triangle|T|^2 + |DT|^2$, valable pour tout tenseur à valeur dans $E$, que :

$$\frac{1}{2}\triangle\left(|DS|^2\right) + |D^2S|^2 = < (\overline{\triangle} D - D\overline{\triangle})S, DS > + < D\overline{\triangle} S, DS > .$$

Or, si $DS$, $R^E S$ et $D^3 S$ sont considérés (respectivement) comme des 1, 2 et 3-tenseurs à valeurs dans $E$, et si $< .,. >$ désigne le produit scalaire dans $E$, on a :

$$\begin{aligned} < (\overline{\triangle} D - D\overline{\triangle})S, DS > \ &= \sum_{i,j} < D^3S(i,j,j) - D^3S(j,j,i), DS(i) > \\ &= \sum_{i,j} < D^3S(i,j,j) - D^3S(j,i,j), DS(i) > \\ &\qquad\qquad + < D^3S(j,i,j) - D^3S(j,j,i), DS(i) > \end{aligned}$$

et :

$$\begin{cases} D^3S(i,j,j) - D^3S(j,i,j) = \sum_k R^M(i,j,j,k)DS(k) + R^E(i,j)(DS(j)) \\ \\ \sum\limits_j D^3S(j,i,j) - \sum\limits_j D^3S(j,j,i) = \sum\limits_j D(R^E S)(j,i,j) = D^* R^E S(i) \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} < (\overline{\triangle} D - D\overline{\triangle})S, DS > \ &= -\sum_{i,k} \mathrm{Ric}(i,k) < DS(i), DS(k) > + < D^* R^E S, DS > \\ &\qquad + \sum\nolimits_{i,j} < R^E(i,j)(DS(j)), DS(i) >, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dont on déduit aisément le résultat annoncé.

□

**Démonstration de la proposition 2.2.** — *Pour la suite, nous adoptons les notations suivantes* :

$$B_1(s) = \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_s + \|R^E\|_s, \qquad B_2(s) = \frac{\|\overline{\triangle} S\|_s^2}{\|S\|_\infty^2} + \frac{\|R^E S\|_s^2}{\|S\|_\infty^2}.$$

Posons $u = \sqrt{|DS|^2 + \epsilon^2}$. En procédant comme dans la démonstration de la proposition 2.1, on montre que :

$$u\triangle u \le \frac{1}{2}\triangle\left(|DS|^2\right) + |D^2S|^2$$

Donc, d'après le lemme 2.3 :

$$\begin{aligned}\int_M |d(u^k)|^2 &\le \frac{k^2}{2k-1}\int_M (\frac{1}{2}\triangle|DS|^2 + |D^2S|^2)u^{2(k-1)} \\ &\le \frac{k^2}{2k-1}\Big(\int_M \underline{\mathrm{Ric}}^- u^{2k} + \int_M < D\overline{\triangle}S, DS > u^{2(k-1)} \\ &\quad + \int_M < D^*\mathrm{R^E S, DS} > \mathrm{u}^{2(\mathrm{k}-1)} + \int_{\mathrm{M}} \|\mathrm{R^E}\|\mathrm{u}^{2\mathrm{k}}\Big) \qquad (*)\end{aligned}$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème de la divergence aux deuxième et troisième termes du membre de droite de cette inégalité afin d'obtenir des estimées qui ne dépendent pas de la dérivée covariante de la courbure du fibré $E$, ni de dérivées d'ordre supérieur à 2 de $S$. Le théorème de la divergence, appliqué au champ $u^{2(k-1)} < \overline{\triangle}S, D_\bullet S >^\#$, nous donne, pour tout $k \ge 1$ :

$$\begin{aligned}\int_M < D\overline{\triangle}S, DS > u^{2(k-1)} &= \int_M |\overline{\triangle}S|^2 u^{2(k-1)} - 2(k-1)\sum_i \int_M < \overline{\triangle}S, DS(i) > du(i).u^{2k-3} \\ &\le \int_M |\overline{\triangle}S|^2 u^{2(k-1)} + 2(k-1)\int_M |\overline{\triangle}S||du|u^{2(k-1)} \\ &\le \frac{k-1}{2}\int_M |du|^2 u^{2(k-1)} + (2k-1)\int_M |\overline{\triangle}S|^2 u^{2(k-1)}\end{aligned}$$

En faisant de même avec le champ $u^{2(k-1)}(tr_{1,3}(< R^E_{(\bullet,\bullet)}S, D_\bullet S >))^\#$ (où on définit la 1-forme $tr_{1,3}(< R^E_{(\bullet,\bullet)}S, D_\bullet S >)$ comme la trace par rapport aux première et troisième variables du 3-tenseur covariant $< R^E_{(\bullet,\bullet)}S, D_\bullet S >$) et en remarquant que, par antisymétrie de $\mathrm{R^E}$, on a :

$$\sum_{i,j} < \mathrm{R^E S(i,j), D^2 S(i,j)} >= \frac{1}{2}|\mathrm{R^E S}|^2,$$

on trouve :

$$\begin{aligned}\int_M < D^*R^E S, DS > u^{2(k-1)} &= \int_M \frac{1}{2}|\mathrm{R^E S}|^2 \mathrm{u}^{2(\mathrm{k}-1)} \\ &\quad + 2(k-1)\sum_{i,j}\int_M < R^E(i,j)S, D_j S > du(i)u^{2k-3} \\ &\le \frac{k-1}{2}\int_M |du|^2 u^{2(k-1)} + (2k-1)\int_M |\mathrm{R^E S}|^2 \mathrm{u}^{2(\mathrm{k}-1)}\end{aligned}$$

En remarquant que $\int_M |du|^2 u^{2(k-1)} = \frac{1}{k^2}\int_M |d(u^k)|^2$, et en reportant ces deux estimées dans l'inégalité $(*)$, on obtient :

$$\|d(u^k)\|_2^2 \le k\big(\int_M \underline{\mathrm{Ric}}^- u^{2k} + \int_M \|\mathrm{R^E}\|\mathrm{u}^{2\mathrm{k}}\big) + \mathrm{k(2k-1)}\big(\int_{\mathrm{M}} \|\mathrm{R^E S}\|^2 \mathrm{u}^{2\mathrm{k}-2} + \int_{\mathrm{M}} \|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|^2 \mathrm{u}^{2\mathrm{k}-2}\big)$$

De l'inégalité de Hölder nous déduisons l'inégalité suivante, valable pour tout $k \ge 1$ :

$$\|d(u^k)\|_2 \le 2k\left(\sqrt{B_1(p/2)\|u\|^{2k}_{\frac{2kp}{p-2}} + B_2(p)\|S\|^2_\infty \|u\|^{2(k-1)}_{\frac{2(k-1)p}{p-2}}}\right)$$

En se servant de l'inégalité de Sobolev donnée par hypothèse (appliquée à la fonction $u^k$) et en faisant tendre $\epsilon$ vers 0, on obtient l'inégalité :

$$\|DS\|^k_{\frac{2kq}{q-2}} \leq \|DS\|^k_{2k} + C\,\mathrm{Diam}(M)2k\left(\sqrt{B_1(p/2)\|DS\|^{2k}_{\frac{2kp}{p-2}} + B_2(p)\|S\|^2_\infty\|DS\|^{2(k-1)}_{\frac{2(k-1)p}{p-2}}}\right)$$

combinée à l'inégalité $\|DS\|_{2k} \leq \|DS\|_{\frac{2kp}{p-2}} \leq \|DS\|^{1/k}_\infty \|DS\|^{(1-1/k)}_{\frac{2(k-1)p}{p-2}}$, nous en déduisons :

$$\left(\frac{\|DS\|_{\frac{2kq}{q-2}}}{\|DS\|_\infty}\right)^{\frac{2kq}{q-2}} \leq \left[1 + 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(p/2) + \frac{B_2(p)\|S\|^2_\infty}{\|DS\|^2_\infty}}\right]^{\frac{2q}{q-2}} \left(\frac{\|DS\|_{\frac{2(k-1)p}{p-2}}}{\|DS\|_\infty}\right)^{\nu\frac{2(k-1)p}{p-2}},$$

où on a posé $\nu = \frac{q(p-2)}{p(q-2)} > 1$.

En procédant exactement comme dans la démonstration de la proposition 2.1 (en posant cette fois-ci $k = \frac{a_n(p-2)}{2p} + 1$ où $(a_n)$ est définie par $a_0 = \frac{2p}{p-2}$ et $a_{n+1} = \nu a_n + \frac{2q}{q-2}$), on trouve :

$$1 \leq \left[\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + 2Ca_i\frac{p-2}{p}\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(p/2) + \frac{B_2(p)\|S\|^2_\infty}{\|DS\|^2_\infty}}\right)^{1/\nu^i}\right]^{\frac{2q}{q-2}} \left(\frac{\|DS\|_{a_0}}{\|DS\|_\infty}\right)^{a_0}$$

d'où :

$$\|DS\|_\infty \leq \left[\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + 2Ca_i\frac{p-2}{p}\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(p/2) + \frac{B_2(p)\|S\|^2_\infty}{\|DS\|^2_\infty}}\right)^{1/\nu^i}\right]^{\nu} \|DS\|_{a_0}$$

En utilisant l'inégalité d'interpolation $\|DS\|_{a_0} \leq \|DS\|_2^{1-\frac{2}{p}}\|DS\|^{\frac{2}{p}}_\infty$, on obtient :

$$\|DS\|_\infty \leq \left[\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + 2Ca_i\frac{p-2}{p}\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(p/2) + \frac{B_2(p)\|S\|^2_\infty}{\|DS\|^2_\infty}}\right)^{1/\nu^i}\right]^{\frac{q}{q-2}} \|DS\|_2, \qquad (**)$$

En considérant séparément le cas où $\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_\infty \leq \|S\|_\infty$ et le cas où $\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_\infty \geq \|S\|_\infty$, on trouve :

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_\infty}{\|S\|_\infty} \leq \left[\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + 2Ca_i\frac{p-2}{p}\Lambda\right)^{1/\nu^i}\right]^{\frac{q}{q-2}} \times \max\left[\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}, \left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{2(p-q)}{2(p-q)+pq}}\right].$$

C'est évident dans le cas où $\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_\infty \geq \|S\|_\infty$. Dans l'autre cas, on réécrit $(**)$ sous la forme :

$$\|DS\|_\infty \leq \left(\frac{\|S\|_\infty}{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_\infty}\right)^{\frac{q}{(\nu-1)(q-2)}} \left[\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + 2Ca_i\frac{p-2}{p}\Lambda\right)^{1/\nu^i}\right]^{\frac{q}{q-2}} \|DS\|_2$$

Dont on déduit :

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_\infty}{\|S\|_\infty} \leq \left[\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+2Ca_i\frac{p-2}{p}\Lambda\right)^{1/\nu^i}\right]^{\frac{q}{q-2}} \left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{2(p-q)}{2(p-q)+pq}}$$

(où on a utilisé le fait que le produit infini entre crochet est plus grand que 1).

Enfin, pour majorer le produit infini, on procède comme dans la démonstration de la proposition 2.1, en commençant par $1+2Ca_i\frac{p-2}{p}\Lambda \leq \left(1+(2C)^{1/2}\sqrt{a_i\frac{p-2}{p}}\Lambda^{1/2}\right)^2$. □

### Autres opérateurs (laplacien+potentiel)

Cette majoration de $\|DS\|_\infty$ a été écrite à partir du laplacien brut, mais en remarquant que :

$$\frac{\|\overline{\triangle}S\|_p}{\|S\|_\infty} \leq \frac{\|(\overline{\triangle}+V)S\|_p}{\|S\|_\infty} + \|V\|_p \qquad \text{et} \qquad \frac{\|DS\|_2^2}{\|S\|_\infty^2} \leq \frac{<(\overline{\triangle}+V)S, S>}{\|S\|_\infty^2} + \|\underline{V}^-\|_1,$$

on voit qu'on peut écrire cette majoration à partir de n'importe quel opérateur (laplacien+potentiel). Cette idée sera reprise systématiquement dans le chapitre **3**, lorsqu'il s'agira de travailler avec des combinaisons linéaires de sections propres d'un opérateur $\overline{\triangle}+V$.

### A propos des travaux de P. Petersen et C. Sprouse sur ce sujet

On peut comparer la proposition précédente avec le théorème 4.2 de [80] :

**Théorème** (P. PETERSEN, C. SPROUSE). — *Soit $E$ un fibré riemannien sur $M$. On suppose que* $\mathrm{Diam}(M) \leq D$ *et que :*

$$\widetilde{\mathrm{R}} \geq -K_1 \quad \mathrm{Ric}^M \geq -K_2 \quad -K_3 \leq D^*\mathrm{R}^{\mathrm{E}} \leq \mathrm{K}_3$$

*où $K_1$, $K_2$, $K_3$ sont des constantes positives (et où $\widetilde{\mathrm{R}}$ est l'opérateur de courbure induit par $\mathrm{R}^{\mathrm{M}}$, considéré comme champ d'endomorphismes symétriques du fibré $\wedge^2(T^*M)$). Alors, toute section de $E$ telle que $\overline{\triangle}S = \lambda S$ vérifie :*

$$\|DS\|_\infty \leq C(n, K_1, K_2, K_3, D, \lambda, \|S\|_2)$$

*et donc $\|DS\|_p \leq \tau(n, K_1, K_2, K_3, p, D, \lambda, \|S\|_2)$ pour tout $1 < p < \infty$. De plus,*

$$\|DDS\|_2 \leq C(n, K_1, K_2, K_3, D, \lambda, \|S\|_2, \|DS\|_2)$$

(remarquer que notre méthode donne, de cette dernière inégalité, une version améliorée et plus générale. En effet, en appliquant le théorème de la divergence à l'inégalité donnée par le lemme 2.3, nous obtenons :

$$\|D^2S\|_2^2 \leq \frac{1}{2}\|R^ES\|_2^2 + \|\overline{\triangle}S\|_2^2 + (\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_1 + \|R^E\|_1)\|DS\|_\infty^2,$$

on conclut alors en appliquant la proposition 2.1 au tenseur $DS$). P. Petersen et C. Sprouse obtiennent le même type de bornes pour les sections propres de $\overline{\triangle}$ agissant sur $T^*M$, mais celles-ci dépendent d'un majorant de $|D^*R|$. Non seulement nous étendons cette propriété à tout opérateur (laplacien+potentiel) et à n'importe quelle section d'un fibré $E$, mais surtout, nous nous débarrassons de la dépendance par rapport aux dérivées de la courbure par l'utilisation du théorème de la divergence (les auteurs de [80] proposent de s'en débarrasser dans leur cadre par un argument de régularisation de la métrique par le flot de Ricci assez délicat à utiliser (et qui reste à démontrer) puisqu'il faut approximer $g$ par une autre métrique arbitrairement $C^1$-proche qui admet une borne universelle sur les dérivées de la courbure, tout en conservant des minorants universels de $\tilde{\mathrm{R}}$ et de $\mathrm{Ric}^M$ analogues à ceux donnés dans les hypothèses du théorème. Voir aussi la partie II de cette thèse pour des remarques à ce propos).

### Autres défauts de commutation

Dans le lemme 2.3, on a calculé le défaut de commutation de $D$ et $\overline{\triangle}$ (formule 2.1) où $D\overline{\triangle}$ et $\overline{\triangle}D$ sont considérés comme des applications linéaires de l'ensemble $\Gamma(E)$ des sections de $E$ à valeur dans l'ensemble $T^*M \otimes E$ des tenseurs 1-covariants de $M$ à valeur dans $E$. Remarquer que cela se généralise directement au cas où on considère deux opérateurs (laplacien+potentiel) $\triangle_0 = \overline{\triangle} + V_0$ sur $E$ et $\triangle_1 = \overline{\triangle} + V_1$ sur $T^*M \otimes E$. La formule (2.1) nous donne alors :

$$(\triangle_1 D - D\triangle_0)S = -\sum_i \mathrm{Ric}^M(i,.)D_iS + D^*\mathrm{R^ES} + \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{R^E(.,i)(D_iS) + V_1(DS) - D(V_0S)}$$

Remarquer que, dans le cas où $\triangle_0$ et $\triangle_1$ sont des laplaciens naturels, l'utilisation de propriétés de symétrie de $V_1$ et $V_0$ (par exemples des identités de Bianchi) peuvent amener des simplifications dans la formule précédente.

Considérons par exemple le cas particulier où $E$ est le fibré des 1-formes différentielles de $M$, $\triangle_0 = \triangle_H = \overline{\triangle} + \mathrm{Ric}^M$ est le laplacien de Hodge et $\triangle_1 = \triangle_L = \overline{\triangle} + \mathcal{R}$ est le laplacien de Lichnerowicz sur les 2-tenseurs covariants de $M$ ($\mathcal{R}$ est défini pour tout 2-tenseur $h$ par la formule $\mathcal{R}(h)(i,j) = \sum_k \mathrm{Ric}^M(i,k)h(k,j) + \mathrm{Ric}^M(j,k)h(i,k) - 2\sum_{kl} \mathrm{R^M(i,k,j,l)h(k,l)}$). Pour toute 1-forme $\alpha$ de $M$, on a :

$$(\triangle_L D - D\triangle_H)\alpha = (\overline{\triangle}D - D\overline{\triangle})\alpha + \mathcal{R}(D\alpha) - D(\mathrm{Ric}(\alpha))$$

La formule (2.1) nous donne alors :

$$(\overline{\triangle}D - D\overline{\triangle})\alpha(i,j) = \sum_k -\operatorname{Ric}(i,k)D\alpha(k,j) + \big(\mathrm{R(i,k)(D_k}\alpha)\big)\mathrm{(j)} + \mathrm{D(R}\alpha)\mathrm{(k,i,k,j)}$$

Or, on a :

$$\sum_k \big(\mathrm{R(i,k)(D_k}\alpha)\big)\mathrm{(j)} = -\big(\mathrm{D_k}\alpha\big)\big(\mathrm{R^M(i,k)j}\big) = -\sum_{\mathrm{k,l}} \mathrm{D}\alpha\mathrm{(k,l)R^M(i,k,l,j)} \qquad (1)$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_k D(\mathrm{R}\alpha)\mathrm{(k,i,k,j)} &= \sum_k -D_k(\alpha(\mathrm{R^M(i,k)j})) \\
&= \sum_k -D\alpha\big(k,\mathrm{R^M(i,k)j}\big) - \alpha\big((\mathrm{D_kR})_{\mathrm{(i,k)}}\mathrm{j}\big) \\
&= -\sum_{k,l} D\alpha(k,l)\mathrm{R^M(i,k,l,j)} - \sum_{\mathrm{k}} \alpha\big((\mathrm{D_kR})_{\mathrm{(i,k)}}\mathrm{j}\big)
\end{aligned}$$

Par symétrie du tenseur de courbure $\mathrm{R^M}$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha\big((D_kR)_{(i,k)}j\big) &= \sum_l \alpha\big[D_k\big(\mathrm{R^M(i,k,l,j)l}\big)\big] \\
&= \sum_l \alpha\big[D_k\big(\mathrm{R^M(l,j,i,k)l}\big)\big] = \sum_{\mathrm{l}} \mathrm{g}\big((\mathrm{D_kR})_{\mathrm{(l,j)}}\mathrm{k,i}\big)\alpha\mathrm{(l)}
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant la relation $DR(X,Y,Z)+DR(Y,Z,X)+DR(Z,X,Y)=0$ (deuxième indentité de Bianchi), on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_k D(\mathrm{R}\alpha)\mathrm{(k,i,k,j)} &= \sum_{\mathrm{k,l}} \alpha\mathrm{(l)g}\big((\mathrm{D_lR})_{\mathrm{(j,k)}}\mathrm{k,i}\big) + \alpha\mathrm{(l)g}\big((\mathrm{D_jR})_{\mathrm{(k,l)}}\mathrm{k,i}\big) - \mathrm{D}\alpha\mathrm{(k,l)R^M(i,k,l,j)} \\
&= D\operatorname{Ric}(\alpha^\#,j,i) - D\operatorname{Ric}(j,\alpha^\#,i) - \sum_{k,l} D\alpha(k,l)\mathrm{R^M(i,k,l,j)} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Enfin (rappelons que les calculs, en un point $x$ de $M$, sont faits relativement à un repère local $(e_i)$, orthonormal et de dérivée covariante nulle au point $x$. Donc $D^M_v e_i(x)$ est nul pour tout $v \in T_xM$), on a :

$$D\operatorname{Ric}(\alpha)(i,j) = \sum_k D_i(\operatorname{Ric}(k,j)\alpha(k)) = \big(D\operatorname{Ric}\big)(i,\alpha^\#,j) + \sum_k \operatorname{Ric}^M(k,j)D\alpha(i,k) \quad (3).$$

En regroupant les calculs précédents ((1), (2) et (3)), et en utilisant la définition de $\mathcal{R}$, on obtient la formule de commutation :

$$(\triangle_L D - D\triangle_H)\alpha(i,j) = -D\operatorname{Ric}(i,\alpha^\#,j) - D\operatorname{Ric}(j,\alpha^\#,i) + D\operatorname{Ric}(\alpha^\#,j,i) = \square\operatorname{Ric}(\alpha^\#;i,j)$$

où l'opérateur $\square$ est l'opérateur opérant sur les 2-tenseurs et à valeurs dans les trois tenseurs, introduit par M. Berger et D. Ebin dans [19] et défini par $\square h(X,Y,Z) = Dh(X,Y,Z) - Dh(Z,X,Y) - Dh(Y,Z,X)$. La formule de commutation ainsi obtenue est celle établie et utilisée dans [46] et [62] pour démontrer un cas particulier de la proposition 2.2.

## 2.3 Majoration de $\|DS\|_r$ $(r > n)$ en fonction de $\|DS\|_2$

Dans certaines applications (en particulier pour majorer le rapport $\frac{\sup|S|}{\inf|S|}$, voir la section 2.4), on peut se contenter de majorer le rapport $\frac{\|DS\|_r}{\|DS\|_2}$ avec $\infty > r > n$. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de faire appel à un argument d'itération à la De Giorgi-Moser. L'utilisation directe d'une seule inégalité de Sobolev, appliquée à la fonction $|DS|$, et de l'inégalité de Hölder suffit. On peut aussi affaiblir le contrôle des normes des termes $\overline{\triangle}S$ et $\mathrm{R^E S}$ qui était nécessaire à l'obtention de l'estimée. En effet, dans la proposition 2.2, les normes $L^p$ de ces deux quantités, nécessaires pour faire marcher l'itération, devaient vérifier $p > n$. Dans la proposition suivante, $p$ peut descendre jusqu'à 2 (voir aussi le corollaire 2.5 pour un énoncé plus parlant et suffisant pour les applications visées dans la suite de cette thèse).

**Proposition 2.4.** — *Soit $n$ un entier $(n \geq 2)$. Soient $q$, $p_1$, $p_2$, $r$ et $C$ des nombres réels tels que $p_1 > q \geq p_2 \geq 2$, $q \geq n$ ($q > n$ si $n = 2$) et $2 < r < \frac{p_2 q}{q-p_2}$. Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie $S_q(M,g) \leq C$. Alors, pour toute section $S$ de $E$, on a :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_r}{\|S\|_\infty} \leq \Big(1 + \big(2 + \frac{r'(p_2-2)}{p_2}\big) C\Lambda\Big)^{1/\gamma} \times \max\left[\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}, \Big(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\Big)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\right],$$

*où* $\gamma = \frac{2\left[1 - r'\left(\frac{q-p_2}{p_2 q}\right)\right]}{r'-2}$, $r' = \max(r, \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2})$ *et où :*

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p_1}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p_1}{2}} + \mathrm{Diam(M)}^2\left[\frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|^2_{\mathrm{p_2}}}{\|\mathrm{S}\|^2_\infty} + \frac{\|\mathrm{R^E S}\|^2_{\mathrm{p_2}}}{\|\mathrm{S}\|^2_\infty}\right]}.$$

**Remarque.** — Le cas le plus intéressant est le cas $2q \geq p_1 = p = 2p_2 > q$, la condition sur $r$ s'écrit alors $r < \frac{pq}{2q-p}$ et il est possible de choisir $r$ strictement supérieur à $p$, i.e. $p < r < \frac{pq}{2q-p}$.

On a en particulier le corollaire suivant, qui généralise aux sections quelconques le théorème 1.4.1 de [65] (démontré pour les sections harmoniques d'opérateurs (laplacien+potentiel)) :

**Corollaire 2.5.** — *Soit $n$ un entier $(n \geq 4)$. Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne $(M^n, g)$ compacte qui vérifie $S_q(M,g) \leq C$ pour un réel $q \geq n$. Alors, pour toute section $S$ de $E$ et pour tout réel $p \in ]q, 2q]$, on a :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_p}{\|S\|_\infty} \leq (1 + (p-2)C\Lambda)^{\frac{1}{\gamma}} \max\left[\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}, \Big(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\Big)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\right]$$

*où* $\gamma = \frac{2(p-q)}{q(p-2)}$ *et où*

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p}{2}} + \mathrm{Diam(M)}^2\left(\frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|^2_{\frac{p}{2}}}{\|\mathrm{S}\|^2_\infty} + \frac{\|\mathrm{R^ES}\|^2_{\frac{p}{2}}}{\|\mathrm{S}\|^2_\infty}\right)}.$$

*Le même énoncé vaut pour* $n = 2, 3$ *et pour tous les couples* $(p, q)$ *tels que* $n \leq q < p < 4$ *(*$q > n$ *si* $n = 2$*), en remplaçant* $\gamma$ *par* $\frac{p-q}{q}$ *et* $\Lambda$ *par*

$$\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p}{2}} + \mathrm{Diam(M)}^2\left(\frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|^2_2}{\|\mathrm{S}\|^2_\infty} + \frac{\|\mathrm{R^ES}\|^2_2}{\|\mathrm{S}\|^2_\infty}\right)}.$$

**Démonstration du corollaire.** — Si $n \geq 4$, on applique la proposition 2.4 en faisant $p_1 = p$ et $p_2 = \frac{p}{2}$. On choisit aussi $r = p$ (c'est permis, car $p < \frac{pq}{2q-p}$) et on obtient alors $r' = r = p$.

Si $n \leq 3$, l'hypothèse $n \leq q < p < 4$ implique qu'on peut poser $p_1 = p$ et $p_2 = 2$ et appliquer la proposition 2.4. On choisit $r = p$ (c'est possible, car $q < 4$ implique que $\frac{2q}{q-2} > 4 > p$), ce qui donne $r' = \frac{2p}{p-2}$ et $\gamma = \frac{p-q}{q}$.

□

**Démonstration de la proposition 2.4.** — On obtient le cas $p_2 = 2$ par passage à la limite. On suppose dans la suite que $p_2 > 2$.

En procédant comme dans la démonstration de la proposition 2.2, on pose $u = \sqrt{|DS|^2 + \epsilon^2}$, $B_1(s) = \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_s + \|\mathrm{R^E}\|_{\mathrm{s}}$, $B_2(s) = \frac{\|\overline{\triangle}S\|^2_s}{\|S\|^2_\infty} + \frac{\|\mathrm{R^ES}\|^2_s}{\|S\|^2_\infty}$ et on obtient, pour tout $k \geq 1$ :

$$\|d(u^k)\|_2 \leq 2k\left(\sqrt{B_1(p_1/2)\|u\|^{2k}_{\frac{2kp_1}{p_1-2}} + B_2(p_2)\|S\|^2_\infty\|u\|^{2(k-1)}_{\frac{2(k-1)p_2}{p_2-2}}}\right)$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Sobolev donnée par l'hypothèse $S_q \leq C$ :

$$\|u\|^k_{\frac{2kq}{q-2}} \leq \|u\|^k_{2k} + 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(p_1/2)\|u\|^{2k}_{\frac{2kp_1}{p_1-2}} + B_2(p_2)\|S\|^2_\infty\|u\|^{2(k-1)}_{\frac{2(k-1)p_2}{p_2-2}}}. \qquad (*)$$

De plus, par l'inégalité de Hölder, on a :

$$\|u\|^k_{2k} \leq \|u\|^k_{\frac{2kp_1}{p_1-2}}$$

On pose alors $k = 1 + \frac{r'(p_2-2)}{2p_2}$. On a alors $k > 1$ (condition de validité de l'inégalité $(*)$), $\|u\|_{\frac{2(k-1)p_2}{p_2-2}} = \|u\|_{r'}$ et $\frac{2kp_1}{p_1-2} \leq r'$, puisque par hypothèse $r' \geq \frac{p_1p_2}{p_1-p_2}$. L'inégalité $(*)$ devient alors :

$$\|u\|^k_{\frac{2kq}{q-2}} \leq \left(1 + 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{p_1}{2}) + \frac{B_2(p_2)\|S\|^2_\infty}{\|u\|^2_{r'}}}\right)\|u\|^k_{r'}$$

Mais, on a aussi $\frac{2kq}{q-2} > r'$ (car $r' < \frac{qp_2}{q-p_2}$) et l'inégalité d'interpolation (rappelée dans le lemme 1.1) permet d'en déduire que $\|u\|_{r'}^{k+\gamma} \leq \|u\|_2^{\gamma}\|u\|_{\frac{2kq}{q-2}}^{k}$, où $\gamma$ est solution de l'équation $\frac{\gamma+k}{r'} = \frac{\gamma}{2} + \frac{(q-2)}{2q}$ (donc $\gamma = \frac{2\left[1-r'\left(\frac{q-p_2}{qp_2}\right)\right]}{r'-2}$). On a donc :

$$\left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_{r'}}{\|S\|_\infty}\right) \leq \left(1 + 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(p_1/2) + \frac{B_2(p_2)\|S\|_\infty^2}{\|DS\|_{r'}^2}}\right)^{1/\gamma}\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}.$$

En considérant les 2 cas $\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_{r'}}{\|S\|_\infty} \leq 1$ et $\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_{r'}}{\|S\|_\infty} \geq 1$, comme dans la preuve de la proposition 2.1, on obtient le résultat annoncé (en notant aussi que $r \leq r'$ et que $\frac{1}{\gamma+1} < \frac{1}{\gamma}$).

□

D'après le théorème 1.2 de S. Gallot, rappelé en introduction, un pincement (suffisamment petit) d'une norme $L^{\frac{q}{2}}$ de la partie négative de la courbure de Ricci suffit à majorer $S_q(M^n,g)$ par une constante universelle (pour $q > n$). On peut donc se demander si la proposition 2.4 s'adapte dans le cas limite $p_1 = q = 2p_2 > n$, de manière à ce que les normes intégrales utilisées et la constante de Sobolev soient du "même ordre". En fait, en modifiant légérement la preuve de la proposition 2.4, on obtient la proposition suivante :

**Proposition 2.6.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 4$). Soient $p$, $q$ et $C$ des nombres réels tels que $2n \geq q > p \geq n$. Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$, variété qui vérifie les conditions $S_q(M,g) \leq C$ et $\mathrm{Diam}(M)^2\left(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|R^E\|_{\frac{q}{2}}\right) < \frac{1}{(C(q-2))^2}$ alors, pour toute section $S$ de $E$, on a :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_p}{\|S\|_\infty} \leq \left(\frac{1 + \frac{(q-2)\,\mathrm{Diam}(M)^2 C}{\|S\|_\infty}\left(\|\overline{\triangle}S\|_{\frac{q}{2}} + \|\mathrm{R^ES}\|_{\frac{q}{2}}\right)}{1 - (q-2)\,\mathrm{Diam}(M)C\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{a(p,q)} \times \max\left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}, \left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{1}{1+a(p,q)}}\right)$$

*où $a(p,q) = \frac{q[p(q-4)+4]}{2(q-4)(q-p)}$.*

*Le même énoncé vaut pour $n = 2, 3$ et pour tous les réels $q$ tels que $n < q < 4$. Si $S_q(M) \leq C$ et $\mathrm{Diam}(M)^2\left(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|R^E\|_{\frac{q}{2}}\right) < \frac{1}{4C^2}$, alors :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}{\|S\|_\infty} \leq \left(\frac{1 + \frac{2\,\mathrm{Diam}(M)^2 C}{\|S\|_\infty}\left(\|\overline{\triangle}S\|_2 + \|\mathrm{R^ES}\|_2\right)}{1 - 2\,\mathrm{Diam}(M)C\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{a(q)} \times \max\left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}, \left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{1}{1+a(q)}}\right)$$

*avec $a(q) = \frac{(q-2)}{4-q}$.*

**Remarque.** — D'après le théorème 1.2 rappelé en introduction, si une variété riemannienne vérifie une condition du type $\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|R^E\|_{\frac{q}{2}}\big) \leq \zeta(q,n)$ (où $\zeta(q,n)$ est une constante universelle suffisamment petite), alors la constante $S_q(M,g)$ est automatiquement majorée par une fonction universelle de $q$ et $n$.

**Démonstration.** — Nous posons encore une fois :

$$B_1(\frac{q}{2}) = \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{q}{2}}, \;\; \mathrm{B}_2(\frac{\mathrm{q}}{2}) = \frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|^2_{\frac{\mathrm{q}}{2}}}{\|\mathrm{S}\|^2_\infty} + \frac{\|\mathrm{R^E S}\|^2_{\frac{\mathrm{q}}{2}}}{\|\mathrm{S}\|^2_\infty}$$

Commençons par le cas $n \geq 4$. D'après l'inégalité $(*)$ de la démonstration de la proposition 2.4, on a :

$$\|DS\|^k_{\frac{2kq}{q-2}} \leq \|DS\|^k_{2k} + 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\Big(\sqrt{B_1(q/2)}\|DS\|^k_{\frac{2qk}{q-2}} + \|S\|_\infty\sqrt{B_2(q/2)}\|DS\|^{k-1}_{\frac{2q(k-1)}{q-4}}\Big)$$

De plus, l'inégalité d'interpolation 1.1, nous donne :

$$\|DS\|^k_{2k} \leq \|DS\|_{\frac{2kq}{q-2}}\|DS\|^{k-1}_\gamma$$

où $\gamma$ est solution de l'équation $\frac{1}{2} = \frac{q-2}{2kq} + \frac{k-1}{\gamma}$ (on a donc $\gamma = \frac{2kq(k-1)}{(k-1)q+2}$). Pour tout réel $k \geq \frac{q-2}{4}$, on a $\gamma \leq \frac{2(k-1)q}{q-4}$ et donc l'inégalité plus haut se réécrit :

$$\Big(1 - 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{q}{2})}\Big)\|DS\|^{k-1}_{\frac{2kq}{q-2}} \leq \Big(1 + \frac{2kC\,\mathrm{Diam}(M)\|S\|_\infty}{\|DS\|_{\frac{2kq}{q-2}}}\sqrt{B_2(\frac{q}{2})}\Big)\|DS\|^{k-1}_{\frac{2q(k-1)}{q-4}}$$

On pose $k = 1 + \frac{p(q-4)}{2q}$. On a bien $k \geq \frac{q-2}{4}$ car $p \geq \frac{q}{2} \geq \frac{q}{2}\big(\frac{q-6}{q-4}\big)$, et l'inégalité précédente devient :

$$\|DS\|_{\frac{2kq}{q-2}} \leq \left(\frac{1 + \frac{2kC\,\mathrm{Diam}(M)\|S\|_\infty}{\|DS\|_{\frac{2kq}{q-2}}}\sqrt{B_2(\frac{q}{2})}}{1 - 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{q}{2})}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \|DS\|_p$$

De plus, on a $\frac{2kq}{q-2} > p > 2$ (car $p < q$). D'après le lemme 1.1, on en déduit l'existence d'une constante $\gamma$ telle que $\|DS\|_p \leq \|DS\|_2^\gamma \|DS\|^{1-\gamma}_{\frac{2kq}{q-2}}$, où $\gamma$ vérifie l'équation $\frac{1}{p} = \frac{\gamma}{2} + \frac{(1-\gamma)(q-2)}{2kq}$ (on trouve $\gamma = \frac{4(q-p)}{p\big(p(q-4)+4\big)}$), ce qui, combiné avec l'inégalité précédente, nous donne :

$$\|DS\|_p \leq \left(\frac{1 + \frac{2kC\,\mathrm{Diam}(M)\|S\|_\infty}{\|DS\|_p}\sqrt{B_2(\frac{q}{2})}}{1 - 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{q}{2})}}\right)^{a(p,q)} \|DS\|_2$$

En considérant séparément, comme précédement, les deux cas $\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_p \geq \|S\|_\infty$ et $\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_p \leq \|S\|_\infty$ on obtient le résultat annoncé.

Si $n = 2$ ou 3 et $n < q < 4$, on note $p_2 > 2$ un nombre réel suffisamment proche de 2 pour que $q > p_2$. On a alors

$$\|DS\|^k_{\frac{2kq}{q-2}} \leq \|DS\|^k_{2k} + 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{q}{2})}\|DS\|^k_{\frac{2kq}{q-2}} \\ +2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_2(p_2)}\|S\|_\infty\|DS\|^{k-1}_{\frac{2(k-1)p_2}{p_2-2}}$$

Posons $k = 1 + \frac{q(p_2-2)}{2p_2}$ alors on a $2k < \frac{2(k-1)p_2}{p_2-2} = q < \frac{2kq}{q-2}$, et donc :

$$\|DS\|_{\frac{2kq}{q-2}} \leq \left(\frac{1 + \frac{2kC\,\mathrm{Diam}(M)\|S\|_\infty\sqrt{B_2(p_2)}}{\|DS\|_q}}{1 - 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{q}{2})}}\right)^{\frac{1}{k}} \|DS\|_q$$

On fait alors tendre $p_2$ vers 2, ce qui revient à poser $k = 1$ dans l'inégalité précédente. Mais, le lemme 1.1 nous donne $\|DS\|_q \leq \|DS\|_2^{1-\gamma}\|DS\|^\gamma_{\frac{2q}{q-2}}$ avec $\gamma = \frac{q-2}{2}$, et donc :

$$\|DS\|_q \leq \left(\frac{1 + \frac{2C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_2(2)}\|S\|_\infty}{\|DS\|_q}}{1 - 2C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{q}{2})}}\right)^{\frac{q-2}{4-q}} \|DS\|_2$$

On conclut de nouveau en considérant séparement les deux cas $\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q \geq \|S\|_\infty$ et $\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q \leq \|S\|_\infty$. $\square$

S. Gallot a montré, par des exemples (*cf* [50]), que le théorème 1.2 ne peut pas s'étendre au cas $p$=$n$. C'est à dire qu'aucune borne, aussi petite soit-elle, de la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de la partie négative de la courbure de Ricci ne donne de majorant uniforme de la constante $S_n(M, g)$. Toutefois, si les variétés étudiées admettent par ailleurs un majorant de leur constante de Sobolev $S_n(M, g)$ $(n \geq 3)$, on peut se demander si une majoration du rapport $\|DS\|_q/\|DS\|_2$ (pour $q \geq n$), du type de celles qui précédent, peut s'obtenir en fonction de normes $L^{\frac{n}{2}}$ des courbures qui interviennent dans le majorant (l'intérêt de ce type de résultat est expliqué plus en détails dans le chapitre suivant). En fait, dans le cas $p_1 = q = n$ et $2p_2 > n$, on peut adapter ce qui précède pour obtenir :

**Proposition 2.7.** — *Soit $n$ un entier $(n \geq 4)$. Soient $q$ et $C$ des nombres réels tels que $2n > q > n$. Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie les conditions $S_n(M, g) \leq C$ et $\mathrm{Diam}(M)^2(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}} + \|R^E\|_{\frac{n}{2}}) < \frac{n^2}{(Cq(n-2))^2}$, alors, pour toute section $S$ de $E$, on a :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}{\|S\|_\infty} \leq \left(\frac{1 + \frac{q(n-2)C\,\mathrm{Diam}(M)^2}{n\|S\|_\infty}\left(\|\overline{\triangle}S\|_{\frac{q}{2}} + \|\mathrm{R^ES}\|_{\frac{q}{2}}\right)}{1 - \frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{n}{2}}}}\right)^{a(q,n)} \\ \max\left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}, \left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{1}{1+a(q,n)}}\right)$$

*où* $a(q,n)=\frac{n(q-2)}{2(q-n)}$.

*Le même énoncé vaut pour* $n=3$ *et pour les* $q$ *tels que* $3<q<6$ *: Si la variété* $(M^n,g)$ *vérifie* $S_n(M,g)\le C$ *et* $\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}}+\|R^E\|_{\frac{n}{2}}\big)<\frac{1}{4C^2}$*, alors :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}{\|S\|_\infty}\le\left(\frac{1+\frac{2C\,\mathrm{Diam}(M)^2}{\|S\|_\infty}\Big(\|\overline{\triangle}S\|_2+\|\mathrm{R^ES}\|_2\Big)}{1-2\,\mathrm{Diam}(M)C\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}}+\|\mathrm{R^E}\|_{\frac{n}{2}}}}\right)^{a(q)}\times$$
$$\max\left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty},\Big(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\Big)^{\frac{1}{1+a(q)}}\right)$$

*où* $a(q)=\frac{3(q-2)}{6-q}$.

**Démonstration.** — Commençons par le cas $n\ge 4$. On part de l'inégalité $(*)$ de la preuve de la proposition 2.4 (page 45), dans laquelle on pose $p_1=n$, $p_2=\frac{q}{2}$ et $k=\frac{q(n-2)}{2n}$, et où on remplace $\frac{2kq}{q-2}$ par $\frac{2kn}{n-2}$ (on a bien $k>1$, car $q>n\ge4$). Cela nous donne l'inégalité :

$$\|DS\|_q^k\le\|DS\|^k_{\frac{q(n-2)}{n}}+\frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)\Big(\sqrt{B_1(\frac{n}{2})}\|DS\|_q^k+\sqrt{B_2(\frac{q}{2})}\|S\|_\infty\|DS\|^{k-1}_{\frac{2(k-1)q}{q-4}}\Big)$$

Or, d'après le lemme 1.1, on a $\|DS\|^k_{\frac{q(n-2)}{n}}\le\|DS\|_q\|DS\|_\gamma^{k-1}$, où $\gamma=\frac{2q(k-1)}{q-2}\le\frac{2q(k-1)}{q-4}$. On en déduit que :

$$\left(1-\frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{n}{2})}\right)\|DS\|_q^{k-1}$$
$$\le\left(1+\frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)^2\sqrt{B_2(\frac{q}{2})}\frac{\|S\|_\infty}{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}\right)\|DS\|^{k-1}_{\frac{2q(k-1)}{q-4}}\qquad(*)$$

Or $2<\frac{2q(k-1)}{q-4}<q$ (car $q>n\ge4$), le lemme 1.1 nous donne donc :

$$\|DS\|^{k-1}_{\frac{2q(k-1)}{q-4}}\le\|DS\|_2^{\gamma'}\|DS\|_q^{(k-1)-\gamma'},$$

avec $\gamma'=\frac{2(q-n)}{n(q-2)}$. On déduit donc de $(*)$ que

$$\left(1-\frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{n}{2})}\right)\|DS\|_q^{k-1}$$
$$\le\left(1+\frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)^2\sqrt{B_2(\frac{q}{2})}\frac{\|S\|_\infty}{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}\right)\|DS\|_2^{\gamma'}\|DS\|_q^{(k-1)-\gamma'}$$

Et donc :

$$\|DS\|_q\le\left(\frac{1+\frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)^2\sqrt{B_2(\frac{q}{2})}\frac{\|S\|_\infty}{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}}{1-\frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{n}{2})}}\right)^{\frac{n(q-2)}{2(q-n)}}\|DS\|_2$$

On conclut alors en considérant séparement le cas $\|S\|_\infty \leq \mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q$ et le cas $\|S\|_\infty \geq \mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q$.

Dans le cas $n=3$, pour tout réel $q$ tel que $3<q<6$, on a :

$$\|DS\|_{6k}^k \leq \|DS\|_{2k}^k + 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\Big(\sqrt{B_1(\frac{3}{2})}\|DS\|_{6k}^k + \sqrt{B_2(p_2)}\|S\|_\infty \|DS\|^{k-1}_{\frac{2(k-1)p_2}{p_2-2}}\Big)$$

où $p_2$ est un réel proche de 2. On pose alors $k = 1+\frac{q(p_2-2)}{2p_2}$, alors $2k < \frac{2(k-1)p_2}{p_2-2} = q < 6k$. On a donc :

$$\|DS\|_{6k}\Big(1-2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{3}{2})}\Big)^{\frac{1}{k}}$$
$$\leq \Big(1+2kC\,\mathrm{Diam}(M)^2\sqrt{B_2(p_2)}\frac{\|S\|_\infty}{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}\Big)^{\frac{1}{k}}\|DS\|_q$$

On fait alors tendre $p_2$ vers 2, et on utilise l'inégalité $\|DS\|_q \leq \|DS\|_2^{1-\gamma}\|DS\|_6^\gamma$, avec $\gamma = \frac{3(q-2)}{2q}$. On obtient :

$$\|DS\|_q \leq \left(\frac{1+2kC\,\mathrm{Diam}(M)^2\sqrt{B_2(p_2)}\frac{\|S\|_\infty}{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}}{1-2kC\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{3}{2})}}\right)^{\frac{3(q-2)}{6-q}}\|DS\|_2$$

On achève la preuve comme dans les démonstrations précédentes, en distinguant le cas où $\frac{\|S\|_\infty}{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}$ est inférieur ou égal à 1 et le cas où il est supérieur à 1. □

Pour en finir avec les cas limites, on a la proposition suivante :

**Proposition 2.8.** — *Soient $n$ un entier ($n \geq 4$), $C$ un nombre réel et $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie $S_n(M,g) \leq C$, alors pour toute section $S$ de $E$, on a :*

*Si*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\Big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}} + \|R^E\|_{\frac{n}{2}} + \frac{\|\overline{\triangle}S\|_{\frac{n}{2}}}{\|S\|_\infty}\Big) < \frac{1}{12[C(n-2)]^2},$$

*alors*

$$\frac{\|DS\|_n}{\|S\|_\infty} \leq$$
$$\max\Bigg(\frac{\|DS\|_2}{\|S\|_\infty\Big[1-2(n-2)C\,\mathrm{Diam}(M)\Big(\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}}}+\sqrt{\|\mathrm{R^E}\|_{\frac{n}{2}}}+\sqrt{\frac{\|\overline{\triangle}S\|_{\frac{n}{2}}}{\|S\|_\infty}}\Big)\Big]^{\frac{n-2}{2}}},$$
$$\sqrt{\|\mathrm{R^E}\|_{\frac{n}{2}}}+\sqrt{\frac{\|\overline{\triangle}S\|_{\frac{n}{2}}}{\|S\|_\infty}}\Bigg)$$

*Lorsque $n=3$, on obtient l'énoncé suivant :*
*Si $S_n(M,g)\leq C$ et si $\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}}+\|R^E\|_2+\frac{\|\overline{\triangle}S\|_2}{\|S\|_\infty}\big)<\frac{1}{48C^2}$, alors :*

$$\frac{\|DS\|_6}{\|S\|_\infty}\leq$$
$$\max\left(\frac{1}{1-4C\,\mathrm{Diam}(M)\Big(\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}}}+\sqrt{\|\mathrm{R^E}\|_2}+\sqrt{\frac{\|\overline{\triangle}S\|_2}{\|S\|_\infty}}\Big)}\frac{\|DS\|_2}{\|S\|_\infty},\right.$$
$$\left.\sqrt{\|\mathrm{R^E}\|_2}+\sqrt{\frac{\|\overline{\triangle}S\|_2}{\|S\|_\infty}}\right)$$

**Démonstration.** — Pour traiter le cas $n>4$, on part de l'inégalité $(*)$ de la preuve de la proposition 2.4 (page 45), en posant $q=n=p_1=2p_2$, on obtient :

$$\|DS\|^k_{\frac{2kn}{n-2}}\leq\|DS\|^k_{2k}+2kC\,\mathrm{Diam}(M)\Big(\sqrt{B_1(\frac{n}{2})}\|DS\|^k_{\frac{2kn}{n-2}}+\sqrt{B_2(\frac{n}{2})}\|S\|_\infty\|DS\|^{k-1}_{\frac{2(k-1)n}{n-4}}\Big)$$

On pose alors $k=\frac{n-2}{2}$. on a alors $\frac{2kn}{n-2}=n=\frac{2(k-1)n}{n-4}$, d'où :

$$\|DS\|^k_n\leq\|DS\|^k_{n-2}+(n-2)C\,\mathrm{Diam}(M)\Big(\sqrt{B_1(\frac{n}{2})}\|DS\|^k_n+\sqrt{B_2(\frac{n}{2})}\|S\|_\infty\|DS\|^{k-1}_n\Big)$$

et donc

$$\Big(1-(n-2)C\Big(\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{n}{2})}+\mathrm{Diam}(M)^2\sqrt{B_2(\frac{n}{2})}\frac{\|S\|_\infty}{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_n}\Big)\|DS\|^k_n$$
$$\leq\|DS\|^k_{n-2}$$

De plus, d'après le lemme 1.1, $\|DS\|_{n-2}\leq\|DS\|^\gamma_n\|DS\|^{1-\gamma}_2$, pour $\gamma=\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}$. A partir de cette inégalité, soit on est dans le cas où $\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_n}{\|S\|_\infty}\leq\mathrm{Diam}(M)\big(B_2(\frac{n}{2})\big)^{\frac14}$, ce qui implique le résultat annoncé, soit on est dans le cas où $\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_n}{\|S\|_\infty}\geq\mathrm{Diam}(M)\big(B_2(\frac{n}{2})\big)^{\frac14}$, et donc :

$$\|DS\|_n\leq\|DS\|_2\left(\frac{1}{1-C(n-2)\,\mathrm{Diam}(M)\Big(\sqrt{B_1(\frac{n}{2})}+\big(B_2(\frac{n}{2})\big)^{\frac14}\Big)}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

On conclut en remarquant que, d'après les définitions de $B_1$ et $B_2$, on a les inégalités $\sqrt{B_1(\frac{n}{2})}\leq\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|^{\frac12}_{\frac{n}{2}}+\|\mathrm{R^E}\|^{\frac12}_{\frac{n}{2}}$ et $\big(B_2(\frac{n}{2})\big)^{\frac14}\leq\|\mathrm{R^E}\|^{\frac12}_{\frac{n}{2}}+\Big(\frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|_{\frac{n}{2}}}{\|\mathrm{S}\|_\infty}\Big)^{\frac12}$. Pour obtenir le cas $n=4$, remarquer que ce qui précéde reste valable pour tout réel $n>4$. On peut donc obtenir le cas $n=4$ par passage à la limite.

Si $n=3$, on repart de l'inégalité $(*)$ de la page 45, en posant $q=n=p_1$ et $p_2=p<3$, on obtient :

$$\|DS\|^k_{6k}\leq\|DS\|^k_{2k}+2kC\,\mathrm{Diam}(M)\Big(\sqrt{B_1(\frac{3}{2})}\|DS\|^k_{6k}+\sqrt{B_2(p)}\|S\|_\infty\|DS\|^{k-1}_{\frac{2(k-1)p}{p-2}}\Big)$$

On pose $k = \frac{p}{6-2p}$. on a alors :

$$\|DS\|_{6k}^k \leq \|DS\|_{2k}^k + 2kC\,\mathrm{Diam}(M)\Big(\sqrt{B_1(\frac{3}{2})}\|DS\|_{6k}^k + \sqrt{B_2(p)}\|S\|_\infty\|DS\|_{6k}^{k-1}\Big)$$

et donc

$$\Big(1 - 2kC\Big(\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{3}{2})} + \mathrm{Diam}(M)^2\sqrt{B_2(p)}\frac{\|S\|_\infty}{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_{6k}}\Big)\Big)\|DS\|_{6k}^k \leq \|DS\|_{2k}^k$$

Puis, on fait tendre $p$ vers 2 (alors $k$ tend vers 1), et on obtient :

$$\Big(1 - 2C\Big(\mathrm{Diam}(M)\sqrt{B_1(\frac{3}{2})} + \mathrm{Diam}(M)^2\sqrt{B_2(2)}\frac{\|S\|_\infty}{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_6}\Big)\Big)\|DS\|_6 \leq \|DS\|_2.$$

On conclut alors comme le cas précédent. □

## 2.4 Majoration de sup$|S|-$inf$|S|$, résultats de non annulation

Des résultats de la section précédente et de la donnée d'un majorant de la constante de Sobolev $S'_r$, nous déduisons immédiatement un majorant de $1 - \frac{\inf_M |S|}{\sup_M |S|}$. Les résultats obtenus généralisent celui de M. Le Couturier et G. Robert (*cf* [65]), qui établissent une inégalité proche de la proposition 2.10 pour les sections harmoniques des opérateurs (laplacien+potentiel).

En appliquant la proposition 2.2, et le théorème des accroissements finis, on obtient directement une inégalité de Harnack qui ne nécessite pas de majorant sur une constante de Sobolev $S'_q(M,g)$, mais qui demande de contrôler $\overline{\triangle}S$ et $R^E S$ en norme $L^p$, avec $p > n$ :

**Proposition 2.9.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$, $q$ et $C$ des nombres réels tels que $\infty \geq p > q \geq n$ ($q > n$ si $n = 2$). Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$, qui vérifie $S_q(M,g) \leq C$. Alors, pour toute section $S$ de $E$, on a :*

$$1 - \frac{\inf|S|}{\sup|S|} \leq \Big(1 + a'(p,q,C)\Lambda^{1/2}\Big)^{\frac{pq}{p-q}}\left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{2(p-q)}{2(p-q)+pq}},$$

*où $a'$ est la constante universelle donnée dans la proposition 2.2 et où :*

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p}{2}} + \mathrm{Diam(M)}^2\left[\frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|_\mathrm{p}^2}{\|\mathrm{S}\|_\infty^2} + \frac{\|\mathrm{R^E S}\|_\mathrm{p}^2}{\|\mathrm{S}\|_\infty^2}\right]}.$$

Si on a un majorant de la constante de Sobolev ${S'}_{q'}(M,g)$, alors on peut appliquer la proposition 2.4 pour obtenir la proposition suivante :

**Proposition 2.10.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p_1$, $p_2$, $q$, $q'$, $C$ et $C'$ des nombres réels tels que $p_1 > q \geq p_2 \geq \max(2, \frac{q}{2})$, $q \geq n$ ($q > n$ si $n = 2$), $p_2 > \frac{n}{2}$ et $n < q' < \frac{p_2 q}{q - p_2}$. Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie $S_q(M,g) \leq C$ et $S'_{q'}(M,g) \leq C'$. Alors, pour toute section $S$ de $E$, on a :*

$$1 - \frac{\inf |S|}{\sup |S|} \leq C' \Big(1 + (2 + \frac{r'(p_2 - 2)}{p_2}) C\Lambda\Big)^{1/\gamma} \left(\frac{\mathrm{Diam}(M) \|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}},$$

*où $\gamma = \frac{2\left[1 - r'\left(\frac{q - p_2}{p_2 q}\right)\right]}{r' - 2}$, $r' = \max(q', \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2})$ et où :*

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M) \sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p_1}{2}} + \|\mathrm{R}^{\mathrm{E}}\|_{\frac{p_1}{2}} + \mathrm{Diam(M)}^2 \left[\frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|_{\mathrm{p}_2}^2}{\|\mathrm{S}\|_\infty^2} + \frac{\|\mathrm{R}^{\mathrm{E}}\mathrm{S}\|_{\mathrm{p}_2}^2}{\|\mathrm{S}\|_\infty^2}\right]}.$$

On remarquera que, pour prouver les propositions 2.9 et 2.10, nous avons appliqué les propositions 2.2 et 2.4 dans le cas où $\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty} \leq 1$, les inégalités des propositions 2.9 et 2.10 étant trivialement vérifiées dans le cas contraire.

Le corollaire 2.5, nous permet d'obtenir le résultat suivant, qui est la généralisation aux sections quelconques du théorème 1.4.1 de [65] (démontré pour les sections harmoniques d'opérateurs (laplacien+potentiel)) :

**Corollaire 2.11.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 4$). Soient $p$, $q$, $C$ et $C'$ des nombres réels tels que $2q \geq p > q \geq n$. Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie $S_q(M,g) \leq C$ et $S'_p(M,g) \leq C'$. Alors, pour toute section $S$ de $E$, on a :*

$$1 - \frac{\inf |S|}{\sup |S|} \leq C' \Big(1 + (p-2) C\Lambda\Big)^{1/\gamma} \left(\frac{\mathrm{Diam}(M) \|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}},$$

*où $\gamma = \frac{2(p-q)}{q(p-2)}$ et où :*

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M) \sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|\mathrm{R}^{\mathrm{E}}\|_{\frac{p}{2}} + \mathrm{Diam(M)}^2 \left[\frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|_{\frac{p}{2}}^2}{\|\mathrm{S}\|_\infty^2} + \frac{\|\mathrm{R}^{\mathrm{E}}\mathrm{S}\|_{\frac{p}{2}}^2}{\|\mathrm{S}\|_\infty^2}\right]}.$$

*Le même énoncé vaut pour $n = 2, 3$ et pour tous les couples $(p, q)$ tels que $n \leq q < p < 4$ ($q > n$ si $n = 2$), en remplaçant $\gamma$ par $\frac{p-q}{q}$ et $\Lambda$ par :*

$$\mathrm{Diam}(M) \sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|\mathrm{R}^{\mathrm{E}}\|_{\frac{p}{2}} + \mathrm{Diam(M)}^2 \Big(\frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|_2^2}{\|\mathrm{S}\|_\infty^2} + \frac{\|\mathrm{R}^{\mathrm{E}}\mathrm{S}\|_2^2}{\|\mathrm{S}\|_\infty^2}\Big)}.$$

Enfin, on peut aussi appliquer les propositions 2.6 et 2.7 pour obtenir les deux propositions suivantes :

**Proposition 2.12.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 4$). Soient $p$, $q$, $C$ et $C'$ des nombres réels tels que $2n \geq q > p > n$. Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie $S_q(M,g) \leq C$, $S'_p(M,g) \leq C'$ et $\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|R^E\|_{\frac{q}{2}}\big) < \frac{1}{(C(q-2))^2}$ alors, pour toute section $S$ de $E$, on a :*

$$1 - \frac{\inf|S|}{\sup|S|} \leq C'\left(\frac{1 + \frac{(q-2)C}{\|S\|_\infty}\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\overline{\triangle}S\|_{\frac{q}{2}} + \|\mathrm{R^E S}\|_{\frac{q}{2}}\big)}{1 - (q-2)\,\mathrm{Diam}(M)C\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{a(p,q)}\Big(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\Big)^{\frac{1}{1+a(p,q)}}$$

*où $a(p,q) = \frac{q[p(q-4)+4]}{2(q-4)(q-p)}$.*

*Le même énoncé vaut pour $n = 2, 3$ et pour tous les réels $q$ tels que $n < q < 4$. Si $S_q(M,g) \leq C$ et si $\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|R^E\|_{\frac{q}{2}}\big) < \frac{1}{4C^2}$, alors :*

$$1 - \frac{\inf|S|}{\sup|S|} \leq C'\left(\frac{1 + \frac{2C}{\|S\|_\infty}\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\overline{\triangle}S\|_2 + \|\mathrm{R^E S}\|_2\big)}{1 - 2\,\mathrm{Diam}(M)C\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{a(q)}\Big(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\Big)^{\frac{1}{1+a(q)}}$$

*avec $a(q) = \frac{(q-2)}{4-q}$ et où $C'$ est un majorant de $S'_q(M^n,g)$.*

**Proposition 2.13.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 4$). Soient $p$, $q$, $C$ et $C'$ des nombres réels tels que $2n > q > n$. Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie $S_n(M,g) \leq C$, $S'_q(M,g) \leq C'$ et $\mathrm{Diam}(M)^2(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}} + \|R^E\|_{\frac{n}{2}}) < \frac{1}{(C(q-2))^2}$, alors pour toute section $S$ de $E$, on a :*

$$1 - \frac{\inf|S|}{\sup|S|} \leq C'\left(\frac{1 + \frac{q(n-2)C}{n\|S\|_\infty}\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\overline{\triangle}S\|_{\frac{q}{2}} + \|\mathrm{R^E S}\|_{\frac{q}{2}}\big)}{1 - \frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{n}{2}}}}\right)^{a(q,n)}\Big(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\Big)^{\frac{1}{1+a(q,n)}}$$

*où $a(q,n) = \frac{n(q-2)}{2(q-n)}$.*

*Le même énoncé vaut pour $n = 3$ et pour tous les réels $q$ tels que $3 < q < 6$. Si $S_n(M,g) \leq C$, si ${S'}_q(M,g) \leq C'$ et si $\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}} + \|R^E\|_{\frac{n}{2}}\big) < \frac{1}{4C^2}$, alors :*

$$1 - \frac{\inf|S|}{\sup|S|} \leq C'\left(\frac{1 + \frac{2C}{\|S\|_\infty}\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\overline{\triangle}S\|_2 + \|\mathrm{R^E S}\|_2\big)}{1 - 2\,\mathrm{Diam}(M)C\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{n}{2}}}}\right)^{a(q)}\Big(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\Big)^{\frac{1}{1+a(q)}}$$

*où $a(q) = \frac{3(q-2)}{6-q}$.*

Il y a une perte d'information dans le fait d'utiliser une hypothèse qui porte sur $DS$ entier pour établir un contrôle de $\frac{\inf|S|}{\sup|S|}$, puisqu'une section $S$ peut être de norme constante sans être parallèle. On devrait pouvoir déduire ces inégalités de Harnack d'une majoration d'une norme $L^p$ $(p > n)$ de la différentielle $du$ de la fonction $u = |S|$. Toutefois, l'inégalité de Kato, que nous utilisons pour transformer des hypothèses sur $\overline{\triangle}S$ en renseignements de nature elliptique sur $u$, ne nous fournit qu'une majoration de $\triangle u$, mais ne permet pas de minorer $\triangle u$. Une telle majoration est insuffisante pour minorer le rapport $\frac{\inf|S|}{\sup|S|}$ et démontrer que $|S|$ ne s'annule nulle part : en effet, il est facile de montrer (voir [65]) que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut construire une fonction $f_\epsilon$ positive, prenant les deux valeurs 1 et 0 et dont le laplacien verifie $\triangle f_\epsilon \leq \epsilon$. Il ne semble donc pas possible d'appliquer cette méthode plus directe, et c'est pourquoi nous avons été contraints d'appliquer l'inégalité de Kato au tenseur $DS$, afin de contrôler la fonction $u = |DS|$ (ce qui nous a amenés à contrôler $\overline{\triangle}(DS)$ en fonction de $\overline{\triangle}S$). Les termes de courbure supplémentaires, qui sont nécessaires pour assurer ce contrôle (*cf* le lemme 2.3), sont cependant inévitables, comme nous le prouverons dans la partie **II** de cette thèse (voir la proposition **4.1** de la deuxième partie qui montre, indirectement, que la conclusion de la proposition 2.4 ne peut tenir sans contrôle a priori de la courbure sectionnelle).

Notre méthode pourrait toutefois être améliorée si on savait tirer parti de l'observation suivante : partout où $S$ ne s'annule pas, on a $DS = d(|S|) \otimes \frac{S}{|S|} + |S|.D\frac{S}{|S|}$, donc $DS$ rend compte à la fois de la variation de $|S|$ par projection sur $S$, et de la façon dont la section $\frac{S}{|S|}$ tourne dans la fibre, par projection sur l'orthogonale de $S$. On voit donc que le contrôle de la projection de $DS$ sur $S$ devrait suffir à établir l'inégalité de Harnack. Des améliorations de l'inégalité de Kato (fondées sur cette observation) existent dans la littérature (travaux de J. P. Bourguignon, de D. Calderbank, M. Herzlich et P. Gauduchon [25]), mais ils sont pour l'instant de peu de conséquences sur notre inégalité de Harnack.

Enfin, on devrait pouvoir déduire du contrôle de $\|DS\|_p$ des informations sur l'holonomie du fibré $E$. Voir les travaux de W. Ballman, J. Brünning et G. Carron [15] pour un premier résultat dans ce sens et remarquer que les estimées ci-dessus permettent de court-circuiter une large partie de leur preuve.

# Chapitre 3

# Combinaisons linéaires de sections propres

Un champ particulièrement intéressant d'applications (géométriques et topologiques) des inégalités établies dans le paragraphe précédent sur les sections $S$ d'un fibré riemannien $E \to M$ est celui où $S$ est une combinaison linéaire de sections propres d'un opérateur (laplacien+potentiel) $\overline{\triangle} + V$. Dans ce chapitre nous énonçons (et redémontrons lorsqu'une légère adaptation des preuves du chapitre précédent permet de renforcer la conclusion) les formes particulières que prennent ces inégalités dans le cas de telles sections et donnons quelques applications à l'étude des valeurs propres et sections propres de l'opérateur (laplacien+potentiel) qui serviront dans les parties II, III et IV de cette thèse. Il s'agit, essentiellement, de généralisations de la "technique de Bochner". Celui-ci a remarqué que les sections harmoniques d'opérateurs (laplacien+potentiel) de potentiel positif sont parallèles (en effet, pour une telle section on a $0 = \int \big( (\overline{\triangle} + V)S, S \big) = \|DS\|_2^2 + \int (VS, S)$ et les deux termes de la somme sont positif, donc nuls). On peut en déduire, entre autres conséquences, que si $(S_i)_{i\in I}$ est une famille $L^2$-orthonormée de sections harmoniques de cet opérateur alors, pour tout point $x$ de $M$, $(S_i(x))_{i\in I}$ est une famille orthonormée de vecteurs de la fibre $E_x$ au-dessus du point $x$ (trivialisation d'un sous fibré de dimension $dim(Ker(\overline{\triangle}+V))$) et donc la dimension de $Ker(\overline{\triangle}+V)$ est majorée par la dimension $l$ de la fibre. Dans ce chapitre, on étend ces deux propriétés aux *opérateurs (laplacien+potentiel) de potentiel presque positif* (c'est à dire tels que $\mathrm{Diam}(M)^2 \|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}}$ soit petit pour au moins un $p$ supérieur à la dimension de la variété) et aux sections propres de l'opérateur associées à des petites valeurs propres (des définitions précises sont données plus loin). On montre que le nombre de petites valeurs propres d'un opérateur (laplacien+potentiel) de potentiel presque positif est majoré par la dimension de la fibre de $E$ (version analytique du principe de Bochner ; voir les corollaires 3.2 et 3.4). On montre aussi qu'une famille $L^2$-orthonormée de sections propres associées à des petites valeurs propres est presque orthonormée dans chaque fibre au-dessus de chaque point d'un ensemble de mesure presqu'égale au volume de $M$ (version géométrique du principe de Bochner ; voir le lemme 3.5). On montrera aussi que, si on se donne un majorant $A$ des quantités $\mathrm{Diam}(M)^2\|\mathrm{R^E}\|_{\mathrm{p}}$, $\mathrm{Diam}(M)^2\|V\|_p$ et $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}}$ (resp. des quantités $\mathrm{Diam}(M)^2\|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p}{2}}$, $\mathrm{Diam}(M)^2\|V\|_{\frac{p}{2}}$ et $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}}$) pour un réel $p > n$, alors les sections propres, associées à des petites valeurs propres d'un opérateur (laplacien+potentiel) de potentiel presque positif, sont presque parallèles d'après la proposition 3.6 (resp. toute famille $L^2$-orthonormée de sections propres, associées à des petites valeurs propres d'un opérateur de potentiel presque positif, est presque orthonormée en restriction à toute fibre de $E$ ; voir les sections **3.3** et **3.4**) ; où les notions de petites valeurs propres et de potentiel presque positif dépendent, pour ces deux derniers types résultats, du majorant $A$.

*Dans la suite, on note $(S_i)_{i\in I}$ une famille $L^2$-orthonormale de sections propres de l'opérateur (laplacien+potentiel) (i.e. $(\overline{\triangle} + V)S_i = \lambda_i.S_i$). Si $I$ est une sous-partie finie de $\mathbb{N}$, on note alors $E_I = \mathrm{Vect}\,(\{S_i\}_{i\in I})$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par cette famille. On appellera sous-espace de sections propres un tel espace $E_I$ (on rappelle que $I$ est supposé fini).*

## 3.1 Majoration de $\|S\|_\infty/\|S\|_2$, spectre et quasi-trivialisations

La proposition suivante donne une estimation du rapport entres les normes $L^\infty$ et $L^2$ des combinaisons linéaires de sections propres de $E_I$ en fonction d'un "minorant intégral" du potentiel $V$, des valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ et d'un majorant d'une constante de Sobolev $S_q(M)$ ($q \geq n$). Toutefois, comme l'application directe de la proposition 2.1 nous fournirait un majorant qui dépend du nombre de sections propres impliquées dans la combinaison linéaire (ce qui est fatal pour certaines des applications que l'on souhaite en faire), on va légèrement modifier la méthode de démonstration. Cette proposition est une généralisation d'une majoration, due à P. Li ([66]), de la norme $L^\infty$ des $p$-formes différentielles propres (pour le laplacien de Hodge) sur une variété, en fonction des valeurs propres, de la norme $L^2$ des formes propres et d'un minorant du potentiel de l'opérateur de Hodge, considéré comme un opérateur (laplacien+potentiel) sur les $p$-formes. Elle avait déjà été généralisée (sous une forme quasi-similaire à celle de notre énoncé) par S. Gallot dans [48], [49], [47], et surtout [50], au cas des combinaisons linéaires de sections propres d'opérateurs (laplacien+potentiel) quelconques :

**Proposition 3.1.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$, $q$ et $C$ des nombres réels tels que $\infty \geq p > q \geq n$ ($q > n$ si $n = 2$). Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus* *d'une variété riemannienne compacte* $(M^n, g)$ *de dimension* $n$ *qui vérifie* $S_q(M^n, g) \leq C$. *Soit* $\overline{\triangle} + V$ *un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de* $E$ *et* $E_I$ *un sous-espace de sections propres de cet opérateur. Alors, pour toute section* $S$ *de* $E_I$*, on a :*

$$\|S\|_\infty \leq \left(1 + a(p,q,C)\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{pq}{2(p-q)}} \|S\|_2$$

*où* $a(p,q,C) = 1 + e^{\frac{pC}{p-2}\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}-1}}$, $\nu = \frac{q(p-2)}{p(q-2)}$ *et où :*

$$\Lambda = \operatorname{Diam}(M)^2 \Big(\|\underline{V}^-\|_{p/2} + \sup_{i\in I} |\lambda_i|\Big).$$

**Remarque.** — Dans le cas où $S$ est une section harmonique d'un opérateur (laplacien+potentiel) de potentiel positif, on retrouve que $S$ est de norme constante.

**Variante**

Puisque, pour tout réel $K$, $E_I$ est aussi un sous-espace de sections propres de l'opérateur $\overline{\triangle} + V - K$, la proposition 3.1 reste valable en remplaçant $\Lambda$ par :

$$\operatorname{Diam}(M)^2 \Big(\|\big(\underline{V} - K\big)^-\|_{p/2} + \sup_{i\in I} |\lambda_i - K|\Big).$$

Le fait que le majorant du rapport $\dfrac{\|\sum \alpha_i S_i\|_\infty}{\|\sum \alpha_i S_i\|_2}$, donné par cette proposition, ne dépende pas du nombre de sections propres $S_i$ qui entrent dans la combinaison linéaire, permet, en utilisant une technique développée dans [66] par P. Li, de majorer la dimension de $E_I$, et d'en déduire plusieurs estimées intéressantes sur le spectre de l'opérateur $\overline{\triangle} + V$ :

**Corollaire 3.2.** — *Soient* $n$ *et* $l$ *des entiers* $(n \geq 2)$. *Soient* $p$, $q$ *et* $C$ *des nombres réels tels que* $\infty \geq p > q \geq n$ $(q > n$ *si* $n = 2)$. *Notons* $a(p,q,C)$ *la constante universelle introduite dans la proposition 3.1. Soit* $E \to M^n$ *un fibré riemannien, dont la fibre est de dimension* $l$, *au-dessus d'une variété riemannienne* $(M^n, g)$ *compacte, de dimension* $n$, *qui vérifie* $S_q(M^n, g) \leq C$. *Soit* $\overline{\triangle} + V$ *un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de* $E$. *On a alors :*

*(i) Si on note* $\lambda_1\big(\overline{\triangle} + V\big)$ *la plus petite valeur propre de l'opérateur* $\overline{\triangle} + V$, *alors :*

$$\lambda_1\big(\overline{\triangle} + V\big) \geq -\left(1 + a(p,q,C) \operatorname{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}}}\right)^{\frac{pq}{p-q}} \|\underline{V}^-\|_1.$$

*(ii) La multiplicité* $mult(\lambda)$ *d'une valeur propre* $\lambda$ *de l'opérateur* $(\overline{\triangle} + V)$, *vérifie :*

$$mult(\lambda) \quad \leq \quad l.\left(1 + a(p,q,C) \operatorname{Diam}(M)\sqrt{\|\,(\underline{V} - \lambda)^-\,\|_{p/2}}\right)^{\frac{pq}{p-q}}$$

*(iii) Si on note $Ind(\overline{\triangle}+V)$ le nombre de valeurs propres négatives (comptées avec multiplicités) de l'opérateur $\overline{\triangle}+V$, on a :*

$$\operatorname{Ind}(\overline{\triangle}+V) \leq l\Big(1+2\Lambda(1+\Lambda)^{\frac{pq}{2(p-q)}}\Big)^{\frac{pq}{p-q}}$$

*où* $\Lambda = a(p,q,C)\operatorname{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{p/2}}$.
*(iv) La $i^{eme}$ valeur propre $\lambda_i$ du spectre de $(\overline{\triangle}+V)$ vérifie :*

$$\lambda_i - \lambda_1 \geq \frac{1}{a(p,q,C)^2\operatorname{Diam}(M)^2}\left[\left(\frac{i}{l}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} - 1\right]^2 - \|\big(\underline{V}-\lambda_1\big)^-\|_{\frac{p}{2}},$$

*On en déduit :*

$$\lambda_i \geq \frac{1}{a(p,q,C)^2\operatorname{Diam}(M)^2}\left[\left(\frac{i}{l}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} - 1\right]^2 \\ -\left[1+\Big(1+a(p,q,C)\operatorname{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}}}\Big)^{\frac{pq}{p-q}}\right]\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}}.$$

*(estimée qui s'améliore en*

$$\lambda_i \geq \frac{1}{a(p,q,C)^2\operatorname{Diam}(M)^2}\left[\left(\frac{i}{l}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} - 1\right]^2 - \|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}},$$

*si $\lambda_1 \geq 0$).*
*En particulier, si* $\operatorname{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}} \leq \frac{\left[\left(1+\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}-1\right]^2}{2\left(1+2^{\frac{pq}{p-q}}\right)a^2(p,q,C)}$, *alors :*

$$\lambda_{l+1}\big(\overline{\triangle}+V\big) \geq \frac{\left[\left(1+\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}-1\right]^2}{2a^2(p,q,C)}.$$

### Opérateurs à potentiel presque positif et petites valeurs propres

Ce corollaire donne l'existence de deux fonctions universelles $\zeta(l,p,q,C)$ et $\eta(l,p,q,C)$ strictement positives (qui ne dépendent que des variables indiquées entre parenthèses, et pas de $(M^n,g)$ ou de $E$) telles que, si $\overline{\triangle}+V$ est un opérateur (laplacien+potentiel) dont le potentiel vérifie l'inégalité $\operatorname{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{p/2} \leq \eta(l,p,q,C)$ (on parlera alors *d'opérateur à potentiel presque positif*), alors le nombre de valeurs propres de cet opérateur qui sont inférieures à $\zeta(l,p,q,C)$ (on parlera de *petites valeur propres*) est majoré par la dimension de la fibre de $E$ (c'est la version analytique du principe de Bochner). Remarquer enfin que, par translation, le corollaire 3.2 s'applique en remplaçant $\lambda_i$ par $(\lambda_i - K)$ et $\underline{V}^-$ par $\big(\underline{V}-K\big)^-$, où $K$ est une constante réelle quelconque. En particulier, s'il existe une constante

$K$ telle que $\mathrm{Diam}(M)^2\|(\underline{V}-K)^-\|_{p/2} \leq \eta(l,p,q,C)$ (on peut alors parler *d'opérateur à potentiel presque supérieur à* $K$) alors l'opérateur $\overline{\triangle}+V$ admet au plus $l$ valeurs propres inférieures à $K+\zeta(l,p,q,C)$.

**Démonstration de la proposition 3.1.** — De nouveau on suppose que $p$ est fini. On pose, pour la suite, $A_k(I) = \sup_{S\in E_I\setminus\{0\}} \frac{\|S\|_k}{\|S\|_2}$, où $k$ est un réel plus grand que 1 ou égal à $+\infty$.

Soit S un élément de $E_I$. Nous posons $u=\sqrt{|S|^2+\epsilon^2}$ pour $\epsilon>0$. De même que dans la démonstration de la proposition 2.1, on obtient, pour tout réel $k>1/2$ :

$$\|d(u^k)\|_2 \leq \frac{k}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{p/2}\|u\|^{2k}_{\frac{2kp}{p-2}} + \|(\overline{\triangle}+V)S\|_{2k}\|u\|^{2k-1}_{2k}}.$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev donnée par hypothèse (appliquée à la fonction $u^k$), en faisant tendre $\epsilon$ vers 0 et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient l'inégalité suivante, valable pour tout $k>1/2$ :

$$\|S\|^k_{\frac{2kq}{q-2}} \leq \frac{Ck}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\mathrm{Diam}(M)^2(\|\underline{V}^-\|_{p/2}\|S\|^{2k}_{\frac{2kp}{p-2}} + \|(\overline{\triangle}+V)S\|_{2k}\|S\|^{2k-1}_{\frac{2kp}{p-2}})} + \|S\|^k_{\frac{2kp}{p-2}}$$

Or $E_I$ est un espace stable par $(\overline{\triangle}+V)$, on a donc :

$$\begin{aligned}\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{2k} &\leq A_{2k}(I)\|(\overline{\triangle}+V)S\|_2.\\ &\leq A_{\frac{2kp}{p-2}}(I)\sup_{i\in I}|\lambda_i|.\|S\|_2. \qquad (*)\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité :

$$\|S\|_{\frac{2kq}{q-2}} \leq \left(1+\frac{Ck}{\sqrt{2k-1}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{1/k} A_{\frac{2kp}{p-2}}(I)\|S\|_2.$$

Comme $S$ a été choisi quelconque dans l'espace vectoriel $E_I$, on obtient :

$$A_{\frac{2qk}{q-2}}(I) \leq \left(1+\frac{Ck}{\sqrt{2k-1}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{1/k} A_{\frac{2kp}{p-2}}(I)$$

Si on pose successivement $k=\nu^j$ dans cette inégalité, avec $\nu=\frac{q(p-2)}{p(q-2)}>1$ et $j\in\mathbb{N}$, on obtient :

$$A_{\frac{2p}{p-2}\nu^{j+1}}(I) \leq \left(1+\frac{Ck}{\sqrt{2k-1}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{1/k} A_{\frac{2p}{p-2}\nu^j}(I)$$

En multipliant membre à membre les inégalités ainsi obtenues, en remarquant que $A_m(I)$ tend vers $A_\infty(I)$, lorsque $m$ tend vers $+\infty$, et que le produit infini converge, on obtient :

$$A_\infty(I) \leq \prod_{j=0}^{\infty}\left(1+\frac{C\nu^j}{\sqrt{2\nu^j-1}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\nu^j}} A_{\frac{2p}{p-2}}(I).$$

Enfin, comme $\frac{2p}{p-2} > 2$, on a $\|S\|_{\frac{2p}{p-2}} \leq \|S\|_\infty^{\frac{2}{p}}.\|S\|_2^{\frac{p-2}{p}}$ (inégalité d'interpolation 1.1), ce qui se traduit en termes des $A_k(I)$ par $A_{\frac{2p}{p-2}}(I) \leq A_\infty^{\frac{2}{p}}(I)$. On en déduit :

$$A_\infty(I) \leq \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{C\nu^j}{\sqrt{2\nu^j - 1}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{p}{p-2}\cdot\frac{1}{\nu^j}}.$$

En utilisant la même méthode que dans la démonstration de la proposition 2.1 pour majorer le produit infini, on obtient le résultat annoncé. $\square$

**Démonstration du corollaire 3.2.** — Posons, pour simplifier, $\lambda_1 = \lambda_1\big(\overline{\triangle} + V\big)$. Nous commençons par prouver la propriété $(i)$. On peut supposer $\lambda_1 \leq 0$ (car sinon l'inégalité $(i)$ est trivialement vérifiée). Soit $S$ une section telle que $\big(\overline{\triangle} + V\big)S = \lambda_1 S$. On pose $u = \sqrt{|S|^2 + \epsilon^2}$. L'inégalité de Kato nous donne alors :

$$u\triangle u \leq \big(\overline{\triangle}S, S\big) = \lambda_1|S|^2 - \big(VS, S\big) \leq \lambda_1 u^2 + \underline{V}^- u^2$$

et donc $u\triangle u \leq \underline{V}^- u^2$ par hypothèse sur $\lambda_1$. En calquant la preuve de la proposition 2.1, on obtient :

$$\|S\|_\infty \leq \Big(1 + a(p,q,C)\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}}}\Big)^{\frac{pq}{2(p-q)}}\|S\|_2$$

Or, l'inégalité plus haut nous donne $\big(\overline{\triangle}S, S\big) \leq (\lambda_1 + \underline{V}^-)|S|^2$, d'où :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int |DS|^2 = \int \big(\overline{\triangle}S, S\big) \leq \lambda_1\|S\|_2^2 + \|\underline{V}^-\|_1\|S\|_\infty^2 \\ &\leq \Big(\lambda_1 + \|\underline{V}^-\|_1\big(1 + a(p,q,C)\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}}}\big)^{\frac{pq}{p-q}}\Big)\|S\|_2^2 \end{aligned}$$

ce qui conclut.

Pour toute partie finie $I$ de $\mathbb{N}$, nous notons toujours $E_I$ le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble des sections propres $S_i$, où $i{\in}I$. Posons $F(m) = \sum\limits_i |S_i^m(m)|^2$, où $(S_i^m)$ est une base $L^2$-orthonormée de $E_I$ qui diagonalise la forme bilinéaire symétrique donnée par $(t,s) \mapsto < t(m), s(m) >_{E_m}$. Cette forme bilinéaire symétrique est de rang au plus égal à la dimension $l$ de $E_m$. On en déduit que $F(m)$ est la somme d'au plus $l$ termes non nuls, on a donc :

$$\|F\|_\infty \leq l \sup_{m,i}\|S_i^m\|_\infty^2 \leq l A_\infty(I)^2$$

D'autre part, remarquons que $F$ est la trace de la forme bilinéaire définie plus haut relativement au produit scalaire $L^2$ de $E_I$, on a donc $F(m) = \sum_i |S_i(m)|^2$ pour toute base $(S_i)_{i\in I}$ $L^2$-orthonormée de $E_I$. On en déduit :

$$dim(E_I) = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_M \sum_i |S_i(x)|^2 = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_M F(x) \leq \|F\|_\infty \leq l.A_\infty(I)^2.$$

En remarquant que $\big(\overline{\triangle}+V-K\big)(S_i)=(\lambda_i-K)S_i$, la proposition 3.1 permet d'en déduire que, pour toute constante $K$ et tout couple de réels $p>q>n$, on a :

$$\dim(E_I)\leq l\left(1+a(p,q,C)\operatorname{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V}-K)^-\|_{p/2}+\sup_{i\in I}|\lambda_i-K|}\right)^{\frac{pq}{p-q}}.$$

La propriété (ii) du corollaire se déduit de cette inégalité, en choisissant $I=\{i/\lambda_i=\lambda\}$ et $K=\lambda$. La partie (iii) du corollaire s'en déduit également en choisissant $I=\{j/\lambda_j\leq 0\}$, $K=0$ et en remarquant qu'alors $\sup_{i\in I}|\lambda_i-K|\leq|\lambda_1|$, ce qui conclut d'après $(i)$. Enfin, la propriété $(iv)$ du corollaire s'en déduit en choisissant $I=\{j/\lambda_j\leq\lambda_i\}$, $K=\lambda_1$, et en remarquant qu'alors $\dim(E_I)=i$. Ce qui donne la première inégalité. La deuxième inégalité se déduit de la première, de la propriété $(i)$ et de $\|(\underline{V}-\lambda_1)^-\|_{p/2}\leq\|\underline{V}^-\|_{p/2}$ si $\lambda_1\leq 0$. Pour démontrer la troisième inégalité, on pose $I=\{j/\lambda_j\leq\lambda_i\}$ et $K=0$. On a alors $\sup\limits_{j\in I}|\lambda_j|=\lambda_i$ puisque les valeur propres sont numérotées par ordre croissant et que, par hypothèse, $\lambda_1\geq 0$.

$\square$

**Remarque.** — Dans la démonstration de la minoration de $\lambda_1\big(\overline{\triangle}+V\big)$ du corollaire 3.2 $(i)$, on a utilisé la positivité de $\|DS\|_2^2$. Plus loin (partie **III** de cette thèse), dans la démonstration du théorème 4.18 (où la technique de Lichnerowicz est adaptée pour minorer la première valeur propre non nulle du laplacien des variétés telles que la quantité $\|\big(\operatorname{Ric}-(n-1)\big)^-\|_{\frac{p}{2}}$ soit universellement petite), on aura $S=df$, où $f$ est une fonction propre associée à la première valeur propre. Dans ce cas, on a la minoration plus forte $\|DS\|_2^2=\|Ddf\|_2^2\geq\frac{\lambda_1^2}{n}\|f\|_2^2$, ce qui nous permettra de minorer $\lambda_1$ par $n$ plutôt que $n-1$.

Dans le cas limite où $p=q\geq n$ ($q>n$ si $n=2$), on peut adapter ce qui précède pour obtenir une majoration du rapport entre normes $L^r$ et norme $L^2$ des combinaisons linéaires de sections propres :

**Proposition 3.3.** — *Soit $n$ un entier ($n\geq 2$). Soient $q$, $r$ et $C$ des nombres réels tels que $r\geq\frac{2q}{q-2}$ et $q\geq n$ ($q>n$ si $n=2$). Soit $E\to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne $(M^n,g)$ compacte, de dimension $n$, qui vérifie $S_q(M)\leq C$. Soit $\overline{\triangle}+V$ un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de $E$ et qui vérifie* $\operatorname{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}<\frac{4q^2}{r^2(q-2)^2C^2}$ *et $E_I$ un sous-espace de sections propres de cet opérateur. Alors, pour toute section $S$ de $E_I$, on a :*

$$\|S\|_r\leq\left(\frac{1+\frac{r(q-2)}{2q}C\operatorname{Diam}(M)\sqrt{\sup_I|\lambda_i|}}{1-\frac{r(q-2)}{2q}C\operatorname{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{\frac{q(r-2)}{2r}}\|S\|_2$$

La technique de P. Li ([66]) ne permet pas de déduire de la proposition 3.3 un équivalent du corollaire 3.2. Il faut pour cela utiliser le raffinement développé par S. Gallot et D. Meyer dans [53] (théorème 1) qui majore la dimension d'un espace de sections en fonction de la dimension $l$ du fibré et d'un majorant du rapport entre les normes $L^2$ et $L^1$ des sections de l'espace (et donc également en fonction du rapport entre les normes $L^p$ et $L^q$ pour tout couple $p > q$ d'après l'inégalité d'interpolation du lemme 1.1 rappelée en introduction). On obtient alors le résultat suivant :

**Corollaire 3.4.** — *Soit $n$ et $l$ des entiers ($n \geq 2$). Soient $q$ et $C$ des nombres réels tels que $q \geq n$ ($q > 2$ si $n = 2$). On pose $\gamma(x) = \sqrt{\frac{2}{x}}\frac{\Gamma(\frac{x+1}{2})}{\Gamma(\frac{x}{2})}$, où $\Gamma$ est la fonction d'Euler (rappelons que, d'après l'appendice de [53], $\gamma$ est une fonction strictement croissante, qui tend vers 1 lorsque $x$ tend vers $+\infty$).*

*Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien, dont la fibre est de dimension $l$, au-dessus d'une variété riemannienne $(M^n, g)$ compacte, de dimension $n$, qui vérifie $S_q(M) \leq C$. Soit $\overline{\triangle} + V$ un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de $E$. On a alors :*

*(i) On note $\lambda_1\big(\overline{\triangle}+V\big)$ la plus petite valeur propre de l'opérateur $\overline{\triangle}+V$. S'il existe un réel $\alpha \in ]0,1[$ tel que la condition $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}} < \frac{\alpha^2}{4C^2}$ soit vérifiée, alors :*

$$\lambda_1\big(\overline{\triangle}+V\big) \geq -(1+\alpha)\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}$$

*(ii) Si on note $\mathrm{Ind}(\overline{\triangle}+V)$ le nombre de valeurs propres négatives (comptées avec multiplicité) de l'opérateur $\overline{\triangle}+V$, et si $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}} < \frac{\alpha^2}{4C^2}$ (où $\alpha \in ]0,1[$), alors :*

$$\gamma\big(\mathrm{Ind}(\overline{\triangle}+V)\big) \leq (1+\alpha)^{\frac{q}{2}}\gamma(l)$$

*(iii) Si on note $\lambda_i\big(\overline{\triangle}+V\big)$ la i-ème valeur propre de l'opérateur $\overline{\triangle}+V$ et si la condition $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}} < \frac{1}{C^2}\big[1-\big(\frac{\gamma(l)}{\gamma(l+1)}\big)^{\frac{1}{q}}\big]^2$ est vérifiée, alors :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\lambda_{l+1}\big(\overline{\triangle}+V\big) \geq \frac{1}{C^2}\Big[\big(\frac{\gamma(l+1)}{\gamma(l)}\big)^{\frac{1}{q}}-1\Big]^2$$

*(les opérateurs de potentiel presque positif n'admettent pas plus de $l$ petites valeurs propres).*

### Un défaut de cet énoncé

La fonction $\gamma$ est croissante et tend vers 1 à l'infini. L'inégalité $(ii)$ n'est donc non vide que si son membre de droite est strictement plus petit que 1, et donc si $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}$ est plus petit que $\frac{1}{C^2}\left(1-\gamma(l)^{\frac{1}{q}}\right)^2$. Remarquer que, dans la proposition 3.2, l'existence d'une majoration de l'indice de l'opérateur $\overline{\triangle}+V$ ne dépendait pas de la dimension de la fibre. De même, on aurait pu écrire une majoration de la multiplicité d'une valeur propre $\lambda$ de l'opérateur $\overline{\triangle} + V$ de la forme :

si $\mathrm{Diam}(M)^2 \|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}} < \frac{1}{C^2}$, alors :

$$\gamma\big(mult(\lambda)\big) \leq \gamma(l) \left( \frac{1 + C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{|\lambda|}}{1 - C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}} \right)^{\frac{q}{2}},$$

mais le fait que $\gamma$ tende vers 1 à l'infini fait que cette majoration est vide pour les valeurs de $\lambda$ plus grandes qu'une constante (indépendante de $l$). Pour la même raison, on n'a pas écrit de minoration de $\lambda_i$ en fonction de $\gamma(i)$.

**Résultats à la Gauss-Bonnet-Chern**

Les estimées universelles sur le spectre (sections propres et valeurs propres) d'opérateurs (laplacien+potentiel) données par la proposition 3.1 et son corollaire 3.2 sont valables (sans modification des constantes) sur la classe des variétés riemanniennes compactes satisfaisant une certaine inégalité sur la norme $L^{p/2}$ de la partie négative de leur courbure de Ricci (d'après le théorème de S. Gallot sur le contrôle des constantes de Sobolev rappelé en section 1.3.2). En étudiant le cas particulier du laplacien de Hodge, que l'on considérera (via les formules de Weitzenböck) comme un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les k-formes différentielles, et en majorant, par le corollaire 3.2, la multiplicité de la valeur propre nulle, on retrouve la majoration des nombres de Betti $b_i(M)$ donnée par S. Gallot dans [50].

Remarquer que le corollaire 3.4 s'applique dans le cas $q = n$ (lorsque $S_n(M,g) \leq C$) et estime alors l'indice et les petites valeurs propres de l'opérateur $\big(\overline{\triangle} + V\big)$ en fonction de la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de $\underline{V}^-$ (contrairement au corollaire 3.2, où ces estimations se font en fonction d'une norme $L^{\frac{p}{2}}$ de $\underline{V}^-$, où $p$ est toujours strictement supérieur à $n$, même lorsque $S_n(M,g) \leq C$). En particulier, il donne une majoration uniforme du premier nombre de Betti des variétés riemanniennes compactes qui ont leur constante de Sobolev $S_n(M,g)$ uniformément bornée et dont la partie négative de la courbure de Ricci a une norme $L^{\frac{n}{2}}$ suffisamment petite (i.e. inférieure à une constante universelle). Cet indice $\frac{n}{2}$ est exactement la puissance à laquelle apparaissent les termes de courbure dans la formule de Gauss-Bonnet-Chern. Dans [50], S. Gallot contrôle uniformément les constantes $S_q(M,g)$ pour $p \geq q > n$ dès qu'une norme $L^{\frac{p}{2}}$ de la partie négative de la courbure de Ricci est suffisamment petite. Toutefois, il montre par des contre-exemples que le premier nombre de Betti ne peut-être universellement majoré si l'hypothèse sur la courbure de Ricci porte sur une norme $L^{\frac{n}{2}}$. Ceci est dû au fait que, dans ses contre-exemples, les constantes de Sobolev $S_n(M,g)$ ne sont plus bornées universellement. On peut contourner cette obstruction en remarquant que le résultat de Hoffman-Spruck [60] permet de majorer les constantes de Sobolev $S_n(M,g)$ uniformément sur les variétés minimales plongées dans des variétés de courbure sectionnelle bornée ; couplé au corollaire précédent, cela permet de majorer universellement, en fonction d'une norme $L^{\frac{n}{2}}$ de la partie négative de la courbure de Ricci, le premier nombre de Betti des sous-variétés minimales des variétés de courbure sectionnelle bornée (on peut aussi se restreindre aux plongements dans une variété donnée). C'est un exemple, non trivial en dimension impaire, de théorème à la Gauss-Bonnet-Chern.

**Démonstration de la proposition 3.3.** — En prenant $p=q$ dans le début de la preuve de la proposition 3.1, on obtient l'inégalité :

$$\|S\|^k_{\frac{2kq}{q-2}} \leq Ck\,\mathrm{Diam}(M)\left(\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}\|S\|^k_{\frac{2kq}{q-2}} + \sqrt{\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{2k}}\|S\|_{2k}^{\frac{2k-1}{2}}\right) + \|S\|^k_{2k}$$

Dont on déduit l'inégalité suivante :

$$A^k_{\frac{2kq}{q-2}}(I)\left(1 - Ck\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}\right) \leq \left(1 + Ck\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\sup_I|\lambda_i|}\right)A^k_{2k}(I)$$

Enfin, on pose $k=\frac{r(q-2)}{2q}$ (on a donc $k\geq 1$ si $r\geq\frac{2q}{q-2}$) et on remarque que l'inégalité 1.1 donne $A_{2k}(I)\leq A^{1-\gamma}_{\frac{2kq}{q-2}}(I)$ pour $\gamma=\frac{2}{(k-1)q+2}$, d'où :

$$A_r(I) \leq \left(\frac{1+\frac{r(q-2)}{2q}C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\sup_I|\lambda_i|}}{1-\frac{r(q-2)}{2q}C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{q(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}$$

□

**Démonstration du corollaire 3.4.** — Comme dans la preuve du corollaire 3.2, on suppose $\lambda_1\leq 0$ et on pose $u=\sqrt{|S|^2+\epsilon^2}$, où $S$ est une section propre telle que $(\overline{\triangle}+V)S=\lambda_1 S$. On a toujours $\int u\triangle u\leq\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}\|u\|^2_{\frac{2q}{q-2}}$. Or, par hypothèse sur $C$, on a $\|u\|_{\frac{2q}{q-2}}\leq C\,\mathrm{Diam}(M)\|du\|_2+\|u\|_2\leq C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}\|u\|_{\frac{2q}{q-2}}+\|u\|_2$, dont on déduit que $\|S\|_{\frac{2q}{q-2}}\leq\frac{\|S\|_2}{1-C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}}$. Enfin, on conclut en utilisant l'inégalité :

$$0\leq\int(\overline{\triangle}S,S)\leq\lambda_1\|S\|_2^2+\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}\|S\|^2_{\frac{2q}{q-2}}\leq\left(\lambda_1+\frac{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}{(1-C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}})^2}\right)\|S\|_2^2$$

On en déduit le résultat $(i)$ en remarquant que $\frac{1}{(1-\frac{\alpha}{2})^2}\leq(1+\alpha)$.

Pour démontrer les autres assertions, remarquer que $\frac{2q}{q-2}\geq 2$. Donc l'inégalité d'interpolation du lemme 1.1 assure que, pour toute section $L^{\frac{2q}{q-2}}$, on a $\|S\|_2\leq\|S\|_1^\alpha\|S\|^{1-\alpha}_{\frac{2q}{q-2}}$ pour $\alpha=\frac{2}{q+2}$. On déduit de la proposition 3.3 (où on pose $r=\frac{2q}{q-2}$) que, si $E_I$ est un sous-espace de sections propres de l'opérateur $\overline{\triangle}+V$, alors pour toute section $S$ de $E_I$, on a :

$$\|S\|_2 \leq \left(\frac{1+C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\sup_I|\lambda_i-K|}}{1-C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\big(\underline{V}-K\big)^-\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{\frac{q}{2}}\|S\|_1.$$

D'après le théorème 1 de [53], on a alors :

$$\gamma(dimE_I) \leq \gamma(l)\left(\frac{1+C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\sup_I|\lambda_i-K|}}{1-C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\big(\underline{V}-K\big)^-\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{\frac{q}{2}}$$

la fin de la démonstration du corollaire est la même que celle du corollaire 3.2 (on pose $I=\{i/\lambda_i\leq 0\}$, $K=0$ et on combine avec $(i)$ pour démontrer l'inégalité $(ii)$). Pour démontrer $(iii)$, on pose $I=[\![1,l+1]\!]$ et $K=0$. On a alors $\sup\limits_{i\in I}|\lambda_i|=\max\big(|\lambda_1|,\lambda_{l+1}\big)$. Supposons que $\sup\limits_{i\in I}|\lambda_i|=|\lambda_1|$ (et donc, en particulier, que $\lambda_1\leq 0$). Alors, $|\lambda_1|$ est majoré par l'inégalité $(i)$, et on obtient :

$$\Big[\frac{\gamma(l+1)}{\gamma(l)}\Big]^{\frac{2}{q}} \leq \frac{1}{\Big(1-C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}\Big)^2},$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}$. On a donc $\sup\limits_{i\in I}|\lambda_i|=\lambda_{l+1}$ (et donc $\lambda_{l+1}\geq 0$) et :

$$\Big(\frac{\gamma(l+1)}{\gamma(l)}\Big)^{\frac{2}{q}} \leq \frac{1+C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\lambda_{l+1}}}{1-C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}} \leq \big(1+C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\lambda_{l+1}}\big)\Big(\frac{\gamma(l+1)}{\gamma(l)}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

d'où le résultat annoncé.

□

Nous allons maintenant démontrer une extension du principe de Bochner géométrique (qui montre qu'une famille $L^2$-orthonormée de sections harmoniques d'un opérateur (laplacien+potentiel) à potentiel positif forme un repère partout orthonormé) aux cas des opérateurs de potentiels presque positif. Le lemme suivant découle de la proposition 3.1 et sera beaucoup utilisé dans la démonstration des théorèmes de stabilité de la partie **III** de cette thèse. Il affirme qu'une famille $L^2$-orthonormée de sections propres (correspondant à des petites valeurs propres) d'un opérateur (laplacien+potentiel) à potentiel presque positif est presqu'orthonormée dans chaque fibre au-dessus d'un ensemble de mesure presque égale à $\mathrm{Vol}\,M$ :

**Lemme 3.5.** — *Soit $n$ un entier ($n\geq 2$). Soit $(M^n,g)$ une variété riemannienne compacte de dimension $n$ qui vérifie $S_q(M,g)\leq C$ pour au moins un réel $q\geq n$ ($q>n$ si $n=2$).*

*Soit $E \to M$ un fibré riemannien et $\overline{\triangle}+V$ un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur l'espace $\mathcal{E}$ des sections de ce fibré. Notons $E_I$ n'importe quel sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par une famille finie et $L^2$-orthonormée $(S_i)_{i\in I}$ de sections propres de cet opérateur. Pour tout nombre $p \in ]q, +\infty]$, notons $M'$ l'ensemble des points de $M$ tels que :*

$$\forall i, \forall j \in I,\ |< S_i(x), S_j(x) > -\delta_{ij}| \leq b(p,q,C)\big[\mathrm{Diam}(M)^2(\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}} + \sup_{k\in I}|\lambda_k|)\big]^{\frac{1}{4}}$$

*où $b(p,q,C) = \big(1+a(p,q,C)\big)^{\frac{pq}{p-q}} - 1$ et où $a(p,q,C)$ est la constante universelle de la proposition 3.1. Alors on a :*

$$\frac{\mathrm{Vol}\, M'}{\mathrm{Vol}\, M} \geq 1 - (\#I)^2 b(p,q,C)\big[\mathrm{Diam}(M)^2(\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}} + \sup_{k\in I}|\lambda_k|)\big]^{\frac{1}{4}}.$$

*De plus, si $l$=rg$(E)$ désigne la dimension de la fibre du fibré $E$, et si l'hypothèse supplémentaire $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}} \leq \frac{1}{\left(C+\sqrt{2}(l+1)^4 b(p,q,C)^2\right)^2}$ est vérifiée, il ne peut y avoir plus de $l$ valeurs propres qui vérifient :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\lambda_i \leq \frac{1}{2(l+1)^8 b(p,q,C)^4}.$$

*Si toutes les valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in I}$ vérifient cette inégalité, on peut remplacer $\#I$ par $l$ dans la minoration du volume de $M'$ donnée plus haut.*

**Démonstration.** — Posons $\Lambda = \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}} + \sup_{k\in I}|\lambda_k|}$. Nous pouvons supposer dans la suite que $\Lambda < 1$, sinon le lemme est trivialement vérifié. On note $M''$ l'ensemble des points de $M$ tels que :

$$\begin{cases} |S_i(x)+S_j(x)|_E^2 \geq 2(1-\sqrt{\Lambda}) & \forall i<j, \\ |S_i(x)-S_j(x)|_E^2 \geq 2(1-\sqrt{\Lambda}) & \forall i<j, \\ |S_i(x)|_E^2 \geq 1-\sqrt{\Lambda} \end{cases}$$

Posons $k=\#I$. On a alors, d'après la proposition 3.1 :

$$\begin{aligned}
2k^2 &= \sum_{i<j}\|S_i+S_j\|_2^2+\|S_i-S_j\|_2^2+\sum_i 2\|S_i\|_2^2\\
&\leq \frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_{M''}\big(\sum_{i<j}|S_i+S_j|_E^2+|S_i-S_j|_E^2+\sum_i 2|S_i|_E^2\big)\\
&\qquad +\frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_{M\setminus M''}\big(\sum_{i<j}|S_i+S_j|_E^2+|S_i-S_j|_E^2+\sum_i 2|S_i|_E^2\big)\\
&\leq \frac{\mathrm{Vol}\,M''}{\mathrm{Vol}\,M}\big(\sum_{i<j}\|S_i+S_j\|_\infty^2+\|S_i-S_j\|_\infty^2+\sum_i 2\|S_i\|_\infty^2\big)\\
&\qquad +\left(1-\frac{\mathrm{Vol}\,M''}{\mathrm{Vol}\,M}\right)\left((k^2-1)\max_{1\leq i<j\leq k}\Big[\|S_i+S_j\|_\infty^2,\|S_i-S_j\|_\infty^2,2\|S_i\|_\infty^2\Big]+2(1-\sqrt{\Lambda})\right)\\
&\leq 2k^2\big(1+a(p,q,C)\Lambda\big)^{\frac{pq}{p-q}}\frac{\mathrm{Vol}\,M''}{\mathrm{Vol}\,M}\\
&\qquad +\Big[2(k^2-1)\big(1+a(p,q,C)\Lambda\big)^{\frac{pq}{p-q}}+2(1-\sqrt{\Lambda})\Big]\left(1-\frac{\mathrm{Vol}\,M''}{\mathrm{Vol}\,M}\right)\\
&\leq 2(k^2-1)\big(1+b(p,q,C)\Lambda\big)+2(1-\sqrt{\Lambda})+2\big(b(p,q,C)\Lambda+\sqrt{\Lambda}\big)\frac{\mathrm{Vol}\,M''}{\mathrm{Vol}\,M}
\end{aligned}$$

où la majoration de $\big(1+a(p,q,C)\Lambda\big)^{\frac{pq}{p-q}}$ par $\big(1+b(p,q,C)\Lambda\big)$ provient de la convexité de la fonction $f(x)=(1+ax)^{\frac{pq}{p-q}}$ (en effet, comme $\frac{pq}{p-q}>q>1$, on obtient que $f(\Lambda)$ est majoré par $f(0)+\Lambda\big(f(1)-f(0)\big)$). On en déduit la minoration :

$$\frac{\mathrm{Vol}\,M''}{\mathrm{Vol}\,M}\geq 1-\frac{k^2 b(p,q,C)\sqrt{\Lambda}}{1+b(p,q,C)\sqrt{\Lambda}}$$

Donc $\frac{\mathrm{Vol}\,M''}{\mathrm{Vol}\,M}\geq 1-k^2b(p,q,C)\sqrt{\Lambda}$. Enfin, par définition de $M''$ et d'après la proposition 3.1, on a, pour tout point $x$ de $M''$ :

$$\begin{aligned}
< S_i(x),S_j(x)>_E &= \frac{|S_i(x)+S_j(x)|^2-|S_i(x)-S_j(x)|^2}{4}\\
&\leq \frac{2(1+a(p,q,C)\Lambda)^{\frac{pq}{p-q}}-2(1-\sqrt{\Lambda})}{4}\\
&\leq \frac{\sqrt{\Lambda}+b(p,q,C)\Lambda}{2}\\
&\leq b(p,q,C)\sqrt{\Lambda}
\end{aligned}$$

De même, $< S_i(x),S_j(x)>_E\geq -b(p,q,C)\sqrt{\Lambda}$ et $\big|\|S_i(x)\|_E^2-1\big|\leq b(p,q,C)\sqrt{\Lambda}$, et donc $M''\subset M'$.

Pour démontrer la remarque finale sur $\#I$, on pourrait utiliser le corollaire 3.2 (*iv*) (qui donnerait une forme plus compliquée à l'énoncé). On préfère montrer que le résultat de ce lemme contient un résultat du même type que le corollaire 3.2 (*iv*), qui se démontre sans avoir à passer par la méthode de P. Li ou celle de S. Gallot et D. Meyer. En effet, supposons que $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}} \leq \frac{1}{\left(C+\sqrt{2}(l+1)^4 b(p,q,C)^2\right)^2}$ et notons $I$ l'ensemble $\{i/\,\mathrm{Diam}(M)^2\lambda_i \leq \frac{1}{2(l+1)^8 b(p,q,C)^4}\}$. Le corollaire 3.4 ($i$) implique que, si $\lambda_1 < 0$, alors :

$$\mathrm{Diam}(M)^2|\lambda_1\big(\overline{\triangle}+V\big)| \leq \frac{\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}{(1 - C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}})^2}$$

$$\leq \frac{1}{\left(C+\sqrt{2}(l+1)^4 b(p,q,C)^2 - C\right)^2} = \frac{1}{2(l+1)^8 b^4}$$

(remarquer qu'on a utilisé $q \leq p$). On en déduit que $\mathrm{Diam}(M)^2|\lambda_k| \leq \frac{1}{2(l+1)^8 b^4}$ pour tout $k \in I$ (le cas $\lambda_1 \geq 0$ est trivial). On obtient donc que $\Lambda = \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}} + \sup_{k\in I}|\lambda_k|}$ est majoré par $\frac{1}{(l+1)^4 b(p,q,C)^2}$ pour cette famille. Si $\#I > l$, on restreint $I$ en extrayant une famille de $(l+1)$ sections propres. Pour ce nouveau sous-ensemble (encore appelé $I$), on a $\frac{Vol M'}{\mathrm{Vol}\, M} \geq 1 - (l+1)^2 b(p,q,C)\sqrt{\Lambda} > 0$ et donc $M'$ est non vide. En un point $x_0$ de $M'$, on a $| < S_i(x_0), S_j(x_0) > -\delta_{ij}| < \frac{1}{(l+1)^2}$. On en déduit que la matrice de Gramm $A = \big(< S_i(x_0), S_j(x_0) >\big)_{ij}$ vérifie $\|A - I_{l+1}\| < 1$ et est donc inversible. Ce qui est absurde car, en tant que matrice de Gramm d'une famille de vecteurs de $E_{x_0}$, son rang doit être égal à celui de la famille, et donc inférieur à la dimension $l$ de l'espace $E_{x_0}$. On en déduit que $\#I \leq l$. $\square$

**Variantes utilisées dans la partie III de la thèse**

La proposition 3.1 et le lemme 3.5 se généralisent quasi directement au cas où $S$ est une combinaison linéaire de sections d'une famille $(S_i)_{i\in I}$ qui est $L^2$-orthonormée et vérifie $\big(\overline{\triangle}+V\big)S_i = \lambda_i A(S_i)$, où $A$ est un champ d'endomorphismes de $E$. Il faut juste remarquer que le seul passage à adapter dans la preuve de la proposition 3.1 est la série d'inégalités $(*)$ de la page 61. Or on a :

$$\|(\overline{\triangle}+V)S\|_{2k} \leq \|A\|_\infty \|\sum \lambda_i S_i\|_{2k} \leq \|A\|_\infty A_{2k}(I)\|\sum \lambda_i S_i\|_2 \leq \|A\|_\infty A_{2k}(I)\sup|\lambda_i|\|S\|_2$$

pour tout élément $S$ de $E_I$, ce qui est exactement le type d'inégalité permettant de conclure. Le seul changement dans l'énoncé étant alors que $\sup_I|\lambda_i|$ est remplacé par $\|A\|_\infty \sup_I|\lambda_i|$ (ou éventuellement $\|A\|_{\frac{p}{2}}\sup_I|\lambda_i|$). Pour ce qui est du lemme 3.5, il s'adapte sans problème en utilisant la variante de la proposition 3.1. Ces variantes seront utilisées dans la partie **III** de cette thèse, pour un champ $A$ d'isométries. Dans ce cas, on a $|A| \equiv 1$, et donc les énoncés de la proposition 3.1 et du lemme 3.5 sont valables sans modification des constantes.

## 3.2 Majoration de $\|DS\|_\infty$ en fonction de $\|DS\|_2$

Dans cette section on démontre une majoration de $\|DS\|_\infty$ dans le cas où $S$ est une combinaison linéaire de sections propres d'un opérateur (laplacien+potentiel). La proposition énoncée dans cette section est essentielle pour la quatrième partie de cette thèse. En effet, appliquée à $df$, où $f$ est une combinaison linéaire de fonctions propres d'une variété $(M,g)$, elle permet de borner en norme $L^\infty$ le Hessien de $f$, et donc d'approximer le quotient de Rayleigh de $f$ par une quantité qui ne dépend que des valeurs de $f$ aux sommets d'un bon graphe plongé dans la variété. Pour d'autres applications de cette proposition voir [62] (dont cette proposition généralise un des résultat) ou [15], dont la démonstration des résultats peut être largement court-circuitée par cette proposition. Cette proposition est une application directe des propositions 2.2 et 3.1) :

**Proposition 3.6.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$, $q$ et $C$ des nombres réels tels que $+\infty \geq p > q \geq n$ ($q > n$ si $n = 2$). Soit $E \to M$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$ et qui vérifie $S_q(M,g) \leq C$. Soit $\overline{\triangle} + V$ un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de $E$ et $E_I$ un sous-espace de sections propres de cet opérateur. Alors, pour toute section $S$ de $E_I$, on a :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_\infty}{\|S\|_\infty} \leq \Big(1 + a'(p,q,C)\Lambda^{1/4}\Big)^{\frac{pq}{p-q}}$$
$$\times \max\left[\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\big(\underline{V} - \max_{i\in I}\lambda_i\big)^-\|_1}, \left(\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\big(\underline{V} - \max_{i\in I}\lambda_i\big)^-\|_1}\right)^{\frac{2(p-q)}{2(p-q)+pq}}\right],$$

*où $a'$ est la constante universelle définie dans la proposition 2.2 et où :*

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M)^2\Big[\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|R^E\|_{\frac{p}{2}}\Big] + \mathrm{Diam}(M)^4\Big[\|R^E\|_p^2 + 2\|V\|_p^2\Big]$$
$$+2\,\mathrm{Diam}(M)^4 \sup_{i\in I}|\lambda_i|^2\left[1 + a(p,q,C)\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}} + \sup_{i\in I}|\lambda_i|}\right]^{\frac{pq}{(p-q)}}.$$

**Remarque.** — Cette inégalité redonne et généralise un résultat de la méthode classique de Böchner qui affirme que les sections harmoniques des opérateurs (laplacien+potentiel) à potentiel positif sont parallèles. Dans notre cas, les sections propres associées à de "petites" valeurs propres d'un opérateur (laplacien+potentiel) à potentiel "presque" positif, sont "presque" parallèles.

**Démonstration.** — On a :

$$\|\overline{\triangle}S\|_p \leq \|\big(\overline{\triangle} + V\big)S\|_p + \|VS\|_p \leq A_p(I)\|\big(\overline{\triangle} + V\big)S\|_2 + \|V\|_p\|S\|_\infty$$
$$\leq \Big(A_p(I)\sup_I|\lambda_i| + \|V\|_p\Big)\|S\|_\infty$$

où, d'après la proposition 3.1, $A_p(I)$ est majoré par :

$$\left(1 + a(p,q,C)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}} + \sup_{i\in I}|\lambda_i|}\right)^{\frac{pq}{2(p-q)}}.$$

De plus, $\|\mathrm{R^E S}\|_\mathrm{p} \leq \|\mathrm{R^E}\|_\mathrm{p}\|\mathrm{S}\|_\infty$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\|DS\|_2^2 = \int_M (\overline{\triangle} S, S) &= \int_M \Big((\overline{\triangle} + V)S, S\Big) - \int_M (VS, S)\\ &\leq -\int_M (\underline{V} - \max_{i\in I}\lambda_i)|S|^2 \leq \|(\underline{V} - \max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1\|S\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Ce qui permet de déduire le résultat annoncé de la proposition 2.2. □

## 3.3 Majoration de $\|DS\|_r$ en fonction de $\|DS\|_2$

Dans cette section, nous établissons des analogues de la proposition 3.6 moins exigeants sur les normes de $R^E$ et de $V$ (comparer par exemple la proposition 3.6 au corollaire 3.8). Cependant, nous ne contrôlons plus que la norme $L^r$ (pour un réel $r$ fini) de $DS$. Ce contrôle sera toutefois suffisant pour obtenir, via la donnée d'un majorant d'une constante de Sobolev $S'_q(M, g)$, les inégalités de Harnack de la section suivante.

De même que pour la proposition 3.6, on déduit la proposition suivante de la proposition 2.4 :

**Proposition 3.7.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $q$, $p_1$, $p_2$, $r$ et $C$ des nombres réels tels que $p_1 > q \geq p_2 \geq 2$, $q \geq n$ ($q > n$ si $n = 2$) et $2 < r < \frac{p_2 q}{q-p_2}$. Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie $S_q(M, g) \leq C$. Soit $\overline{\triangle} + V$ un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de $E$ et $E_I$ un sous-espace de sections propres de cet opérateur. Alors, pour toute section $S$ de $E_I$, on a :*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_r}{\|S\|_\infty} &\leq \Big(1 + (2 + \frac{r'(p_2-2)}{p_2})C\Lambda^{\frac12}\Big)^{1/\gamma} \times\\ &\max\left[\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\big(\underline{V} - \max_{i\in I}\lambda_i\big)^-\|_1}, \left(\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\big(\underline{V} - \max_{i\in I}\lambda_i\big)^-\|_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\right],\end{aligned}$$

*où $\gamma = \frac{2\left[1-r'\left(\frac{q-p_2}{p_2 q}\right)\right]}{r'-2}$, $r' = \max(r, \frac{p_1 p_2}{p_1-p_2})$, et où :*

$$\begin{aligned}\Lambda = \mathrm{Diam}(M)^2\Big[\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p_1}{2}} + \|R^E\|_{\frac{p_1}{2}}\Big] &+ \mathrm{Diam}(M)^4\Big[\|R^E\|_{p_2}^2 + 2\|V\|_{p_2}^2\Big]\\ &+ 2\,\mathrm{Diam}(M)^4 \sup_{i\in I}|\lambda_i|^2\left[1 + a(p_1, q, C)\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p_1}{2}} + \sup_{i\in I}|\lambda_i|}\right]^{\frac{p_1 q}{(p_1-q)}}.\end{aligned}$$

**Démonstration.** — On procède en adaptant la proposition 2.4 au cas des combinaisons linéraires de sections propres comme dans la démonstration de la proposition 3.6. En remarquant toutefois que $A(p_2)(I)$ est majoré par $A(p_1)(I)$ qui lui même est majoré en utilisant la proposition 3.1.

□

On en déduit le corollaire suivant (ce résultat, sous cette forme mais ne s'appliquant qu'aux sections harmoniques, a été démontré par M. Le Couturier et G. Robert dans [65]) :

**Corollaire 3.8.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 4$). Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne $(M^n, g)$ compacte, qui vérifie $S_q(M,g) \leq C$ pour au moins un réel $q \geq n$. Soit $\overline{\triangle} + V$ un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de $E$ et $E_I$ un sous-espace de sections propres de cet opérateur. Alors, pour toute section $S$ de $E_I$, et pour tout réel $p \in ]q, 2q]$, on a :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_p}{\|S\|_\infty} \leq (1+(p-2)C\Lambda^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$\times \max\left[\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V} - \max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1}, \left(\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V} - \max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\right],$$

*où $\gamma = \frac{2(p-q)}{q(p-2)}$ et où :*

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M)^2\left[\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p}{2}}\right] + \mathrm{Diam(M)}^4\left[\|\mathrm{R^E}\|^2_{\frac{p}{2}} + 2\|\mathrm{V}\|^2_{\frac{p}{2}}\right]$$
$$+2\,\mathrm{Diam}(M)^4\sup_{i\in I}|\lambda_i|^2\left[1 + a(p,q,C)\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}} + \sup_{i\in I}|\lambda_i|}\right]^{\frac{pq}{(p-q)}}.$$

*Le même énoncé vaut pour $n = 2, 3$ et pour tous les couples $(p,q)$ tels que $n \leq q < p < 4$ ($q > n$ si $n = 2$), en remplaçant $\gamma$ par $\frac{p-q}{q}$ et $\Lambda$ par :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\left[\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p}{2}}\right] + \mathrm{Diam(M)}^4\left[\|\mathrm{R^E}\|^2_2 + 2\|\mathrm{V}\|^2_2 + 2\sup_{\mathrm{i\in I}}|\lambda_\mathrm{i}|^2\right].$$

**Démonstration.** — Si $n \geq 4$, on applique la proposition 3.7 en faisant $p_1 = p$, $p_2 = \frac{p}{2}$ et $r = p$, ce qui donne $r' = p$. Si $n \leq 3$, on applique la proposition 3.7 en modifiant la preuve de manière à exploiter le fait que $A_2(I) = 1$ et en posant $p_1 = p$, $p_2 = 2$ et $r = p$. □

Dans les cas limites on obtient, comme corollaires des propositions 2.6 et 2.7, les deux énoncés suivants (on remplace la majoration de $A_{\frac{q}{2}}(I)$ donnée par la proposition 3.1 par celle donnée par la proposition 3.3) :

**Proposition 3.9.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 4$). Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne compacte de dimension $n$, qui vérifie $S_q(M,g) \leq C$ pour au moins un réel $q \in ]n, 2n]$. Soit $E \to M^n$ un fibré riemannien qui vérifie* $\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}} + \|R^E\|_{\frac{q}{2}}\big) < \frac{1}{C^2(q-2)^2}$

*et soit* $\overline{\triangle}+V$ *un opérateur (laplacien+potentiel), agissant sur les sections de* $E$ *et qui vérifie* $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}} < \frac{4}{(q-2)^2C^2}$*. Alors, si* $E_I$ *un sous-espace de sections propres de cet opérateur, pour toute section* $S$ *de* $E_I$ *et pour tout réel* $p \in [n,q[$*, on a :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_p}{\|S\|_\infty} \le \left(\frac{1+(q-2)C\,\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\mathrm{R^E}\|_{\frac{q}{2}}+\|\mathrm{V}\|_{\frac{q}{2}}+\mathrm{A}_{\frac{q}{2}}(\mathrm{I})\sup_{\mathrm{I}}|\lambda_{\mathrm{i}}|\big)}{1-(q-2)C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}}+\|\mathrm{R^E}\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{a(p,q)}$$

$$\times \max\left[\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1},\left(\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1}\right)^{\frac{1}{1+a(p,q)}}\right],$$

*où* $a(p,q)=\frac{q[p(q-4)+4]}{2(q-4)(q-p)}$*, et où :*

$$A_{\frac{q}{2}}(I)^2 \le A_q(I)^2 \le \left(\frac{2+(q-2)C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\sup_I|\lambda_i|}}{2-(q-2)C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{q-2}$$

*Le même énoncé vaut pour* $n=2,3$ *et pour tous les réels* $q$ *tels que* $n<q<4$*. Si* $\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}}+\|R^E\|_{\frac{q}{2}}\big) < \frac{1}{4C^2}$*, alors :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}{\|S\|_\infty} \le \left(\frac{1+2\,\mathrm{Diam}(M)^2C\big(\|R^E\|_2+\|V\|_2+\max_I|\lambda_i|\big)}{1-2\,\mathrm{Diam}(M)C\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{q}{2}}+\|R^E\|_{\frac{q}{2}}}}\right)^{a(q)}\times$$

$$\max\left[\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1},\left(\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1}\right)^{\frac{1}{1+a(q)}}\right],$$

*avec* $a(q)=\frac{(q-2)}{4-q}$.

**Proposition 3.10.** — *Soit* $n$ *un entier* ($n\ge 4$)*. Soient* $q$ *et* $C$ *des nombres réels tels que* $2n>q>n$*. Soit* $E\to M^n$ *un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte* $(M^n,g)$*, de dimension* $n$*, qui vérifie* $S_n(M,g)\le C$*. On suppose, de plus, la condition* $\mathrm{Diam}(M)^2(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}}+\|R^E\|_{\frac{n}{2}}) < \frac{1}{(C(q-2))^2}$*. Soit* $\overline{\triangle}+V$ *un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de* $E$ *qui vérifie* $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{V}^-\|_{\frac{n}{2}} < \frac{4}{(n-2)^2C^2}$ *et* $E_I$ *un sous-espace de sections propres de cet opérateur. Alors, pour toute section* $S$ *de* $E_I$*, on a :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}{\|S\|_\infty} \le \left(\frac{1+\frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\mathrm{R^E}\|_{\frac{q}{2}}+\|\mathrm{V}\|_{\frac{q}{2}}+\mathrm{A}_{\frac{q}{2}}(\mathrm{I})\sup_{\mathrm{I}}|\lambda_{\mathrm{i}}|\big)}{1-\frac{q(n-2)}{n}C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}}+\|\mathrm{R^E}\|_{\frac{n}{2}}}}\right)^{a(q,n)}$$

$$\max\left[\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1},\left(\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1}\right)^{\frac{1}{1+a(q,n)}}\right],$$

*où* $a(q,n)=\frac{n(q-2)}{2(q-n)}$ *et où :*

$$A_{\frac{q}{2}}(I) \le A_n(I) \le \left(\frac{2+(n-2)C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\sup_I|\lambda_i|}}{2-(n-2)C\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{n}{2}}}}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

*Le même énoncé vaut pour $n=3$ et pour tous les réels $q$ tels que $3<q<6$. Si la variété $(M^n,g)$ vérifie* $\mathrm{Diam}(M)^2\big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}}+\|R^E\|_{\frac{n}{2}}\big)<\frac{1}{4C^2}$*, alors :*

$$\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_q}{\|S\|_\infty}\leq\left(\frac{1+2\,\mathrm{Diam}(M)^2C\big(\|\mathrm{R^E}\|_2+\|\mathrm{V}\|_2+\max_{\mathrm{I}}|\lambda_{\mathrm{i}}|\big)}{1-2\,\mathrm{Diam}(M)C\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{n}{2}}+\|\mathrm{R^E}\|_{\frac{n}{2}}}}\right)^{a(q)}\times$$
$$\max\left[\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1},\left(\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i)^-\|_1}\right)^{\frac{1}{1+a(q)}}\right].$$

*où* $a(q)=\frac{3(q-2)}{6-q}$.

## 3.4 Majoration de $\sup|S|-\inf|S|$ et trivialisation des fibrés

Dans cette section, nous établissons des inégalités de Harnack (pour les combinaisons linéaires de sections propres) qui fournissent des critères de non annulation de telles sections lorsque les sections propres qui entrent dans la combinaison linéaire correspondent à des valeurs propres suffisamment petites de l'opérateur (laplacien+potentiel) considéré. Ces résultats sont à comparer avec le lemme 3.5 et seront utilisés dans la partie **II** de cette thèse.

La proposition qui suit est un corollaire de la proposition 2.9 :

**Proposition 3.11.** — *Soit $n$ un entier ($n\geq 2$). Soient $p$, $q$ et $C$ des nombres réels tel que $\infty\geq p>q\geq n$ ($q>n$ si $n=2$). Soit $E\to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n,g)$ de dimension $n$ qui vérifie $S_q(M,g)\leq C$. Soit $\overline{\triangle}+V$ un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de $E$ et $E_I$ un sous-espace de sections propres de cet opérateur. Alors, pour toute section $S$ de $E_I$, on a :*

$$1-\frac{\inf|S|}{\sup|S|}\leq\Big(1+a'(p,q,C)\Lambda^{1/4}\Big)^{\frac{pq}{p-q}}\left(\mathrm{Diam}(M)^2\|\big(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i\big)^-\|_1\right)^{\frac{(p-q)}{2(p-q)+pq}}$$

*où $a'(p,q,C)$ est la constante universelle définie dans la proposition 2.2, où :*

$$\Lambda=\mathrm{Diam}(M)^2\Big[\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2}+\|R^E\|_{p/2}\Big]+\mathrm{Diam}(M)^4\Big[\|R^E\|_p^2+2\|V\|_p^2\Big]$$
$$+2\,\mathrm{Diam}(M)^4\sup_{i\in I}|\lambda_i|^2\left[1+a(p,q,C)\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}}+\sup_{i\in I}|\lambda_i|}\right]^{\frac{pq}{p-q}}.$$

*et où $a(p,q,C)$ est la constante universelle définie dans la proposition 3.1.*

**Démonstration.** — La proposition 2.9 et le fait que $\|\overline{\triangle}S\|_p^2$ soit majoré par la quantité $2\big(A_p(I)^2\sup_{i\in I}|\lambda_i|^2+\|V\|_p^2\big)$ (*cf* la preuve de la proposition 3.6) prouvent une version de la proposition 3.11 où $\Lambda$ serait remplacé par :

$$\mathrm{Diam}(M)^2\Big[\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2}+\|R^E\|_{p/2}\Big]+\mathrm{Diam}(M)^4\Big[\|R^E\|_p^2+2\|V\|_p^2+2A_p(I)^2\sup_{i\in I}|\lambda_i|^2\Big].$$

La majoration de $A_p(I)=\sup_{S\in E_I\setminus\{0\}}\frac{\|S\|_p}{\|S\|_2}$ donnée par la proposition 3.1 permet de conclure.

□

**Retour sur la technique de Bochner quand la courbure du fibré est bornée**

On peut déduire de la proposition 3.11 un corollaire qui renforce le lemme 3.5, et fournit une vraie trivialisation (presqu'orthonormée) du fibré $E$ (où d'un sous-fibré) par les sections propres associés aux petites valeurs propres d'un opérateur (laplacien+potentiel) à potentiel presque positif. Notez toutefois que, dans ce cas, les notions de petites valeurs propres et de potentiel presque positif dépendent d'un majorant de la norme de la courbure du fibré et du potentiel.

Pour tout entier $k$, nous posons $E_k=\mathrm{Vect}\{S_i, 1\le i\le k\}$ et pour tout point $m$ de $M$ nous notons $E_k(m)=\mathrm{Vect}\{S_i(m), 1\le i\le k\}$. On sait alors qu'on a toujours les relations suivantes pour les dimensions de ces espaces :

$$\begin{cases}\mathrm{Dim}(E_k)=k\\ \mathrm{Dim}(E_k(m))\le\inf(l,k)\end{cases}$$

où $l$ est la dimension de la fibre de $E$.

Le corollaire suivant nous donne une condition suffisante, en termes de courbure de la variété $(M,g)$, pour que les dimensions des espaces $E_k$ et $E_k(m)$ associés aux petites valeurs propres soient égales :

**Corollaire 3.12.** — *Soit $n$ un entier ($n\ge 2$). Soient $p$, $q$, $C$ et $\eta$ des nombres réels tel que $\infty\ge p>q\ge n$ ($q>n$ si $n=2$) et $\eta\in[0,1[$. Soit $E\to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte $(M^n,g)$ de dimension $n$ qui vérifie $S_q(M,g)\le C$. Soit $\overline{\triangle}+V$ un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de $E$ et $E_k$ le sous-espace des sections propres de cet opérateur associées aux $k$-premières valeurs propres. On suppose de plus que le potentiel $V$ et $\lambda_k$ vérifient :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\|\,(\underline{V}-\lambda_k)^-\,\|_1\le\frac{\eta^{2+\frac{pq}{(p-q)}}}{\Big(1+a'(p,q,C)\Lambda^{\frac14}\Big)^{\frac{pq}{p-q}\left(2+\frac{pq}{(p-q)}\right)}}$$

*(où $a'$ et $\Lambda$ sont les mêmes que dans la proposition 3.11), alors, pour tout élément $S$ de $E_k$, on a :*

$$\left|\frac{\inf|S|}{\sup|S|}-1\right|\le\eta.$$

*En particulier, on a* $\mathrm{Dim}(E_k(m)) = \mathrm{Dim}(E_k) = k$*, pour tout point* $m$ *de* $M$*, et la famille* $(S_i)_{1\leq i\leq k}$ *est presque-orthonormale en tout point de* $M$ *(i.e.* $| < S_i, S_j > -\delta_{ij}| < \dfrac{2\eta}{(1-\eta)^2}$*).*

*Démonstration du corollaire.* — La première inégalité est une réécriture de la proposition 3.11. Pour les autres inégalités, posons $f_{i,j} = |S_i + S_j|$. On a alors, d'après ce qui précède, on a :

$$(1-\eta)\sup f_{i,j} \leq \inf f_{i,j}.$$

De plus $\|f_{i,j}\|_2^2 = 2(1+\delta_{ij})$. On en déduit :

$$|S_i + S_j|^2 \leq \sup f_{i,j}^2 \leq \frac{\inf f_{i,j}^2}{(1-\eta)^2} \leq \frac{2(1+\delta_{ij})}{(1-\eta)^2},$$

$$|S_i + S_j|^2 \geq \inf f_{i,j}^2 \geq \sup f_{i,j}^2(1-\eta)^2 \geq 2(1+\delta_{ij})(1-\eta)^2$$

En faisant de même avec la fonction $|S_i - S_j|$, on obtient :

$$|S_i - S_j|^2 \leq \frac{2(1-\delta_{ij})}{(1-\eta)^2},$$

$$|S_i - S_j|^2 \geq 2(1-\delta_{ij})(1-\eta)^2$$

En prenant la différence des deux pincements obtenus, on trouve (après simplifications) :

$$| < S_i, S_j > -\delta_{ij}| < \frac{2\eta}{(1-\eta)^2}. \qquad \square$$

**Remarque.** — Le fait (établi dans la preuve ci-dessus) :
"Si $(S_i)_{i\in I}$ est une famille $L^2$-orthonormée de sections quelconques d'un fibré, vérifiant la condition $1 - \frac{\inf|S|}{\sup|S|} \leq \eta$ pour toute combinaison linéaire $S$ des $S_i$, alors on a les inégalités $\|{<}S_i, S_j{>}{-}\delta_{ij}\|_\infty < \frac{2\eta}{(1-\eta)^2}$ pour tout couple $(i,j)$"
est une propriété générale dont nous nous reservirons dans la suite.

En procédant comme dans le chapitre 2 de cette première partie, on peut déduire toute une série d'inégalité de Harnack des propositions de la partie précédente. On obtient alors les résultats suivants (on a omis délibérément les cas limites, mais les énoncés correspondants peuvent être écrits) :

**Proposition 3.13.** — *Soit* $n$ *un entier* ($n \geq 2$)*. Soient* $q$*,* $q'$*,* $p_1$*,* $p_2$*,* $C$ *et* $C'$ *des nombres réels tels que* $p_1 > q \geq p_2 \geq \max(2, \frac{q}{2})$*,* $q \geq n$ *(*$q > n$ *si* $n = 2$*),* $p_2 > \frac{n}{2}$ *et* $n < q' < \frac{p_2 q}{q-p_2}$*. Soit* $E \to M^n$ *un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne compacte* $(M^n, g)$ *de dimension* $n$*, qui vérifie* $S_q(M,g) \leq C$ *et* $S'_{q'}(M,g) \leq C'$*. Soit* $\overline{\triangle} + V$ *un opérateur* *(laplacien+potentiel) agissant sur les sections de $E$ et $E_I$ un sous-espace de sections propres de cet opérateur. Alors, pour toute section $S$ de $E_I$, on a :*

$$1-\frac{\inf|S|}{\sup|S|}\leq C'\Big(1+(2+\frac{r'(p_2-2)}{p_2})C\Lambda^{\frac{1}{2}}\Big)^{1/\gamma}\Big(\mathrm{Diam}(M)^2\|\big(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i\big)^-\|_1\Big)^{\frac{\gamma}{2(\gamma+1)}}$$

*où* $\gamma=\frac{2\left[1-r'\left(\frac{q-p_2}{p_2q}\right)\right]}{r'-2}$, $r'=\max(q',\frac{p_1p_2}{p_1-p_2})$ *et où :*

$$\Lambda=\mathrm{Diam}(M)^2\Big[\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p_1/2}+\|R^E\|_{p_1/2}\Big]+\mathrm{Diam}(M)^4\Big[\|R^E\|^2_{p_2}+2\|V\|^2_{p_2}\Big]$$
$$+2\,\mathrm{Diam}(M)^4\sup_{i\in I}|\lambda_i|^2\Big[1+a(p_1,q,C)\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p_1}{2}}+\sup_{i\in I}|\lambda_i|}\Big]^{\frac{p_1q}{p_1-q}}.$$

*En particulier, s'il existe $\eta\in[0,1[$ tel que :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\|\big(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i\big)^-\|_1\leq\eta^{2+\frac{2}{\gamma}}\left(C'\Big(1+(2+\frac{r'(p_2-2)}{p_2})C\Lambda^{\frac{1}{2}}\Big)^{1/\gamma}\right)^{-2\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}$$

*alors, $DimE_I(m)=DimE_I$, pour tout point $m$ de $M$, et la famille $(S_i)_I$ est presqu'orthonormée en tout point de $M$ (i.e. $\|<S_i,S_j>-\delta_{ij}\|_\infty<\frac{2\eta}{(1-\eta)^2}$).*

**Démonstration.** — On applique la proposition 3.7 (en y remplaçant $r$ par $q'$) et l'inégalité de Sobolev de la section 1.3.2, qui donne $1-\frac{\inf|S|}{\sup|S|}\leq C'\,\mathrm{Diam}(M)\frac{\|DS\|_{q'}}{\|S\|_\infty}$.
La presque-orthonormalité découle de la remarque précédente et du fait que la dernière hypothèse implique que $1-\frac{\inf|S|}{\sup|S|}\leq\eta$, en utilisant le début de la proposition 3.13. □

On en déduit, comme précédemment, le corollaire :

**Corollaire 3.14.** — *Soit $n$ un entier ($n\geq 4$). Soient $p$, $q$, $C$ et $C'$ des nombres réels tels que $2q\geq p>q\geq n$. Soit $E\to M^n$ un fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne $(M^n,g)$ compacte qui vérifie $S_q(M,g)\leq C$ et $S'_p(M,g)\leq C'$. Soit $\overline{\triangle}+V$ un opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de $E$ et $E_I$ un sous-espace de sections propres de cet opérateur. Alors, pour toute section $S$ de $E_I$, on a :*

$$1-\frac{\inf|S|}{\sup|S|}\leq C'(1+(p-2)C\Lambda^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{\gamma}}\Big(\mathrm{Diam}(M)^2\|\big(\underline{V}-\max_{i\in I}\lambda_i\big)^-\|_1\Big)^{\frac{\gamma}{2(\gamma+1)}},$$

*où* $\gamma=\frac{2(p-q)}{q(p-2)}$ *et où*

$$\Lambda=\mathrm{Diam}(M)^2\Big[\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}}+\|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p}{2}}\Big]+\mathrm{Diam(M)}^4\Big[\|\mathrm{R^E}\|^2_{\frac{p}{2}}+2\|\mathrm{V}\|^2_{\frac{p}{2}}\Big]$$
$$+2\,\mathrm{Diam}(M)^4\sup_{i\in I}|\lambda_i|^2\Big[1+a(p,q,C)\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{V}^-\|_{\frac{p}{2}}+\sup_I|\lambda_i|}\Big]^{\frac{pq}{p-q}},$$

*où $a(p,q,C)$ est la constante universelle définie dans la proposition 3.1.*

*Le même énoncé vaut pour $n = 2,3$ et pour tous les couples $(p,q)$ tels que $n \leq q < p < 4$ ($q > n$ si $n = 2$), en remplaçant $\gamma$ par $\frac{p-q}{q}$ et $\Lambda$ par*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\Big[\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{\frac{p}{2}} + \|\mathrm{R^E}\|_{\frac{p}{2}}\Big] + \mathrm{Diam(M)}^4\Big[\|\mathrm{R^E}\|_2^2 + 2\|\mathrm{V}\|_2^2 + 2\sup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}|\lambda_{\mathrm{i}}|^2\Big].$$

*En particulier, s'il existe $\eta \in [0,1[$ tel que :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\|\big(\underline{V} - \max_{i\in I}\lambda_i\big)^-\|_1 \leq \eta^{2+\frac{2}{\gamma}}\Big(C'\big(1+(p-2)C\Lambda^{\frac{1}{2}}\big)^{1/\gamma}\Big)^{-2\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}$$

*alors, $DimE_I(m) = DimE_I$, pour tout point $m$ de $M$, et la famille $(S_i)_{i\in I}$ est presqu'orthonormée en tout point de $M$ (i.e. $\| < S_i, S_j > -\delta_{ij}\|_\infty < \frac{2\eta}{(1-\eta)^2}$).*

**Démonstration.** — Dans le cas $n \geq 4$, le corollaire 3.14 découle de la proposition 3.13 en posant $p_1 = p$, $p_2 = \frac{p}{2}$ et $q' = p$. Dans le cas où $n = 2,3$, le corollaire 3.14 découle du corollaire 3.8 et de l'inégalité de Sobolev de la section 1.3.2, qui donne :

$$1 - \frac{\inf|S|}{\sup|S|} \leq C'\,\mathrm{Diam}(M)\frac{\|DS\|_p}{\|S\|_\infty}.$$

□

**Remarque.** — Ce corollaire est une généralisation aux cas des combinaisons linéaires de sections propres du théorème de non-annulation de M. Le Couturier et G. Robert (théorème 1.4.1. de [65], valable pour les sections harmoniques). Dans leur résultat, l'inégalité de Sobolev est une conséquence du théorème de S. Gallot cité dans la section 1.3.2, et la condition $q \geq \max(p,4)$ a été omise dans leur énoncé, mais elle semble nécessaire pour que leur démonstration soit correcte. Le corollaire 3.14 permet d'obtenir l'existence d'une trivialisation d'un sous-fibré, non plus seulement par des sections harmoniques relativement à un opérateur (laplacien+potentiel), mais aussi par des sections propres associées à de petites valeurs propres de cet opérateur. On peut espérer qu'une telle généralisation des techniques "à la Bochner" donne une méthode générale pour classifier les variétés qui réalisent certaines hypothèses de pincement de la courbure et des valeurs spectrales d'un opérateur (laplacien+potentiel). Deux exemples de résultats de classification de ce type sont donnés dans les partie **II** et **III** de cette thèse.

## Deuxième partie

# Caractérisation spectrale des Nilvariétés

**Curvature, Harnack's Inequality, and a Spectral Characterization of Nilmanifolds**

**Published in Ann. of Glob. Anal. and Geom. 23 (2003) p. 227-246**

Erwann Aubry, Bruno Colbois, Patrick Ghanaat, Ernst A. Ruh

*Abstract.* For closed $n$–dimensional Riemannian manifolds $M$ with almost positive Ricci curvature, the Laplacian on one–forms is known to admit at most $n$ small eigenvalues. If there are $n$ small eigenvalues, or if $M$ is orientable and has $n-1$ small eigenvalues, then $M$ is diffeomorphic to a nilmanifold, and the metric is almost left invariant. We show that our results are optimal for $n \geq 4$.

## 1. Introduction

A classical theorem of Bochner states that the first real Betti number of a closed $n$–dimensional Riemannian manifold $M$ with positive semi–definite Ricci curvature tensor Ric satisfies the inequality $b_1(M) \leq n$, with equality only if $M$ is isometric to a flat torus. This result is a consequence of Weitzenböck's formula for the Hodge–de Rham–Laplacian $\Delta = d\delta + \delta d$ on one–forms $\alpha$,

$$\Delta\alpha = \nabla^*\nabla\alpha + \mathrm{Ric}(\alpha^\sharp, \cdot). \tag{1.1}$$

The formula implies that all harmonic one–forms on $M$ are parallel with respect to the Levi–Civita connection of the metric. Since the space of parallel one–forms has dimension at most $n$, Bochner's Betti number estimate is a consequence of the Hodge theorem on harmonic forms. And if $b_1(M) = n$, then the Albanese map obtained by integrating an $L^2$-orthonormal basis of the space of harmonic forms yields an isometry of $M$ with its Albanese torus.

Bochner's inequality for $b_1(M)$ has been extended by Gallot ([49] Cor. 3.2) and Gromov ([57] p. 73) to include manifolds whose Ricci tensor and diameter satisfy

$$\mathrm{Ric}\ \mathrm{Diam}^2(M) \geq -\epsilon(n) \tag{1.2}$$

for suitably small positive $\epsilon(n)$ depending only on $n$. The case of equality was settled only recently by Cheeger and Colding ([29] p. 459) to the effect that (1.2) and $b_1(M) = n$

still imply that $M$ is diffeomorphic to the torus. But it appears to be unknown whether a diffeomorphism is given by the Albanese map.

Gallot and Meyer ([53]) extended Bochner's theorem in a different direction by giving an explicit bound for the number of small eigenvalues of the Laplacian, instead of only the multiplicity $b_1(M)$ of the zero eigenvalue. Consider a compact connected Riemannian manifold $(M,g)$ without boundary, of dimension $n$ and diameter $\mathrm{Diam}(M,g) \leq d$. Let

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

denote the spectrum of $\Delta$ on one–forms, with each eigenvalue repeated according to its multiplicity. Assuming a Ricci curvature bound Ric $d^2 \geq -\epsilon$ for a real number $\epsilon$, the result of Gallot and Meyer ([53] p. 574, see also [47]), when specialized to $\lambda_{n+1}$, states that

$$\lambda_{n+1} d^2 \geq \frac{\lambda^* d^2}{8(n+1)^2} - \epsilon. \tag{1.3}$$

Here $\lambda^*$ denotes the smallest positive eigenvalue of the Laplacian on functions. Lower bounds for $\lambda^*$ in terms of Ricci curvature and diameter were obtained by Li and Yau. In particular, Theorem 10 in [67] states that

$$\lambda^* d^2 + \max\{0, \epsilon\} \geq \pi^2/4. \tag{1.4}$$

Combined with (1.3), this yields a positive lower bound on $\lambda_{n+1}$, provided $\epsilon$ is not too positive. So $\Delta$ can have at most $n$ small eigenvalues.

In [80] and [33], the authors considered what happens when $\Delta$ actually does have $n$ small eigenvalues. Petersen and Sprouse showed in [80] that, under an additional bound on the curvature tensor $R$, $M$ has to be diffeomorphic to an infra–nilmanifold. In [37], under bounds on $R$ and its covariant derivative $\nabla R$, $M$ was shown to be diffeomorphic to a nilmanifold. In this paper, we generalize and sharpen both results.

Recall that an *infra–nilmanifold* is a quotient $\Lambda \backslash G$ of a nilpotent Lie group $G$ by a discrete group $\Lambda$ of isometries of some left invariant Riemannian metric. The induced metric on the quotient is called *left invariant* by abuse of language. A *nilmanifold* is a quotient $\Gamma \backslash G$ of a nilpotent Lie group by a discrete subgroup $\Gamma$ of $G$. In particular, every nilmanifold is an infra–nilmanifold. Conversely, according to Auslander's Bieberbach Theorem ([13], Theorem 1), every compact infra–nilmanifold admits a finite covering space that is a nilmanifold.

For $m \in M$, let $\underline{\mathrm{Ric}}(m)$ denote the lowest eigenvalue of the Ricci tensor $\mathrm{Ric}(m)$, considered as a symmetric operator on $T_m M$. For a function $f : M \to \mathrm{R}$, we denote by $f^-(m) = \max\{0, -f(m)\}$ its negative part. Our main result is the following

**Theorem 1.1.** *For every dimension $n$ and real number $p > n$, there is a positive constant $\epsilon(n,p)$ such that the following is true. Suppose $(M^n, g)$ is a compact Riemannian manifold satisfying* $\mathrm{Diam}(M,g) \le d$ *and*

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2}\, d^2 &\le \epsilon(n,p)\big(1 + \|R\|_{q/2}\, d^2\big)^{-\beta(n,p)} && (1.5)\\ \lambda_n d^2 &\le \epsilon(n,p)\big(1 + \|R\|_{q/2}\, d^2\big)^{-\beta(n,p)} && (1.6) \end{aligned}$$

*with* $q = \max\{p, 4\}$ *and*

$$\beta(n,p) = \frac{(p+n)(q-2)}{p-n}.$$

*Then $M$ is diffeomorphic to a nilmanifold. If instead of* (1.6) *we have*

$$\lambda_{n-1} d^2 \le \epsilon(n,p)\big(1 + \|R\|_{q/2}\, d^2\big)^{-\beta(n,p)}, \tag{1.7}$$

*then $M$ is diffeomorphic to a nilmanifold or to a non–orientable infra–nilmanifold. In either case, the metric $g$ is close to a left invariant metric $g_0$ for the nilpotent structure in the sense that, for $k = n$ or $n-1$ respectively,*

$$\|g - g_0\|_\infty \le \delta\big(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2}\, d^2 + \lambda_k d^2,\ n\big)$$

*for some function $\delta$ such that $\delta(t,n) \to 0$ as $t$ tends to zero.*

The volume–normalized $L^{p/2}$–norms used in this statement are defined in section 2, and $\|\cdot\|_\infty$ denotes the maximum norm on tensor fields. We note that little would be lost if we normalized the diameter bound to $d = 1$. In the form given, our inequalities are scaling invariant.

**Remarks 1.2. (i)** It is well known, and will be explained in section 5, that every compact nilmanifold admits left invariant metrics with $\|R\|_\infty d^2$ and $\lambda_n d^2$ arbitrary small, so that a converse of our result holds. This is not true for general infra–nilmanifolds.

**(ii)** Instead of pointwise curvature bounds, only integral norms of the curvature enter our hypotheses. This is a less restrictive assumption, as Gallot [50] and Yang [94] have shown that there are sequences of Riemannian manifolds of diameter one with uniform bounds on $\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2}$ or $\|R\|_{q/2}$, that do not admit Riemannian metrics with diameter one and uniform pointwise lower bounds on Ric, or upper bounds on $\|R\|_\infty$, respectively.

**(iii)** In addition to a Ricci curvature bound, our assumptions involve the norm $\|R\|_{q/2}$ of the full curvature tensor. Counterexamples given in section 4 show that the result does not hold without a bound on $R$, even if we assume smallness of the Ricci tensor in the $L^\infty$–norm.

**(iv)** Compact nilmanifolds with first Betti number equal to $n$ are known to be tori. In fact, a result of Nomizu (see [83] p. 123) states that the real cohomology of a compact nilmanifold $\Gamma\backslash G$ is isomorphic to the cohomology of the Lie algebra of $G$ ; so $b_1(\Gamma\backslash G) = n$

implies that $G$ is abelian. As a consequence, our result includes a weak form of the theorem of Cheeger and Colding, weak as it involves a bound on $R$. Under the present assumptions, our proof shows that the Albanese map is a diffeomorphism. The statement on $\lambda_{n-1}$ extends and sharpens a theorem of Yamaguchi (see [92]).

**(v)** The proof of Theorem 1.1 remains of use when there are only $k < n-1$ small eigenvalues, in the sense that hypothesis (1.6) in Theorem 1.1 is replaced by

$$\lambda_k d^2 \leq \epsilon(n,p)\big(1 + \|R\|_{q/2}\, d^2\big)^{-\beta(n,p)}.$$

In that case, our proof shows that $TM$ contains a trivial subbundle of rank $k$. In particular, we obtain a lower bound on the first eigenvalue $\lambda_1$ of the Laplacian on one–forms in terms of dimension, diameter and $\|R\|_{q/2}$ for manifolds with $\mathrm{Ric} \geq 0$ and non–vanishing Euler characteristic.

For manifolds with non–negative Ricci tensor, (1.3) and (1.4) imply that

$$\lambda_{n+1} d^2 \geq \frac{\pi^2}{32(n+1)^2}.$$

If, in addition, (1.7) holds, then $g$ is a metric of non–negative Ricci curvature on a compact infra–nilmanifold. The splitting theorem of Cheeger and Gromoll (see [33] p. 126) implies that such metrics are flat, and we obtain the following

**Corollary 1.3.** *Suppose* $(M,g)$ *satisfies* $\mathrm{Ric} \geq 0$. *If*

$$\lambda_{n-1} d^2 \leq \epsilon(n,p)\big(1 + \|R\|_{q/2}\, d^2\big)^{-\beta(n,p)}$$

*then* $(M,g)$ *is isometric to a euclidean space form ; and if*

$$\lambda_n d^2 \leq \epsilon(n,p)\big(1 + \|R\|_{q/2}\, d^2\big)^{-\beta(n,p)}$$

*then* $(M,g)$ *is isometric to a flat torus.*

Our proof of Theorem 1.1 is based on a Harnack inequality for generalized Schrödinger operators. This inequality allows us to employ a result from [54] characterizing nilmanifolds instead of the $L^2$–pinching theorem of [72] used in [80]. Unlike the gradient estimates given in [80] and [33], this method does not require bounds on the covariant derivative $\nabla R$ of the curvature tensor.

While such bounds can be obtained using a smoothing argument (in fact, [80] p.81 refers to [16] for this purpose), the issue here is somewhat delicate : It is necessary to retain sufficient control of the eigenvalues while gaining a bound on $\nabla R$. Our present method avoids $\nabla R$ and smoothing arguments.

The article is structured as follows. Section 2 contains the Harnack and regularity estimates required for the proof of Theorem 1.1. The proof proper is given in the following section. In section 4, we describe examples explaining our curvature assumptions, while section 5 is devoted to spectral properties of infra–nilmanifolds.

We refer to the monograph [87] for notation and general background in Riemannian geometry, and to [17] for an introduction to Bochner methods and eigenvalue estimates.

This paper combines the preprints [10] and [37]. Colbois and Ghanaat had the opportunity to work on [37] at the Forschungsinstitut für Mathematik at ETH Zürich ; they thank Marc Burger and the Forschungsinstitut for their hospitality and support. The four authors thank Christian Bär, Sylvestre Gallot and Chadwick Sprouse for helpful remarks.

## 2. Curvature and elliptic estimates

In this section we prepare general Harnack and regularity estimates for Schrödinger operators in a form suitable for the proof of Theorem 1.1. Similar estimates have been obtained in [65] and [49].

In what follows, $(M, g)$ will be a compact connected Riemannian manifold of dimension $n$ and diameter $\mathrm{Diam}(M, g) \leq d$. We consider a Riemannian vector bundle $E$ on $M$, equipped with a connection $\nabla$ that is compatible with the fiber metric $\langle\ ,\ \rangle$. The inner product on $E$ and the Riemannian measure $\mu$ on $M$ are used to define normalized $L^p$–norms

$$\|S\|_p = \left( \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M |S|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

for sections $S \in L^p(E)$ of $E$, as well as Sobolev norms on the corresponding spaces $L^p_k(E)$ of sections with $p$–integrable $k$–th covariant derivatives. Hölder's inequality implies that $\|S\|_q \leq \|S\|_p$ for $1 \leq q \leq p$.

Our estimates require certain Sobolev inequalities on $M$. The following version due to Gallot (see [50] p. 203) is adequate for the present purpose. We note that suitable constants $C(n, p, q)$ and $\zeta(n, p, q)$ can be determined explicitly.

**Lemma 2.1.** *For every dimension $n$ and every pair of real numbers $p \geq q > n$, there are constants $\zeta(n, p, q) > 0$ and $C(n, p, q)$ such that the following is true. If $(M^n, g)$ is a compact Riemannian manifold such that* $\mathrm{Diam}(M, g) \leq d$ *and*

$$\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} \, d^2 \leq \zeta(n, p, q),$$

*then every function $u \in L^2_1(M)$ satisfies*

$$\|u\|_{2q/(q-2)} \leq C(n, p, q) d \, \|du\|_2 + \|u\|_2, \tag{2.1}$$

*and every $u \in L^q_1(M)$ satisfies*

$$\sup u - \inf u \leq C(n, p, q) d \, \|du\|_q. \tag{2.2}$$

The *rough Laplacian* operating on sections of $E$ is defined as $\bar\Delta S = \nabla^*\nabla S$. Here $\nabla^*$ is the adjoint of $\nabla$ with respect to the $L^2$–inner product. We consider *Schrödinger operators* of the form $\bar\Delta + V$, where the potential $V \in C^\infty(Sym(E))$ is a smooth field of symmetric endomorphisms of $E$. Weitzenböck's formula (1.1) shows that the de Rham–Laplacian $\Delta$ on 1-forms is an operator of this type.

The next result is a regularity estimate for linear combinations of eigensections of Schrödinger operators. For $m \in M$, let $\nu(m)$ be the lowest eigenvalue of $V(m)$ acting on the fiber $E_m$. Consider an $L^2$–orthonormal system $S_i$, $(i = 1, 2, \dots)$ of eigensections of $\bar\Delta + V$, and let $\lambda_i$ denote the corresponding eigenvalues. For a finite set $I$ of positive integers, let $E_I \leq L^2(E)$ be the vector space spanned by $\{S_i \mid i \in I\}$. As before, $f^-$ denotes the negative part of a real valued function $f$.

**Theorem 2.2.** *For every integer $n \geq 2$ and all real numbers $p > q > n$, there are explicit constants $\zeta(n,p,q) > 0$ and $a(n,p,q)$ such that the following is true. Suppose $(M^n, g)$ satisfies* $\mathrm{Diam}(M,g) \leq d$ *and*

$$\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2}\, d^2 \leq \zeta(n,p,q).$$

*Then for every $S \in E_I$ and $\kappa \in \mathrm{R}$ we have*

$$\|S\|_\infty \leq \left(1 + a(n,p,q)\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right)(1+\Lambda)^{pq/(2(p-q))}\,\|S\|_2, \tag{2.3}$$

*where*

$$\Lambda = \left(\,\|(\nu-\kappa)^-)\|_{p/2} + \sup_{i\in I}|\lambda_i - \kappa|\,\right)^{1/2} d.$$

*Proof.* For $k \in [1,\infty]$ define

$$A_k = A_k(I) = \sup\{\,\|S\|_k/\|S\|_2 \mid S \in E_I - \{0\}\,\}\,.$$

Then $A_k$ is increasing as a function of $k$. We shall use the classical Moser iteration method to obtain an upper bound for $A_\infty$.

Let $S \in E_I$ and $\kappa \in \mathrm{R}$. Fix $\epsilon > 0$ and let $f = \sqrt{|S|^2+\epsilon^2}$. The Cauchy–Schwarz inequality implies that

$$|df|^2 \leq \frac{|\nabla S|^2|S|^2}{|S|^2+\epsilon^2} \leq |\nabla S|^2,$$

and therefore

$$\begin{aligned} f\Delta f &= \frac{1}{2}\Delta(f^2) + |df|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\Delta(|S|^2) + |\nabla S|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \bar{\Delta} S, S \rangle \\
&\leq \Big\langle (\bar{\Delta} + V - \kappa) S,\ S \Big\rangle + (\nu - \kappa)^- |S|^2 \\
&\leq |(\bar{\Delta} + V - \kappa) S|\, f + (\nu - \kappa)^- f^2.
\end{aligned}$$

So for any real $k > 1/2$,

$$\begin{aligned}
\int_M |d(f^k)|^2 &= \frac{k^2}{2k-1} \int_M \Big\langle df,\ d(f^{2k-1}) \Big\rangle \\
&= \frac{k^2}{2k-1} \int_M (\Delta f) f^{2k-1} \\
&\leq \frac{k^2}{2k-1} \left( \int_M |(\bar{\Delta} + V - \kappa) S|\, f^{2k-1} + \int_M (\nu - \kappa)^- f^{2k} \right)
\end{aligned}$$

and using Hölder's inequality we obtain

$$\|d(f^k)\|_2^2 \leq \frac{k^2}{2k-1} \left( \|(\nu - \kappa)^-\|_{p/2} \, \|f\|_{2kp/(p-2)}^{2k} + \|(\bar{\Delta} + V - \kappa) S\|_{2k} \, \|f\|_{2k}^{2k-1} \right).$$

The Sobolev inequality (2.1), applied to the function $u = f^k$ yields an estimate on the norm $\|u\|_{2q/(q-2)} = \|S\|_{2kq/(q-2)}^k$. Letting $\epsilon$ tend to zero we get

$$\begin{aligned}
&\|S\|_{2kq/(q-2)}^k \\
&\qquad \leq \|S\|_{2k}^k + \frac{Ckd}{\sqrt{2k-1}} \left( \|(\nu - \kappa)^-\|_{p/2} \, \|S\|_{2kp/(p-2)}^{2k} + \|(\bar{\Delta} + V - \kappa) S\|_{2k} \, \|S\|_{2k}^{2k-1} \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

with a constant $C = C(n,p,q)$ depending only on the quantities indicated. Since $\bar{\Delta} + V - \kappa$ maps $E_I$ into itself, we have

$$\begin{aligned}
\|(\bar{\Delta} + V - \kappa) S\|_{2k} &\leq A_{2k} \, \|(\bar{\Delta} + V - \kappa) S\|_2 \\
&\leq A_{2kp/(p-2)} \, \sup_{i \in I} |\lambda_i - \kappa| \, \|S\|_2,
\end{aligned}$$

and $\|S\|_{2k} \leq \|S\|_{2kp/(p-2)} \leq A_{2kp/(p-2)} \, \|S\|_2$ then implies

$$\|S\|_{2kq/(q-2)} \leq \left( 1 + \frac{Ck\Lambda}{\sqrt{2k-1}} \right)^{1/k} A_{2kp/(p-2)} \, \|S\|_2.$$

This is true for every $S \in E_I$, so we get

$$A_{2kq/(q-2)} \leq \left( 1 + \frac{Ck\Lambda}{\sqrt{2k-1}} \right)^{1/k} A_{2kp/(p-2)}$$

for every $k > 1/2$. We use this inequality for $k = \beta^j$ with $\beta = \dfrac{q(p-2)}{p(q-2)} > 1$ and with $j = 0, 1, 2, \ldots$ to obtain first

$$A_{2p\beta^m/(p-2)} \leq \prod_{j=0}^{m-1} \left( 1 + \frac{C\beta^j \Lambda}{\sqrt{2\beta^j - 1}} \right)^{\beta^{-j}} A_{2p/(p-2)},$$

and then, by taking the limit as $m$ tends to infinity,

$$A_\infty \leq \prod_{j=0}^{\infty}\left(1+\frac{C\beta^j\Lambda}{\sqrt{2\beta^j-1}}\right)^{\beta^{-j}} A_{2p/(p-2)}.$$

The inequality $\|S\|_{2p/(p-2)} \leq \|S\|_\infty^{2/p}\, \|S\|_2^{(p-2)/p}$ translates into

$$A_{2p/(p-2)} \leq A_\infty^{2/p}$$

and we obtain

$$A_\infty \leq \prod_{j=0}^{\infty}\left(1+\frac{C\beta^j\Lambda}{\sqrt{2\beta^j-1}}\right)^{\beta^{-j}p/(p-2)}. \tag{2.4}$$

To simplify this estimate, we note that $\ln(1+ax) < \ln(1+x) + ax/(x+1)$, provided $a$ and $x$ are positive. Therefore,

$$\begin{aligned}\ln A_\infty &\leq \frac{p}{p-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^j}\left(\ln(1+\Lambda)+C\beta^{j/2}\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right)\\ &= \frac{pq}{2(p-q)}\ln(1+\Lambda)+C'(n,p,q)\frac{\Lambda}{1+\Lambda}.\end{aligned}$$

For any $x\in[0,1]$, we have $e^{ax} \leq ax\, e^a + 1$, and we conclude that

$$A_\infty \leq \left(1+a(n,p,q)\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right)(1+\Lambda)^{pq/(2(p-q))}.$$

**Lemma 2.3.** *Every smooth section $S$ of $E$ satisfies the pointwise inequality*

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta(|\nabla S|^2)+|\nabla^2 S|^2 \quad &\leq \quad \langle\nabla^* R^E S,\nabla S\rangle + \underline{\mathrm{Ric}}^-|\nabla S|^2\\ &\qquad + \langle\nabla\bar{\Delta}S,\nabla S\rangle + |R^E|\,|\nabla S|^2,\end{aligned} \tag{2.5}$$

*where, for vector fields $X$ and $Y$ on $M$, $R^E_{X,Y} = \nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X}$ is the curvature of $E$ and, in abstract index notation,*

$$\langle\nabla^* R^E S,\nabla S\rangle := \left\langle -\nabla_j(R^E_{ij}S),\nabla_i S\right\rangle. \tag{2.6}$$

*Proof.* A standard calculation interchanging covariant derivatives shows that

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla S|^2)+|\nabla^2 S|^2 = \langle\nabla^* R^E S,\nabla S\rangle - \mathrm{Ric}_{ij}\,\langle\nabla_i S,\nabla_j S\rangle + \langle\nabla\bar{\Delta}S,\nabla S\rangle + \left\langle R^E_{ij}(\nabla_j S),\nabla_i S\right\rangle.$$

Lemma 2.3 is an immediate consequence.

The following Harnack inequality is essentially due to Le Couturier and Robert. It is stated as Theorem 1.4.1 in [65] for solutions $S$ of a Schrödinger equation $(\bar{\Delta}+V)S = 0$. We note that the hypothesis $q \geq 4$ was omitted in [65].

**Theorem 2.4.** *For every dimension $n \geq 2$ and real number $p > n$, there are explicit constants $\zeta(n,p) > 0$ and $A(n,p)$ such that the following holds. If $(M,g)$ satisfies*

$$\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2}\, d^2 \leq \zeta(n,p),$$

*then for every smooth section $S$ of $E$*

$$1 - \frac{\inf|S|}{\sup|S|} \leq A(n,p)\left(\frac{\|\nabla S\|_2\, d}{\|S\|_\infty}\right)^\tau \left(1 + \|R^E\|_{q/2}\, d^2 + \frac{\|\bar{\Delta} S\|_{q/2}\, d^2}{\|S\|_\infty}\right)^{1-\tau},$$

*where $q = \max\{p, 4\}$ and $\tau = \dfrac{2(p-n)}{pq + n(q-4)}$. In particular, $0 < \tau < 1$.*

*Proof.* The idea of the proof (see [65]) is to apply Lemma 2.3 and the Sobolev inequality (2.1) to obtain a bound on a suitable integral norm of $\nabla S$. Then inequality (2.2) yields the result.

Let $u = \sqrt{|\nabla S|^2 + \epsilon^2}$. As in the proof of Theorem 2.2, we obtain that

$$u\Delta u \leq \frac{1}{2}\Delta|\nabla S|^2 + |\nabla^2 S|^2.$$

This inequality and Lemma 2.3 imply

$$\begin{aligned}
\int_M |d(u^k)|^2 &= \frac{k^2}{2k-1}\int_M \left\langle du, d(u^{2k-1})\right\rangle \\
&= \frac{k^2}{2k-1}\int_M u\Delta u\; u^{2k-2} \\
&\leq \frac{k^2}{2k-1}\int_M \Big(\underline{\mathrm{Ric}}^- u^{2k} + \langle \nabla\bar{\Delta} S, \nabla S\rangle\, u^{2k-2} \\
&\qquad\qquad + \langle \nabla^* R^E S, \nabla S\rangle\, u^{2k-2} + |R^E|\, u^{2k}\Big).
\end{aligned}$$

The relation $|ab| \leq a^2 + \dfrac{b^2}{4}$ and the divergence theorem applied to the vector field

$$u^{2k-2}\langle\bar{\Delta} S, \nabla_{.}\, S\rangle^\sharp$$

imply that for $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\int_M \langle\nabla\bar{\Delta} S, \nabla S\rangle\, u^{2k-2} &= \int_M |\bar{\Delta} S|^2\, u^{2k-2} - (2k-2)\int_M \langle\bar{\Delta} S, \nabla_{grad\, u} S\rangle\, u^{2k-3} \\
&\leq \int_M |\bar{\Delta} S|^2\, u^{2k-2} + (2k-2)\int_M |\bar{\Delta} S|\,|du|\, u^{2k-2} \\
&\leq \frac{k-1}{2}\int_M |du|^2\, u^{2k-2} + (2k-1)\int_M |\bar{\Delta} S|^2\, u^{2k-2}.
\end{aligned}$$

From the skew symmetry $R^E_{X,Y} = -R^E_{Y,X}$ we have

$$\textstyle\sum_{i,j}\left\langle R^E_{ij} S, \nabla^2_{ij} S\right\rangle = \frac{1}{2}\,|R^E S|^2.$$

Because of (2.6), the divergence theorem applied to the vector field

$$\sum_i u^{2k-2}\langle R^E_{(i,\cdot)}S, \nabla_i S\rangle^\sharp$$

yields

$$\begin{aligned}\int_M \langle \nabla^* R^E S, \nabla S\rangle\, u^{2k-2} &\leq \frac{k-1}{2}\int_M |du|^2 u^{2k-2} + (2k-1)\int_M |R^E S|^2\, u^{2k-2} \\ &= \frac{k-1}{2k^2}\int_M \left|d(u^k)\right|^2 + (2k-1)\int_M |R^E S|^2\, u^{2k-2}.\end{aligned}$$

If we set $k = (q-2)/2$ and apply Hölder's inequality, we obtain for $q \geq 4$

$$\|d(u^{(q-2)/2})\|_2 \leq \frac{q-2}{\sqrt{2}}\Bigg( \Big(\|(\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} + \|R^E\|_{p/2}\Big)\|u\|^{q-2}_{p(q-2)/(p-2)} + \Big(\|\bar\Delta S\|^2_{q/2} + \|R^E S\|^2_{q/2}\Big)\|u\|^{q-4}_q\Bigg)^{1/2}$$

Now let $p > n$ and $r = (p+n)/2$. Hölder's inequality implies that

$$\|u\|_b^{\rho+\sigma} \leq \|u\|_a^\rho\, \|u\|_c^\sigma$$

if $1 \leq a \leq b \leq c$, and if $\rho$ and $\sigma$ are positive numbers such that $(\rho+\sigma)/b = \rho/a + \sigma/c$. We apply this inequality, and use the Sobolev inequality (2.1) for the function $u^{(q-2)/2}$. Setting $\gamma := \frac{2(p-r)(q-2)}{(q-4)pr+4r}$ we obtain that for $q \geq 4$

$$\begin{aligned}\|u\|_2^{-\gamma}\, \|u\|^{\gamma+(q-2)/2}_{p(q-2)/(p-2)} &\leq \|u\|^{(q-2)/2}_{(q-2)r/(r-2)} = \|u^{(q-2)/2}\|_{2r/(r-2)} \\ &\leq \|u\|^{(q-2)/2}_{q-2} + C'(n,p)\, d\Bigg(\Big(\|(\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} + n\,\|R^E\|_{p/2}\Big)\|u\|^{q-2}_{p(q-2)/(p-2)} \\ &\qquad + \Big(\|\bar\Delta S\|^2_{q/2} + \|R^E S\|^2_{q/2}\Big)\|u\|^{q-4}_q\Bigg)^{1/2}\end{aligned}$$

If we set $q = \max\{p, 4\}$, then $\gamma = 2(p-r)/(r(q-2))$ and $p(q-2)/(p-2) \geq q \geq p$. Letting $\epsilon$ tend to zero, we get

$$\|\nabla S\|_2^\gamma \geq f\left(\|\nabla S\|_{p(q-2)/(p-2)}\right) \tag{2.7}$$

where $f$ is given by

$$f(x) = \frac{x^{\gamma+1}}{x + C'(n,p)d\sqrt{ax^2+b}}$$

with

$$\begin{aligned} a &= \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} + \|R^E\|_{p/2} \quad \text{and} \\ b &= \|\bar\Delta S\|^2_{q/2} + \|R^E S\|^2_{q/2}.\end{aligned}$$

Since the function $f$ is increasing, we can replace $\|\nabla S\|_{p(q-2)/(p-2)}$ by $\|\nabla S\|_p$ on the right hand side of (2.7), and then, using the Sobolev inequality (2.2), by $(\sup|S| - \inf|S|)/C(n,p)d$ to obtain

$$(\|\nabla S\|_2\, d)^\gamma \geq \frac{(\sup|S| - \inf|S|)^{1+\gamma}}{C''(n,p)\left(\|S\|_\infty + \sqrt{a\|S\|^2_\infty d^2 + bd^4}\right)}$$

with a new constant $C''(n,p)$. By hypothesis, we have $\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2}\, d^2 \leq 1$. Theorem 2.4 follows using

$$\begin{aligned} \|R^E S\|_{q/2}^2 &\leq \|R^E\|_{q/2}^2\, \|S\|_\infty \quad \text{and} \\ \|R^E\|_{p/2} d^2 &\leq 1 + \|R^E\|_{q/2}^2 d^4. \end{aligned}$$

### 3. Proof of Theorem 1.1

The estimates obtained in section 2 can be applied to the cotangent bundle $E = T^*M$ of a Riemannian manifold, together with its de Rham–Laplacian $\Delta = \bar\Delta + V$ on one–forms $\alpha$. In this case, the curvature $R^E$ is the curvature tensor $R$ of $M$ acting on forms, and the potential is given by $V(\alpha) = \mathrm{Ric}(\alpha^\sharp, \cdot)$. In particular, the lower bound $\nu$ is equal to $\underline{\mathrm{Ric}}^-$. We choose the index set $I = \{1, \ldots, k\}$ and let $q = (p+n)/2$ in Theorem 2.2. Then by inequality (2.3), linear combinations $\alpha$ of eigenforms corresponding to the first $k$ eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ satisfy

$$\|\alpha\|_\infty \leq c_1\, \|\alpha\|_2, \tag{3.1}$$

where

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(1 + a(n,p)\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right)(1+\Lambda)^{p(p+n)/(2(p-n))} \\ &\leq a_1(n,p)(1+\Lambda)^{p(p+n)/(2(p-n))} \end{aligned}$$

$$\Lambda = \left( \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} + \lambda_k \right)^{1/2} d.$$

On the other hand, Theorem 2.4 yields an estimate

$$\sup|\alpha| - \inf|\alpha| \leq A(n,p)\, (\|\nabla\alpha\|_2\, d)^\tau \left( (1 + \|R\|_{q/2}\, d^2)\, \|\alpha\|_\infty + \|\bar\Delta\alpha\|_{q/2}\, d^2 \right)^{1-\tau} \tag{3.2}$$

for every smooth one–form $\alpha$, where $q = \max\{p, 4\}$, and where $0 < \tau < 1$ depends only on $n$ and $p$.

It is sufficient to prove Theorem 2.1 under the assumption that $d = 1$, as the general case is then obtained by rescaling the metric. We will also assume that

$$\Lambda^2 = \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} + \lambda_k \leq \epsilon_0 \left(1 + \|R\|_{q/2}\right)^{-\beta(n,p)} \tag{3.3}$$

and then impose restrictions of the form $\epsilon_0 \leq \epsilon(n,p)$ consistent with our hypotheses (1.5) and (1.6). Let $\omega^1, \ldots, \omega^k$ be eigenforms corresponding to the first $k$ eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, orthonormal with respect to the volume normalized $L^2$ inner product. Our goal ist to show that, for suitably small $\epsilon_0$, the forms $\omega^i$ are nearly orthonormal at every point of $M$, and that their exterior derivatives are small in the maximum norm. First we apply (3.2) to $\alpha = \omega^i$. Weitzenböck's formula (1.1) shows that

$$\|\nabla\omega^i\|_2^2 = \lambda_i \|\omega^i\|_2^2 + \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M (-\mathrm{Ric})(\omega^i, \omega^i)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M (\lambda_k - \underline{\mathrm{Ric}})\, |\omega^i|^2 \\
&\leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M (\underline{\mathrm{Ric}} - \lambda_k)^- \, |\omega^i|^2 \\
&\leq \| \, (\underline{\mathrm{Ric}} - \lambda_k)^- \, \|_1 \, \|\omega^i\|_\infty^2,
\end{aligned}
$$

and (3.1) then implies

$$
\|\nabla \omega^i\|_2 \leq c_1 \, \| \, (\underline{\mathrm{Ric}} - \lambda_k)^- \, \|_1^{1/2}. \tag{3.4}
$$

Again using (1.1) and (3.1), we get

$$
\begin{aligned}
\|\bar{\Delta}\omega^i\|_{q/2} &\leq \|\Delta\omega^i\|_{q/2} + \| \, \mathrm{Ric} \, \|_{q/2} \, \|\omega^i\|_\infty \\
&\leq (\lambda_k + \| \, \mathrm{Ric} \, \|_{q/2}) \, \|\omega^i\|_\infty \\
&\leq (\lambda_k + \| \, \mathrm{Ric} \, \|_{q/2}) c_1.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

We substitute these inequalities into (3.2), assuming an initial restriction $\epsilon_0 \leq 1$, so that $\lambda_k \leq 1$, to obtain

$$
\begin{aligned}
\sup \quad & |\omega^i| - \inf |\omega^i| \\
& \leq A(n,p) \left( c_1 \, \| \, (\underline{\mathrm{Ric}} - \lambda_k)^- \, \|_1^{1/2} \right)^\tau \big( (1 + \|R\|_{q/2}) c_1 + (\lambda_k + \| \, \mathrm{Ric} \, \|_{q/2}) c_1 \, \big)^{1-\tau} \\
& \leq 2^{1-\tau} c_1 A(n,p) \, \|(\underline{\mathrm{Ric}} - \lambda_k)^-\|_1^{\tau/2} \, (1 + \|R\|_{q/2})^{1-\tau}.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

If we simplify this using $\|(\underline{\mathrm{Ric}} - \lambda_k)^-\|_1 \leq \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_1 + \lambda_k \leq \Lambda^2$, the definition of $c_1$ from (3.1), and $\Lambda \leq 1$, we get

$$
\begin{aligned}
\sup|\omega^i| - \inf|\omega^i| &\leq a_2(n,p) \, (1+\Lambda)^{p(p+n)/(2(p-n))} \Lambda^\tau (1 + \|R\|_{q/2})^{1-\tau} \\
&\leq a_3(n,p) \, \Lambda^\tau (1 + \|R\|_{q/2})^{1-\tau} \\
&\leq a_3(n,p) \, \epsilon_0^{\tau/2}.
\end{aligned}
$$

As a consequence,

$$
\sup|\omega^i| - \inf|\omega^i| \leq \epsilon_1, \tag{3.7}
$$

where $\epsilon_1 = a_3(n,p)\epsilon_0^{\tau/2}$ can be made as small as we wish by requiring that $\epsilon_0 \leq \epsilon(n,p)$ for suitably small $\epsilon(n,p)$.

Since $\|\omega^i\|_2 = 1$, there are points in $M$ where $|\omega^i| = 1$, and we obtain

$$
1 - \epsilon_1 \leq |\omega^i(p)| \leq 1 + \epsilon_1
$$

for every $p \in M$. We now consider the inner products $\langle \omega^i, \omega^j \rangle$ for $i \neq j$. Applying (3.2) as before, but now to $\alpha = \omega^i - \omega^j$ instead of $\omega^i$, we obtain, using the triangle inequality

$$
\sup|\omega^i - \omega^j| - \inf|\omega^i - \omega^j| \leq 4\,\epsilon_1.
$$

Since $\|\omega^i - \omega^j\|_2 = \sqrt{2}$, there are points in $M$ where $|\omega^i - \omega^j| = \sqrt{2}$, and so

$$
\sqrt{2} - 4\,\epsilon_1 \leq |\omega^i(p) - \omega^j(p)| \leq \sqrt{2} + 4\,\epsilon_1
$$

for $p \in M$. Using

$$2\langle\omega^i,\omega^j\rangle = |\omega^i|^2 + |\omega^j|^2 - |\omega^i - \omega^j|^2,$$

we obtain

$$-10\,\epsilon_1 \le \langle\omega^i,\omega^j\rangle \le 10\,\epsilon_1.$$

We have shown that there is a pointwise inequality

$$|\langle\omega^i,\omega^j\rangle - \delta^{ij}| \le \epsilon_2, \tag{3.8}$$

for $i,j = 1,\ldots,k$, where $\epsilon_2 = 10\,\epsilon_1 = 10\,a_3(n,p)\,\epsilon_0^{\tau/2}$.

For $\epsilon_2 < 1/n$, it follows that the $\omega^i$ are linearly independent everywhere, so that $TM$ has a trivial subbundle of rank $k$. In particular, we have $k \le n$. And if $k = n$, then $\lambda_{n+1} > \lambda_n$.

We now consider the case $k = n$. Then $\omega = (\omega^1,\ldots,\omega^n)$ is a coframe. Also, by (3.8), the Riemannian metric

$$g_\omega = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \omega^i \otimes \omega^i$$

induced by $\omega$ on $M$ is close to the original metric $g$. We apply the following result from [54] (see Theorem A in [55] for a more detailed statement).

**Theorem 3.1.** *There is a constant $\varepsilon(n) > 0$ such that the following is true. If $M$ is a compact $n$–manifold with a coframe $\omega : TM \to \mathrm{R}^n$ whose exterior derivative satisfies $\|d\omega\|_\infty d < \varepsilon(n)$, where $\mathrm{Diam}(M, g_\omega) \le d$, then $M$ is diffeomorphic to a nilmanifold $\Gamma\backslash G$. One can choose a Maurer–Cartan form $\omega_0$ on $\Gamma\backslash G$ and a diffeomorphism $\phi : M \to \Gamma\backslash G$ such that*

$$\|\omega - \phi^*\omega_0\|_\infty \le c(n)\,\|d\omega\|_\infty d, \tag{3.9}$$

*with a constant $c(n)$ depending only on $n$.*

In this result, the norms and diameter are with respect to $g_\omega$. Because of (3.8), the difference between $g_\omega$ and the given $g$ is negligible for our purpose.

In order to use Theorem 3.1, we need a bound on $\|d\omega^i\|_\infty$ analogous to (3.1) for the two–forms $\alpha = d\omega^i$. We apply Theorem 2.2 to the bundle of two–forms and its de Rham–Laplacian. The corresponding Weitzenböck formula (see [87], p. 303) has the form $\Delta = \bar\Delta + V$, where the potential $V$ satisfies $\|\nu^-\|_{p/2} \le c(n)\|R\|_{p/2}$. As in (3.1), Theorem 2.2 with $\kappa = 0$ then yields

$$\|d\omega^i\|_\infty \le c_2\|d\omega^i\|_2 \le c_2\sqrt{\lambda_n}, \tag{3.10}$$

where

$$c_2 \le a_3(n,p)(1+\Lambda)^{p(p+n)/(2(p-n))},$$

but this time

$$\Lambda = \left(\,\|R\|_{p/2} + \lambda_n\,\right)^{1/2}.$$

Theorem 1.1 under hypothesis (1.6) is an immediate consequence.

Now consider the case of $n-1$ small eigenvalues, hypothesis (1.7). We first show that if $M$ is orientable, then the $n$–th eigenvalue is also small, so that we can apply the result we already proved. Choose $L^2$–orthonormal eigenforms $\omega^1, \dots, \omega^{n-1}$ corresponding to the eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. Since $M$ is orientable, we can use the Hodge star operator to define

$$\eta = *(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1}). \tag{3.11}$$

This form is $L^2$–orthogonal (in fact pointwise orthogonal) to $\omega^1, \dots, \omega^{n-1}$. By the minimax principle, its Rayleigh quotient,

$$R(\eta) = \frac{\|d\eta\|_2^2 + \|\delta\eta\|_2^2}{\|\eta\|_2^2}$$

is an upper bound for $\lambda_n$. In terms of a local orthonormal frame field $e_1, \dots, e_n$ for $M$, the codifferential of $\eta$ is given by $\delta\eta = -\iota_{e_i}\nabla_{e_i}\eta$. Therefore, using (3.4),

$$\begin{aligned}
\|d\eta\|_2 &= \|\delta(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1})\|_2 \\
&\leq c(n) \sum\nolimits_i \Big( \|\nabla\omega^i\|_2 \prod\nolimits_{j\neq i} \|\omega^i\|_\infty \Big) \\
&\leq c(n)\, c_1^{n-1} \left( \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_1 + \lambda_k \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On the other hand, $\|d\omega^i\|_2 \leq \|\nabla\omega^i\|_2$ and again (3.4) imply

$$\begin{aligned}
\|\delta\eta\|_2 &= \|d(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1})\|_2 \\
&\leq \sum\nolimits_i \|d\omega^i\|_2 \|\omega^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1}\|_\infty \\
&\leq (n-1)\, c_1^{n-1} \left( \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_1 + \lambda_k \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Inequality (3.8) yields a lower bound on the denominator of the Rayleigh quotient, and we obtain

$$\lambda_n \leq R(\eta) \leq (1 + c(n)\,\epsilon_2)\; c(n)\, c_1^{n-1} \left( \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_1 + \lambda_k \right)^{1/2}, \tag{3.12}$$

which is the required smallness of $\lambda_n$.

If $M$ is not orientable, then our argument implies that the twofold orientable covering $\tilde{M}$ is a nilmanifold. This is not quite sufficient, as we need to show that the deck transformation $\sigma : \tilde{M} \to \tilde{M}$ is an isometry of some left invariant Riemannian metric on $\tilde{M}$. We therefore proceed as follows.

The pullbacks $\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^{n-1}$ of the eigenforms to $\tilde{M}$ are eigenforms of the pullback metric $\tilde{g}$. By (3.8), these forms are almost orthonormal at every point. Considering the Rayleigh quotient for the form $*(\tilde{\omega}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^{n-1})$ as before, we conclude that the $n$–th eigenvalue $\tilde{\lambda}_n$ of $\tilde{M}$ is small. Now let $\tilde{\omega}^n$ be an eigenform corresponding to $\tilde{\lambda}_n$, such that

$\tilde\omega^1,\dots,\tilde\omega^n$ are $L^2$–orthonormal. Our previous argument shows that the $\mathrm{R}^n$–valued one–form $\tilde\omega=(\tilde\omega^1,\dots,\tilde\omega^n)$ is a coframe with small exterior derivative. The transformation $\sigma$ leaves the sum of the eigenspaces for the first $n$ eigenvalues invariant, because it is an isometry of $\tilde g$ and since $\tilde\lambda_{n+1}>\tilde\lambda_n$. Therefore, $\sigma$ acts as an *affine isometry* of the coframe $\tilde\omega$, i.e. satisfies

$$\sigma^*\tilde\omega = a\circ\tilde\omega$$

for some constant orthogonal map $a$ of $\mathrm{R}^n$. By [55], affine isometries of $\tilde\omega$ are affine isometries of the Maurer–Cartan coframe $\phi^*\omega_0$ in Theorem 3.1 as well, and the proof is complete.

## 4. Anderson's examples

In this section, we show that Theorem 1.1 does not hold without an assumption involving the full curvature tensor $R$. More precisely, we have

**Proposition 4.1.** *For every dimension $n\ge 4$, there are closed $n$–manifolds with arbitrary large second real Betti numbers $b_2$ that admit Riemannian metrics of diameter one with $\|\operatorname{Ric}\|_\infty+\lambda_n\le\epsilon$ for any given $\epsilon>0$.*

Nomizu's theorem mentioned in Remark 1.2(iv) implies that manifolds with $b_2>n(n-1)/2$ are not homotopy equivalent to infra–nilmanifolds. The examples we use have been constructed by Anderson. Theorem 0.4 of [3] exhibits manifolds $M$ with diameter one, $\|\operatorname{Ric}\|_\infty\le\epsilon$, first Betti number $b_1=n-1$ (so that $\lambda_{n-1}=0$), and $b_2$ arbitrary large. This shows that our result on $\lambda_{n-1}$ does not hold if we replace (1.5),(1.6) by conditions not involving $R$.

For the *proof* of Proposition 5.1, we now describe Anderson's simplest examples in more detail (see p. 73 and Remark 2.1 on p. 75 of [3]). These examples are obtained by performing surgery killing a generator of the fundamental group of a flat $n$–torus. One starts with a Riemannian product $M_0=S^1_\delta\times T^{n-1}$ of a circle of suitable diameter $\delta$ and a flat $(n-1)$–torus. Removing a subset of the form $S^1_\delta\times B_a$, where $B_a\subseteq T^{n-1}$ is a ball of radius $a$ less than half the injectivity radius of $T^{n-1}$, we are left with $M_1=S^1_\delta\times\big(T^{n-1}\backslash B_a\big)$, a manifold with boundary $S^1_\delta\times S^{n-2}_a$. To this one glues a copy of $D^2\times S^{n-2}$, carrying a suitably scaled Riemannian Schwarzschild metric $g_{aR}$, to obtain

$$M=\big(S^1_\delta\times(T^{n-1}\backslash B_a)\big)\cup\big(D^2\times S^{n-2}\big)$$

equipped with a Riemannian metric $g_{a,R}$ that has diameter less than $n\pi$ and satisfies $\|\operatorname{Ric}\|_\infty\ \to\ 0\quad\text{as}\quad aR\ \to\ \infty$ . The construction involves parameters $a$, $R$ and $\delta$ that need to be related by $\delta=c_0/aR$, where $c_0$ depends only on the dimension $n$. We may choose the radius $a=R^{-1/2}$ and then let $R$ tend to infinity to obtain metrics $g_R$ satisfying $\|\operatorname{Ric}\|_\infty\le\epsilon$ and $\operatorname{Diam}(M,g_R)\le n\pi$, that coincide with our original flat metric on $M_0$

outside of $S^1_\delta \times B_a$. Here $\epsilon$ as well as $a$ can be made as small as required by choosing $R$ large.

We now claim that the $n$–th eigenvalue $\lambda_n(g_R)$ tends to zero as $R \to \infty$. To show this, we exhibit $n$ one–forms $\beta^1, \ldots, \beta^n$ on $M$ that are almost orthonormal in $L^2(M)$ and whose Rayleigh quotients tend to zero. The minimax principle then implies our claim. The forms $\beta^i$ are obtained as follows (see for example [84]). Let $\varphi \in C^\infty(T^{n-1})$ be a function such that $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 0$ on $B_a$, $\varphi = 1$ outside $B_{2a}$, and such that its differential satisfies $\|d\varphi\| \le 1/3a$. Since the dimension $n-1 > 2$, the $L^2$-norm $\|d\varphi\|_2 = O(a)$ as $a$ tends to zero. Define a cutoff function $\psi$ on $M_0 = S^1_\delta \times T^{n-1}$ by $\psi(t,x) = \varphi(x)$. We choose an $L^2$–orthonormal basis $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ for the harmonic forms on our flat torus $M_0$, and let $\tilde\alpha^i = \varphi\alpha^i$. The forms $\alpha^i$ are in fact parallel and, if we use volume normalized $L^2$ inner products as in section 4, pointwise orthonormal. For the exterior derivatives we obtain

$$\|d\tilde\alpha^i\|_2 = \|d\varphi \wedge \alpha^i\|_2 \le \|d\varphi\|_2 \, \|\alpha^i\|_\infty,$$

and this tends to zero if $a$ does. A corresponding inequality holds for $\|\delta\tilde\alpha^i\|_2$, while $\|\tilde\alpha^i\|_2 = \|\varphi\|_2$ tends to one. Therefore, the Rayleigh quotients of the $\tilde\alpha^i$ converge to zero with $a$. Since these forms vanish on the domain affected by our surgery, they can be transplanted to $M$ extending by zero on $D^2 \times S^{n-2}$ without changing their $L^2$ norms or Rayleigh quotients. In this way, we obtain the required forms $\beta^i$ on $M$. Finally, this operation can be repeated on several disjoint balls $B_a$ to yield examples with arbitrary large second Betti numbers.

## 5. Spectra of infra–nilmanifolds

Theorem 1.1 can be illustrated by the well known spectral behavior of *almost flat* left invariant metrics on infra–nilmanifolds (see [54] p. 68). The left invariant Maurer–Cartan form $\omega : TG \to \mathcal{G}$ of a Lie group $G$ descends to a coframe $\omega : T\bar M \to \mathcal{G}$ on any left quotient $\bar M = \Gamma\backslash G$ of $G$ by a discrete subgroup. Inner products on the Lie algebra $\mathcal{G}$ imply, via $\omega$, left invariant Riemannian metrics on $\bar M$. If, in particular, $\bar M$ is a compact nilmanifold, then there are families of inner products on $\mathcal{G}$ such that the corresponding left invariant metrics $g_\epsilon$, $\epsilon > 0$ have the properties that $\|d\omega\|_{\infty,g_\epsilon} \to 0$ and $\mathrm{Diam}(\bar M, g_\epsilon) \to 0$ as $\epsilon$ tends to zero (see [23] p. 126), and standard formulas then imply that $R$ also tends to zero.

Take an orthonormal basis for $\mathcal{G}$ with respect to $g_\epsilon$ and decompose $\omega = (\omega^1_\epsilon, \ldots, \omega^n_\epsilon)$ accordingly. Since $G$ is unimodular, we have $\delta\omega^i_\epsilon = 0$, and the Rayleigh quotients for $\omega^i_\epsilon$ are

$$\frac{\|(d+\delta)\omega^i_\epsilon\|^2_{2,g_\epsilon}}{\|\omega^i_\epsilon\|^2_{2,g_\epsilon}} = \|d\omega^i_\epsilon\|^2_{\infty,g_\epsilon} \to 0 \qquad (\epsilon \to 0).$$

As a consequence, $\lambda_n(g_\epsilon)$ tends to zero with $\epsilon$, while inequalities (1.3) and (1.4) show that $\lambda_{n+1}d^2$ admits a lower bound converging to $\pi^2/32(n+1)^2$. We summarize these remarks in

**Proposition 5.1.** *Every compact $n$–dimensional nilmanifold admits families $g_\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ of Riemannian metrics such that the diameter* $\mathrm{Diam}(g_\epsilon)$*, the curvature tensor* $\|R(g_\epsilon)\|_{\infty,g_\epsilon}$ *and the eigenvalue $\lambda_n(g_\epsilon)$ converge to zero as $\epsilon \to 0$.*

By Theorem 1.1, such metrics do not exist on infra–nilmanifolds that are not nilmanifolds. All compact infra–nilmanifolds are obtained as quotients $M = F\backslash\bar{M}$ of nilmanifolds $\bar{M}$ by finite groups $F$ of *affine transformations*, and one can see how the small eigenvalues of $\bar{M}$ are lost when passing to the quotient. In fact, affine transformations $\varphi$ are characterized by the property that $\varphi^*\omega = a \circ \omega$ for some constant linear map $a = rot(\varphi) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, the *rotational part* of $\varphi$. Left translations by elements of $G$ are those affine transformations that have $rot(\varphi) = 1$. So unless $M$ is itself a nilmanifold, dividing by $F$ will eliminate some of the small eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ of $\bar{M}$. And it will eliminate all of them, when $rot(F)$ acts irreducibly on $\mathcal{G}$.

This is the case for the three dimensional euclidean space forms labelled $\mathcal{G}_6$ on p. 122 of [90]. The first real Betti number of this space is zero, which means that all three of the small eigenvalues (corresponding to the harmonic forms) are lost when passing to $M = \mathcal{G}_6$ from its torus covering space $\bar{M}$.

The euclidean space form $\mathcal{G}_6$ provides an example for another problem in spectral theory. A theorem of Cheng ([35]) states that for closed Riemannian $n$–manifolds $(M, g)$ with $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)$ and diameter $\mathrm{Diam}(M, g) \leq d$, the first non–zero eigenvalue $\lambda_2^{(0)}$ of the Laplacian on functions satisfies

$$\lambda_2^{(0)}(M, g) \leq \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{c(n)}{d^2},$$

where $c(n)$ depends only on $n$. It may be asked (see [69]) whether results of this kind hold for the eigenvalues of the Laplacian on $p$–forms. For one–forms, this is true and a direct consequence of Cheng's result, by applying exterior differentiation to an eigenfunction corresponding to $\lambda_2^{(0)}$. However, the following counterexample shows that some caution is required for two–forms.

**Example 5.2.** Let $M = \mathcal{G}_6$ be as before. If we equip $M$ with any flat metric $g$ and consider the family $M_\epsilon = (M, \epsilon g)$, then as $\epsilon \to 0$, all $M_\epsilon$ have zero curvature and diameter converging to zero. The first eigenvalue $\lambda_1^{(1)}(M_\epsilon)$ of the Laplacian on one–forms, and by duality that on two–forms, tend to infinity.

Consider $N_\epsilon = S^1 \times M_\epsilon$ with $S^1$ a circle of diameter one. Then $N_\epsilon$, endowed with the product metric, is a flat manifold with diameter converging to one as $\epsilon \to 0$. The Künneth formula $\Delta(\alpha \wedge \beta) = \Delta\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \Delta\beta$ implies that the first eigenvalue of $N_\epsilon$ on two-forms is

$$\lambda_1^{(2)}(N_\epsilon) = \min\left\{\lambda_1^{(0)}(S^1) + \lambda_1^{(2)}(M_\epsilon),\ \lambda_1^{(1)}(S^1) + \lambda_1^{(1)}(M_\epsilon)\right\},$$

which tends to infinity as $\epsilon \to 0$. Rescaling the metric, we obtain a *family of compact flat four–manifolds of any given diameter $d$ whose first eigenvalues on two-forms tend to infinity.*

Erwann Aubry,
Laboratoire de Mathématiques,
Institut Fourier,
BP 74,
F–38402 Saint-Martin-d'Hères,
France

Bruno Colbois,
Institut de Mathématiques,
Université de Neuchâtel,
Rue Emile Argand 13,
CH–2007 Neuchâtel,
Switzerland

Patrick Ghanaat,
Mathematisches Institut II,
Universität Karlsruhe,
D–76128 Karlsruhe,
Germany

Ernst A. Ruh,
Département de Mathématiques,
Université de Fribourg,
Chemin du Musée 23,
CH–1700 Fribourg,
Switzerland

May 2, 2002

# Troisième partie

# Théorèmes de comparaison et théorèmes de la sphère en courbure de Ricci presque-minorée

# Chapitre 4

# Théorèmes de comparaison en courbure de Ricci presque-minorée

## 4.1 Introduction, Notations et Définitions

### 4.1.1 Introduction

Dans la suite, à toute fonction $f$ on associera les fonctions $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = (-f)^+$. $(M^n, g)$ désignera une variété riemannienne complète de dimension $n$. On notera Ric son 2-tenseur de Ricci. Sa restriction à $T_xM$ est une forme bilinéaire symétrique, dont on notera $\underline{\mathrm{Ric}}(x)$ la plus petite valeur propre relativement au produit scalaire $g_x$. Pour tout réel $k$, on pose $\rho_k = \big(\underline{\mathrm{Ric}} - k(n-1)\big)^-$ ; cette fonction, définie sur $M$, mesure ponctuellement le défaut de la métrique $g$ à être de courbure de Ricci supérieure ou égale à $k(n-1)$ (remarquer que $\rho_k = 0$ si et seulement si la courbure de Ricci de $(M^n, g)$ est supérieure ou égale à $k(n-1)$). Pour tout couple $(R,p)$ de nombres réels strictement positifs et tout point $x$ de M, *on notera* $\|\rho_k\|_{L^p(B(x,R))} = \left(\frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x,R)} \int_{B(x,R)} \rho_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *(où l'intégration se fait par rapport à la mesure riemannienne) et* $\|\rho_k\|_{p,R} = \sup_{x \in M} \|\rho_k\|_{L^p(B(x,R))}$. Le but de ce chapitre est de généraliser les théorèmes de comparaison (de Bishop-Gromov, Myers, Lichnerowicz), qui sont classiques en courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, au cas des variétés pour lesquelles la quantité $\|\rho_1\|_{p,R}$ est plus petite qu'une quantité universelle $\alpha(p,n,R)$ déterminée dans la suite (*on parlera alors de variétés à courbure de Ricci presque supérieure à* $(n-1)$ *ou presque minorée par* $(n-1)$). Plus précisément, les principaux résultats de ce chapitre sont les :

**Théorème A.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > \frac{n}{2}$ et $R > 0$. Il existe des constantes universelles $C(p,n)$ et $\alpha(p,n)$ calculables explicitement (pour plus de précision et pour le calcul de ces constantes, voir les énoncés correspondants* *dans le texte à suivre), telles que :*

*(i) Si $R \leq 4\pi$, toute variété riemannienne complète $(M^n,g)$ de dimension $n$, telle que $\|\big(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \leq \alpha(p,n)$ pour tout point $x$ de $M$, vérifie les inégalités suivantes :*

$$\mathrm{Diam}(M^n,g) \leq \pi\big(1+C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\big)$$

$$\mathrm{Vol}(M^n,g) \leq \mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n\big(1+C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4p-n-1}}\big)$$

$$\lambda_1(M^n,g) \geq n\big(1-C(p,n)\epsilon\big)$$

$$H^1(M)=\{0\}$$

*où $\lambda_1$ est la première valeur propre non nulle du laplacien de la variété $(M^n,g)$ et $H^1(M)$ est le premier groupe de cohomologie réelle de $M^n$. En particulier, $M$ est compacte.*

*(ii) Si $R > 4\pi$, les mêmes conclusions sont valables sous l'hypothèse plus restrictive $R^2\|\big(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \leq \alpha(p,n)$ pour tout point $x \in M^n$.*

Ce théorème (plus particulièrement la majoration du diamètre), combiné au théorème de S. Gallot rappelé en section 1.3.2, sur la majoration des constantes de Sobolev en courbure de Ricci presque positive et diamètre majoré, permet d'obtenir un analogue du théorème de S. Gallot qui nous donne des majorants des constantes de Sobolev en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ sans avoir à supposer le diamètre borné (voir le théorème 4.17). Ce résultat est crucial pour rendre applicables les résultats de la première partie de cette thèse à l'étude des théorèmes de stabilité des invariants géométriques de la sphère en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ (objet du chapitre suivant de cette thèse). L'optimalité de ce théorème est discutée dans le corps du texte à la suite de la démonstration des différentes propriétés énoncées (voir les remarques et commentaires qui suivent les théorèmes 4.12, 4.18 et 4.19). En particulier, il est démontré que ces résultats restent valable en dimension 2 sous une hypothèse de petitesse de la norme $L^1$ de $(K-1)^-$, mais qu'en dimension supérieure, il est possible de construire une suite de variétés $(M_i^n,g_i)$ de dimension $n$ et telles que $\sup_x R^2\|\big(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1)\big)^-\|_{L^{\frac{n}{2}}(B(x,R))}$ (et même $\mathrm{Diam}(M_i)^2\|\big(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1)\big)^-\|_{L^{\frac{n}{2}}(M_i)}$) tende vers 0, tandis que le diamètre, le nombre de valeurs propres non nulles (du laplacien) proches de 0 et le premier nombre de Betti tendent vers $+\infty$ (voir l'exemple 4.14 et la fin de la section 4.3.5).

Pour l'énoncé suivant, on note $L_1(R)$ (resp. $A_1(R)$) le volume $(n-1)$-dimensionnel (resp. $n$-dimensionnel) de la sphère géodésique (resp. de la boule géodésique) de rayon $R$ sur la sphère $\mathbb{S}^n$, munie de sa métrique canonique. On a alors le théorème suivant (qui regroupe des versions simplifiées des théorèmes 4.15 et 4.16) :

**Théorème B.** — *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème précédent, en posant de plus* $\delta = 1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4(2p-1)}}$, *on a :*

*(i) pour tous les rayons* $r > 0$, *et tous les points* $x$ *de* $M^n$ *:*

$$\mathrm{Vol}\big(B(x,r)\big) \leq \Big(1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4p-n-1}}\Big)A_1(r)$$

$$\text{"}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,r)\big)\text{"} \leq \Big(1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}}\Big)L_1(\delta r)$$

*où* " $\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,r)\big)$" *désigne le volume* $(n-1)$*-dimensionnel de la partie régulière de la sphère* $\partial B(x,r)$ *(voir la section 4.1.2 pour une définition précise).*

*(ii) pour tous les couples de nombres réels tels que* $0 < r \leq R$, *et tous les points* $x$ *de* $M^n$,

$$\frac{\mathrm{Vol}\big(B(x,r)\big)}{\mathrm{Vol}\big(B(x,R)\big)} \geq \Big(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4p-n-1}}\Big)\frac{A_1(r)}{A_1(R)}$$

$$\Big(\frac{\text{"}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,R)\big)\text{"}}{L_1(\delta R)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} - \Big(\frac{\text{"}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,r)\big)\text{"}}{L_1(\delta r)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}}(R-r)^{\frac{2p-n}{2p-1}}$$

*Les constantes qui interviennent dans ces inégalités seront précisées dans la suite.*

De façon générale, on démontre le résultat de comparaison suivant pour les variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $k(n-1)$ (où $k$ est un réel de signe quelconque, $A_k(r)$ est le volume de la boule géodésique de rayon $r$ dans l'espace de courbure sectionnelle constante égale à $k$ et $L_k(r)$ le volume de la sphère géodésique de rayon $r$ dans le même espace) :

**Théorème C.** — *Soit* $n$ *un entier* $(n \geq 2)$. *Soient* $p$, $k$ *et* $R_0$ *des nombres réels tels que* $p > \frac{n}{2}$, $k \leq 0$ *et* $R_0 > 0$. *On pose* $\alpha_k(r) = \begin{cases} 1, \ si\ k = 0 \\ \Big(\frac{n\int_0^r sh^{n-1}t\,dt}{r^n}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \ si\ k \leq 0 \end{cases}$. *Il existe une constante universelle* $C(p,n) > 1$ *(voir les énoncés 4.6, 4.8 et 4.9 pour plus de précisions) telle que, sur toute variété riemannienne complète* $(M^n, g)$ *de dimension* $n$ *qui vérifie* $R_0^2\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - k(n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R_0))} \leq \epsilon \leq \frac{1}{C(p,n)^2\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)^2}$ *et pour tout point* $x$ *de* $M^n$, *on ait :*

*(i) pour tout réel* $r \leq R_0$

$$\mathrm{Vol}\big(B(x,r)\big) \leq \Big(1 + C(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\Big)A_k(r)$$

*(ii) pour tout réel* $r \leq R_0$

$$\text{"}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,r)\big)\text{"} \leq \Big(1 + C(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\Big)L_k(r)$$

*(iii) pour tout couple* $(r,R)$ *de nombres réels tels que* $0<r\leq R\leq R_0$,

$$\frac{\mathrm{Vol}\big(B(x,r)\big)}{\mathrm{Vol}\big(B(x,R)\big)}\geq\Big(1-C(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\Big)\frac{A_k(r)}{A_k(R)}$$

*(iv) pour tout couple* $(r,R)$ *de nombres réels tels que* $0<r\leq R\leq R_0$,

$$\Big[\frac{\text{''}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,R)\big)\text{''}}{L_k(R)}\Big]^{\frac{1}{2p-1}}-\Big[\frac{\text{''}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x,r)\big)\text{''}}{L_k(r)}\Big]^{\frac{1}{2p-1}}\leq C(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}$$

Ces théorèmes de comparaison sont indispensables pour étendre au cas des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ les théorèmes de la sphère de T. Colding ([38] et [39]), revus par P. Petersen dans [77]. A l'origine, cette troisième partie de la thèse devait être consacrée seulement à cette extension des théorèmes de la sphère, par une technique qui en fait une application directe des inégalités de Harnack de la première partie. Pour les théorèmes de comparaison en courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$, nous comptions nous appuyer sur des travaux de P. Petersen, S. Shteingold, G. Wei et C. Sprouse ([81] et [79] principalement, mais aussi [78] et [82]). Toutefois, la partie de ces travaux consacrée plus particulièrement aux variétés de courbure presque minorée par $(n-1)$ (principalement [79]) nous semble contenir une erreur rédhibitoire (voir la fin de la section 4.3.1 de ce chapitre pour un exposé détaillé des principales erreurs), cette erreur se situant dans la preuve de la généralisation du théorème de Myers en courbure presque minorée par $(n-1)$ (ce théorème correspondrait à la majoration du diamètre donnée plus haut dans le théorème **A**). De plus, ce résultat est fondamental pour la généralisation des autres théorèmes de comparaison. Par exemple, sans la majoration du diamètre, la généralisation du théorème de Bishop-Gromov aux variétés de courbure de Ricci presque-supérieure à $(n-1)$ (et, de façon plus générale, l'intégralité du théorème **B**) n'existe que pour des boules de rayon plus petits que $\pi$. De plus, sans cette majoration du diamètre on n'aurait pas de bornes sur les constantes de Sobolev (à moins de rajouter une hypothèse de majoration a priori du diamètre ou de minoration a priori du volume des boules géodésiques de rayon 1, ce que nous voulons éviter ici). Rappelons que, sans ces bornes sur les constantes de Sobolev, les inégalités de la première partie de cette thèse perdent leur caractère universel.

C'est pourquoi nous insérons dans la thèse ce chapitre sur les théorèmes de comparaison en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, où nous exposons notre preuve des théorèmes cités plus haut (ainsi que des exemples illustrant l'optimalité des hypothèses des théorèmes **A** et **B**). Dans notre schéma de preuve, nous commençons par démontrer les résultats de comparaison à la Bishop-Gromov du théorème **C**, en nous appuyant sur la même inéquation de Riccati (vérifiée par la courbure moyenne des sphères) que dans les travaux de P. Petersen et al. (remarquer que cette inéquation de Riccati est équivalente aux estimées sur le laplacien de la fonction distance utilisées dans les travaux antérieurs de S. Gallot [50]). Mais, en suivant une méthode analytique différente, nous aboutissons, dans le cas où la courbure de Ricci est presque supérieure à une constante strictement positive, à des estimées optimales sur la courbure moyenne et le volume de la partie régulière des sphères-géodésiques (voir par exemple les lemmes 4.3 et 4.11). Notre preuve de la majoration du diamètre en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, n'est alors plus fondée, comme dans [79], sur un principe du maximum généralisé (appliqué à une fonction "excès" définie par $e(z) = d(x,z) + d(y,z) - d(x,y)$, où $x$ et $y$ sont deux points de $M$ suffisamment éloignés), mais sur une estimée précise du volume des sphères de grand rayon. Une fois la majoration du diamètre acquise, nous déduisons facilement les autres résultats des théorèmes **A** et **B** cités plus haut.

### 4.1.2 Forme volume, Boules et Sphères géodésiques

Soit $x_0$ un point de $M$. *On note* $\exp_{x_0} : T_{x_0}M \to M$ *la fonction exponentielle* en $x_0$, $v_g$ la mesure riemannienne de $(M^n, g)$*et* $\omega = \exp_{x_0}^* v_g$ *la mesure induite* par $exp_{x_0}$ sur $T_{x_0}M$. Le *domaine d'injectivité de* $\exp_{x_0}$ (l'intérieur de $Cut_{x_0}$) *sera noté* $U_{x_0}$. C'est un ouvert de $T_{x_0}M$, étoilé en 0. On identifiera souvent les points de $U_{x_0} \setminus \{0_{x_0}\}$ avec leurs coordonnées polaires $(r,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^{n-1}$. La mesure riemannienne $\omega$ peut s'exprimer en un point $(r,v)$ de $U_{x_0} \setminus \{0\}$ sous la forme :

$$\omega(r,v) = \theta(r,v) dr \cdot d_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

$$\theta(r,v) = \sqrt{\det\big(g(Y_i(r), Y_j(r))\big)},$$

où $d_{\mathbb{S}^{n-1}}$ (resp. $dr$) est la mesure riemannienne canonique de $\mathbb{S}^{n-1}$ (resp. de $\mathbb{R}_+^*$), et où $(Y_i)_{1\leq i \leq n-1}$ est une famille de champ de Jacobi le long de la géodésique $c : r \mapsto \exp_{x_0}(rv)$ telle que $Y_i(0)$=0 et telle que $(\nabla_{\dot{c}} Y_1(0), \cdots, \nabla_{\dot{c}} Y_{n-1}(0), v)$ forment une base orthonormée de $T_{x_0}M$ (*cf* [87] p. 65). Pour simplifier, il nous arrivera de noter $dv$ pour $d_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Dans la suite, *on notera encore* $\theta$ *le prolongement à tout* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^{n-1}$ de la fonction $\theta$ par 0 en dehors de $U_{x_0}$, on appellera $A_{x_0}(r)$ (ou $A(r)$ quand il n'y aura pas d'ambiguité) le volume de la boule géodésique de centre $x_0$ et de rayon $r$, et $L_{x_0}(r)$ (ou $L(r)$) le volume $(n-1)$-dimensionnel de $S(0,r) \cap U_{x_0}$ pour la mesure $\theta(r,.)\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}$, qui coïncide avec le volume $(n-1)$-dimensionnel de l'intersection de $\exp_{x_0}(U_{x_0})$ avec la sphère-géodésique de rayon $r$ centrée en $x_0$ (remarquer que ce n'est pas toujours le volume $(n-1)$-dimensionnel de toute la sphère géodésique $\partial B(x_0, r)$, ni de sa partie régulière : par exemple, dans le cas de l'espace projectif réel $P\mathbb{R}^n$

muni de sa métrique canonique, on a $L(\frac{\pi}{2}) = 0$ alors que $\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\partial B(x_0, \frac{\pi}{2})\big) = \mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^{n-1}/2)$. Mais, comme tous les points de $\exp_{x_0}\big(S(0,r)\cap U_{x_0}\big)$ sont des points réguliers de $\partial B(x_0, r)$, et même des points réguliers de la fonction $d(x_0, .)$, on parlera malgré tout, pour désigner $L_{x_0}(r)$, de *volume de la partie régulière de la sphère de rayon* $r$. Pour des raisons techniques, *on définit aussi* (pour tout entier $m \geq 1$) $U_{x_0}^{(m)} = (1-\frac{1}{m})\,U_{x_0} \subset U_{x_0}$*, l'image de* $U_{x_0}$ *par l'homothétie de centre* $0$ *est de rapport* $(1-\frac{1}{m})$ *dans* $T_{x_0}M$*, et les fonctions* $A^{(m)}(r)$ *et* $L^{(m)}(r)$ *qui sont, respectivement le volume de* $B(0,r)\cap U_{x_0}^{(m)}$*, et le volume, pour la mesure riemannienne* $(n-1)$*-dimensionnelle, de* $\big(S(0,r)\cap U_{x_0}^{(m)}\big)$. On a alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} L(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta(r,v)\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v), \\ L^{(m)}(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}} \theta(r,v)\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v), \\ A(r) = \int_0^r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta(t,v)\, dt \cdot d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v) = \int_0^r L(t)\, dt, \\ A^{(m)}(r) = \int_0^r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}} \theta(t,v)\, dt \cdot d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v) = \int_0^r L^{(m)}(t)\, dt. \end{cases}$$

L'égalité $A(r) = \int_0^r L(t)\, dt$ est due au fait que le cut-locus de $x_0$ est de mesure nulle, ce qui implique que $\mathrm{Vol}\big[B(x,r)\big] = \mathrm{Vol}\big[B(x,r) \cap \exp_{x_0}\big(U_{x_0}\big)\big]$. *Notez que*, par le théorème de convergence monotone, *on a* $L(r) = \lim_{m\to\infty} L^{(m)}(r)$ *et* $A(r) = \lim_{m\to\infty} A^{(m)}(r)$ (voir le lemme 4.4 pour l'étude des propriétés de régularité des fonctions $L^{(m)}$, $L$, $A^{(m)}$ et $A$ que nous utiliserons dans la suite).

Pour tout réel $k$ fixé, on notera $\theta_k$, $A_k$ et $L_k$ les fonctions correspondant à $\theta$, $A$ et $L$ sur la variété $(S_k^n, g_k)$ simplement connexe, de dimension $n$ et de courbure constante égale à $k$ (ces fonctions ne dépendent pas du point $x_0$ choisi). Les fonctions $A_k$ et $L_k$ sont $\mathcal{C}^\infty$, quant à la fonction $\theta_k$, elle vaut $s_k(r)^{n-1}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^{n-1}$ où :

$$s_k(r) = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{|k|}r)}{\sqrt{|k|}} \text{ pour } k < 0, \quad s_k(r) = r \text{ pour } k = 0,$$

$$s_k(r) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{k}r)}{\sqrt{k}} \text{ si } r \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}} \\ 0 \text{ si } r > \frac{\pi}{\sqrt{k}}, \end{cases} \quad \text{pour } k > 0.$$

### 4.1.3 Courbure moyenne des Sphères

Pour tout point $(r,v)$ de $U_{x_0} \setminus \{0\}$, *on notera* $h(r,v)$ *la courbure moyenne au point* $\exp_{x_0}(rv)$ *de la sphère de centre* $x_0$ *et de rayon* $r$ (qui par convention, sera la trace de la seconde forme fondamentale $II$ pour la normale extérieure $N = \frac{\partial}{\partial r}$, définie par $II(X,Y) =\, < \nabla_X N, Y >$, où $X$ et $Y$ sont tangents à la sphère de rayon $r$). Cette fonction $h$ est définie sur le domaine d'injectivité de la fonction $\exp_{x_0}$ et est reliée à la densité de la forme volume par la formule :

$$\frac{\partial \theta}{\partial r}(t,v) = h(t,v)\theta(t,v)\,,$$

valable en tout point $(t, v)$ de $U_{x_0}$ (*cf* [87] p. 329). On note $h_k$ la fonction courbure moyenne des sphères sur l'espace $(S^n_k, g_k)$ (cette fonction ne dépend pas du centre des sphères considérées, ni de la direction $v$ choisie). On a alors $h_k(r) = (n-1)\frac{s'_k(r)}{s_k(r)}$. Sur $U_{x_0}$, (*resp.* sur $U_{x_0} \cap B(0, \frac{\pi}{\sqrt{k}})$ si $k > 0$) *on définit la fonction* $\psi_k = (h - h_k)^+$. La fonction $\psi_k$ sera centrale dans nos calculs. Le lemme suivant résume les propriétés de $\psi_k$ qui seront utilisées dans la suite (notez que cette inéquation de Riccati est aussi l'outil central des théorèmes de comparaison sur le volume obtenus par P. Petersen, S. Shteingold, G. Wei et C. Sprouse dans [78], [81], et [79]) :

**Lemme 4.1.** — *Soit $u$ un élément de la sphère unitaire $\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}$ de $(T_{x_0}M, g_{x_0})$, on note par $I_u = ]0, r(u)[$ (resp. $I_u = ]0, \inf(r(u), \frac{\pi}{\sqrt{k}})[$ si $k > 0$) l'intervalle des valeurs de $t$ telles que $(t, u) \in U_{x_0}$ (resp. $(t, u) \in U_{x_0} \cap B(0, \frac{\pi}{\sqrt{k}})$). La fonction $\psi_k : I_u \to R^+$ définie par $t \mapsto \psi_k(t, u)$ est continue, dérivable à droite et à gauche en tout point de $I_u$ et vérifie l'inéquation différentielle :*

$$\begin{cases} 1. \ \lim\limits_{t \to 0^+} \psi_k(t, u) = 0, \\ 2. \ \frac{\partial \psi_k}{\partial r} + \frac{\psi_k^2}{n-1} + \frac{2\psi_k h_k}{n-1} \leq \rho_k, \end{cases}$$

*(où l'inéquation différentielle est vérifiée par les dérivées à droite et à gauche de $\psi_k$).*

**Démonstration.** — Pour ne pas alourdir les notations, on ne fait la démonstration que dans le cas le plus délicat où $k > 0$. Le calcul de la limite 1. est classique et découle (entre autres références possibles) de [44] (ou [45]). Les auteurs de ces deux articles démontrent aussi que la seconde forme fondamentale des sphères $\partial B(x_0, t)$ aux points $exp_{x_0}(tu)$ vérifie une équation de Riccati matricielle, qui, une fois tracée, implique que la fonction $h$ vérifie l'inéquation différentielle $\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{h^2}{n-1} + \underline{\mathrm{Ric}} \leq 0$ sur $U_{x_0}$, l'égalité étant atteinte si on remplace $h$ par $h_k$, $\underline{\mathrm{Ric}}$ par $k(n-1)$ et $U_{x_0}$ par $B(0, \frac{\pi}{\sqrt{k}})$. On en déduit qu'on a l'inéquation différentielle $\frac{\partial(h-h_k)}{\partial r} + \frac{(h-h_k)^2}{n-1} + \frac{2(h-h_k)h_k}{n-1} \leq \rho_k$ sur $U_{x_0} \cap B(0, \frac{\pi}{\sqrt{k}})$.
Au voisinage d'un point $(r, u)$ où $h(r, u) > h_k(r, u)$, on a $\psi_k = h - h_k$, et donc $\psi_k$ est dérivable par rapport à $r$, et l'inégalité différentielle 2. découle de l'inégalité précédente. Au voisinage d'un point $(r, u)$ où $h(r, u) < h_k(r, u)$, $\psi_k$ est nulle, et donc dérivable, et l'inéquation différentielle 2. est alors trivialement vérifiée (le membre de gauche étant alors nul). En un point $(r, u)$ où $h(r, u) = h_k(r, u)$, on a $\psi_k(r, u) = 0$. Si $\frac{\partial h}{\partial t}(r, u) = \frac{\partial h_k}{\partial t}(r, u)$ alors $\psi_k(t, u) = O\left[(t - r)^2\right]$ au voisinage de $r$, et donc $t \mapsto \psi_k(t, u)$ est dérivable en $r$ et de dérivée nulle. Encore une fois, l'inégalité est trivialement vérifiée car le premier membre est nul. Si $\frac{\partial h}{\partial t}(r, u) \neq \frac{\partial h_k}{\partial t}(r, u)$, alors $\psi_k$ est nulle du côté de $r$ où $h_k \geq h$ et égale à $h - h_k$ du côté où $h_k \leq h$. On en déduit que $\psi_k$ est dérivable à droite et à gauche de $r$ et que ces dérivées vérifient l'inéquation différentielle 2.

□

Enfin, pour en finir avec les notations et rappels, nous démontrons tout de suite la généralisation suivante du théorème des accroissements finis dont il sera fait un usage intensif dans la suite :

**Lemme 4.2.** — *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est décroissante si et seulement si elle vérifie :*
*(i)* $\forall x \in [a, b[$, $\overline{\lim}_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$,
*(ii)* $\forall x \in ]a, b]$, $\underline{\lim}_{h\to 0^-} f(x+h) \geq f(x)$.
*où* $\overline{\lim}$ *et* $\underline{\lim}$ *désignent respectivement les limites supérieure et inférieure.*

**Démonstration.** — Si $f$ est décroissante, elle vérifie évidemment les propriétés (i) et (ii). Réciproquement, soient $x \leq y$ deux points de $[a, b]$. Pour tout $\epsilon > 0$, on note $I_\epsilon = \{r \in [x, y] / f(t) \leq f(x) + \epsilon(t - x), \forall t \in [x, r]\}$. Alors $I_\epsilon$ est un sous-intervalle de $[x, y]$ contenant $x$, ouvert d'après (i) et fermé d'après (ii). Par connexité, on en déduit que $I_\epsilon = [x, y]$. En particulier, on a $f(y) \leq f(x) + \epsilon(y - x)$ pour tout $\epsilon$, d'où $f(y) \leq f(x)$ par passage à la limite.

□

### 4.1.4 Lemme fondamental et Volume des Sphères

Nous commençons par établir un lemme fondamental pour tous nos théorèmes de comparaison. Il donne une majoration de $\psi_k$ en fonction d'une intégrale de $\rho_k$. On retrouve en particulier que, si la courbure de Ricci est supérieure à $n-1$, alors $h \leq h_k$ (comme $h$ est un multiple du laplacien de la fonction distance à $x_0$, cette inégalité est équivalente au théorème de comparaison, dû à R. L. Bishop, sur les laplaciens des fonctions distances en courbure de Ricci supérieure à $n-1$. *cf* [87] p.158). On pourra comparer ce lemme avec le lemme 2.2 de [81] et le théorème 2.1 de [79]. Les deux différences principales, sont premièrement, que notre estimée est ponctuelle sur $\psi_k$ (alors que l'estimée donnée par les deux articles [81] et [79] est une majoration de $\int_0^r \psi_k^{2p}\omega$) et deuxièmement que, dans le cas $k > 0$, l'explosion du majorant, lorsque $r$ tend vers $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, est polynômiale dans notre cas, alors que l'explosion est exponentielle pour le majorant donné par le théorème 2.1 de [79] (de plus, le contrôle polynômial que nous donnons ici de cette explosion est optimal, voir la remarque qui suit la démonstration du lemme 4.3). Cette deuxième amélioration est cruciale pour notre preuve de la majoration du diamètre des variétés de courbure de Ricci presque-supérieure à $n-1$ (théorème 4.12).

**Lemme 4.3.** — *Soient $k$, $p$ et $r$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $r > 0$ ($r \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ si $k > 0$). On a alors :*

$$\psi_k^{2p-1}(r, v) \cdot \theta(r, v) \leq (2p-1)^p \left(\frac{n-1}{2p-n}\right)^{p-1} \int_0^r \rho_k^p(t, v)\theta(t, v)\, dt.$$

*Si $k > 0$ et $\frac{\pi}{2\sqrt{k}} < r < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, alors on a :*

$$\sin^{4p-n-1}(\sqrt{k}r)\cdot\psi_k^{2p-1}(r,v)\cdot\theta(r,v)\leq(2p-1)^p\left(\frac{n-1}{2p-n}\right)^{p-1}\int_0^r\rho_k^p(t,v)\theta(t,v)\,dt$$

*Ces deux inégalités sont valables pour tout point $x_0 \in M$ et tout vecteur unitaire $v$ de $(T_{x_0}M, g_{x_0})$.*

**Remarque.** — Remarquer que, par définition du prolongement de $\theta$, on a $\theta = \mathbb{1}_{U_{x_0}}.\theta$ ; c'est pourquoi, lorsque $r \notin I_v$ (i.e. lorsque $r.v \notin U_{x_0}$), nous avons donné un sens et une valeur (la valeur nulle) au membre de gauche des deux inégalités du lemme 4.3, bien que $\psi_k(r,v)$ n'ait alors pas de sens. Dans le même ordre d'idée, la décroissance de la fonction $r \mapsto \mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}}(r,v)$ prouve que les deux inégalités du lemme 4.3 restent valables si on y remplace $\theta$ par $\mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}}(r,v).\theta$. C'est cette version du lemme 4.3 qui sera utilisée dans la suite.

### Cas particulier de la dimension 2

Si $n = 2$, alors la fonction $h$ coïncide avec la seconde forme fondamentale des sphères, donc elle vérifie *l'équation* de Riccati $\frac{\partial h}{\partial r}+h^2+K=0$ où $K$ est la courbure sectionnelle de la variété. En intégrant, on obtient $h\theta+\int_0^r K\theta = 1$, et donc l'inégalité $h\theta \leq 1+\int_0^r(K-1)^-\theta$. Donc, lorsque $n = 2$, une norme $L^{\frac{n}{2}}$ de $\big(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1)\big)^-$ suffit à contrôler la courbure moyenne des sphères. Remarquer d'ailleurs que $n$=2 est le seul cas où on peut faire tendre $p$ vers $n/2$ dans les inégalités du lemme 4.3 sans que le membre de droite ne tende vers $+\infty$ (on obtient alors le contrôle de $\psi_k$ par une intégrale $L^1$ de $\rho_k$).

**Démonstration du lemme 4.3.** — Soit $\phi$ une fonction positive de classe $C^1$ définie sur $U_{x_0}\setminus\{0\}$ et bornée au voisinage de 0. D'après le lemme 4.1, la fonction $t \mapsto \phi(t,v)\cdot\psi_k^{2p-1}(t,v)\cdot\theta(t,v)$ est continue et dérivable à droite sur $I_v$, de dérivée vérifiant l'inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(\phi\psi_k^{2p-1}\theta) &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\psi_k^{2p-1}\theta+(2p-1)\phi\frac{\partial\psi_k}{\partial r}\psi_k^{2p-2}\theta+\phi\psi_k^{2p-1}\frac{\partial\theta}{\partial r}\\ &\leq \frac{\partial\phi}{\partial r}\psi_k^{2p-1}\theta-\frac{(2p-1)}{n-1}\phi\psi_k^{2p}\theta-\frac{(4p-2)}{n-1}\phi h_k\psi_k^{2p-1}\theta+\phi\psi_k^{2p-1}\frac{\partial\theta}{\partial r}+(2p-1)\rho_k\phi\psi_k^{2p-2}\theta\\ &\leq (2p-1)\rho_k\phi\psi_k^{2p-2}\theta-\left(\frac{2p-n}{n-1}\right)\phi\psi_k^{2p}\theta+\left(\frac{\partial\phi/\partial r}{\phi}-\frac{4p-n-1}{n-1}h_k\right)^+\phi\psi_k^{2p-1}\theta\end{aligned}$$

Où la première inégalité découle de l'inéquation différentielle vérifiée par $\psi_k$ (lemme 4.1) et la deuxième inégalité de $\frac{\partial\theta}{\partial r} = h\theta \leq h_k\theta+\psi_k\theta$. Le lemme 4.2, appliqué à la fonction :

$$\begin{aligned}f(t) &= \phi\psi_k^{2p-1}\theta(t)\\ &\quad -\int_0^t\left[(2p-1)\rho_k\phi\psi_k^{2p-2}\theta-\left(\frac{2p-n}{n-1}\right)\phi\psi_k^{2p}\theta+\left(\frac{\partial\phi/\partial r}{\phi}-\frac{4p-n-1}{n-1}h_k\right)^+\phi\psi_k^{2p-1}\theta\right]\end{aligned}$$

implique que $f$ est décroissante. Le fait que $\phi(t,v)\cdot\psi_k^{2p-1}(t,v)\cdot\theta(t,v)\to 0$ lorsque $t\to 0$ implique que $f(0)=0$, et donc $f$ est une fonction négative. L'inégalité de Hölder donne alors :

$$0\le \phi\psi_k^{2p-1}\theta(r)\le (2p-1)\left(\int_0^r \phi\rho_k^p\theta\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^r \phi\psi_k^{2p}\theta\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}}-\left(\frac{2p-n}{n-1}\right)\left(\int_0^r \phi\psi_k^{2p}\theta\,dt\right)$$
$$+\left(\int_0^r\left[\left(\frac{\partial\phi/\partial r}{\phi}-\frac{4p-n-1}{n-1}h_k\right)^+\right]^{2p}\phi\theta\,dt\right)^{1/2p}\left(\int_0^r \phi\psi_k^{2p}\theta\,dt\right)^{1-\frac{1}{2p}}\quad(*)$$

Dans un premier temps, on en déduit :

$$\frac{2p-n}{n-1}\cdot X^2-\left(\int_0^r\Big[\big(\frac{\partial\phi/\partial r}{\phi}-\frac{4p-n-1}{n-1}h_k\big)^+\Big]^{2p}\phi\theta\right)^{1/2p}\cdot X-(2p-1)\left(\int_0^r\phi\rho_k^p\theta\,dt\right)^{1/p}\le 0,$$

où on a posé $X=\left(\int_0^r\phi\psi_k^{2p}\theta\,dt\right)^{1/2p}$. Or l'inégalité $AX^2-BX-C\le 0$ ($A$, $B$ et $C$ positifs) implique $X\le\frac{B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A}\le\frac{B}{A}+\sqrt{\frac{C}{A}}$. Donc :

$$\left(\int_0^r\phi\psi_k^{2p}\theta\,dt\right)^{\frac{1}{2p}}\le\ \frac{n-1}{2p-n}\left(\int_0^r\Big[\big(\frac{\partial\phi/\partial r}{\phi}-h_k\frac{2p-1+(2p-n)}{n-1}\big)^+\Big]^{2p}\phi\theta\,dt\right)^{1/2p}$$
$$+\sqrt{\frac{(n-1)(2p-1)}{2p-n}}\left(\int_0^r\phi\rho_k^p\theta\,dt\right)^{1/2p}.$$

On prouve la première inégalite de la proposition 4.3 en posant $\phi(r,v)=1$. En effet, l'inégalité précédente et la positivité de $h_k$ donnent :

$$\int_0^r\psi_k^{2p}\theta\,dt\le\left(\frac{(2p-1)(n-1)}{2p-n}\right)^p\int_0^r\rho_k^p\theta\,dt.$$

Et donc, un retour à l'inégalité $(*)$, nous donne l'estimée ponctuelle :

$$\psi_k^{2p-1}\theta(r)\le(2p-1)^p\Big(\frac{n-1}{2p-n}\Big)^{p-1}\left(\int_0^r\rho_k^p\theta\,dt\right).$$

On prouve la seconde inégalité de la proposition 4.3 en posant $\phi=\sin^{4p-(n+1)}(\sqrt{k}r)$. On trouve alors, pour tout $r<\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ :

$$\sin^{4p-(n+1)}(\sqrt{k}r)\psi_k^{2p-1}\theta\le(2p-1)^p\Big(\frac{n-1}{2p-n}\Big)^{p-1}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}\rho_k^p\theta\,dt.$$

□

**Explosion du majorant lorsque $r$ tend vers $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, dans le cas où $k>0$**

Ce résultat de comparaison entre $\psi_k$ et $\rho_k$ ressemble à ceux établis par P. Petersen et al. dans [78], [81], [82] et [79]. On remarque cependant que la preuve ci-dessus est plus simple et, surtout, que la majoration donnée par le lemme 4.3 est optimale dans le sens suivant : le fait que tout majorant universel du rapport entre $\psi_k^{2p-1}$ et l'intégrale de $\rho_k$ doive tendre vers l'infini lorsque $r$ tend vers $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ (cas $k > 0$) est inéluctable. En effet, considérons par exemple le cas où la variété $(M^n, g)$ est la sphère canonique de rayon $\frac{1}{\sqrt{(1-\epsilon)}}$ (pour $\epsilon$ petit mais fixé). Un calcul direct donne $\rho_1 = (n-1)\epsilon$ et $\psi_1 = (n-1)\Big(\frac{\sqrt{(1-\epsilon)}}{\mathrm{tg}(\sqrt{(1-\epsilon)}t)} - \frac{1}{\mathrm{tg}(t)}\Big)^+$, et par conséquent, $\frac{\phi(r)\psi_1^{2p-1}\theta(r)}{\int_0^r \rho_1^p \cdot \theta\, dt} \geq C(p,n)\epsilon^{n-1-p}\frac{\phi}{(\pi-r)^{2p-1}}\big(1 - O(\pi - r)\big)$, lorsque $r$ est dans l'intervalle $]\pi - \epsilon, \pi[$. Il en ressort qu'une inégalité du type $\phi(r)\psi^{2p-1}\theta \leq C(p,n)\int_0^r \rho_k\theta\, dt$ n'est possible que si $\phi(r)$ est un $O\Big[(\pi - \sqrt{k}r)^{2p-1}\Big]$ au voisinage de $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Notre choix de $\phi$ dans la preuve du lemme 4.3, à savoir $\phi(r) = \sin(\pi - \sqrt{k}r)^{(2p-1)+(2p-n)}$, est donc quasi-optimal puisque le cas qui nous intéresse est le cas où $2p$ est arbitrairement proche de $n$ (on pourrait raffiner les calculs pour remplacer la puissance $4p - n - 1$ du sinus dans l'énoncé du lemme par une constante $\alpha > 2p-1$ indépendante de $p$ et $n$ et arbitrairement proche de $2p-1$). Au contraire, l'estimée donnée par [79] ne vaut que pour un choix de $\phi$ exponentiellement petit au regard de $(\pi - \sqrt{k}r)$. Nous verrons que cette différence est essentielle, et c'est ce qui nous permettra d'améliorer de manière quantitative, mais surtout qualitative (voir les théorèmes 4.9, 4.12,...) les théorèmes de comparaison énoncés dans [79].

Nous allons tout de suite utiliser la proposition 4.3 pour obtenir un premier théorème de comparaison entre les fonctions $L$ et $L_k$ qui représentent les volumes des parties "régulières" (voir les définitions précises données en section 4.1.2). Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant qui résume les propriétés de régularité des fonctions $A$, $A^{(m)}$, $L$ et $L^{(m)}$ :

**Lemme 4.4.** — *On suppose la variété riemannienne complète. Soit $\alpha$ un réel de l'intervalle $]0,1]$ et $m$ un entier non nul. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (sur $]0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}[$ si $k > 0$) par $f(r) = \Big(\frac{L^{(m)}(r)}{L_k(r)}\Big)^\alpha$. On a alors :*
*(i) $L$ et $L^{(m)}$ sont des fonctions continues à droite et semi-continues inférieurement à gauche,*
*(ii) $A$ et $A^{(m)}$ sont des fonctions continues et dérivables à droite,*
*(iii) $\overline{\lim}_{h\to 0^+}\frac{f(r+h)-f(r)}{h} \leq \alpha\Big(\frac{L^{(m)}(r)}{L_k(r)}\Big)^{\alpha-1}\frac{1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}}\psi_k\frac{\theta}{\theta_k}(r,v)\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v)$,*
*(iv) $\underline{\lim}_{h\to 0^-} f(r+h) \geq f(r)$.*

**Démonstration.** — Pour démontrer $(i)$ remarquer que, comme le domaine $U_{x_0}$ est étoilé en 0, la fonction $r \mapsto \theta(r,v)$ (où $v$ est un vecteur unitaire fixé de $(T_{x_0}M, g_{x_0})$), est une fonction strictement positive sur un intervalle de la forme $]0, r(v)[$ et nulle sur $[r(v), +\infty[$ ($r(v)$ est le rayon de coupure dans la direction $v$ ; il peut éventuellement être infini), elle est de plus $C^\infty$ sur $]0, r(v)[$ et sa borne supérieure sur tout intervalle $[0, R]$ ne dépend que de $R$ et pas de $v$ (car $\theta(r,v)$ est le produit de $r^{n-1}\mathbb{1}_{U_{x_0}}(r,v)$ par le jacobien de $\exp_{x_0}$, qui est une fonction $C^\infty$ sur $T_{x_0}M$ tout entier). Donc, à $r$ fixé, la fonction $v \mapsto \theta(r,v)$ est une fonction intégrable sur la sphère unitaire de $(T_{x_0}M, g_{x_0})$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous assure donc la continuité à droite de la fonction $L(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \theta(r,v) d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v)$. Le théorème de Fatou nous donne, quant à lui, que $\underline{\lim}_{s\to r^-} L(s) \geq \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \underline{\lim}_{s\to r^-} \theta(s,v) d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v)$ et, par définition du prolongement de $\theta$ (qui, à $v$ fixé, est une fonction semi-continue inférieurement à gauche de la variable $r$), on a $\int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \underline{\lim}_{s\to r^-} \theta(s,v) d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v) \geq \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \theta(r,v) d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v) = L(r)$. La fonction $L^{(m)}$ étant obtenue en remplaçant la fonction $\theta$ par 0 en dehors du domaine étoilé $U^{(m)}_{x_0}$, on montre donc, de la même manière que pour $L$, qu'elle est continue à droite et semi-continue inférieurement à gauche (il suffit de changer $r(v)$ en $\left(1-\frac{1}{m}\right)r(v)$ dans le raisonnement ci-dessus). On déduit immédiatement l'inégalité $(iv)$ de $(i)$ et de la continuité de $L_k$. La propriété $(ii)$ découle directement de $(i)$ et des égalités $A(r) = \int_0^r L(t)dt$ et $A^{(m)}(r) = \int_0^r L^{(m)}(t)\,dt$ (en effet, $\theta$ étant bornée sur tout compact de $T_{x_0}M \setminus \{0\}$, on en déduit que $L^{(m)}$ et $L$ sont des fonctions de la variable $r$ bornées sur tout compact. Les mesures $L(t)\,dt$ et $L^{(m)}(t)\,dt$ sont donc sans atomes).

Pour tout réel $r > 0$ donné, on note $\mathbb{S}^{(m)}_r$ l'ensemble des directions $v \in \mathbb{S}^{n-1}_{x_0} \subset T_{x_0}M$ en $x_0$ telles que $\left(\frac{m}{m-1}rv\right) \in U_{x_0}$, i.e. $\mathbb{S}^{(m)}_r = \frac{1}{r}\left[U^{(m)}_{x_0} \cap \mathbb{S}(0_{x_0}, r)\right]$. Posons $S^{(m)}(r) = \exp_{x_0}(r\mathbb{S}^{(m)}_r)$ (c'est l'intersection de la sphère-géodésique de rayon $r$ avec $U^{(m)}_{x_0}$ et $L^{(m)}(r)$ est le volume riemannien $n-1$-dimensionnel de l'hypersurface régulière $S^{(m)}(r)$). Un champ normal à cette hypersurface au point $\exp_{x_0}(rv)$ étant donné par $\dot\gamma_v(r)$ (où $\gamma_v$ est la géodésique $t \mapsto \exp_{x_0}(tv)$), on obtient une déformation normale $H_t$ de $S^{(m)}(r)$ en posant :

$$H_t[\gamma_v(r)] = \exp_{\gamma_v(r)}[t\dot\gamma_v(r)] = \exp_{x_0}\big((r+t)v\big)$$

Si $0 \leq \eta < \frac{1}{m-1}r$, les ensembles $H_\eta\left[S^{(m)}(r)\right]$ sont des hypersurfaces régulières (car, pour tout $v \in \mathbb{S}^{(m)}_r$, $(r+\eta)v \in U_{x_0}$) et on définit $\tilde L^{(m)}(r+\eta) = \mathrm{Vol}_{n-1}\big(H_\eta\left[S^{(m)}(r)\right]\big)$. Remarquons que $r.\mathbb{S}^{(m)}_r$ est d'adhérence compacte, incluse dans $U_{x_0}$ : ceci dérive de la continuité (voir [87]) de la fonction qui à un vecteur unitaire $v$ de $T_{x_0}M$ associe $r(v)$ (longueur maximale d'une géodésique minimisante issue de $x_0$ et de vecteur vitesse $v$) ; les éléments de l'adhérence de $r.\mathbb{S}^{(m)}_r$ dans $T_{x_0}M$ sont de la forme $r.v$, où $v$ est la limite d'une suite d'éléments $v_n$ de $\mathbb{S}^{(m)}_r$. On a donc $r(v_n) \geq \frac{m}{m-1}r$, d'où $r(v) \geq \frac{m}{m-1}r > r$. Il s'ensuit que $r.v \in U_{x_0}$, et donc l'adhérence de $r.\mathbb{S}^{(m)}_r$ est dans $U_{x_0}$. Cette adhérence est compacte, puisque fermée bornée dans $T_{x_0}M$. Posons $d_0 = d\big(r.\mathbb{S}^{(m)}_r, T_{x_0}M \setminus U_{x_0}\big)$. Ce qui précède prouve que $d_0 > 0$. La fonction $h = \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r}$ étant régulière sur $U_{x_0}$, elle est bornée sur le $\frac{d_0}{2}$-voisinage tubulaire fermé de $S^{(m)}(r)$, donc uniformément bornée sur chacune des hypersurfaces $H_\eta\left[S^{(m)}(r)\right]$, pourvu que $\eta \leq \frac{d_0}{2}$. Si $k \leq 0$, la fonction $\psi_k$ est également uniformément bornée sur ces hypersurfaces. Si $k > 0$, elle l'est encore, sous la condition $r < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ et $\eta \leq \frac{1}{2}\min\big(d_0, \frac{\pi}{\sqrt{k}} - r\big)$. Il s'ensuit que $\psi_k$, est intégrable sur $S^{(m)}(r)$ (lorsque $r < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, si $k > 0$). La formule de variation première du volume des déformations normales des hypersurfaces (*cf* [87] p. 329) nous donne :

$$\lim_{\eta\to 0^+} \frac{\tilde{L}^{(m)}(r+\eta) - \tilde{L}^{(m)}(r)}{\eta} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} h(r,v) 1\!\!1_{U^{(m)}_{x_0}} \theta(r,v)\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v) \leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} (\psi_k + h_k) 1\!\!1_{U^{(m)}_{x_0}} \theta\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v)$$

(remarquer que cette inégalité serait plus délicate à obtenir pour la fonction $L$, car alors il pourrait y avoir des problèmes d'intégrabilité de la fonction $h$ sur $S(0,r)\cap U_{x_0}$, celle-ci n'étant généralement plus bornée ; nous avons contourné cette difficulté en travaillant avec les fonctions $L^{(m)}$). D'autre part, $S^{(m)}(r+\eta) \subset \tilde{S}^{(m)}(r+\eta)$ lorsque $\eta \geq 0$ et donc $L^{(m)}(r+\eta) \leq \tilde{L}^{(m)}(r+\eta)$ (avec égalité lorsque $\eta = 0$). On en déduit donc que $\overline{\lim}_{\eta\to 0^+} \frac{L^{(m)}(r+\eta) - L^{(m)}(r)}{\eta} \leq h_k(r) L^{(m)}(r) + \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} 1\!\!1_{U^{(m)}_{x_0}} \psi_k \theta\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}$. On obtient alors facilement le cas $\alpha = 1$ de $(iii)$, puisque $L_k$ est dérivable de dérivée $h_k L_k$ et que :

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\eta\to 0^+}} \frac{\frac{L^{(m)}(r+\eta)}{L_k(r+\eta)} - \frac{L^{(m)}(r)}{L_k(r)}}{\eta} \\
&\qquad = \overline{\lim_{\eta\to 0^+}} \frac{L^{(m)}(r+\eta) - L^{(m)}(r)}{\eta L_k(r)} + \lim_{\eta\to 0^+} \Big[ L^{(m)}(r+\eta) \frac{1}{\eta} \big( \frac{1}{L_k(r+\eta)} - \frac{1}{L_k(r)} \big) \Big] \\
&\qquad = \overline{\lim_{\eta\to 0^+}} \frac{L^{(m)}(r+\eta) - L^{(m)}(r)}{\eta L_k(r)} - \frac{L^{(m)}(r) h_k(r)}{L_k(r)} \\
&\qquad \leq \frac{1}{\operatorname{Vol} \mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1\!\!1_{U^{(m)}_{x_0}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k}\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}
\end{aligned}$$

Notons $B$ la quantité $\frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1\!\!1_{U^{(m)}_{x_0}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k}\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}$ (on a $B \geq 0$). Alors, d'après ce qui précède, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta_\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta \in ]0, \eta_\epsilon[$, on ait l'inégalité $\frac{L^{(m)}(r+\eta)}{L_k(r+\eta)} \leq \frac{L^{(m)}(r)}{L_k(r)} + \eta(B+\epsilon)$. Si $\alpha < 1$ alors $(x+\eta)^\alpha \leq x^\alpha + \alpha\eta x^{\alpha-1}$ (pour tout $x > 0$ et tout $\eta \geq 0$, par inégalité de concavité), d'où :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{L^{(m)}}{L_k}\right)^{\alpha}\!(r+\eta) - \left(\frac{L^{(m)}}{L_k}\right)^{\alpha}\!(r) \quad &\leq \quad \left(\frac{L^{(m)}}{L_k}(r) + \eta(B+\epsilon)\right)^{\alpha} - \left(\frac{L^{(m)}}{L_k}\right)^{\alpha}\!(r) \\
&\leq \quad \alpha \left(\frac{L^{(m)}}{L_k}\right)^{\alpha-1}\!(r)\, \eta(B+\epsilon)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\overline{\lim}_{\eta\to 0^+} \frac{f(r+\eta) - f(r)}{\eta} \leq \alpha(B+\epsilon) \left(\frac{L^{(m)}}{L_k}\right)^{\alpha-1}\!(r)$ pour tout $\epsilon > 0$. On obtient l'inégalité annoncée en faisant tendre $\epsilon$ vers 0.

□

Le lemme précédent et le lemme 4.3 nous permettent de démontrer un premier résultat de comparaison entre les fonctions $L$ et $L_k$, qui sera beaucoup utilisé dans la suite :

**Lemme 4.5.** — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète de dimension $n$. Soient $k$ et $p$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et soit $m$ un entier non nul. Les fonctions $L^{(m)}$, $L$ et $L_k$ vérifient les inégalités suivantes :*

*(i) Pour tout $t \leq r$ (avec $r < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ si $k > 0$) :*

$$\frac{L^{(m)}}{L_k}(r) - \frac{L^{(m)}}{L_k}(t) \leq \frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}} \int_t^r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left( \mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k} \right) ds \cdot d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v)$$

*(ii) Pour tout $t \leq r$ (avec $r \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ si $k > 0$) :*

$$\left(\frac{L}{L_k}\right)^{\frac{1}{2p-1}}(r) - \left(\frac{L}{L_k}\right)^{\frac{1}{2p-1}}(t) \leq \left(\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}} \left(\int_{B(x_0,r)} \rho_k^p\right)^{\frac{1}{2p-1}} \int_t^r \frac{ds}{L_k^{\frac{1}{2p-1}}(s)}$$

*(iii) Si $k > 0$, et $\frac{\pi}{2\sqrt{k}} \leq t \leq r < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ alors :*

$$\left(\frac{L}{L_k}\right)^{\frac{1}{2p-1}}(r) - \left(\frac{L}{L_k}\right)^{\frac{1}{2p-1}}(t) \leq \left(\frac{n-1}{(\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1})^{\frac{1}{p-1}}(2p-1)(2p-n)}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}}$$
$$\times \left(\int_{B(x_0,r)} \rho_k^p\right)^{\frac{1}{2p-1}} \frac{\pi^2(\sqrt{k})^{\frac{n-1}{2p-1}}(r-t)}{4(\pi - \sqrt{k}r)(\pi - \sqrt{k}t)}.$$

**Cas de la dimension 2**

Encore une fois, dans le cas $n = 2$, les conclusions du lemme valent encore pour $p = 1$, par passage à la limite.

**Démonstration.** — Posons $I_k = ]0, +\infty[$ si $k \leq 0$ et $I_k = ]0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}[$ si $k > 0$. Soit $v$ un vecteur unitaire donné de $T_{x_0}M$, rappelons que la fonction $s \mapsto \mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k}(s, v)$ est continue et positive sur un intervalle de la forme $]0, r(v)[\cap I_k$ et nulle sur $[r(v), +\infty[\cap I_k$ (où $r(v)$ peut-être infini). Toujours par continuité de la fonction $r(v)$, l'ensemble $U_{x_0}^{(m)}$ est d'adhérence incluse dans $U_{x_0}$. Comme la fonction $\left(\psi_k \frac{\theta}{\theta_k}\right)$ est continue sur $U_{x_0} \cap \left(I_k \times \mathbb{S}^{n-1}\right)$, elle est uniformément bornée sur $\bar{U}_{x_0}^{(m)} \cap \left(I'_k \times \mathbb{S}^{n-1}\right)$, pour tout intervalle compact $I'_k$ inclus dans $I_k$. Il s'ensuit que $\left(\mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}} \psi_k \frac{\theta}{\theta_k}\right)$ est uniformément bornée sur $I'_k \times \mathbb{S}^{n-1}$. Notons que son intégrale sur $S^{n-1}$ est uniformément bornée sur $I'_k$. De même que pour $L$ (*cf* lemme 4.4), les théorèmes de convergence dominée de Lebesgue et de Fatou impliquent donc que la fonction $r \mapsto \int_{\mathbb{S}_{x_0}^{n-1}} \mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k}(r, v)\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v)$ est continue à droite et semi continue inférieurement à gauche sur $I_k$, et la fonction $r \mapsto \int_0^r \int_{\mathbb{S}_{x_0}^{n-1}} \mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k}$ est continue, et dérivable à droite sur $I_k$ (remarquer que $\psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k}$ tend vers 0 avec $r$). D'après le lemme 4.4 (pour $\alpha = 1$), on peut appliquer le lemme des accroissements finis 4.2 à la fonction $f(r) = \frac{L^{(m)}}{L_k}(r) - \frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^r \int_{\mathbb{S}_{x_0}^{n-1}} \mathbb{1}_{U_{x_0}^{(m)}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k}$ et ainsi obtenir l'inégalité (i).

De même, le lemme 4.4 (où on pose $\alpha = \frac{1}{2p-1}$) nous permet d'appliquer le lemme 4.2 à la fonction :

$$f(r) = \Big(\frac{L^{(m)}}{L_k}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}(r) - \frac{1}{2p-1}\frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}} \int_a^r \Big(\frac{L^{(m)}}{L_k}\Big)^{\frac{1}{2p-1}-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k}(t,v)\, dv dt,$$

(rappelons que nous avons démontré ci-dessus que l'intégrant du second terme est borné uniformément sur tout intervalle compact inclus dans $I_k$). Ceci nous donne :

$$\Big(\frac{L^{(m)}}{L_k}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}(r) - \Big(\frac{L^{(m)}}{L_k}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}(t) \leq \frac{1}{2p-1} \int_t^r \Big(\frac{L^{(m)}}{L_k}\Big)^{\frac{1}{2p-1}-1} \frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k}(s,v)\, dv ds$$

Or, l'inégalité de Hölder nous donne :

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{L^{(m)}}{L_k}\Big)^{\frac{2(1-p)}{2p-1}} \frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k} &= \frac{\big(L^{(m)}\big)^{\frac{2(1-p)}{2p-1}}}{\big(L_k\big)^{\frac{1}{2p-1}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \cdot \psi_k \cdot \theta \\
&\leq \frac{\big(L^{(m)}\big)^{\frac{2(1-p)}{2p-1}}}{\big(L_k\big)^{\frac{1}{2p-1}}} \Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \theta\Big)^{\frac{2(p-1)}{2p-1}} \Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \psi_k^{2p-1}\theta\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \\
&= \frac{1}{\big(L_k\big)^{\frac{1}{2p-1}}} \Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \psi_k^{2p-1}\theta\Big)^{\frac{1}{2p-1}}
\end{aligned}$$

Dont on obtient :

$$(*) \quad \int_t^r \Big(\frac{L^{(m)}}{L_k}\Big)^{\frac{1}{2p-1}-1} \frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \cdot \psi_k \cdot \frac{\theta}{\theta_k} \leq \int_t^r \frac{1}{L_k(s)^{\frac{1}{2p-1}}} \Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \cdot \psi_k^{2p-1} \cdot \theta(s,v)\, d_{\mathbb{S}^{n-1}}(v)\Big)^{\frac{1}{2p-1}} ds.$$

Or, d'après le lemme fondamental de comparaison 4.3, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2p-1} \int_t^r \frac{1}{L_k^{\frac{1}{2p-1}}(s)} \Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \psi_k^{2p-1}\theta(s,v)\Big)^{\frac{1}{2p-1}} &\leq \Big[\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\Big]^{\frac{p-1}{2p-1}} \int_t^r \frac{1}{L_k^{\frac{1}{2p-1}}} \Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \int_0^s \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \rho_k^p \theta\Big)^{\frac{1}{2p-1}} ds \\
&\leq \Big[\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\Big]^{\frac{p-1}{2p-1}} \Big(\int_t^r \frac{ds}{L_k^{\frac{1}{2p-1}}(s)}\Big) \Big(\int_{B(x_0,r)} \rho_k^p\Big)^{\frac{1}{2p-1}}.
\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité $(ii)$ pour les fonctions $L^{(m)}$. Pour $t < \frac{\operatorname{inj}_{x_0}}{2}$ et $m$ assez grand, on a $L^{(m)}(t) = L(t)$ et donc $\big(\frac{L^{(m)}}{L_k}\big)^{\frac{1}{2p-1}}(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$. L'inégalité $(ii)$ pour les fonctions $L^{(m)}$ nous donne alors la majoration uniforme :

$$L^{(m)}(r) \leq L_k(r)\Big[1 + \Big(\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\Big)^{\frac{p-1}{2p-1}} \Big(\int_{B(x_0,r)} \rho_k^p\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \int_0^r \frac{ds}{L_k^{\frac{1}{2p-1}}(s)}\Big].$$

Par passage à la limite, on en déduit que $L(r)$ est fini. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité $(ii)$ obtenue plus haut pour les fonctions $L^{(m)}$, et établir ainsi la propriété $(ii)$ pour la fonction $L$.

Pour prouver $(iii)$, remarquons d'abord que pour $k>0$, on a $L_k(r)=\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}\Big(\frac{\sin(\sqrt{k}r)}{\sqrt{k}}\Big)^{n-1}$, donc, d'après $(*)$ :

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}}\int_t^r\Big(\frac{L^{(m)}(s)}{L_k}\Big)^{\frac{2-2p}{2p-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}}\mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}}\psi_k\frac{\theta}{\theta_k}\,dvds$$
$$\leq\int_t^r\frac{(\sqrt{k})^{\frac{n-1}{2p-1}}}{\sin^2(\sqrt{k}s)}\Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}}\mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}}\frac{\sin^{4p-n-1}(\sqrt{k}s)\psi_k^{2p-1}\theta}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}}\,dv\Big)^{\frac{1}{2p-1}}ds,$$

et donc, d'après le lemme fondamental 4.3, on obtient, comme dans la démonstration de $(ii)$ :

$$\Big(\frac{L^{(m)}}{L_k}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}(r)-\Big(\frac{L^{(m)}}{L_k}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}(t)$$
$$\leq\Big(\frac{(n-1)}{(\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1})^{\frac{1}{p-1}}(2p-1)(2p-n)}\Big)^{\frac{p-1}{2p-1}}\Big(\int_{B(x_0,r)}\rho_k^p\Big)^{\frac{1}{2p-1}}\int_t^r\frac{(\sqrt{k})^{\frac{n-1}{2p-1}}}{\sin^2(\sqrt{k}s)}\,ds$$

Or remarquez que, par concavité du sinus, pour tout $\frac{\pi}{2\sqrt{k}}\leq t\leq r<\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, on a :

$$\int_t^r\frac{(\sqrt{k})^{\frac{n-1}{2p-1}}}{\sin^2(\sqrt{k}s)}\,ds\leq\frac{\pi^2}{4}(\sqrt{k})^{\frac{n-1}{2p-1}}\int_t^r\frac{ds}{(\pi-\sqrt{k}s)^2}$$
$$\leq\frac{\pi^2(\sqrt{k})^{\frac{n-1}{2p-1}}}{4\sqrt{k}}\int_{\pi-\sqrt{k}r}^{\pi-\sqrt{k}t}\frac{du}{u^2}\leq\frac{\pi^2(\sqrt{k})^{\frac{n-1}{2p-1}}(r-t)}{4(\pi-\sqrt{k}r)(\pi-\sqrt{k}t)}.$$

On obtient l'inégalité $(iii)$, pour les fonctions $L^{(m)}$, en combinant les 2 dernières inégalités précédentes ; puis l'inégalité $(iii)$ pour les fonctions $L$ en faisant tendre $m$ vers $+\infty$. □

## 4.2 Minorant négatif de la courbure de Ricci

### 4.2.1 Comparaison des volumes

Dans cette section, nous donnons des théorèmes de comparaison sur les fonctions $A$ et $L$ (où $A(r)=\operatorname{Vol}B(x,r)$ et $L(r)$ est le volume $n-1$-dimensionnel de la partie régulière de la sphère $\mathbb{S}(x,r)$) du type Bishop-Gromov et du type Bishop qui ne seront «optimaux» que pour $k\leq 0$ (voir la section suivante pour des énoncés optimaux dans le cas $k>0$). En dehors du théorème 4.9, les résultats exposés dans cette section ne présentent pas d'originalité notable par rapport à ceux de [81], si ce n'est dans la forme que nous leur donnons (et peut-être dans l'optimalité des constantes). Toutefois, puisque nous nous en servons dans la suite, et par souci de complétude, nous les énonçons et en donnons une preuve :

**Théorème 4.6.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$, $R_0$ et $k$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R_0 > 0$ ($R_0 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ si $k > 0$). Alors, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ de dimension $n$, on a, pour tout point $x \in M$ :*

*(i) Pour tout couple $(r, R)$ de nombres réels tels que $0 < r \leq R \leq R_0$ :*

$$\left[\frac{\operatorname{Vol} B(x,r)}{\operatorname{Vol} B(x,R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}} \geq (1 - B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R)\, R^{\frac{2p}{2p-1}} \|\rho_k\|_{p,R}^{\frac{p}{2p-1}}) \left[\frac{A_k(r)}{A_k(R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}},$$

*où* $\alpha_k(r) = \begin{cases} 1 \ si\ k \geq 0 \\ \left(\frac{n\int_0^r \operatorname{sh}^{n-1} t\, dt}{r^n}\right)^{\frac{1}{2p-1}} \ sinon \end{cases}$ *et* $B(p,n) = \left(\frac{(n-1)^{p-1}(2p-1)^{3p-1}}{(2p-n)^{3p-2}}\right)^{\frac{1}{2p-1}}$

*(ii) Si* $R_0 \|\rho_k\|_{p,R_0}^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon < \inf(1, \frac{1}{\left(2B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\right)^{\frac{2p-1}{2p}}})$*, alors :*

$$\frac{\operatorname{Vol} B(x,r)}{\operatorname{Vol} B(x,R)} \geq \left(1 - 2B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\epsilon^{\frac{2p}{2p-1}}\right)^{2p-1} \left[\frac{A_k(r)}{A_k(R)}\right].$$

**Remarque.** — Les fonctions $\alpha_k$ sont optimales dans la mesure où $\alpha_k(\sqrt{|k|}R)$ tend vers $\alpha_0(\sqrt{|k|}R) = 1$ lorsque $k \to 0$. Remarquer aussi que $\alpha_k$ est croissante et tend vers $\infty$ avec $\sqrt{|k|}R$ lorsque $k < 0$. Enfin, $B(p,n)$ tend vers $+\infty$ lorsque $p$ tend vers $\frac{n}{2}$ (y compris pour $n = 2$).

### Variante

Soit $\mathrm{C}_{x_0}$ un cône de directions de $T_{x_0}M$. On peut remplacer, dans le théorème de comparaison précédent, les boules géodésiques par les cônes géodédiques de même centre et même rayon engendrés par $\mathrm{C}_{x_0}$ (i.e. les domaines de la forme $B(x_0, R) \cap \exp_{x_0}\mathrm{C}_{x_0}$ que l'on compare aux domaines de $B(y_0, R) \cap \exp_{y_0}(C_{y_0})$ dans la variété simplement connexe $\mathbb{S}^n_k$ de courbure constante égale à $k$, où $C_{y_0}$ est l'image du cône $C_{x_0}$ par une isométrie linéaire indentifiant $T_{x_0}M$ et $T_{y_0}\mathbb{S}^n_k$). Mais il faut alors remplacer le terme $R\|\rho\|_{p,R}^{\frac{1}{2}}$ par $R\left(\frac{\int_{B(x_0,R)\cap\exp x_0(C_{x_0})} \rho^p}{\operatorname{Vol} B(x_0,R)\cap\exp_{x_0}(C_{x_0})}\right)^{1/2p}$ ou par $R\|\rho\|_{p,R}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{A(R)}{\operatorname{Vol} B(x_0,R)\cap\exp_{x_0}(C_{x_0})}\right)^{1/2p}$. Ce type de résultats de comparaison permet de contrôler les constantes de Sobolev en courbure de Ricci presque positive, en faisant l'hypothèse supplémentaire que toutes les variétés considérées admettent un *même* minorant pour le volume des boules géodésique de rayon 1. A ce propos, on peut consulter les travaux de D. Yang [94], étendus dans [82].

**Démonstration du théorème 4.6.** — Comme dans la démonstration du lemme 4.5, on établit d'abord l'inégalité énoncée pour les fonctions $A^{(m)}$, puis on fait tendre $m$ vers $+\infty$. Le lemme 4.5 (i) et l'inégalité de Hölder nous donnent, pour tout couple de réels $(t, r)$ tels que $t \leq r \leq R_0$ :

$$\frac{L^{(m)}(r)}{L_k(r)} - \frac{L^{(m)}(t)}{L_k(t)} \leq \int_t^r \frac{1}{L_k(s)} \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \mathbb{1}_{U^{(m)}_{x_0}} \psi_k^{2p-1} \theta \, d_{\mathbb{S}^{n-1}} \right)^{\frac{1}{2p-1}} \left( L^{(m)}(s) \right)^{1-\frac{1}{2p-1}} ds. \quad (*)$$

Donc, d'après le lemme fondamental 4.3, l'inégalité de Hölder et l'égalité $A(r) = \int_0^r L(t)\, dt$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{L^{(m)}(r)}{L_k(r)} - \frac{L^{(m)}(t)}{L_k(t)} &\leq (2p-1) \left[ \frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)} \right]^{\frac{p-1}{2p-1}} \int_t^r \frac{L^{(m)}(s)^{1-\frac{1}{2p-1}}}{L_k(s)} \left( \int_{B(x_0,s)} \rho_k^p \right)^{\frac{1}{2p-1}} ds \\ &\leq (2p-1) \left[ \frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)} \right]^{\frac{p-1}{2p-1}} \left( \int_{B(x_0,r)} \rho_k^p \right)^{\frac{1}{2p-1}} \frac{1}{L_k(t)} \int_t^r L^{(m)}(s)^{1-\frac{1}{2p-1}} ds\end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant du fait que $L_k$ est croissante sur $[0, R_0]$. En utilisant l'inégalité de Hölder, qui nous donne :

$$\int_t^r L^{(m)}(s)^{1-\frac{1}{2p-1}} ds \leq (r-t)^{\frac{1}{2p-1}} \left( A^{(m)}(r) - A^{(m)}(t) \right)^{1-\frac{1}{2p-1}},$$

en multipliant l'inégalité par $L_k(r)L_k(t)$ et en intégrant cette inégalité par rapport à la variable $t$ entre 0 et $r$, on obtient :

$$\begin{aligned}&L^{(m)}(r)A_k(r) - L_k(r)A^{(m)}(r) \\ &\leq (2p-1) \left[ \left( \frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)} \right)^{p-1} \int_{B(x_0,r)} \rho_k^p \right]^{\frac{1}{2p-1}} \left( \int_0^r (r-t)^{\frac{1}{2p-1}} dt \right) L_k(r) (A^{(m)}(r))^{\frac{2(p-1)}{2p-1}} \\ &\leq \frac{(2p-1)^2}{2p} \left[ \left( \frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)} \right)^{p-1} \int_{B(x_0,r)} \frac{\rho_k^p}{A_k(r)} \right]^{\frac{1}{2p-1}} r^{\frac{2p}{2p-1}} L_k(r) A_k(r) \left[ \frac{A^{(m)}(r)}{A_k(r)} \right]^{\frac{2(p-1)}{2p-1}}\end{aligned}$$

La fonction $A^{(m)}(r) = \int_0^r L^{(m)}(t)\, dt$ est dérivable à droite en tout point et de dérivée $L^{(m)}(r)$ (car $L^{(m)}$ est continue à droite), $A_k$ est $\mathcal{C}^1$ de dérivée $L_k(r)$, on en déduit que $\frac{A^{(m)}}{A_k}$ est dérivable à droite en tout point. De plus, d'après l'inégalité précédente, sa dérivée à droite vérifie l'inégalité :

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{A^{(m)}}{A_k} \right)(r) \leq \left( \frac{A^{(m)}}{A_k} \right)^{1-\frac{1}{2p-1}} (r) \quad C'(p,n) \left( \int_{B(x_0,r)} \rho_k^p \right)^{\frac{1}{2p-1}} (2p-1) \frac{r^{\frac{2p}{2p-1}} L_k(r)}{A_k(r)^{1+\frac{1}{2p-1}}}.$$

où $C'(p,n) = \frac{2p-1}{2p} \left( \frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)} \right)^{\frac{p-1}{2p-1}}$. Comme la fonction $\left[ \frac{A^{(m)}}{A_k} \right]^{\frac{1}{2p-1}}$ est dérivable à droite (*cf* le lemme 4.4 (*ii*)), on en déduit, en multipliant l'inégalité précédente par le facteur $\frac{1}{2p-1} \left( \frac{A^{(m)}}{A} \right)^{\frac{1}{2p-1}-1}$ et en intégrant (en appliquant le lemme 4.2) que :

$$\left[ \frac{A^{(m)}(R)}{A_k(R)} \right]^{\frac{1}{2p-1}} - \left[ \frac{A^{(m)}(r)}{A_k(r)} \right]^{\frac{1}{2p-1}} \leq C'(p,n) \left( \int_{B(x_0,R)} \rho_k^p \right)^{\frac{1}{2p-1}} \int_0^R \frac{t^{1+\frac{1}{2p-1}} L_k(t)}{A_k^{1+\frac{1}{2p-1}}(t)} dt \qquad (**)$$

Il suffit, pour conclure, d'estimer le dernier terme de l'inégalité. Une intégration par partie donne :

$$\int_0^R \frac{t^{1+\frac{1}{2p-1}} L_k(t)}{A_k^{1+\frac{1}{2p-1}}(t)}\, dt = -(2p-1)\frac{R^{1+\frac{1}{2p-1}}}{A_k(R)^{\frac{1}{2p-1}}} + 2p\int_0^R \frac{t^{\frac{1}{2p-1}}}{A_k^{\frac{1}{2p-1}}(t)}\, dt$$

(remarquer qu'il n'y a pas de problème de convergence en zéro car $A_k(t) \sim_0 c_n.t^n$ et $2p-n>0$). Si $k \geq 0$ (resp. si $k<0$), on minore $A_k(t)$ par $\left(\frac{t}{R}\right)^n A_k(R)$ (resp. par $A_0(t) = \frac{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}}{n} t^n$) en vertu de la concavité de la fonction sinus (resp. de la convexité de la fonction sh). On en déduit, en posant $\alpha' = \min\left(\frac{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}}{n}, \frac{A_k(R)}{R^n}\right)$ :

$$\int_0^R \frac{t^{1+\frac{1}{2p-1}} L_k(t)}{A_k^{1+\frac{1}{2p-1}}(t)}\, dt \leq \frac{2p(2p-1)}{(2p-n)(\alpha')^{\frac{1}{2p-1}}} R^{\frac{2p-n}{2p-1}}$$

On en déduit que :

$$\left[\frac{A^{(m)}(R)}{A_k(R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}} - \left[\frac{A^{(m)}(r)}{A_k(r)}\right]^{\frac{1}{2p-1}}$$
$$\leq B(p,n) R^{\frac{2p}{2p-1}} \|\rho_k\|_{L^p(B(x_0,R))}^{\frac{p}{2p-1}} \left(\frac{A(R)}{A_k(R)}\right)^{\frac{1}{2p-1}} \max\left(\frac{A_k(R)}{A_0(R)}, 1\right)^{\frac{1}{2p-1}}$$

où $B(p,n) = \left(\frac{(2p-1)^{3p-1}(n-1)^{p-1}}{(2p-n)^{3p-2}}\right)^{\frac{1}{2p-1}}$. Or $\frac{A_k(R)}{A_0(R)} = \frac{n\int_0^{R\sqrt{|k|}} (sh t)^{n-1} dt}{(R\sqrt{|k|})^n}$ si $k<0$, ce qui conclut, en faisant tendre $m$ vers $+\infty$ et $A^{(m)}$ vers $A$.

Pour démontrer $(ii)$, remarquer que l'inégalité $(**)$ reste vérifiée si on y remplace $R$ par $R_0$ dans le second membre uniquement. Le même calcul que ci-dessus donne alors :

$$\left[\frac{A(R)}{A_k(R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}} - \left[\frac{A(r)}{A_k(r)}\right]^{\frac{1}{2p-1}} \leq B(p,n) R_0^{\frac{2p}{2p-1}} \|\rho_k\|_{L^p(B(x_0,R_0))}^{\frac{p}{2p-1}} \alpha_k(\sqrt{|k|}R_0) \left(\frac{A(R_0)}{A_k(R_0)}\right)^{\frac{1}{2p-1}} \qquad (***)$$

En appliquant $(i)$, on obtient :

$$\left[\frac{A(R)}{A_k(R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}} \geq \left[\frac{A(R_0)}{A_k(R_0)}\right]^{\frac{1}{2p-1}} \left(1 - B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\left(R_0^2 \|\rho_k\|_{L^p(B(x_0,R_0))}\right)^{\frac{p}{2p-1}}\right)$$
$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{A(R_0)}{A_k(R_0)}\right)^{\frac{1}{2p-1}},$$

la dernière inégalité découlant de l'hypothèse faite sur $\epsilon$. On conclut en remplaçant le terme $\left(\frac{A(R_0)}{A_k(R_0)}\right)^{\frac{1}{2p-1}}$ par $2\left(\frac{A(R)}{A_k(R)}\right)^{\frac{1}{2p-1}}$ dans l'inéquation $(***)$.

### Cas de la dimension 2

Dans le cas $n=2$ et $p=1$, on peut établir la version faible suivante du théorème 4.6, qui nous servira pour démontrer notre théorème de type Myers pour les surfaces telles que $\|\rho_1\|_{1,4\pi}$ soit petit :

**Lemme 4.7.** — *Pour tout couple $(r,R)$ de réels tels que $0 < r < R$ et pour toute surface riemannienne complète $(S,g)$, dont on note $K$ la courbure sectionnelle, on a, pour tout point $x$ de $S$ :*

$$\frac{\operatorname{Vol} B(x,r)}{\operatorname{Vol} B(x,R)} \geq \left(\frac{r}{R}\right)^2 - r^2(\ln R - \ln r)\frac{1}{\operatorname{Vol} B(x,R)}\int_{B(x,R)} K^-$$

**Démonstration.** — On reprend dans la preuve précédente l'inégalité différentielle vérifiée par $\frac{A^{(m)}}{A_0}$ et on fait tendre $p$ vers 1 dans cette inégalité (avec $n=2$), on obtient alors :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{A^{(m)}}{A_0}\right)(r) \leq \frac{1}{\pi r}\int_{B(x_0,r)} K^-$$

qui s'intègre en :

$$\frac{A^{(m)}(R)}{\pi R^2} - \frac{A^{(m)}(r)}{\pi r^2} \leq \frac{1}{\pi}(\ln R - \ln r)\int_{B(x_0,R)} K^-$$

En faisant tendre $m$ vers $+\infty$ et en multipliant l'inégalité par $\frac{\pi r^2}{A(R)}$, on obtient le résultat annoncé.

$\square$

On obtient immédiatement le corollaire suivant (théorème de type Bishop), en faisant tendre $r$ vers 0 dans le théorème 4.6 :

**Théorème 4.8.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$, $R_0$ et $k$ des nombres réels tels que $p > \frac{n}{2}$ et $R_0 > 0$ ($R_0 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ si $k > 0$). Alors, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ de dimension $n$, pour tout nombre réel $R$ tel que $0 \leq R \leq R_0$ et pour tout point $x \in M$, on a :*

*(i)*

$$\left(1 - B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R)\big(R^2\|\rho_k\|_{p,R}\big)^{\frac{p}{2p-1}}\right)\operatorname{Vol} B(x,R)^{\frac{1}{2p-1}} \leq A_k(R)^{\frac{1}{2p-1}}.$$

*(ii) Si $R_0\|\rho_k\|_{p,R_0}^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon \leq \inf\big(1, \big(4B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\big)^{\frac{1-2p}{2p}}\big)$, alors :*

$$\operatorname{Vol} B(x,R) \leq \left(1 + 4B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\epsilon^{\frac{2p}{2p-1}}\right)^{2p-1} A_k(R),$$

*où $B(p,n)$ et $\alpha_k$ sont les mêmes constantes que dans le théorème 4.6.*

Le théorème suivant est une version du théorème de Bishop portant sur le volume des sphères (ou plus précisément sur le volume de la partie régulière des sphères géodésiques). Il n'est pas présent dans les travaux de P. Petersen, G. Wei et C. Sprouse [81] et [79].

**Théorème 4.9.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$, $R_0$ et $k$ des nombres réels tels que $p > \frac{n}{2}$ et $R_0 > 0$ ($R_0 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ si $k > 0$). Alors, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie $R_0 \|\rho_k\|_{p,R_0}^{\frac{1}{2}} \leq \inf\big(1, \big(4B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\big)^{\frac{1-2p}{2p}}\big)$, pour tout couple de nombres réels $(r, R)$ tels que $0 \leq r \leq R \leq R_0$ et pour tout point $x \in M$, on a :*

$$\Big(\frac{L(R)}{L_k(R)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} - \Big(\frac{L(r)}{L_k(r)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \leq 2^{\frac{1}{2p-1}} \frac{2p}{2p-1} B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\epsilon^{\frac{2p}{2p-1}}$$

*On en déduit :*

$$L(R) \leq \left(1 + 2^{\frac{1}{2p-1}} \frac{2p}{2p-1} B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R_0)\epsilon^{\frac{2p}{2p-1}}\right)^{2p-1} L_k(R),$$

*où les constantes $B(p,n)$ et $\alpha_k$ on été définies au théorème 4.6.*

**Démonstration.** — Ce théorème découle directement du lemme 4.5 et du théorème 4.8 puisque $\int_{B(x_0,r)} \rho_k^p \leq \|\rho_k\|_{p,R_0}^p A(R_0) \leq 2\|\rho_k\|_{p,R_0}^p A_k(R_0)$ d'après le théorème 4.8 (*ii*). Le lemme 4.5 (*ii*) donne alors :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{L}{L_k}\right)^{\frac{1}{2p-1}}(r) - \left(\frac{L}{L_k}\right)^{\frac{1}{2p-1}}(t) \\ &\qquad \leq \left(\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}} 2^{\frac{1}{2p-1}} (R_0\|\rho_k\|_{p,R_0}^{\frac{1}{2}})^{\frac{2p}{2p-1}} \frac{1}{R_0} \int_0^{R_0} \left(\frac{A_k(R_0)}{R_0 L_k(s)}\right)^{\frac{1}{2p-1}} ds\end{aligned}$$

Enfin, $L_k$ est une fonction croissante sous nos hypothèses et $A_k(r) = \int_0^r L_k(s)\, ds$, donc $\big(\frac{A_k(r)}{rL_k(r)}\big)^{\frac{2p}{2p-1}} \leq 1$, or $\left(\frac{A_k(R_0)}{R_0 L_k(s)}\right)^{\frac{1}{2p-1}} = \frac{\left(A_k(R_0)s^{2p}\right)^{\frac{1}{2p-1}} L_k(s)}{\left(R_0 A_k^{2p}(s)\right)^{\frac{1}{2p-1}}} \times \big(\frac{A_k(s)}{sL_k(s)}\big)^{\frac{2p}{2p-1}}$, d'où (en réutilisant une estimée de la démonstration du théorème 4.6), on obtient :

$$\frac{1}{R_0} \int_0^{R_0} \left(\frac{A_k(R_0)}{R_0 L_k(s)}\right)^{\frac{1}{2p-1}} ds \leq \frac{2p(2p-1)}{(2p-n)} \alpha_k(\sqrt{|k|}R_0),$$

et donc la première inégalité par définition de $B(p,n)$. Le deuxième inégalité s'en déduit en faisant tendre $r$ vers 0. □

### 4.2.2 Retour sur les hypothèses intégrales de courbure

Le théorème précédent nous permet de comparer entres elles des hypothèses de minoration intégrale de la courbure de Ricci associées à des rayons différents. La proposition suivante sera un des ingrédients essentiels des démonstrations d'équivalents, dans le cas $k > 0$, des théorèmes de comparaison précédents.

**Lemme 4.10.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$, $k$, $r$ et $R$ des nombres réels tels que $p > \frac{n}{2}$ et $0 < r \leq R$. Notons $B(p,n)$ et $\alpha_k(r)$ les constantes universelles définies au* *théorème 4.6. Alors pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ de dimension $n$, on a :*

*(i) Si $k \leq 0$ et $R\|\rho_k\|_{p,R}^{\frac{1}{2}} \leq \inf\Big[1, \big(4B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}R)\big)^{\frac{1-2p}{2p}}\Big]$, alors*

$$r\|\rho_k\|_{p,r}^{\frac{1}{2}} \leq 2\left[\frac{A_k(R)r^{2p}}{R^{2p}A_k(r)}\right]^{\frac{1}{2p}} \times R\|\rho_k\|_{p,R}^{\frac{1}{2}} \leq 2\left[\frac{A_k(R)}{A_0(R)}\right]^{\frac{1}{2p}} \times R\|\rho_k\|_{p,R}^{\frac{1}{2}}.$$

*(ii) Si $k \leq 0$ et $r\|\rho_k\|_{p,r}^{\frac{1}{2}} \leq \inf\Big[1, \big(4B(p,n)\alpha_k(\sqrt{|k|}r)\big)^{\frac{1-2p}{2p}}\Big]$, alors*

$$R\|\rho_k\|_{p,R}^{\frac{1}{2}} \leq 2\frac{R}{r}\left[\frac{A_k(r)}{A_k(r/3)}\right]^{\frac{1}{2p}} \times r\|\rho_k\|_{p,r}^{\frac{1}{2}}.$$

*(iii) Si $k \geq 0$, et $R\|\rho_k\|_{p,R}^{\frac{1}{2}} \leq \inf\Big[1, \big(4B(p,n)\big)^{\frac{1-2p}{2p}}\Big]$, alors*

$$r\|\rho_k\|_{p,r}^{\frac{1}{2}} \leq 2\left(\frac{r}{R}\right)^{1-\frac{n}{2p}} \times R\|\rho_k\|_{p,R}^{\frac{1}{2}} \leq 2R\|\rho_k\|_{p,R}^{\frac{1}{2}}.$$

*(iv) Si $k \geq 0$, et $r\|\rho_k\|_{p,r}^{\frac{1}{2}} \leq \inf\Big[1, \big(4B(p,n)\big)^{\frac{1-2p}{2p}}\Big]$, alors*

$$R\|\rho_k\|_{p,R}^{\frac{1}{2}} \leq 2\frac{R}{r}3^{\frac{n}{2p}}r\|\rho_k\|_{p,r}^{\frac{1}{2}} \leq 6\frac{R}{r}r\|\rho_k\|_{p,r}^{\frac{1}{2}},$$

*où $B(p,n)$ a été défini au théorème 4.6.*

**Démonstration.** — La démonstration des inégalités (i) et (iii) est immédiate à partir du théorème 4.6 (remarquer que, lorsque $k \geq 0$, on a $\|\rho_0\|_{p,R} \leq \|\rho_k\|_{p,R}$, ce qui permet de se débarrasser de la contrainte $R < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ et de majorer $\frac{A(R)}{A(r)}$ par $2^p(\frac{R}{r})^n$ ; on conclut en remarquant que $\frac{r^{2p}}{A_k(r)} \leq \frac{r^{2p}}{A_0(r)} \leq \frac{R^{2p}}{A_0(R)}$ dans le cas (i)). Pour les inégalités (ii) et (iv), on utilise la technique classique qui consiste à considérer un remplissage maximal $(B_i)_{i\in I}$ d'une boule $B$ de centre $x_0$ fixé et de rayon $R$ par des boules $B_i = B_i(x_i, \frac{r}{3})$ de rayon $r/3$, incluses dans $B$, deux à deux disjointes. On a alors $B(x_0, R) \subset \cup_i B(x_i, r)$ : en effet, s'il existe un point $x$ dans $B(x_0,R) \setminus \cup_i B(x_i, r)$, notons $c$ un segment géodésique minimisant joignant $x_0$ à $x$ et posons $x' = c(t_0)$, où $t_0 = \min[d(x_0,x), R - \frac{r}{3}]$ ; on aurait alors les inégalités $d(x_0,x') \leq R - \frac{r}{3}$, $d(x,x') < \frac{r}{3}$ et $d(x,x_i) \geq r$ pour tout indice $i$, ce qui impliquerait que $B(x', \frac{r}{3})$ est entièrement incluse dans $B(x_0,R)$ et ne rencontre aucune des boules $B(x_i, \frac{r}{3})$, ce qui contredirait la maximalité du remplissage $\big(B(x_i, \frac{r}{3})\big)_{i\in I}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{Vol} B(x_0,R)}\int_{B(x_0,R)} \rho_k^p &\leq \sum_{i\in I} \frac{\operatorname{Vol} B(x_i,r)}{\operatorname{Vol} B(x_0,R)} \frac{1}{\operatorname{Vol} B(x_i,r)}\int_{B(x_i,r)} \rho_k^p \\ &\leq \max_{i\in I} \frac{\operatorname{Vol} B(x_i,r)}{\operatorname{Vol} B(x_i,r/3)} \|\rho_k\|_{p,r}^p\end{aligned}$$

car $\operatorname{Vol} B(x_0, R) \geq \sum_{i\in I} \operatorname{Vol} B(x_i, r/3)$, puisque $\bigcup_{i\in I} B(x_i, r/3) \subset B(x_0, R)$ et que les boules $B(x_i, r/3)$ sont deux à deux disjointes. On conclut alors en utilisant le théorème 4.6. $\square$

**Remarques qualitatives sur les hypothèses intégrales de courbure**

Fixons $R$ et supposons que $R^2\|\rho_k\|_{p,R}$ est suffisamment petit. Le lemme 4.10 ($i$) et ($iii$) montre que ceci implique que $r^2\|\rho_k\|_{p,r}$ est petit pour tout $r$ inférieur à $R$ (plus $r$ sera petit, plus $r^2\|\rho_k\|_{p,r}$ sera petit). Inversement, si on fixe $r$ et si $\|\rho_k\|_{p,r}$ est petit, alors $\|\rho_k\|_{p,R}$ est petit pour tout $R$ supérieur à $r$. En revanche, un contrôle sur $r^2\|\rho_k\|_{p,r}$ (qui est une quantité invariante pas homothéties, donc a priori plus intéressante que la quantité $\|\rho_k\|_{p,r}$) pour un $r$ donné ne donne un bon contrôle sur $R^2\|\rho_k\|_{p,R}$ que pour des rayons $R$ pas trop grands par rapport à $r$ (*cf* le lemme 4.10 ($ii$) et ($iv$)). En fait, il ne peut exister de contrôle de $R^2\|\rho_k\|_{p,R}$ en fonction de $r^2\|\rho_k\|_{p,r}$ qui soit indépendant du rapport $\frac{R}{r}$ : en effet (en nous plaçant, pour simplifier, dans le cas $k=1$) l'hypothèse $r^2\|\rho_1\|_{p,r} \leq \epsilon$ est vérifiée pour tout $r \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{2(n-1)}}$ et sur toute variété de courbure de Ricci minorée par $-(n-1)$ (car on a alors $\rho_1 = \big(\underline{Ric} - (n-1)\big)^- \leq 2(n-1)$, d'où $r^2\|\rho_1\|_{p,r} \leq 2r^2(n-1)$). Cette hypothèse n'implique donc *aucune* restriction sur le diamètre ou sur la topologie de la variété, elle est donc non signifiante, alors que, par exemple, l'hypothèse $R^2\|\rho_1\|_{p,R} \leq \epsilon$ (pour $R = 2\pi$) implique, comme nous allons le voir, de fortes restrictions sur les variétés qui la vérifient.

C'est la raison pour laquelle, dans la section suivante, pour obtenir une majoration du diamètre, il faut faire une hypothèse du type $\frac{r^2\|\rho_1\|_{p,r}}{\inf(1,r^2)} \leq \epsilon$ (qui est équivalente, d'après le lemme 4.10, aux hypothèses du théorème 4.12).

## 4.3 Minorant positif de la courbure de Ricci

Dans cette section, nous démontrons les théorèmes de comparaison en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ dont nous aurons besoin dans le chapitre 5. Nous commençons par montrer que, si une variété riemannienne complète supporte une métrique de courbure presque minorée par $(n-1)$, alors cette variété est compacte et son diamètre est presque majoré par $\pi$ (théorème 4.12). C'est une extension du théorème de comparaison de Myers. Cette majoration du diamètre nous permet, par la suite, d'obtenir des versions optimales du théorème de comparaison de Bishop-Gromov sur le volume des boules et des sphères géodésiques (théorèmes 4.15 et 4.16). La majoration du diamètre nous permet aussi de déduire du théorème 1.2 de S. Gallot une majoration des constantes de Sobolev sans majoration a priori du diamètre (théorème 4.17). Cette majoration des constantes de Sobolev nous permettra d'appliquer les résultats de la première partie de cette thèse à la démonstration des théorèmes de la sphère (en courbure de Ricci presque minorée par $(n-1)$) du chapitre **5**. Avant de clore ce chapitre, nous utiliserons la majoration des constantes de Sobolev pour montrer que les variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ ont leur première valeur propre (non nulle) du spectre du laplacien presque minorée par $n$ et leur premier groupe de cohomologie réelle trivial.

### 4.3.1 Majoration du Diamètre

On démontre ici que, si le pincement intégral $\|\rho_1\|_{p,R}$ sur la courbure de Ricci est suffisamment petit alors la variété est compacte et de diamètre majoré par une constante qui tend vers $\pi$ lorsque $\|\rho_1\|_{p,R}$ tend vers 0. Notre stratégie pour démontrer cela est de s'appuyer sur une étude précise de la fonction $L$ (on rappelle que $L(r)$ est le volume $(n-1)$-dimensionnel de la partie régulière de la sphère-géodésique centrée en un point $x_0$ et de rayon $r$). Pour démontrer que le diamètre d'une variété est majoré par $D$, il suffit de montrer que $L(D)$ est nul pour tout choix de $x_0$. Dans la partie précédente, on a montré que la fonction $L$ est majorée par la fonction $L_k$ multipliée par un terme qui tend vers 1 lorsque la norme $L^p$ de $\rho_k$ tend vers 0. Toutefois, cette majoration n'est valable pour tout rayon $r$ que dans le cas $k < 0$, et dans le cas $k > 0$, elle est seulement valable pour des rayons inférieurs à $\frac{\pi}{2\sqrt{k}}$. Cela ne permet pas de conclure à l'annulation de $L$. On pourrait chercher à étendre cette majoration de $L$ par $L_k$ au cas $k = 1$ et $\frac{\pi}{2} \leq r \leq \pi$, en utilisant la deuxième partie du lemme fondamental de comparaison 4.3 (voir aussi le lemme 4.5 $(iii)$) ; mais le majorant de $\frac{L(r)}{L_1(r)}$, ainsi obtenu, tend vers $+\infty$ lorsque $r$ tend vers $\pi$ (cette situation est normale, puisque l'exemple des sphères de rayon arbitrairement proche de 1, mais strictement supérieur à 1 nous montre qu'un majorant universel du diamètre des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$ ne peut être que strictement plus grand que $\pi$. Cet exemple prouve d'ailleurs aussi que, dans ce cas, $\frac{L(r)}{L_1(r)} \underset{r\to\pi}{\longrightarrow} +\infty$, puisque $L_1(\pi) = 0$). L'idée de notre preuve est en fait de majorer $L(r)$ en fonction de $L_k(r)$ pour un $k < 1$ dépendant de $r$ et choisi de manière à ce que, lorsque $\|\rho_1\|_{p,4\pi}$ est suffisamment (et universellement) petit, le majorant de $L(r)$ soit, non pas nul, mais arbitrairement petit pour tout rayon $r$ compris entre $\pi$ et $\frac{3\pi}{2}$. On en déduit alors que les couronnes comprises entre deux sphères concentriques de rayons $\pi$ et $\frac{3\pi}{2}$ ont un volume relatif, dans la boule de rayon $\frac{3\pi}{2}$, qui tend vers 0 avec le pincement intégral de $\rho_1$. Or, si le diamètre de la variété est effectivement beaucoup plus grand que $\pi$, une des couronnes citées plus haut contient une boule de rayon minoré, dont le volume relatif (dans une boule de même centre et de rayon $4\pi$) tend donc vers 0 avec $\|\rho_1\|_{p,4\pi}$. Ceci est en contradiction avec le théorème de type Bishop-Gromov 4.6 (appliqué en posant $k = 0$), démontré dans la section précédente.

Une version moins précise de ce résultat de majoration du diamètre est énoncée dans [79], mais la démonstration contient plusieurs erreurs fondamentales, et il s'avère que la stratégie sur laquelle elle s'appuie (principe du maximum généralisé) ne peut pas fonctionner. Voir la remarque à la fin de cette sous-section pour une analyse détaillée de la "preuve" de ce résultat dans [79].

Nous commençons par établir le lemme suivant, qui est une majoration du volume $(n-1)$-dimensionnel de la partie régulière des sphères (i.e. de $L$) de rayons plus grand que $\pi$ :

**Lemme 4.11.** — *Soient $n$ un entier ($n \geq 2$) et $p$ un nombre réel tel que $p > n/2$. Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète de dimension $n$, et $x$ un point de $M$. Si $\|(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1))^-\|_{L^p(B(x,2\pi))} \leq \epsilon \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2-\frac{1}{p}}$, alors, pour tout rayon $r$ de l'intervalle $[\pi, 2\pi - \epsilon]$, on a :*

$$L_x(r) \leq C(p,n) A_x(2\pi) \epsilon^{\frac{p(n-1)}{2p-1}},$$

*où $C(p,n) = \frac{3}{\pi} 2^{2p+n-3} + (2\pi^2)^{2p-1} \frac{1}{(2p-n)^{p-1}}$ (et on a mis, pour mémoire, en indice aux fonctions $L$ et $A$, le centre $x$ des sphères-géodésiques et des boules considérées).*

### Cas de la dimension 2

On a la même conclusion dans le cas $n = 2$ et $p = 1$ par passage à la limite dans la preuve qui suit.

**Démonstration.** — Par souci de simplicité, nous revenons aux notations $L$ et $A$ sans indice dans la preuve qui suit. Posons $\epsilon' = \epsilon^{\frac{p}{2p-1}}$ et, pour tout réel fixé $r$ de l'intervalle $[\pi, 2(\pi - \epsilon)]$, nous posons $k_r = \frac{(\pi-\epsilon')^2}{r^2}$. On a alors $k_r \leq 1$ (puisque $\frac{\pi-\epsilon'}{\pi} < 1$). En appliquant le lemme 4.5 (iii) avec $k = k_r$ (et l'égalité $L_{k_r} = \mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^{n-1}\left(\frac{\sin(\sqrt{k_r} r)}{\sqrt{k_r}}\right)^{n-1}$), on obtient, pour tout réel $t$ vérifiant $\frac{\pi}{2(\pi-\epsilon')} \leq \frac{t}{r} \leq 1$ :

$$\frac{L(r)^{\frac{1}{2p-1}}}{(\sin(\sqrt{k_r} r))^{\frac{n-1}{2p-1}}} - \frac{L(t)^{\frac{1}{2p-1}}}{(\sin(\sqrt{k_r} t))^{\frac{n-1}{2p-1}}} \leq \left(\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}} \left(\int_{B(x,2\pi)} \rho_1^p\right)^{\frac{1}{2p-1}} \frac{\pi^2(r-t)}{4(\pi - \sqrt{k_r} t)(\pi - \sqrt{k_r} r)}$$

Où on a utilisé le fait que $\rho_{k_r} \leq \rho_1$. Or, sous nos hypothèses, on a :

$$\frac{\pi^2(r-t)}{4(\pi - \sqrt{k_r} t)(\pi - \sqrt{k_r} r)} = \frac{\pi^2(r-t)}{4(\pi - \frac{(\pi-\epsilon')t}{r})\epsilon'} \leq \frac{\pi^2 r}{4\epsilon'(\pi - \epsilon')} \leq \frac{\pi r}{2\epsilon'} \leq \frac{\pi^2}{\epsilon'}$$

On en déduit que :

$$\frac{L(r)^{\frac{1}{2p-1}}}{(\sin(\sqrt{k_r} r))^{\frac{n-1}{2p-1}}} - \frac{L(t)^{\frac{1}{2p-1}}}{(\sin(\sqrt{k_r} t))^{\frac{n-1}{2p-1}}} \leq \left(\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}} \left(\int_{B(x,2\pi)} \rho_1^p\right)^{\frac{1}{2p-1}} \frac{\pi^2}{\epsilon'}$$

$$\leq \pi^2 \left(\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}} \frac{\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}}{\epsilon'} A(2\pi)^{\frac{1}{2p-1}}$$

En multipliant cette inégalité par $(\sin(r\sqrt{k_r}))^{\frac{n-1}{2p-1}} \leq (\epsilon')^{\frac{n-1}{2p-1}}$, on obtient que, pour tout $t \in [\frac{\pi}{2(\pi-\epsilon')}r, r]$, on a :

$$L(r)^{\frac{1}{2p-1}} \leq L(t)^{\frac{1}{2p-1}} \left(\frac{\epsilon'}{\sin((\pi-\epsilon')\frac{t}{r})}\right)^{\frac{n-1}{2p-1}} + \pi^2 \left(\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}} \frac{A(2\pi)^{\frac{1}{2p-1}} \epsilon^{\frac{p}{2p-1}}}{\epsilon'^{\frac{2p-n}{2p-1}}}.$$

En utilisant l'inégalité $(a+b)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha)$ lorsque $a, b \geq 0$, pour $\alpha = 2p-1$, et le fait que, si on se restreint aux valeurs de $t$ comprises dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2(\pi-\epsilon')}r, \frac{5\pi}{6(\pi-\epsilon')}r]$, alors on a l'inégalité $\sin[(\pi-\epsilon')\frac{t}{r}] \geq \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$L(r) \leq 2^{2p+n-3}\epsilon^{\frac{p(n-1)}{2p-1}} L(t) + (2\pi^2)^{2p-1} \left(\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\right)^{p-1} A(2\pi)\epsilon^{\frac{p(n-1)}{2p-1}},$$

pour tout $t \in [\frac{\pi}{2(\pi-\epsilon')}r, \frac{5\pi}{6(\pi-\epsilon')}r]$ (noter que $\frac{5\pi}{6(\pi-\epsilon')}r \leq r$, donc $\frac{t}{r} \leq 1$).

Par le théorème de la moyenne il existe au moins une valeur de $t$ dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2(\pi-\epsilon')}r, \frac{5\pi}{6(\pi-\epsilon')}r]$, telle que $L(t)$ soit majoré par $\frac{3(\pi-\epsilon')}{\pi r}\int_{\frac{\pi r}{2(\pi-\epsilon')}}^{\frac{5\pi r}{6(\pi-\epsilon')}} L(s)\,ds$ que l'on majore par $\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi} L = \frac{3}{\pi}A(2\pi)$. Ceci donne :

$$L(r) \leq \left[\frac{3}{\pi}2^{2p+n-3} + (2\pi^2)^{2p-1}\left(\frac{n-1}{(2p-1)(2p-n)}\right)^{p-1}\right] A(2\pi)\epsilon^{\frac{p(n-1)}{2p-1}}.$$

□

Le lemme précédent nous permet de montrer que le volume relatif des boules de rayon inférieure à $\pi/4$, dont le centre est situé à une distance de $x$ proche de $\frac{3\pi}{4}$, est petit. Combiné au théorème 4.6 qui minore ce volume relatif, on en déduit qu'il n'existe pas de point situé trop loin de $x$. En raffinant cet argument, nous obtenons la généralisation suivante du théorème de Myers :

**Théorème 4.12 (type Myers).** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soit $p$ et $R$ des nombres réels arbitraires tels que $p > n/2$ et $R > 0$. On pose $C'(p,n) = \left[(12)^{2p}(4\pi)^n C(p,n)\right]^{\frac{1}{n-1}}$ (où $C(p,n)$ a été définie au lemme 4.11) et $\alpha(p,n) = \inf\left(\frac{\pi^2}{16C'(p,n)^2}, \frac{1}{(24\pi)^2[4B(p,n)]^{\frac{2p-1}{p}}}\right)$, où $B(p,n)$ a été défini au théorème 4.6. Alors, on a :*

*(i) Si $R \leq 4\pi$, toute variété riemannienne connexe complète $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie $\sup_x \|\left(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\right)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \leq \alpha(p,n)$, est de diamètre majoré par :*

$$\pi\left(1 + C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\right),$$

*En particulier, $M$ est compacte.*

*(ii) Dans le cas où $R \geq 4\pi$, on a les mêmes conclusions sous l'hypothèse plus restrictive $R^2 \sup_x \|\left(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\right)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \leq \alpha(p,n)$.*

**Démonstration.** — Les hypothèses de $(i)$ et $(ii)$ et le choix de $\alpha(p,n)$ impliquent que les hypothèses des lemmes 4.10 $(iv)$ et $(iii)$ de comparaison des hypothèses intégrales sur la courbure de Ricci sont vérifiées. On a donc $\|\rho_1\|_{p,4\pi}\leq 36\epsilon$ et $\|\rho_1\|_{p,2\pi}\leq 36\epsilon$.

Soit $x$ et $y$ deux points situés à une distance égale à $(\pi+\delta)$ sur $M$ (avec $\delta\leq\frac{\pi}{4}$). On a alors $B(y,\delta)\subset B(x,\pi+2\delta)\setminus B(x,\pi)$, et le lemme 4.11 nous donne alors la majoration suivante $\operatorname{Vol}B(y,\delta)\leq\int_{\pi}^{\pi+2\delta}L\leq 2.6^{\frac{2p(n-1)}{2p-1}}C(p,n)\delta\operatorname{Vol}B(x,2\pi)\epsilon^{\frac{p(n-1)}{(2p-1)}}$.
Par ailleurs, d'après le théorème 4.6 (que l'on applique en faisant $k=0$), on obtient :

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}B(y,\delta) &\geq \left(\frac{\delta}{4\pi}\right)^n\left(1-B(p,n)(24\pi)^{\frac{2p}{2p-1}}\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\right)^{2p-1}\operatorname{Vol}B(y,4\pi)\\ &\geq \left(\frac{\delta}{4\pi}\right)^n\frac{\operatorname{Vol}B(x,2\pi)}{2^{2p-1}}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$2.6^{\frac{2p(n-1)}{2p-1}}C(p,n)\delta\operatorname{Vol}B(x,2\pi).\epsilon^{\frac{p(n-1)}{2p-1}}\geq\left(\frac{\delta}{4\pi}\right)^n\frac{\operatorname{Vol}B(x,2\pi)}{2^{2p-1}},$$

ce qui donne $\delta\leq C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}<\frac{\pi}{4}$. Donc la distance entre deux points de $(M^n,g)$ ne peut dépasser $\pi+C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}$, sinon, par connexité de $M$, il serait possible de choisir deux points $x$ et $y$ tels que $d(x,y)=\pi+\delta$, avec $C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}<\delta<\frac{\pi}{4}$, ce qui est exclu par l'inégalité précédente. Ceci donne la majoration du diamètre annoncée. □

**Variante**

Par renormalisation de la métrique, on obtient le même résultat sous l'hypothèse d'un pincement de $\|\rho_k\|_{p,\frac{4\pi}{\sqrt{k}}}$ (pour $k>0$). La borne sur le diamètre est alors changée en :

$$\frac{\pi}{\sqrt{k}}\left[1+C'(p,n)\Big(\frac{\|\rho_k\|_{p,\frac{4\pi}{\sqrt{k}}}}{k}\Big)^{\frac{p}{2p-1}}\right].$$

**Cas de la dimension 2**

Dans le cas $n=2$ et $p=1$, on a le résultat similaire suivant :

**Proposition 4.13.** — *Il existe une constante $\delta_0>0$ telle que pour toute surface riemannienne complète $(S,g)$ vérifiant* $\sup_x\|(K-1)^-\|_{L^1(B(x,4\pi))}\leq\epsilon\leq\frac{\delta_0}{2(1+192\pi+64\pi^4)}$, *on a :*

$$\operatorname{Diam}(S,g)\leq\pi(1+C\epsilon),$$

*où* $C=65\pi(1+\pi^2)$.

**Démonstration.** — En effet, notons $\delta_0$ un réel assez petit pour que $\delta(\ln 4\pi - \ln\delta) \leq \frac{1}{16\pi^2}$ pour tout $\delta \leq \delta_0 < \frac{\pi}{4}$. S'il existe des points $x$ et $y$ de $M$ tels que $d(x,y) \leq \pi + \delta$ (avec $\delta \leq \delta_0$), alors, d'après le lemme 4.7, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol} B(y,\delta) &\geq \operatorname{Vol} B(y,4\pi)\Big(\frac{\delta^2}{16\pi^2} - \delta^2(\ln 4\pi - \ln\delta)\epsilon\Big)\\ &\geq \frac{\delta \operatorname{Vol} B(y,4\pi)}{16\pi^2}(\delta-\epsilon) \geq \frac{\delta \operatorname{Vol} B(x,2\pi)}{16\pi^2}(\delta-\epsilon)\end{aligned}$$

D'autre part, la remarque qui suit le lemme 4.11 montre que, pour tout $r \in [\pi, 2(\pi-\epsilon)]$, $L_x(r) \leq \big(\frac{6}{\pi} + 2\pi^2\big)\operatorname{Vol} B(x,2\pi)\epsilon$. En procédant comme dans la preuve du théorème 4.12, on a $\operatorname{Vol} B(y,\delta) \leq \int_\pi^{\pi+2\delta} L(t)\,dt \leq 2\delta\big(\frac{6}{\pi}+2\pi^2\big)\operatorname{Vol} B(x,2\pi)\epsilon$, d'où $\delta \leq \big[1+32\pi^2\big(\frac{6}{\pi}+2\pi^2\big)\big]\epsilon$.

$\square$

### A propos du revêtement universel

On peut se demander si, sous ces hypothèses, on a ou non compacité du revêtement universel, ou au moins finitude du groupe fondamental (comme c'est le cas en courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$). Toutefois, on voit tout de suite que la propriété d'être de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ passe mal au revêtements riemanniens.

C. Sprouse dans [89] a montré un analogue du théorème 4.12 sous l'hypothèse supplémentaire $\underline{Ric} \geq -(n-1)$. Cette minoration $L^\infty$ de la courbure de Ricci permet de relever aux revêtements riemanniens l'hypothèse de minoration $L^p$ : en effet, Si $R$ est un nombre réel $> 3\pi$, et si $N$ désigne le nombre minimal de domaines fondamentaux de Dirichlet du revêtement $\pi : \tilde{M} \to M$ qui recouvrent une boule $B(\tilde{x},R)$ de $\tilde{M}$, alors on a :

$$\begin{aligned}&\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(\tilde{x},R))}\\ &\qquad\leq \Big(\frac{N\operatorname{Vol} B(x,R)}{\operatorname{Vol} B(\tilde{x},2R)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{\operatorname{Vol} B(\tilde{x},2R)}{\operatorname{Vol} B(\tilde{x},R)}\Big)^{\frac{1}{p}}\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))}\\ &\qquad\leq \Big(\frac{\operatorname{Vol} B(\tilde{x},2R)}{\operatorname{Vol} B(\tilde{x},R)}\Big)^{\frac{1}{p}}\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))}\end{aligned}$$

On notera cependant que, pour montrer que $N\operatorname{Vol} B(x,R) \leq \operatorname{Vol} B(\tilde{x},2R)$, il faut avoir montré au préalable qu'un domaine fondamental ne peut rencontrer à la fois $B(\tilde{x},R)$ et le complémentaire de $B(\tilde{x},2R)$, donc que le diamètre de $(M,g)$ est inférieur à $R/2$ (ce qui découle de notre théorème 4.12). On voit donc que, si le rapport $\frac{\operatorname{Vol} B(\tilde{x},12\pi)}{\operatorname{Vol} B(\tilde{x},6\pi)}$ est universellement borné (ce qui est le cas sous les hypothèses de C. Sprouse) pour au moins un point $\tilde{x}$ de $\tilde{M}$, alors un pincement de $\|\rho_1\|_{p,4\pi}$ permet de conclure à la compacité de $\tilde{M}$ (et donc à la finitude de $\pi_1(M)$).

Remarquons cependant que le fait d'avoir supposé que $\underline{\mathrm{Ric}} \geq -(n-1)$ diminue grandement l'intérêt de l'hypothèse intégrale de courbure, car par inégalité d'interpolation, supposer $\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^{-}\|_p$ petit et $\underline{\mathrm{Ric}} \geq -(n-1)$, pour $p$ arbitrairement grand, est équivalent à supposer $\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^{-}\|_1$ assez petit et $\underline{\mathrm{Ric}} \geq -(n-1)$. Or, le contre-exemple 4.14 ci-dessous montre qu'on n'a pas de borne du diamètre sous la seule hypothèse que $\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^{-}\|_{\frac{n}{2}}$ est petit. L'hypothèse supplémentaire $\underline{\mathrm{Ric}} \geq -(n-1)$ est donc trop brutale puisqu'elle masque la différence essentielle entre le cas $p > \frac{n}{2}$ et le cas $p = \frac{n}{2}$. Les phénomènes analytiques sont donc plus fins sans l'hypothèse $\underline{\mathrm{Ric}} \geq -(n-1)$.

### Autres hypothèses intégrales sur la courbure de Ricci

Remarquer que les théorèmes de comparaison sur le volume de la section précédente et le théorème 4.11 sont en fait valables sous des hypothèses plus générales que celles qui ont été énoncées ici. En effet, soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète et $x_0$ un point fixé de $M$, alors l'hypothèse $\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^{-}\|_{L^p(B(x_0,R_0))} < \epsilon$ est suffisante pour avoir les conclusions des théorèmes 4.6, 4.8, 4.9 et du lemme 4.11, à condition de se restreindre aux boules et aux sphères centrées en $x_0$. Maintenant, si le diamètre de $(M^n, g)$ est supérieur à $\pi + \delta$, alors il existe un couple de points $(x, y)$ de $B(x_0, \pi + 2\delta)$ à distance égale à $\pi + \delta$, où $x \neq x_0$ lorsque la variété est toute entière incluse dans la boule ouverte $B(x_0, \pi + \delta)$. De plus, on a les majorations suivantes :

$$\|\rho_1\|_{L^p(B(x,2\pi))} \leq \Big(\frac{\mathrm{Vol}\, B(x_0, 6\pi)}{\mathrm{Vol}\, B(x_0, \pi/2)}\Big)^{\frac{1}{p}} \|\rho_1\|_{L^p(B(x_0,6\pi))},$$

$$\|\rho_1\|_{L^p(B(y,4\pi))} \leq \Big(\frac{\mathrm{Vol}\, B(x_0, 6\pi)}{\mathrm{Vol}\, B(x_0, 2\pi)}\Big)^{\frac{1}{p}} \|\rho_1\|_{L^p(B(x_0,6\pi))}).$$

On peut donc refaire la preuve du théorème 4.12 sous la seule hypothèse *qu'il existe* un point $x_0$ tel que $\|\rho_1\|_{L^p(B(x_0,6\pi))}$ soit suffisamment (et universellement) petit (qui remplace l'hypothèse précédente $\sup\limits_{x \in M} \|\rho_1\|_{L^p(B(x,6\pi))} < \epsilon$). En affinant la méthode, il semble être possible de conclure sous la seule hypothèse $\|\rho_1\|_{L^p(B(x_0,2\pi))}$ petit pour au moins un point $x_0$. A contrario, l'hypothèse $\|\rho_1\|_{L^p(B(x_0,R))} = 0$ pour au moins un $x_0 \in M$ ne suffirait pas pour conclure à la compacité de $M^n$ lorsque $R < \pi$ (il suffit pour s'en convaincre de faire une somme connexe de $\mathbb{S}^n$ et de $\mathbb{R}^n$). Il est alors naturel de se demander quelle est la borne inférieure des rayons $R_0$ tels que la petitesse de $\|\rho_1\|_{L^p(B(x_0,R_0))}$ pour au moins un point $x_0$ de $M$ suffise pour conclure à la compacité (et à la majoration du diamètre par une valeur proche de $\pi$). On peut aussi se demander si la petitesse de $\|\rho_1\|_{L^p(M)}$ suffit pour conclure, et sinon, quelle est la borne inférieure des exposants $\alpha$ tels qu'un pincement de $R^\alpha \sup_x \|\rho_1\|_{L^p(B(x,R))}$ (pour $R \geq 1$ fixé) suffise pour conclure.

Dans le théorème précédent, il est évident que $\|\rho_1\|_{p,4\pi}$ doit être supposé petit (et pas seulement borné) pour espérer obtenir une borne sur le diamètre de $(M^n, g)$ (ou même la compacité de $M$) ; il suffit pour s'en convaincre de considérer la variété $(\mathbb{R}^n, can)$. Nous donnons maintenant un contre-exemple qui montre que, si $(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1))^-$ est supposé petit en norme $L^{\frac{n}{2}}$, alors on ne peut pas donner de borne a priori sur le diamètre de la variété (sauf dans le cas $n=2$, *cf* la proposition 4.13) :

**Exemple 4.14.** — *Soit $n$ un entier ($n>2$). Pour tout $\epsilon>0$, il existe une variété riemannienne complète $(M^n,g)$ de dimension $n$, de diamètre infini et telle que :*

$$\sup_{x\in M}\frac{1}{\mathrm{Vol}\,B(x,1)}\int_{B(x,1)}[(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1))^-]^{\frac{n}{2}}\leq\epsilon.$$

**Remarque.** — On peut de même construire des variétés compactes de diamètre arbitrairement grand et telles que $\mathrm{Diam}(M)^2\|(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1))^-\|_{L^{n/2}(M)}$ soit arbitrairement petit. Remarquer que, dans les calculs qui suivent, c'est en fait la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de $(\underline{\sigma}-1)^-$ (où $\underline{\sigma}(x)$ désigne la plus petite courbure sectionnelle en $x$) qui est arbitrairement petite.

**Démonstration.** — L'idée est de faire des sommes connexes de sphères reliées par des petits cylindres munis d'une métriques de courbure de Ricci controlée. Pour cela, on considère un cylindre $I\times\mathbb{S}^{n-1}$ muni de la métrique de révolution $g=dt^2+b^2(t)d^2_{\mathbb{S}^{n-1}}$, où $d^2_{\mathbb{S}^{n-1}}$ est la métrique canonique de $\mathbb{S}^{n-1}$ et $b$ est une fonction $C^1$ strictement positive définie par :

$$b(t)=\begin{cases}\eta(t^2+\nu^2)^{\alpha/2}, \text{ sur } [0,\sqrt{\nu}]\\ \eta'\sin(t-\sqrt{\nu}+\theta), \text{ sur } [\sqrt{\nu},\frac{\pi}{2}+\sqrt{\nu}-\theta]\end{cases}$$

où on pose $\alpha=1+\frac{1}{\sqrt{-ln(\nu)}}$, $\eta=\frac{1}{\alpha(\nu+\nu^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}}$, $\eta'=\frac{\sqrt{\alpha^2+\nu(1+\nu)^2}}{\alpha\sqrt{(1+\nu)}}$, $\theta=\tan^{-1}(\frac{\sqrt{\nu}}{\alpha}(1+\nu))$ et où $\nu$ est un petit paramètre. On vérifie facilement qu'avec un tel choix la fonction $b$ est $C^1$. La variété à bord ainsi obtenue correspond à un demi-fuseau dont on a enlevé une petite boule centré sur la singularité conique, et à laquelle on a collé un petit cylindre (ressemblant à un cylindre hyperbolique). En considérant deux exemplaires de cette variété, on voit qu'on peut les recoller de façon $C^\infty$ soit sur le bord des demi-fuseaux (en identifiant les deux exemplaires de l'hypersurface $\{\frac{\pi}{2}+\sqrt{\nu}-\theta\}\times\mathbb{S}^{n-1}$), créant ainsi *ce que nous appellerons un fuseau*, soit sur le bord des petits cylindres. En recollant en chaine une infinité (resp. $2N$) de ces variétés (resp. plus 1 demi-fuseau à chaque extrémité), on obtient une variété (resp. quitte à régulariser la métrique aux deux pôles singuliers situés aux deux extrémités) qui vérifie la condition de petitesse de la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de $(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1))^-$ sur toute boule de rayon 1, quitte à choisir $\nu$ assez petit. En effet, calculons l'intégrale de la partie négative de le courbure sectionnelle de $M$. Si $(X,Y)$ est une famille orthonormée de vecteurs tangents à $\mathbb{S}^{n-1}$, on a $-\sigma(X,Y)=\left(\frac{b'}{b}\right)^2-\frac{1}{b^2}$ donc :

$$-\sigma(X,Y)=\begin{cases}\frac{\alpha^2t^2}{(t^2+\nu^2)^2}-\frac{1}{\eta^2(t^2+\nu^2)^\alpha}=\frac{\alpha^2}{t^2+\nu^2}-\frac{1}{\eta^2(t^2+\nu^2)^\alpha}-\frac{\nu^2\alpha^2}{(t^2+\nu^2)^2}, \text{ si } t\in[0,\sqrt{\nu}]\\ \frac{\eta'^2\cos^2(t-\sqrt{\nu}+\theta)-1}{\eta'^2\sin^2(t-\sqrt{\nu}+\theta)}=\left(1-\frac{1}{\eta'^2}\right)\frac{1}{\sin^2(t-\sqrt{\nu}+\theta)}-1 \text{ si } t\in[\sqrt{\nu},\sqrt{\nu}+\frac{\pi}{2}-\theta].\end{cases}$$

Du choix de $\eta$, du fait que $\frac{\nu^2\alpha^2}{(t^2+\nu^2)^2} \geq 1$ pour tout $t \in [0, \sqrt{\nu}]$, et du fait que $\eta' < 1$ pour tout $\nu < 1$, on déduit que la courbure sectionnelle $\sigma(X, Y)$ est supérieure ou égale à 1 en tout point de la variété. En revanche, si $X$ est un vecteur tangent à $\mathbb{S}^{n-1}$, on a $-\sigma(X, \frac{\partial}{\partial r}) = \frac{b''}{b}$, d'où :

$$-\sigma(X, \frac{\partial}{\partial r}) = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-2)t^2}{(t^2+\nu^2)^2} + \frac{\alpha}{t^2+\nu^2} = \frac{\alpha(2-\alpha)\nu^2}{(t^2+\nu^2)^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2+\nu^2}, \text{ si } t \in [0, \sqrt{\nu}] \\ -1 \text{ si } t \in [\sqrt{\nu}, \sqrt{\nu} + \frac{\pi}{2} - \theta]. \end{cases}$$

Les courbures mixtes prennent des valeurs intermédiaires car on a $\mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}) = 0$ et $R(X, \frac{\partial}{\partial r}, Y, \frac{\partial}{\partial r}) = -\frac{b''}{b} < X, Y >$. On en déduit que $\left(\underline{\sigma} - 1\right)^- = \left(\frac{b''}{b} + 1\right)^+(t)\mathbb{1}_{[0,\sqrt{\nu}]}(t)$, où $\underline{\sigma}(x)$ désigne la plus petite courbure sectionnelle au point $x$, ce qui donne la majoration suivante de la norme $L^{n/2}$ de $|\left(\underline{\sigma} - 1\right)^-|$ :

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,1)} |\left(\underline{\sigma} - 1\right)^-|^{\frac{n}{2}} &\leq C(n)\eta^{n-1}\Big[\nu^n \int_0^{\sqrt{\nu}} (t^2 + \nu^2)^{\frac{\alpha(n-1)}{2} - n} \, dt + \int_0^{\sqrt{\nu}} (t^2 + \nu^2)^{\frac{\alpha(n-1)}{2}} \, dt \\
&\qquad + (\alpha - 1)^{n/2} \int_0^{\sqrt{\nu}} (t^2 + \nu^2)^{\frac{\alpha(n-1)}{2} - \frac{n}{2}} \, dt\Big] \\
&\leq C(n)\eta^{n-1}\Big[\nu^n \int_0^{\sqrt{\nu}} (t + \nu)^{\alpha(n-1)-2n} \, dt + \int_0^{\sqrt{\nu}} (t + \nu)^{\alpha(n-1)} \, dt \\
&\qquad + (\alpha - 1)^{n/2} \int_0^{\sqrt{\nu}} (t + \nu)^{\alpha(n-1)-n} \, dt\Big] \\
&\leq C(n)\eta^{n-1}\Big[\nu^{(\alpha-1)(n-1)} + (\nu + \sqrt{\nu})^{(n-1)\alpha+1} + (\alpha - 1)^{\frac{n}{2}-1}(\nu + \sqrt{\nu})^{(\alpha-1)(n-1)}\Big]
\end{aligned}$$

car, pour tout $\nu$ assez petit, la boule $B(x, 1)$ ne peut contenir qu'au plus 1 petit cylindre hyperbolique. Remarquons aussi que cette boule intercepte une partie non négligeable des fuseaux dont on a fait la somme connexe, on obtient donc :

$$\operatorname{Vol} B(x, 1) \geq C'(n){\eta'}^{n-1}.$$

Comme on sait par ailleurs que :

$$\frac{1}{\operatorname{Vol} B(x, 1)} \int_{B(x,1)} \left[(\underline{\mathrm{Ric}} - (n - 1))^-\right]^{\frac{n}{2}} dv_g \leq \frac{(n - 1)^{\frac{n}{2}}}{\operatorname{Vol} B(x, 1)} \int_{B(x,1)} |\left(\underline{\sigma} - 1\right)^-|^{\frac{n}{2}} dv_g,$$

on en déduit de ce qui précède que :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\operatorname{Vol} B(x, 1)} \int_{B(x,1)} \left[(\underline{\mathrm{Ric}} - (n - 1))^-\right]^{\frac{n}{2}} \\
&\quad \leq C''(n) \left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{n-1} \left(\nu^{(\alpha-1)(n-1)} + (\alpha - 1)^{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\nu} + \nu)^{(\alpha-1)(n-1)} + (\sqrt{\nu} + \nu)^{\alpha(n-1)+1}\right)
\end{aligned}$$

Des valeurs choisies pour $\eta$ et $\eta'$ on déduit :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\operatorname{Vol} B(x,1)} \textstyle\int_{B(x,1)} \left[(\underline{\mathrm{Ric}} - (n - 1))^-\right]^{\frac{n}{2}} &\leq C''(n)(\nu^{\frac{(\alpha-1)(n-1)}{2}} + (\alpha - 1)^{\frac{n}{2}-1} + \nu^{\frac{n}{2}}) \\
&\leq C''(n)\tfrac{1}{(-\ln \nu)^{\frac{n-2}{4}}}
\end{aligned}$$

Pour démontrer l'affirmation de la remarque précédente, il suffit, pour construire $(M, g)$, de coller $2N$ exemplaires de la variété de révolution décrite plus haut et de coller à chaque extrémité des demis-fuseaux (avec leur singularités) on retire alors les deux singularités en lissant les bouts de la variété ainsi obtenue (ce qui ne fait qu'augmenter la plus petite valeur propre de la courbure de Ricci au voisinage des deux points limites). En choisissant $\nu$ suffisamment petit, la norme $\|\rho_1\|_{L^{n/2}(M)}$ est majorée par $\|\rho_1\|_{L^{\frac{n}{2}}(B(x,1))}$, si $x$ est sur le méridien central d'un des petits cylindres "hyperboliques", donc par $(-\ln\nu)^{\frac{2-n}{4}}$. En faisant tendre $N$ vers $+\infty$ moins vite que $(-\ln\nu)^{\frac{n-2}{8}}$, on obtient une suite de variétés $(M_\nu, g_\nu)$ telles que $\mathrm{Diam}(M_\nu)^2\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^{\frac{n}{2}}(M_\nu)}$ tende vers 0 avec $\nu$. D'où le résultat annoncé.

$\square$

### A propos des travaux de P. Petersen et C. Sprouse [79]

Dans [79], P. Petersen et C. Sprouse proposent une démonstration du théorème 4.12 de cette thèse. Leur preuve se décompose en deux parties. La première étape (qui correspond au lemme 3.2 de [79]) consiste à montrer que, lorsque $\|\rho_1\|_{p,4\pi}$ est suffisamment petit, le diamètre de la variété est majoré par une constante proche de $2\pi$. Ils en déduisent alors une majoration des constantes de Sobolev pour les variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ (comme corollaire du théorème 1.2 de S. Gallot). Une technique d'itération d'une inégalité de Sobolev à la De Giorgi-Moser, développée par P. Petersen et G. Wei dans [81], permet alors de démontrer un principe du maximum généralisé pour les fonctions dont le laplacien a une partie positive petite en norme $L^p$. En appliquant ce principe à la fonction excès $e(.) = d(x,.) + d(y,.) - d(x,y)$ associée à un couple de points $(x, y)$ situés à une distance plus grande que $\pi$ dans la variété, ils construisent une fonction $e + u$, définie sur une petite boule $B$ centrée sur le milieu $x_0$ d'un des segments géodésiques minimisants qui joignent $x$ et $y$, positive sur le bord de cette boule, presque sur-harmonique au sens $L^p$ et qui est majorée en $x_0$ par une constante $K$ qui est de l'ordre de $\mathrm{cotan}\big(d(x_0,x)\big) = \mathrm{cotan}\big(d(x_0,y)\big)$. Si la distance de $x$ à $y$ était "beaucoup" plus grande que $\pi$, on en déduirait que le minimum sur $B$ de $(e + u)$ est inférieur à $K$, lui-même nettement négatif, donc nettement inférieur à $\inf\limits_{z\in\partial B}\big(e+u\big)(z)$. Ceci contredirait le principe du maximum généralisé de [81].

En fait, la première étape de leur preuve est cruciale car, sans majoration a priori du diamètre, il est impossible d'obtenir l'inégalité de Sobolev, indispensable au principe du maximum généralisé ; et c'est justement dans cette première étape que se trouve, à notre avis, le défaut de leur preuve[1]. En effet, pour prouver que le diamètre des variétés

[1]on peut toutefois remplacer le lemme 3.2 de [79] par un majorant a priori du diamètre ou un minorant a priori du volume des boules géodésiques de rayon 1, pour retrouver la majoration des constantes de

riemanniennes complètes, de courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$, est majoré par $2\pi$, les auteurs de [79] considèrent de nouveau deux points $x$ et $y$ de la variété situés à une distance supérieure à $2\pi$, et notent toujours $e$ la fonction excès associée. Ils notent encore $x_0$ le milieu d'une géodésique minimisante reliant $x$ et $y$. Leur preuve est alors fondée sur l'affirmation suivante : "Sur toute Boule $B(x_0, r)$ de rayon $r$ suffisamment petit, on a :

$$\triangle e \leq -\frac{n2^{n+5}}{r} + \psi_1,$$

où $\psi_1(z) = \big(h_y(z) - h_k(d(y,z))\big)^+ + \big(h_x(z) - h_k(d(x,z))\big)^+$, où $h_k(t) = \frac{(n-1)\sqrt{k}}{tan(\sqrt{k}t)}$, et où $h_y(z)$ (resp. $h_x(z)$) est la courbure moyenne de la sphère géodésique centrée en $y$ (resp. en $x$) et passant par $z$." (*cf* la discussion qui suit l'inéquation (3.6) p.283 de [79]). Dans cette discussion, nous adoptons les notations de [79], le laplacien utilisé ci-dessus est donc "celui des analystes", à savoir $\triangle e = Tr(Dde)$.

*Preuve du fait que cette affirmation est fausse en général* :

Considérons la sphère $\mathbb{S}^n(R)$ (de rayon $R \geq 2$), identifiée à $]0, \pi R[\times \mathbb{S}^{n-1}$ par les coordonnées sphériques, munie d'une métrique $g$ de révolution qui s'écrit, dans ce système de coordonnées, $(dt)^2 + b(t)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ (les distances $t$ et $\pi R - t$ aux pôles Nord et Sud sont donc les mêmes pour la métrique $g$ et pour la métrique canonique de la sphère de rayon $R$), avec $b(\pi R - t) = b(t)$. Notons $x$ le pôle nord et $y$ le pôle sud. Comme tous les méridiens sont des géodésiques minimisantes de $x$ à $y$, on a $e \equiv 0$. Par ailleurs, $x_0$ étant un point de la sphère équatoriale "$t = \frac{\pi R}{2}$", la parité de $b$ entraîne que $h_x(x_0) = h_y(x_0) = \frac{b'}{b}(\frac{\pi R}{2}) = 0$. Pour que les boules $B(y, \frac{\pi}{\sqrt{k}})$ et $B(x, \frac{\pi}{\sqrt{k}})$ s'intersectent, il faut et il suffit que $k < \frac{4}{R^2}$. Si $r$ est suffisamment petit (en fait si $r < \frac{\pi}{\sqrt{k}} - \frac{\pi R}{2}$), alors $B(x_0, r) \subset B(y, \frac{\pi}{\sqrt{k}}) \cap B(x, \frac{\pi}{\sqrt{k}})$ et on a :

$$\begin{aligned}
\psi_1(x_0) &= (n-1)\sqrt{k}\Big[\frac{-1}{tan(\frac{\pi R\sqrt{k}}{2})} + \frac{-1}{tan(\frac{\pi R\sqrt{k}}{2})}\Big] \\
&= (n-1)\sqrt{k}\frac{2}{tan[\pi(1-\frac{R\sqrt{k}}{2})]} \leq \frac{2(n-1)\sqrt{k}}{tan(r\sqrt{k})} \\
&\leq \frac{2(n-1)}{r}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$-\frac{n2^{n+5}}{r} + \psi_1 \leq \frac{1}{r}\big[-n2^{n+5} + 2(n-1)\big] < 0 = \triangle e$$

Donc, on n'a pas $\triangle e \leq -\frac{n2^{n+5}}{r} + \psi_1$ sur toute la boule $B(x_0, r)$. Remarquer de plus que, si $e = 0$ (ce qui est le cas dès que, comme précédement, $x$ et $y$ sont les extrémités d'une

Sobolev (d'après les travaux de D. Yang [94] et S Gallot [50]), ce qui permet de retrouver la majoration optimale du diamètre sous l'une de ces hypothèses supplémentaires. Mais si ces hypothèses sont naturelles en courbure de Ricci minorée par une constante négative, ce n'est pas le cas en courbure de Ricci positive.

variété de révolution), alors l'égalité (3.3) de leur preuve se réduit à 0=0. Il est donc assez naturel qu'on ne puisse pas tirer d'obstruction forte d'une égalité aussi banale.

Revenons au cas général où $(M^n, g)$ est une variété quelconque, où $x_0$ est le milieu d'un segment géodésique minimisant $[x, y]$ qui joint deux points $x$ et $y$ situés à une distance $D$. Nous allons prouver que, dans ce cas également, il est faux qu'on puisse avoir l'inégalité $\triangle e \leq -\frac{n2^{n+5}}{r} + \psi_1$ vérifiée sur une boule $B(x_0, r)$ de rayon $r$ suffisamment petit. En effet, la géodésique $]x, y[$ étant incluse dans $M \setminus \mathrm{Cut}(x) = \exp_x(U_x)$ et $M \setminus \mathrm{Cut}(y) = \exp_y(U_y)$, et les fonctions $h_x$ et $h_y$ étant $C^\infty$ sur ces deux ouverts, elles sont majorées par des constantes positives $C_x$ et $C_y$ sur une boule fermée $\overline{B(x_0, r_0)}$ (où $r_0$ est positif et ne dépend que de $x$ et $y$). Pour tout $r \leq r_0$, pour pouvoir utiliser les estimées intégrales sur $\psi_1$ données dans [79], il faut que $B(x_0, r)$ soit inclus dans $B(x, \frac{\pi}{\sqrt{k}}) \cap B(y, \frac{\pi}{\sqrt{k}})$, donc il faut choisir $k \leq \frac{4\pi^2}{(D+2r)^2}$. La définition de $\psi_1$ (*cf* ci-dessus) donne alors (puisque $\sqrt{k} r \leq \pi - \frac{D\sqrt{k}}{2}$) :

$$\psi_1(x_0) \leq C_x + C_y - \frac{2(n-1)\sqrt{k}}{\tan\left(\frac{D\sqrt{k}}{2}\right)} \leq C_x + C_y + \frac{2(n-1)\sqrt{k}}{\tan(\sqrt{k} r)} \leq C_x + C_y + \frac{2(n-1)}{r}.$$

Par ailleurs, puisque $e$ est partout non négative et s'annule sur $[x, y]$, on a $\triangle e \geq 0$ en tout point de $[x, y]$. L'inégalité $\triangle e \leq -\frac{n2^{n+5}}{r} + \psi_1$ impliquerait donc, si elle était vérifiée :

$$\frac{n2^{n+5}}{r} \leq C_x + C_y + \frac{2(n-1)}{r},$$

ce qui est faux lorsque $r$ est suffisamment petit.

Plus fondamentalement, la stratégie de la preuve du lemme 3.2 de [79] repose sur deux propriétés que les auteurs affirment (dans un premier temps) être simultanément vérifiées pour ensuite (dans un second temps) les mettre en contradiction avec l'inégalité (3.3) :

(i) le fait que la constante $K(r) = \inf\limits_{x \in B(x_0, r)} \left(-\triangle e + \psi_1\right)$ tende vers $+\infty$ quand $r \to 0$,

(ii) le fait que $\left(\frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x_0,r)} \int_{B(x_0,r)} \psi_1^{2p} dv_g\right)^{\frac{1}{2p}}$ soit borné quand $r \to 0$.

Nous avons discuté ci-dessus l'emploi que les auteurs de [79] font de la propriété $(i)$ (en objectant que ce n'est pas parce que $K(r)$ tend vers $+\infty$ qu'il devient tôt au tard supérieur à $\frac{n2^{n+5}}{r}$). On pourrait discuter également leur preuve de la propriété $(ii)$, qui s'appuie sur leurs estimées de la norme $L^{2p}$ de $\psi_1$ sur les boules $B(x, R)$ et $B(y, R)$, où on doit avoir $\frac{D}{2} + r < R < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. En effet, pour que $K(r)$ soit grand, il faut choisir $k$ de sorte que $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ soit voisin de $\frac{D}{2} + r$, ce qui oblige à considérer des valeurs de $R$ voisines de $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ ; or leurs estimées de la norme $L^{2p}$ de $\psi_1$ explosent exponentiellement vite lorsque $\frac{1}{\pi - R\sqrt{k}}$ tend vers $+\infty$, ce qui ne permet plus d'établir la propriété $(ii)$. Plus précisément, si $k$ et $R$ sont choisis (en fonction de $r$) de telle sorte que la propriété $(i)$ soit vérifiée (i.e. de telle sorte que $R$ et $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ soient voisins de $\frac{D}{2}+r$), alors la propriété $(ii)$ n'est jamais vérifiée, et ce pour aucune valeur de $p \geq \frac{1}{2}$. En effet, puisque $e$ est $C^\infty$ sur $\big(M \setminus \mathrm{Cut}(y)\big) \cap \big(M \setminus \mathrm{Cut}(x)\big)$, $|d(\triangle e)|$ est bornée par une constante $C_{x,y}$ sur la boule fermée $\overline{B(x_0, r_0)}$ (*cf* ci-dessus). Le théorème des accroissements finis et le fait (établi ci-dessus) que $\triangle e \geq 0$ en $x_0$ impliquent que $\triangle e \geq -C_{x,y}.r$ sur tout $B(x_0, r)$. On en déduit que, $\psi_1(z) \geq K(r) - C_{x,y}.r$ en tout point $z \in B(x_0, r)$, donc que, pour tout point $p$, $\left(\frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x_0,r)} \int_{B(x_0,r)} \psi_1^{2p} dv_g\right)^{\frac{1}{2p}} \geq K(r) - C_{x,y}.r$. Il y a donc contradiction entre le fait que le membre de gauche soit borné et le fait que le membre de droite tende vers $+\infty$.

### 4.3.2 comparaison des volumes

La majoration du diamètre démontrée dans le paragraphe précédent va nous permettre d'obtenir des théorèmes de comparaison, sur le volume des boules et des sphères géodésiques, qui sont optimaux lorsque $k > 0$ et qui (à la différence des résultats correspondants de [79], du lemme 4.5 et des théorèmes 4.6, 4.8 et 4.9) sont valables sans restriction sur les valeurs des rayons considérés. Nous commençons par un théorème de type Bishop sur le volume des sphères et des boules :

**Théorème 4.15.** — *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 4.12, on a :*

*(i) pour tout couple de réels $(t, r)$, tels que $t \leq r \leq \frac{\pi}{\sqrt{k'}}$, où $k' = \frac{\left(1 - \frac{\epsilon^{\frac{p}{4(2p-1)}}}{\pi}\right)^2}{\left(1 + C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\right)^2}$ :*

$$\left(\frac{L(r)}{L_{k'}(r)}\right)^{\frac{1}{2p-1}} - \left(\frac{L(t)}{L_{k'}(t)}\right)^{\frac{1}{2p-1}} \leq C_2(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}} (r-t)^{\frac{2p-n}{2p-1}},$$

*où $C_2(p,n)$ est une constante universelle calculable (cf ci-dessous).*

*(ii) Pour tout $r$ :*

$$L(r) \leq \left(1 + C_2'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}}\right)^{2p-1} L_{k''}(r),$$

*où $k'' = \left(1 - \left(\frac{1}{\pi} + C'(p,n)\right)\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}}\right)^2$, où $C_2'(p,n)$ est une constante universelle calculable (cf ci-dessous) et où $C'(p,n)$ est la constante définie au théorème 4.12.*

**Remarque 1.** — Les majorations $(i)$ et $(ii)$ ne permettent pas de comparer le volume des sphères-géodésiques des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ avec les volumes des sphères-géodésiques correspondantes de la sphère canonique de courbure sectionnelle égale à 1. Cela provient du fait que le diamètre $D$ peut-être, dans certains cas, légérement plus grand que $\pi$ (*cf* le théorème 4.12) et que, dans ces cas, pour $r = \pi$, on a $L(r) > 0$, $L_{k'}(r) > 0$ et $L_1(r) = 0$, d'où $\frac{L(r)}{L_1(r)} = +\infty$.

**Remarque 2.** — L'hypothèse $r \leq \frac{\pi}{\sqrt{k'}}$, faite dans le théorème 4.15 $(i)$, n'est pas restrictive : en fait, elle n'écarte aucune sphère-géodésique (non vide) de la variété $(M^n, g)$ du domaine d'application de ce théorème. En effet, le théorème 4.12 implique que, pour toute boule $B(x,r)$ de $(M^n, g)$ qui est différente de $M$ entier, on a $r \le \mathrm{Diam}(M,g) < \frac{\pi}{\sqrt{k'}}$.

**Démonstration.** — D'après le théorème 4.12, sous nos hypothèses, les variétés vérifient $\mathrm{Diam}(M) \le \pi\big(1 + C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\big)$ où la constante $C'(p,n)$ est précisée dans l'énoncé du théorème 4.12. Posons alors $k' = \frac{(1-\frac{\epsilon^{\frac{p}{4(2p-1)}}}{\pi})^2}{(1+C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}})^2} \le 1$. On a alors $\|\rho_{k'}\|_{p,R} \le \|\rho_1\|_{p,R}$, et donc $\big(\frac{\pi}{\sqrt{k'}}\big)^2 \|\rho_{k'}\|_{p,\frac{\pi}{\sqrt{k'}}} \le 4(4\pi)^2\big(\frac{1}{4\sqrt{k'}}\big)^{\frac{2p-n}{p}} \|\rho_{k'}\|_{p,4\pi} \le (48\pi)^2\big(\frac{1}{4\sqrt{k'}}\big)^{\frac{2p-n}{p}}\epsilon$, d'après le lemme 4.10 de comparaison des hypothèses intégrales, soit $\|\rho_{k'}\|^{\frac{p}{2p-1}}_{p,\frac{\pi}{\sqrt{k'}}} \le (48)^{\frac{2p}{2p-1}}(\sqrt{k'})^{\frac{n}{2p-1}}\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}$. D'après le lemme 4.5, on a alors :

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{L(r)}{L_{k'}(r)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} - \Big(\frac{L(t)}{L_{k'}(t)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \\
&\qquad \le \frac{(48)^{\frac{2p}{2p-1}}}{(2p-n)^{\frac{p-1}{2p-1}}}(\sqrt{k'})^{\frac{n}{2p-1}}\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\Big(A\big(\frac{\pi}{\sqrt{k'}}\big)\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \\
&\qquad\qquad \times\Big(\frac{\sqrt{k'}^{n-1}}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^{n-1}}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \times \left|\begin{array}{ll} \int_t^r \frac{ds}{\sin^{\frac{n-1}{2p-1}}(\sqrt{k'}s)} & \text{si } t \le r \le \frac{\pi}{2\sqrt{k'}} \\ \frac{\pi^2(r-t)}{4(\pi-\sqrt{k'}r)(\pi-\sqrt{k'}t)} & \text{si } \frac{\pi}{2\sqrt{k'}} \le t \le r \le \frac{\pi}{\sqrt{k'}} \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

De plus, d'après le lemme 4.10, on a $\frac{\pi^2}{k'}\|\rho_0\|_{p,\frac{\pi}{\sqrt{k'}}} \le (48\pi)^2\epsilon$. Quitte à réduire $\alpha(p,n)$, on peut donc, d'après le théorème 4.8, supposer que le volume $A(\frac{\pi}{\sqrt{k'}})$ est majoré par $(1 + 192B(p,n)\pi\sqrt{\epsilon})^{2p-1}\,\mathrm{Vol}\,\mathbb{B}^n\big(\frac{\pi}{\sqrt{k'}}\big)^n$. Enfin, on a la minoration $\sin(\sqrt{k'}s) \ge \Big(\frac{2\sqrt{k'}s}{\pi}\Big)$ pour $s \le \frac{\pi}{2\sqrt{k'}}$, d'où la majoration :

$$
\begin{aligned}
\int_t^r \frac{ds}{\sin^{\frac{n-1}{2p-1}}(\sqrt{k'}s)} &\le \Big(\frac{\pi}{2\sqrt{k'}}\Big)^{\frac{n-1}{2p-1}}\frac{2p-1}{2p-n}\big(r^{\frac{2p-n}{2p-1}} - t^{\frac{2p-n}{2p-1}}\big) \\
&\le \Big(\frac{\pi}{2\sqrt{k'}}\Big)^{\frac{n-1}{2p-1}}\frac{2p-1}{2p-n}(r-t)^{\frac{2p-n}{2p-1}}
\end{aligned}
$$

En combinant les inégalités obtenues, on obtient alors :

$$
\left.\begin{aligned}
&\Big(\tfrac{L(r)}{L_{k'}(r)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} - \Big(\tfrac{L(t)}{L_{k'}(t)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \\
&\qquad \le C_2'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}} \times \left|\begin{array}{ll} (r-t)^{\frac{2p-n}{2p-1}} & \text{si } t \le r \le \frac{\pi}{2\sqrt{k'}} \\ (\sqrt{k'})^{\frac{n-1}{2p-1}}\frac{(r-t)}{(\pi-\sqrt{k'}r)(\pi-\sqrt{k'}t)} & \text{si } \frac{\pi}{2\sqrt{k'}} \le t \le r \le \frac{\pi}{\sqrt{k'}} \end{array}\right. \\
&\qquad \le C_2'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\frac{(r-t)^{\frac{2p-n}{2p-1}}+(r-t)}{(\pi-\sqrt{k'}r)(\pi-\sqrt{k'}t)}
\end{aligned}\right\} (*)
$$

Notons que la dernière inégalité est également valable lorsque $t \le \frac{\pi}{2\sqrt{k'}} \le r$ (à un facteur $\frac{\pi^2}{2}$ près) ; en effet, on majore dans ce cas la différence $\big(\frac{L(r)}{L_{k'}(r)}\big)^{\frac{1}{2p-1}} - \big(\frac{L(t)}{L_{k'}(t)}\big)^{\frac{1}{2p-1}}$ par la somme $\big(\frac{L(r)}{L_{k'}(r)}\big)^{\frac{1}{2p-1}} - \big(\frac{L(\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}{L_{k'}(\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}\big)^{\frac{1}{2p-1}} + \big(\frac{L(\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}{L_{k'}(\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}\big)^{\frac{1}{2p-1}} - \big(\frac{L(t)}{L_{k'}(t)}\big)^{\frac{1}{2p-1}}$. Remarquons alors que, d'une part, $L(s) = 0$ pour $s$ plus grand que $\pi(1+C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}})$ et que d'autre part, avec le choix fait sur $k'$, on a $\frac{1}{(\pi-\sqrt{k'}r)(\pi-\sqrt{k'}t)} \leq \epsilon^{\frac{-p}{2(2p-1)}}$ pour tout couple $r,t \leq \pi(1+C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}})$. On déduit que, si $t \leq r \leq \frac{\pi}{\sqrt{k'}}$, on a :

$$\Big(\frac{L(r)}{L_{k'}(r)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} - \Big(\frac{L(t)}{L_{k'}(t)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \leq C_2''(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}}\Big(\big[(r-t)\big]^{\frac{2p-n}{2p-1}} + (r-t)\Big).$$

Dont on déduit la première affirmation. La seconde affirmation se démontre en faisant tendre $t$ vers 0 dans l'équation $(*)$ ; comme $\frac{L(t)}{L_{k'}(t)} \to 1$ et comme $(\pi - \sqrt{k'}t) \to \pi$, on obtient :

$$\Big(\frac{L(r)}{L_{k'}(r)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \leq 1 + C_2'(p,n)\frac{\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}}{(\pi-\sqrt{k'}r)}.$$

Si on choisit maintenant $k' = \Big(\frac{1-\frac{1}{\pi}\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}}}{1+C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}}\Big)^2$, le théorème 4.12 donne :

$$\pi - \sqrt{k'}r \geq \pi - \sqrt{k'}\,\mathrm{Diam}(M) \geq \epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}},$$

d'où $\Big(\frac{L(r)}{L_{k'}(r)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}} \leq 1+C_2'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}}$. Cette inégalité reste valable, en vertu de la concavité de la fonction *sinus*, si on remplace $k'$ par n'importe quelle valeur $k''$ inférieure à $k'$. On peut par exemple choisir $k''$ égale à $\big[1-\big(\frac{1}{\pi}+C'(p,n)\big)\epsilon^{\frac{p}{2(2p-1)}}\big]^2$, ce qui prouve l'inégalité $(ii)$ du théorème 4.15

□

On va enfin établir un analogue "optimal" (dans le même sens que pour le théorème 4.15) du théorème de Bishop-Gromov dans le cas où $k>0$ :

**Théorème 4.16.** — *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.12, on a, pour tout point $x$ de $M$ :*

$$\frac{\mathrm{Vol}\,B(x,r)}{\mathrm{Vol}\,B(x,R)} \geq \Big[\Big(1-C_1(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4p-n-1}}\Big)^+\Big]^{2p-1}\Big[\frac{A_1(r)}{A_1(R)}\Big],$$

*pour tout couple de réels $0 \leq r \leq R$, et où $C_1(p,n)$ est une constante universelle calculable (voir la preuve). En particulier, si $\epsilon < \frac{1}{C_1(p,n)^{\frac{4p-n-1}{p}}}$, on a :*

$$\mathrm{Vol}\,B(x,R) \leq \Big(\frac{1}{1-C_1(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4p-n-1}}}\Big)^{2p-1} A_1(R).$$

*et*

$$\mathrm{Vol}\,(M^n,g) \leq \Big(\frac{1}{1-C_1(p,n)\epsilon^{\frac{p}{4p-n-1}}}\Big)^{2p-1}\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n.$$

**Démonstration.** — On pose cette fois-ci $k' = \frac{(1-\frac{\epsilon^\alpha}{\pi})^2}{(1+C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}})^2} \leq 1$, où $\alpha = \frac{p}{4p-n-1}$. Soit $r \geq \frac{\pi}{2\sqrt{k'}}$ et $t\in[0,r]$. D'après l'inégalité (i) du lemme 4.5 (dans laquelle on fait tendre $m$

vers $+\infty$) et l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{L(r)}{L_{k'}(r)}-\frac{L(t)}{L_{k'}(t)}\\
&\quad\leq\frac{(\sqrt{k'})^{n-1}}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}}\int_t^r\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\psi_{k'}\frac{\theta}{\sin^{n-1}(\sqrt{k'}u)}\,du\\
&\quad\leq\frac{(\sqrt{k'})^{n-1}}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}}\Bigg[\int_{\min(t,\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}^{\frac{\pi}{2\sqrt{k'}}}\Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\psi_{k'}^{2p-1}\theta\Big)^{\frac{1}{2p-1}}\frac{(L(u))^{1-\frac{1}{2p-1}}}{\sin^{(n-1)}(\sqrt{k'}u)}\,du\\
&\qquad+\int_{\max(t,\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}^{r}\Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sin^{4p-(n+1)}(\sqrt{k'}u)\psi_{k'}^{2p-1}\theta\Big)^{\frac{1}{2p-1}}\frac{(L(u))^{1-\frac{1}{2p-1}}}{\sin^{n-1+\frac{4p-n-1}{2p-1}}(\sqrt{k'}u)}\,du\Bigg]
\end{aligned}$$

Le lemme fondamental de comparaison 4.3 et de nouveau l'inégalité de Hölder nous donnent alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{L(r)}{L_{k'}(r)}-\frac{L(t)}{L_{k'}(t)}\\
&\quad\leq\frac{(\sqrt{k'})^{n-1}}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}}\frac{2p-1}{(2p-n)^{\frac{p-1}{2p-1}}}\Big(\int_{B(x_0,\frac{\pi}{\sqrt{k'}})}\rho_{k'}^{p}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}\Bigg[\Big(\int_{\min(t,\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}^{\frac{\pi}{2\sqrt{k'}}}\frac{L(u)^{1-\frac{1}{2p-1}}}{\sin^{n-1}(\sqrt{k'}u)}\,du\Big)\\
&\qquad+\Big(\int_{\max(t,\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}^{r}\frac{L(u)^{1-\frac{1}{2p-1}}}{\sin^{n-1+\frac{4p-n-1}{2p-1}}(\sqrt{k'}u)}\,du\Big)^{\frac{1}{2p-1}}\Bigg]\\
&\quad\leq C(p,n)\Big(\int_{B(x_0,\frac{\pi}{\sqrt{k'}})}\rho_{k'}^{p}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}A(r)^{1-\frac{1}{2p-1}}\Bigg[\Big(\int_{\min(t,\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}^{\frac{\pi}{2\sqrt{k'}}}\frac{1}{L_{k'}^{2p-1}(u)}\,du\Big)^{\frac{1}{2p-1}}\\
&\qquad+\Big(\int_{\max(t,\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}^{r}\frac{1}{L_{k'}^{2p-1}(u)\sin^{4p-n-1}(\sqrt{k'}u)}\,du\Big)^{\frac{1}{2p-1}}\Bigg],
\end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du théorème précédent, le lemme de comparaison des hypothèses intégrales 4.10 nous donne $\|\rho_{k'}\|_{p,\frac{\pi}{\sqrt{k'}}}\leq 4^{\frac{p+n}{p}}k'^{\frac{n}{2p}}36\epsilon$ car, sous les hypothèses du théorème 4.12, $\|\rho_{k'}\|_{p,4\pi}\leq 36\epsilon$. En multipliant l'inégalité précédente par $L_{k'}(r)L_{k'}(t)$, et en utilisant la croissance de $L_{k'}$ sur $[0,\frac{\pi}{2\sqrt{k'}}]$, et sa décroissance sur $[\frac{\pi}{2\sqrt{k'}},\frac{\pi}{\sqrt{k'}}]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&L(r)L_{k'}(t)-L_{k'}(r)L(t)\\
&\leq C_3(p,n)(\sqrt{k'})^{\frac{n}{2p-1}}\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}A(r)^{1-\frac{1}{2p-1}}\Big(\frac{\pi}{2\sqrt{k'}}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}\left[L_{k'}(r)+\frac{L_{k'}(t)}{\sin^{\frac{4p-n-1}{2p-1}}(\sqrt{k'}r)}\right]\Big(A(\frac{\pi}{\sqrt{k'}})\Big)^{\frac{1}{2p-1}}.
\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité par rapport à la variable $t$, entre 0 et $r$ (voir la preuve du théorème 4.6), on trouve :

$$\begin{aligned}
&L(r)A_{k'}(r)-L_{k'}(r)A(r)\\
&\qquad\leq C_3'(p,n)(\sqrt{k'})^{\frac{n-1}{2p-1}}\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}A(r)^{1-\frac{1}{2p-1}}\left[rL_{k'}(r)+\frac{A_{k'}(r)}{\sin^{\frac{4p-n-1}{2p-1}}(\sqrt{k'}r)}\right]\Big(A(\frac{\pi}{\sqrt{k'}})\Big)^{\frac{1}{2p-1}}.
\end{aligned}$$

Dont on déduit l'inéquation différentielle (toujours en utilisant le lemme 4.2, comme dans les preuves de 4.5 ou de 4.6) :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{A}{A_{k'}}\right)(r)$$
$$\leq C_3(p,n)(\sqrt{k'})^{\frac{n-1}{2p-1}}\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\left(\frac{A}{A_{k'}}\right)^{1-\frac{1}{2p-1}}(r)\left[\frac{rL_{k'}(r)}{A_{k'}(r)}+\frac{1}{\sin^{\frac{4p-n-1}{2p-1}}(\sqrt{k'}r)}\right]\Big(\frac{A(\frac{\pi}{\sqrt{k'}})}{A_{k'}(r)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}.$$

On en déduit que :

$$\frac{d}{dr}\left[\Big(\frac{A}{A_{k'}}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}\right]\leq C_3'(p,n)(\sqrt{k'})^{\frac{n-1}{2p-1}}\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\left[\frac{rL_{k'}(r)}{A_{k'}(r)}+\frac{1}{\sin^{\frac{4p-n-1}{2p-1}}(\sqrt{k'}r)}\right]\Big(\frac{A(\frac{\pi}{\sqrt{k'}})}{A_{k'}(r)}\Big)^{\frac{1}{2p-1}}.$$

Or, pour tout nombre de réel $s$ de l'intervalle $[\frac{\pi}{2\sqrt{k'}},\frac{\pi}{\sqrt{k'}}]$, on a :

$$\frac{sL_{k'}(s)}{A_{k'}(s)}\leq\pi\frac{L_1(\frac{\pi}{2})}{A_1(\frac{\pi}{2})}\qquad et \qquad \frac{1}{\sin^{\frac{4p-n-1}{2p-1}}(\sqrt{k'}s)}\leq\Big(\frac{\pi}{2(\pi-\sqrt{k'}s)}\Big)^{\frac{4p-n-1}{2p-1}}$$

Et donc, pour tout couple de réels $r\leq R$ de l'intervalle $[\frac{\pi}{2\sqrt{k'}},\frac{\pi}{\sqrt{k'}}]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_r^R\frac{ds}{\sin^{\frac{4p-n-1}{2p-1}}(\sqrt{k'}s)} &\leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{\frac{4p-n-1}{2p-1}}\int_r^R\frac{ds}{(\pi-\sqrt{k'}s)^{\frac{4p-n-1}{2p-1}}}\\ &\leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{\frac{4p-n-1}{2p-1}}\frac{(2p-1)}{(2p-n)}\frac{1}{\sqrt{k'}}\Big(\frac{1}{\pi-\sqrt{k'}R}\Big)^{\frac{2p-n}{2p-1}}\end{aligned}$$

On déduit de cette estimée qu'il existe une constante universelle $C_3(p,n)$ telle qu'en intégrant l'inéquation différentielle précédente, entre $r$ et $R$ (où $\frac{\pi}{2\sqrt{k'}}\leq r\leq R\leq\frac{\pi}{\sqrt{k'}}$), on ait :

$$\left[\frac{A(R)}{A_{k'}(R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}}-\left[\frac{A(r)}{A_{k'}(r)}\right]^{\frac{1}{2p-1}}$$
$$\leq(\sqrt{k'})^{\frac{n-2p}{2p-1}}C''_3(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\Big(1+\frac{1}{(\pi-\sqrt{k'}R)^{\frac{2p-n}{2p-1}}}\Big)\left[\frac{A(\frac{\pi}{\sqrt{k'}})}{A_{k'}(r)}\right]^{\frac{1}{2p-1}}$$

Et donc :

$$\left[\frac{A(R)}{A_{k'}(R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}}\left[1-(\sqrt{k'})^{\frac{n-2p}{2p-1}}C''_3(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\Big(1+\frac{1}{(\pi-\sqrt{k'}R)^{\frac{2p-n}{2p-1}}}\Big)\frac{A_{k'}(R)A(\frac{\pi}{\sqrt{k'}})}{A_{k'}(r)A(R)}\right]$$
$$\leq\left[\frac{A(r)}{A_{k'}(r)}\right]^{\frac{1}{2p-1}}$$

De plus, d'après le théorème 4.6 $(ii)$ (que l'on applique en donnant à $R_0$ la valeur $2\pi$) et la concavité de la fonction sinus, on a :

$$\frac{A_{k'}(R)A(\frac{\pi}{\sqrt{k'}})}{A_{k'}(r)A(R)}\leq\frac{R^nA(\frac{\pi}{\sqrt{k'}})}{r^nA(R)}\leq(\frac{R}{r})^n2^{2p-1}\frac{A_0(\frac{\pi}{\sqrt{k'}})}{A_0(R)}\leq 2^{n+2p-1}$$

Enfin, sous nos hypothèses, et d'après le théorème 4.12, le diamètre de la variété est inférieur à $\pi(1+C'(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}) = \frac{\pi-\epsilon^\alpha}{\sqrt{k'}}$, on a $\pi - \sqrt{k'}R \geq \epsilon^\alpha$ pour tout rayon $R \leq \mathrm{Diam}(M)$. On en déduit que, pour tout couple $(r,R)$ de nombres réels, tels que $\frac{\pi}{2\sqrt{k'}} \leq r \leq R \leq \mathrm{Diam}(M)$, on a :

$$\left[\frac{A(R)}{A_{k'}(R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}} \left(1 - C_4(p,n)\epsilon^{\frac{p-\alpha(2p-n)}{2p-1}}\right) \leq \left[\frac{A(r)}{A_{k'}(r)}\right]^{\frac{1}{2p-1}}.$$

D'autre part, en utilisant le lemme 4.10 et le théorème 4.6, on obtient que, pour $r \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k'}}$, on a :

$$\left[\frac{A(\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}{A_{k'}(\frac{\pi}{2\sqrt{k'}})}\right]^{\frac{1}{2p-1}} \left(1 - C_5(p,n)\epsilon^{\frac{p}{2p-1}}\right) \leq \left[\frac{A(r)}{A_{k'}(r)}\right]^{\frac{1}{2p-1}}.$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient pour tout couple $(r,R)$ de nombres réels, $0 < r \leq R \leq \mathrm{Diam}(M)$ :

$$\left[\frac{A_{k'}(r)}{A(r)}\right]^{\frac{1}{2p-1}} \left(1 - C_6(p,n)\epsilon^{\frac{p-\alpha(2p-n)}{2p-1}}\right) \leq \left[\frac{A_{k'}(R)}{A(R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}}.$$

La fonction $A$ étant constante au delà du diamètre, on obtient pour tout $r \leq R$ :

$$\left[\frac{A_{k'}(r)}{A_{k'}(R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}} \left(1 - C_6(p,n)\epsilon^{\frac{p-\alpha(2p-n)}{2p-1}}\right) \leq \left[\frac{A(r)}{A(R)}\right]^{\frac{1}{2p-1}}.$$

On conclut en remarquant que, puisque $k' \leq 1$, on a :

$$\frac{A_{k'}(r)}{A_{k'}(R)} = \frac{A_1(\sqrt{k'}r)}{A_1(\sqrt{k'}R)} \geq \frac{A_1(\sqrt{k'}r)}{A_1(R)} \geq (k')^{\frac{n}{2}} \frac{A_1(r)}{A_1(R)},$$

et en posant $C_1 = C_6 + \frac{2}{\pi} + 2C'(p,n)$. Ceci prouve la première inégalité du théorème 4.16. La majoration de $\mathrm{Vol}\, B(x,R)$ s'obtient en faisant tendre $r$ vers 0 dans la première inégalité du théorème 4.16 ; ceci prouve la seconde inégalité du théorème 4.16. La majoration du volume de $(M^n,g)$ s'obtient en faisant $R = \mathrm{Diam}(M^n,g)$ dans la seconde inégalité du théorème 4.16.

□

### 4.3.3 Constantes de Sobolev

S. Gallot ([50]) (resp. D. Yang ([94])) a donné des majorants universels des constantes de Sobolev $S_q$ et $S'_q$ (*cf* le paragraphe 1.3.2 pour la définition de ces constantes) sur la classe des variétés riemanniennes complètes dont la courbure de Ricci admet un pincement intégral petit en dessous d'une constante négative donnée (l'hypothèse exacte est : $\frac{1}{|k|}\|\rho_k\|_{L^p(M)} \leq \alpha(p,n)$ lorsque $k < 0$ et $\|\rho_0\|_{L^p(M)} \leq \alpha(p,n)$ lorsque $k = 0$), et dont le diamètre est majoré (resp. et dont le volume des boules de rayon 1 est minoré) par une constante fixée.

Remarquer que, dans notre cas, si la courbure de Ricci est presque supérieure à $(n-1)$, alors elle est presque supérieure à 0, de plus le diamètre est automatiquement majoré par le théorème 4.12. On déduit donc des résultats de S. Gallot (*cf* le théorème 1.2) la majoration suivante des constantes de Sobolev en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ :

**Théorème 4.17.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $R$, $p$ et $q$ des nombres réels tels que $R>0$, $p>n/2$ et $q>n$. Il existe des constantes universelles $C(p,q,n)$ et $\alpha(p,q,n)>0$ telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n,g)$ de dimension $n$, on a :*

*Si $R \leq 4\pi$ et $\|\big(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1)\big)^{-}\|_{L^p(B(x,R))} \leq \alpha(p,q,n)$, pour tout point $x$ de $M$, alors*

*(i) toute fonction $u$ de $H^{1,2}(M)$ vérifie :*

$$\|u\|_{\frac{2q}{q-2}} \leq \mathrm{Diam}(M)C(p,q,n)\|du\|_2+\|u\|_2$$

*(ii) toute fonction $u$ de $H^{1,q}(M)$ vérifie :*

$$\sup u-\inf u \leq \mathrm{Diam}(M)C(p,q,n)\|du\|_q.$$

*Dans le cas $R \geq 4\pi$, les mêmes conclusions sont valables sous l'hypothèse plus restrictive $R^2\|\big(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1)\big)^{-}\|_{L^p(B(x,R))} \leq \alpha(p,q,n)$ pour tout point $x$ de $M$, ou encore, quitte à réduire la constante universelle $\alpha(p,q,n)$, sous l'hypothèse qu'il existe une point $x_0$ de $M$ tel que $\|\big(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1)\big)^{-}\|_{L^p(B(x_0,6\pi))} \leq \alpha(p,q,n)$.*

*Remarquons que, en vertu du théorème 4.12,* $\mathrm{Diam}(M) \leq 2\pi$, *et donc que les constantes qui interviennent dans ces deux inégalités de Sobolev sont majorées indépendamment de $(M^n,g)$.*

**Remarque 1.** — Ce théorème sera très utilisé dans le chapitre suivant, car, en nous donnant des majorants des constantes de Sobolev, il rend possible l'application, aux variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$, des résultats de la première partie de cette thèse sur le comportement des combinaisons linéaires de sections propres associées à des petites valeurs propres d'opérateurs (laplacien+potentiel) de potentiel presque positif.

**Remarque 2.** — En fait, des travaux de S. Gallot dans [50] et de notre théorème 4.12, nous déduisons, sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 4.17, une minoration de la constante isopérimétrique $\inf_\Omega \frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega}{\min(\mathrm{Vol}\,\Omega,\mathrm{Vol}\,M\setminus\Omega)^{1-\frac{1}{p}}(\mathrm{Vol}\,M)^{\frac{1}{p}}}$. Toutefois cette minoration n'est pas optimale dans le cas $k>0$. Pour obtenir un résultat du même type, qui soit à la fois plus fort et optimal en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, on peut adapter la méthode de [18] et ainsi obtenir une minoration du profil isopérimétrique des variétés de courbure de Ricci presque minorée par $(n-1)$ par le profil isopérimétrique d'une sphère canonique (de rayon proche de 1). Cette méthode utilise un théorème de comparaison sur le volume des voisinages tubulaire des hypersurfaces de courbure moyenne minorée à la Heintze-Karcher. Ce théorème de comparaison peut se redémontrer dans notre cadre dans le même esprit que ce qui a été fait pour les théorèmes de comparaisons sur le volume dans la section précédente. La démonstration de [79] d'un théorème de comparaison à la Heintze-Karcher qui soit optimal en courbure presque minorée par $(n-1)$ fonctionne une fois démontré le théorème 4.12 (la preuve est basée sur un principe du maximum généralisé qui nécessite le théorème 4.17 de cette thèse pour démontrer le résultat annoncé).

### 4.3.4 minoration du $\lambda_1$

En utilisant les majorations universelles des inégalités de Sobolev données par le résultat précédent, on obtient la généralisation suivante de l'inégalité de Lichnerowicz. Ce théorème est un corollaire du théorème 5.2 de [79] (qui est plus général, mais n'est valable que si l'on admet notre théorème 4.12). Toutefois la preuve proposée ici est plus simple ; en effet, plutôt que d'adapter la preuve de [18] comme dans [79], nous adaptons la preuve de Lichnerowicz :

**Théorème 4.18.** — *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 4.12, on a :*

$$\lambda_1(M^n, g) \geq n\big(1 - C_2(p,n)\epsilon\big),$$

*où $\lambda_1(M^n, g)$ désigne la première valeur propre non nulle de $(M^n, g)$, et où $C_2(p,n)$ est une constante universelle.*

**Démonstration.** — Soit $f$ une fonction propre du laplacien de $M$ associée à la première valeur propre non nulle (notée $\lambda$) et de norme $L^2$ égale à 1. La formule de Bochner sur les 1-formes de $M$ nous donne :

$$\begin{aligned} g(\triangle df, df) &= g(\overline{\triangle} df, df) + \operatorname{Ric}(df, df) \\ &= \tfrac{1}{2}\triangle(|df|^2) + |Ddf|^2 + (\operatorname{Ric} - (n-1))(df, df) + (n-1)|df|^2. \end{aligned}$$

En intégrant cette égalité sur la variété $M$, on obtient :

$$\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M g(\triangle df, df) = \|Ddf\|_2^2 + \frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M (\operatorname{Ric} - (n-1))(df, df) + (n-1)\|df\|_2^2$$

En utilisant les égalités $\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M g(\triangle df, df) = \lambda^2$ et $(n-1)\|df\|_2^2 = (n-1)\lambda$, et l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\lambda^2 \geq \|Ddf\|_2^2 - \|\big(\underline{\operatorname{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_p \|df\|^2_{\frac{2p}{p-1}} + (n-1)\lambda$$

Or, d'après le théorème 4.12, le diamètre est plus petit que $2\pi$ sous nos hypothèses, donc, d'après le lemme 4.10, on a :

$$\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_p \leq \|\rho_1\|_{p,4\pi}$$

de plus, d'après le théorème 4.17 (que l'on applique en faisant $q = 2p$), il existe une constante $C(p,n)$ telle qu'on ait $\|u\|_{\frac{2p}{p-1}} \leq \mathrm{Diam}(M)C(p,n)\|du\|_2 + \|u\|_2$ pour toute fonction $u$ de $H^{1,2}(M)$. En appliquant cette inégalité à $|df|$ on obtient :

$$\|df\|^2_{\frac{2p}{p-1}} \leq 2\,\mathrm{Diam}(M)^2 C(p,n)^2 \|Ddf\|_2^2 + 2\|df\|_2^2$$

On déduit de ceci et de la majoration du diamètre donnée par le théorème 4.12 l'inégalité :

$$\lambda^2 \geq \big(1 - 4\pi^2 C(p,n)^2 \|\rho_1\|_{p,4\pi}\big)\|Ddf\|_2^2 + (n{-}1 - 2\|\rho_1\|_{p,4\pi})\lambda$$

Enfin, en remarquant que les 2-tenseurs symétriques $Ddf + \frac{\triangle f}{n} g$ et $\frac{\triangle f}{n} g$ sont orthogonaux, on déduit du théorème de Pythagore l'inégalité $\|Ddf\|_2^2 \geq \|\frac{\triangle f}{n} g\|_2^2 \geq \frac{\lambda^2}{n}$. D'où l'on tire :

$$\lambda \geq n\Big[\frac{(n-1) - 2\|\rho_1\|_{p,4\pi}}{(n-1) + 4\pi^2 C(p,n)^2 \|\rho_1\|_{p,4\pi}}\Big] \geq n\big(1 - C_2(p,n)\epsilon\big)$$

□

### 4.3.5 Annulation du premier groupe de cohomologie

En remplaçant dans la preuve du théorème précédent $df$ par n'importe quelle 1-forme différentielle $\alpha$ – ou en appliquant le corollaire 3.2 $(i)$ de la première partie de cette thèse à l'opérateur (laplacien+potentiel) $\overline{\triangle} + \mathrm{Ric} - (n-1)$ de potentiel $V = \mathrm{Ric} - (n-1)$ (remarquer toutefois que l'hypothèse de presque positivité du potentiel des opérateurs (laplacien+potentiel) faite dans les théorèmes de la première partie de cette thèse porte sur l'intégrale de la partie négative du potentiel sur *toute* la variété $M$, alors que les hypothèses de courbure du théorème 4.12, et de façon plus générale de tous les théorèmes de comparaison de cette partie, portent sur l'intégrale de $\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-$ sur les boules de rayon $R$ ; le théorème 4.12 et le lemme 4.10 permettent toutefois de montrer que, sous les hypothèses du théorème 4.12, l'opérateur $\overline{\triangle} + \mathrm{Ric} - (n-1)$ est de potentiel presque positif) – on obtient que la plus petite valeur propre du laplacien de Hodge sur les 1-formes est minorée par une constante proche de $(n{-}1)$ sous les hypothèses du théorème 4.12. En particulier, on a le :

**Théorème 4.19.** — *Pour toute variété $M^n$ qui admet une métrique riemannienne $g$ vérifiant la condition $\sup_{x\in M} \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \alpha(p,n)$ pour au moins un $p > \frac{n}{2}$ et au moins un $R \leq 4\pi$ (où la constante universelle $\alpha(p,n)$ est définie au théorème 4.12), on a :*

$$H^1(M^n) = \{0\}$$

*où $H^1(M^n)$ désigne le premier groupe de cohomologie réelle de la variété $M^n$.*

*Le même résultat vaut lorsque $R > 4\pi$, sous l'hypothèse (plus restrictive) :*

$$R^2 \sup_{x\in M} \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \alpha(p,n).$$

*Enfin, le même résultat vaut (quitte à diminuer $\alpha(p,n)$) sous l'hypothèse :*

$$\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,6\pi))} \leq \alpha(p,n),$$

*pour au moins un $p > \frac{n}{2}$ et au moins un point $x$ de $M$.*

**Remarque.** — Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 4.12, la plus petite valeur propre du laplacien de Hodge sur les 1-formes est minorée par $n\Big[\frac{(n-1)-72\epsilon}{(n-1)+(12\pi)^2C(p,n)^2\epsilon}\Big]$, où $C(p,n)$ est le majorant de la constante de Sobolev donné par le théorème 4.17 $(i)$ (que l'on a appliqué dans le cas $q = 2p$). Cette remarque implique évidemment le théorème 4.19. En fait, on notera que la démonstration ci-dessous prouve que la plus petite valeur propre du laplacien de Hodge est minorée par $n\big(1 - C'(p,n)\epsilon\big)$ si on se restreint aux 1-formes fermées et par $2(n-1)\big(1 - C'(p,n)\epsilon\big)$ si on se restreint aux 1-formes cofermées, ces estimées sont optimales, puisque que les valeurs correspondantes pour la sphère canonique sont $n$ et $2(n-1)$.

**Preuve de la remarque.** — On reprend la démonstration du théorème 4.18 en remplaçant *df* par une 1-forme différentielle $\alpha$ qui est un vecteur propre du laplacien de Hodge correspondant à la plus petite propre, notée $\lambda$. Le même raisonnement donne :

$$\big(\lambda - (n-1) + 2\|\rho_1\|_{p,4\pi}\big)\|\alpha\|_2^2 \geq \big(1 - 4\pi^2C(p,n)^2\|\rho_1\|_{p,4\pi}\big)\|D\alpha\|_2^2 \qquad (*)$$

Posons $h = D\alpha - \frac{tr(D\alpha)}{n}g$. En procédant comme dans le lemme 6.8 de [52], le théorème de Pythagore donne $|D\alpha|^2 = |h|^2 + \frac{1}{n}\big(tr(D\alpha)\big)^2$. Or, si $(e_i)$ est un repère orthonormé, on a :

$$|d\alpha|^2 = \sum_{i<j}\big(h(e_i,e_j) - h(e_j,e_i)\big)^2 \leq 2\sum_{i\neq j} h(e_i,e_j)^2 \leq 2|h|^2.$$

D'où on déduit que $\|D\alpha\|_2^2 \geq \frac{1}{n}\|\delta\alpha\|_2^2 + \frac{1}{2}\|d\alpha\|_2^2 \geq \frac{\lambda}{n}\|\alpha\|_2^2$. En réinjectant cette estimée dans l'inéquation $(*)$, nous obtenons :

$$\lambda \geq n\Big[\frac{(n-1) - 2\|\rho_1\|_{p,4\pi}}{(n-1) + 4\pi^2C(p,n)^2\|\rho_1\|_{p,4\pi}}\Big];$$

on conclut en rappelant que, sous les hypothèses du théorème 4.12, on a $\|\rho_1\|_{p,4\pi} \leq 36\epsilon$. $\square$

Le contre-exemple 4.14 permet de construire des contre-exemples aux résultats de cette section. Pour cela, il suffit de coller un nombre $N$ (grand mais fixé) de fuseaux par des petits cylindres de courbure négative (tels que décrits dans le contre-exemple 4.14) et de refermer la chaîne en recollant les deux fuseaux des extrémités par un dernier petit cylindre de courbure négative. On obtient ainsi une famille de variétés riemanniennes $(M_\nu, g_\nu)$, difféomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$, munies de métriques dont la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de la partie $\rho_1$ de la courbure de Ricci qui est inférieure à $(n-1)$ est arbitrairement petite, et dont le premier groupe de cohomologie réelle est de dimension 1. De plus, ces variétés admettent au moins $N-1$ valeurs propres (non nulles) proches de 0 pour le laplacien sur les fonctions. En effet, à chacun des fuseaux de la chaîne, on peut associer une fonction $f$, qui est nulle en dehors du fuseau et égale à 1 sur la plus grande partie du fuseau, de la manière suivante : chaque demi-fuseau étant identifié à $I \times \mathbb{S}^{n-1}$, muni de la métrique $g_\nu = (dt)^2 + b^2(t) g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ définie dans l'exemple 4.14, en tout point $(t,x) \in I \times \mathbb{S}^{n-1}$, on pose :

$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{\nu}} & si \quad t \leq \sqrt{\nu}, \\ 1 & si \quad t \geq \sqrt{\nu}; \end{cases}$$

on prolonge $f$ par symétrie au fuseau tout entier ($f$ s'annule donc sur les deux hypersurfaces qui limitent le fuseau : à savoir $\{t=0\}$ et sa symétrique ). On prolonge ensuite $f$ par zéro en dehors du fuseau choisi. Un calcul direct, utilisant les données de l'exemple 4.14, donne alors :

$$\frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M |f|^2} \leq \frac{1}{C'(n)} \Big(\frac{\eta}{\eta'}\Big)^{n-1} \int_0^{\sqrt{\nu}} \Big|\frac{\partial f}{\partial t}\Big|^2 (t^2+\nu^2)^{\frac{\alpha(n-1)}{2}} dt \leq C''(n) \nu^{\frac{n-2}{2}}$$

(rappelons que la condition de petitesse de $\|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{p,4\pi}$ n'est satisfaite par le contre-exemple que si $n \geq 3$). De plus si on considère deux fuseaux différents, alors les fonctions associées sont $L^2$-orthonormées. Le principe du min-max nous permet donc de conclure à l'existence de $N$ petites valeurs propres du laplacien, y compris la valeur propre nulle, et donc à l'existence de $N-1$ petites valeurs propres non nulles sur la famille de variétés considérée (rappelons que $N$ peut-être choisi arbitrairement grand). On en déduit une contradiction avec une version du théorème 4.18 qui prétendrait rester valable lorsque $\|\rho_1\|_{\frac{n}{2},4\pi}$ est petit, mais aussi avec la version analogue du théorème 4.17 car, si la constante de Sobolev $S_n(M,g)$ était majorée uniformément sur la famille des variétés de courbure de Ricci presque minorée par $(n-1)$ en norme $L^{\frac{n}{2}}$, le corollaire 3.4 $(i)$ de la première partie, appliqué à l'opérateur $\overline{\triangle} + \mathrm{Ric} - (n-1)$, permettrait de minorer la première valeur propre du laplacien de Hodge sur les 1-formes par $(n-\frac{3}{2})$ (on peut en effet construire les exemples de sorte que $Diam(M_\nu, g_\nu)^2 \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^{\frac{n}{2}}(M_\nu)}$ tende vers 0, comme expliqué dans la remarque à l'exemple 4.14), or la 1-forme $df$, où $f$ est la fonction propre associée à la première valeur propre non nulle du laplacien usuel, génère une petite valeur propre d'après ce qui précède.

Remarquer que les contre-exemples précédents peuvent encore s'adapter de la manière suivante : on peut couper les petits cylindres de courbure négative le long de leur méridien central pour y insérer un petit cylindre plat (de manière à ce que la variété ainsi modifiée soit encore de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ en norme $L^{\frac{n}{2}}$). De plus, on peut aussi prendre comme nouvelles valeurs de $\eta$ et $\eta'$ :

$$\eta = \frac{\sqrt{1+\nu}}{\alpha(\nu+\nu^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}} \quad et \quad \eta' = \frac{\sqrt{\alpha^2+\nu(1+\nu)^2}}{\alpha} = \frac{1}{\cos\theta}$$

Ainsi on a $b'=1$ le long des méridiens extrémaux des petits cylindres de courbure négative. Remarquer toutefois qu'alors :

$$\left(\underline{\sigma}-1\right)^-(t,x) = \left(\frac{b''}{b}+1\right)^+ \mathbb{1}_{[0,\sqrt{\nu}[}(t) + u(t)\mathbb{1}_{[0,\sqrt{\nu}[}(t) + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2(t-\sqrt{\nu}+\theta)}\mathbb{1}_{[\sqrt{\nu},\frac{\pi}{2}-\sqrt{\nu}-\theta]}(t),$$

où $u$ est une fonction positive ou nulle, majorée par $\alpha^2$. Comme le petit cylindre est de volume négligeable par rapport à celui du fuseau, on en déduit que $\left(\underline{\sigma}-1\right)^-$ continue à être de norme $L^{\frac{n}{2}}$ petite lorsque $\nu$ tend vers 0. Prenons alors un premier anneau, construit comme plus haut mais avec ces maillons modifiés, pour une valeur de $\nu=\nu_0$ petite mais fixée. On peut alors lui recoller une autre chaîne, associée à une valeur de $\nu=\nu_1$ suffisamment petite par rapport à $\nu_0$, en recollant les deux petits cylindres $C_1$ et $C_1'$ de courbure négative extrémaux de la nouvelle chaîne à deux cylindres plats $C_0$ et ${C'}_0$ de la variété de départ, ce recollement se faisant de la manière suivante : on excise de $C_0$ et $C_0'$ deux boules-géodésiques (euclidiennes) $B_0$ et $B_0'$, de rayon $r_1 = \frac{1}{\alpha_1}\sqrt{\nu_1}(1+\nu_1)$ (où on pose $\alpha_i = 1+\frac{1}{\sqrt{-\ln(\nu_i)}}$), et on identifie les bords extérieurs de $C_1$ et $C_1'$ avec $\partial B_0$ et $\partial B_0'$ respectivement (ceci est possible lorsque $r_1 << \eta_0\,\nu_0^{\alpha_0}$ – où on pose $\eta_i = \frac{\sqrt{1+\nu_i}}{\alpha_i(\nu_i+\nu_i^2)^{\frac{\alpha_i-1}{2}}}$ –, par exemple lorsque $\nu_1 \leq \nu_0^4$). Ce recollement est alors $C^1$ car, après recollement, en coordonnées normales à l'hypersurface $H=\partial C_1=\partial B_0$ (resp. $H'=\partial C_1'=\partial B_0'$) [ce qui revient à paramétrer un voisinage tubulaire de $H$ (resp. de $H'$) par $]0,\nu_1^{\frac{1}{3}}[\times\mathbb{S}^{n-1}$, où $]0,\sqrt{\nu_1}]\times\mathbb{S}^{n-1}$ s'identifie à la moitié de $C_1$ (resp. de $C_1'$), où $[\sqrt{\nu_1},\nu_1^{\frac{1}{3}}[\times\mathbb{S}^{n-1}$ s'identifie à une couronne enclidienne dans $C_0$ (resp. $C_0'$) et où $\{\sqrt{\nu_1}\}\times\mathbb{S}^{n-1}$ s'identifie à $H=\partial C_1=\partial B_0$ (resp. à $H'=\partial C_1'=\partial B_0')$], la métrique s'exprime sous la forme $(dt)^2+\beta(t)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$, où :

$$\beta(t) = \begin{cases} \eta_1(t^2+\nu_1^2)^{\frac{\alpha_1}{2}} & sur \quad ]0,\sqrt{\nu_1}] \\ t-\sqrt{\nu_1}+r_1 & sur \quad [\sqrt{\nu_1},\nu_1^{\frac{1}{3}}[ \end{cases}$$

Il est clair que $\beta$ est $C^1$ et que la métrique est celle du cylindre $C_1$ (resp. $C_1'$) lorsque $t<\sqrt{\nu_1}$ et est euclidienne lorsque $t>\sqrt{\nu_1}$. On peut alors itérer le procédé un nombre fini de fois en choisissant une suite $\nu_i$ telle que la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de la partie $\left(\underline{\sigma}-1\right)^-$ de la courbure sectionnelle inférieure à 1 reste arbitrairement petite. On construit ainsi des variétés de topologie toujours plus compliquée dont la courbure de Ricci est presque minorée par $(n-1)$

en norme $L^{\frac{n}{2}}$ (en particulier le premier nombre de Betti $b_1$ n'est pas borné sous la seule hypothèse de petitesse de la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de la partie $\big(\underline{\sigma} - 1\big)^-$ de la courbure sectionnelle qui est inférieure à 1).

# Chapitre 5

# Théorèmes de la Sphère avec hypothèses intégrales de courbure

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on applique les estimées du chapitre **3** (qui donnent un contrôle des variations d'une section $S$ d'un fibré, lorsque celle-ci est une combinaison linéaire de sections propres d'un opérateur (laplacien+potentiel)) et les théorèmes de comparaison du chapitre **4** pour obtenir des théorèmes à la T. Colding (i.e. des théorèmes prouvant la stabilité de certains invariants géométriques de la sphère) en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$. De manière générale, il existe de nombreux théorèmes en géométrie riemannienne (par exemple les théorèmes de Myers, Bishop, Lichnerowicz-Obata, Gromov, Margulis) qui prouvent qu'un invariant géométrique donné (considéré comme une fonctionnelle définie sur l'ensemble des variétés riemanniennes et parfois normalisé de manière à être insensible aux homothéties) est majoré ou minoré par une constante universelle lorsqu'il est restreint à un ensemble de variétés réalisant certaines conditions de courbure ; lorsque ce majorant (ou ce minorant) est optimal, le cas d'égalité éventuel correspond aux extrema (absolus) de la fonctionnelle considérée.

Ces théorèmes d'extrémalité ont souvent pour pendant un théorème de rigidité : les variétés riemanniennes pour lesquelles l'extremum de la fonctionnelle est atteint ont généralement été caractérisées (sphères, tores, espaces symétriques, variétés d'Einstein, nilvariétés, *etc.*).

Étudier la stabilité des métriques extrémales associées à ce type de problème de rigidité (caractérisé par la donnée d'une fonctionnelle géométrique et par les conditions de courbure qui définissent l'ensemble de variétés sur lequel la fonctionnelle est étudiée) consiste alors à trouver les variétés riemanniennes vérifiant les conditions de courbure du problème de rigidité (ou éventuellement des conditions affaiblies) pour lesquelles la fonctionnelle géométrique est $\epsilon$-proche de son extremum ($\epsilon$ devant être défini de manière universelle).

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème suivant : soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne compacte, son volume, son diamètre, son radius[1] et la $k$-ième valeur propre de son laplacien (pour un $k$ donné) sont des invariants riemanniens. Prise isolément, la valeur d'un seul de ces invariants (toujours vu comme une fonctionnelle définie sur l'ensemble des variétés riemanniennes compactes) ne permet pas d'identifier la topologie (et encore moins la métrique) d'une variété donnée et de la distinguer des autres topologies ou géométries possibles. Toutefois, si on restreint ces fonctionnelles à un sous-ensemble de variétés satisfaisant certaines hypothèses de courbure, et si la variété donnée est un extremum de ces fonctionnelles sur ce sous-ensemble, la situation peut devenir radicalement différente. Par exemple, si on restreint les fonctionnelles évoquées ci-dessus à l'ensemble des variétés de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$, la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$ est un extremum et est caractérisée par le résultat de rigidité suivant :

**Théorème.** — *Toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$ vérifie les inégalités suivantes :*

*(i)* $\mathrm{Diam}(M^n, g) \leq \mathrm{Diam}(\mathbb{S}^n, can) = \pi$,

*(ii)* $\mathrm{Vol}(M^n, g) \leq \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can)$,

*(iii)* $\mathrm{Rad}(M^n, g) \leq \mathrm{Rad}(\mathbb{S}^n, can) = \pi$,

*(iv)* $\lambda_1(M^n, g) \geq \lambda_1(\mathbb{S}^n, can) = n$.

*De plus, si l'égalité est réalisée dans une de ces inégalités, alors la variété $(M^n, g)$ est isométrique à la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$.*

On remarquera que, comme ce chapitre ne s'intéresse plus au laplacien de Hodge, et comme le seul laplacien invoqué sera le laplacien sur les fonctions, nous avons abandonné la notation $\lambda_k^0(M^n, g)$ pour *la $k$-ième valeur propre non nulle du spectre* de ce dernier laplacien pour *revenir à la notation (plus classique)* $\lambda_k(M^n, g)$.

Ces inégalités sont les versions classiques des théorèmes de comparaison étudiés dans le chapitre **4** (ils sont dûs à S.B. Myers pour $(i)$ et $(iii)$, à R.L. Bishop pour $(ii)$ et à A. Lichnerowicz pour $(iv)$). Les cas d'égalités découlent du théorème de S.Y. Cheng ([35]) pour les cas (i), (ii) et (iii), et du théorème de M. Obata ([73]) pour le cas (iv) (dans le cas de variétés de courbure de Ricci presque-supérieure à $(n-1)$, ces inégalités restent presque

[1] par définition, le radius est la borne inférieure des rayons des boules géodésiques recouvrant $M$. On a donc toujours les inégalités $\frac{\mathrm{Diam}(M)}{2} \leq \mathrm{Rad}(M) \leq \mathrm{Diam}(M)$

vraies d'après les théorèmes 4.12, 4.16 et 4.18, mais il n'y a plus de rigidité dans le cas d'égalité).

Au vu de ce résultat, il est naturel de se demander quelles propriétés (topologiques, différentiables ou métriques) de $(\mathbb{S}^n, can)$ sont conservées par les variétés riemanniennes compactes, de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$, pour lesquelles les valeurs prises par l'un des invariants riemanniens considérés ci-dessus (diamètre, volume, radius, première valeur propre non nulle du spectre du laplacien) est suffisamment proche de sa valeur extrémale (donnée par le théorème précédent). On peut aussi considérer la situation où on affaiblit l'hypothèse de courbure définissant l'ensemble de variétés étudié.

***Toute variété riemannienne compacte*** $(M^n, g)$ ***de courbure de Ricci supérieure ou égale (resp. presque supérieure) à*** $(n-1)$***, dont le volume (ou le diamètre, ou le radius, ou la k-ième valeur propre du laplacien, notée*** $\lambda_k(M^n, g)$ ***ou*** $\lambda_k$***) est*** $\epsilon$***-proche de celui de la sphère canonique, est-elle Hausdorff-proche***[2] ***de*** $(S^n, can)$ ***? est-elle difféomorphe à la sphère*** $\mathbb{S}^n$ ***?***

Bien sûr, une réponse affirmative à cette question sera d'autant plus satisfaisante que la constante $\varepsilon$ dépendra du moins d'hypothèses supplémentaires possible sur la structure différentiable de $M$ ou sur sa métrique ; l'idéal étant que $\varepsilon$ ne dépende que de la dimension $n$ de la variété $(M^n, g)$ (ce qu'on notera $\varepsilon = \varepsilon(n)$). Dans le cas des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, qui nous intéressera plus particulièrement dans la suite, on demandera à $\epsilon$ de ne dépendre que de la dimension $n$ et du paramètre $p$ ($p > \frac{n}{2}$) qui intervient dans nos hypothèses intégrales de courbure (rappelons que, selon ces hypothèses, la norme $L^p$ de la partie $\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-$ de la courbure de Ricci qui est inférieure à $(n-1)$ est supposée inférieure à $\epsilon$ : plus précisément, on suppose qu'il existe un $R > 0$ tel que $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min\big(1, \frac{16\pi^2}{R^2}\big)$).

Remarquons tout de suite qu'il n'y a pas de stabilité des types différentiable, topologique ou homotopique (avec $\varepsilon = \varepsilon(n)$) lorsque les invariants qui sont astreints à être $\epsilon$-proches de leur valeur extrémale sont le diamètre ou la première valeur propre non nulle

[2] Soient $(A, d_A)$ et $(B, d_B)$ deux espaces métriques compacts, $d_{GH}\big((A, d_A), (B, d_B)\big)$ désigne la distance de Gromov-Hausdorff entre les espaces $(A, d_A)$ et $(B, d_B)$. Elle est définie comme l'infimum des distances de Hausdorff entres les parties $I_A(A)$ et $I_B(B)$, où $I_A : A \to C$ et $I_B : B \to C$ parcourent l'ensemble des plongements isométriques de $(A, d_A)$ et $(B, d_B)$ dans un espace métrique quelconque $(C, d_C)$. On trouvera des compléments d'information sur cette métrique dans [57]. On utilisera aussi beaucoup la notion d'approximation de Hausdorff. Une $\epsilon$-approximation de $(A, d_A)$ sur $(B, d_B)$ est un couple $\big(F, (C, d_C)\big)$ tel que $(C, d_C)$ est un espace métrique contenant $(B, d_B)$ et $F$ est une application de $A$ dans $C$ telle que $d_C\big(F(A), B\big) \leq \epsilon$ et telle que, pour tout couple $(x, y)$ de points de $A$, on ait $|d_A(x, y) - d_C(F(x), F(y))| \leq \epsilon$. L'infimum des valeurs de $\epsilon$ telles qu'il existe une $\epsilon$-approximation de $(A, d_A)$ sur $(B, d_B)$ est une fonction du couple $\big((A, d_A); (B, d_B)\big)$ qui n'est pas une distance, mais qui est équivalente à la distance $d_{GH}\big((A, d_A), (B, d_B)\big)$. La notion d'approximation de Hausdorff est très pratique pour montrer la convergence d'une suite de variétés vers une variété-limite donnée. Pour plus d'information sur cette notion, voir [87].

du spectre du laplacien de la variété $(M^n, g)$ (des contre-exemples ont été donnés par M. Anderson dans [4] et Y. Otsu dans [74] ; voir aussi la sous-section 5.6.2 pour plus de détails à ce propos) ; en revanche, pour ces deux invariants, il y a stabilité du type topologique de la sphère si on admet que $\varepsilon$ puisse dépendre de n et d'un majorant de la courbure sectionnelle des variétés considérées (*cf* S. Ilias [62] pour le cas de courbure de Ricci supérieure à (n-1) et le théorème 5.24 de ce chapitre pour le cas de courbure de Ricci presque-supérieure à $(n-1)$ ; il faut aussi citer le travail de G. Perelman qui montre dans [76] le même résultat en courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, en faisant dépendre $\epsilon$ de la dimension $n$ et d'un minorant de la courbure sectionnelle). Nous nous intéresserons dans la suite à la stabilité métrique (au sens de la distance de Gromov-Hausdorff) ou à la stabilité du genre différentiable vis-à-vis du volume, du radius ou de la $n+1$-ième (ou $n$-ième) valeur propre non nulle du laplacien au voisinage de leur valeur extrémale (principalement en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$).

De nombreuses réponses partielles à ces problèmes de stabilité (stabilité du type topologique, avec une valeur de $\epsilon$ dépendant du rayon d'injectivité ou d'autres quantités géométriques) existaient dans la littérature (on peut se référer à l'article de K. Shiohama [88] pour un historique de la question) avant que J. Cheeger et T. Colding ne démontrent le résultat général suivant en courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$ (*cf* [38], [39] et [30]), améliorant considérablement les résultats précédents :

**Théorème (J. Cheeger-T. Colding [30]).** — *Il existe une constante $\varepsilon = \varepsilon(n)$ telle que toute variété riemannienne compacte $(M^n, g)$ de courbure de Ricci supérieure à n-1 et vérifiant l'inégalité :*

$$\mathrm{Vol}(M^n, g) \geq (1 - \varepsilon)\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can)$$

*soit difféomorphe à $\mathbb{S}^n$.*

**Remarque.** — La constante $\varepsilon(n)$ est universelle et ne dépend que de la dimension, mais elle n'est pas explicitable. Bien entendu, elle ne dépend pas de $M$... mais elle ne dépend pas non plus de bornes a priori qui seraient imposées à la courbure sectionnelle. Ce point est l'amélioration fondamentale apportée par T.Colding et J. Cheeger aux travaux antérieurs de Shiohama, Perelman, Otsu-Shiohama, Yamaguchi, *etc.* (*cf* [88]). T. Colding et J. Cheeger ont aussi démontré les variantes de ce théorème consistant à remplacer l'hypothèse sur le volume par $\mathrm{Rad}(M) \geq \pi(1-\epsilon)$ ou $d_{GH}\big((M^n, g), (\mathbb{S}^n, can)\big) \leq \epsilon$. P. Petersen [77] a, quant à lui, remplacé l'hypothèse sur le volume par l'hypothèse $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$.

La preuve de ce théorème par T. Colding et J. Cheeger se décompose en deux étapes :

1) La première étape est un résultat de co-stabilité de certains invariants géométrique de la sphère canonique en courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$. Plus précisément, T. Colding

a montré dans [38] et [39] que, sur l'ensemble des variétés riemanniennes complètes de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, il équivalent d'être de volume proche de celui de la sphère, d'être de radius proche de celui de la sphère ou d'être proche de $(\mathbb{S}^n, can)$ en distance de Gromov-Hausdorff. P. Petersen complète ces équivalences dans [77] en montrant que chacune de ces 3 conditions est équivalente à ce que $\lambda_{n+1}$ soit proche de $n$.

2) Dans un second temps, T. Colding et J. Cheeger ont démontré dans [30] que, si une suite de variétés riemanniennes, compactes et de courbure de Ricci uniformément minorée, converge (en distance de Gromov-Hausdorff) vers une variété riemannienne fixée de même dimension, alors tous ses éléments sont difféomorphes à la variété-limite à partir d'un certain rang.

Dans un premier temps, ce chapitre est consacré à l'extension de la première étape de la preuve du théorème de Colding-Cheeger au cas des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$. Dans la section 5.4, nous démontrons le résultat de co-stabilité suivant :

**Théorème A.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > \frac{n}{2}$ et $R > 0$. Il existe des constantes universelles strictement positives $\alpha(p,n)$, $\beta(n)$ et $C(p,n)$ (explicitement calculables) telles que, si l'on considère toutes les variétés riemanniennes complètes $(M^n, g)$ qui vérifient $\sup_x \| \big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^- \|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ $(0 < \epsilon \leq \alpha(p,n))$, et l'une au moins des trois inégalités suivantes :*

$$\mathrm{Vol}(M^n, g) \geq (1-\epsilon)\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can) \qquad ou \qquad \lambda_{n+1}(M^n, g) \leq n + \epsilon$$

$$ou \quad \mathrm{Radius}(M^n, g) \geq (1-\epsilon)\,\mathrm{Radius}(\mathbb{S}^n, can),$$

*toutes ces variétés sont à distance de Gromov-Hausdorff de $(\mathbb{S}^n, can)$ plus petite que $C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}$.*

*Réciproquement, si la distance de Gromov-Hausdorff entre $(M^n, g)$ et $(\mathbb{S}^n, can)$ est plus petite que $\epsilon$, alors $Vol(M^n, g) \geq \big(1 - C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}\big)\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can)$ et $\lambda_{n+1}(M^n, g) \leq n + C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}$ et $\mathrm{Radius}(M^n, g) \geq \big(1 - C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}\big)\,\mathrm{Radius}(\mathbb{S}^n, can)$.*

**Remarque.** — Cet énoncé est encore valable si, on remplace l'hypothèse de courbure $\sup_x \| \big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big) \|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ par l'hypothèse : il existe un point $x_0$ de $M$ tel que $\| \big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big) \|_{L^p(B(x_0, 6\pi))} \leq \epsilon$. Toutefois, tous les énoncés et toutes les démonstrations de ce chapitre se placeront sous la première hypothèse.

La méthode de démonstration de ce théorème est une application des résultats de comparaison du chapitre **4** et des estimées du chapitre **3**. Par exemple, dans la sous-section 5.4.2, on s'inspire des travaux de S. Gallot dans [46] et de P. Petersen dans [77] en définissant une application :

$$\begin{cases} \Phi : M & \rightarrow & \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ \quad x & \mapsto & \Phi(x) = F(x)/\|F(x)\| \end{cases}$$

où $F(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)\big)$ et où $(f_i)_{1\leq i\leq n+1}$ est une famille $L^2$-orthonormée de fonctions propres du laplacien de $(M^n, g)$ associées à des valeurs propres proches de $n$. L'étude des propriétés de $\Phi$ est une application des résultats du chapitre **3** via la construction d'un certain fibré $E \rightarrow M$ et de sections $S_i$ associées aux fonctions $f_i$. On déduira des résultats du chapitre **3** que si $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$, alors $\Phi$ est une fonction définie sur tout $M$, surjective, de degré $\pm 1$ et réalisant une $C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}$-approximation de Hausdorff de $(M^n, g)$ sur $(\mathbb{S}^n, can)$ (notez que, contrairement aux travaux de T. Colding, nous construisons explicitement l'approximation de Hausdorff).

Dans la section 5.5, nous étudions (en l'état actuel de nos recherches) les extensions possibles aux variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ de la deuxième étape de la démonstration du théorème de Colding et Cheeger. En particulier, nous discutons d'un outil qui joue un rôle fondamental dans les travaux de Colding et Cheeger sur la finitude du type différentiable en courbure de Ricci minorée (voir par exemple le résultat cité ci-dessus) ; cet outil nous semble difficile à étendre au cas de courbure de Ricci presque minorée par $(n-1)$. Toutefois, nous démontrons dans cette section que, si on suppose l'existence d'une borne a priori sur la courbure sectionnelle ($\|\mathrm{R}\|_{\mathrm{L^p(M)}} \leq \mathrm{A}$) ou sur la courbure de Ricci ($\|\,\mathrm{Ric}\,\|_\infty \leq A$), alors l'application $\Phi$ est un difféomorphisme si $(M^n, g)$ vérifient l'hypothèse sur la courbure de Ricci faite dans le théorème **A** pour $\epsilon \leq \alpha(p, n, A)$ ($\Phi$ est même, dans ce cas, de constante de Lipschitz $C(p,n,A)\epsilon^{\beta(n,A)}$-proche de 1).

Pour finir ce chapitre, nous étudions l'optimalité de la condition $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$ dans le théorème **A**. Plus précisément, nous démontrons dans la section 5.6 qu'on a le théorème suivant :

**Théorème B.** — *Il existe des constantes universelles strictement positives $\alpha(p,n)$, $\beta(n)$ et $C(p,n)$ (explicitement calculables) telles que sous les hypothèses de courbure du théorème* **A**, *on ait :*

*Si $\lambda_n(M^n, g) \leq n + \epsilon$ alors $\lambda_{n+1}(M^n, g) \leq n + C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}$.*

D'aprés le théorème **A**, le théorème **B** a pour corollaire que, si $\lambda_n(M^n, g) \leq n + \epsilon$, alors d'une part la distance de Gromov-Hausdorff entre $(M^n, g)$ et $(\mathbb{S}^n, can)$ est inférieure à $C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}$, d'autre part le volume, le radius et le diamètre de $(M^n, g)$ sont $C(p,n)\epsilon^{\beta(n)}$-proches de ceux de $(\mathbb{S}^n, can)$ (la preuve de cette dernière propriété utilisant également les théorèmes 4.12 et 4.16). Remarquez que le théorème **B** est déjà nouveau en courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$ et nous permet de déduire, du théorème de stabilité de Colding et Cheeger rappelé plus haut, le corollaire suivant qui est une amélioration du théorème de la sphère de P. Petersen ([77]) :

**Corollaire.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Il existe des constantes universelles strictement positives $\epsilon(n)$, $\beta(n)$ et $C(n)$ (explicitement calculables) telles que, si $(M^n, g)$ est une variété riemannienne de dimension $n$ qui vérifie $\mathrm{Ric}(M^n, g) \geq (n-1)$ et $\lambda_n \leq n + \epsilon(n)$, alors $M$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^n$ et $d_{GH}\big((M^n, g), (\mathbb{S}^n, can)\big) \leq C(n)\big(\lambda_n - n\big)^{\beta(n)}$.*

On montre que ce théorème est optimal, au moins en ce qui concerne la deuxième conclusion, en construisant une suite de métriques $g_k$ sur $\mathbb{S}^n$, de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, telles que la suite $\lambda_{n-1}(\mathbb{S}^n, g_k)$ tende vers $n$ sans que $\lambda_n(\mathbb{S}^n, g_k)$ ne tende vers $n$. En fait la suite $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, g_k)$ tend vers 0, $\mathrm{Rad}(\mathbb{S}^n, g_k)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ et $(\mathbb{S}^n, g_k)$ tend (au sens de Gromov-Hausdorff) vers l'hémisphère de dimension $n-1$ muni de la métrique canonique. C'est encore un problème ouvert de savoir si $n$ est le plus petit des entiers $p$ tels que toute suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variétés riemanniennes de dimension $n$ et de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, telles que $\lambda_p(M_k)$ tende vers $n$ lorsque $k \to +\infty$, soit formée de variétés qui sont toutes difféomorphes à $\mathbb{S}^n$ à partir d'une certain rang (rappelons que M. Anderson [4] et Y. Otsu [74] ont construit des variétés de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, non difféomorphes à $\mathbb{S}^n$, dont le $\lambda_1$ est arbitrairement proche de $n$). On finit en étendant au cas des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ un résultat de S. Ilias [62] en montrant le :

**Théorème C.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$, $R$ et $A$ des nombres réels arbitraires tels que $p > n/2$, $R > 0$ et $A > 0$. Il existe une fonction $\alpha(p, n, A)$ (universellement calculable) telle que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, de dimension $n$, qui vérifie $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \alpha(p, n, A)$ et $\|R\|_{2p} \leq A$, on ait :*

$$\text{Si } \lambda_1 \leq n + \alpha(p, n, A), \text{ alors } M \text{ est homéomorphe à } \mathbb{S}^n.$$

$$\text{Si } \mathrm{Diam}(M) \geq \pi - \alpha(p, n, A), \text{ alors } M \text{ est homéomorphe à } \mathbb{S}^n.$$

Nous commençons ce chapitre par deux courtes sections consacrées aux notations et à des rappels sur quelques propriétés spectrales de la sphère canonique.

## 5.2 Notations

Rappelons que $(M^n, g)$ *désigne une variété riemannienne complète de dimension $n$, munie de la métrique $g$. Nous calculerons,* comme précédemment, *les normes $L^p$ par rapport à la mesure de probabilité riemannienne $\frac{dv_g}{\mathrm{Vol}\,M}$, i.e. :*

$$\|f\|_p = \Big(\frac{1}{\mathrm{Vol}\,M} \int_M |f|^p(x)\, dv_g(x)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Ces normes seront toujours bien définies dans la suite, puisque nos variétés seront toujours de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ (au sens du théorème 4.12), et donc toujours de volume fini (d'après le théorème 4.16).

*Quant au laplacien utilisé, ce sera (dans tout ce chapitre) celui des géomètres qui, par convention, en font un opérateur positif en posant* $\triangle f(x) = -\operatorname{tr} Ddf$.

Enfin, dans la suite, *on notera souvent* $C(p,n)$ *ou* $\alpha(p,n)$ *des fonctions universelles (ne dépendant que des variables* $p$ *et* $n$*).* Pour simplifier la lecture des calculs, nous noterons parfois de la même manière, au sein d'un même calcul, des constantes pourtant différentes. Ainsi, contrairement au chapitre précédant, nous ne calculerons pas explicitement les constantes universelles du type $C(p,n)$ ou $\alpha(p,n)$ (bien que, dans tous les cas, nos preuves permettraient un tel calcul).

Nous commençons cette partie par quelques remarques simples sur la sphère canonique, faites par P. Petersen dans [77], qui inspireront notre démarche pour la démonstration du théorème **A** de stabilité des invariants géométriques de la sphère en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ :

## 5.3 Rappels sur la sphère $(\mathbb{S}^n, can)$

Les démarches de S. Gallot, dans [46], et de P. Petersen, dans [77], partent de la remarque élémentaire suivante : les fonctions propres de la sphère canonique, associées à la première valeur propre non nulle $n$, fournissent un plongement isométrique de $(\mathbb{S}^n, can)$ dans l'espace Euclidien de dimension $n{+}1$ (rappelons que la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$ est notre variété de référence car elle joue un rôle extrémal, pour tous les invariants que nous considérons, et elle est de courbure de Ricci constante égale à (n-1)). Les fonctions propres du laplacien de $(\mathbb{S}^n, can)$ sont les restrictions à $\mathbb{S}^n$ des polynômes homogènes harmoniques de $\mathbb{R}^{n+1}$ (voir par exemple [56]). En particulier, le sous-espace propre $E_{\lambda_1}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = n$ est l'espace des formes linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ses éléments peuvent s'écrire sous la forme $x \mapsto < x, r.x_0 >_{\mathbb{R}^{n+1}} = r.\cos(d_{\mathbb{S}^n}(x, x_0))$, où $x_0$ est un élément quelconque de $\mathbb{S}^n$, r un élément quelconque de $\mathbb{R}^+$, $< .,. >_{\mathbb{R}^{n+1}}$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $d_{\mathbb{S}^n}$ la distance riemannienne sur $(\mathbb{S}^n, can)$.

Rappelons que, pour tout endomorphisme A de $\mathbb{R}^{n+1}$, on a la formule :

$$\frac{1}{n+1} Trace(A) = \frac{1}{\operatorname{Vol} \mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} < A(x), x > \, dx \tag{5.1}$$

Soit alors $\{e_i\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $x_i$ l'extrémité, dans $\mathbb{R}^{n+1}$, du vecteur $e_i$ (i.e. $\overrightarrow{ox_i} = e_i$). D'après (5.1), les fonctions $f_i = \cos\big(d_{\mathbb{S}^n}(x_i, .)\big) = < e_i, . >_{\mathbb{R}^{n+1}}$ forment une base $L^2$-orthogonale de $E_{\lambda_1}$ telle que $\|f_i\|^2_{L^2(\mathbb{S}^n, can)} = \frac{1}{n+1}$ pour tout indice $i \leq n+1$. On en déduit que, si $x_0$ est un point quelconque de $\mathbb{S}^n$ et si l'on pose :

$$\alpha_{i_{|x_0}} = \left(\frac{n+1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\right)\int_{\mathbb{S}^n} \cos\bigl(d_{\mathbb{S}^n}(x_0,x)\bigr) f_i(x)\,dx,$$

on a alors, en posant $A(x) = < x, x_0 >_{\mathbb{R}^{n+1}} .x_0$ et en appliquant (5.1) :

$$\begin{cases} \cos\bigl(d_{\mathbb{S}^n}(x_0,.)\bigr) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i_{|x_0}}.f_i \\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha^2_{i_{|x_0}} = \frac{n+1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} < x_0, x >^2_{\mathbb{R}^{n+1}} dx = Trace(A) \equiv 1. \end{cases}$$

Par ailleurs, en posant $A(x) = < x, e_i >_{\mathbb{R}^{n+1}} .x_0$, (5.1) nous donne :

$$\alpha_{i_{|x_0}} = \left(\frac{n+1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\right)\int_{\mathbb{S}^n} < x_0, x >_{\mathbb{R}^{n+1}} . < e_i, x >_{\mathbb{R}^{n+1}} \; dx = < x_0, e_i >_{\mathbb{R}^{n+1}} = f_i(x_0),$$

et donc $\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)^2 = 1$ pour tout point $x_0$ de $\mathbb{S}^n$. On a donc en fait démontré que l'application :

$$F \; : \; \begin{cases} \mathbb{S}^n & \rightarrow \quad \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \mapsto \quad (f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)) \end{cases}$$

est bien définie. De plus c'est une isométrie puisque, pour tous les $x_0, x \in \mathbb{S}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \cos\left[d_{\mathbb{S}^n}(F(x_0), F(x))\right] &= < F(x_0), F(x) >_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0).f_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i_{|x_0}}.f_i(x) = \cos\bigl[d_{\mathbb{S}^n}(x_0,x)\bigr]. \end{aligned}$$

Bien entendu, il y a une démonstration beaucoup plus rapide du fait que $F$ est une isométrie : elle consiste à reconnaitre que $F$ est le plongement canonique de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et que ce plongement identifie la métrique canonique de $\mathbb{S}^n$ avec la métrique induite de sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$. Cependant cette preuve, extrinsèque, n'a aucune chance de se généraliser à une variété riemannienne abstraite, c'est pourquoi nous lui avons préféré la première preuve, intrinsèque, que nous allons généraliser, en prouvant que les égalités exhibées ci-dessus restent vraies à $\varepsilon$-près dans le cas d'une variété riemannienne de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ et dont l'un des invariants géométriques cités dans le théorème **A** est presque égal à la valeur du même invariant pour $(\mathbb{S}^n, can)$. Cette stratégie est déjà celle de la preuve de P. Petersen (*cf* [77]) dans le cas où la courbure de Ricci est supposée supérieure ou égale à $(n-1)$. Nous allons ci-dessous la simplifier et la généraliser au cas où $(M^n, g)$ est une variété riemannienne de courbure de Ricci presque-minorée par $(n-1)$, dont le laplacien admet $n+1$ valeurs propres non nulles $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n+1}$ (comptées avec leurs multiplicités) inférieures à $n+\epsilon$. Dans ce cas, on définit l'application $\Phi = \frac{F}{\|F\|}$, où $F$ est définie comme plus haut à partir d'une famille de fonctions $(f_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ telle que $\triangle f_i = \lambda_i f_i$

et telle que la famille $(\sqrt{n+1}f_i)$ soit $L^2$-orthonormée. On montrera plus loin que, sous nos hypothèses, $\Phi$ est bien définie et est une approximation de Hausdorff surjective sur $(\mathbb{S}^n, can)$.

## 5.4 Stabilité des invariants géométriques

Le but de cette section est de prouver le théorème **A** de costabilité des invariants géométrique de la sphère en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$. Pour cela, on suivra le schéma de preuve suivant :

$$\begin{array}{ccccc} d_{GH}\big(M,\mathbb{S}^n\big) & \xrightarrow{5.2} & \mathrm{Rad}(M) & \xleftarrow{5.1} & \mathrm{Vol}\,M \\ & & {\scriptstyle 5.6}\downarrow & {\scriptstyle 5.7}\nearrow & \\ & & \lambda_{n+1}(M) & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{Rad}(M) \\ \quad + \\ \mathrm{Vol}\,M \quad \xrightarrow{5.16} d_{GH}\big(M,\mathbb{S}^n\big) \\ \quad + \\ \lambda_{n+1}(M) \end{array}$$

Il faut comprendre ce diagramme de la manière suivante : chaque flèche du diagramme représente une implication qui sera démontrée dans la suite ; la signification d'une flèche donnée est la suivante : "si la (les) quantité(s) géométrique(s) située(s) au départ de la flèche prend (prennent), sur une variété $(M^n, g)$ (de courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$), une (des) valeur(s) $\epsilon$-proche(s) de celle(s) qu'elle(s) prend (prennent) sur $(\mathbb{S}^n, can)$, alors il en est de même pour la quantité géométrique située à l'arrivée de la flèche" (quitte à remplacer, à l'arrivée, $\epsilon$ par $C(p,n)\epsilon^{\alpha(p,n)}$). De plus, le numéro affecté à chaque flèche est le numéro de la proposition qui prouve l'implication correspondante dans le texte qui suit.

Nous commençons par les deux implications les plus faciles du théorème **A**, à savoir le fait qu'une variété de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ et de volume presque maximal (resp. proche en distance de Gromov-Hausdorff de $(\mathbb{S}^n, can)$) admet un radius presque maximal :

**Lemme 5.1.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (universelles et explicitement calculables) telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, de dimension $n$, qui vérifie les deux hypothèses $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (où $\epsilon \leq \alpha(p,n)$) et $\mathrm{Vol}(M^n, g) \geq (1 - \epsilon^{\frac{1}{4}}) \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can)$, on ait :*

$$\mathrm{Rad}(M^n, g) \geq \mathrm{Rad}(\mathbb{S}^n, can)\big(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4n}}\big).$$

**Démonstration.** — D'après le théorème de type Myers 4.12 du chapitre 4, la variété $M$ est compacte sous nos hypothèses. Il existe donc un point $p$ de $M$ tel que la boule de centre

$p$ et de rayon $\mathrm{Rad}(M)$ recouvre tout $M$. Or, d'après le théorème de type Bishop 4.16 du chapitre 4, il existe une constante universelle $C(p,n)$ telle que :

$$A_1(\pi)(1-\epsilon^{\frac{1}{4}}) \leq \mathrm{Vol}\, M = \mathrm{Vol}\, B(p, \mathrm{Rad}(M)) \leq A_1(\mathrm{Rad}(M))(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}})^{-1}$$

donc $A_1(\mathrm{Rad}(M)) \geq A_1(\pi)(1-C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}})^2$. Cette inégalité, où l'on remplace $A_1(R)$ par la formule $\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^{n-1}\int_0^R(\sin t)^{n-1}dt$, implique que $\frac{\int_0^{(\pi-\mathrm{Rad}(M))^+}(\sin t)^{n-1}\,dt}{\int_0^{\pi}(\sin t)^{n-1}\,dt} \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$. En particulier, si $\alpha(p,n) \leq \left(\frac{1}{2C(p,n)}\right)^4$, alors $(\pi - \mathrm{Rad}(M))^+ \leq \frac{\pi}{2}$ et la concavité du sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ nous donne $\int_0^{(\pi-\mathrm{Rad}(M))^+}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{n-1}dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}\frac{\left((\pi-\mathrm{Rad}(M))^+\right)^n}{n} \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$. On obtient donc $\mathrm{Rad}(M) \geq \pi\left[1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4n}}\right]$.

□

**Lemme 5.2.** — *Si $(M^n, g)$ est une variété riemannienne complète, de dimension $n$, qui vérifie $d_{GH}((M^n,g),(\mathbb{S}^n, can)) \leq \epsilon$ alors $\mathrm{Rad}(M) \geq \mathrm{Rad}(\mathbb{S}^n, can) - 2\epsilon$.*

**Démonstration.** — $(M^n, g)$ est bornée, et donc compacte d'après le théorème de Hopf-Rinow. En remarquant que tout point $p$ de $M$ est proche d'un point de $S^n$ dont l'antipode est lui-même $\epsilon$-proche d'un point $q$ de $M$, on montre que, pour tout point $p$ de $M$, il existe un point $q$ de $M$ tel que $d_M(p,q) \geq \pi - 2\epsilon$. Ce qui permet de conclure.

□

Dans la sous-section qui suit, nous nous intéressons aux variétés de Radius presque maximal. Nous démontrons que le laplacien des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ et de Radius proche de $\pi$ admet au moins $n+1$ valeurs propres proches de $n$ (on montrera plus loin, comme application du corollaire 3.2, qu'en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, on a au plus $n+1$ valeurs propres proches de $n$). Nous démontrons au passage d'autres estimées qui serviront dans la suite.

### 5.4.1 Variétés de Radius presque maximal

Dans ce qui suit, on dit qu'*un point $x_0 \in M$ admet un $\epsilon$-presqu'antipode* s'il existe $y_0 \in M$ tel que $d(x_0, y_0) \geq \pi - \epsilon$. Nous commençons par un lemme très utile dans notre cadre, qui permet, sur une variété de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, de comparer la valeur moyenne d'une fonction quelconque de la distance à un point donné avec la valeur moyenne de la même fonction de la distance à un point fixé sur la sphère canonique. C'est une généralisation (au cas des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$) du lemme 1.3 (p. 131) de [9], qui est lui-même une généralisation d'un argument de la preuve d'un lemme (le lemme 1.10) de T. Colding dans [38] :

**Lemme 5.3.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ de dimension $n$, pour tout point $x_0 \in M$ et pour toute fonction $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, si $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^- \|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), alors :*

$$\left| \frac{1}{\mathrm{Vol}\, M} \int_M u \circ d_M(x_0, .)\, dv_g - \frac{1}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} u \circ d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x_0}, .)\, dv_{can} \right| \\ \leq \|u'\|_\infty C(p,n) \big[\epsilon^{\frac{1}{4}} + (\pi - Rad(x_0))^+\big],$$

*où* $\mathrm{Rad}(x_0) = \max\{d_M(x_0, x), x \in M\}$ *et où* $\bar{x_0}$ *est un point quelconque de* $S^n$.

**Démonstration.** — Les fonctions $A$, $L$, $A_1$ et $L_1$ sont les mêmes que celles définies dans le chapitre 4, mais on les prolonge par 0 sur $\mathbb{R}^-$. La fonction $r \to u(r)A(r)$ est continue et dérivable à droite sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée égale à $u'A + uL$. Le lemme des accroissements finis 4.2, appliqué à $u(r)A(r) - \int_0^r (u'A + uL)$ et $-u(r)A(r) + \int_0^r (u'A + uL)$, et le théorème de type Myers 4.12, nous donnent :

$$\begin{cases} u\big(\mathrm{Rad}(x_0)\big)\, \mathrm{Vol}\, M = \int_0^{\mathrm{Rad}(x_0)} u(r)L(r)\, dr + \int_0^{\mathrm{Rad}(x_0)} u'(r)A(r)\, dr \\ u(\pi)\, \mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n = \int_0^\pi u(r)L_1(r)\, dr + \int_0^\pi u'(r)A_1(r)\, dr \end{cases}$$

D'où, en remarquant de plus que $\left|\frac{A_1(r)}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n} - 1\right| \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\mathrm{Vol}\, M} \int_M u \circ d_M(x_0, x)\, dv_g - \frac{1}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} u \circ d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x_0}, x)\, dv_{can} \right| \\ &\quad = \left| \int_0^{\mathrm{Rad}(x_0)} \frac{u(r)L(r)}{\mathrm{Vol}\, M} dr - \int_0^\pi \frac{u(r)L_1(r)}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} \right| \\ &\quad = \left| u\big(\mathrm{Rad}(x_0)\big) - u(\pi) + \int_0^\pi \frac{u'A_1}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} - \int_0^{\mathrm{Rad}(x_0)} \frac{u'A}{\mathrm{Vol}\, M} \right| \\ &\quad = \left| \int_0^{\mathrm{Rad}(x_0)} u'(r) \left( \frac{A_1(r)}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} - \frac{A(r)}{\mathrm{Vol}\, M} \right) dr + \int_{\mathrm{Rad}(x_0)}^\pi u'(r) \left( \frac{A_1(r)}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} - 1 \right) dr \right|, \\ &\quad \leq \|u'\|_\infty \left( \int_0^{\mathrm{Rad}(x_0)} \left| \frac{A_1(r)}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} - \frac{A(r)}{\mathrm{Vol}\, M} \right| dr + \big|\pi - \mathrm{Rad}(x_0)\big| \right) \end{aligned}$$

Soit $y_0$ un point de $M$ tel que $d(x_0, y_0) = \mathrm{Rad}(x_0)$. Les théorèmes 4.16 et 4.12, nous donnent alors (pour tout $r \leq \mathrm{Rad}(x_0)$) :

$$\begin{aligned} (1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}) \frac{A_1(r)}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} \leq \frac{A(r)}{\mathrm{Vol}\, M} &\leq 1 - \frac{\mathrm{Vol}\, B(y_0, \mathrm{Rad}(x_0) - r)}{\mathrm{Vol}\, M} \\ &\leq 1 - (1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}) \frac{A_1(\mathrm{Rad}(x_0) - r)}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} \\ &\leq \frac{A_1(r + \pi - \mathrm{Rad}(x_0))}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}} \qquad (5.2) \end{aligned}$$

(rappelons que $A_1(R) = \operatorname{Vol}\mathbb{S}^n$ lorsque $R \geq \pi$ et qu'on a prolongé la fonction $A_1$ par 0 pour les valeurs négatives de $R$).
D'où $\left|\frac{A(r)}{\operatorname{Vol} M} - \frac{A_1(r)}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}\right| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}} + \frac{\left(A_1(r+\pi-\operatorname{Rad}(x_0)) - A_1(r)\right)^+}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}$. Enfin, on a facilement que $\sup_r \frac{\left(A_1(r+h)-A_1(r)\right)^+}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n} = \frac{\int_{-h^+/2}^{h^+/2}(\cos t)^{n-1}dt}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos t)^{n-1}dt} \leq \frac{h^+\operatorname{Vol}\mathbb{S}^{n-1}}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}$. On en déduit donc que :

$$\left|\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M u\circ d_M(x_0,x)\,dv_g - \frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} u\circ d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x_0},x)\,dv_{can}\right| \leq \|u'\|_\infty C(p,n)\left[\epsilon^{\frac{1}{4}} + \left(\pi - \operatorname{Rad}(x_0)\right)^+\right]$$

(où on a utilisé la majoration $\left|\pi - \operatorname{Rad}(x_0)\right| = \left(\pi - \operatorname{Rad}(x_0)\right)^+ + \left(\pi - \operatorname{Rad}(x_0)\right)^- \leq \left(\pi - \operatorname{Rad}(x_0)\right)^+ + C(p,n)\sqrt{\epsilon}$, valable d'après le théorème 4.12).

□

Remarquons déjà que ce lemme permet de donner facilement un équivalent du théorème de Cheng [35] pour les variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$. Ce corollaire affirme que, si au moins un point d'une variété riemannienne de courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$ admet un $\epsilon$-presqu'antipode, alors cette variété admet au moins une valeur propre proche de $n$ :

**Corollaire 5.4.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soit $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (explicitement calculables) telles que pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, de dimension $n$ et qui vérifie $\sup_x \|\left(\underline{\operatorname{Ric}} - (n-1)\right)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon.\min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (où $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), on ait :*

$$Si\ \operatorname{Diam}(M) \geq \pi(1-\epsilon^{\frac{1}{4}})\ alors\ n\big(1 - C_2(p,n)\epsilon\big) \leq \lambda_1 \leq n\big(1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}\big),$$

*où $\lambda_1$ est la première valeur propre non nulle du laplacien de $(M^n, g)$ et où $C_2(p,n)$ est la constante universelle définie dans le théorème 4.18.*

**Remarque.** — Cet énoncé est une version faible d'un résultat de P. Bérard, G. Besson et S. Gallot (*cf* le corollaire (17) de [18]) et de son extension aux variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ par P. Petersen et C. Sprouse (*cf* [79]).

**Démonstration.** — Puisque $M$ est compacte d'après le théorème 4.12, il existe un couple de points $(x_0, y_0)$ de $M$ tels que $d(x_0,y_0) = \operatorname{Rad}(x_0) = \operatorname{Diam}(M)$. On considère la fonction $f = \cos d(x_0, .)$. On sait, d'après les rappels de la section 5.3, que cette fonction de la distance à un point est une fonction propre, associée à la valeur propre $n$, dans le cas particulier où $(M^n, g)$ est la sphère canonique. On va montrer que ce n'est pas loin d'être le cas sur toute variété $(M^n, g)$ vérifiant les hypothèses du corollaire 5.4.

On note $\bar f=\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M f$, d'après le lemme 5.3 et l'égalité $\frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n}\cos d(\bar x_0,.)=0$, on a :

$$|\bar f|\leq C(p,n)(\epsilon^{\frac14}+(\pi-\operatorname{Diam} M)^+)\leq C(p,n)\epsilon^{\frac14}.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
&\big|\|f-\bar f\|_2^2-\frac{1}{n+1}\big|\\
&\qquad\leq \big|\|f\|_2^2-\frac{1}{n+1}\big|+|\bar f|^2\\
&\qquad\leq \left|\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M\cos^2\big(d_M(x_0,.)\big)-\frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n}\cos^2\big(d_{\mathbb{S}^n}(\bar x_0,.)\big)\right|+|\bar f|^2\\
&\qquad\leq C(p,n)\epsilon^{\frac14}
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du théorème de Pythagore $\|f-\bar f\|_2^2=\|f\|_2^2-\bar f^2$, du lemme 5.3 appliqué à la fonction cos, de la majoration précédente de $|\bar f|$ et du fait (rappelé dans la section 5.3) que $\frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n}\cos^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar x_0,.)=\frac{1}{n+1}$. On en déduit que, si $\alpha(p,n)$ est assez petite (universellement), alors :

$$\|f-\bar f\|_2^2\geq\frac{1}{n+1}\big(1-C(p,n)\epsilon^{\frac14}\big)>0.$$

En appliquant de même le lemme 5.3 à la fonction $u=\sin^2$, on obtient :

$$\|d(f-\bar f)\|_2^2=\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M\sin^2\big(d(x_0,.)\big)\leq\frac{n}{n+1}\big(1+C(p,n)\epsilon^{\frac14}\big),$$

où on a utilisé l'égalité $\frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n}\sin^2\big(d_{\mathbb{S}^n}(\bar x_0,.)\big)=\frac{n}{n+1}$. On obtient donc l'estimée suivante du quotient de Rayleigh de la fonction $f-\bar f$ :

$$\frac{\|d(f-\bar f)\|_2^2}{\|f-\bar f\|_2^2}\leq n\frac{1+C(p,n)\epsilon^{\frac14}}{1-C(p,n)\epsilon^{\frac14}}\leq n\big(1+C(p,n)\epsilon^{\frac14}\big).$$

On conclut en utilisant le principe du min-max. Ceci nous donne la majoration de $\lambda_1$. La minoration découle du théorème 4.18.

□

Pour la suite, *nous notons* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une famille orthogonale de fonctions propres du laplacien de (M,g) telle que*

$$\begin{cases}\triangle f_i &= \lambda_i f_i\\ \|f_i\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{n+1},\end{cases}$$

*où* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est la suite des valeurs propres du laplacien de* $(M,g)$ *classées dans l'ordre croissant, chacune de ces valeurs propres étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité.*

*Pour tout point* $x_0$ *de M, nous notons* $(\alpha_{i|x_0})$ *la suite des coefficients de Fourier de la fonction* $\cos\big(d(.,x_0)\big)$ *relativement à la base hilbertienne* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$*, i.e. :*

$$\alpha_{i|x_0}=\frac{(n+1)}{\operatorname{Vol} M}\int_M\cos\big(d(x_0,x)\big)f_i(x)\,dx.$$

Le lemme suivant affirme que, si le point $x_0$ de $M$ admet un $\epsilon^{\frac{1}{4}}$-presqu'antipode sur $M$, alors la fonction $\cos\big(d(x_0,.)\big)$ est proche (au sens $L^2$) d'une combinaison linéaire des fonctions propres du laplacien associées à des valeurs propres proches de $n$ (comparer avec le cas de la sphère canonique décrit en section 5.3). C'est une généralisation d'un lemme de P. Petersen ([77]) au cas des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ :

**Lemme 5.5.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels arbitraires tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des constantes $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (universelles et explicitement calculables) telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, de dimension $n$, qui vérifie $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), et pour tout point $x_0$ de $M$ admettant un $\epsilon^{\frac{1}{4}}$-presqu'antipode (i.e. tel que $\mathrm{Rad}(x_0) \geq \pi - \epsilon^{\frac{1}{4}}$), on ait :*

*(i)* $\|cos(d(x_0,.)) - \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} \alpha_{i|x_0} f_i\|_{L^2(M)} \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{16}}$, *où* $k(\epsilon) = \sup\{i \,/\, \lambda_i \leq n + \epsilon^{\frac{1}{8}}\}$,

*(ii)* $\left|\sum\limits_{i=1}^{k(\epsilon)} \alpha_{i|x_0}^2 \; - 1\right| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{8}}$.

**Démonstration.** — En appliquant le lemme 5.3 aux fonctions $u = \sin^2$ et $u = \cos^2$, comme dans la démonstration du corollaire 5.4, on obtient l'existence d'une constante $C(p,n)$ telle que :

$$\Big|\frac{1}{\mathrm{Vol}\, M}\int_M \sin^2 d_M(x_0,.) - \frac{1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} \sin^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0,.)\Big| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$$

$$\Big|\frac{1}{\mathrm{Vol}\, M}\int_M \cos^2 d_M(x_0,.) - \frac{1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} \cos^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0,.)\Big| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\big|\|\nabla cos\, d_M(x_0,.)\|_2^2 &- n\|cos\, d_M(x_0,.)\|_2^2\big| \\
&\leq \Big|\|\nabla cos\, d_M(x_0,.)\|_2^2 - \frac{1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} \sin^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0,.)\Big| \\
&\qquad\qquad + \Big|\frac{1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} \sin^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0,.) - n\|cos\, d_M(x_0,.)\|_2^2\Big| \\
&\leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}} + n\Big|\frac{1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} \cos^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0,.) - \|cos\, d_M(x_0,.)\|_2^2\Big| \\
&\leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

où on a utilisé la relation $\frac{1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} \sin^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0,.) = \frac{n}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} \cos^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0,.)$ (rappelons que la fonction $\cos\big(d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0,.)\big)$ est une fonction propre de $(\mathbb{S}^n, can)$ associée à la valeur propre

$n$). En notant $k(\epsilon)$ le plus grand des indices $i$ tels que $\lambda_i \leq n + \epsilon^{\frac{1}{8}}$, on obtient l'estimée :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{(\lambda_i - n)}{n+1}\alpha^2_{i|x_0} &= \sum_{i\leq k(\epsilon)} \frac{(\lambda_i - n)}{n+1}\alpha^2_{i|x_0} + \sum_{i>k(\epsilon)} \frac{(\lambda_i - n)}{n+1}\alpha^2_{i|x_0} \\
&\geq \sum_{i\leq k(\epsilon)} \frac{(\lambda_i - n)}{n+1}\alpha^2_{i|x_0} + \epsilon^{\frac{1}{8}} \sum_{i>k(\epsilon)} \frac{\alpha^2_{i|x_0}}{n+1} \\
&\geq -\frac{n}{n+1}\alpha^2_{0|x_0} - C(p,n)\epsilon \sum_{1\leq i\leq k(\epsilon)} \alpha^2_{i|x_0} + \epsilon^{\frac{1}{8}} \sum_{i>k(\epsilon)} \frac{\alpha^2_{i|x_0}}{n+1} \\
&\geq -\frac{n}{n+1}\alpha^2_{0|x_0} - \|\cos d(x_0,.)\|_2^2 C(p,n)\epsilon + \epsilon^{\frac{1}{8}} \sum_{i>k(\epsilon)} \frac{\alpha^2_{i|x_0}}{n+1}
\end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de type Lichnerowicz 4.18 pour la deuxième inégalité. Or le lemme 5.3 nous donne :

$$\Big|\sum_{i\in\mathbb{N}} (\frac{\lambda_i - n}{n+1})\alpha^2_{i|x_0}\Big| = \Big|\|\nabla \cos\, d_M(x_0,.)\|_2^2 - n\|\cos\, d_M(x_0,.)\|_2^2\Big| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}},$$

puis $\|\cos\big(d(x_0,.)\big)\|_2^2 \leq \frac{1}{n+1} + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$ et enfin $|\alpha_{0|x_0}| = \frac{\sqrt{n+1}}{\operatorname{Vol} M}|\int_M \cos d(x_0,x)dx| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$, comme dans la preuve du corollaire 5.4. Des quatre dernières inégalités, on déduit l'estimée :

$$\epsilon^{\frac{1}{8}} \sum_{i>k(\epsilon)} \frac{\alpha^2_{i|x_0}}{n+1} \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}},$$

et donc :

$$\|cos\, d_M(x_0,.) - \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} \alpha_{i|x_0}.f_i\|_2^2 = \sum_{i>k(\epsilon)} \frac{\alpha^2_{i|x_0}}{n+1} \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{8}}.$$

Enfin, on obtient $(ii)$ en appliquant le lemme 5.3 à la fonction $u = \cos^2$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha^2_{i|x_0} - 1\Big| &= (n+1)\Big|\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M \cos^2 d_M(x_0,.) - \frac{1}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} \cos^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0,.)\Big| \\
&\leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\Big|\sum_{i=1}^{k(\epsilon)} \alpha^2_{i|x_0} - 1\Big| \leq \Big|\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha^2_{i|x_0} - 1\Big| + \sum_{i>k(\epsilon)} \alpha^2_{i|x_0} + \alpha^2_{0|x_0} \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{8}}.$$

□

Le théorème suivant affirme que, si $(M^n, g)$ est une variété de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, dont le Radius est plus grand que $\pi - \epsilon^{\frac{1}{4}}$, alors la variété admet $n+1$ valeurs propres proches de $n$ :

**Théorème 5.6.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels arbitraires tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (universellement* *calculables) telles que, pour toute variété riemannienne complète* $(M^n, g)$ *de dimension* $n$ *qui vérifie* $\sup_x \|(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1))^-\|_{L^p(B(x,R))} \le \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ *(avec* $\epsilon \le \alpha(p,n)$*), on ait :*

$$\textit{Si } \mathrm{Rad}(M) \ge \pi - \epsilon^{\frac{1}{4}} \textit{ alors } \lambda_{n+1} \le n\big(1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{8}}\big).$$

**Démonstration.** — Soit $x_0$ un point quelconque de $M$. De l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du lemme 5.5 ($i$) (qui s'applique, puisque *tout* point $x_0$ de $M$ admet un $\epsilon^{\frac{1}{4}}$-presque antipode, i.e. vérifie $\mathrm{Rad}(x_0) \ge \pi - \epsilon^{\frac{1}{4}}$), on déduit que, pour tout $\eta \le \mathrm{Diam}(M)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x_0,\eta)}\Big|\int_{B(x_0,\eta)} \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} \alpha_{i|x_0}.f_i - \int_{B(x_0,\eta)} \cos\big(d(x_0,.)\big)\Big| \\
&\qquad \le \left(\frac{\mathrm{Vol}\, M}{\mathrm{Vol}\, B(x_0,\eta)}\right)^{\frac{1}{2}} \|\sum_{i=1}^{k(\epsilon)} \alpha_{i|x_0} f_i - \cos\big(d(x_0,.)\big)\|_2 \\
&\qquad \le \frac{1}{\big(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2}}\big)} \left(\frac{\pi + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta}\right)^{n/2} C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{16}} \\
&\qquad \le C(p,n)\frac{\epsilon^{\frac{1}{16}}}{\eta^{n/2}},
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière inégalité découle des théorèmes de comparaison 4.6 et 4.12. En prenant $\eta = \epsilon^{\frac{1}{8(n+4)}}$ et en appliquant l'inégalité $|1 - \cos x| \le \frac{x^2}{2}$, on obtient, pour un choix convenable de $\alpha(p,n)$ :

$$\begin{aligned}
&\left|1 - \frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x_0,\eta)} \int_{B(x_0,\eta)} \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} \alpha_{i|x_0}.f_i(x) dv_g(x)\right| \\
&\qquad \le \frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x_0,\eta)} \int_{B(x_0,\eta)} |\cos d(x_0,.) - 1| \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x_0,\eta)}\Big|\int_{B(x_0,\eta)} \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} \alpha_{i|x_0}.f_i - \int_{B(x_0,\eta)} cos\big(d(x_0,.)\big)\Big| \\
&\qquad \le C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4(n+4)}}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après le lemme 5.5 (ii), on a :

$$\begin{aligned}
0 &\le \frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x_0,\eta)} \int_{B(x_0,\eta)} \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} \big(\alpha_{i|x_0} - f_i(x)\big)^2 dx \\
&\le (1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{8}}) - \frac{2}{\mathrm{Vol}\, B(x_0,\eta)} \int_{B(x_0,\eta)} \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} \alpha_{i|x_0}.f_i(x) dx \\
&\qquad + \frac{1}{\mathrm{Vol}\, B(x_0,\eta)} \int_{B(x_0,\eta)} \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} f_i^2(x) dx
\end{aligned}$$

Les deux inégalités précédentes nous donnent donc :

$$\int_{B(x_0,\eta)} \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} f_i^2(x)\,dx \geq \left(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4(n+4)}}\right) \operatorname{Vol} B(x_0,\eta),$$

lorsque $\epsilon$ est inférieur à une constante $\alpha'(p,n)$. En intégrant cette dernière inégalité par rapport à $x_0$ (les deux membres de l'inégalité sont des fonctions continues de $x_0$) :

$$\begin{aligned}\left(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4(n+4)}}\right) \int_M \frac{\operatorname{Vol} B(x,\eta)}{\operatorname{Vol} M} &\leq \frac{1}{\operatorname{Vol} M} \int_M \Big(\int_{B(x,\eta)} \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} f_i^2(y)\,dy\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{\operatorname{Vol} M} \int_M \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} f_i^2(x) \operatorname{Vol} B(x,\eta)\,dx \qquad (*)\end{aligned}$$

(la dernière égalité s'obtient en intégrant la fonction $(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} f_i(y)^2.\mathbb{1}_{[0,\eta[}\big(d(x,y)\big)$ sur $M \times M$ et en appliquant le théorème de Fubini). Les inégalités (5.2) de la démonstration du lemme 5.3 et l'égalité $\frac{A_1(\pi-r)}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n} = 1 - \frac{A_1(r)}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}$, nous donnent (en choisissant $\epsilon$ assez petit pour que $\eta \leq \pi - \epsilon^{\frac{1}{4}}$) :

$$\begin{aligned}\left(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}\right)\frac{A_1(\eta)}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n} \leq \frac{\operatorname{Vol} B(x,\eta)}{\operatorname{Vol} M} &\leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}} + \frac{A_1(\eta + \pi - \operatorname{Rad}(x))}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n} \\ &\leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}} + \frac{A_1(\eta + \epsilon^{\frac{1}{4}})}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n}\end{aligned}$$

Si on utilise ces estimées du rapport $\frac{\operatorname{Vol} B(x,\eta)}{\operatorname{Vol} M}$ dans l'inégalité $(*)$, on obtient :

$$\left(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4(n+4)}}\right)\frac{A_1(\eta)}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n} \leq \left[\frac{A_1(\eta + \epsilon^{\frac{1}{4}})}{\operatorname{Vol}\mathbb{S}^n} + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}\right] \|\sum_{i=1}^{k(\epsilon)} f_i^2\|_1$$

En remarquant que $A_1(\eta + \epsilon^{\frac{1}{4}}) \leq A_1(\eta) + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$ et que $\epsilon^{\frac{1}{4}} \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{8}} A_1(\eta)$ si $\eta \leq \frac{\pi}{2}$ et en utilisant le fait que $\|f_i\|_2^2 = \frac{1}{n+1}$, on en déduit :

$$\frac{k(\epsilon)}{n+1} = \frac{1}{\operatorname{Vol} M} \int_M \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} f_i^2(x)\,dx \geq (1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4(n+4)}}),$$

et donc $k(\epsilon) \geq n{+}1$ si la constante $\alpha(p,n)$ est choisie assez petite (rappelons que $k(\epsilon)$ est un entier).

□

### 5.4.2 Variétés vérifiant $\lambda_{n+1} \leq n{+}\epsilon$

Dans cette sous-section, nous passons à la démonstration du fait que, si une variété riemannienne $(M^n, g)$ complète est à courbure de Ricci presque supérieure à $(n{-}1)$ et si son laplacien admet $n{+}1$ valeurs propres proches de $n$, alors son volume est presque maximal.

Plus précisément, on va démontrer le théorème suivant, qui est une généralisation au cas des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ d'un théorème de P. Petersen (voir [77]) :

**Théorème 5.7.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels arbitraires tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (explicitement calculables) telles que pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, de dimension $n$, qui vérifie $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^- \|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), on ait :*

$$\text{Si } \lambda_{n+1} \leq n + \epsilon \text{ alors } \operatorname{Vol} M \geq \big(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}\big) \operatorname{Vol} \mathbb{S}^n.$$

**Remarque.** — Ce théorème achève de démontrer que, pour une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, il est équivalent d'être de volume presque maximal, de Radius presque maximal ou de $(n+1)$-ième valeur propre (non nulle) du laplacien presque minimale.

Pour démontrer ce théorème, nous allons construire une application $\Phi$ de $M$ dans $\mathbb{S}^n$, à partir de la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ des fonctions propres de $(M^n, g)$ associées aux valeurs propres proches de $n$, en posant :

$$\begin{array}{rcl} \Phi \; : \; M & \to & \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\big(\sum_j f_j(x)^2\big)^{1/2}}.\big(f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)\big) \end{array} \tag{5.3}$$

Nous démontrerons que $\Phi$ est bien définie, presque contractante et surjective, ce qui donnera la presque maximalité du volume de $(M^n, g)$. On montrera même, dans la sous-section suivante, que $\Phi$ réalise une approximation de Hausdorff sur $\mathbb{S}^n$ de degré $\pm 1$. Notre schéma de preuve est une adaptation de celui de P. Petersen dans [77] (voir aussi [9] pour une démonstration du théorème de P. Petersen en courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, suivant le schéma de preuve qui suit), mais les outils analytiques utilisés par P. Petersen dans [77] (des inégalités à la Abresch-Gromoll) sont remplacés par les résultats de la première partie de la thèse appliqués à des sections $S_i$ (construites à partir des fonctions $f_i$) d'un certain fibré riemannien $E$ au-dessus de la variété $M$. Commençons donc par définir le fibré $E$ et les sections $S_i$ :

### Fibré augmenté et opérateur $\triangle_{sph}$

Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne compacte. On note $E$ le fibré vectoriel au dessus de $M$ obtenu comme somme directe de $TM$ et d'un fibré trivial en droite. Une fois choisie une section non nulle $e$ du fibré en droite, nous noterons ce fibré $TM \oplus \mathbb{R}\, e$ et nous identifierons $TM$ a un sous-fibré de $E$ d'où l'appellation de "fibré augmenté" pour le fibré $E$. On peut alors munir $E$ d'une structure de fibré riemannien en prenant comme métrique :

$$< X + fe, Y + he >_E = g(X,Y) + fh$$

pour tout couple de sections $(X, Y)$ de $TM$ et tout couple de fonctions $(f, h)$ sur $M$. Pour munir $E$ d'une connection linéaire compatible avec la métrique $< .,. >_E$, on note $D^M$ la connection de Levi-Civita de $(M, g)$, on a alors :

**Lemme 5.8.** — *L'application*

$$\begin{array}{rcl} D^E \ : \ \Gamma(M) \otimes \Gamma(E) & \to & \Gamma(E) \\ (Z, X + fe) & \mapsto & D^E_Z(X + fe) = D^M_Z X + fZ + \big(df(Z) - g(Z, X)\big).e \end{array}$$

*définit une connection linéaire sur $E$ qui est compatible avec la métrique $< .,. >_E$.*

**Remarque.** — À propos de ce fibré augmenté et de ses liens avec les théorèmes de la sphère, on pourra consulter les travaux de E. Ruh [86] et S. Gallot [46].

**Démonstration.** — Le fait que $D^E$ vérifie les axiomes d'une connexion linéaire ne pose aucun problème. Soit $S_1 = X_1 + f_1 e$ et $S_2 = X_2 + f_2 e$ des sections quelconques de $E$ et $Z$ un champ de vecteurs de $M$, on a :

$$\begin{array}{rcl} Z. < S_1, S_2 >_E & = & Z.\big(g(X_1, X_2) + f_1 f_2\big) \\ & = & g\big(D^M_Z X_1, X_2\big) + g\big(X_1, D^M_Z X_2\big) + df_1(Z).f_2 + f_1.df_2(Z) \end{array}$$

D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} < D^E_Z S_1, S_2 >_E & = & g\big(D_Z X_1 + f_1 Z, X_2\big) + \big(df_1(Z) - g(Z, X_1)\big).f_2 \\ & = & g\big(D^M_Z X_1, X_2\big) + df_1(Z).f_2 + f_1.g(Z, X_2) - f_2.g(Z, X_1) \end{array}$$

D'où $Z. < S_1, S_2 >_E = < D^E_Z S_1, S_2 >_E + < S_1, D^E_Z S_2 >_E$.

□

Dans la suite, on note $\boldsymbol{\pi}$ la projection orthogonale de $E$ sur le sous fibré $TM$ (définie par $\boldsymbol{\pi}(X + fe) = X$) et $A$ la symétrie orthogonale d'hyperplan $TM$ (définie par la relation $A(X + fe) = X - fe$). Le tenseur de Ricci de $(M, g)$ pouvant être considéré comme un champ d'endomorphismes symétriques sur $TM$, on obtient un champ, $\mathrm{Ric}'$ de même nature sur $E$, en posant $\mathrm{Ric}'(X + fe) = \mathrm{Ric}_M(X) - (n-1)X$. On notera par la suite $\triangle_{sph}$ l'opérateur (laplacien+potentiel) agissant sur les sections de $E$ de potentiel $\mathrm{Ric}'$. Autrement dit, on pose :

$$\triangle_{sph} = \big(D^E\big)^* D^E + V = \overline{\triangle}^E + \mathrm{Ric}'.$$

**Sections** $S_i$

Nous commençons par le cas où $(M^n, g)$ est une variété riemannienne de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ et qui admet $k$ valeurs propres non nulles plus petites que $n+\epsilon$. Le lemme suivant nous permettra d'obtenir des estimées sur le comportement des fonctions propres de $M$ :

**Lemme 5.9.** — *Soit $f : M \to \mathbb{R}$ telle que $\triangle f = \lambda f$. On pose $S_f = \nabla f + f.e$, on a alors :*

$$\triangle_{sph}(S_f) = (\lambda - n)A(S_f)$$

**Démonstration.** — On choisit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ un repère local de $TM$ orthonormal et de dérivée covariante nulle en $x$, alors :

$$\begin{aligned}
\overline{\triangle}^E(S_f)(x) &= -\sum_{i=1}^{n} (D^E)^2 S_f(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} -D^E_{e_i}(D^E_{e_i} S_f) \\
&= \sum_{i=1}^{n} -D^E_{e_i}\big(D^M_{e_i} \nabla f + f e_i - g(e_i, \nabla f).e + df(e_i).e\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} -D^M_{e_i} D^M_{e_i} f + g\big(D^M_{e_i} \nabla f, e_i\big).e - df(e_i).e_i + f.e \\
&= \overline{\triangle}_M \nabla f - \nabla f + nf.e - \triangle f.e
\end{aligned}$$

où $\overline{\triangle}_M$ est le laplacien brut de $TM$ pour la connection de Levi Civita $D^M$. D'autre part, on a $\mathrm{Ric}'(S_f) = \mathrm{Ric}(\nabla f) - (n-1)\nabla f$. Enfin, l'opérateur $\overline{\triangle}_M + \mathrm{Ric}_M$ n'est autre que l'opérateur de Hodge $\triangle_H$ sur les 1-formes, dont l'action est transplantée sur les champs de vecteurs par l'identification de $T^*M$ et de $TM$ donnée par la métrique $g$. On en déduit que $\big(\overline{\triangle}_M + \mathrm{Ric}_M\big)(\nabla f) = \triangle_H(\nabla f) = \nabla(\triangle f)$, et donc :

$$\begin{aligned}
\triangle_{sph}(S_f) &= \big(\overline{\triangle}_M + \mathrm{Ric}_M - n\, Id_{TM}\big)(\nabla f) - (\triangle f - nf).e \\
&= (\lambda - n)(\nabla f - f.e) = (\lambda - n)A(S_f). \qquad \square
\end{aligned}$$

L'opérateur $\triangle_{sph}$ est à potentiel presque positif sur les variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ ; en effet l'hypothèse sur la courbure de Ricci s'écrit plus précisément : il existe un $R > 0$ tel que $\sup\limits_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$. Comme $\mathrm{Ric}' = \big(\mathrm{Ric} - (n-1)\big) \circ \pi$, le lemme 4.10 permet d'en déduire qu'on a l'inégalité $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}'}\big)^-\|_{L^p(B(x,4\pi))} \leq 36\epsilon$, donc que $\|\big(\underline{\mathrm{Ric}'}\big)^-\|_{L^p(M)} \leq 36\epsilon$, puisque le théorème de type Myers 4.12 prouve que $M = B(x, 4\pi)$. Or le théorème 4.17 nous donne un majorant universel des constantes de Sobolev des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$. Ceci nous permet d'appliquer le corollaire 3.4 (*iii*) et d'en déduire le :

**Lemme 5.10.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des constantes strictement positives $\alpha(p,n)$, $\alpha'(p,n)$ et $C(p,n)$ (explicitement calculables) telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, de dimension $n$, qui vérifie la condition* $\sup_x \|\left(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\right)^- \|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ *(avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), on ait :*

*(i) Le nombre de valeurs propres non nulles $\lambda_i(M^n, g)$ du laplacien usuel qui sont inférieures à $n + \alpha'(p,n)$ est au plus égal à $n+1$. Le nombre de valeurs propres de l'opérateur $\triangle_{sph}$ qui sont inférieures à $\alpha'(p,n)$ est au plus égal à $n+1$.*

*(ii) Si $\lambda_k(M^n, g) \leq n + \epsilon$, alors $0 \leq \lambda_k(\overline{\triangle}^E) \leq 146\epsilon$ et $-72\epsilon \leq \lambda_1(\triangle_{sph}) \leq \ldots \leq \lambda_k(\triangle_{sph}) \leq \epsilon$.*

**Démonstration.** — Nous avons vu ci-dessus (*cf* la discussion qui précède le lemme 5.10) que l'hypothèse faite sur la courbure de Ricci implique que le diamètre de $(M^n, g)$ est majoré par $2\pi$ (par le théorème 4.12), que la constante de Sobolev $S_{2p}(M^n, g)$ est majorée par une constante $C(p,n)$ (en appliquant le corollaire 1.3, où l'on remplace $q$ par $2p$) et que $\|\left(\underline{\mathrm{Ric}'}\right)^-\|_{L^p(M)} \leq 36\epsilon$. On en déduit que l'opérateur $\triangle_{sph} = \overline{\triangle}^E + \mathrm{Ric}'$ vérifie les hypothèses du corollaire 3.4 (pour un choix convenable de la constante $\alpha(p,n)$), où l'on remplace $q$ par $2p$. Le corollaire 3.4 (*i*) implique que $\lambda_1(\triangle_{sph}) \geq -72\epsilon$. Le corollaire 3.4 (*iii*) prouve que, si on pose $\alpha'(p,n) = \frac{1}{4\pi^2 C(p,n)^2}\left[\left(\frac{\gamma(n+2)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{2p}} - 1\right]$, alors $\lambda_{n+2}(\triangle_{sph}) \geq \alpha'(p,n) > 0$, donc $\triangle_{sph}$ n'a pas plus de $n+1$ valeurs propres inférieures à $\alpha'(p,n)$.
Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille $L^2$-orthonormée de fonctions propres du laplacien usuel, correspondant à des valeurs propres non nulles $\lambda_i$, que nous supposerons classées par ordre croissant et inférieures ou égales à $n + \epsilon$ (i.e. $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_i \leq \ldots \leq \lambda_k \leq n + \epsilon$), alors les sections $\widetilde{S}_{f_i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i + 1}} S_{f_i}$ forment une famille $L^2$-orthonormée de sections de $E$ qui (en vertu du lemme 5.9) a aussi la propriété d'orthogonalité suivante, par rapport à la forme quadratique associée à $\triangle_{sph}$ :

$$\begin{aligned} < \triangle_{sph}(\widetilde{S}_{f_j}), \widetilde{S}_{f_i} >_{L^2} &= (\lambda_i - n) < A(\widetilde{S}_{f_j}), \widetilde{S}_{f_i} >_{L^2} \\ &= \frac{(\lambda_i - n)(\lambda_i - 1)}{\lambda_i + 1}\, \delta_{ij}, \end{aligned}$$

car les familles $(f_i)_i$ et $(\nabla f_i)_i$ sont orthogonales 2 à 2 pour les produits scalaires $L^2$ associés. Le théorème 4.18 implique que, si $\alpha(p,n)$ est choisi plus petit que $\frac{n-1}{nC_2(p,n)}$ (où $C_2(p,n)$ est la constante définie dans le théorème 4.18), alors $\lambda_i \geq \lambda_1(M^n, g) \geq n(1 - C_2(p,n)\epsilon) > 1$, donc $\frac{(\lambda_i - n)(\lambda_i - 1)}{\lambda_i + 1} < \epsilon$ pour tout indice $i$ de $[\![1, k]\!]$. On déduit de ce qui précède que toute combinaison linéaire $S$ (à coefficients constants) des sections $\widetilde{S}_{f_i}$ vérifie :

$$\frac{< \triangle_{sph}(S), S >_{L^2}}{\|S\|^2_{L^2}} \leq \sup_{1 \leq i \leq k} \frac{(\lambda_i - n)(\lambda_i - 1)}{\lambda_i + 1} < \epsilon$$

Le principe du min-max permet d'en déduire que $\lambda_k(\triangle_{sph}) < \epsilon$.
Si $\epsilon \leq \alpha'(p,n)$, il n'existe pas plus de $n$+1 valeurs propres de $\triangle_{sph}$ qui vérifient cette dernière inégalité ; on en déduit que $k \leq n+1$ et que le laplacien de $(M^n, g)$ n'a pas plus de $n$+1 valeurs propres inférieures à $n$+$\epsilon$. Ceci prouve $(i)$.
Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\|D^E S\|_2^2 &= < \overline{\triangle}^E S, S >_{L^2} = < \triangle_{sph} S, S >_{L^2} - < \mathrm{Ric}'(S), S >_{L^2} \\ &\leq \epsilon \|S\|_2^2 + \|\big(\underline{\mathrm{Ric}}'\big)^-\|_p \, \|S\|^2_{\frac{2p}{p-1}}.\end{aligned}$$

L'inégalité de Sobolev du théorème 4.17 (appliquée en y remplaçant $q$ par $2p$) donne :

$$\|S\|_{\frac{2p}{p-1}} - \|S\|_2 \leq C(p,n)\|d(|S|)\|_2 \leq C(p,n)\|D^E S\|_2,$$

la seconde inégalité étant l'inégalité de Kato. En injectant ceci dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$(1 - 72C(p,n)^2\epsilon)\|D^E S\|_2^2 \leq 73\epsilon\|S\|_2^2.$$

Si $\alpha(p,n)$ est choisi plus petit que $\frac{1}{144\, C(p,n)^2}$, le principe du min-max permet d'en déduire que $\lambda_k(\overline{\triangle}^E) \leq 146\epsilon$.

□

Dans la suite, à tout élément d'une famille $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $L^2$-orthogonale, de fonctions propres du laplacien de (M,g) telles que

$$\begin{cases} \triangle f_i & = & \lambda_i f_i \\ \|f_i\|^2_{L^2} & = & \frac{1}{n+1}, \end{cases}$$

on associe une section $S_i$ du fibré $E$ en posant $S_i = S_{f_i} = \nabla f_i + f_i.e$. On se place maintenant dans le cas où le laplacien usuel $\triangle$ de la variété riemannienne $(M^n, g)$ (complète, de dimension $n$ et de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$) admet un nombre maximal $(n$+1) de valeurs propres proches de $n$. On obtient alors les estimées analytiques et géométriques suivantes, qui nous serviront dans la suite à étudier l'application $\Phi$ définie plus haut :

**Lemme 5.11.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (explicitement calculables) telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, de dimension $n$, qui vérifie les conditions $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ et $\lambda_{n+1} \leq n+\epsilon$ (avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), on ait :*

$$(i) \qquad \|\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i S_i\|_\infty \leq (1 + C(p,n)\sqrt{\epsilon})\|\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i S_i\|_2$$

*pour tout* $(\alpha_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$. *De plus, il existe un sous-ensemble* $M_\epsilon$ *de* $M$ *tel que :*

$$(ii) \qquad \begin{cases} \operatorname{Vol} M_\epsilon \geq \big(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}\big) \operatorname{Vol} M \\ | < S_i(x), S_j(x) >_E - \delta_{ij}| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}} \text{ pour tout } x \in M_\epsilon \end{cases}$$

*De plus, pour tout réel* $A > 0$*, il existe des constantes universelles* $C(p,n,A)$ *et* $\alpha(p,n,A)$ *telles pour tout variété* $(M^n, g)$ *qui vérifie* $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^- \|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ *(avec* $\epsilon \leq \alpha(p,n,A)$*) et* $\|R\|_{p'} \leq A$ *(où* $p' = \max(p,2)$*), on ait :*

$$(iii) \qquad \| < S_i, S_j >_E - \delta_{ij}\|_\infty \leq C(p,n,A)\epsilon^{\beta(p,n)},$$

*où* $\beta(p,n) = \frac{2p-n}{2(2p^2+pn-2n)}$ *si* $n \geq 4$ *et* $\beta(p,n) = \frac{2p-n}{8p}$ *si* $n = 2$ *ou* $n = 3$.

**Remarque.** — Le lemme 5.11 regroupe toutes les estimées qui seront nécessaires pour finir la preuve du théorème 5.7.

**Démonstration.** — D'après le lemme 5.9, la famille de sections $(\sqrt{\frac{n+1}{\lambda_i+1}}S_i)$ est $L^2$-orthonormée et vérifie $\triangle_{sph} S_i = (\lambda_i - n)A(S_i)$ pour tout indice $i$ de $\{1, \ldots, n+1\}$, où $A$ est un champ d'isométries de $E$. D'après la variante décrite p. 70, on peut appliquer la proposition 3.1 et le lemme 3.5 à l'opérateur $\triangle_{sph} = \overline{\triangle}_E + \mathrm{Ric}'$ et à la famille $(\sqrt{\frac{n+1}{\lambda_i+1}}S_i)$ en y remplaçant $p$ par $2p$ et $q$ par $\frac{2p+n}{2}$ (rappelons que la constante de Sobolev $S_{p+\frac{n}{2}}(M^n, g)$ et le diamètre sont majorés (en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$) par les théorèmes 4.17 et 4.12, que l'hypothèse intégrale sur $B(x,R)$ vérifiée par $\mathrm{Ric}' = \mathrm{Ric} - (n-1)$ implique une propriété intégrale analogue sur $M$ tout entier, d'après la discussion qui précède le lemme 5.10, et donc que l'opérateur $\triangle_{sph}$ est presque positif, les valeurs "propres" $(\lambda_i - n)$ étant petites par hypothèse).

Pour démontrer $(iii)$, on applique la proposition 2.11. Si $S = \sum_i \alpha_i S_i$, la proposition 2.11 (où on remplace $p$ par $2p$ et q par $\frac{2p+n}{2}$) nous donne :

$$1 - \frac{\inf|S|}{\sup|S|} \leq C'\big(1 + (p-2)C\Lambda\big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\Big)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}},$$

où $C$ est un majorant de la constante $S_{p+\frac{n}{2}}(M^n,g)$, où $C'$ est un majorant de la constante $S'_{2p}(M^n, g)$, où $\gamma = \frac{(2p-n)}{(2p+n)(p-1)}$ si $n \geq 4$ ($\gamma = \frac{2p-n}{2p+n}$ si $n = 2$ ou $n = 3$), et où :

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_p + \|\mathrm{R^E}\|_\mathrm{p} + \mathrm{Diam(M)}^2\Big[\frac{\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|^2_{\mathrm{p'}}}{\|\mathrm{S}\|^2_\infty} + \frac{\|\mathrm{R^E S}\|^2_{\mathrm{p'}}}{\|\mathrm{S}\|^2_\infty}\Big]}$$

Or, la courbure $\mathrm{R^E}$ du fibré $E$ est la différence des courbures $\mathrm{R^M}$ de $M$ et de la courbure $\mathrm{R}^{\mathbb{S}^n}$ de $\mathbb{S}^n$ (agissant sur $(TM)^3$ selon la formule $\mathrm{R}^{\mathbb{S}^n}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Z} = \mathrm{g}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Z} - \mathrm{g}(\mathrm{X},\mathrm{Z})\mathrm{Y}$, donc $\|\underline{Ric}\|_p$, $\|Ric'\|_p$ et $\|R^E\|_{p'}$ sont majorés par $C(n)(A+1)$. Par ailleurs, par définiton de $\triangle_{sph}$, on a :

$$|\overline{\triangle}S| \leq |\sum_i (\lambda_i - n)\alpha_i A(S_i)| + |\,\mathrm{Ric}'\,||S| = |\sum_i (\lambda_i - n)\alpha_i S_i| + |\,\mathrm{Ric}'\,||S|$$

puisque $A$ est une isométrie. L'inégalité $(i)$ nous donne alors :

$$\begin{aligned}
\|\overline{\triangle} S\|_{p'} &\leq \| \sum_i (\lambda_i - n)\alpha_i S_i\|_\infty + \| \operatorname{Ric}' \|_{p'} \|S\|_\infty \\
&\leq (1 + C(p,n)\sqrt{\epsilon})\big(\| \sum_i (\lambda_i - n)\alpha_i S_i\|_2 + \| \operatorname{Ric}' \|_{p'} \|S\|_\infty\big) \leq C(p,n)(\epsilon + A + 1)\|S\|_\infty
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant le même raisonnement que dans la preuve du lemme 5.10, on a :

$$\begin{aligned}
\|DS\|_2^2 &= < \triangle_{sph}(S), S >_{L^2} - < \operatorname{Ric}'(S), S >_{L^2} \\
&\leq \sum_i (\lambda_i - n)\alpha_i\alpha_j < A(S_i), S_j >_{L^2} + \int_M \big(\underline{\operatorname{Ric}} - (n-1)\big)^- |S|^2 \\
&\leq \epsilon \sum_i \alpha_i^2 \|S_i\|_2^2 + \|\big(\underline{\operatorname{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_p \|S\|_\infty^2 \\
&\leq 37\epsilon \|S\|_\infty^2
\end{aligned}$$

Enfin, les constantes de Sobolev $S_{p+\frac{n}{2}}(M^n,g)$ et $S'_{2p}(M^n,g)$ sont majorées par le théorème 4.17. On déduit des inégalités qui précèdent et du théorème 4.12 que, pour toute combinaison linéaire $S$ des sections $S_i$, on a :

$$1 - \frac{\inf |S|}{\sup |S|} \leq C(p,n,A)\epsilon^{\frac{2p-n}{2(2p^2+pn-2n)}}$$

(remarquez que la preuve est la même dans les cas où la dimension $n$ vaut 2 ou 3, mais qu'alors $\epsilon$ apparait à la puissance $\frac{2p-n}{8p}$). On conclut alors en utilisant la remarque qui suit la proposition 3.12.

$\square$

**Retour à la fonction $\Phi$**

**a) $\Phi$ est bien définie sous nos hypothèses :**

Bien entendu, telle quelle, l'application $\Phi$ (définie en (5.3)) n'est pas correctement définie sur **toute** la variété riemannienne $(M^n,g)$, car les fonctions $f_i$ peuvent toutes s'annuler au même point. Mais, sous nos hypothèse de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, en appliquant le lemme 5.11, on obtient l'estimée suivante, qui implique que $\Phi$ est définie en tout point de $M$ :

**Lemme 5.12.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (explicitement calculables) telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n,g)$ de dimension $n$ qui vérifie la condition $\sup_x \|\big(\underline{\operatorname{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), on a :*

$$Si\ \lambda_{n+1} \leq n+\epsilon \ alors\ \|\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \ - 1\|_\infty \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}.$$

**Démonstration.** — Soit $x_0$ un point quelconque de $M$. On applique le lemme 5.11 avec $\alpha_i = f_i(x_0)$, on a alors $\|\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)S_i\|_\infty \leq (1+C(p,n)\sqrt{\epsilon})\|\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)S_i\|_2$. En projetant orthogonalement la section $\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)S_i$ sur R.e et sur $TM$ au point $x_0$, on obtient les deux inégalités :

$$|\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)^2|^2 \leq |\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)S_i(x_0)|_E^2 \leq \big(1+C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)^2 \|\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)S_i\|_2^2$$
$$\leq \big(1+C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)^2 \Big(\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)^2 \frac{\lambda_i+1}{n+1}\Big) \leq \big(1+C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)^2 (\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)^2)\frac{n+\epsilon+1}{n+1}$$

et

$$|d_{x_0}(\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2)|^2 = 4|\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)\nabla f_i(x_0)|^2 \leq 4|\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)S_i(x_0)|_E^2$$
$$\leq 4\big(1+C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)^2 (\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)^2)\frac{n+\epsilon+1}{n+1}.$$

On en déduit que la fonction $h = \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2$ vérifie les inégalités $\|h\|_\infty \leq \big(1+C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)$, $\|h\|_1 = 1$ et $\|dh\|_\infty \leq C(p,n)$. Le résultat annoncé découle donc directement du lemme suivant :

**Lemme 5.13.** — *Soit $(M^n,g)$ vérifiant les hypothèses du lemme 5.12 et $h : M \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les inégalités $\|h\|_\infty \leq (1+\epsilon)\|h\|_1$ et $\|dh\|_\infty \leq C\|h\|_1$, alors, on a :*

$$\big\|\|h\|_1 - |h|\big\|_\infty \leq 4(C\pi)^{\frac{n}{n+1}}\epsilon^{\frac{1}{n+1}}\|h\|_1.$$

**Démonstration.** — La preuve combine celle du corollaire 3.5 et le théorème 4.6. Si $\|h\|_1 = 0$, le résultat annoncé est trivialement vérifié. On suppose donc dans la suite que $\|h\|_1 > 0$. Soit $a = \inf|h|$ et $x_0$ un point où cet infimum est atteint. Sur la boule $B(x_0,\eta)$, on a (par le théorème des accroissements finis) $|h| \leq a + C\eta\|h\|_1$. D'où :

$$\begin{aligned} \|h\|_1 &= \frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_{B(x_0,\eta)} |h| + \frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_{M\setminus B(x_0,\eta)} |h| \\ &\leq \frac{\operatorname{Vol} B(x_0,\eta)}{\operatorname{Vol} M}\big(a + C\eta\|h\|_1\big) + \left(1 - \frac{\operatorname{Vol} B(x_0,\eta)}{\operatorname{Vol} M}\right)(1+\epsilon)\|h\|_1. \end{aligned}$$

On en déduit que $\epsilon\|h\|_1 \geq \frac{\operatorname{Vol} B(x_0,\eta)}{\operatorname{Vol} M}\big((1+\epsilon)\|h\|_1 - a - C\eta\|h\|_1\big)$. On pose $\eta = \frac{(1+\epsilon)\|h\|_1 - a}{2C\|h\|_1}$ ($\eta$ est alors positif par hypothèse). En utilisant la majoration du diamètre donnée par le théorème 4.12, puis le théorème 4.6 (en remarquant que les hypothèses du lemme 5.12

impliquent que $\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p,4\pi} \leq \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{p,4\pi} \leq 36\epsilon$, cf la discussion qui précède le lemme 5.10), on obtient $\frac{\mathrm{Vol}\, B(x,\eta)}{\mathrm{Vol}\, M} \geq \frac{\mathrm{Vol}\, B(x,\eta)}{\mathrm{Vol}\, B(x,\pi+C(p,n)\sqrt{\epsilon})} \geq \frac{\eta^n(1-C(p,n)\sqrt{\epsilon})}{(\pi+C(p,n)\sqrt{\epsilon})^n}$, dont on déduit :

$$\epsilon\|h\|_1 \geq \frac{\big((1+\epsilon)\|h\|_1 - a\big)^{n+1}\big(1 - C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)}{2^{n+1}\|h\|_1^n C^n\big(\pi + C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)^n}.$$

Lorsque $C(p,n)\sqrt{\epsilon} \leq \frac{1}{2}$, on obtient $\epsilon\|h\|_1 \geq \frac{((1+\epsilon)\|h\|_1 - a)^{n+1}}{4^{n+1}\|h\|_1^n C^n \pi^n}$, ce dont on déduit l'inégalité $a \geq (1+\epsilon)\|h\|_1 - 4(\pi C)^{\frac{n}{n+1}}\epsilon^{\frac{1}{n+1}}\|h\|_1$. On obtient donc $|h| - \|h\|_1 \geq -4(\pi C)^{\frac{n}{n+1}}\epsilon^{\frac{1}{n+1}}\|h\|_1$. Or $|h| - \|h\|_1 \leq \epsilon\|h\|_1$ par hypothèse, d'où le résultat annoncé.

□

Maintenant que l'application $\Phi$ est bien définie, on va exprimer sa différentielle $d\Phi$ en fonction des sections $S_i$ :

**b) Calcul de $d\Phi$ :**

Soit $x$ un point de $M$, alors $d_x\Phi$ est une application de $T_xM$ dans $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. On va en fait calculer ${}^t d_x\Phi$, l'application transposée de $d_x\Phi$ vue comme une application de $(T_xM, g_x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique, qu'on notera $< .,. >_{\mathbb{R}^{n+1}}$ :

Soit $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n+1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ alors, pour tout vecteur $X$ de $T_xM$, on a

$$\begin{aligned} g({}^t d\Phi(\varepsilon_i), X) &= < \varepsilon_i, d_x\Phi(X) >_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}}\Big(d_x f_i(X) - \frac{f_i}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f_k}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}} d_x f_k(X)\Big) \\ &= \frac{1}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}}\Big(d_x f_i(X) - \Phi_i\sum_{k=1}^{n+1}\Phi_k d_x f_k(X)\Big) \\ &= \frac{1}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}}\, g\Big(\nabla f_i - \Phi_i\sum_{k=1}^{n+1}\Phi_k.\nabla f_k, X\Big) \end{aligned}$$

On en déduit que ${}^t d_x\Phi(\varepsilon_i) = \frac{\nabla f_i - \Phi_i\sum_{k=1}^{n+1}\Phi_k.\nabla f_k}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{S_i - \Phi_i\sum_{j=1}^{n+1}\Phi_j S_j}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}}$ (moyennant l'identification de $TM$ avec un sous-fibré riemannien de $E$), car $\Phi_i(x)\sum_{k=1}^{n+1}\Phi_k(x)f_k(x) = f_i(x)$. On en déduit le :

**Lemme 5.14.** — *Pour tout vecteur $v$ de $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n(= \Phi(x)^\perp)$, on a ${}^t d_x\Phi(v) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} v_i S_i}{(\sum f_j^2)^{\frac{1}{2}}}$, où $TM$ est identifié à un sous-fibré riemannien de $E$.*

**c) $\Phi$ est presque contractante**

On déduit tout de suite du lemme 5.14 que, pour tout couple $(u,v)$ de vecteurs tangents à $\mathbb{S}^n$ en $\Phi(x)$, on a :

$$|g({}^t d_x\Phi(v), {}^t d_x\Phi(u)) - < u, v >_{\mathbb{R}^{n+1}} | \leq | \sum_{ij} v_i u_j \Big( \frac{< S_i, S_j >_E}{\sum_k f_k^2} - \delta_{ij} \Big)|. \qquad (*)$$

Le lemme 5.11 se traduit alors en un résultat de pincement autour de 1 des valeurs propres de l'endomorphisme $d_x\Phi \circ {}^t d_x\Phi$. La version du lemme 5.11 avec majoration de la courbure sectionnelle nous permettra d'obtenir le théorème 5.18 de la section 5.5 (qui affirme que dans ce cas $\Phi$ est un difféomorphisme presque isométrique de $(M^n, g)$ sur $(\mathbb{S}^n, can)$).

Si on ne suppose plus de borne a priori sur $\|R\|_p$, alors les lemmes 5.11 $(i)$ et 5.12 nous donnent quand même que :

$$\begin{aligned}\big|g({}^t d_x\Phi(v), {}^t d_x\Phi(v))\big| &\leq \frac{\|\sum_i v_i S_i\|_\infty^2}{\inf \sum_k f_k^2} \leq \frac{(1 + C(p,n)\sqrt{\epsilon})^2}{(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}})} \| \sum_i v_i S_i \|_2^2 \\ &\leq (1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}) \|v\|_{\mathbb{R}^{n+1}}^2 .\end{aligned}$$

Si $u$ et $v$ parcourent respectivement les sphères unitaires de $T_xM$ et de $\mathbb{R}^{n+1}$, on a $\sup_{u,v} g\big({}^t d_x\Phi(v), u\big) = \sup_{u,v} < v, d_x\Phi(u) >_{\mathbb{R}^{n+1}}$, d'où $\|{}^t d_x\Phi\| = \|d_x\Phi\|$. On en déduit le :

**Lemme 5.15.** — *Sous les hypothèses du théorème 5.7, l'application $\Phi$ est presque-contractante. Plus précisément, on a :*

$$\|d\Phi\|_\infty \leq \big(1 + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}\big)$$

Nous allons maintenant prouver que, sous nos hypothèses, $\Phi$ est surjective sur $\mathbb{S}^n$. Pour cela, nous allons d'abord supposer que $M$ est orientable. Nous montrerons, par la suite, que $M$ est nécessairement orientable sous nos hypothèses.

**d) Si $M$ est orientable, alors $\Phi$ est surjective et le volume est presque maximal**

Plus précisément, nous allons calculer le degré de $\Phi$. On suppose pour cela que $M$ est une variété orientable. Soit $x$ un point de $M$ et $(X_i)$ une base orthonormée directe de $T_xM$. Pour tout point $x$ de $M$, on munit $E_x$ de l'orientation induite par $TM$ telle que $(\tilde{X}_i)_{1\leq i\leq n+1} = (X_1, \cdots, X_n, e)$ soit une base orthonormée directe de $E_x$. On note $L_x$ et $\tilde{L}_x$ les applications linéaires définies par :

$$\begin{aligned} L_x \ : \ T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n \ &\to \ T_xM \\ v \ &\mapsto \ \sum_{i=1}^{n+1} v_i S_i(x) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \tilde{L}_x \; : \; \mathbb{R}^{n+1} & \to & E_x \\ v & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} v_i S_i(x) \end{array}$$

et on définit les fonctions $h$ et $\tilde{h}$ par $h(x) = \det L_x$ et $\tilde{h}(x) = \det \tilde{L}_x$ (les déterminants étant calculés relativement à des bases orthonormées directes des espaces de départ et d'arrivée). On a immédiatement que $h(x) = \left(\sum_j f_j^2(x)\right)^{\frac{n}{2}} \det d_x\Phi$. En faisant le calcul en choisissant $(v_1, \cdots, v_n, \Phi(x))$ comme base orthonormée directe de $\mathbb{R}^{n+1}$ (où $(v_1, \cdots, v_n)$ est une base orthonormée directe de $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x) &= det\big(\tilde{L}_x(v_1), \cdots, \tilde{L}_x(v_n), \sum_i \Phi_i S_i\big) \\ &= \underbrace{det\big(L_x(v_1), \cdots, L_x(v_n), \sum_i \Phi_i \nabla f_i\big)}_{=0} + det\big(L_x(v_1), \cdots, L_x(v_n), \sum_i \Phi_i f_i e\big) \\ &= \big(\sum_i f_i^2\big)^{\frac{1}{2}} det\big(L_x(v_1), \cdots, L_x(v_n)\big) \\ &= \big(\sum_i f_i^2\big)^{\frac{1}{2}} h(x) = \big(\sum_j f_j^2(x)\big)^{\frac{n+1}{2}} \det d_x\Phi \end{aligned}$$

Commençons par estimer $\|h\|_2$. On a $h^2(x) \leq |L_x|^{2n}$. Or, d'après le lemme 5.11 $(i)$, on a, pour tout point $x$ de $M$ et tout vecteur $v$ de $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$ :

$$\begin{aligned} |L_x(v)|_E^2 &\leq \|\sum_{i=1}^{n+1} v_i S_i\|_\infty^2 \leq \big(1 + C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big) \|\sum_{i=1}^{n+1} v_i S_i\|_2^2 \\ &\leq \big(1 + C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big) \frac{\lambda_{n+1} + 1}{n+1} \|v\|_{\mathbb{R}^{n+1}}^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|h^2\|_\infty \leq \big(1 + C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)$. Par ailleurs, pour tout couple $(u, v)$ de vecteurs de $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \Big| <^t L_x \circ L_x(u), v >_{\mathbb{R}^{n+1}} - < u, v >_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big| &= \Big| \sum_{ij} u_i v_j \big(< S_i, S_j >_E - \delta_{ij}\big) \Big| \\ &\leq \max_{ij} \big| < S_i, S_j >_E - \delta_{ij} \big| \|u\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \|v\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.11 $(ii)$, $\left\|{}^t L_x \circ L_x - Id_{T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n}\right\| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$, pour tout point $x$ du sous-ensemble $M_\epsilon$, et donc $|h^2(x) - 1| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$ sur $M_\epsilon$. On obtient alors l'estimée :

$$\begin{aligned} \Big| \frac{1}{\operatorname{Vol} M} \int_M h^2 - 1 \Big| &\leq \Big| \frac{1}{\operatorname{Vol} M} \int_{M_\epsilon} (h^2 - 1) \Big| + \Big(1 - \frac{\operatorname{Vol} M_\epsilon}{\operatorname{Vol} M}\Big) \max\big(1, \big|\|h^2\|_\infty - 1\big|\big) \\ &\leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Le raisonnement et le calcul précédents restent valables si on remplace $L_x$ par $\widetilde{L}_x$, quitte à prendre $u$ et $v$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ ; on en déduit que $\tilde{h}$ vérifie aussi l'estimée $|\frac{1}{\operatorname{Vol} M} \int_M \tilde{h}^2 - 1| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$.

Pour obtenir le degré de $\Phi$, c'est l'intégrale $\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M \tilde{h}$ que l'on doit estimer. Notre idée est d'utiliser l'inégalité de Poincaré de manière à montrer que la moyenne de $\tilde{h}$ est proche de sa norme $L^2$. Encore faut-il pour cela que la norme $L^2$ du gradient de $\tilde{h}$ soit petite. On va donc estimer $d\tilde{h}$ :

En prenant la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ comme base orthonormée au départ, et une base orthonormée directe quelconque $(\tilde{X}_i(x))$ de $E_x$ à l'arrivée, on obtient la formule $\tilde{h}(x) = det\big(<\tilde{X}_i, S_j>_E\big)$, qui nous permet de calculer $d_x\tilde{h}$. En effet, soit $x$ un point donné de $M$, $X \in T_xM$ et $\gamma_X$ la géodésique passant par $x$ avec le vecteur vitesse $X$. On note $(\tilde{X}_i(x))$ un repère orthonormé direct de $E_x$ et $(\tilde{X}_i)$ le repère transporté parallèlement le long de $\gamma_X$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
d_x\tilde{h}(X) &= d_x\Big(det\big(<\tilde{X}_i, S_j>_E\big)_{ij}\Big)(X)\\
&= \sum_j det\begin{pmatrix} <\tilde{X}_1,S_1> & \dots & <\tilde{X}_1,S_{j-1}> & X.<\tilde{X}_1,S_j> & <\tilde{X}_1,S_{j+1}> & \dots & <\tilde{X}_1,S_{n+1}> \\ | & & | & | & | & & | \\ <\tilde{X}_{n+1},S_1> & \dots & <\tilde{X}_{n+1},S_{j-1}> & X.<\tilde{X}_{n+1},S_j> & <\tilde{X}_{n+1},S_{j+1}> & \dots & <\tilde{X}_{n+1},S_{n+1}> \end{pmatrix}\\
&= \sum_j det\begin{pmatrix} <\tilde{X}_1,S_1> & \dots & <\tilde{X}_1,S_{j-1}> & <\tilde{X}_1,D^E_X S_j> & <\tilde{X}_1,S_{j+1}> & \dots & <\tilde{X}_1,S_{n+1}> \\ | & & | & | & | & & | \\ <\tilde{X}_{n+1},S_1> & \dots & <\tilde{X}_{n+1},S_{j-1}> & <\tilde{X}_{n+1},D^E_X S_j> & <\tilde{X}_{n+1},S_{j+1}> & \dots & <\tilde{X}_{n+1},S_{n+1}> \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

D'où $\big|d_x\tilde{h}(X)\big| \leq C(n)\max_i \|S_i\|_\infty^n \max_i |D^E_X S_i(x)|_E$. D'après le lemme 5.11 $(i)$, on a $\|S_i\|_\infty^2 \leq \big(1 + C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)^2 \frac{(\lambda_{n+1}+1)}{n+1}$, d'où :

$$\|d\tilde{h}\|_2^2 = \frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M |d\tilde{h}|^2 \leq C(p,n)\max_i \frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int |D^E S_i|^2(x).$$

Or, nous avons vu dans la preuve du lemme 5.10 $(ii)$ que les hypothèses sur $\lambda_{n+1}$ et sur la courbure de Ricci impliquent que $\|D^E S_i\|_2^2 \leq C(p,n)\epsilon$, donc que $\|d\tilde{h}\|_2^2 \leq C(p,n)\epsilon$.

D'après le théorème 4.18, et sous nos hypothèses de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, on a $\lambda_1 \geq n(1 - C_2(p,n)\epsilon) \geq n-1$ si $\alpha(p,n)$ est choisi plus petit que $\frac{1}{nC_2(p,n)}$. L'inégalité de Poincaré, qui s'écrit :

$$\|\tilde{h} - \frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M \tilde{h}\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\|d\tilde{h}\|_2^2,$$

nous donne alors $0 \leq \|\tilde{h}\|_2^2 - \big(\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M \tilde{h}\big)^2 \leq C(p,n)\epsilon$. Or, on a montré plus haut l'inégalité $\big|\|\tilde{h}\|_2^2 - 1\big| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac14}$, on en déduit que :

$$1 - C(p,n)\epsilon^{\frac14} \leq \Big(\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M \tilde{h}\Big)^2 \leq 1 + C(p,n)\epsilon^{\frac14}$$

Pour conclure, on a $deg\Phi\,\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n = \int_M \det d\Phi = \int_M \big(\sum_k f_k^2\big)^{-\frac{n+1}{2}}\tilde{h}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\Big||\deg\Phi|\frac{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}{\mathrm{Vol}\,M}-1\Big| &= \Big||\frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_M \big(\sum_k f_k^2\big)^{-\frac{n+1}{2}}\tilde{h}|-1\Big| \\
&\leq \Big||\frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_M \big(\sum_k f_k^2\big)^{-\frac{n+1}{2}}\tilde{h}|-|\frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_M \tilde{h}|\Big| + \Big||\frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_M \tilde{h}|-1\Big| \\
&\leq \Big|\frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_M \Big[\big(\sum_k f_k^2\big)^{-\frac{n+1}{2}}-1\Big]\tilde{h}\Big| + \Big||\frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_M \tilde{h}|-1\Big|
\end{aligned}$$

et, toujours d'après le lemme 5.12 et la majoration de $\|h\|_\infty$ donnée ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\int_M \Big[\big(\sum_k f_k^2\big)^{-\frac{n+1}{2}}-1\Big]\tilde{h}\Big| &\leq \Big\|\big(\sum_k f_k^2\big)^{-\frac{n+1}{2}}-1\Big\|_\infty \|\tilde{h}\|_\infty \\
&\leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}\|h\|_\infty \max\Big[\frac{1}{(\inf_x \sum_i f_i^2(x))^{\frac{n+1}{2}}},1\Big] \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\Big||\deg\Phi|\frac{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}{\mathrm{Vol}\,M}-1\Big| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}.$$

Si $\alpha(p,n)$ a été choisi inférieur à $\frac{1}{C(p,n)^{2(n+1)}}$ (où $C(p,n)$ est la constante qui intervient dans la dernière inégalité), on en déduit que $\deg\Phi \neq 0$ dès que $\epsilon < \alpha(p,n)$, donc que $\Phi$ est surjective. De plus, d'après le théorème 4.6, on a :

$$\mathrm{Vol}\,M \leq \big(1+C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}\big)\,\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n,$$

et donc $\Phi$ est de degré $\pm 1$, et l'inégalité sur le degré devient :

$$\Big|\frac{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n}{\mathrm{Vol}\,M}-1\Big| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}$$

d'où $\mathrm{Vol}\,M \geq \mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n\big(1-C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}\big)$. Ceci achève la preuve du théorème 5.7 si on suppose $M^n$ orientable.

### e) $M$ est orientable

Si $M^n$ est non-orientable, on peut toujours construire l'application $\Phi$ et remarquer qu'elle se relève en une application $\widetilde{\Phi}$ du revêtement riemannien orientable à deux feuillets $\widetilde{M}^n$ de $M$ dans $\mathbb{S}^n$. De plus, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{M} & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} & \mathbb{S}^n \\
\pi\downarrow & \nearrow_{\Phi} & \\
M & &
\end{array}$$

On a donc $\deg_2\widetilde{\Phi} = \deg_2\pi\deg_2\Phi = 0$ (où $\deg_2$ désigne le degré modulo 2). Or, on a $deg\widetilde{\Phi} \equiv \deg_2\widetilde{\Phi}$ modulo 2. On en déduit que $\widetilde{\Phi}$ est de degré nécessairement pair. Or

$(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ est aussi de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ (car le revêtement est à deux feuillets), et les fonctions propres $f_i$ de $(M^n, g)$ se relèvent en des fonctions propres $\tilde{f}_i$ de $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ associées aux mêmes valeurs propres $\lambda_i$. Donc $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ admet $n+1$ valeurs propres proches de $n$, et l'application $\widetilde{\Phi}$, relevée de $\Phi$, n'est autre, par unicité du relevé, que l'application étudiée en **e)** associée à la variété $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ et à ses fonctions propres $\tilde{f}_i$. On en déduit que $\widetilde{\Phi}$ doit être de degré $\pm 1$, ce qui est contradictoire. On a donc montré que, si $(M^n, g)$ est à courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ et admet $n+1$ valeurs propres proches de $n$, alors elle est nécessairement orientable (on montrera dans la suite qu'il en est de même si $M$ admet seulement $n$ valeurs propres proches de $n$).

### 5.4.3 L'approximation de Hausdorff

Pour finir la démonstration du théorème **A**, il ne nous reste plus qu'à montrer que l'une des hypothèses de pincement du volume, du Radius ou de $\lambda_{n+1}$ implique que $(M^n, g)$ est proche de $(\mathbb{S}^n, can)$ en distance de Gromov-Hausdorff. Il suffit même, d'après ce qui précède, de démontrer la proposition suivante a priori plus faible (mais dont la démonstration est plus aisée, car on peut utiliser toutes les estimations des sections 5.4.1 et 5.4.2) :

**Proposition 5.16.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (explicitement calculables) telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ de dimension $n$, qui vérifie la condition $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^- \|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), on a :*

*Si* $\mathrm{Vol}\, M \geq (1 - \epsilon^{\frac{1}{8(n+1)^2}}) \,\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n$, $\mathrm{Rad}\, M \geq \pi - \epsilon^{\frac{1}{8(n+1)^2}}$ *et* $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon^{\frac{1}{8(n+1)^2}}$ *alors*

$$d_{GH}\big((M,g), (\mathbb{S}^n, can)\big) \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}.$$

*Plus précisément, l'application $\Phi$ définie en* (5.3) *(section 5.4.2) est une approximation de Gromov-Hausdorff, surjective et de degré $\pm 1$.*

**Démonstration.** — Nous allons montrer que la fonction $\Phi$ est une approximation de Gromov-Hausdorff. On sait déjà que l'application $\Phi$ est surjective lorsque $\epsilon < \alpha(p,n)$, il ne reste donc qu'à montrer que, pour tout couple $(x,y)$ de points de $M$, on a :

$$|d_{\mathbb{S}^n}(\Phi(x), \Phi(y)) - d_M(x,y)| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}. \qquad (*)$$

Mais, en remarquant que pour tout couple $(t,s)$ de nombres réels compris dans l'intervalle $\big[0, \pi + C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big]$, on a soit $|t-s| \leq \epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}$, soit $|t-s| \geq \epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}$ et que, dans ce dernier cas, on a $\frac{t+s}{2} \leq \pi + C(p,n)\sqrt{\epsilon} - \frac{\epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}}{2}]$, d'où (par concavité du sinus sur $[0,\pi]$) :

$$|\cos t - \cos s| = 2|\sin(\frac{t+s}{2})|\sin(\frac{|t-s|}{2})$$

$$\geq \frac{1}{2}|t+s||t-s|\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+C(p,n)\sqrt{\epsilon})\sin(\frac{\epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}}{2} - C(p,n)\sqrt{\epsilon})}{\left(\pi + C(p,n)\sqrt{\epsilon} - \frac{\epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}}{2}\right)(\frac{\pi}{2}+C(p,n)\sqrt{\epsilon})} \geq C(p,n)|t-s|^2\epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}},$$

on en déduit (d'après le théorème 4.12) que, pour démontrer l'inégalité $(*)$, il suffit de montrer que

$$\left|\cos\big(d_{\mathbb{S}^n}(\Phi(x),\Phi(y))\big) - \cos\big(d(x,y)\big)\right| = \left|< \Phi(x),\Phi(y) > - \cos\big(d(x,y)\big)\right| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{128(n+1)^3}}.$$

Pour montrer cela, on a besoin dans un premier temps d'établir l'équivalent $L^\infty$ du lemme 5.5 $(i)$ :

**Lemme 5.17.** — *Sous les hypothèses de la proposition 5.16, on a :*

$$\|\cos\big(d(x_0,.)\big) - \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i|x_0}f_i\|_\infty \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{64(n+1)^3}}.$$

**Démonstration.** — Pour démontrer ce lemme, on applique la même méthode que dans la démonstration du lemme 5.12. On pose $f = \cos(d(x_0,.)) - \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i|x_0}f_i$. On a alors, si $\alpha(p,n)$ est convenablement choisi :

$$\|df\|_\infty \leq |\sin d(x_0,.)| + \left\|d(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i|x_0}f_i)\right\|_\infty \leq 1 + \|\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i|x_0}S_i\|_\infty \leq 1 + 2\|\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i|x_0}S_i\|_2$$

$$\leq 1 + 2\sqrt{\sum \alpha_{i|x_0}^2\|S_i\|_2^2} \leq 1 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i|x_0}^2\frac{\lambda_i+1}{n+1}} \leq C(p,n)$$

où la seconde inégalité découle du fait que $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i|x_0}\nabla f_i$ est la projection de $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i|x_0}S_i$ sur $T_xM$, la troisième du lemme 5.11 $(i)$, et la dernière du lemme 5.5 $(ii)$. D'après le lemme 5.5 $(i)$, on a :

$$\|f\|_2^2 \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{32(n+1)^2}}.$$

Donc, pour tout $r > 0$ et tout point $x_1$ de $M$ tel que $|f(x_1)| = \|f\|_\infty$, on a (en utilisant le fait que $|f|^2 \geq \|f\|_\infty(\|f\|_\infty - C(p,n)r)$ sur $B(x_1,r)$ par le théorème des accroissements finis) :

$$C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{32(n+1)^2}} \geq \|f\|_2^2 \geq \frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_{B(x,r)}|f|^2 \geq \|f\|_\infty\left(\|f\|_\infty - C(p,n)r\right)\frac{\operatorname{Vol} B(x_1,r)}{\operatorname{Vol} M}.$$

En posant $r = \epsilon^{\frac{1}{64(n+1)^3}}$ et en utilisant le théorème de Bishop-Gromov 4.6, on obtient $C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{32(n+1)^2}} \geq \|f\|_\infty\big(\|f\|_\infty - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{64(n+1)^3}}\big)\frac{\epsilon^{\frac{n}{64(n+1)^3}}}{(2\pi)^n}$ et donc $\|f\|_\infty \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{64(n+1)^3}}$.

□

**Démonstration de la proposition 5.16**.— Pour conclure, on voit que, à l'instar de la sphère canonique (*cf* la section 5.3), il suffit de montrer que $|\alpha_{i|x} - f_i(x)| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{64(n+1)^3}}$. En effet, on aura alors :

$$
\begin{aligned}
&\left|\cos\big(d(x_0,x)\big) - \cos\big(d_{\mathbb{S}^n}[\Phi(x_0),\Phi(x)]\big)\right| = \left|\cos\big(d(x_0,x)\big) - <\Phi(x),\Phi(x_0)>_{\mathbb{R}^{n+1}}\right| \\
&\quad \leq \left|\cos\big(d(x_0,x)\big) - \sum_i \alpha_{i|x_0}.f_i(x)\right| + \left|\sum_i \big(\alpha_{i|x_0} - f_i(x_0)\big).f_i(x)\right| \\
&\qquad\qquad + \left|\sum_i f_i(x_0).f_i(x) - <\Phi(x),\Phi(x_0)>_{\mathbb{R}^{n+1}}\right| \\
&\quad \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{64(n+1)^3}} + \sum_i \left|\alpha_{i|x_0} - f_i(x_0)\right||f_i(x)| \\
&\qquad\qquad + \left|1 - \frac{1}{(\sum_k f_k^2(x))^{\frac{1}{2}}(\sum_k f_k^2(x_0))^{\frac{1}{2}}}\right|\left|\sum_i f_i(x_0).f_i(x)\right| \\
&\quad \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{64(n+1)^3}} + \sqrt{\sum_i \big(\alpha_{i|x_0} - f_i(x_0)\big)^2}\Big(\sum_k f_k^2(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad + \left|1 - \frac{1}{(\sum_k f_k^2(x))^{\frac{1}{2}}(\sum_k f_k^2(x_0))^{\frac{1}{2}}}\right|\Big(\sum_k f_k^2(x_0)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_k f_k^2(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq C(p,n)^{\frac{1}{128(n+1)^3}}
\end{aligned}
$$

où on a utilisé également les lemmes 5.17 (dans la deuxième inégalité) et 5.12 (dans le dernière inégalité).

Or, on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}\big(\alpha_{i|x} - f_i(x)\big)^2 &= \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i|x}^2 + \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)^2 - 2\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i|x}.f_i(x) \\
&\leq 2 + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{64(n+1)^3}} - 2cos(d(x,x)) = C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{64(n+1)^3}}.
\end{aligned}
$$

d'après le lemme 5.5 $(ii)$, le lemme 5.17 et la proposition 5.12, ce qui conclut la démonstration de la proposition 5.16 et, par là, la démonstration du théorème **A**.

□

Dans cette section, on a montré l'équivalence entre : la presque maximalité du volume, celle du Radius, le pincement des $n+1$ premières valeurs propres non nulles du laplacien et la proximité avec la sphère $(\mathbb{S}^n, can)$ au sens de Gromov-Hausdorff pour une variété de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$.

## 5.5 Caractérisation du type différentiable

Le but de cette section est de discuter, dans l'état actuel de nos recherches, du genre différentiable des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ et dont les invariants géométriques (Radius, Volume, $\lambda_{n+1}$, distance de Gromov-Hausdorff avec la sphère canonique), étudiés dans la section précédente, sont presque extrémaux. Les résultats de T. Colding, J. Cheeger et P. Petersen montrent que, si on se restreint aux variétés riemanniennes de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ et si l'un des invariants géométriques cités plus haut est presque extrémal, alors la variété considérée est nécessairement difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^n$.

Cette caractérisation de la sphère canonique découle d'un résultat (dû à T. Colding et J. Cheeger), de continuité (pour la distance de Gromov-Hausdorff) du type différentiable sur l'ensemble des variétés riemanniennes compactes de dimension $n$ et de courbure de Ricci minorée par $-(n-1)$. Plus précisément, T. Colding et J. Cheeger démontrent dans [30] le théorème suivant :

**Théorème** (J. CHEEGER ET T. COLDING). — *Soit $(M_i^n, g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variétés riemanniennes complètes, de dimension $n$, telles que* $\mathrm{Ric}(g_i) \geq -(n-1)$ *pour tout indice $i$. Si la suite $(M_i^n, g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge en distance de Gromov-Hausdorff vers une variété lisse, riemannienne, compacte $(M^n, g)$ de même dimension $n$, alors $M_i^n$ est difféomorphe à $M^n$ pour tout indice $i$ suffisamment grand.*

Pour un schéma de preuve simplifié de ce théorème, le lecteur intéressé peut se référer à [28] ou [51]. Une grande partie du schéma de la preuve de ce théorème a été étendu par P. Petersen et G. Wei dans [82] aux variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $-(n-1)$ et qui admettent un minorant uniforme $v_0 > 0$ pour le volume de leur boules géodésiques de rayon 1 (remarquer que les résultats de cet article sont valables sur les variétés de courbure de Ricci presque supérieur à $n-1$, sans hypothèse supplémentaire sur le volume des boules de rayon 1). Toutefois, pour appliquer telle quelle, aux cas variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, l'intégralité du schéma de preuve du théorème de J. Cheeger et T. Colding cité ci-dessus, il manque encore un outil, fondamental dans ces travaux, appelé "segment inequality" dans [28] et qui s'énonce ainsi :

Étant donnée une fonction positive $f$ sur $M$, $x_1$ et $x_2$ deux points de $M$, on note $\mathcal{F}_f(x_1, x_2) = \inf_\gamma \int_0^{d(x_1,x_2)} f(\gamma(s))\, ds$, où l'inf est pris sur l'ensemble des géodésiques minimisantes $\gamma$ (paramétrées par leur longueur) allant de $x_1$ à $x_2$. On a alors le théorème suivant (théorème (**2.15**) de [28]) :

**Théorème.** — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne compacte de dimension $n$ qui vérifie* $\mathrm{Ric}(M^n, g) \geq -(n-1)$. *Soient $A_1$ et $A_2$ deux parties de $B(p, r)$, alors :*

$$\int_{A_1\times A_2} \mathcal{F}_f(x_1, x_2)\, dv_g(x_1) dv_g(x_2) \leq 2^n r (\mathrm{ch} r)^{n-1} \left(\mathrm{Vol}\, A_1 + \mathrm{Vol}\, A_2\right) \int_{B(p,2r)} f.$$

Ce théorème est utilisé dans les travaux de Colding et Cheeger pour convertir les hypothèses sur le Hessien de cartes harmoniques en propriétés métriques de ces cartes. La preuve de ce théorème est une application de la version ponctuelle du théorème de comparaison de Bishop-Gromov (i.e. le fait que $\frac{\theta}{\theta_{-1}}(r,v)$ soit une fonction décroissante de $r$ à $v$ fixé). Or, pour une variété de courbure de Ricci presque minorée par $(n-1)$, le mieux qu'on puisse obtenir (dans l'état actuel de nos recherches) est une presque décroissance de la fonction $\int_{C_{x_0}\subset\mathbb{S}^{n-1}_{x_0}} \frac{\theta}{\theta_{-1}}(r,v)dv$ sur un intervalle $[0,R_0]$, à la condition que le rapport $\frac{\mathrm{Vol}\left(\exp_{x_0}([0,R_0]\times C_{x_0})\right)}{\mathrm{Vol}\,B(x_0,R_0)}$ soit minoré. Savoir si, sous les hypothèses du théorème **A**, les variétés riemanniennes sont difféomorphes à la sphère $\mathbb{S}^n$ reste donc encore un problème ouvert.

### Courbure sectionnelle majorée

Si on se donne une borne a priori sur le tenseur de courbure, alors l'estimée 5.11 $(iii)$ nous donne tout de suite que l'application $\Phi$ donnée par les fonctions propres et étudiée plus haut (voir (5.3)) est une presqu'isométrie sous les hypothèses de la section précédente (remarquer que le résultat de Colding et Cheeger qui permet, en courbure de Ricci supérieure à $n-1$, de conclure que les variétés de Volume presque maximal sont difféomorphes à la sphère, ne donne pas explicitement le difféomorphisme, ni aucune borne sur la norme de Lipschitz de ce difféomorphisme). C'est le but du :

**Théorème 5.18.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $A$ et $p$ des nombres réels tels que $A > 0$ et $p > n/2$. Il existe des fonctions $\alpha(A,p,n)$ et $C(A,p,n)$ telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, de dimension $n$, qui vérifie les conditions de courbure $\sup_x \|\left(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\right)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon.\min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (avec $\epsilon \leq \alpha(A,p,n)$) et $\|R\|_p \leq A$, on ait :*

*Si $\mathrm{Vol}\,M \geq (1-\epsilon)\,\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n$ alors l'application $\Phi \ :\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2(x)}}(f_1(x),\dots,f_{n+1}(x))$, donnée par les $n+1$ premières fonctions propres $f_i$ du laplacien, est un difféomorphisme de $M$ sur $\mathbb{S}^n$.*

*De plus $\Phi$ est une presque-isométrie, i.e., pour tout $u \in TM \setminus \{0\}$, on a :*

$$|\frac{< d\Phi(u), d\Phi(u) >_{\mathbb{R}^{n+1}}}{g(u,u)} - 1| \leq C(A,p,n)\epsilon^{\frac{\beta(p,n)}{32n}},$$

*où $\beta(p,n)$ est la constante universelle définie dans le lemme 5.11.*

### Variantes

Ce théorème est énoncé avec l'hypothèse de presque maximalité du volume mais, d'après la section précédente (théorème **A**), on pourrait tout aussi bien l'énoncer sous l'hypothèse de presque maximalité du radius, du pincement des $n+1$ premières valeurs propres non nulles de $(M^n, g)$ ou en supposant que la distance de Gromov-Hausdorff entre $(M^n, g)$ et $(\mathbb{S}^n, can)$ est inférieure à un $\epsilon = \epsilon(p, n)$ universel.

**Démonstration.** — D'après les lemmes 5.11 $(iii)$ et 5.12 et la formule $(*)$ de la section 5.4.2 **c)**, on a, sous nos hypothèses :

$$\left| g\big({}^t d_x\Phi(u), {}^t d_x\Phi(u)\big) - < u, u >_{\mathbb{R}^{n+1}} \right| \leq C(A, p, n)\epsilon^{\frac{\beta(p,n)}{32n}} < u, u >_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

pour tout $u \in T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$. Si $\epsilon < \frac{1}{C(A,p,n)^{\frac{32n}{\beta(p,n)}}}$, on en déduit que ${}^t d_x\Phi$ est inversible (en tant qu'application de $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$ dans $T_xM$) et que $\|d_x\Phi\| = \|{}^t d_x\Phi\| \leq \big(1 + C(A, p, n)\epsilon^{\frac{\beta(p,n)}{32n}}\big)^{\frac{1}{2}}$ et $\|(d_x\Phi)^{-1}\| = \|{}^t[d_x\Phi]^{-1}\| = \|[{}^t d_x\Phi]^{-1}\| \leq \big(1 - C(A, p, n)\epsilon^{\frac{\beta(p,n)}{32n}}\big)^{-\frac{1}{2}}$. D'où :

$$\big[1 - C(A, p, n)\epsilon^{\frac{\beta(p,n)}{32n}}\big]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|d_x\Phi(u)\|}{\|u\|} \leq \big[1 + C(A, p, n)\epsilon^{\frac{\beta(p,n)}{32n}}\big]^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit l'existence de $\alpha(A, p, n)$ telle que pour tout $\epsilon \leq \alpha(A, p, n)$, l'application $\Phi$ soit un difféomorphisme local vérifiant $|\Phi^* can - g| \leq C(A, p, n)\epsilon^{\frac{\beta(p,n)}{32n}} g$. De plus $M$ est compacte d'après le théorème 4.12, donc $\Phi$ est un revêtement de $M$ sur $\mathbb{S}^n$. $\mathbb{S}^n$ étant simplement connexe, on en déduit que $\Phi$ est un difféomorphisme. $\square$

### Courbure de Ricci pincée en norme $L^\infty$

Pour finir cette section, remarquons qu'en utilisant un résultat, du à M. Anderson [5], de précompacité $C^{1,\alpha}$ ($\alpha < 1$) des variétés riemanniennes de dimension $n$ vérifiant les hypothèses $|\,\mathrm{Ric}\,| \leq 1$ et dont le volume des boules géodésiques de rayon $r \leq 1$ vérifie $\mathrm{Vol}\, B(p, r) \geq \big(1 - \epsilon(n)\big)\mathrm{Vol}\, B^n r^n$ (pour une constante $\epsilon(n) > 0$ ne dépendant que de $n$), T. Colding prouve, dans [40] que, si une variété riemannienne complète $(M^n, g)$ vérifie les hypothèses $A \geq \mathrm{Ric}(M^n, g) \geq n - 1$ et $\mathrm{Vol}(M^n, g) \geq \big(1 - \epsilon\big)\,\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n$ (lorsque $\epsilon \leq \epsilon(n, A)$, où $\epsilon(n, A) > 0$ est une constante universelle ne dépendant que de $n$ et $A$), alors la variété riemannienne $(M^n, g)$ est proche de $(\mathbb{S}^n, can)$ en topologie $C^{1,\alpha}$. Ce résultat est de nouveau abstrait puisqu'il ne fournit pas explicitement un difféomorphisme. En revanche, l'article [5] précise que toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ vérifiant $A \geq \mathrm{Ric}(M^n, g) \geq n - 1$ et $\mathrm{Vol}(M^n, g) \geq \big(1 - \epsilon(n, A)\big)\,\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n$ voit son rayon harmonique $C^{1,\alpha}$, noté $r_H(1, \alpha)$, minoré par une constante universelle $r(n, A) > 0$ (ne dépendant que de $n$ et $A$), ce qui, d'après la remarque (0.10) p.270 de [6], implique l'existence d'une constante $C(q, n, A)$ telle que pour toute fonction $f$ définie sur une boule $B$ de rayon $r(n, A)/2$, on ait :

$$\|f\|_{C^{1,1-\frac{n}{q}}} \leq C(q, n, A)\|\triangle f\|_{L^q(B)} + \|f\|_{L^2(B)}$$

où $q$ est un réel strictement supérieur à $n$ et $\|f\|_{C^{1,\beta}}$ est la norme hölderienne $C^{1,\beta}$ de $f$ relativement à la carte harmonique contenant $B$. En appliquant ceci aux fonctions propres

$f_i$ associées à des valeurs propres proches de $n$, on en déduit que les fonctions $g(\nabla f_i, \nabla f_j)$ et $f_i f_j$ sont universellement bornées en norme hölderienne, et il en est donc de même des fonctions $< S_i, S_j >_E$. Si on fait tendre le paramètre $\epsilon$ vers 0 dans l'hypothèse sur le volume, les variation des fonctions $< S_i, S_j >_E$ restent bornées. On en déduit que si la fonction $det\big(< S_i, S_j >_E\big)_{ij}$ s'annule en un point $x_0$ alors elle reste proche de 0 sur une boule de rayon minoré (et donc de volume minoré) lorsque $\epsilon$ tend vers 0. Ceci contredit le fait (montré plus haut) que, lorsque $\epsilon$ tend vers 0, $|det\big(< S_i, S_j >_E\big)_{ij}|$ doit être proche de 1 sur un ensemble de volume presque total. On peut raffiner l'argument précédent pour montrer que $\| < S_i, S_j >_E - \delta_{ij}\|_\infty$ est en fait petit. Ceci montre qu'on a les mêmes conclusions que dans le théorème 5.18 sous l'hypothèse $A \geq \text{Ric} \geq n-1$ (on a alors seulement proximité $C^0$ des métriques, mais cela fournit un difféomorphisme explicite). Toutefois, l'existence d'un analogue du théorème de minoration universelle du rayon harmonique $C^{1,\alpha}$ (ou même $C^{0,\alpha}$), sous des hypothèses intégrales sur la courbure de Ricci et en volume presque maximal, reste un problème d'analyse non résolu (et qui ne semble pas découler directement des travaux antérieurs de M. Anderson et J. Cheeger).

## 5.6 Autres théorèmes de la sphère

Dans cette section, nous utilisons des propriétés spécifiques des objets construits dans les sections précédentes (comme le fibré $E$, l'opérateur $\triangle_{sph}$ et la fonction $\Phi$) pour étendre certains théorèmes de la sphère (principalement le théorème de P. Petersen [77]). Ceci montre que ces objets n'ont pas seulement l'intérêt technique de permettre une redémonstration (et une extension aux variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$) des théorèmes de la sphère de T. Colding et de P. Petersen, mais qu'ils apportent de nouvelles possibilités (particulièrement dans l'exploitation des propriétés d'équivariance de l'application $\Phi$ relativement aux actions des groupes d'isométries de $(M^n, g)$ et $(\mathbb{S}^n, can)$).

### 5.6.1 Variétés vérifiant $\lambda_n \leq n + \epsilon$

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'existence de $n$ valeurs propres proches de $n$, sur une variété de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, implique l'existence d'une $n$+1-ième valeur propre proche de $n$. Ce résultat est nouveau, même en courbure de Ricci *supérieure* à $(n-1)$. Commençons par définir, dans le cas où $M$ est orientable, un produit extérieur sur $E$ :

Supposons que $M$ soit une variété orientable. Soit $x$ un point de $M$ et $(X_1, \cdots, X_n)$ une base orthonormée directe de $T_xM$. On munit $E_x$ de l'orientation compatible avec celle de $T_xM$ telle que le repère $(X_1, \cdots, X_n, e(x))$ soit direct (ceci fournit une orientation du fibré $E$ compatible avec celle de $M$). Si $(S_1, \cdots, S_n)$ est une famille de vecteurs de

$E_x$, on définit un nouveau vecteur $S$ de $E_x$, noté $S = S_1 \wedge \cdots \wedge S_n$, en prenant le dual (relativement à la métrique de $E_x$) de la 1-forme $S \mapsto \det(S_1, \cdots, S_n, S)$ (où le déterminant est calculé relativement à la base orthonormée directe $(X_1, \cdots, X_n, e(x))$). On définit ainsi un vecteur de $E_x$ indépendamment du choix du repère orthonormé direct $(X_1, \cdots, X_n)$. De plus $S_1 \wedge \cdots \wedge S_n$ est orthogonal à $S_i$ pour tout $i$. Si $(S_1, \ldots, S_n)$ sont des sections de $E$, alors on obtient une autre section $S$ en posant $S(x) = S_1(x) \wedge \cdots \wedge S_n(x)$. On notera $S = S_1 \wedge \cdots \wedge S_n$ cette section, elle est bien évidemment $L^2$-orthogonale aux sections $S_i$ pour tout $i$. Enfin, en procédant comme dans le calcul de $d_x\tilde{h}(X)$, on montre que, pour tout $X \in TM$, on a $D^E_X(S_1 \wedge \cdots \wedge S_n) = \sum_{i=1}^n S_1 \wedge \cdots \wedge D^E_X S_i \wedge \cdots \wedge S_n$. On a aussi facilement l'inégalité $\|S_1 \wedge \ldots \wedge S_n\| \leq \|S_1\| \ldots \|S_n\|$. On peut alors démontrer un premier résultat :

**Lemme 5.19.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (explicitement calculables) telles que pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, orientable, de dimension $n$ et qui vérifie la condition $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^- \|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), on ait :*

$$\textit{Si } \lambda_n(\overline{\triangle}^E) \leq \epsilon \textit{ alors } \lambda_{n+1}(\overline{\triangle}^E) \leq C(p,n)\epsilon.$$

**Démonstration.** — Soit $(S_1, \cdots, S_n)$ une famille $L^2$-orthonormée de sections propres de $\overline{\triangle}^E$ associée aux $n$ premières valeurs propres. On pose $S_{n+1} = S_1 \wedge \cdots \wedge S_n$. On obtient ainsi une famille $L^2$-orthogonale de $n+1$ sections de $E$. De plus, on a :

$$\|D^E S_{n+1}\|_2^2 \leq n^2 (\max_{i \leq n} \|S_i\|_\infty)^{2n-2} \max_{i \leq n} \|D^E S_i\|_2^2$$

et donc $\|D^E S_{n+1}\|_2^2 \leq C(p,n)\epsilon$, par hypothèse sur les sections $S_i$, en utilisant la proposition 3.1 (où l'on fait $V = 0$, $p = +\infty$ et où on majore la constante de Sobolev et le diamètre à l'aide des théorèmes 4.17 et 4.12) pour borner le rapport entre normes $L^\infty$ et $L^2$ des $S_i$. Pour conclure par le principe du min-max, il ne reste plus qu'à montrer que la norme $L^2$ de $S_{n+1}$ est proche de 1. Or, on a $\|S_{n+1}\|_\infty \leq \prod_{i \leq n} \|S_i\|_\infty \leq 1 + C(p,n)\sqrt{\epsilon}$ (toujours d'après la proposition 3.1 et les majorations du diamètre et de la constante de Sobolev $S_q(M,g)$ des théorèmes 4.12 et 4.17). De plus, d'après le lemme 3.5, il existe un sous-ensemble $M_\epsilon$ de $M$ tel que :

$$\begin{cases} |< S_i, S_j >_E - \delta_{ij}| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}} \\ \mathrm{Vol}\, M_\epsilon \geq \big(1 - C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}\big) \mathrm{Vol}\, M \end{cases}$$

Soit $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ un repère orthonormé direct de $E_x$ tel que $\mathrm{Vect}\big(X_1, \ldots, X_n\big)$ et $\mathrm{Vect}\big(S_1(x), \ldots, S_n(x)\big)$ coïncident, on a alors $S_1 \wedge \ldots \wedge S_n = cX_{n+1}$, où $c$ est une constante telle que :

$$\begin{aligned}
c^2 &= < S_1 \wedge \ldots \wedge S_n, X_{n+1} >_E^2 = \det\big(S_1, \ldots, S_n, X_{n+1}\big)^2 \\
&= \det \begin{pmatrix} < S_1, X_1 >_E & \ldots & < S_n, X_1 >_E & 0 \\ | & & | & | \\ < S_1, X_n >_E & \ldots & < S_n, X_n >_E & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \\
&= \det \begin{pmatrix} < S_1, X_1 >_E & \ldots & < S_n, X_1 >_E \\ | & & | \\ < S_1, X_n >_E & \ldots & < S_n, X_n >_E \end{pmatrix}^2
\end{aligned}$$

On en déduit que $|c^2 - 1| = \big|\det\big(< S_i, S_j >_E\big)_{ij} - \det I_n\big| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$ en tout point $x$ de $M_\epsilon$, et donc, par définition de $c$, $\big||S_{n+1}(x)|^2 - 1\big| \leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$ pour tout point $x$ de $M_\epsilon$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\big|\|S_{n+1}\|_2^2 - 1\big| &\leq \Big|\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_{M_\epsilon}\big(|S_{n+1}|^2 - 1\big)\Big| + \Big|\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_{M\setminus M_\epsilon}\big(|S_{n+1}|^2 - 1\big)\Big| \\
&\leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}} + \Big(1 - \frac{\operatorname{Vol} M_\epsilon}{\operatorname{Vol} M}\Big)2C(p,n) \\
&\leq C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{\|D^E S_{n+1}\|_2^2}{\|S_{n+1}\|_2^2} \leq C(p,n)\epsilon$ et que la même inégalité vaut si on remplace $S_{n+1}$ par n'importe quelle combinaison linéaire des sections $S_1, \ldots, S_n$ et $S_{n+1}$. Ceci achève la preuve.

$\square$

Le lemme suivant montre que, si $\overline{\triangle}^E$ admet $k$ petites valeurs propres, alors la variété $M$ admet $k$ valeurs propres proches de $n$ pour le laplacien sur les fonctions (c'est la réciproque du lemme 5.10) :

**Lemme 5.20.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (universellement calculables) telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$, de dimension $n$, qui vérifie* $\sup_x \|\big(\underline{\operatorname{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ *(avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), on ait :*

$$\textit{Si } \lambda_k(\overline{\triangle}^E) \leq \epsilon, \textit{ alors } \lambda_k(M^n, g) \leq n + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

**Démonstration.** — Soit $(S_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille $L^2$-orthonormée de sections propres (associées aux $k$ premières valeurs propres) de $\overline{\triangle}^E$. On pose $f_i =< S_i, e >_E$. La démonstration du lemme consiste à appliquer le principe du min-max aux formes quadratiques $f \mapsto \|df\|_2^2$ et $f \mapsto \|f\|_2^2$, et à la famille de fonctions $(f_i)$.

Notons $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel engendré par les sections $(S_i)_{1\leq i\leq k}$, muni du produit scalaire induit par le produit scalaire $L^2$ de $E$. Pour toute section $S$ de $\mathcal{E}$, nous noterons $\Phi(S) = f_S$ la fonction $x \mapsto < S(x), e(x) >$ (on a donc $f_{S_i} = f_i$), et $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel de fonctions qui est l'image de $\mathcal{E}$ par l'application linéaire $\Phi$.

Commençons par montrer que les fonctions de $\mathcal{F}$ sont d'intégrale nulle. Ceci découle du fait que $\overline{\triangle}^E e = n.e$. En effet, si $e_k$ est un repère local de $M$, défini au voisinage du point $x$ où l'on calcule, orthonormé et de dérivée covariante nulle au un point $x$ de $M$, on a :

$$(\overline{\triangle}^E e)(x) = \sum_{1\leq k\leq n} -D^{E^2}_{e_k,e_k} e = \sum_{1\leq k\leq n} -D^E_{e_k}\big(D^E_{e_k} e\big) = \sum_{1\leq k\leq n} -D^E_{e_k} e_k = n.e$$

(ceci découle aussi du lemme 5.9, où on pose $\lambda = 0$ et $f = 1$). On en déduit que :

$$\frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M f_i = \frac{1}{\operatorname{Vol} M}\int_M < S_i, e >_E = 0$$

car deux sections propres correspondant à deux valeurs propres différentes sont $L^2$-orthogo–nales. Enfin, on conclut en remarquant que $\mathcal{F}$ est engendré par les fonctions $f_i$.

On montre alors que $\Phi$ est une application injective, et donc que $\mathcal{F}$ est un espace de fonctions de dimension $k$. En effet, si $S$ est une section de $\mathcal{E}$ telle que $\phi(S) = 0$, alors il existe un champ de vecteur $X$ de $M$ tel que $S = X$. On a alors $D^E_Y S = D^M_Y X - g(X,Y)e$, et donc :

$$\|D^E S\|_2^2 = \|D^M X\|_2^2 + \|X\|_2^2 \geq \|X\|_2^2 = \|S\|_2^2.$$

Or, par définition, on a $\|D^E S\|_2^2 \leq \epsilon \|S\|_2^2$ pour toute section $S$ de $\mathcal{E}$. On en déduit que si $\Phi(S) = 0$ alors $S = 0$.

Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que le quotient de Rayleigh des fonctions de $\mathcal{F}$ est presque plus petit que $n$. Soit donc $f_S$ une fonction non nulle de $\mathcal{F}$. Il existe donc un champ de vecteur $X$ de $M$ tel que $S = X + f_S.e$ soit un élément de $\mathcal{E}$, ce qui donne :

$$D^E_\bullet S = D^M_\bullet X + f_S.Id_{TM} + (df_S - \alpha).e,$$

où on a noté $\alpha$ la 1-forme associée à $X$ par la dualité induite par $g$. Par définition de $\mathcal{E}$ et de sa métrique, on obtient donc :

$$\|D^M X + f_S.Id_{TM}\|_2^2 \leq \|D^E S\|_2^2 \leq \epsilon \|S\|_2^2 \leq \epsilon(\|\alpha\|_2^2 + \|f_S\|_2^2)$$

et de même :

$$\|df_S - \alpha\|_2^2 \leq \epsilon(\|\alpha\|_2^2 + \|f_S\|_2^2).$$

Or, on a :

$$d\alpha(e_i,e_j) = g\big(D^M_{e_i} X, e_j\big) - g\big(D^M_{e_j} X, e_i\big) = g\big(D^M_{e_i} X + f_S e_i, e_j\big) - g\big(D^M_{e_j} X + f_S e_j, e_i\big),$$

$$\delta\alpha(x) = -\sum_i g\big(D^M_{e_i}X, e_i\big) = nf_S - \sum_i g\big(D^M_{e_i}X + f_S e_i, e_i\big),$$

où $(e_i)$ est une base orthonormée de $T_xM$. On en déduit :

$$(\triangle\alpha,\alpha) = \|d\alpha\|_2^2 + \|\delta\alpha\|_2^2 \leq \big(n+2+\frac{n}{\sqrt{\epsilon}}\big)\epsilon(\|\alpha\|_2^2 + \|f_S\|_2^2) + (1+\sqrt{\epsilon})n^2\|f_S\|_2^2.$$

D'après la remarque qui suit le théorème 4.19 on a, sous nos hypothèses de courbure, $(\triangle\alpha,\alpha) \geq n\big(1 - C(p,n)\epsilon\big)\|\alpha\|_2^2$. En combinant les deux dernières inégalités, on obtient :

$$\|\alpha\|_2^2 \leq \big(1 + C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)n\|f_S\|_2^2.$$

Enfin, on a $\big|\|\alpha\|_2 - \|df_S\|_2\big| \leq \|\alpha - df_S\|_2 \leq \sqrt{\epsilon}\big(\|\alpha\|_2 + \|f_S\|_2\big)$, d'où :

$$\|df_S\|_2 \leq \sqrt{\epsilon}\|f_S\|_2 + (1+\sqrt{\epsilon})\|\alpha\|_2 \leq \sqrt{n}\big(1 + C(p,n)\sqrt{\epsilon}\big)\|f_S\|_2,$$

ce qui permet de conclure. □

On a directement le corollaire suivant :

**Corollaire 5.21.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (universellement calculables) telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n,g)$, de dimension $n$, qui vérifie $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), on ait :*

$$\textit{Si } \lambda_k(\overline{\triangle}^E + V) \leq \epsilon \textit{ et } \|\underline{V}^-\|_p \leq \epsilon, \textit{ alors } \lambda_k(M^n,g) \leq n + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

*En particulier si $\triangle_{sph}$ admet $k$ valeurs propres inférieures à $\epsilon$, alors $(M^n,g)$ admet $k$ valeurs propres $\epsilon^{\frac{1}{2}}$-proches de $n$.*

**Démonstration.** — D'après le lemme 5.20, il suffit de démontrer que les deux inégalités $\lambda_k(\overline{\triangle}^E + V) \leq \epsilon$ et $\|\underline{V}^-\|_p \leq \epsilon$ impliquent que $\lambda_k(\overline{\triangle}^E) \leq C(p,n)\epsilon$. Ce fait est prouvé, dans la démonstration du lemme 5.10, dans le cas où $V = \mathrm{Ric}'$. La preuve est identique quand $V$ est quelconque. □

On peut alors en déduire le théorème suivant (remarquer qu'on n'a plus besoin de supposer que $M$ est orientable) :

**Théorème 5.22.** — *Soit $n$ un entier ($n \geq 2$). Soient $p$ et $R$ des nombres réels tels que $p > n/2$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\alpha(p,n)$ et $C(p,n)$ (universellement calculables) telles que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n,g)$, de dimension $n$, et qui vérifie $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \epsilon \min(1, \frac{16\pi^2}{R^2})$ (avec $\epsilon \leq \alpha(p,n)$), on ait :*

$$\textit{Si } \lambda_n(M^n,g) \leq n + \epsilon \textit{ alors } \lambda_{n+1}(M^n,g) \leq n + C(p,n)\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

**Démonstration.** — Le théorème 5.10 implique que $\overline{\triangle}^E$ admet $n$ petites valeurs propres sous nos hypothèses. Si $M$ est orientable, le lemme 5.19 implique alors que $\overline{\triangle}^E$ admet une $n+1$-ème petite valeur propre, et donc le résultat découle du lemme 5.20.

Montrons, par l'absurde, que $M$ est orientable sous nos hypothèses. Si $M$ n'est pas orientable, soient $(f_i)_{i\leq n}$ une base $L^2$-orthonormée de fonctions propres associées aux $n$ premières valeurs propres non nulles de $(M^n, g)$, $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ le revêtement riemannien orientable (à 2 feuillets) de $M$, et $(\tilde{f}_i)_{i\leq n}$ les relevées des fonctions $(f_i)_{i\leq n}$ à $\widetilde{M}$ (qui sont $n$ fonctions propres associées à des valeurs propres proches de $n$). Le raisonnement précédent nous permet d'obtenir une $n+1$-ème fonction propre $\tilde{f}_{n+1}$ sur $\tilde{M}$ associée à une valeur propre proche de $n$ (car $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ est à courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$). On choisit $\tilde{f}_{n+1}$ de manière à ce que la famille $(\tilde{f}_i)_{i\leq n+1}$ soit $L^2$-orthonormée. On note alors $\tilde{\Phi}$ l'approximation de Hausdorff de $\widetilde{M}$ sur $\mathbb{S}^n$ construite à partir des fonctions propres $(\tilde{f}_i)_{i\leq n+1}$ (*cf* (5.3)). Soit $\sigma$ l'élément non trivial du groupe du revêtement de $\widetilde{M}$ sur $M$. Alors $\sigma$ agit par isométrie sur $\widetilde{M}$, et donc $\tilde{f}_i \circ \sigma$ est aussi une fonction propre de $\widetilde{M}$ associée à une valeur propre proche de $n$. Or, on a montré plus haut que, d'après le corollaire 3.2 (*iii*), les variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ admettent au plus $n+1$ valeurs propres proches de $n$, donc toute fonction propre associée à une valeur propre proche de $n$ est dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions $(\tilde{f}_i)_{i\leq n+1}$. L'application $\tilde{f} \mapsto \tilde{f} \circ \sigma$ préserve donc cet espace vectoriel, son produit scalaire $L^2$, ainsi que les $\tilde{f}_i$ pour $i \leq n$ (par construction) et leur orthogonal. On a donc $\tilde{f}_{n+1}\circ\sigma = \pm\tilde{f}_{n+1}$. Si $\tilde{f}_{n+1}\circ\sigma = \tilde{f}_{n+1}$, alors $\tilde{f}_{n+1}$ passe au quotient et donne une fonction propre de $(M^n, g)$ correspondant à une $n+1$-ème valeur propre proche de $n$ ; $M$ serait alors une variété orientable d'après le **e)** de la section 5.4.2. Dans le cas contraire, on a $\tilde{f}_{n+1} \circ \sigma = -f_{n+1}$, et $\tilde{\Phi}$ est une application équivariante pour les actions des groupes $\{id, \sigma\}$ sur $\tilde{M}$ et $\{Id, A\}$ sur $\mathbb{S}^n$, où $A$ est la restriction à $\mathbb{S}^n$ de la symétrie de $\mathbb{R}^{n+1}$ par rapport à l'hyperplan horizontal ; on a aussi $deg(\widetilde{\Phi}) = \pm 1$ d'après la proposition 5.16 et le théorème **A**. On en déduit que $\tilde{\Phi}$ passe au quotient en une application $\Phi$ de $M$ sur la demi-sphère $\frac{1}{2}\mathbb{S}^n$ dont le degré modulo 2 est égal à 1. Or $M$ est une variété sans bord et $\frac{1}{2}\mathbb{S}^n$ est une variété à bord (et même contractile), le degré modulo 2 de $\Phi$ ne peut donc être que nul, d'où une contradiction. □

**Remarque.** — On peut ainsi, dans tous les résultats précédents en courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$, remplacer l'hypothèse $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$ par l'hypothèse (a priori plus faible) $\lambda_n \leq n + \epsilon$.

Le théorème précédent, combiné au théorème de finitude du genre différentiable en courbure de Ricci minorée de J. Cheeger et T. Colding [30], nous permet d'obtenir le prolongement suivant du théorème de P. Petersen :

**Corollaire 5.23.** — *Il existe une constante universelle $\epsilon(n)$ telle que, toute variété riemannienne complète $(M^n, g)$ de dimension $n$ qui vérifie les inégalités* $\mathrm{Ric}(M^n, g) \geq n-1$ *et $\lambda_n(M^n, g) \leq n + \epsilon(n)$, est difféomorphe à $\mathbb{S}^n$.*

**Démonstration.** — Le théorème 5.22 prouve que $\lambda_{n+1}(M^n, g) \leq C(n)\epsilon(n)^{\frac{1}{4}}$. La proposition 5.16 permet d'en déduire que $d_{GH}\big((M^n, g); (\mathbb{S}^n, can)\big) \leq C(n)\epsilon(n)^{\frac{1}{384(n+1)^3}}$. Si $\epsilon(n)$ est choisi suffisamment petit, le théorème de J. Cheeger et T. Colding conclut. □

### Variantes

Bien évidemment, on peut décliner ce corollaire en remplaçant la conclusion par l'une des inégalités :

$$\mathrm{Rad}(M^n, g) \geq \big(1 - C(n)\epsilon^{\beta(n)}\big)\pi \quad \text{ou} \quad \mathrm{Vol}(M^n, g) \geq \big(1 - C(n)\epsilon^{\beta(n)}\big)\,\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^n$$

$$\text{ou}$$

$$d_{GH}\big((M^n, g), (\mathbb{S}^n, can)\big) \leq C(n)\epsilon^{\beta(n)} \quad \text{ou} \quad \lambda_{n+1}(M^n, g) \leq n\big(1 + C(n)\epsilon^{\beta(n)}\big)$$

(où $C(n)$ et $\beta(n)$ sont des constantes universelles explicitement calculables).

Dans ce qui précède, on a utilisé une méthode algébrique de produit extérieur dans un fibré vectoriel ad-hoc pour construire, à partir de $n$ fonctions propres associées à des valeurs propres proches de $n$ (d'une variété de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$) une $n+1$-ième fonction propre associée à une valeur propre proche de $n$. On peut se demander si l'existence de $0 < k \leq n-1$ valeurs propres proches de $n$ implique l'existence de $n+1$ valeurs propres proches de $n$ en courbure de Ricci presque supérieure à $n-1$. En fait, pour clore cette section, on va décrire une suite de variétés riemanniennes compactes $(\mathbb{S}^n, g_k)$ de courbure de Ricci supérieure à $n-1$ et telles que $\lambda_{n-1}(\mathbb{S}^n, g_k) \to n$ et $Vol(\mathbb{S}^n, g_k) \to 0$. D'après ce qui précède, on en déduit que $\lambda_n(\mathbb{S}^n, g_k)$ est minorée par une constante strictement supérieure à $n$ (sinon, à partir d'un certain rang, les variétés de la suite admettraient $n+1$ valeurs propres arbitrairement proches de $n$ d'après le théorème 5.22, et donc la suite des volumes devrait tendre vers celui de la sphère canonique d'après le théorème 5.7). Remarquer aussi que notre suite tend en distance de Gromov-Hausdorff vers une demi-sphère de dimension $n-1$ et que, par conséquent, la suite des Radius tend vers $\frac{\pi}{2}$. En revanche nous n'avons pas réussi à construire d'exemple de variétés de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, admettant $(n-1)$ valeurs propres proches de $n$, qui soient non difféomorphes (voire non homéomorphes) à la sphère $\mathbb{S}^n$ (pour des contres-exemples de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, non difféomorphes à $\mathbb{S}^n$ et admettant une valeur propre proche de $n$, voir les travaux de M. Anderson [4] ou de Y. Otsu [74])

**Exemple.** — Soit $k$ un entier non nul. Sur la variété $M = I_k \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$ (où $I_k$ est un intervalle précisé plus loin), on considère la métrique $g_k = dr^2 + a_k(r)^2 g_{\mathbb{S}^1} + b_k(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-2}}$, où $g_{\mathbb{S}^1}$ et $g_{\mathbb{S}^{n-2}}$ sont les métriques canoniques des sphères $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^{n-2}$, et où $a_k$ et $b_k$ sont des fonctions définies sur $I_k = ]0, \frac{\pi}{2} - \theta_k[$ par les formules :

$$a_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{k}\sin(kr) & \text{sur } ]0, \epsilon_k] \\ \eta_k \sin(r+\theta_k) & \text{sur } [\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[ \end{cases}$$

et

$$b_k(r) = \begin{cases} \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k+\theta_k}\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k+\theta_k}\cos\big(\theta_k+\epsilon_k\big) & \text{sur } ]0, \epsilon_k] \\ \cos(r+\theta_k) & \text{sur } [\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[ \end{cases}$$

avec $\eta_k = \sqrt{\sin^2(\frac{1}{\sqrt{k}}) + \frac{1}{k^2}\cos^2(\frac{1}{\sqrt{k}})}$, $\epsilon_k = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{k}}}{k}$ et $\theta_k = \arctan\Big(\frac{1}{k \tan\frac{1}{\sqrt{k}}}\Big) - \frac{\pi}{2k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}$. Remarquer que les fonctions $a_k$ (resp. $b_k$) est $C^1$ sur $I_k$, $C^2$ en dehors de $\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{k}}}{k}$ et tend vers 0 en 0 (resp. en $\frac{\pi}{2} - \theta_k$). On en déduit que la variété différentiable $M$ peut-être considérée comme l'ouvert obtenu en retirant à la sphère $\mathbb{S}^n$ une sous-sphère $\mathbb{S}^{n-2}$ et le cercle $\mathbb{S}^1$ qui est le Cut-locus de la sous-sphère $\mathbb{S}^{n-2}$ pour la métrique canonique : si $\mathbb{S}^{n-2}$ est l'intersection de $\mathbb{S}^n$ et d'un sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension $(n-1)$, alors le 2-plan orthogonal à ce sous-espace intersecte $S^n$ le long du cercle $\mathbb{S}^1$, le paramétrage de $\mathbb{S}^n \setminus \big(\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^{n-2}\big)$ par $]0, \frac{\pi}{2}[ \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$ est alors l'application :

$$\begin{cases} ]0, \frac{\pi}{2}[ \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2} & \to & \mathbb{S}^n \setminus \big(\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^{n-2}\big) \\ (r, u, v) & \mapsto & \cos(r)v + \sin(r)u \end{cases}$$

et la métrique canonique de $\mathbb{S}^n$ s'écrit, dans ce paramétrage, $(dr)^2 + \sin^2 r (du)^2 + \cos^2 r g_{\mathbb{S}^{n-2}}$. Ainsi, la métrique décrite sur $M$ se prolonge en une métrique $C^1$ sur $\mathbb{S}^n$ pour laquelle le cercle $\mathbb{S}^1$ reste le cut-locus de la sous sphère $\mathbb{S}^{n-2}$; la régularité de la métrique $g_k$ en $r = 0$ se déduit du fait que $b_k(r)$ est une série entière en les puissances de $r^2$, de rayon de convergence infini et du fait que $a_k(r)$ est une série entière en $r$ de rayon de convergence infini, ne contenant que des termes d'ordre impair et telle que $a'_k(0) = 1$. La régularité au voisinage de $r = \big(\frac{\pi}{2} - \theta_k\big)$ se prouve de la même manière, en posant $t = \frac{\pi}{2} - \theta_k - r$ et en remarquant que $g_k$ s'écrit alors $(dt)^2 + (\sin t)^2 g_{\mathbb{S}^{n-2}} + \eta_k^2 \cos^2 t \, g_{\mathbb{S}^1}$. La sphère $\mathbb{S}^n$ munie de la métrique $g_k$ est en fait l'équivalent des fuseaux de révolution utilisés dans le contre-exemple 4.14 du chapitre **4**. En effet, ces fuseaux peuvent-être vus comme étant une déformation de la métrique canonique de $\mathbb{S}^n$, vue en carte exponentielle normale, par rapport à une sous sphère $\mathbb{S}^0$. La déformation consiste à écraser la métrique dans le facteur normal à la sous sphère $\mathbb{S}^0$ en la multipliant par un facteur $\eta$ petit. Toutefois, cela génére des singularités le long de la sous-sphère $\mathbb{S}^0$, d'où la nécessité de régulariser la métrique obtenue en la modifiant au voisinage de $\mathbb{S}^0$. On pourrait faire la même chose en écrivant la métrique de $\mathbb{S}^n$ en carte exponentielle normale par rapport à une sous-sphère de dimension

$l \leq n-2$ (il faut alors régulariser la métrique aussi au voisinage du Cut-locus de la sous-sphère, comme il est fait plus haut dans le cas de $\mathbb{S}^{n-2}$) ; notons que, dans le cas d'une sous-sphère de dimension $n-1$, il n'est pas possible d'écraser la métrique dans le facteur normal (et donc de contredire le théorème 5.22).

Pour minorer la courbure de Ricci, on applique les formules de calcul de la courbure de Ricci des doubles-produits tordus (voir par exemple [74]), qui nous disent que, dans notre cas, si en un point $x$ fixé de $M$ on note $\frac{\partial}{\partial r}$ un vecteur tangent au facteur $I$, $u$ un élément de $T_x\mathbb{S}^1$, $v$ un élément de $T_x\mathbb{S}^{n-2}$ et $\mathrm{Ric}_k$ la courbure de Ricci de $M$, muni de la métrique $g_k$, alors $\mathrm{Ric}_k\big(\frac{\partial}{\partial r}, u\big) = \mathrm{Ric}_k\big(\frac{\partial}{\partial r}, v\big) = \mathrm{Ric}_k\big(u, v\big) = 0$, et :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_k\Big(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\Big) &= -\frac{a''}{a} - (n-2)\frac{b''}{b} \\ &= \begin{cases} k^2 + (n-2)\big(\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k}\big)^2 \dfrac{\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big)}{\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k}\cos\big(\theta_k+\epsilon_k\big)} \geq k^2 & \text{sur } ]0, \epsilon_k] \\ n-1 & \text{sur } [\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[ \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Ric}_k\big(u,u\big)}{g_k(u,u)} &= -\frac{a''}{a} - (n-2)\frac{a'b'}{ab} \\ &= \begin{cases} k^2 + (n-2)\frac{k\cos(kr)}{\sin(kr)}\big(\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k}\big) \dfrac{\sin\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big)}{\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k}\cos\big(\theta_k+\epsilon_k\big)} \geq k^2 & \text{sur } ]0, \epsilon_k] \\ n-1 & \text{sur } [\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[ \end{cases}\end{aligned}$$

et

$$\frac{\mathrm{Ric}_k\big(v,v\big)}{g_k(v,v)} = -\frac{b''}{b} - \frac{a'b'}{ab} + (n-3)\Big(\frac{1-b'^2}{b^2}\Big)$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Ric}_k\big(v,v\big)}{g_k(v,v)} &= \Big(\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k}\Big)^2 \frac{\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big)}{\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k}\cos\big(\theta_k+\epsilon_k\big)} \\ &\quad + \frac{k\cos(kr)}{\sin(kr)}\Big(\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k}\Big) \frac{\sin\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big)}{\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k}\cos\big(\theta_k+\epsilon_k\big)} \\ &\quad + (n-3)\Big(\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k}\Big)^2 \frac{1-\sin^2\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big)}{\Big(\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k}\cos\big(\theta_k+\epsilon_k\big)\Big)^2} \text{ sur } ]0, \epsilon_k] \\ &\geq \Big(\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k}\Big)^2 \frac{\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big)}{\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k}\cos\big(\theta_k+\epsilon_k\big)} \\ &\geq \frac{\theta_k}{\epsilon_k}\Big(1+\frac{\epsilon_k}{\theta_k}\Big)^2 \frac{\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big)}{\frac{\epsilon_k}{\theta_k}\cos\big((\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k})r\big) + \cos\big(\theta_k+\epsilon_k\big)} \geq \frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k} \sim \frac{2}{\pi}\sqrt{k} \text{ sur } ]0, \epsilon_k]\end{aligned}$$

(car $\theta_k + \epsilon_k \geq \big(\frac{\epsilon_k+\theta_k}{\epsilon_k}\big)r\big)$ et

$$\frac{\mathrm{Ric}_k\big(v,v\big)}{g_k(v,v)} = 2 + (n-3)\frac{1-\sin^2(r+\theta_k)}{\cos^2(r+\theta_k)} = n-1 \text{ sur } [\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[.$$

On déduit des calculs précédents que $(\mathbb{S}^n, g_k)$ est de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ pour $k$ assez grand.

Il est évident que la suite des volumes tend alors vers 0 car $\eta_k \to 0$. De même, on voit que la suite de variétés ainsi obtenue tend (en distance de Gromov-Hausdorff) vers une des hémisphères de dimension $n-1$ que borde la sphère $\mathbb{S}^{n-2}$ choisie plus haut. Notons $(N_k, h_k)$ la variété $]\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[\times \mathbb{S}^{n-2}$, munie de la métrique $h_k = (dr)^2 + \cos^2(r+\theta_k)\, g_{\mathbb{S}^{n-2}}$ ; elle est isométrique à la boule géodésique de $\mathbb{S}^{n-1}$, centrée au pôle Nord (noté $e_0$) et de rayon $\frac{\pi}{2} - (\epsilon_k + \theta_k)$ (privée de son centre) : en effet, si on identifie $\mathbb{S}^{n-2}$ avec l'équateur, l'isométrie s'écrit $(r,v) \mapsto \cos(r+\theta_k).v + \sin(r+\theta_k).e_0$. Donc $(N_k, h_k)$ converge, au sens de Gromov-Hausdorff, vers l'hémisphère Nord de $\mathbb{S}^{n-1}$, munie de sa métrique canonique. Par ailleurs, $(N_k, h_k)$ se plonge dans $(M, g_k)$ de manière isométrique, via l'application $(r,v) \mapsto (r, u_0, v)$, où $u_0$ est un point fixé de $\mathbb{S}^1$. De plus, la distance dans $M$ entre deux points $p = (r, u_0, v)$ et $q = (r', u_0, v')$ coïncide avec la distance dans $N_k$ entre $(r,v)$ et $(r',v')$. En effet, si $t \mapsto \big(r(t), u(t), v(t)\big)$ est une courbe qui joint $p$ à $q$, la courbe $t \mapsto \big(r(t), u_0, v(t)\big)$ est toujours plus courte. Comme $d_{g_k}\big[(r,u,v);(r,u_0,v)\big] \leq \pi\,\eta_k$, on a $d_{GH}\big((N_k,h_k);(M,g_k)\big) \leq \epsilon_k + \pi\eta_k$. On en déduit que $(M, g_k)$ converge vers l'hémisphère de $\mathbb{S}^{n-1}$ au sens de Gromov-Hausdorff.

Il nous reste à montrer que le laplacien de ces variétés admet au moins $n-1$ valeurs propres proches de $n$.

Les calculs précédents prouvent également que :

$$\begin{aligned}
d_{g_k}\big[(\epsilon_k, u_0, v);(\epsilon_k, u_0, -v)\big] &= d_{h_k}\big[(\epsilon_k, v);(\epsilon_k, -v)\big] \\
&= d_{\mathbb{S}^{n-1}}\big[\cos(\epsilon_k+\theta_k)v + \sin(\epsilon_k+\theta_k)e_0; -\cos(\epsilon_k+\theta_k)v + \sin(\epsilon_k+\theta_k)e_0\big] \\
&= \pi - 2(\epsilon_k + \theta_k).
\end{aligned}$$

Ceci montre que, pour tout point $v \in \mathbb{S}^{n-2}$, le point $\tilde{v} = (0, u_0, v)$ vérifie $\mathrm{Rad}_{g_k}(\tilde{v}) \geq \pi - 2(2\epsilon_k + \theta_k)$. Choisissons des points $x_0, \ldots, x_{n-2}$ sur $\mathbb{S}^{n-2}$ de sorte que $d_{\mathbb{S}^{n-2}}(x_i, x_j) = \frac{\pi}{2}$ si $i \neq j$. Notons encore $x_i$ le point $(0, u_0, x_i)$ de $M$ ; comme $Rad(x_i)$ est proche de $\pi$, si on pose $f_i(x) = \cos\big(d_k(x_i, x)\big)$, on obtient, d'après la démonstration du corollaire 5.4, $n-1$ fonctions de quotient de Rayleigh proche de $n$. Pour conclure à l'existence de $n-1$ valeurs propres proches de $n$ par le principe du min-max, il suffit de montrer que la famille des fonctions $\big(\sqrt{n+1}.f_i\big)$ est presque orthonormée pour le produit scalaire $L^2$. En effet, si c'est le cas, on note $Q(f) = \|df\|_2^2$ la forme quadratique définie sur l'espace de dimension $n-1$ engendré par les fonctions $f_i$, et sa trace relativement au produit scalaire $L^2$ tend vers $n(n-1)$ (en évaluant cette trace sur la base donnée par les fonctions $\sqrt{n+1}.f_i$). De plus, la variété est de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, donc la première valeur propre non nulle du laplacien est minorée par $n$. On en déduit que toutes les valeurs propres de $Q$ relativement au produit scalaire $L^2$ sont supérieures à $n$ et donc toutes ses valeurs propres tendent vers $n$. Le principe du min-max nous donne donc que $\lambda_{n-1}$ tend vers $n$. Or, pour tout couple $(i,j)$, on a :

$$\begin{aligned}
&(f_i,f_j)_{L^2(g_k)}\\
&=\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n,g_k)}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{I_k\times\mathbb{S}^{n-2}}\cos\big(d_k(x_i,(r,u,v))\big)\cos\big(d_k(x_j,(r,u,v))\big)a_k(r)b_k^{n-2}(r)\,drdv_{S^1}dv_{\mathbb{S}^{n-2}}\\
&=\frac{1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^1\,\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^{n-2}}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{I_k\times\mathbb{S}^{n-2}}\cos\big(d_k(x_i,(r,u,v))\big)\cos\big(d_k(x_j,(r,u,v))\big)\frac{a_k(r)b_k^{n-2}(r)}{\int_{I_k}a_k(s)b_k^{n-2}(s)\,ds}drdudv
\end{aligned}$$

Or, $\frac{a_k(r)b_k^{n-2}(r)}{\int_{I_k}a_k(s)b_k^{n-2}(s)\,ds}\to(n-1)\sin(r)\cos^{n-2}(r)$ lorsque $k$ tend vers $+\infty$. Nous avons vu ci-dessus que :

$$\begin{aligned}
&\cos d_{g_k}\big[(\epsilon_k,u_0,x_i);(r,u_0,v)\big]\\
&\qquad=\cos d_{\mathbb{S}^{n-1}}\big[\cos(\epsilon_k+\theta_k)x_i+\sin(\epsilon_k+\theta_k)e_0,\cos(r+\theta_k)v+\sin(r+\theta_k)e_0\big].
\end{aligned}$$

Nous en déduisons (toujours en identifiant $x_i$ avec $(0,u_0,x_i)$) que la fonction $\cos d_{g_k}\big[x_i;(r,u_0,v)\big]\cos d_{g_k}\big[x_j;(r,u_0,v)\big]$ tend vers $\cos^2 r<x_i,v><x_j,v>$ quand $k$ tend vers $+\infty$ (où $<.,.>$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{n-1}$ entre deux éléments de $\mathbb{S}^{n-2}$). On en déduit, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que $(f_i,f_j)_{L^2(g_k)}$ converge vers :

$$\frac{n-1}{\mathrm{Vol}\,\mathbb{S}^{n-2}}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times\mathbb{S}^{n-2}}<x_i,v><x_j,v>\sin r\cos^n r\,drd_{\mathbb{S}^{n-2}}(v)=\frac{1}{n+1}<x_i,x_j>,$$

en utilisant la formule (5.1). On en conclut que $(f_i,f_j)_{L^2(g_k)}$ converge vers $\frac{\delta_{ij}}{n+1}$ lorsque $k$ tend vers $\infty$, ce qui termine la preuve de l'existence des $n-1$ valeurs propres arbitrairemant proches de $n$.

**Remarque.** — J. Bertrand a récemment démontré (voir [20]) que si une variété riemannienne complète $(M^n,g)$ de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ admet $k$ valeurs propres plus petites que $n+\epsilon$ (où $\epsilon\geq\alpha(n)$, où $\alpha(n)$ est une constante universelle strictement positive et où $k\in[\![1,n]\!]$), alors la variété $(M^n,g)$ contient une sous-partie $A$ $\epsilon$-proche au sens de Hausdorff de la sphère canonique $\mathbb{S}^{k-1}$ (où la fonction distance sur $A$ est la restriction de la fonction distance géodésique de $(M^n,g)$). Dans le contre exemple précédent, on construit un fuseau en "contractant" sur un cône très fin le fibré normal d'une sous sphère $\mathbb{S}^{n-2}$ dans $\mathbb{S}^n$. En faisant la même construction à partir de la contraction sur un cône très fin du fibré normal d'une sous-sphère $\mathbb{S}^{k-1}$ de $\mathbb{S}^n$ (pour $k\in[\![1,n-1]\!]$), on obtient une variété de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, admettant au moins $k$ valeurs propres proches de $n$ (données par les cosinus des fonctions distances à $k$ points de distance mutuelle égale à $\pi/2$ de la sous-sphère $\mathbb{S}^{k-1}$) et Hausdorff proche d'une demi-sphère de dimension $k$. Le résultat de J. Bertrand implique alors que cette métrique de $\mathbb{S}^n$ n'admet que $k$ valeurs propres proches de $n$, car une demi-sphère de dimension $k$ ne peut contenir une partie hausdorff-proche d'une sphère de dimension $k$ : en effet, dans le contraire la demi-sphère $\frac{1}{2}\mathbb{S}^k$ de dimension $k$ contiendrait une famille $B$ de $k+1$ points à distance mutuelle égale à $\pi/2$ et telle que chacun de ces points admette, sur la demi-sphère $\frac{1}{2}\mathbb{S}^k$, un point à distance presque $\pi$. Si on identifie cette demi-sphère $\frac{1}{2}\mathbb{S}^k$ à la demi-sphère supérieure de centre 0 de $\mathbb{R}^{k+1}$, et qu'on note par $\vec{u}$ le vecteur de $\frac{1}{2}\mathbb{S}^k$ orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^k$ engendré par le bord de $\frac{1}{2}\mathbb{S}^k$, alors $(\vec{u},\vec{v})$ est positif pour tout élément $\vec{v}$ de la famille $B$ car $\vec{v}$ est dans $\frac{1}{2}\mathbb{S}^k$ et $(\vec{u},-\vec{v})$ est presque positif car $\frac{1}{2}\mathbb{S}^k$ contient un élément proche de $-\vec{v}$ (on rappelle que le produit scalaire canonique de deux points de $\mathbb{S}^k$ est égal au cosinus de la distance géodésique entre ces deux points). On en déduit que la famille $B\cup\{u\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^{k+1}$ est presque-orthonormée (donc libre) et contient $k+2$ vecteurs, ce qui est contradictoire.

### 5.6.2 $\lambda_1 \leq n+\epsilon$ ou $\mathrm{Diam}(M) \geq \pi-\epsilon$

Le but de cette section est de montrer que toute variété riemannienne complète de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)$ et de courbure sectionnelle majorée, admettant une première valeur propre non nulle $\lambda_1$ du laplacien usuel presqu'égale à $n$ ou un diamètre presqu'égal à $\pi$, est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^n$. C'est une généralisation d'un résultat de S. Ilias [62] au cas d'hypothèses intégrales sur la courbure :

**Théorème 5.24.** — *Soit $n$ un entier ($n\geq 2$). Soient $p$, $R$ et $A$ des nombres réels tels que $p>n/2$, $R>0$ et $A>0$. Il existe une fonction $\alpha(p,n,A)$ (universellement calculable) telle que, pour toute variété riemannienne complète $(M^n,g)$, de dimension $n$, qui vérifie $\sup_x \|\big(\underline{\mathrm{Ric}}-(n-1)\big)^-\|_{L^p(B(x,R))} \leq \alpha(p,n,A)\min(1,\frac{16\pi^2}{R^2})$ et $\|R\|_{2p}\leq A$, on ait :*

$$\textit{Si } \mathrm{Diam}(M) \geq \pi\big(1-\alpha(p,n,A)\big), \textit{ alors } M \textit{ est homéomorphe à } \mathbb{S}^n.$$

**Démonstration.** — Sous les hypothèses du théorème 5.24 (pour un choix convenable de $\alpha(p,n,A)$), on a $\lambda_1(M^n,g)\leq n\big[1+C(p,n)\alpha(p,n,A)\big]$, d'après le corollaire 5.4. Soit $f$ une fonction propre de $M$ associée à la valeur propre $\lambda_1$. Rappelons que, si on note $S_f=\nabla f+fe$, alors on a $\triangle_{sph}S_f=(\lambda_1-n)A(S_f)$ (voir la section 5.4.2). On applique la proposition 2.2 à la section $S_f$, en y remplaçant $p$ et $q$ respectivement par $2p$ et $\frac{2p+n}{2}$ et en y majorant la constante de Sobolev $S_{\frac{2p+n}{2}}(M^n,g)$ par $C(p,n)$ (à l'aide du théorème 4.17), ce qui donne :

$$\frac{\|D^ES_f\|_\infty}{\|S_f\|_\infty} \leq \big(1+C(p,n)\Lambda^{\frac{1}{2}}\big)^{\frac{2p(2p+n)}{2p-n}}\max\Big[\frac{\|D^ES\|_2}{\|S\|_\infty},\frac{1}{\mathrm{Diam}(M)^{1-\gamma}}\Big(\frac{\|D^ES\|_2}{\|S\|_\infty}\Big)^\gamma\Big], \qquad (*)$$

où $\gamma=\frac{2p-n}{2p-n+p(2p+n)}$ et où :

$$\Lambda = \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_p+\|R^E\|_p}+\mathrm{Diam}(M)^2\Big[\frac{\|\overline{\triangle}S\|_{2p}}{\|S\|_\infty}+\|R^E\|_{2p}\Big].$$

Or la courbure $R^E$ du fibré $E$ est la différence entre la courbure $R^M$ de $M$ et la courbure $\mathrm{R}^{\mathbb{S}^n}$ de $\mathbb{S}^n$ (agissant sur $(TM)^3$ selon la formule $\mathrm{R}^{\mathbb{S}^n}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Z} = \mathrm{g}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})\mathrm{X} - \mathrm{g}(\mathrm{X},\mathrm{Z})\mathrm{Y}$), donc $\|\underline{\mathrm{Ric}}\|_p$, $\|\,\mathrm{Ric}'\,\|_{2p}$, $\|R^E\|_p$ et $\|R^E\|_{2p}$ sont majorés par $C(n)(A+1)$. Par ailleurs, par définition de $\triangle_{sph}$, on a :

$$|\overline{\triangle}S_f| \leq |\lambda_1 - n||A(S_f)| + |\,\mathrm{Ric}'\,||S_f|,$$

dont on déduit :

$$\|\overline{\triangle}S_f\|_{2p} \leq |\lambda_1 - n|\|S_f\|_\infty + (A+1)\|S_f\|_\infty.$$

En ajoutant à ces estimées la majoration du diamètre par $2\pi$ donnée par le théorème 4.12, nous obtenons une majoration de $\Lambda$ par $C(n)(1+A)$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\|D^E S_f\|_2^2 =& < \overline{\triangle}_{sph}(S_f), S_f >_{L^2} - < \mathrm{Ric}'(S_f), S_f >_{L^2}\\ &\leq |\lambda_1 - n|\,|< A(S_f), S_f >_{L^2}| + \int_M \big(\underline{\mathrm{Ric}} - (n-1)\big)^- |S_f|^2\\ &\leq C(p,n)\alpha(p,n,A)\|S_f\|_\infty^2\end{aligned}$$

(où on a encore une fois utilisé le fait que l'hypothèse intégrale sur $B(x,R)$ implique une propriété intégrale analogue sur $M$ entier, *cf* la discussion qui précède le lemme 5.10). L'hypothèse faite sur le diamètre implique que $\mathrm{Diam}(M) \geq \frac{\pi}{2} > 1$. Si $\alpha$ a été choisi suffisamment petit, en injectant les estimées qui précèdent dans $(*)$, nous obtenons :

$$\|D^E S_f\|_\infty \leq C(p,n,A)\,\alpha(p,n,A)^{\frac{\gamma}{2}}\,\|S_f\|_\infty,$$

dont on déduit :

$$\begin{aligned}\inf|S_f| &\geq \big(1 - C(p,n,A)\alpha(p,n,A)^{\frac{\gamma}{2}}\,\mathrm{Diam}(M)\big)\|S_f\|_\infty\\ &> C(p,n,A)\alpha(p,n,A)^{\frac{\gamma}{2}}\|S_f\|_\infty \geq \|D^E S_f\|_\infty\end{aligned}$$

d'après le théorème des accroissements finis, le théorème 4.12 et quitte à choisir $\alpha(p,n,A)$ suffisamment petite. On obtient donc qu'en tout point critique $p$ de $f$, on a $|f(p)| > \|D^E S_f\|_\infty$. Or, pour tout vecteur unitaire $X$ de $T_pM$, on a, d'après le lemme 5.8 :

$$|Ddf_p(X,X) + f(p)| = |< D^E_X S_f, X >_E| \leq \|D^E S_f\|_\infty < |f(p)|.$$

On a donc les inégalités $-|f(p)| - f(p) < Ddf_p(X,X) < |f(p)| - f(p)$ valables en tout point critique de $f$. Donc $f$ n'admet comme points critiques que des maxima ou des minima locaux. Par connexité de $M$, et d'après le théorème de Morse, on en déduit que $f$ n'a que deux points critiques. Le lemme de Reeb permet de conclure que $M$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$ (pour le théorème de Morse et le lemme de Reeb, nous renvoyons le lecteur au livre de J. Milnor [71]).

$\square$

**Remarque 1.** — Un théorème analogue, où on remplace l'hypothèse $\mathrm{Diam}(M) \geq \pi\big(1 - \alpha(p,n,A)\big)$ par l'hypothèse $\lambda_1(M^n, g) \leq n\big(1 + \alpha(p,n,A)\big)$, peut-être démontré. Il suffit pour cela de remarquer que cette hypothèse sur $\lambda_1$ implique celle sur le diamètre : c'est une application de la généralisation, au cas des variétés de courbure de Ricci presque supérieure à $(n{-}1)$ (théorème 5.2 de [79]), d'une minoration de $\lambda_1 - n$ par une fonction de l'écart entre $\pi$ et le diamètre, qui améliore l'inégalité de Lichnerowicz en courbure de Ricci minorée par $(n{-}1)$ (l'existence théorique d'une telle minoration est due à C.B. Croke [42], la minoration est spécifiée par P. Bérard, G. Besson et S. Gallot dans [18]).

**Remarque 2.** — Le fait que la fonction $\alpha$ dépende de $p$, $n$ et d'une borne de la courbure sectionnelle est inéluctable comme le montre une série de contre-exemples décrits dans [62]. Par exemple, le produit riemannien de 2 sphères canoniques de dimension $j$ et de rayons $\sqrt{(j-1)/(2j-1)}$ est de courbure de Ricci égale à $2j{-}1$ et de diamètre égal à $\pi\sqrt{\frac{2j-2}{2j-1}}$ qui tend vers $\pi$ quand $j$ tend vers $+\infty$. Par ailleurs, les travaux de M. T. Anderson [4] et Y. Otsu [74] donnent des exemples de variétés complètes de dimension $n \geq 4$ ($n \geq 5$ dans [74]), de courbure de Ricci supérieure à $(n{-}1)$ et de diamètre arbitrairement proche de $\pi$ (dans [4], il s'agit d'une suite de métriques bien choisies sur une somme connexe $CP^n \# CP^n$).

# Bibliographie

# Bibliographie


[1] U. Abresch, D. Gromoll, *On complete manifolds with nonnegative Ricci curvature*, Journ. A.M.S. Vol. **3** (1990), p. 355–374.

[2] W. Ambrose, *A theorem of Myers*, Duke Math. J. **24** (1957), p. 345–348.

[3] M. Anderson, *Hausdorff perturbations of Ricci-flat manifolds and splitting theorem*, Duke Math. J. **68** (1992), p. 67–82.

[4] M. Anderson, *Metrics of positive Ricci curvature with large diameter*, Manuscripta Math. **68** (1990), p. 405–415.

[5] M. Anderson, *Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds*, Invent. Math. **102** (1990), p. 429–445.

[6] M. Anderson, J. Cheeger, *$C^\alpha$-compactness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below*, J. Differential Geom. **35** (1992), p. 265–281.

[7] T. Aubin, *Some non-linear Problems in Riemannian Geometry*, Springer Monographs in Mathematics, (1998), Springer-Verlag.

[8] E. Aubry, *fonctions harmoniques sur les variétés*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble Volume **17** (1999), p. 47–68.

[9] E. Aubry, *Théorème de la Sphère*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble Volume **18** (2000), p. 125–155.

[10] E. Aubry, *Inégalités de Harnack pour les combinaisons linéaires de sections propres de l'opérateur de Hodge. Généralisations et applications*, Prép. **515**, Institut Fourier, Grenoble, (2000).

[11] E. Aubry, *Approximation des valeurs propres et fonctions propres d'une variété riemannienne compacte par une méthode géométrique des éléments finis*, Preprint en cours de rédaction.

[12] E. Aubry, B. Colbois, P. Ghanaat, E. Ruh, *Curvature, Harnack's Inequality and a Spectral Characterization of Nilmanifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. **23** (2003), p. 227–246.

[13] L. Auslander, *Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups*, Ann. of Math. **71** (1960), p. 579–590.

[14] A. Avez, *Riemannian manifolds with non-negative Ricci curvature*, Duke Math. J. **39** (1972), p. 55–64.

[15] W. Ballmann, J. Brüning, G. Carron, *Eigenvalues and Holonomy*, IMRN **12** (2003), p. 657–665.

[16] J. Bemelmans, Min-Oo, E. Ruh, *Smoothing riemannian metrics*, Math. Z. **188** (1981), p. 69–71.

[17] P. Bérard, *From vanishing theorems to estimating theorems : The Bochner method revisited*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), p. 371–406.

[18] P. Bérard, G. Besson, S. Gallot, *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math. **80** (1985), p. 295–308.

[19] M. Berger, D. Ebin *Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold*, J. Diff. Geom. **3** (1969), p. 379–392.

[20] J. Bertrand *pincement spectral en courbure positive*, Thèse. Université Paris-Sud, Orsay (2003).

[21] A. Besse *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag (1987).

[22] J. P. Bourguignon *the «magic» of Weitzenböck formulas*, in Variational methods, Paris 1988, Progress in nonlinear Differential Equation, Vol. **4**, Birkhaüser, Boston (1990).

[23] P. Buser, H. Karcher, *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque **81** (1981), SMF éd.

[24] E. Calabi, *On Ricci curvature and geodesics*, Duke Math. J. **34** (1967), p. 667–676.

[25] D. Calderbank, M. Herzlich, P. Gauduchon, *Refined Kato inequalities and conformal weights in Riemannian geometry*, J. Funct. Anal. **173** (2000), p. 214–255.

[26] I. Chavel, *Riemannian Geometry : a Modern Introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University press, (1993).

[27] J. Cheeger, *The relation between the laplacian and the diameter for manifolds of non-negative curvature*, Arch. Math. **19** (1968), p. 558–560.

[28] J. Cheeger, *Degeneration of Riemannian Metrics under Ricci Curvature Bounds*, Lezioni Fermiane, Accademia Naz. dei Lincei, Sc. Norm. Sup. Pisa (2001).

[29] J. Cheeger, T. Colding, *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*, Ann. of Math. **144** (1996), p. 189–237.

[30] J. CHEEGER, T. COLDING, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I* J. Differential Geom. **46** (1997), p. 406–480.

[31] J. CHEEGER, T. COLDING, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II* J. Differential Geom. **54** (2000), p. 13–35.

[32] J. CHEEGER, T. COLDING, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III* J. Differential Geom. **54** (2000), p. 37–74.

[33] J. CHEEGER, D. GROMOLL, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geom. **6** (1971), p. 119–128.

[34] J. CHEEGER, M. GROMOV, M. TAYLOR, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), p. 15–53.

[35] S. Y. CHENG, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z. **143** (1975), p. 289–297.

[36] S. CHENG, S. T. YAU, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math **28** (1975), p. 333–354.

[37] B. COLBOIS, P. GHANAAT, AND E. A. RUH, *Curvature and gradient estimates for eigenforms of the Laplacian*, Preprintreihe der Fakultät für Mathematik Nr.1999/17, Universität Karlsruhe, (1999).

[38] T. COLDING, *Shape of manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), p. 175–191.

[39] T. COLDING, *Large manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), p. 193–214.

[40] T. COLDING, *Ricci curvature and volume convergence*, Annals of Maths **145** (1997), p. 477–501.

[41] C. B. CROKE, *Some isoperimetric Inequalities and Eigenvalues Estimates*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **13** (1980), p. 419–435.

[42] C. B. CROKE, *An eigenvalue pinching theorem*, Invent. math. **68** (1982), p. 253–256.

[43] K. D. ELWORTHY, S. ROSENBERG, *Manifolds with Wells of negative Curvature*, Invent. Math. **103** (1991), p. 471–495.

[44] J. ESCHENBURG, *Comparison theorem and hypersurfaces*, Manuscripta Math. **59** (1987), p. 295–323.

[45] J. ESCHENBURG, E. HEINTZE, *Comparison theory for Riccati equations*, Manuscripta Math. **68** (1990), p. 209–214.

[46] S. GALLOT, *Variétés dont le spectre ressemble à celui de la sphère*, Astérisque **80** (1980), p. 33–52.

[47] S. Gallot, *A Sobolev inequality and some geometric applications*, Proc. Séminaire Franco–Japonais "Spectra of Riemannian Manifolds" (October 1981), Kaigai Publ., Tokyo (1983), p. 45–55.

[48] S. Gallot *Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques, I*, C.R.A.S., **296**, Série I (1983), p. 333–336.

[49] S. Gallot *Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques, II*, C.R.A.S., **296**, Série I (1983), p. 365–368.

[50] S. Gallot *Isoperimetric inequalities based on integral norms of the Ricci curvature*, Colloque Paul Lévy sur les processus stochastiques, Astérisque, **157-158** (1988), p. 191–216.

[51] S. Gallot *Volume, courbure de Ricci et convergence des variétés (d'après T. H. Colding et Cheeger-Colding)*, séminaire Bourbaki Nov. 1997 (exposé n°835), Astérisque **252** (1998), p. 7–32.

[52] S. Gallot, D. Meyer *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. pures et appl. **54** (1975), p. 259–284.

[53] S. Gallot, D. Meyer *D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison entre spectres. Applications*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **21** (1988), p. 561–591.

[54] P. Ghanaat *Almost Lie groups of type* $\mathbb{R}^n$, J. Reine Angew. Math. **401** (1989), p. 60–81.

[55] P. Ghanaat, *Local structure of framed manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math. **54** (1993), p. 283–288.

[56] P. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, Second edition. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, (1995).

[57] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics **152**, Birkhäuser, Boston (1999).

[58] E. Hebey, *Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, **1635**, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[59] E. Heintze, H. Karcher, *A general comparison theorem with application to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **11** (1978), p. 459–470.

[60] D. Hoffman, J. Spruck, *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), p. 715–727.

[61] S. Ilias, *Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes.* Ann. Inst. Fourier **33** (1983), p. 151–165.

[62] S. ILIAS, *Un nouveau résultat de pincement de la première valeur propre du laplacien et preuve de la conjecture du diamètre pincé,* Ann. Inst. Fourier **43** (1993), p. 843–863.

[63] Y. ITOKAWA, *Distance sphere and Myers-type theorems for manifolds with lower bounds on the Ricci curvature*, Ill. J. Math. **34** (1990), p. 693–705.

[64] B. LAWSON, M.-L. MICHELSOHN, *Spin geometry.* Princeton Mathematical Series, **38**. Princeton University Press, Princeton (1989).

[65] M. LE COUTURIER, G. ROBERT $L^p$*-pinching and the geometry of compact Riemannian manifolds*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), p. 249–271.

[66] P. LI *On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact riemannian manifold*, Ann. Scient. Éc. Norm. sup. **13** (1980), p. 451–469.

[67] P. LI, S.–T. YAU, *Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold*, Proc. Sympos. Pure Math. **36** (1980), p. 205–239.

[68] J. LOHKAMP, *Negatively Ricci curved manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), p. 288–291.

[69] J. LOTT, *Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a smooth limit space*, Duke Math. J. 114 (2002), p. 267–306.

[70] S. MARKVORSEN *A Ricci curvature criterion for compactness of Riemannian manifolds*, Arch. Math. **39** (1982), p. 85–91.

[71] J. MILNOR *Morse theory. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells* Annals of Mathematics Studies **51**. Princeton University Press, VI, Princeton (1963).

[72] M. MIN-OO, E. RUH $L^2$*-curvature pinching*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), p. 36–51.

[73] M. OBATA, *Certain condition for a Riemannian manifold to be isometric to a Sphere*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), p. 333–340.

[74] Y. OTSU, *On manifolds of positive Ricci curvature with large diameter*, Math. Z. **206** (1991), p. 252–264.

[75] P. PANSU, *Effondrement des variétés riemanniennes, d'après J. Cheeger et M. Gromov.*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1983/84. Astérisque **121-122** (1985), p. 63–82.

[76] G. PERELMAN, *A diameter sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature*, Math. Z. **218** (1995), p. 595–596.

[77] P. PETERSEN, *On eigenvalue pinching in positive Ricci curvature*, Invent. Math. **138** (1999), p. 1–21.

[78] P. PETERSEN, S.SHTEINGOLD, G. WEI *Comparison geometry with integral curvature bounds*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), p. 1011–1030.

[79] P. Petersen, C. Sprouse *Integral curvature bounds, distance estimates and applications*, J. Diff. Geom. **50** (1998), p. 269–298.

[80] P. Petersen, C. Sprouse *Eigenvalue pinching for Riemannian vector bundles*, J. Reine Angew. Math. **511** (1999), p. 73–86.

[81] P. Petersen, G. Wei *Relative volume comparison with integral curvature bounds*, Geom. And Funct. Anal. **7** (1997), p. 1031–1045.

[82] P. Petersen, G. Wei *Analysis and geometry on manifolds with integral Ricci curvature bounds. II*, Trans. Am. Math. Soc. **353** (2000), p. 457–478.

[83] M. S. Ragunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1972).

[84] J. Rauch, M. Taylor, *Potential and scattering theory on wildly perturbed domains*, J. Funct. Anal. **18** (1975), p. 27–59.

[85] S. Rosenberg, D. Yang, *Bounds on the fundamental group of a manifold with almost non-negative Ricci curvature*, J. Math. Soc. Japan **46** (1994), p. 267–287.

[86] E. Ruh, *Curvature and differentiable structure on spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), p. 148–150.

[87] T. Sakai, *Riemannian Geometry*, American Math. Soc., Providence, Rhode Island (1996).

[88] K. Shiohama, *Recent developments in sphere theorems*, Proc. of Symp. in Pure Math. **54** (1993), Part 3.

[89] C. Sprouse, *Integral curvature bounds and bounded diameter*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), p. 531–543.

[90] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish Inc., Wilmington, Delaware (1984).

[91] J. Y. Wu, *Complete manifolds with a little negative curvature*, Am. J. Math. **113** (1991), p. 567–572.

[92] T. Yamaguchi, *Manifolds of almost non–negative Ricci curvature*, J. Differential Geom. **28** (1988), p. 157–167.

[93] T. Yamaguchi, *Lipschitz convergence of manifolds of positive Ricci curvature with large volume*, Math. Ann. **284** (1989), p. 423–436.

[94] D. Yang *Convergence of Riemannian manifolds with integral bounds on curvature I*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **25** (1992), p. 77–105.

INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)