À mes parents,

Je voudrais exprimer tout d'abord la reconnaissance de ma gratitude au Professeur Siegmund Kosarew pour avoir assurer la direction de cette thèse, pour les pistes de réflexions fructueuses qu'il m'a suggérées et pour tous ses e orts de soutien et d'encouragement qu'il m'a manifestés depuis le début de mes travaux.

Je voudrais remercier Mikhail Zaidenberg qui me fait l'honneur et le plaisir de présider ce jury.

Georg Schumacher et Jean-Pierre Vigué m'ont fait beaucoup d'honneur en acceptant de rapporter sur ma thèse. Je tiens à leur exprimer mes vifs remerciements.

Je suis également très honoré par la participation à ce jury de Mongi Blel. Je tiens à le remercier chaleureusement pour l'encouragement qu'il m'a toujours apporté.

Enfin, je remercie Arlette Guttin-Lombard qui a accompli avec succès la tâche di cile de saisie de ce texte. Pour sa sympathie et surtout pour son sang-froid, je la remercie infiniment.

SOMMAIRE

Introduction

Étant donné un espace analytique X, l'espace de Douady $D(X)$ paramétrise tous les sous-espaces analytiques compacts de X. Dans sa thèse de 1965, Douady a pu munir cet espace d'une structure complexe naturelle et construire au-dessus de lui une famille analytique universelle. Pourcin a ensuite établi la version relative de l'espace de Douady. Lorsque X est projectif, cette construction est due à Grothendieck et $D(X)$ coïncide dans ce cas avec le schéma de Hilbert. Dans la pratique, on s'intéresse aussi à des variantes de l'espace de Douady qui sont obtenues en général à partir de sous-foncteurs ouverts du foncteur de Hilbert, qui définit l'espace de Douady, et sont donc ouverts dans ce dernier. Par exemple, on définit l'espace $D'(X)$ (resp. $D'_m(X)$) qui paramétrise les sous-variétés complexes connexes et compactes de X (resp. de même dimension m).

D'autre part, Kobayashi a introduit en 1967 sur chaque espace analytique X une pseudo-distance d_X qui ne dépend que de la structure complexe de X. Si d_X est une distance, X s'appelle hyperbolique. Brody a introduit une forme plus faible d'hyperbolicité mais qui coïncide avec celle de Kobayashi sur les espaces analytiques compacts. X est dit hyperbolique au sens de Brody s'il n'existe pas de courbes holomorphes entières $f : \mathbb{C} \to X$ non constantes. Enfin, Eisenman s'est inspiré de la construction de la métrique de Kobayashi en définissant une mesure k-dimensionnelle ($1 \leq k \leq \dim X$) qui est aussi intrinsèque et admet des propriétés similaires à celles de la métrique de Kobayashi-Royden (*i.e.* la forme infinitésimale de d_X). Ainsi, elle a introduit la notion de k-mesure hyperbolicité qui généralise celle de l'hyperbolicité au sens de Kobayashi.

Dans ce contexte, une question paraît naturelle : est-ce que l'espace de Douady $D(X)$ est hyperbolique (resp. au sens de Brody) si X lui-même est hyperbolique ou k-mesure hyperbolique pour un entier k convenable ? La même question se pose d'ailleurs pour les variantes de $D(X)$ telles que $D'(X)$ ou $D'_m(X)$. L'objectif de ce travail est d'étudier ces questions. Comme résultats, nous donnons deux contre-exemples qui montrent que même si X est hyperbolique, $D(X)$ lui-même ne peut être en général hyperbolique. Cependant, nous montrons l'hyperbolicité au sens de Brody de $D'_1(X)$ permettant de garder l'espoir en ce qui concerne l'hyperbolicité (au moins au sens de Brody) de $D'(X)$ à travers le théorème principal suivant :

Théorème 5.4.1. — *Soit X un espace analytique 2-mesure hyperbolique. Alors $D'_1(X)$ est hyperbolique au sens de Brody.*

Ce théorème est en analogie avec le théorème de Royden de l'hyperbolicité de l'espace de Teichmüller pour le cas des courbes algébriques abstraites *i.e.* non nécessairement plongées. D'ailleurs, la démonstration de ce théorème se base essentiellement sur l'hyperbolicité de l'espace de Teichmüller T_g, $g \geq 1$. En e et, nous allons construire pour chaque $g \geq 1$, une application holomorphe ψ_g définie sur le revêtement universel $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$ de l'espace de Douady des sous-variétés de X qui sont des courbes algébriques de genre g, à valeurs dans l'espace de Torelli T'_g (lequel espace admet T_g comme revêtement universel). De plus les fibres de ψ_g sont hyperboliques au sens de Brody dès que X est 2-mesure hyperbolique. Ceci permet de remonter la propriété d'hyperbolicité au sens de Brody de T'_g à $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$ et de déduire pour $D'_{1,g}(X)$ par revêtement. Notons que pour les cas spéciaux $g = 0$ et $g = 1$, $D'_{1,g}(X)$ est discret d'où l'hyperbolicité au sens de Brody est une conséquence triviale. Enfin remarquons que pour prouver l'hyperbolicité au sens de Brody des fibres de ψ_g, nous allons établir le résultat intermédiaire suivant, plus général que le besoin, et qui peut avoir d'autres applications :

Théorème 3.2.1.1. — *Soit $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, f, S)$ une famille analytique localement triviale de sous-espaces analytiques compacts de dimension $k \geq 1$ d'un espace analytique X. Supposons que X est $(k+1)$-mesure hyperbolique, alors S est hyperbolique au sens de Brody.*

Les techniques utilisées pour prouver le théorème 5.4.1 (plus précisément le cas du genre $g = 1$) peuvent être généralisées pour étudier le sous-espace ouvert $D^T_d(X)$ de l'espace de Douady $D(X)$ d'un espace analytique projectif X, qui paramétrise les sous-variétés complexes compactes de X lesquelles sont des variétés abéliennes de dimension d. Ici l'espace de module de Siegel joue le rôle de l'espace de Torelli dans le théorème 5.4.1. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 6.3.3. — *Soit X un espace analytique projectif de dimension n. Supposons que X est $(d+1)$-mesure hyperbolique, $1 \leq d \leq n-1$. Alors $D^T_d(X)$ est discret.*

Cette approche permet de retrouver le théorème 5.4.1 dans le cas spécial du genre $g = 1$. Notons que les méthodes de la preuve du théorème 5.4.1 (et ainsi le théorème 6.3.3) restent pour l'instant insu santes dans le cas général (celui de $D'_m(X)$ avec m quelconque) car on ne dispose pas, *a priori* , d'un espace hyperbolique de variétés complexes compactes abstraites de dimensions supérieures pour jouer le rôle de l'espace de Torelli dans le cas de dimension 1 et l'espace de Siegel pour les variétés abéliennes.

Nous montrons aussi l'hyperbolicité de certains sous-espaces spéciaux de $D'_1(X)$ et de $D^T_d(X)$ sans aucune condition d'hyperbolicité sur X, mais pour X une variété complexe.

L'espace de modules des applications holomorphes.

Soient X et Y deux espaces analytiques. X étant supposé compact. Alors l'ensemble des applications holomorphes $\mathrm{Hol}(X, Y)$ de X à valeurs dans Y peut être réalisé comme un ouvert de l'espace de Douady $D(X \times Y)$ en identifiant chaque application avec son graphe.

Ce résultat, dû à Douady, permet de munir $\mathrm{Hol}(X,Y)$ d'une structure complexe induite de celle de $D(X \times Y)$.

L'hyperbolicité de $\mathrm{Hol}(X,Y)$ a été étudiée en premier lieu par Kobayashi qui a obtenu que si Y est (compact) hyperbolique alors $\mathrm{Hol}(X,Y)$ est (compact) hyperbolique. Dans ce travail, nous allons réduire les hypothèses sur Y en le supposant seulement (fortement) k-mesure hyperbolique. Plus généralement, si Y est fortement k-mesure hyperbolique, alors nous obtenons la même propriété sur $\mathrm{Hol}(X,Y)$ pour X fortement mesure hyperbolique :

Théorème 4.7. — *Soient X un espace analytique compact fortement mesure hyperbolique et Y un espace analytique fortement k-mesure hyperbolique, alors* $\mathrm{Hol}(X,Y)$ *est fortement k-mesure hyperbolique.*

L'élaboration de ce théorème se base sur le théorème suivant concernant les familles analytiques localement triviales de sous-espaces compacts d'un espace analytique X :

Théorème 3.2.2.2. — *Soient X un espace analytique de dimension n et $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y},\pi,S)$ une famille analytique localement triviale de sous-espaces analytiques compacts de dimension $k \geq 1$ de X. Supposons que les fibres de π sont mesure hyperboliques et que X est fortement $(k+p)$-mesure hyperbolique, p un entier entre* 1 *et $n-k$. Alors S est fortement p-mesure hyperbolique.*

En particulier, si $p=1$ nous obtenons l'hyperbolicité de la base S. Ce théorème est obtenu à partir d'une estimation sur la p-mesure de Eisenman de la base en fonction de la k-mesure de Eisenman d'une fibre et la $(k+p)$-mesure de Eisenman de X.

D'autre part, nous étudions l'ensemble $\mathrm{Hol}_k(X,Y)$ des applications holomorphes de X dans Y de rang $\geq k$ qui est un ouvert de $\mathrm{Hol}(X,Y)$. Ce que nous obtenons c'est le suivant :

Théorème 4.6. — *Soient X et Y deux espaces analytiques. Supposons que X est compact et Y est k-mesure hyperbolique,* $1 \leq k \leq \inf(\dim X, \dim Y)$. *Alors* $\mathrm{Hol}_{k-1}(X,Y)$ *est hyperbolique au sens de Brody.*

Si Y est compact et $\dim Y = k$ (Y est dans ce cas mesure hyperbolique) alors $\mathrm{Hol}_k(Y,Y)$ coïncide avec le groupe $\mathrm{Aut}(Y)$ d'automorphismes de Y qui est un groupe de Lie complexe. Le théorème 4.6 implique en particulier que $\mathrm{Aut}(Y)$ est discret. Nous retrouvons donc un théorème de Kobayashi (voir théorème 4.4 ou voir aussi B. Wong [Wo]).

Le contenu du texte.

Le chapitre 1 est consacré à l'étude des espaces analytiques hyperboliques et k-mesure hyperboliques. Nous rappelons la définition de la pseudo-distance de Kobayashi ainsi que la forme infinitésimale due à Royden. Nous en citons quelques propriétés importantes qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieurs. Nous parlons également brièvement de l'hyperbolicité au sens de Brody. Enfin, nous introduisons, d'après Graham-Wu, les k-mesures de Eisenman. Nous définissons les espaces analytiques (fortement) k-mesure hyperboliques et nous en donnons quelques exemples qui illustrent l'intérêt de cette notion en pratique.

Dans le chapitre 2, nous étudions l'espace de Douady et ses variantes. Nous rappelons en premier lieu le théorème d'existence de Douady ainsi que sa version relative due à Pourcin précédés d'un bref rappel sur les familles analytiques. Nous citons ensuite quelques exemples de variantes de l'espace de Douady qui sont intéressants en pratique ; notamment, l'espace de Douady des sous-variétés complexes compactes et connexes (resp. de même dimension m), l'espace de Douady des courbes algébriques (resp. de genre g fixe), l'espace symétrique et les espaces de morphismes. Enfin, nous citons quelques problèmes d'hyperbolicité sur l'espace de Douady et ses variantes. En fait, c'est là que nous prouvons que l'espace de Douady lui-même n'est pas hyperbolique en général. Nous citons pour cela deux exemples.

Le chapitre 3 est un chapitre intermédiaire. Il contient des résultats concernant les familles analytiques localement triviales. Ces résultats sont nécessaires pour prouver les théorèmes principaux de cette thèse. Nous rappelons d'abord deux critères de trivialité des familles analytiques : l'un est local, c'est une généralisation du théorème de Grauert-Fischer ; l'autre est global et est une conséquence du principe de Grauert-Oka. Ensuite, nous utilisons ces deux critères pour prouver l'hyperbolicité au sens de Brody de la base d'une famille analytique de sous-espaces analytiques compacts de dimension $k \geq 1$ d'un espace analytique X $(k+1)$-mesure hyperbolique. Nous prouvons aussi que si les fibres de la famille sont mesure hyperboliques et X est fortement $(k+p)$-mesure hyperbolique, alors la base est fortement p-mesure hyperbolique. En particulier, si $p = 1$, la base est hyperbolique au sens de Kobayashi. Pour prouver ce théorème nous établissons une estimation sur la p-mesure de Eisenman de la base en fonction de la $(k+p)$-mesure de Eisenman de X et de la p-mesure de Eisenman d'une fibre de la famille.

L'objet du chapitre 4 est l'espace de modules des applications holomorphes. Nous rappelons d'abord le théorème de structure de Douady. Nous parlons ensuite du théorème de Kobayashi sur l'hyperbolicité de $\mathrm{Hol}(X,Y)$ pour Y hyperbolique. Notre apport à ce sujet sera le théorème d'hyperbolicité au sens de Brody de l'espace de modules des applications holomorphes de rang $\geq k$ à valeurs dans un espace analytique Y $(k+1)$-mesure hyperbolique, et le théorème de k-mesure hyperbolicité forte de $\mathrm{Hol}(X,Y)$ pour X fortement mesure hyperbolique et Y fortement k-mesure hyperbolique.

Le chapitre 5 est consacré à la preuve du résultat principal de cette thèse : le théorème 5.4.1 cité plus haut. Dans la première section, nous rappelons les définitions des espaces de modules de Teichmüller et de Torelli. L'hyperbolicité de ces derniers est l'objet de la deuxième section. Nous construisons l'application holomorphe ψ_g dans la troisième section et nous en étudions l'hyperbolicité des fibres. Ensuite, nous prouvons le théorème 5.4.1 dans la quatrième section. Dans la dernière section nous montrons l'hyperbolicité d'un ouvert spécial de $D_1'(X)$ pour X une variété non singulière.

Dans le chapitre 6, nous allons reprendre les techniques utilisées pour prouver le théorème 5.4.1 (plus précisément le cas du genre $g = 1$) dans un cadre plus général : le sous-espace $D_d^T(X)$ de l'espace de Douady $D(X)$ qui paramétrise les sous-variétés complexes compactes et connexes de dimension d d'un espace analytique projectif X qui sont des variétés abéliennes. L'espace de module de Siegel joue ici le rôle de l'espace de Torelli dans la preuve du théorème 5.4.1. Nous en rappelons la définition ainsi que celle des familles analytiques des variétés abéliennes. Ensuite, nous montrons que $D_d^T(X)$ est discret pour X $(d+1)$-mesure hyperbolique. Nous retrouvons donc le cas du genre $g = 1$ dans le théorème 5.4.1 comme un cas particulier. Enfin nous montrons l'hyperbolicité d'un ouvert spécial de $D_d^T(X)$ comme dans le cas de dimension 1.

Dans tout le texte, les espaces analytiques sont complexes. Ils sont supposés séparés et à bases dénombrables sauf dans 2.1, 2.2, 2.3 et 5.1 où ils conservent toute leur généralité.

Chapitre 1

HYPERBOLICITÉ ET k-MESURE HYPERBOLICITÉ SUR LES ESPACES ANALYTIQUES

Nous rappelons dans ce chapitre les définitions et les principales propriétés de la notion d'hyperbolicité et celle de k-mesure hyperbolicité sur les espaces analytiques.

1. Espaces analytiques hyperboliques

1.1. Hyperbolicité au sens de Kobayashi.

Soit X un espace analytique. Notons Δ le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$ muni de la métrique de Poincaré

$$ds^2 = 4dz\, d\bar{z}/(1 - |s|^2))^2 .$$

Soit ρ la distance sur Δ définie par ds^2. D'après Kobayashi [K1], on introduit une pseudo-distance sur X comme suit : étant donné deux points p et q de X, on considère une chaîne de disques holomorphes de p vers q, *i.e.* une chaîne de points $p = p_0, p_1, \ldots, p_k = q$ de X, des pairs de points $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ de Δ et des applications holomorphes $f_1, \ldots, f_k \in \mathrm{Hol}(\Delta, X)$ telles que :

$$f_i(a_i) = p_{i-1} \text{ et } f_i(b_i) = p_i \text{ pour } i = 1, \ldots, k .$$

La longueur de cette chaîne est par définition :

$$\rho(a_1, b_1) + \cdots + \rho(a_k, b_k) .$$

La pseudo-distance de Kobayashi est donnée par :

$$d_X(p,q) = \inf(\rho(a_1, b_1) + \cdots + \rho(a_k, b_k))$$

où l'infimum est pris au long de toutes les chaînes des disques holomorphes de p vers q. Il est facile de vérifier que d_X est une pseudo-distance sur chaque composante connexe de X.

La forme infinitésimale de d_X est construite par Royden [R1]. Elle est définie par

$$F_X(p,\xi) = \begin{cases} \inf\left\{ \frac{1}{r} \geq 0\, ; \right. & \text{tel qu'il existe une application holomorphe } f : \Delta \to X \\ & \left. \text{vérifiant } f(0) = p \text{ et } f_*(\partial/\partial z_{|0}) = r\xi \right\} \\ +\infty & \text{s'il n'existe pas une telle application pour tout } r \geq 0 \end{cases}$$

pour tout $(p,\xi) \in TX$. TX étant l'espace fibré tangent de X. On appelle F_X la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden sur X. Notons que pour tout espace analytique X (non nécessairement connexe), la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden est définie sur X. Il résulte immédiatement que $d_\Delta = \rho$ et $F_\Delta^2 = ds^2$. La métrique de Kobayashi-Royden est donc une généralisation de la métrique de Poincaré sur le disque. Cependant il est facile de vérifier que :

$$d_{\mathbb{C}}(p,q) = 0 \text{ pour } p,q \in \mathbb{C}\,;$$
$$F_{\mathbb{C}}(p,\xi) = 0 \text{ pour } p,\xi \in T\mathbb{C}\,.$$

d_X ainsi que F_X sont également triviales pour $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $X = \mathbb{C}^*$. Elles sont invariantes par les applications biholomorphes. d_X est continue sur X alors que F_X est semi-continue supérieurement. De plus, la pseudo-distance de Kobayashi ainsi que la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden vérifient les propriétés suivantes sur les espaces complexes (voir pour les détails, par exemple Kobayashi [K1] et [K2], Royden [R1], Urata [U] et Lang [L]) :

1) (coersivité). — Si $f : X \to Y$ est une application holomorphe, alors

$$d_Y(f(p),f(q)) \leq d_X(p,q) \text{ pour } p,q \in X$$

et

$$F_Y(f(p),f_{*p}\xi) \leq F_X(p,\xi) \text{ pour } (p,\xi) \in TX\,.$$

2) (maximalité). — Si d est une pseudo-distance sur X satisfaisant

$$d(f(p),f(q)) \leq \rho(p,q) \text{ pour } p,q \in \Delta$$

pour toute $f : \Delta \to X$ holomorphe, alors on a $d \leq d_X$. De même si H est une pseudo-métrique sur X vérifiant

$$H(f(p),f_*\xi) \leq |ds|(p,\xi) \text{ pour } (p,\xi) \in T\Delta$$

pour toute application $f : \Delta \to X$ holomorphe, alors on a aussi $H \leq F_X$.

3) (produit). — On a

$$d_{X\times Y}((p,q),(p',q')) = \max(d_X(p,p'),d_Y(q,q')) \text{ pour } p,p' \in X \text{ et } q,q' \in Y\,.$$
$$F_{X\times Y}((p,q),(u,v)) = \max(F_X(p,u),F_Y(q,v)) \text{ pour } (p,u) \in TX \text{ et } (q,v) \in TY\,.$$

4) (revêtement). — Soit $\widetilde{X}$ un revêtement de l'espace analytique X avec la projection $\pi : \widetilde{X} \to X$. Alors :

$$\begin{aligned} d_X(p,q) &= d_{\widetilde{X}}(\pi^{-1}(p),\pi^{-1}(q)) \text{ pour } p,q \in X \\ &= \inf d_{\widetilde{X}}(\widetilde{p},\widetilde{q}) \text{ où } \widetilde{p} \in \pi^{-1}(p) \text{ fixe} \\ &\qquad \text{et l'infimum est pris au long de tous les } \widetilde{q} = \pi^{-1}(q). \end{aligned}$$

Infinitésimalement, on a

$$F_{\widetilde{X}} = \pi^* F_X\,.$$

1.1.1. E . — Le demi-plan supérieur $H = \{z \in \mathbb{C}/\operatorname{Im} z > 0\}$ est biholomorphe au disque unité Δ, donc la métrique F_H provient de la métrique de Poincaré ds^2. Concrètement, on a

$$F_H(z,v) = \frac{|v|}{\operatorname{Im} z} \text{ pour } (z,v) \in TH\,.$$

De plus, le demi-plan supérieur est un revêtement du disque pointé $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C}/0 < |z| < 1\}$ avec la projection $w = e^{2\pi i z}$ et donc d'après la 4-ième propriété ci-dessus, on trouve

$$F_{\Delta^*}(w;v) = \frac{|v|}{|w|\log|w|}\,.$$

1.1.2. Définition (Kobayashi [K1], Royden[R1]). — *Un espace analytique X est dit hyperbolique si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :*

1) d_X est une distance ;

2) d_X induit la topologie de X.

X est dit hyperbolique complet si d_X est complète. Directement d'après la définition, on note que le fait d'être hyperbolique est biholomorphiquement invariant. L'exemple le plus simple des espaces hyperboliques est le disque unité Δ. Plus généralement, toute surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ est hyperbolique complète. D'après les propriétés citées ci-dessus de la pseudo-distance de Kobayashi et la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden , le produit de deux espaces analytiques hyperboliques (complets) est hyperbolique (complet). Un espace analytique est hyperbolique (complet) si et seulement si son revêtement est hyperbolique (complet). De plus, on a :

1.1.3. Théorème (voir Kobayashi [K2]).

1) Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ une application holomorphe telle que $\pi^{-1}(x)$ est discrète pour tout $x \in X$. Si X est hyperbolique alors $\widetilde{X}$ l'est.

2) Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ une application holomorphe propre telle que $\pi^{-1}(x)$ est hyperbolique pour tout $x \in X$. Si X est hyperbolique alors $\widetilde{X}$ l'est de même.

3) Si $\widetilde{X}$ est la normalisation d'un espace analytique X hyperbolique (complet), il est aussi hyperbolique (complet).

4) Soit X_{red} l'espace analytique réduit de X. Alors X est hyperbolique si et seulement si X_{red} est hyperbolique.

1.2. Hyperbolicité au sens de Brody.

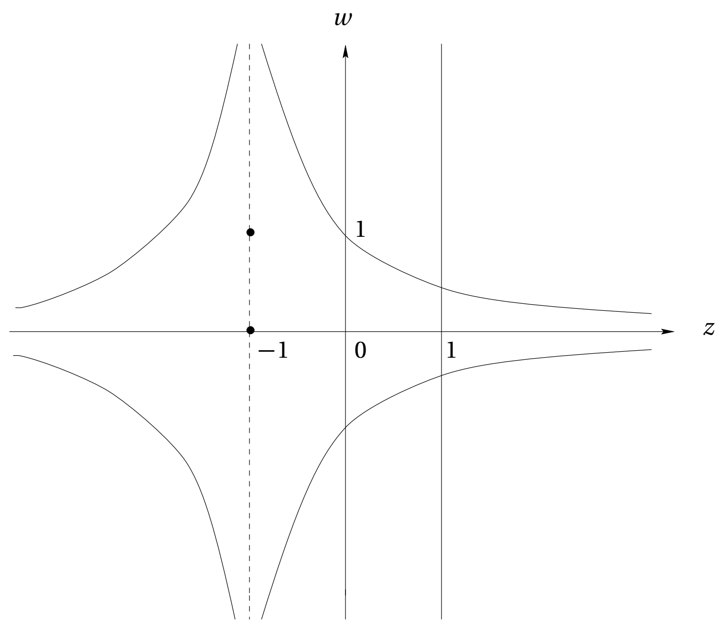
1.2.1. Définition. — *Soit X un espace analytique. X est dit hyperbolique au sens de Brody si toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ est constante.*

Immédiatement d'après les définitions, il résulte que l'hyperbolicité au sens de Kobayashi implique celle au sens de Brody. Ce dernier a prouvé dans [Br] l'inverse dans le cas compact.

1.2.2. Théorème. — *Si X est compact alors X est hyperbolique si et seulement s'il est hyperbolique au sens de Brody.*

Si X n'est pas compact, ce théorème n'est plus valable en général. L'exemple suivant donne un espace analytique hyperbolique au sens de Brody mais non hyperbolique.

1.2.3. E . — Soient $Y := \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, $Z := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 / w^2(z+1) = 1\}$ et $X = \mathbb{C}^2 \setminus (Z \cup (\{0\} \times \mathbb{C}) \cup (\{1\} \times \mathbb{C}) \cup (-1,0) \cup (-1,1))$. Soit $p : X \to Y$ la projection $(z,w) \mapsto z$.



Il est clair que toutes les fibres de p sont hyperboliques et que Y est aussi hyperbolique ce qui implique que X est hyperbolique au sens de Brody. Cependant X n'est pas hyperbolique. En e et, on montre facilement que $d_X(a,b) = 0$, $\forall a,b \in (\{-1\} \times \mathbb{C}) \cap X$.

1.2.4. E . — Soit G un groupe de Lie complexe. Alors G n'est pas hyperbolique au sens de Brody.

2. Espaces analytiques k-mesure hyperboliques

2.1. Les mesures de Eisenman.

Nous allons introduire dans cette section, en s'accordant à Graham-Wu [G-W], les k-mesures intrinsèques de Eisenman. D'abord fixons quelques notations : X est un espace analytique de dimension n ; soit p un point régulier de X, T_pX est l'espace tangent holomorphe de X en p ; $\overset{k}{\wedge} T_pX$ est la k-ième puissance extérieure de T_pX ; D_p^kX est l'ensemble des éléments décomposables de $\overset{k}{\wedge} T_pX$. Si $\langle \mid \rangle$ est une métrique hermitienne sur T_pX, alors elle induit naturellement une métrique hermitienne sur $\overset{k}{\wedge} T_pX$ en mettant

$$\langle \alpha \mid \beta \rangle \equiv \det\{\langle v_i \mid w_i \rangle\}$$

où $\alpha = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ et $\beta = w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$ appartenant à D_p^kX et en généralisant cette définition à $\overset{k}{\wedge} T_pX$ par linéarité. On note $\|\alpha\|^2 := \langle \alpha \mid \alpha \rangle$. Soit $\|\gamma\|$ la métrique hermitienne sur $\overset{k}{\wedge} T_oB^k$ (où B^k est la boule unité dans $\mathbb{C}^k$) induite par la métrique de Bergman. o étant l'origine de B^k.

2.1.1. Définition. — *Soient k un entier entre 1 et n, et $\alpha \in D_p^kX$. La k-mesure de Eisenman de α est $E_X^k(p,\alpha) = \inf\big\{\|\gamma\|^2/\gamma \in D_0B^k$ et il existe une application holomorphe $f : B^k \to X$ telle que $f(0) = p$ et $f_*(\gamma) = \alpha\big\}$.*

D'une façon équivalente, $E_X^k(p,\alpha)$ peut être définie comme suit : $E_X^k(p,\alpha) = \Big\{R^{-2k}/$ il existe une application holomorphe $f : B^k \to X$ telle que $f(0) = p$ et $f_*\Big(\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z_k}(0)\Big) = R^k\alpha\Big\}$. E_X^k n'est définie que pour les points réguliers de X.

Notons que E_X^1 n'est autre que le carré de la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden. E_X^k est invariante par biholomorphisme, elle est semi-continue supérieurement (cf. Graham-Wu [G-W]).

Soit maintenant A un sous-espace analytique de dimension k d'un ouvert $\mathcal{U} \subset X$ (on l'appelle sous-espace analytique local de X). Supposons que $p \in A$. La forme de pseudo-volume de Eisenman Ψ_A^X de A est définie comme suit : soit $w_1, \ldots, w_k$ des coordonnées locales de X au voisinage de p et supposons que $\frac{\partial}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w_k}$ sont tangents à A en p. Alors

$$\Psi_A^X(p) = E_X^k\Big(p; \frac{\partial}{\partial w_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial w_k}(p)\Big)\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Big)^k dw_1 \wedge d\overline{w}_1 \wedge \cdots \wedge dw_k \wedge d\overline{w}_k .$$

Cette définition est indépendante du choix des coordonnées locales.

Ψ_X^X est appelée la forme de pseudo-volume de Kobayashi-Eisenman et sera noté Ψ_X.

Ψ_{B^k} n'est autre que la forme de volume de Bergman

$$\theta_k \equiv \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^k dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_k \wedge d\overline{z}_k \,.$$

2.1.2. Définition. — *X est dit k-mesure hyperbolique si pour tout sous-espace analytique local A de dimension k, Ψ_A^X est strictement positive en dehors d'un sous-espace analytique de A de codimension au moins 1. X est dit fortement k-mesure hyperbolique si pour tout point régulier p de X, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de p dans X et une constante strictement positive $c_{\mathcal{U}}$ tels que*

$$E_X^k(q,\alpha) \geq c_{\mathcal{U}} \|\alpha\|^2 \text{ pour tout } q \in \mathcal{U} \text{ et } \alpha \in D_q^k X \,.$$

Lorsque $k = n$, on dit que X est mesure hyperbolique (resp. fortement mesure hyperbolique) au lieu de n-mesure hyperbolique (resp. fortement n-mesure hyperbolique). Si $k = 1$, alors la notion de 1-mesure hyperbolicité forte coïncide avec l'hyperbolicité au sens de Kobayashi.

2.2. Propriétés.

Nous allons regrouper dans le théorème suivant quelques propriétés importantes des mesures de Eisenman (voir Graham-Wu [G-W]) :

2.2.1. Théorème. — *Soient X et Y deux espaces analytiques de dimensions respectives n et m.*

1) Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe. Alors

$$f^* E_Y^k \leq E_X^k$$

là où elles sont définies.

2) $E_{X\times Y}^{k+\ell} = E_X^k \cdot E_Y^\ell$.

3) $\Psi_{X\times Y} = \Psi_X \wedge \Psi_Y$.

4) Si $\pi : X \to Y$ est un revêtement, alors

$$\pi^* E_X^k = E_Y^k \,.$$

La deuxième propriété est appelée formule de produit et est due à Graham-Wu. Elle n'est pas valable si on adopte les polydisques au lieu des boules dans la définition des mesures de Eisenman, c'est d'ailleurs la raison pour laquelle on maintient la définition des E^k avec les boules.

Étant donné X un espace analytique de dimension n, on définit le volume total de X par

$$\mathrm{vol}(X) = \int_X \Psi_X \,.$$

Alors, on a (Kobayashi [K1], théorème 8.14 et Yau [Y], proposition 1) :

2.2.2. Théorème. — *Soient X et Y deux espaces analytiques de dimension n. Supposons que Y est mesure hyperbolique. Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe propre.*

1) Si $\mathrm{vol}(X) < \mathrm{vol}(Y)$, alors f est dégénérée partout sur X.

2) Si $\mathrm{vol}(X) < 2\,\mathrm{vol}(Y)$, alors f est ou bien dégénérée partout sur X ou bien biholomorphe de X sur Y.

Nous terminons cette section par une observation simple mais qui sera utile dans les prochains chapitres :

2.2.3. Proposition. — *Soit X un espace analytique de dimension $n \geq k-1$, $k > 0$. Soit Y un espace analytique k-mesure hyperbolique. Alors toute application holomorphe $F : \mathbb{C} \times X \to Y$ est de rang inférieur ou égal à $k-1$.*

Démonstration. — On a $E^k_{\mathbb{C}} \equiv 0$, donc $E^k_{\mathbb{C}\times X} \equiv 0$ par 2.2.1, 2). La proposition découle donc de 2.2.1. 1). ■

Remarquons que la proposition 2.2.3 reste valable si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou même par un tore complexe de dimension 1.

2.3. Exemples.

1. Variétés de Fermat. — Soient $z^0, z^1, \ldots, z^{n+1}$, des coordonnées locales homogènes de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. Une variété de Fermat de degré d, notée $F(d)$, est l'hypersurface de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ définie par

$$\sum_{i=0}^{n+1} (z^i)^d = 0 \,.$$

D'après Kobayashi [K2], $F(d)$ admet un fibré canonique très ample si $d > n+2$, et si $n \geq 2$, la variété de Fermat contient une courbe rationnelle. Par conséquent, si $d > n+2$ et $n \geq 2$ alors $F(d)$ est une variété fortement mesure hyperbolique mais non hyperbolique. De plus soit $\pi : \widetilde{F(d)} \to F(d)$ un éclatement de $F(d)$ en un point $p \in F(d)$. Comme $\mathbb{C}^{n-1} \subset \pi^{-1}(p) \subset \widetilde{F(d)}$, $\widetilde{F(d)}$ n'est pas k-mesure hyperbolique pour tout $k = 1, \ldots, n-1$.

Cependant $\widetilde{F(d)}$ est fortement mesure hyperbolique, car cette propriété peut être relevée de $F(d)$ à $\widetilde{F(d)}$ par π en utilisant le fait que si $f : B^n \to \widetilde{F(d)}$ est non dégénérée alors $\pi \circ f : B^n \to F(d)$ est aussi non dégénérée et en appliquant la définition.

Nous pouvons aussi utiliser les variétés de Fermat pour prouver que le produit de deux variétés fortement k-mesure hyperboliques n'est pas fortement k-mesure hyperbolique. Par exemple, $F(6)$ dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est fortement 2-mesure hyperbolique mais $F(6) \times F(6)$ ne peut pas être 2-mesure hyperbolique car il contient $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (cf. Graham-Wu [G-W]).

2. — Soit X un espace analytique de dimension $n > 1$ et Y un espace analytique de dimension m. Supposons que X est hyperbolique et que Y est fortement mesure hyperbolique mais non hyperbolique. D'après la proposition 2.2.1, $X \times Y$ est k-mesure hyperbolique pour tout $k \geq m+1$. De cette manière, nous pouvons construire des espaces analytiques k-mesures hyperboliques pour k intermédiaire entre 1 et la dimension. Par exemple $B^m \times \widetilde{F(d)}$ est $(n+1)$-mesure hyperbolique de dimension $n+m$, où $\widetilde{F(d)} \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ est définie dans l'exemple précédent.

3. Variétés de type général. — Soit X une variété complexe compacte. Un fibré en droites L sur X est dit *très ample* s'il existe une base de sections $(S_0, \ldots, S_N)$ de $H^0(X,L)$ qui engendrent L en tout point et induit un plongement projectif

$$j : X \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) .$$

On dit que L est *ample* s'il existe un entier strictement positif m tel que $L^{\otimes m}$ est très ample. L est dit *pseudo-ample* s'il existe un entier m strictement positif tel que l'application j induite par $L^{\otimes m}$ est birationnelle.

Soit k_X le fibré canonique de X, *i.e.* $k_X = \overset{\dim X}{\wedge} T^*X$, où T^*X est le fibré cotangent de X. Supposons maintenant que X est algébrique projective. X est dite variété *de type général* si k_X est pseudo-ample. Alors on a (Kobayashi-Ochiai [K-O]) :

– Si k_X est ample alors X est de type général.

– Si X est de type général alors X est fortement mesure hyperbolique.

Chapitre 2

L'ESPACE DE DOUADY ET SES VARIANTES

Introduction

Étant donné un espace analytique X, l'espace de Douady $D(X)$ paramétrise tous les sous-espaces analytiques compacts de X. $D(X)$ admet une structure complexe d'après un théorème célèbre de Douady suite à une conjecture de Grothendieck. Si X est projectif, $D(X)$ n'est autre que le schéma de Hilbert construit plus tôt par Grothendieck. Il existe aussi une version relative de l'espace de Douady, établie par Pourcin [P] qui a prouvé aussi que pour tout espace analytique S, l'espace de Douady relatif $D_S(X)$ peut être plongé comme un sous-espace analytique de $D(X)$. X est dans ce cas relatif sur S.

L'existence de l'espace de Douady est assurée à partir du foncteur contravariant dit foncteur de Hilbert qui à chaque espace analytique T (resp. sur un autre S) associe l'ensemble des familles analytiques de sous-espaces analytiques compacts de X (resp. propres de X/S) paramétrées par T (resp. par T/S). Ce foncteur est représentable par $D(X)$ (resp. $D_S(X)$). On a besoin donc de la notion de familles analytiques pour formuler de façon précise ce foncteur. Ceci fera l'objet du paragraphe 1. Nous rappelons ensuite, dans le paragraphe 2, le théorème d'existence de Douady ainsi que sa version relative due à Pourcin.

Il existe également des variantes de l'espace de Douady d'une importance remarquable dans la pratique, réalisées dans la plupart des cas par des ouverts de l'espace de Douady provenant de sous-foncteurs "ouverts" du foncteur de Hilbert. Nous citons dans le paragraphe 3 quelques exemples qui seront utiles dans la suite. Nous considérons notamment les sous-espaces ouverts de l'espace de Douady qui paramétrisent les sous-variétés complexes compactes de X ainsi que celles d'une même dimension fixe m ou aussi qui sont toutes connexes. En conjuguant ces dernières conditions et en mettant $m = 1$, on obtient ce qu'on appellera l'espace de Douady des courbes plongées de X qui paramétrise les sous-espaces compacts de X qui sont des courbes algébriques. Nous verrons dans le chapitre 3 que cet espace est hyperbolique au sens de Brody si X est 2-mesure hyperbolique.

Nous allons citer aussi l'exemple des espaces d'applications tels que l'ensemble des S-morphismes d'espaces analytiques X et Y noté $\mathrm{Hol}_S(X,Y)$, l'ensemble des S-isomorphismes $\mathrm{Isom}_S(X,Y)$ ou aussi l'ensemble des sections $\prod_{X/S} Z/X$ d'un espace analytique Z sur X sur S. Ils sont tous réalisés par des ouverts dans des espaces de Douady convenables.

Dans le dernier paragraphe, nous poserons quelques problèmes concernant l'hyperbolicité de l'espace de Douady et de certaines de ses variantes. Ce qu'il faut retenir de ce paragraphe c'est que l'espace de Douady tout entier n'est pas hyperbolique en général même si X l'est, mais on garde l'espoir pour avoir l'hyperbolicité de certaines variantes, même au sens faible de Brody, pour les prochains chapitres.

1. Familles analytiques complexes

1.1. Familles d'espaces analytiques compacts.

La définition suivante est due à Grothendieck [Gr] :

1.1.1. Définition. — *Une famille analytique (complexe) d'espaces analytiques compacts $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y},p,S)$ consiste en :*

(i) Une paire d'espaces analytiques $\mathcal{Y}$ et S.

(ii) Une application holomorphe $p : \mathcal{Y} \to S$ qui est surjective, propre et plate.

S est appelée la base de la famille. On dit aussi que la famille est au-dessus de S ou paramétrée par S. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera tout simplement $\mathcal{Y}$ la famille $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y},p,S)$ et on utilisera l'abréviation famille analytique (ou tout simplement famille) pour la désigner.

Les fibres de p sont des espaces analytiques compacts, de même dimension si S est connexe. La famille $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y},p,S)$ est dite aussi déformation de chacune de ces fibres.

Les familles analytiques au-dessus d'un espace analytique donné S, forment une catégorie pour la notion de S-isomorphisme.

Soit $f : S' \to S$ une application holomorphe, alors le triplet $\mathfrak{X}' = (\mathcal{Y} \underset{S}{\times} S', p', S')$ où p' est la projection naturelle de $\mathcal{Y} \underset{S}{\times} S'$ sur S', forme une famille au-dessus de S' qui s'appelle image réciproque de $\mathfrak{X}$ par f. f s'appelle dans ce cas changement de base de $\mathfrak{X}$.

1.1.2. E . — L'exemple le plus simple des familles d'espaces analytiques compacts est donné par les produits $\mathcal{Y} = Y \times S$ au-dessus de S où Y est un espace analytique compact. La projection naturelle $p : \mathcal{Y} \to S$, étant plate (voir Fischer [F]) et propre (puisque Y est compact), rend le triplet $(\mathcal{Y},p,S)$ une famille analytique. Une famille isomorphe à un tel triplet s'appelle *famille triviale*.

1.1.3. Définition. — *Une famille analytique $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y},p,S)$ d'espaces analytiques compacts est dite* localement triviale *si pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de s dans S tel que la famille $\mathfrak{X}_{|\mathcal{U}} := (p^{-1}(\mathcal{U}), p_{|p^{-1}(\mathcal{U})}, \mathcal{U})$ est triviale.*

1.1.4. R . — Soit $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, p, S)$ une famille analytique telle que $\mathcal{Y}$ et S sont des variétés complexes. Alors la platitude de p entraîne que p est une submersion et on retrouve la notion de familles analytiques de variétés complexes compactes définie par Kodaira-Spenser [K-S].

1.1.5. Définition. — *Soit X un espace analytique donné. On appelle famille analytique de sous-espaces analytiques compacts de X, toute famille analytique $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, p, S)$ munie d'un plongement fermé holomorphe $\mathcal{F} : \mathcal{Y} \hookrightarrow S \times X$ tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r, hook, "F"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S \times X \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ S & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

1.2. Familles analytiques dans la catégorie des espaces relatifs.

Un espace relatif est un espace analytique X muni d'une application holomorphe f de X vers un espace analytique donné S. Cette situation est parfois notée par le symbole X/S qui s'appellera aussi espace analytique sur (ou au-dessus) de S. Les espace relatifs sur S forment une catégorie $(\mathrm{An})/S$. La notion de familles analytiques peut être généralisée au cas relatifs comme suit :

1.2.1. Définition. — *On appelle famille analytique d'espaces relatifs sur S tout triplet $\mathfrak{X}_S := (\mathcal{Y}, p, T)$ constitué de :*

(i) Un espace analytique T sur S.

(ii) Un espace analytique $\mathcal{Y}$ et une application holomorphe $p : \mathcal{Y} \to T$ surjective, propre et plate muni d'une application holomorphe $F : \mathcal{Y} \to T \times S$ telle que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T \times S \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\ T & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

L'image réciproque d'une famille analytique $\mathfrak{X}_S := (\mathcal{Y}, p, T)$ d'espaces relatifs sur S par un changement de base holomorphe $f : T' \to T$ est aussi une famille analytique d'espaces relatifs sur S donnée par le triplet $\mathfrak{X}'_S = (\mathcal{Y}', p', T')$ où $\mathcal{Y}' = T' \underset{T}{\times} \mathcal{Y}$ et $p' : \mathcal{Y}' \to T'$ la projection naturelle. L'application $F : \mathcal{Y} \to T \times S$ de la définition précédente induit l'application $F' : \mathcal{Y}' \to T' \underset{T}{\times} T \times S \cong T' \times S$.

De plus, un isomorphisme entre deux familles d'espaces relatifs sur S, $\mathfrak{X}_S = (\mathcal{Y},p,T)$ et $\mathfrak{X}'_S = (\mathcal{Y}',p',T')$ est défini par un isomorphisme entre $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}'$ qui respecte le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & T \times S \arrow[dd] & \\ \mathcal{Y} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & \mathcal{Y}' \arrow[ul, "F'"'] \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd}$$

où F et F' sont les applications holomorphes induites par les familles $\mathfrak{X}_T$ et $\mathfrak{X}'_T$ respectivement. Il est donc clair que l'ensemble des familles analytiques d'espaces relatifs sur S est une catégorie.

1.2.2. Définition. — *Soit X un espace analytique donné au-dessus d'un espace analytique S fixé. On appelle famille analytique de sous-espaces analytiques propres de X/S paramétrée par T/S tout triplet $\mathfrak{X}_{X/S} = (\mathcal{Y},p,T)$ constitué de :*

(i) Un espace analytique T sur S.

(ii) Un espace analytique $\mathcal{Y}$ et une application holomorphe $p : \mathcal{Y} \to T$, surjective, propre et plate.

muni d'un plongement fermé holomorphe $F : \mathcal{Y} \hookrightarrow T \underset{S}{\times} X$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r, hook, "F"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T \underset{S}{\times} X \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ T & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

1.2.3. R . — En prenant pour S un espace analytique réduit à un point, dans les deux définitions précédentes, on retrouve la notion de familles analytiques dans la catégorie des espaces analytiques ordinaires.

2. L'espace de Douady

2.1. Le théorème de Douady.

Soit X un espace analytique donné. On définit un foncteur contravariant

$$\mathcal{F} : (\mathrm{An}) \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

de la catégorie des espaces analytiques à valeurs dans la catégorie des ensembles par $\mathcal{F}(S) =$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des familles analytiques de sous-espaces analytiques compacts de X au-dessus de S. Alors

2.1.1. Théorème (Douady [D]). — *Le foncteur $\mathcal{F}$ est représentable. Plus précisément, il existe un espace analytique noté $D(X)$, un sous-espace analytique R de $D(X) \times X$ et une application holomorphe $p : R \to D(X)$ tel que $(R,p,D(X))$ forme une famille analytique de sous-espaces analytiques compacts de X qui, de plus, vérifie la propriété universelle suivante : pour toute famille analytique $(\mathcal{Y},p',S)$ de sous-espaces analytiques compacts de X, il existe une application holomorphe unique (à isomorphisme près) $f : S \to D(X)$ telle que $\mathcal{Y} \cong S \underset{D(X)}{\times} R$.*

L'espace analytique $D(X)$ s'appelle espace de Douady de X et la famille $(R,p,D(X))$ s'appelle famille universelle de $D(X)$. Si X est un espace analytique séparé, alors $D(X)$ est aussi séparé.

La représentabilité du foncteur $\mathcal{F}$ veut dire que pour S un espace analytique on a

$$\mathcal{F}(S) \equiv \mathrm{Hom}(S,D(X))\,.$$

Donc en prenant pour S un point simple, l'ensemble des morphismes de S dans $D(X)$ s'identifie à l'ensemble sous-jacent à $D(X)$; d'autre part, la valeur du foncteur $\mathcal{F}$ en S n'est autre que l'ensemble des sous-espaces analytiques compacts de X.

On voit donc que l'ensemble sous-jacent à $D(X)$ s'identifie à l'ensemble des sous-espaces analytiques compacts de X.

2.1.2. R . — L'analogue de l'espace de Douady en géométrie algébrique est le “schéma de Hilbert” ; il paramétrise les sous-schémas complets d'un schéma donné X. Pour X un espace projectif, l'existence des schémas de Hilbert est due à Grothendieck [Gr]. Cependant, dans ce cas, le schéma de Hilbert de X n'est autre qu'un espace algébrique. Ceci car d'après le GAGA de Serre, les sous-schémas complets de X s'identifient avec les sous-espaces analytiques compacts de l'espace analytiques X_{an} associé à X. Donc l'espace de Douady $D(X_{\mathrm{an}})$ s'identifie lui-même avec le schéma de Hilbert $(\mathrm{Hilb}_X)_{\mathrm{an}}$.

2.2. Version relative de l'espace de Douady.

L'espace de Douady admet une version relative. L'existence de l'espace de Douady dans le cas relatif est prouvée par Pourcin [P] qui obtient le théorème suivant :

2.2.1. Théorème. — *Soient X et S deux espaces analytiques et $f : X \to S$ une application holomorphe. Soit $\mathcal{F}_S$ le foncteur contravariant sur (An/S) des espaces ana-*

lytiques relatifs sur S à valeur dans la catégorie des ensembles, défini par : $\mathcal{F}(T) =$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des familles analytiques de sous-espaces complexes compacts de X/S au-dessus de T. Alors, ce foncteur est représentable. Autrement dit, il existe un espace analytique $D_S(X)$ sur S et un sous-espace analytique (fermé) R de $D_S(X) \underset{S}{\times} X$ tels que :

a) R est propre et plat sur $D_S(X)$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D_S(X) \underset{S}{\times} X \arrow[dl, "\text{proj}"] \\ D_S(X) & \end{tikzcd}$$

b) (propriété universelle) : pour toute famille $(\mathcal{Y}/S, p, T/S)$ de sous-espaces compacts de X/S au-dessus d'un espace relatif T/S, il existe une application holomorphe unique à S-isomorphisme près $f : T/S \longrightarrow D_S(X)/S$ telle que

$$\mathcal{Y}/S \xrightarrow{\simeq} (T \underset{D_S(X)}{\times} R)/S\,.$$

L'espace $D_S(X)$ s'appelle espace de Douady relatif de X/S. Pourcin [P] a même montré que $D_S(X)$ peut être plongé dans $D(X)$ de telle sorte qu'il devient un sous-espace analytique fermé de l'espace de Douady $D(X)$ de X.

3. Exemples de sous-espaces de l'espace de Douady

3.1. Espaces de Douady des sous-variétés plongées.

À partir du foncteur contravariant $\mathcal{F}_S$ représenté par l'espace de Douady $D_S(X)$ d'un espace analytique X sur un autre S, on peut introduire des sous-foncteurs $\mathcal{F}'_S$ de $\mathcal{F}_S$ d'une manière assez naturelle, en imposant des conditions supplémentaires qui font des foncteurs $\mathcal{F}'_S$ des sous-foncteurs "ouverts" du foncteur $\mathcal{F}_S$, autrement dit qui vérifient les hypothèses du critère de Grothendieck [Gr], IV, 5.9. Ce dernier permet notamment de s'assurer que les foncteurs $\mathcal{F}'_S$ sont représentables par des sous-espaces ouverts de l'espace de Douady $D_S(X)$.

Les exemples les plus importants qu'on va considérer et qui vont être utiles par la suite, figurent dans la proposition suivante due à Grothendieck ([Gr], IX, corollaire 1.2) :

3.1.1. Proposition. — *Les sous-foncteurs suivants du foncteur de Hilbert $\mathcal{F}_S$ sont représentables par des ouverts de l'espace de Douady $D_S(X)$:*

(a) $\mathcal{F}_1(T)$ *= ensemble des familles analytiques de sous-espaces analytiques propres de X/S paramétrées par T/S dont les fibres sont lisses i.e. non singulières.*

(b) $\mathcal{F}_2(T)$ *= ensemble des éléments de $\mathcal{F}_1(T)$ dont les fibres sont de plus connexes.*

(c) $\mathcal{F}_3(T)$ *= ensemble des familles analytiques de sous-espaces analytiques propres de X/S paramétrées par T/S dont les fibres ont la même dimension m.*

(d) $\mathcal{F}_4(T)$ *= ensemble des familles analytiques de sous-espaces analytiques propres de X/S paramétrées par T/S dont les fibres ont la même caractéristique d'Euler χ.*

Rappelons que pour une fibre Y_t la caractéristique d'Euler de Y_t est

$$\chi(Y_t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(Y_t, \mathcal{O}(Y_t)) .$$

Idée de démonstration. — Pour les quatre cas, il su t de prouver que les foncteurs $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \ldots, 4$, sont des sous-foncteurs ouverts du foncteur $\mathcal{F}_S$, et d'appliquer ensuite le critère 5.9 de Grothendieck [Gr], IV. Le cas *(a)* résulte du fait que si $p : \mathcal{Y} \to T$ est plat et propre, l'ensemble des points $t \in T$, dont la fibre est non singulière, est ouvert. Pour les cas *(b)*, *(c)* et *(d)*, le théorème de finitude de Grauert (voir par exemple [Gr], VIII) permet de constater que pour un morphisme propre et plat $p : \mathcal{Y} \to T$, les fonctions $t \mapsto \dim Y_t$, $t \mapsto \chi(Y_t)$ et $t \mapsto$ le nombre de composantes connexes de Y_t, sont localement constantes où Y_t est la fibre de p au-dessus de t. Il en résulte donc que les foncteurs $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$ sont des sous-foncteurs ouverts de $\mathcal{F}_S$. ■

3.1.2. R . — En conjuguant des conditions sur les éléments de $\mathcal{F}_S(T)$, dont chacune s'exprime par un ouvert dans l'espace de Douady $D_S(T)$, on trouve évidemment une condition exprimée par l'ouvert intersection.

3.1.3. Définition. — *On suppose que S est réduit à un point.*

1) L'ouvert de $D(X)$ qui représente le foncteur $\mathcal{F}_2$ s'appelle l'espace de Douady des sous-variétés complexes compactes de X et sera noté $D'(X)$.

2) L'ouvert de $D(X)$ qui représente le foncteur $\mathcal{F}_3$ (resp. $\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$) s'appelle l'espace de Douady des sous-espaces (resp. sous-variétés) complexes compacts de X de dimension m et sera noté $D_m(X)$ (resp. $D'_m(X)$).

En conjuguant les cas *(b)*, *(c)*, *(d)* de la proposition 3.1.1, avec $m = 1$, on obtient le sous-foncteur G du foncteur de Hilbert $\mathcal{F}_S$ défini par $G(T)$ = ensemble de classes d'isomorphisme de familles analytiques de sous-espaces analytiques propres de X/S paramétrés par T/S qui vérifient de plus que les fibres sont lisses, connexes, de dimension 1 et de genre g (*i.e.* de caractéristique d'Euler $1-g$). Ce foncteur est donc représentable par un ouvert de l'espace de Douady $D_S(X)$.

Dans le cas où S est réduit à un point, cet ouvert paramétrise les sous-espaces analytiques compacts de X qui sont des courbes algébriques de genre g. On le notera $D'_{1,g}(X)$. On a évidemment une réunion disjointe

$$D'_1(X) = \coprod_{g\geq 0} D'_{1,g}(X) \,.$$

3.1.4. Définition. — *$D'_1(X)$ (resp. $D'_{1,g}(X)$) s'appelle espace de Douady des courbes de X (resp. des courbes de genre g de X).*

3.2. Les espaces symétriques.

Soit X un espace analytique. L'espace symétrique de X de puissance k est défini par le quotient :

$$\mathrm{Sym}^k(X) := X^k/\sigma_k$$

où $X^k := X \times \cdots \times X$, k fois et σ_k est le groupe de permutations d'ordre k. $\mathrm{Sym}^k(X)$ admet une structure complexe naturelle provenant de l'action du groupe σ_k sur X^k. Intuitivement, $\mathrm{Sym}^k(X)$ est l'ensemble des k-uplets de X sans respecter l'ordre. Donc si X est réduit, chaque point de $\mathrm{Sym}^k X$ définit un cycle analytique. Plus précisément, la réunion des espaces $\mathrm{Sym}^k(\mathrm{red}\, X)$, où $\mathrm{red}\, X$ est le réduit de X, pour tout $k \geq 1$ s'identifie avec l'espace de Barlet $B_0(X)$ des 0-cycles analytiques compacts (voir Barlet [B] pour la définition des espaces de Barlet). D'après un théorème de Barlet ([B], théorème V.8), il existe une application holomorphe non triviale du réduit de l'espace de Douady $D_n(X)$ des sous-espaces analytiques compacts de X de dimension n vers l'espace de Barlet $B_n(X)$ des n-cycles analytiques. Donc en particulier, on a un morphisme :

$$\varphi_0 : \mathrm{red}\, D_0(X) \longrightarrow \coprod_{k\geq 1} \mathrm{Sym}^k(\mathrm{red}\, X) \,.$$

Dans le cas où X est une surface de Riemann (non singulière), l'application φ_0 est un isomorphisme analytique de $\mathrm{red}\, D_0(X)$ sur $\coprod_{k\geq 1} \mathrm{Sym}^k(X)$ (voir le théorème 9 de Barlet [B], V). Donc pour chaque $k \geq 1$, $\mathrm{Sym}^k(X)$ s'identifie à une composante connexe de $D_0(X)$.

D'autre part, si X est une surface complexe compacte non singulière, soit $H_k(X)$ le sous-espace analytique de $D_0(X)$ correspondant aux sous-espaces analytiques compacts Y de X, de dimension 0 et de longueur k, *i.e.* $\sum_{y\in Y} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Y,y} = k$. Alors, il existe une application holomorphe canonique

$$\psi_k : H_k(X) \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(X)$$

qui, à chaque sous-espace Y de X de dimension 0 formé des points $\{y_1,\ldots,y_q\}$ vérifiant $\sum_{i=1}^{q} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Y,y_i} = k$, associe le 0-cycle $\sum_{i=1}^{q} k_i y_i$ où $k_i = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Y,y_i}$. L'espace $H_k(X)$ peut être considéré comme une désingularisation de l'espace $\mathrm{Sym}^k(X)$ en vertu de l'application ψ_k, grâce à la proposition suivante de Fogarty [Fo] :

3.2.1. Proposition. — *Le lieu singulier de* $\mathrm{Sym}^k(X)$ *est la diagonale définie par l'ensemble*

$$D = \left\{(\overline{x_1,\ldots,x_k}) \in \mathrm{Sym}^k(X)/x_i = x_j,\ i \neq j\right\}.$$

Cependant, $H_k(X)$ *est non singulier et* ψ_k *est un biméromorphisme qui est biholomorphe sur* $\psi_k^{-1}(\mathrm{Sym}^k(X) \setminus D)$.

En géométrie algébrique, $H_k(X)$ *n'est autre que le schéma de Hilbert des points de longueur* k.

3.3. Les espaces de morphismes.

Soient X et Y deux espaces analytiques sur un autre S. Pour T un espace analytique sur S, on pose : $X_T = X \underset{S}{\times} T$ et $Y_T = Y \underset{S}{\times} T$. On considère le foncteur contravariant suivant :

$$G(T) = \mathrm{Hom}_T(X_T, Y_T) = \mathrm{Hom}_S(X_T, Y)$$

défini sur la catégorie $(\mathrm{An})/S$ des espaces analytiques sur S, à valeurs dans la catégorie des ensembles (Ens). On considère aussi le sous-foncteur G' de G qui à T associe l'ensemble $\mathrm{Isom}_T(X_T, Y_T)$ des T-isomorphismes de X_T sur Y_T. On peut généraliser la définition de G en considérant un espace analytique Z sur l'espace X sur S et le foncteur

$$\widetilde{G}(T) = \mathrm{Hom}_{X_T}(X_T, Z_T)$$

(ensemble des sections holomorphes de Z_T sur X_T). Faisant $Z = Y \underset{S}{\times} X$, on retrouve le foncteur G. On note alors que l'ensemble des sections de Z_T sur X_T est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des sous-espaces analytiques compacts T de Z tels que le morphisme $T \to X_T$ induit par le morphisme $Z_T \to X_T$, est un isomorphisme. De cette façon, lorsque X est propre et plat sur S, on fait de $\widetilde{G}$ un sous-foncteur ouvert du foncteur de Hilbert $\mathcal{F}_S$. Comme ce dernier est représentable par $D_S(Z)$, $\widetilde{G}$ est aussi représentable par un sous-espace ouvert de $D_S(Z)$ noté $\prod_{X/S}(Z/X)$. Donc on a un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_S(T, \prod_{X/S}(Z/X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{X_T}(X_T, Z_T).$$

En faisant $T = S$, il est clair que $\prod_{X/S}(Z/X)$ s'identifie à l'ensemble des sections holomorphes de Z sur X (sur S).

G est également représentable par un ouvert de $D_S(X \underset{S}{\times} Y)$ noté $\mathrm{Hol}_S(X,Y)$ et l'isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_S(T, \mathrm{Hol}_S(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(X_T, Y)$$

montre (en faisant $T = S$) que $\mathrm{Hol}_S(X,Y)$ s'identifie avec l'ensemble des S-morphismes de X vers Y. Notons que l'espace $\mathrm{Hol}(X,Y)$ (qui correspond à S réduit à un seul point) sera étudié en détail, dans le chapitre 4. Enfin, le sous-foncteur G' est représentable par une partie ouverte de $\mathrm{Hol}_S(X,Y)$ qu'on notera $\mathrm{Isom}_S(X,Y)$ et on voit de même qu'il correspond aux S-isomorphismes de X sur Y.

4. Problèmes d'hyperbolicité sur l'espace de Douady et ses variantes

Soit X un espace analytique. On a vu que $D(X)$ admet une structure d'espace analytique complexe. Le problème suivant devient une question naturelle dans la théorie des espaces hyperboliques.

Problème A. — Est-ce que $D(X)$ est hyperbolique si on suppose que X est hyperbolique ?

Malheureusement, les deux exemples suivants donnent une réponse négative au problème A.

Exemple 4.1. — Soit X un espace analytique. Posons $\mathrm{Div}(X) = \{d \in D(X)/Y_d$ est un diviseur de Cartier de $X\}$. Alors $\mathrm{Div}(X)$ est un ouvert de Zariski de $D(X)$ et si X est non singulier alors $\mathrm{Div}(X)$ est réunion de composantes connexes de $D(X)$ (cf. Fujiki [Fu]).

Soit

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Div}(X) &\longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \\ d &\longmapsto \text{Fibré en droites associé} \end{aligned} .$$

Cette application est projective et la fibre au-dessus de $L \in \mathrm{Pic}(X)$ est identifiée avec l'espace projectif $\mathbb{P}(\Gamma(X,L))$ où $\Gamma(X,L)$ est l'ensemble des sections globales du faisceau associé à L. Ce qui montre que $\mathrm{Div}(X)$ ne peut pas être hyperbolique même si X l'est car sinon les fibres de $\mathcal{F}$ seront hyperboliques ; ce qui est absurde.

Exemple 4.2. — Soit C une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. C est donc hyperbolique. Soit $j : C \to \mathrm{Jac}(C)$ le plongement d'Abel-Jacobi de C dans sa jacobienne $\mathrm{Jac}(C) \cong \mathrm{Pic}^0(C)$. Soit k un entier positif et $\mathrm{Sym}^k(C)$ l'espace symétrique de C d'ordre k. C'est une variété complexe non singulière.

$\mathrm{Sym}^k(C)$ peut être identifié avec l'ensemble des diviseurs effectifs de degré k de C. C'est donc une composante connexe de l'espace de Douady $D(C)$. Soit

$$\varphi_k : \mathrm{Sym}^k(C) \longrightarrow \mathrm{Jac}(C)$$

la k-ième application d'Abel-Jacobi définie par $\varphi_k(D) : j(p_1) + \cdots + j(p_k)$ pour chaque $D = p_1 + \cdots + p_k \in \mathrm{Sym}^k(C)$. Alors φ_k vérifie les propriétés suivantes (voir [G-H], p. 228) :

i) φ_k est holomorphe.

ii) (théorème d'Abel) $\varphi_k^{-1}(\varphi_k(D)) = |D| = \mathbb{P}(H^0(C,\mathcal{O}([D]))) \cong \mathbb{P}^{\dim|D|}$ où D est un diviseur effectif de degré k de C et $|D|$ est l'ensemble des diviseurs effectifs de C linéairement équivalents à D.

iii) si $k > 2g-2$, $\varphi_k : \mathrm{Sym}^k(C) \to \mathrm{Jac}(C)$ est un fibré algébrique projectif de degré $r = \dim|D|$, $D \in \mathrm{Jac}(C)$ un diviseur effectif.

Cette dernière propriété entraîne que $\mathrm{Sym}^k(C)$ ne peut pas être hyperbolique pour $k \geq 2g-2$. En effet, $\mathrm{Jac}(C)$ est un tore complexe et donc est non hyperbolique et comme un fibré holomorphe est hyperbolique si et seulement si la base et la fibre le sont, il en résulte que $\mathrm{Sym}^k(C)$ est non hyperbolique. Par conséquent, $D(C)$ ne peut pas être hyperbolique bien que C l'est. Ce qui donne une réponse négative au problème A.

Remarques 4.3.

1) L'exemple 2 permet aussi de conclure que l'espace de Barlet $B_0(C)$ des 0-cycles analytiques compacts de C qui est isomorphe à $\coprod_{k\geq 0} \mathrm{Sym}^k(C)$ (réunion disjointe) ne peut pas être hyperbolique.

2) Considérons la projection naturelle

$$\pi_k : C^k := \overbrace{C \times \cdots \times C}^{k \text{ fois}} \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(C)\,.$$

Alors π_k est un revêtement ramifié et le lieu de ramification est exactement l'ensemble $D := \bigcup_{1\leq i\neq j\leq k} D_{ij}$ où $D_{ij} = \{(p_1,\ldots,p_k) \in C^k / p_i = p_j\} \subset C^k$.

D'autre part, les éléments de l'ensemble $\overline{D} = \pi_k(D)$ correspondent au sous-espaces analytiques compacts de C de dimension 0 qui sont singuliers. Soit $D'(C)$ l'espace de Douady des sous-variétés compactes de C. Alors

$$D'(C) = \Big(\coprod_{k\geq 0} \mathrm{Sym}^k(C) \smallsetminus \overline{D}\Big) \cup \{C\}\,.$$

$C^k \smallsetminus D$ est hyperbolique et $\pi_k \mid C^k \smallsetminus D$ est un revêtement, ce qui entraîne que $\mathrm{Sym}^k(C) \smallsetminus \overline{D}$ et donc $D'(C)$ est hyperbolique.

La dernière remarque est bien une motivation pour reformuler le problème A en une version plus faible mais qui semble être raisonnable :

Problème B. — Soit X un espace analytique hyperbolique. Est-ce que $D'(X)$ est hyperbolique (au sens de Brody) ?

Ce problème admet une réponse positive dans le cas spécial où X es une courbe algébrique de genre $g \geq 2$. En écrivant $D'(X)$ comme réunion disjointe des ouverts $D'_n(X)$ définis plus haut. La même question se pose pour ces derniers. Cependant, l'hypothèse sur X d'être hyperbolique semble être assez forte, ce qui nous ramène à poser le problème suivant :

Problème C. — Est-ce que $D'_n(X)$ est hyperbolique (au sens de Brody) si on suppose que X est k-mesure hyperbolique, pour un entier k qui ne dépend que de n?

Rappelons que si X est hyperbolique alors X est k-mesure hyperbolique pour tout k entre 1 et $\dim X$, donc une réponse positive au problème C pour tout n entraînera une solution du problème B.

Nous allons donner dans le chapitre 5 une solution du problème C dans le cas $n = 1$. Plus précisément nous obtiendrons que $D'_1(X)$ est hyperbolique au sens de Brody pour X 2-mesure hyperbolique.

Enfin, parmi les variantes les plus importantes en pratique de l'espace de Douady, l'espace de modules des applications holomorphes. Soient X et Y deux espaces analytiques, X étant compact, et $\mathrm{Hol}(X,Y)$ l'espace de modules des applications holomorphes de X vers Y. Alors l'hyperbolicité sur $\mathrm{Hol}(X,Y)$ a été étudiée par Kobayashi. Il a obtenu que si Y est (compact) hyperbolique alors $\mathrm{Hol}(X,Y)$ est (compact) hyperbolique (théorème 4.3.2). Supposons maintenant que Y est k-mesure hyperbolique, on envisage d'étudier l'influence de cette hypothèse sur les espaces des applications holomorphes considérés et cela conduit à poser le problème suivant :

Problème D. — Soit $\mathrm{Hol}_p(X,Y) = \{f \in \mathrm{Hol}(X,Y) / \operatorname{rang} f \geq p\}$. Supposons Y k-mesure hyperbolique. Est-ce qu'il existe un entier p qui ne dépend que de k tel que $\mathrm{Hol}_p(X,Y)$ est hyperbolique (au sens de Brody) ?

Ce problème sera résolu dans le chapitre 4 (théorème 4.5) pour la notion d'hyperbolicité au sens de Brody.

La deuxième direction consiste à étudier les propriétés de k-mesure hyperbolicité de $\mathrm{Hol}(X,Y)$. Concrètement, on pose le problème suivant :

Problème E. — Soit X un espace analytique et Y un espace analytique fortement k-mesure hyperbolique. Est-ce que $\mathrm{Hol}(X,Y)$ est aussi fortement k-mesure hyperbolique ?

Pour $k = 1$, ce problème est résolu par le théorème 4.3.2 dû à Kobayashi. Nous allons, dans le chapitre 4, résoudre le problème E pour X fortement mesure hyperbolique.

Chapitre 3

CRITÈRES D'HYPERBOLICITÉ POUR LES FAMILLES ANALYTIQUES LOCALEMENT TRIVIALES

Ce chapitre contient des résultats intermédiaires qui seront utiles dans les chapitres ultérieurs. Nous obtenons l'hyperbolicité au sens de Brody de la base d'une famille analytique localement triviale de sous-espaces analytiques compacts de dimension $k \geq 1$ d'un espace analytique X, dès que ce dernier devient $(k+1)$-mesure hyperbolique. De plus, grâce à une estimation concernant des mesures de Eisenman de la base, d'une fibre d'une telle famille ainsi que l'espace analytique X, nous constatons que si X est fortement $(k+p)$-mesure hyperbolique et les fibres (qui sont toutes isomorphes) sont mesure hyperboliques, alors la base est fortement p-mesure hyperbolique. L'hyperbolicité au sens de Kobayashi se déduit en prenant $p = 1$.

4.1. Critères de trivialité des familles analytiques

Rappelons qu'une famille analytique d'espaces analytiques compacts est dite triviale si elle est donnée par un produit $Y \times S$ au-dessus d'un espace analytique S où Y est un espace analytique compact. Elle est dite localement triviale si elle est isomorphe à une famille triviale, localement sur sa base. De cette manière, les familles analytiques localement triviales constituent chacune un fibré holomorphe à groupe structural le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(Y)$ d'une fibre distinguée Y. De plus, comme Y est compact, $\mathrm{Aut}(Y)$ est un groupe de Lie complexe.

Le théorème suivant donne une condition su sante pour une famille analytique d'être localement triviale (voir Bingener [Bin]). Il est une généralisation du théorème de Grauert-Fischer [G-F] de la trivialité locale des familles analytiques de variétés complexes compactes (la notion de Kodaira-Spenser).

1.1. Théorème. — *Soit $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, f, S)$ une famille analytique d'espaces analytiques compacts, S supposé réduit. Supposons que les fibres de f sont toutes isomorphes à un espace analytique compact Y_0 donné. Alors la famille $\mathfrak{X}$ est localement triviale. Autrement dit, $\mathcal{Y}$ est un fibré holomorphe sur S à fibre Y_0 et à groupe structural le groupe de Lie complexe* $\mathrm{Aut}(Y_0)$.

Si S est un espace de Stein contractile, alors la trivialité locale des familles analytiques au-dessus de S est équivalente à la trivialité globale. Plus précisément, on a :

1.2. Proposition. — *Soit $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, f, S)$ une famille analytique d'espaces analytiques compacts. Supposons que S est un espace de Stein contractile. Alors si $\mathfrak{X}$ est localement triviale, elle est globalement triviale.*

Démonstration. — Par hypothèse, $f : \mathcal{Y} \to S$ est propre et plat. Soit Y_0 la fibre de f au-dessus d'un point $o \in S$ et soit $p : S \times Y_0 \to S$ la projection. Alors p est aussi plat et propre. Donc l'espace $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{Y}, S \times Y_0)$ des S-isomorphismes de $\mathcal{Y}$ sur $S \times Y_0$ est bien défini comme un espace analytique au-dessus de S. De plus, puisque $\mathcal{Y}$ est dans ce cas un fibré holomorphe au-dessus de S, alors $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{Y}, S \times Y_0)$ est un fibré holomorphe principal au-dessus de S. La fibre est le groupe de Lie complexe $\mathrm{Aut}(Y_0)$ des automorphismes de Y_0. S étant un espace de Stein, donc d'après le principe de Grauert-Oka (voir par exemple Cartan [C1], théorèmes A et B), $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{Y}, S \times Y_0)$ est holomorphiquement globalement trivial sur S si et seulement si il est topologiquement globalement trivial. Or S est de plus contractile, donc d'après Steenrod [S], corollaire 11.6, p. 53, $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{Y}, S \times Y_0)$ est bien topologiquement globalement trivial ; et l'est donc holomorphiquement. Par conséquent, le morphisme $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{Y}, S \times Y_0) \to S$ admet une section holomorphe globale (voir Cartan [C1], théorème1). Or l'existence d'une telle section sur S est équivalente à l'existence d'un S-isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "f"'] & & S \times Y_0 \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

autrement dit, $\mathcal{Y}$ est globalement trivial sur S. Ce qui achève la démonstration. ∎

2. Familles analytiques localement triviales

Nous considérons dans ce paragraphe les familles analytiques localement triviales de sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique fixe X. Nous prouverons dans un premier temps l'hyperbolicité au sens de Brody et dans un deuxième temps la p-mesure hyperbolicité de la base d'une telle famille sous certaines restrictions.

2.1. Hyperbolicité au sens de Brody.

2.1.1. Théorème. — *Soit $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, f, S)$ une famille analytique localement triviale de sous-espaces analytiques compacts de X de dimension $k \geq 1$. Supposons que X est $(k+1)$-mesure hyperbolique, alors S est hyperbolique au sens de Brody.*

Démonstration. — Supposons que S n'est pas hyperbolique au sens de Brody, alors il existe une application holomorphe non constante :

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow S\,.$$

E ectuant le changement de base correspondant à g à la famille $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, f, S)$, on obtient le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}' = \mathbb{C} \times_S \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S \times X \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_2"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "g"] & S & X
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Autrement dit, la famille $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, f, S)$ induit une famille $\mathfrak{X}' = (\mathcal{Y}', p, \mathbb{C})$ localement triviale. Or $\mathbb{C}$ est un espace de Stein contractile, donc d'après la proposition 1.2, $\mathfrak{X}'$ est globalement triviale *i.e.* $\mathcal{Y}'$ est isomorphe à un fibré holomorphe trivial. Par conséquent, il existe un isomorphisme $\mathcal{Y}' \xrightarrow{\sim} Y \times \mathbb{C}$ où Y est une fibre de p. Soit maintenant :

$$F : Y \times \mathbb{C} \longrightarrow X$$

l'application holomorphe induite par le diagramme (1). Comme g est non constante, F est nécessairement de rang supérieur ou égale à $k+1$ où $\dim Y = k$. Or X est $(k+1)$-mesure hyperbolique, donc la proposition 1.2.2.3 conduit à une contradiction. Par conséquent, g ne peut être non constante et S est donc hyperbolique au sens de Brody. ■

2.2. p-mesure hyperbolicité.

Soit $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, \pi, S)$ une famille analytique localement triviale de sous-espaces analytiques compacts de dimension k de X. Notre but est de montrer que si X est fortement $(k+p)$-mesure hyperbolique et les fibres de π sont mesure hyperboliques, alors S est fortement p-mesure hyperbolique. Pour cela, nous allons d'abord établir une estimation sur la p-mesure de Eisenman E_S^p de S en fonction de la mesure de Eisenman E_Y^k d'une fibre Y au-dessus d'un point $s \in S$ et de la $(k+p)$-mesure de Eisenman E_X^{k+p} de X. En e et, soit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S \times X \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_2"] \\
S & X
\end{tikzcd}$$

défini par la famille $\mathfrak{X}$, où i est le plongement de $\mathcal{Y}$ dans $S \times X$ et proj_1, proj_2 sont les projections. Notons par $h : \mathcal{Y} \to X$ le composé $\mathrm{proj}_2 \circ i$. Soient $s \in S$ un point régulier, Y la fibre de π au-dessus de s et y un point régulier de Y. (On identifiera y avec son image par le plongement $Y \hookrightarrow \mathcal{Y}$.) Soient enfin $v \in \overset{k}{\wedge} T_y Y$ et $\xi \in \overset{p}{\wedge} T_s S$. Alors :

2.2.1. Lemme. — $E_X^{k+p}(h(y); \overset{k+p}{\wedge} dh(y; v \otimes \xi)) \leq E_Y^k(y; v) \cdot E_S^p(s; \xi)$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de E_S^p et E_Y^k il existe :

– une application holomorphe $f:B^p \to S$ telle que $f(0)=s$ et $\overset{p}{\wedge} df(0; \overset{p}{\wedge} e_p)=r^p \cdot \xi$, où $e_p = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}_{|0}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_p}_{|0}\right) \in T_0 B^p$ et r un réel strictement positif vérifiant :

$$r^{-2p} \leq E_S^p(s;\xi) + \varepsilon\,.$$

– une application holomorphe $g:B^k \to Y$ telle que $g(0)=y$ et $\overset{k}{\wedge} dg(0; \overset{k}{\wedge} e_k)=R^k \cdot v$, où $e_k = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}_{|0}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_k}_{|0}\right) \in T_0 B^k$ et R un réel strictement positif vérifiant :

$$R^{-2k} \leq E_Y^k(y;v) + \varepsilon\,.$$

B^p et B^k désignent les boules unités de $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^k$ respectivement.

Faisons le changement de base de la famille $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, \pi, S)$ correspondant à l'application $f : B^p \to S$. Nous obtenons le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
B^p \underset{S}{\times} \mathcal{Y} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & S \times X \arrow[d, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[ld, "\mathrm{proj}_1"] \\
B^p \arrow[r, "g"] & S & X
\end{tikzcd}$$

Notons $\mathcal{Y}_1 := B^p \underset{S}{\times} \mathcal{Y}$. Alors la famille $\mathfrak{X}_1 = (\mathcal{Y}_1, \pi_1, B^p)$ induite de $\mathfrak{X}$ par le changement de base est aussi localement triviale. Or B^p est un espace de Stein contractile, donc d'après la proposition 1.2, $\mathfrak{X}_1$ est globalement triviale *i.e.* $\mathcal{Y}_1$ est isomorphe au produit $Y \times B^p$. Il en résulte immédiatement la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow T_y Y \longrightarrow T_y \mathcal{Y}_1 \longrightarrow T_0 B^p \longrightarrow 0\,. \tag{1}$$

Par conséquent, on a

$$\dim T_y \mathcal{Y}_1 = \dim T_y Y + \dim T_0 B^p = k+p \tag{2}$$

et donc

$$\overset{\max}{\wedge} T_y \mathcal{Y}_1 := \overset{k+p}{\wedge} T_y \mathcal{Y}_1 \cong \overset{k}{\wedge} T_y Y \otimes \overset{p}{\wedge} T_0 B^p\,. \tag{3}$$

Soit $h_1 : \mathcal{Y}_1 \to X$ le composé $p \circ h$ et notons dh_1 sa jacobienne. Définissons l'application

$$\varphi : \overset{k}{\wedge} T_y Y \otimes \overset{p}{\wedge} T_0 B^p \longrightarrow \overset{k+p}{\wedge} T_{h(y)} X$$

induite de $\overset{k+p}{\wedge} dh_1(y)$ par l'isomorphisme (3). Alors φ est linéaire injective et on a

$$\varphi(v \otimes \overset{p}{\wedge} e_p) = r^p \overset{k+p}{\wedge} dh(y; v \otimes \xi)\,.$$

En particulier, $\varphi(v \otimes \overset{p}{\wedge} e_p)$ ne dépend pas de f.

D'autre part, il résulte de la trivialité globale de la famille $\mathfrak{X}_1 = (\mathcal{Y}_1, \pi_1, B^p)$ l'existence d'une application holomorphe

$$G : B^{k+p} \longrightarrow X\,.$$

En fait, on peut poser $G := h_1 \circ G_1|_{B^{k+p}}$ où

$$\begin{array}{rcl} G_1 : B^k \times B^p & \longrightarrow & Y \times B^p \simeq \mathcal{Y}_1 \\ (a,b) & \longmapsto & (g(a),b)\,. \end{array}$$

Nous avons : $G(0) = h(y)$ et :

$$\begin{aligned} \overset{k+p}{\wedge} dG(0; \overset{k+p}{\wedge} e_{k+p}) &= R^k \varphi(v \otimes \overset{p}{\wedge} e_p) \\ &= R^k \cdot r^p \cdot \overset{k=p}{\wedge} dh(y; v \otimes \xi) \end{aligned}$$

d'où

$$E_X^{k+p}(h(y); \overset{k+p}{\wedge} dh(y; v \otimes \xi) \leq E_Y^k(y; v) \cdot E_S^p(s; \xi) + \varepsilon(\varepsilon + E_Y^k(y; v) + E_S^p(s; \xi))$$

ε étant arbitraire, donc en faisant tendre ε vers 0, nous obtenons l'estimation désirée. ■

2.2.2. Théorème. — *Soient X un espace analytique de dimension n et $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y},\pi,S)$ une famille analytique localement triviale de sous-*espaces analytiques *compacts de dimension $k \geq 1$ de X. Supposons que les fibres de π sont mesure-hyperboliques et que X est fortement $(k+p)$-mesure hyperbolique, p un entier entre* 1 *et $n-k$. Alors S est fortement p-mesure hyperbolique.*

Démonstration. — Les mesures de Eisenman ne sont définies que pour les points réguliers. Soit $0 \in S$ un tel point et notons Y la fibre de π au-dessus de 0. Comme $\mathfrak{X}$ est localement triviale, on peut trouver un voisinage ouvert lisse $\mathcal{U}$ de 0 dans S tel que π soit un produit au-dessus de $\mathcal{U}$ *i.e.* Y est la fibre de π au-dessus de tout point $s \in \mathcal{U}$. Soient $y \in Y$ un point régulier quelconque, et v un élément décomposable de $\overset{k}{\wedge} T_y Y$ qui vérifient

$$E_Y^k(y; v) > 0 \tag{1}$$

($(y; v)$ existe car Y est mesure hyperbolique).

D'autre part, d'après le lemme précédent on a $\forall s \in \mathcal{U}$, et $\xi \in T_s S$:

$$E_X^{k+p}\Big(h(y), \overset{k+p}{\wedge} dh(y,v \otimes \xi)\Big) \leq E_Y^k(y; v) \cdot E_S^p(s; \xi)\,. \tag{2}$$

Or X est fortement $(k+p)$-mesure hyperbolique, donc on peut restreindre l'ouvert $\mathcal{U}$ pour que l'inégalité suivante soit vérifiée pour tout $s \in \mathcal{U}$:

$$C \cdot \Big\| \overset{k+p}{\wedge} dh((y); v \otimes \xi)\Big\|_X^2 \leq E_X^{k+p}\Big(h(y); \overset{k+p}{\wedge} dh((y); v \otimes \xi)\Big) \tag{3}$$

où C est une constante strictement positive et $\|\ \|_X$ est la norme sur $T_{h(y)}X$ induite par une métrique hermitienne sur X. Quitte à restreindre de nouveau $\mathcal{U}$ si nécessaire, d'après un fait classique d'algèbre linéaire, il existe une constante strictement positive C' telle que pour tout $s \in \mathcal{U}$ et $\xi \in T_s S$ on a :

$$C' \|\xi\|_S^2 \cdot \|v\|_Y^2 \leq \Big\| \overset{k+p}{\wedge} dh(y; v \otimes \xi)\Big\|_X \tag{4}$$

où $\| \ \|_S$ et $\| \ \|_Y$ sont définies de la même manière que $\| \ \|_X$.

Combinons les inégalités de (1) à (4), alors $\forall s \in \mathcal{U}$ et $\xi \in T_s S$ on a :

$$k\|\xi\|_S^2 \leq E_S^p(s;\xi) \tag{5}$$

où $k = \frac{C \cdot C' \cdot \|v\|_Y^2}{E^k(y;v)}$. Donc S est fortement p-mesure hyperbolique. ∎

Chapitre 4

ESPACES DE MODULES DES APPLICATIONS HOLOMORPHES

Soient X et Y deux espaces analytiques. Supposons que X est compact. Notons par $\mathrm{Hol}(X,Y)$ l'ensemble de toutes les applications holomorphes de X à valeurs dans Y. Puisqu'un sous-espace analytique Z de $X \times Y$ est le graphe Γ_f d'une application holomorphe $f : X \to Y$ si et seulement si Z est isomorphe à X, $\mathrm{Hol}(X,Y)$ peut être considéré comme un sous-ensemble de l'espace de Douady $D(X \times Y)$ de $X \times Y$. De plus $\mathrm{Hol}(X,Y)$, muni de la topologie ouverte compacte, admet une structure complexe induite par celle de $D(X \times Y)$ comme l'exprime le théorème suivant dû à Douady [D] :

1. Théorème. — *Soient X et Y comme au-dessus et R la famille universelle au-dessus de l'espace de Douady $D(X \times Y)$ de $X \times Y$. Alors :*

1) $\mathrm{Hol}(X,Y)$ *est ouvert dans* $D(X \times Y)$.

2) $R_{|\,\mathrm{Hol}(X,Y)}$ *est le graphe d'une application holomorphe de* $\mathrm{Hol}(X,Y) \times X$ *à valeurs dans Y. Autrement dit l'application*

$$\begin{array}{rcl} \Phi\ : \mathrm{Hol}(X,Y) \times X & \longrightarrow & Y \\ (f,x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est holomorphe.

3) L'application Φ possède la propriété universelle suivante : pour tout espace analytique S et pour toute application holomorphe $\Psi : S \times X \to Y$, il existe une application holomorphe et une seule $f : S \to \mathrm{Hol}(X,Y)$ tel que $\Psi = \Phi \circ (f \times I_X)$. Autrement dit l'application

$$\begin{array}{rcl} f : S & \longrightarrow & \mathrm{Hol}(X,Y) \\ s & \longmapsto & f(s) : \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \Psi(s,x) \end{array} \end{array}$$

est holomorphe.

Démonstration. — Les espaces R et $D(X \times Y) \times X$ sont propres et plats au-dessus de $D(X \times Y)$. Considérons la projection $p : R \to D(X \times Y) \times X$. Un point $s \in D(X \times Y)$ appartient à $\mathrm{Hol}(X \times Y)$ si et seulement si $p(s)$ est un isomorphisme de $R(s)$ sur X. D'après la proposition 10.1 de Douady [D], $\mathrm{Hol}(X,Y)$ est ouvert dans $D(X \times Y)$ et $R_{|\,\mathrm{Hol}(X,Y)}$ est isomorphe à $\mathrm{Hol}(X \times Y) \times X$ donc $R_{|\,\mathrm{Hol}(X,Y)}$ est le graphe d'une application holomorphe $\Phi : \mathrm{Hol}(X,Y) \times X \to Y$. Comme $R_{|\{f\}}$ est le graphe de f, $\forall f \in \mathrm{Hol}(X,Y)$ alors Φ est définie par $\Phi(f,x) = f(x), \forall (f,x) \in \mathrm{Hol}(X,Y) \times X$.

Soit S un espace analytique. Les applications holomorphes de $S \times X$ dans Y correspondent bijectivement aux sous-espaces Z de $S \times X \times Y$ tels que la projection $Z \to S \times X$ est un isomorphisme, *i.e.* aux sous-espaces Z de $S \times X \times Y$ propres et plats sur S tels que, pour tout $s \in S$, $Z(s)$ est le graphe d'une application holomorphe de X dans Y, donc aux applications holomorphes $f : S \to D(X \times Y)$ telles que, pour tout $s \in S$,

$f(s) \in \mathrm{Hol}(X,Y)$, *i.e.* aux applications holomorphes de S dans $\mathrm{Hol}(X,Y)$ d'où la propriété universelle de Φ se déduit de celle de $D(X \times Y)$. Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

2. R [D]. — Soient X, X' deux espaces analytiques compacts et Y un espace analytique : alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathrm{Hol}(X,X') \times \mathrm{Hol}(X',Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hol}(X,Y) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

est holomorphe.

L'hyperbolicité de Y permet d'avoir la même propriété sur l'espace $\mathrm{Hol}(X,Y)$. Précisément on a (voir Kobayashi [K2], th. 8.8) :

3. Théorème. — *Soient X et Y comme au dessus.*

1) *Si Y est hyperbolique (complet), alors chaque composante connexe de* $\mathrm{Hol}(X,Y)$ *est hyperbolique (complète).*
2) *Si de plus Y est compact, alors* $\mathrm{Hol}(X,Y)$ *est aussi compact.*

Démonstration. — Définissons une pseudo-distance d sur $\mathrm{Hol}(X,Y)$ par

$$d(f,g) = \sup\{d_Y(f(x),g(x)); x \in X\}$$

où d_Y est la pseudo-distance de Kobayashi sur Y.

1) d_Y est actuellement une distance d'où d est aussi une distance. Soient H une composante connexe de $\mathrm{Hol}(X,Y)$ et d_H la pseudo-distance de Kobayashi sur H. Il su t pour avoir l'hyperbolicité de $\mathrm{Hol}(X,Y)$ de montrer que $d \leq d_H$. Pour cela soit $\varphi : \Delta \to H$ une application holomorphe du disque unité dans H et soit $\widetilde{\varphi} : \Delta \times X \to Y$ l'application induite. Alors on a :

$$\begin{aligned} d(\varphi(a),\varphi(b)) &= \sup_{x\in X}\left\{d_Y(\varphi(a)(x),\varphi(b)(x))\right\} \\ &= \sup\left\{d_Y(\widetilde{\varphi}(a,x),\widetilde{\varphi}(b,x)); x \in X\right\} \\ &\leq \sup\left\{d_{\Delta\times X}((a,x),(b,x)); x \in X\right\} \\ &\leq d_\Delta(a,b)\,. \end{aligned}$$

où d_Δ est la distance de Poincaré sur le disque unité Δ. Donc φ est coersive pour les distances d et d_Δ. Il en résulte que $d \leq d_H$.

Supposons maintenant que Y est hyperbolique complet. Soit

$$\overline{B}_{d_H}(f,r) = \{f \in H/d_H(f,g) \leq r\}$$

$$\begin{aligned}\overline{B}_{d_H}(f,r) \subset \overline{B}_d(f,r) &= \{g \in H/d(f,g) \leq r\} \\ &= \bigcap_{x\in X} \overline{B}_{d_Y}(f(x),r)\end{aligned}$$

donc $\overline{B}_{d_H}(f,r)$ est compact et par conséquent H est hyperbolique complète.

2) C'est une conséquence immédiate du théorème 8.1 de Kobayashi [K2] où on met $K = X$. On peut aussi appliquer directement le théorème d'Ascoli-Arzéla (voir Lang [L]). ■

Plus généralement, supposons que Y est seulement k-mesure hyperbolique où $k\geq 1$ est un entier. Notre but est d'obtenir un résultat similaire que le précédent (*a priori* il est impossible d'avoir le même résultat pour $\mathrm{Hol}(X,Y)$ tout entier, un exemple pour cela est $\mathrm{Hol}(p,Y)$ où p est l'espace réduit à un point, $\mathrm{Hol}(p,Y) \cong Y$!). L'idée est de se restreindre à des sous-ensembles de $\mathrm{Hol}(X,Y)$ en ajoutant des conditions sur le rang. D'abord nous allons définir le rang pour une application holomorphe.

Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe d'un espace analytique X à valeurs dans un autre Y. Par définition, le rang de f en un point $x \in X$ est :

$$\mathrm{rang}_x f = \dim_x X - \dim_x f^{-1}(f(x))\,.$$

Le rang de f, noté rang f est le supremum de $\mathrm{rang}_x f$ parmi tous les $x \in X$.

D'autre part, soit $\mathrm{Hol}_k(X,Y)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Hol}(X,Y)$ défini par $\mathrm{Hol}_k(X,Y) = \{f \in \mathrm{Hol}(X,Y)/\, \mathrm{rang}\, f \geq k\}$ pour $0 \leq k \leq \inf(\dim X, \dim Y)$, un entier. De même on définit $\mathrm{Hol}(k,X,Y) = \{f \in \mathrm{Hol}(X,Y)/\, \mathrm{rang}\, f = k\}$. Il est clair que $\mathrm{Hol}_k(X,Y)$ est ouvert dans $\mathrm{Hol}(X,Y)$ (resp. fermé) si et seulement si $\mathrm{Hol}(p,X,Y)$ est ouvert dans $\mathrm{Hol}(X,Y)$ (resp. fermé), $\forall p \geq k$.

La proposition suivante permettra de munir $\mathrm{Hol}_k(X,Y)$ de la structure complexe induite par celle de $\mathrm{Hol}(X,Y)$.

4. Proposition. — *Soient X et Y deux espaces analytiques complexes, X est supposé compact. Soit k un entier,* $0 \leq k \leq \inf(\dim X, \dim Y)$. *Alors* $\mathrm{Hol}_k(X,Y)$ *est ouvert dans* $\mathrm{Hol}(X,Y)$.

Démonstration. — Soit f un élément quelconque de $\mathrm{Hol}_k(X,Y)$ et supposons qu'il existe une suite $f_n \in \mathrm{Hol}(X,Y)$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ dans $\mathrm{Hol}(X,Y)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer X réduit. Et puisque X est compact, il existe un nombre fini de composantes irréductibles de X, donc par définition, le rang de f est égal à rang $f_{|X_0}$ pour une certaine composante irréductible X_0 de X. Posons $Y_0 = f(X_0)$. Par le théorème de l'application propre de Remmert (voir par exemple Whitney [Wh]), Y_0 est un sous-espace analytique irréductible et compact de Y et $\dim Y_0 = \mathrm{rang}\, f$.

Notons par $S(Y_0)$ l'ensemble des points singuliers de Y_0. Comme $f : X_0 \to Y_0$ est propre et surjective, il existe un point non singulier $x_0 \in X_0 \setminus f^{-1}(S(Y_0))$ tel que $\operatorname{rang} f = \operatorname{rang}_{x_0} f$ (voir Narasimhan [Na], chap. VII), donc f_n est du même rang en un point non singulier de $X_0 \setminus f_n^{-1}(S(Y_0))$ pour n su samment large, et par conséquent $\operatorname{rang} f_n \geq k$. Ce qui entraîne que $f_n \in \mathrm{Hol}_k(X,Y)$ pour n su samment large. Ainsi s'achève la démonstration. ■

Un cas très important c'est celui où $k = \dim Y$. Dans cette situation, supposons Y un espace analytique compact et mesure-hyperbolique. Alors par le théorème 1.2.2.2, $\mathrm{Hol}_k(Y,Y)$ est l'ensemble des transformations biholomorphe de Y, qui n'est autre que $\mathrm{Aut}(Y)$, le groupe des automorphismes de Y. Or $\mathrm{Aut}(Y)$ est un groupe de Lie complexe et comme Y est mesure hyperbolique, alors aucun groupe de Lie complexe de dimension strictement positive ne peut agir sur Y e ectivement comme un groupe d'automorphismes. De ceci, Kobayashi [K2] obtient le

5. Théorème. — *Soit Y un espace analytique compact mesure hyperbolique. Alors $\mathrm{Aut}(Y)$ est discret.*

Plus généralement, si Y est seulement k-mesure hyperbolique. Nous obtenons la caractérisation suivante de $\mathrm{Hol}_k(X,Y)$:

6. Théorème. — *Soient X et Y deux espaces analytiques complexes. Supposons que Y est k-mesure hyperbolique. Alors $\mathrm{Hol}_{k-1}(X,Y)$ est hyperbolique au sens de Brody.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe une application holomorphe non constante $f : \mathbf{C} \to H \subset \mathrm{Hol}_{k-1}(X,Y)$ où H est une composante connexe de $\mathrm{Hol}_{k-1}(X,Y)$. Soit $F : \mathbf{C} \times X \to Y$ l'application induite de f définie par $F(t,x) = f(t)(x)$. D'après le théorème 1, F est holomorphe. Fixons un point régulier $(t_0,x_0) \in \mathbf{C} \times X$ tel que $\operatorname{rang}_{(t_0,x_0)} F = \operatorname{rang} F$, et $\operatorname{rang}_{x_0} f(t_0) = \operatorname{rang} f(t_0)$. L'existence de ce point est évidente. Choisissons ensuite un voisinage connexe lisse de (t_0,x_0) de la forme $U \times V \subset \mathbf{C} \times X$, où $U \subset \mathbf{C}$ et $V \subset X$. Notons par G les restriction de F à $U \times V$ *i.e.* $G := F_{|U\times V}$. G est de rang constant en tout point de $U \times V$. D'après la version complexe du théorème du rang constant (voir par exemple Whitney [Wh], Appendice II, corollaire 7), $G(U \times V) = F(U \times V)$ est une variété complexe connexe. Le même raisonnement permet de conclure que $f(t_0)(V)$ lui aussi est une variété complexe connexe. Et comme f est non constante, $f(t_0)(V)$ qui est incluse dans $F(U \times V)$ ne peut pas être égale à $F(U \times V)$. Donc on a

$$\dim_{F(t_0,x_0)} f(t_0)(V) < \dim_{F(t_0,x_0)} F(U \times V)$$

ce qui entraîne que

$$k - 1 \leq \operatorname{rang} f(t_0) < \operatorname{rang} F.$$

Maintenant appliquant à F la proposition 1.2.2.3, nous obtenons ainsi une contradiction, d'où le théorème. ∎

En particulier, si Y est k-mesure hyperbolique, alors $\mathrm{Hol}(p,X,Y)$ est hyperbolique au sens de Brody pour tout $p \geq k-1$. Si de plus Y est compact et de dimension k, alors Y est mesure hyperbolique et on obtient que $\mathrm{Aut}(Y)$ (qui est isomorphe à $\mathrm{Hol}(k,Y,Y)$, comme nous l'avons indiqué plus haut) est hyperbolique au sens de Brody. Or $\mathrm{Aut}(Y)$ est un groupe de Lie complexe, ce qui implique qu'il est forcément discret. On retrouve ainsi le théorème 5. Le théorème 6 peut donc être considéré comme généralisation de ce dernier.

Supposons maintenant que Y est fortement k-mesure hyperbolique. Alors cette propriété reste valable pour $\mathrm{Hol}(X,Y)$ pour X fortement mesure hyperbolique. En e et, on a :

7. Théorème. — *Si X est un espace analytique compact fortement mesure hyperbolique de dimension n et Y est un espace analytique fortement k-mesure hyperbolique, alors* $\mathrm{Hol}(X,Y)$ *est fortement k-mesure hyperbolique.*

Démonstration. — Le plongement de $\mathrm{Hol}(X,Y)$ dans l'espace de Douady $D(X \times Y)$ induit une famille analytique de sous-espaces analytiques compacts de dimension n de $X \times Y$ au-dessus de $\mathrm{Hol}(X,Y)$. En plus, cette famille est localement triviale du fait que ses fibres sont toutes isomorphes à X. D'autre part, X est fortement mesure hyperbolique et Y est fortement p-mesure hyperbolique, donc d'après le théorème 2.2.1, 2), $X \times Y$ est fortement $(n+p)$-mesure hyperbolique. Enfin appliquant le théorème 2.2.2, on conclut que $\mathrm{Hol}(X,Y)$ est fortement p-mesure hyperbolique. ∎

Chapitre 5

HYPERBOLICITÉ AU SENS DE BRODY DE L'ESPACE DE DOUADY DES COURBES PLONGÉES

Introduction

Le but de ce chapitre est de prouver le théorème 4.1, énoncé dans l'introduction, qui assure l'hyperbolicité au sens de Brody de l'espace de Douady des courbes algébriques plongées dans un espace analytique donné X, 2-mesure hyperbolique. Pour cela, nous allons construire pour chaque $g \geq 1$ une application holomorphe Ψ_g définie sur le revêtement universel $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$ de l'espace de Douady $D'_{1,g}(X)$ des courbes de genre g de X à valeurs dans l'espace de Torelli T'_g des courbes de genre g. Cette application nous permettra de transporter la propriété d'hyperbolicité au sens de Brody de T'_g vers $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$ à travers ses fibres. Ensuite comme $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$ est le revêtement universel de $D'_{1,g}(X)$, nous obtiendrons la même propriété sur $D'_{1,g}(X)$. Dans les cas $g = 0$ et $g = 1$, $D'_{1,g}(X)$ est discret. Notons que les résultats du chapitre 3 seront essentiels pour avoir ces conclusions.

Nous allons rappeler dans les paragraphes 1 et 2 la définition et les propriétés nécessaires des espaces de Teichmüller et de Torelli, notamment la propriété d'hyperbolicité qui fera l'objet du paragraphe 2. Le paragraphe 3 sera consacré à construire les applications Ψ_g pour $g \geq 1$ et à étudier l'hyperbolicité de leurs fibres. Nous montrerons que si X est 2-mesure hyperbolique, alors les fibres de Ψ_g sont hyperboliques au sens de Brody et même au sens de Kobayashi si $g \geq 2$ et X fortement 2-mesure hyperbolique. Nous prouverons le théorème 4.1 dans le paragraphe 4. Enfin, dans le paragraphe 5 nous montrons l'hyperbolicité d'un ouvert spécial de $D'_1(X)$ pour X une variété non singulière.

1. Espace de Teichmüller et espace de Torelli

1.1. Courbe de Teichmüller au-dessus d'un espace analytique.

Soit S un espace analytique. Une *"courbe (algébrique) de genre g au-dessus de S"* est par définition, un espace analytique X sur S, propre et lisse sur S, et dont les fibres (qui sont donc des variétés complexes compactes) sont connexes, de dimension complexe 1, et de genre g. De plus, nous conviendrons dans tout ce paragraphe que $g \geq 1$ et lorsque $g = 1$, nous sous-entendons dans la notion de "courbe de genre $g = 1$ au-dessus de S", la donnée en plus, d'une section holomorphe de X au-dessus de S. La terminologie, due à Grothendieck, provient du fait que les fibres de X au-dessus de S peuvent être identifiées à des courbes algébriques de genre g. L'ensemble des courbes de genre g au-dessus de S forme une catégorie $\mathcal{F}_S$ d'une façon évidente.

Un changement de base $S' \to S$ transforme une courbe de genre g au-dessus de S en une courbe de genre g au-dessus de S' (en convenant, pour $g = 1$, de prendre comme section marquée l'image inverse de la section marquée).

Le foncteur contravariant de la catégorie des espaces analytiques vers la catégorie des ensembles qui, à chaque espace analytique S, associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des courbes de genre g au-dessus de S, ce foncteur n'est pas représentable (voir Hubbard [Hu] pour un contre-exemple). L'obstruction pour la représentabilité de ce foncteur est le fait que ces courbes admettent des automorphismes non triviaux.

L'idée pour construire le foncteur de Teichmüller est d'éliminer les automorphismes, par introduction de nouveaux éléments de structures. Pour cela, rappelons que si X est une courbe de genre g au-dessus d'un espace analytique S, alors X est un fibré topologique localement trivial sur S (voir Grothendieck [Gr], I). Ce résultat permet de définir un revêtement principal de S. En e et, soit C_0 une courbe algébrique de genre g. Notons par γ_g, le groupe des classes (à une homotopie d'applications continues près) d'homéomorphismes de C_0 sur lui-même préservant l'orientation, alors l'ensemble des classes (à une homotopie d'applications continues près) d'homéomorphismes préservant l'orientation de C_0 sur les fibres X_S de X au-dessus de $s \in S$ pour tout s, est un revêtement principal de S, de groupe γ_g. Ce revêtement s'appellera *revêtement de Teichmüller* et sera noté $\mathcal{P}(X/S)$. Le groupe γ_g sera dit, *groupe de Teichmüller*.

1.1.1. Définition. — *On appelle* structure de Teichmüller *sur une courbe X de genre g au-dessus d'un espace analytique S, toute section holomorphe du revêtement de Teichmüller $\mathcal{P}(X/S)$ de S. Une courbe de genre g au-dessus de S, munie d'une structure de Teichmüller, est appelée une* courbe de Teichmüller de genre g au-dessus de S.

Les courbes de Teichmüller de genre g au-dessus d'un espace analytique fixe S, forment une catégorie pour la notion évidente de S-isomorphisme de courbes de Teichmüller. De plus, une courbe de Teichmüller X au-dessus de S n'admet pas d'automorphismes non triviaux. Ceci est dû au fait qu'un automorphisme de X en tant qu'élément de $\mathcal{F}_S$, qui induit l'identité sur $\mathcal{P}(X/S)$, est l'identité et au fait qu'un S-automorphisme d'un revêtement principal, laissant fixe une section, est aussi l'identité (Grothendieck [Gr], I).

1.1.2. R . — Lorsque l'espace analytique S est réduit à un élément, une courbe de Teichmüller de genre g au-dessus de S, est tout simplement une courbe algébrique ordinaire X de genre g, munie d'une classe (au sens de l'homotopie des applications continues) d'homéomorphismes préservant l'orientation d'une courbe algébrique fixée C_0

de genre g vers X, et admettant de plus pour le cas $g = 1$ un point distingué appelé *"point zéro"* de X.

Dans ce cas, la donnée d'une structure de Teichmüller sur X détermine une classe d'isomorphismes du groupe fondamental $\pi_1(C_0)$ vers $\pi_1(X)$. En fait, la donnée d'une telle classe définit complètement la structure de Teichmüller sur X. Si on choisit une fois pour toutes $2g$ générateurs A_i^0 de $\pi_1(C_0)$, il revient au même de donner leurs images dans $\pi_1(X)$, images qui doivent satisfaire à la même relation et à une condition imposée par la conservation de l'orientation (voir Weil [W]). Pour le cas $g = 1$, il reste nécessaire de fixer un "point zéro" comme indiqué plus haut.

1.2. Foncteur de Teichmüller.

Si on associe à chaque espace analytique S, l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes de Teichmüller de genre g au-dessus de S, on obtient un foncteur contravariant

$$\mathcal{F}_g : (\mathrm{An}) \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

de la catégorie des espaces analytiques vers la catégorie des ensembles.

1.2.1. Théorème (Grothendieck [Gr], I, théorème 3.1)**. —** *Le foncteur contravariant $\mathcal{F}_g$ est représentable. Autrement dit, il existe un espace analytique T_g, et une courbe de Teichmüller V_g de genre g au-dessus de T_g, qui sont universels au sens suivant : pour toute courbe de Teichmüller X de genre g au-dessus d'un espace analytique S, il existe un morphisme et un seul f de S dans T_g, tel que X soit isomorphe (avec sa structure de Teichmüller) à $S \underset{T_g}{\times} V_g$.*

L'espace analytique T_g, introduit dans le théorème précédent, s'appelle *l'espace de Teichmüller* pour les courbes de genre g. T_g est un espace topologique séparé, et est une variété complexe, de dimension $3g - 3$ si $g \geq 2$, de dimension 1 si $g = 1$ (Grothendieck [Gr], voir aussi Bers [Be] et Weil [W]). Il est bien connu aussi que T_g est homéomorphe à une boule, et par suite contractile, en particulier connexe et simplement connexe.

1.2.2. R . — L'espace de Teichmüller des courbes algébriques de genre $g = 1$ admet une forme explicite. En fait T_1 peut être identifié avec le demi-plan supérieur H du plan complexe $\mathbb{C}$. Pour voir cela, rappelons d'abord que toute courbe algébrique de genre $g = 1$ peut être réalisée comme un quotient du plan complexe $\mathbb{C}$ par un réseau Λ_z engendré par l'entier 1 et un nombre complexe z appartenant au demi-plan supérieur H. Posons

$$X = (\mathbb{C} \times H)/\Lambda$$

où $\Lambda := (1,i)\mathbb{Z}^2$, le réseau engendré par l'entier 1 et le nombre complexe $i = \sqrt{-1}$ et qui agit sur $\mathbb{C} \times H$ par l'application $\begin{array}{l} \Lambda \times \mathbb{C} \times H \longrightarrow \mathbb{C} \times H \\ (\ell,t,z) \longmapsto (t + j_z(\ell),z) \end{array}$ où $\begin{array}{l} j_z : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto (1,z)x \end{array}$. Alors X est une variété complexe. Soit $p : X \to H$, la projection canonique. Pour tout $z \in H$, la fibre de p au-dessus de z est

$$X_z = \mathbb{C}/\Lambda_z\,.$$

On obtient ainsi une courbe algébrique X de genre g : au-dessus de H, qui paramétrise toutes les courbes algébriques de genre 1 (appelées courbes elliptiques).

D'autre part, le diagramme commutatif suivant montre l'existence d'une section "zéro" pour la courbe X au-dessus de H

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \times H \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{C} \times H)/\Lambda = X \arrow[dl, "\varphi"] \\ H & \end{tikzcd}$$

où proj_2 est la projection de $\mathbb{C} \times H$ sur H et π est la projection canonique de $\mathbb{C} \times H$ sur $(\mathbb{C} \times H)/\Lambda$.

En associant à chaque $z \in H$ l'homéomorphisme de $X_i = \mathbb{C}/\Lambda$ vers $X_z = \mathbb{C}/\Lambda_z$ (qui est la fibre de p au-dessus de z) qui transforme la base $(1,i)$ de Λ de la base $(1,z)$ de Λ_z, on obtient une section du revêtement de Teichmüller de H et on conclut donc que X est une courbe de Teichmüller de genre $g = 1$ au-dessus de H.

Enfin, compte tenu du fait que pour toute courbe algébrique S de genre $g = 1$, la matrice des périodes, par rapport à des générateurs convenables du premier groupe d'homologie $H_1(S)$, a la forme $(1,z)$ où $z \in H$, il est clair que la courbe de Teichmüller X au-dessus de H vérifie la propriété universelle du théorèmpe 2.2.1. D'après l'unicité de cette propriété, T_1 s'identifie donc avec H . ■

1.3. L'espace de modules de Riemann comme quotient de l'espace de Teichmüller.

Une fois l'espace de Teichmüller T_g construit, l'espace de modules est facile à identifier : le groupe de Teichmüller γ_g opère sur T_g de façon évidente. Son action est holomorphe, propre et totalement discontinue (voir Grothendieck [Gr], I). Il en résulte que le quotient

$$M_g := T_g/\gamma_g$$

est un espace analytique normal. Il est généralement appelé *l'espace de modules de Riemann* des courbes de genre g. L'ensemble sous-jacent à M_g est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes algébriques de genre g.

Si X est une courbe de genre g au-dessus d'un espace analytique S, alors l'application naturelle

$$\Phi : S \longrightarrow M_g$$

qui à chaque point $s \in S$ associe la classe d'isomorphisme $[X_s] \in M_g$ de la fibre X_S de X/S au-dessus de $s \in S$, est holomorphe par définition même de l'espace de module M_g.

1.4. Espace de Torelli.

Il est utile de définir un espace de module intermédiaire entre l'espace de modules de Riemann et l'espace de Teichmüller. Il s'agira de l'espace de Torelli. C'est de ce dernier que nous nous servirons dans la démonstration du théorème principal de ce chapitre, à savoir l'hyperbolicité au sens de Brody de l'espace de Douady des courbes plongées dans un espace analytique donné X.

L'idée, pour construire la structure de Torelli, est de modifier légèrement la structure de Teichmüller sur une surface de Riemann compacte S de genre g, définie par les images A_i d'une base du groupe fondamental $\pi_1(C)$ d'une courbe fixée C dans celui de S, $\pi_1(S)$ (voir la remarque 1.1.2). On obtient la structure de Torelli en se donnant les images de la base de $\pi_1(C)$ indiquée, non pas dans $\pi_1(S)$, mais dans $H_1(S,\mathbb{Z})$, le premier groupe d'homologie de S à coe cients dans $\mathbb{Z}$, ou, ce qui revient au même, dans $H^1(S,\mathbb{Z})$ (le premier groupe de cohomologie de S à coe cients dans $\mathbb{Z}$) qui est dual à $H_1(S,\mathbb{Z})$.

Pour avoir une description fonctorielle de l'espace de Torelli, il est nécessaire de définir la structure de Torelli sur une courbe X de genre g au-dessus d'un espace analytique S. Étant donné donc une telle courbe, soit $p : X \to S$ la projection. Rappelons que pour un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, $R^p p_*(\mathcal{F})$ est le faisceau sur S associé au préfaisceau

$$\mathcal{U} \rightsquigarrow H^p(p^{-1}(\mathcal{U}),\mathcal{F})$$

où $\mathcal{U}$ parcourt les ouverts de S.

1.4.1. Définition. — *Une structure de Torelli sur la courbe X de genre g au-dessus de S est la donnée d'un isomorphisme*

$$R^1 p_*(\underset{\sim}{\mathbb{Z}}_X) \cong \underset{\sim}{\mathbb{Z}}_S^{2g}$$

où $\underset{\sim}{\mathbb{Z}}_X$ est le faisceau sur X des fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et $\underset{\sim}{\mathbb{Z}}_S^{2g}$ est le faisceau sur S des applications localement constantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^{2g}$.

1.4.2. Définition. — *Une courbe algébrique X de genre g sur un espace analytique S, munie d'une structure de Torelli, s'appelle courbe de Torelli de genre g au-dessus de S.*

Comme d'ailleurs pour les courbes de Teichmüller, il est clair que les courbes de Torelli au-dessus d'un espace analytique S forment une catégorie $\mathcal{A}'_S$ pour la notion évidente d'isomorphisme des courbes de Torelli.

D'autre part, l'image inverse d'une courbe de Torelli de genre g au-dessus d'un espace analytique S par une application holomorphe $f : S' \to S$, est une courbe de Torelli de genre g au-dessus de S'. Ceci découle de l'isomorphisme canonique suivant :

$$\begin{aligned} f^*(R^1 p_*(\underset{\sim}{\mathbb{Z}}_X) &\cong R^1 f'_*(f^* p_* \underset{\sim}{\mathbb{Z}}_X) \\ &\cong R^1 f'_*(p'_*(\underset{\sim}{\mathbb{Z}}_X)) \end{aligned}$$

issu du changement de base $f : S' \to S$, où $f' : S' \underset{S}{\times} X \to X$ et $p' : S' \underset{S}{\times} X \to S'$ sont les applications holomorphes déduites de f et p respectivement par changement de base. Cet isomorphisme est une conséquence du fait que p est topologiquement localement trivial.

Nous pouvons donc définir un foncteur contravariant

$$\mathcal{F}'_g : (\mathrm{An}) \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

de la catégorie des espaces analytiques vers la catégorie des ensembles, en associant à chaque espace analytique S, l'ensemble des classes d'isomorphismes des courbes de Torelli de genre g au-dessus de S.

1.4.2. Définition. — *Le foncteur $\mathcal{F}'_g$ s'appelle le foncteur de Torelli (de genre g).*

1.4.3. R . — Le foncteur de Torelli $\mathcal{F}'_g$ peut être aussi obtenu par une modification du foncteur de Teichmüller $\mathcal{F}_g$. Pour voir cela, soit C une courbe algébrique de genre g. Le groupe de Teichmüller γ_g opère de façon évidente sur le groupe de cohomologie de C, $H^1(C,\mathbb{Z})$ et il laisse d'ailleurs fixe "la matrice intersection" sur ce groupe abélien libre de rang $2g$. Prenons une base dans $H^1(C,\mathbb{Z})$, on trouve donc une représentation

$$\gamma_g \longrightarrow \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$$

où $\mathrm{Sp}(2g;\mathbb{Z}) := \Big(A \in M_{2g}(\mathbb{Z}) / {}^t A \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right) A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big\}$.

Soit maintenant X une courbe de genre g au-dessus d'un espace analytique S et soit $\mathcal{P}(X/S)$ le revêtement de Teichmüller. Soit le changement de groupe structural donné par le produit contracté suivant

$$\mathcal{P}'(X/S) = \mathcal{P}(X/S) \underset{\gamma_g}{\times} \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}).$$

Alors $\mathcal{P}'(X/S)$ est un revêtement principal de S, de groupe $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$. Prenant le fibré associé sur S au revêtement principal $\mathcal{P}'(X/S)$ et à l'opération de γ_g sur le premier groupe de cohomologie des fibres de X/S à coe cients dans $\mathbb{Z}$, on trouve précisément le système local de la cohomologie des fibres de X/S. On voit clairement donc que la donnée d'une structure de Torelli sur X au-dessus de S est équivalente à un choix précis d'une section du revêtement principal $\mathcal{P}'(X/S)$, et qu'une courbe de Torelli de genre g au-dessus de S n'est autre qu'une courbe algébrique X de genre g au-dessus de S, munie d'une section de $\mathcal{P}'(X/S)$.

Notons que cette description d'une courbe de Torelli est due à Grothendieck [Gr], I.

1.4.4. Théorème (Grothendieck [Gr], I)**. —** *Le foncteur contravariant $\mathcal{F}'_g$ est représentable par une variété complexe T'_g de dimension* $3g-3$ *si* $g \geq 1$ *et* 1 *si* $g=1$, *quotient de l'espace de Teichmüller T_g par le noyau δ_g de la représentation $\gamma_g \to$* $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ *opérant librement sur T_g. En particulier T_g est le revêtement universel de T'_g.*

1.4.5. Définition. — *La variété complexe T'_g s'appelle* l'espace (de modules) de Torelli *pour les courbes de genre g. Le groupe γ_g/δ_g s'appelle groupe (modulaire) de Torelli.*

1.4.6. E . — Pour le cas spécial du genre $g=1$ on voit immédiatement que

$$T_1 = T'_1 = H$$

où H est le demi-plan supérieur du plan complexe $\mathbb{C}$. En e et, comme le groupe de cohomologie $H^1(C,\mathbb{Z})$ d'une courbe C de genre 1 s'identifie avec le groupe fondamental $\pi_1(C)$, alors le choix d'une base de topologie sur C est équivalent au choix d'une base du groupe $H^1(C,\mathbb{Z})$. δ_g se réduit donc à l'élément nul et le foncteur de Torelli $\mathcal{F}_1$ s'identifie avec celui de Teichmüller $\mathcal{F}_1$; d'où $T'_1 = T_1 = H$.

2. Hyperbolicité des espaces de Teichmüller et Torelli

L'hyperbolicité de l'espace de Teichmüller est due à Royden [R2]. Il a pu identifier la pseudo-métrique de Kobayashi sur T_g avec la métrique dite de Teichmüller τ_g sur T_g. D'abord nous devons rappeler la définition de τ_g.

2.1. Définition.

1) Pour une application di érentielle $G \to G'$ entre deux surfaces de Riemann G et G', la dilatation de f en un point $z \in G$ est par définition :

$$k_f(z) = \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|}$$

(voir Nag [N], p. 24 pour les notations) . La dilatation de f est

$$k[f] = \sup_{z\in G} k_f(z)\,.$$

2) Une application di érentielle $f : G \to G'$ est dite quasiconforme si f est un homéomorphisme préservant l'orientation et si la dilatation $k[f]$ de f est bornée.

2.2. Définition. — *Étant donné $[P]$ et $[Q] \in T_g$ tels que P et Q sont les courbes de genre g qui les représentent respectivement. La métrique de Teichmüller sur T_g est donnée par*

$$\tau_g([P],[Q]) = \frac{1}{2} \log \inf \left\{ k[f]/f : P \to Q \ \textit{quasiconforme} \right\}.$$

2.3. Théorème (Royden [R2])**. —** *La métrique de Teichmüller τ_g est caractérisée par*

$$\tau_g([P],[Q]) = \inf \rho(a,b)$$

où l'infimum est pris au long de toutes les applications holomorphes $\Phi : \Delta \to T_g$ avec $\Phi(a) = [P]$ et $\Phi(b) = [Q]$. Δ étant le disque unité dans $\mathbb{C}$ et ρ la métrique de Poincaré sur Δ. En particulier, τ_g coïncide avec la pseudo-métrique de Kobayashi sur T_g et par conséquent T_g est hyperbolique complet.

2.4. Corollaire. — *T'_g est aussi hyperbolique complet.*

Démonstration. — T'_g est réalisé comme un quotient de T_g par un groupe qui agit librement sur T_g, donc la projection naturelle $T_g \to T'_g$ est un revêtement non ramifié d'où le résultat. ∎

2.5. E . — Dans le cas du genre $g = 1$, les espaces de Teichmüller et de Torelli coïncident avec le demi-plan supérieur H de $\mathbb{C}$. Donc l'hyperbolicité dans ce cas est évidente.

3. Le morphisme $\Psi_g : \widetilde{D}'_{1,g}(X) \to T'_g$

L'objet de ce paragraphe est la construction d'une application holomorphe définie sur le revêtement universel de l'espace de Douady $D'_{1,g}(X)$ des courbes de genre g plongées dans un espace analytique fixe X, à valeurs dans l'espace de modules de Torelli T'_g des courbes de genre g. Nous montrerons aussi que si X est 2-mesure hyperbolique alors les fibres de cette application sont hyperboliques au sens de Brody (et même d'ailleurs au sens de Kobayashi si $g \geq 2$ et X fortement 2-mesure hyperbolique), ce qui sera essentiel pour conclure que $D'_1(X)$ est hyperbolique au sens de Brody si X est également 2-mesure hyperbolique, ce qui sera l'objet du prochain paragraphe.

Étant donné X un espace analytique, notons par $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$, le revêtement universel de $D'_{1,g}(X)$. Alors

3.1. Théorème. — *Pour tout entier $g \geq 1$, l'universalité de T'_g fournit une application holomorphe naturelle*

$$\Psi_g : \widetilde{D}'_{1,g}(X) \longrightarrow T'_g$$

qui associe à chaque $d \in \widetilde{D}'_{1,g}(X)$ la classe d'isomorphismes de la fibre correspondante à d de la famille au-dessus de $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$.

Démonstration. — Nous allons traiter les cas $g = 1$ et $g > 1$ ensemble. Soit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & D'_{1,g}(X) \times X \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ D'_{1,g}(X) & \end{tikzcd}$$

La famille universelle au-dessus de $D'_{1,g}(X)$. Choisissons un recouvrement de $D'_{1,g}(X)$ par des ouverts contractiles $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$. Alors l'image réciproque par π de chaque voisinage $\mathcal{U}_i$ est isomorphe à un produit au-dessus de $\mathcal{U}_i$, c'est-à-dire que π est un fibré holomorphe globalement trivial sur $\mathcal{U}_i$. Ceci est une conséquence de la proposition 3.1.2 et compte tenu du fait que π est un fibré topologique localement trivial (voir 1.1). Il en résulte que le faisceau $R^1\pi_*(\underset{\sim}{\mathbb{Z}}_{\mathcal{Y}})$ sur $D'_{1,g}(X)$, image directe de $\underset{\sim}{\mathbb{Z}}_{\mathcal{Y}}$, est localement isomorphe au faisceau sur $D'_{1,g}(X)$ des applications constantes sur $D'_{1,g}(X)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^{2g}$ et noté $\underset{\sim}{\mathbb{Z}}^{2g}_{D'_{1,g}(X)}$. Il en résulte aussi l'existence, localement sur $D'_{1,g}(X)$, de sections holomorphes de π. Par conséquent, $\pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$ peut avoir la structure d'une courbe de Torelli de genre g au-dessus de $\mathcal{U}_i$, $\forall i \in I$. Soit $f : \widetilde{D}'_{1,g}(X) \to D'_{1,g}(X)$ le revêtement universel. En e ectuant le changement de base correspondant à f de la courbe $\mathcal{Y}$ au-dessus de $D'_{1,g}(X)$, on obtient le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y}' := \mathcal{Y} \underset{D'_{1,g}(X)}{\times} \widetilde{D}'_{1,g}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D'_{1,g}(X) \times X \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ \widetilde{D}'_{1,g}(X) \arrow[r, "f"] & D'_{1,g}(X) & \end{tikzcd}$$

où π' est la projection.

Comme π est propre et plat, alors π' est aussi propre et plat car ces propriétés sont stables par changement de base. Donc $\mathcal{Y}'$ devient une courbe de genre g au-dessus de $D'_{1,g}(X)$ (sauf pour le cas $g = 1$ qui nécessite une section marquée de π').

D'autre part, le faisceau $R^1\pi_*(\underset{\sim}{\mathbb{C}})$ sur $D'_{1,g}(X)$, où $\underset{\sim}{\mathbb{C}}$ est le faisceau constant sur $D'_{1,g}(X)$, forme un système local complexe sur $D'_{1,g}(X)$. Son image réciproque par le changement de base f est aussi le système local complexe $R^1\pi'_*(\underset{\sim}{\mathbb{C}})$ avec $\underset{\sim}{\mathbb{C}}$ cette fois le faisceau des fonctions constantes sur $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (voir de nouveau le corollaire 1.4 de Grothendieck [Gr], VIII). D'après le corollaire 1.4 de Deligne [De], chap. I, $R^1\pi'_*(\underset{\sim}{\mathbb{C}})$ est donnée par une représentation complexe de dimension finie du groupe fondamental $\pi_1(\widetilde{D}'_{1,g}(X))$ de $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$. Or $\widetilde{D}_{1,g}(X)$ est simplement connexe, par conséquent, $\pi_1(\widetilde{D}'_{1,g}(X))$ est trivial. Donc le système local $R^1\pi'_*(\underset{\sim}{\mathbb{C}})$ est constant *i.e.* isomorphe à l'un des faisceaux constants $\underset{\sim}{\mathbb{C}}^g$ sur $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$. Enfin d'après l'égalité $R^1\pi'_*(\underset{\sim}{\mathbb{C}}) \cong R^1\pi_*(\underset{\sim}{\mathbb{Z}}) \otimes \underset{\sim}{\mathbb{C}}$ (qui découle du fait que pour toute surface de Riemann compacte M, $H^1(M,\mathbb{C}) \cong H^1(M,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$. C'est le théorème de coe cient universel), on en déduit que $R^1\pi'_*(\underset{\sim}{\mathbb{Z}})$ lui-même est isomorphe à l'un des faisceaux constants $\underset{\sim}{\mathbb{Z}}^{2g}$ sur $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$. Le choix d'un isomorphisme de faisceaux sur $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$

$$R^1\pi'_*(\underset{\sim}{\mathbb{Z}}) \cong \underset{\sim}{\mathbb{Z}}^{2g} \tag{1}$$

définit donc une structure de Torelli sur $\mathcal{Y}'$ au-dessus de $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$ (sous-réserve de l'existence d'une section de π pour le cas $g = 1$). D'après la propriété universelle de l'espace de Torelli T'_g, il existe pour tout $g \geq 2$, une application holomorphe unique à isomorphisme près

$$\Psi_g : \widetilde{D}'_{1,g}(X) \longrightarrow T'_g$$

qui, à chaque $d \in \widetilde{D}'_{1,g}(X)$, associe la classe d'isomorphisme de la fibre $\pi'^{-1}(d)$ de π' au-dessus de d appartenant à T'_g.

Revenons maintenant au cas spécial du genre $g = 1$ et considérons le recouvrement $(\widetilde{U}_i)_{i\in I}$ de $\widetilde{D}'_{1,1}(X)$, image inverse du recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de $D'_{1,1}(X)$ par f. Alors $\forall i\in I$, $\pi^{-1}(\widetilde{U}_i)$ porte une structure de Torelli de genre $g = 1$ au-dessus de $\widetilde{U}_i$ d'une façon évidente. Donc il existe pour chaque $i \in I$ une application holomorphe (unique)

$$\Psi_1^i : \widetilde{U}_i \longrightarrow T'_1$$

définie de la même façon que les Ψ_g du cas $g \geq 2$. Pour obtenir une application holomorphe globale sur $\widetilde{D}_{1,1}(X)$, il su t de prouver que $\forall i,j \in I$ on a :

$$\Psi_1^i = \Psi_1^j \text{ sur } \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j \,.$$

Pour cela, soit $i, j \in I$ et notons $\widetilde{U}_{ij} = \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j$, $\widetilde{V}_i = \pi'^{-1}(\widetilde{U}_i)$, $\widetilde{V}_j = \pi'^{-1}(\widetilde{U}_j)$ et $\widetilde{V}_{ij} = \widetilde{V}_i \cap \widetilde{V}_j$. Soient

$$\varepsilon_i : \widetilde{U}_i \longrightarrow \widetilde{V}_i$$
$$\varepsilon_j : \widetilde{U}_j \longrightarrow \widetilde{V}_j$$

deux sections qui définissent $\widetilde{V}_i$ et $\widetilde{V}_j$ comme courbes de genre $g = 1$ au-dessus de $\widetilde{U}_i$ et $\widetilde{U}_j$ respectivement. Alors $\widetilde{V}_{ij}$ est de deux façons di érentes (correspondantes à ε_i et ε_j respectivement) une courbe de Torelli de genre $g = 1$ au-dessus de $\widetilde{U}_{ij}$. Le but est de prouver que ces deux structures sont équivalentes. Soit en e et l'application holomorphe

$$\begin{array}{rcl} \tau_{ij} : \widetilde{V}_{ij} & \longrightarrow & \widetilde{V}_{ij} \\ b & \longmapsto & \text{“}b - \varepsilon_i \circ \pi_{ij}(b) + \varepsilon_j \circ \pi_{ij}(b)\text{”} \end{array}$$

où $\pi_{ij} : \widetilde{V}_{ij} \to \widetilde{U}_{ij}$ est la restriction de π' à $\widetilde{V}_{ij}$. On voit (fibre par fibre) que τ_{ij} est un $\widetilde{U}_{ij}$-automorphisme de $\widetilde{V}_{ij}$ et que sur chaque fibre de π_{ij}, τ_{ij} est une translation, donc en particulier induit l'identité sur les groupes de cohomologie de ces fibres. Il en résulte que τ_{ij} préserve la structure de Torelli de genre $g = 1$ sur $\widetilde{V}_{ij}$ au-dessus de $\widetilde{U}_{ij}$. Par conséquent, τ_{ij} est un automorphisme de $\widetilde{V}_{ij}$ en tant que courbe de Torelli de genre $g = 1$ au-dessus de $\widetilde{U}_{ij}$. Ceci permet de conclure que $\Psi_1^i = \Psi_1^j$ sur $\widetilde{U}_{ij}$ par définition même de Ψ_1^i et Ψ_1^j. En recollant les Ψ_i pour tout $i \in I$, on construit donc une application holomorphe

$$\Psi_1 : \widetilde{D}'_{1,1}(X) \longrightarrow T'_1$$

définies par $\Psi_1 \equiv \Psi_1^i$ sur $\widetilde{U}_i$ pour tout $i \in I$. Ce qui achève la démonstration. ∎

3.2. Proposition. — *Soient X un espace analytique 2-mesure hyperbolique et Ψ_g l'application holomorphe définie par le théorème 3.1. Alors les fibres de Ψ_g sont toutes hyperboliques au sens de Brody.*

Démonstration. — Soient H une fibre quelconque de Ψ_g, $d \in T'_g$ tel que $H = \Psi_g^{-1}(d)$ et C une courbe algébrique de genre g qui représente la classe d'isomorphismes $d \in T'_g$. Soit $\mathcal{Y}_H$ la courbe de genre g au-dessus de H obtenue par le changement de base correspondant au plongement $\varphi_H : H \hookrightarrow \widetilde{D}'_{1,g}(X)$ e ectué à la courbe $\mathcal{Y}$ de genre g au-dessus de $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$. Par définition de Ψ_g on a pour tout $h \in H$ un isomorphisme

$$(\varphi_H^{-1}\pi)^{-1}(h) \cong C$$

où $\varphi_H^{-1}\pi$ est l'application holomorphe de $H \underset{\widetilde{D}'_{1,g}(X)}{\times} \mathcal{Y}$ vers H induite par le changement de base $\varphi_H : H \hookrightarrow \widetilde{D}'_{1,g}(X)$ comme indique le diagramme cartésien suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}_H \cong H \underset{\widetilde{D}'_{1,g}(X)}{\times} \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_H^{-1}\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & \widetilde{D}'_{1,g}(X) \times X \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
H \arrow[r, "\varphi"', "H"] & \widetilde{D}'_{1,g}(X) &
\end{tikzcd}
$$

$\varphi_H^{-1}\pi$, étant propre et plat, définit une famille analytique ayant toutes les fibres isomorphes à la courbe C. Donc d'après le théorème 3.1.1, cette famille est localement triviale. Appliquons enfin la proposition 3.2.1.1 pour conclure que H est hyperbolique au sens de Brody. ∎

3.3. Proposition. — *Supposons que $g \geq 2$ et soit X un espace analytique fortement 2-mesure hyperbolique. Alors les fibres de l'application holomorphe Ψ_g sont hyperboliques au sens de Kobayashi.*

Démonstration. — Soient H une fibre quelconque de Ψ_g et $d \in T'_g$ tel que $H = \Psi_g^{-1}(d)$. De la même façon que dans la démonstration de la proposition 3.2, l'image inverse $\mathcal{Y}_H \to H$ de la courbe $\mathcal{Y}$ de genre g au-dessus de $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$ par le plongement $\mathcal{Y}_H$: $H \hookrightarrow \widetilde{D}'_{1,g}(X)$ constitue une famille analytique localement triviale de courbes de genre g plongées dans X. Comme $g \geq 2$, alors tous les éléments de la famille sont hyperboliques donc en particulier mesure hyperboliques. D'après la proposition 3.2.2.2, H est hyperbolique au sens de Kobayashi. ∎

3.4. R . — Ce résultat reste pour l'instant insu sant pour savoir si $D'_1(X)$ est hyperbolique au sens de Kobayashi même si on suppose que X est lui-même hyperbolique aussi.

4. Le théorème principal

Nous disposons maintenant de tout le matériel pour prouver le théorème principal de ce chapitre.

4.1. Théorème. — *Soit X un espace analytique 2-mesure hyperbolique. Alors $D'_1(X)$ est hyperbolique au sens de Brody.*

Démonstration. — On a

$$D'_1(X) = \coprod_{g \geq 0} D'_{1,g}(X) \ \text{(réunion disjointe)}\,.$$

Donc il su t de montrer que pour tout $g \geq 0$, $D'_{1,g}(X)$ est hyperbolique au sens de Brody. Soit

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_g"'] & D'_{1,g}(X) \times X \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_2"] \\
D'_{1,g}(X) & X
\end{tikzcd} \tag{1}$$

La famille universelle au-dessus de $D'_{1,g}(X)$. Soit $F : \mathcal{Y} \to X$ l'application holomorphe induite par le diagramme (1). Alors F est de rang supérieur ou égal à 2.

1) Si $g = 0$: $D'_{1,0}(X)$ est discret. En e et, dans ce cas π_g est un morphisme propre et plat tel que toutes ses fibres sont des sous-variétés complexes compactes et connexe de dimension 1 de X de genre g=0. Donc elles sont toutes isomorphes au plan projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. D'après le théorème 3.1.1, tout changement de base $S \to D'_{1,0}(X)$ où S est un espace analytique réduit, induit une famille analytique localement triviale au-dessus de S. Supposons que $D'_{1,0}(X)$ est non discret, alors il existe une application holomorphe non-constante $f : \Delta \to D'_{1,0}(X)$ du disque unité Δ de $\mathbb{C}$ vers $D'_{1,0}(X)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la famille $\mathfrak{X}'_0 = (\mathcal{Y}', \pi'_0, \Delta)$, image réciproque de $\mathfrak{X}_0 = (\mathcal{Y}, \pi_0, D'_{1,0}(X))$ par le changement de base $f : \Delta \to D'_{1,0}(X)$, est triviale *i.e.* $\mathcal{Y}'$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \Delta$. Soit $G : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \Delta \to \mathcal{Y}$ l'application holomorphe issue du changement de base f, alors $F \circ G$ est de rang 2. Or d'après la proposition 1.2.2.3, ceci est absurde car X est 2-mesure hyperbolique. D'où $D'_{1,0}(X)$ est discret.

2) Si $g = 1$: $D'_{1,1}(X)$ est aussi discret. En e et, supposons le contraire, alors il existe une application holomorphe non-constante $f : \Delta \to D'_{1,1}(X)$. Puisque $\mathfrak{X} = (\mathcal{Y}, \pi_1, D'_{1,1}(X))$ est localement une courbe de Torelli de genre 1, nous pouvons choisir f de telle façon que la famille $\mathfrak{X}' := (\mathcal{Y}', \pi'_1, \Delta)$, image réciproque de $\mathfrak{X}$ par le changement de base f, est elle-même une courbe de Torelli de genre 1. D'après la construction de la famille universelle au-dessus de l'espace de Torelli T'_1 (voir la remarque 1.2.2 et l'exemple 1.4.6), il existe une application holomorphe surjective $g : \mathbb{C} \times \Delta \to \mathcal{Y}'$. De plus l'application $f^*F : \mathcal{Y}' \to X$ induite de F par le changement de base f est de rang supérieur ou égal à 2, d'où le rang de la composée $f^*F \circ g : \mathbb{C} \times \Delta \to X$ est égal à 2. Or ceci est absurde d'après la proposition 1.2.2.3 car X est 2-mesure hyperbolique. Par conséquent, $D'_{1,1}(X)$ est discret.

3) Si $g \geq 2$: soit pour $g \geq 2$

$$\Psi_g : \widetilde{D}'_{1,g}(X) \longrightarrow T'_g$$

l'application holomorphe définie dans le paragraphe 3. Supposons qu'il existe une application holomorphe

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{D}'_{1,g}(X).$$

Alors le composé $\Psi_g \circ f$ est une application holomorphe de $\mathbb{C}$ à valeurs dans l'espace de Torelli T'_g. Comme ce dernier est hyperbolique d'après le corollaire 2.4 alors $\Psi_g \circ f$ est constante, *i.e.* il existe $d \in T'_g$ tel que $\Psi_g \circ f(z) = d$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, d'où $f(\mathbb{C}) \subset \Psi_g^{-1}(d)$. Or d'après la proposition 3.2, $\Psi_g^{-1}(d)$ est hyperbolique au sens de Brody, ce qui entraîne que f est nécessairement constante et par conséquent $\widetilde{D}'_{1,g}(X)$ est hyperbolique au sens de Brody.

Enfin, comme $\widetilde{D}_{1,g}(X)$ est le revêtement universel de $D'_{1,g}(X)$, on en déduit que $D'_{1,g}(X)$ lui aussi est hyperbolique au sens de Brody. Ce qui achève la démonstration. ■

4.2. Exemple. — Soit S une surface complexe de type général. Il est bien connu que S est mesure hyperbolique (voir par exemple Lang [L] ou Kobayashi [K2]). Donc le théorème 4.1 prouve que $D'_1(S)$ est hyperbolique au sens de Brody.

5. Un autre théorème d'hyperbolicité

Soient X une variété complexe et Y une sous-variété complexe compacte de X. Soient respectivement $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$ et $\mathcal{N}_{Y/X}$ les faisceaux des germes de sections holomorphes des fibrés tangents TX de X, TY de Y et du fibré normal $N_{Y/X}$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow TY \longrightarrow TX|_Y \longrightarrow N_{Y/X} \longrightarrow 0$$

induit la suite exacte suivante de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{T}_Y) \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{T}_X|_Y) \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{N}_{Y/X}) \xrightarrow{\delta_Y} H^1(Y,\mathcal{T}_Y) \longrightarrow \cdots$$

D'autre part, $H^0(Y,\mathcal{N}_{Y/X})$ coïncide avec l'espace tangent de l'espace de Douady $D(X)$ en $[Y]$, où $[Y]$ est le point correspond à Y dans $D(X)$. $H^1(Y,\mathcal{T}_Y)$ est canoniquement isomorphe à l'espace tangent en 0 de la variété des modules locale $(M,0)$ de Y (cf. [Gr], IX, Proposition 2.2).

5.1. Définition. — *On dit que $[Y] \in D(X)$ vérifie la condition (P) si :*

1) l'application δ_Y est injective;

2) la déformation semi-universelle de Y est universelle.

5.2. Lemme. — *(P) est une condition ouverte dans l'espace de Douady $D(X)$, i.e. l'ensemble des points de $D(X)$ qui vérifient la condition (P) est ouvert.*

Démonstration. — La deuxième partie de (P) est ouverte d'après [Bin], Satz 7.1. Soit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & D(X) \times X \arrow[dl] \\ D(X) & \end{tikzcd}$$

la famille universelle au-dessus de $D(X)$. Pour la première partie de (P), soit Y une sous-variété complexe compacte de X et notons $0 := [Y] \in D(X)$ (on adopte la même notation que pour le point correspondant à Y dans la variété de modules locale $(M,0)$ de Y). Soit le morphisme de germes $\varphi_0 : (D(X),0) \longrightarrow (M,0)$ du germe de $D(X)$ en 0 vers la variété de modules locale $(M,0)$ de Y, obtenu d'après l'universalité de $(M,0)$. La di érentielle $T_0\varphi_0$ de φ_0 en 0 n'est autre que δ_Y définie ci-dessus. Comme δ_Y est injective alors φ_0 est un plongement. D'où il existe un voisinage U de 0 dans $D(X)$ tel que pour tout $a \in U$, l'application $\varphi_a : (D(X),a) \longrightarrow (M,a)$ est un plongement. D'après l'ouverture de la propriété universelle (voir [Bin], Satz 7.1), la di érentielle $T_a\varphi_a$ de φ_a en a coïncide avec δ_{Y_a} où Y_a est la fibre de p au-dessus de a. Par conséquent $\delta_{Y_a} : H^0(Y_a,\mathcal{N}_{Y_a/X}) \longrightarrow H^1(Y_a,\mathcal{T}_{Y_a})$ est injective. Ce qui prouve le lemme. ∎

Soit maintenant R le sous-ensemble de l'espace de Douady $D'_{1,g}(X)$ des courbes algébriques Y de genre $g \geq 1$ plongées dans X telles que δ_Y est injective. Puisqu'une déformation semi-universelle d'une courbe algébrique de genre g est universelle, alors tout élément de R vérifie la condition (P) et par conséquent R est un ouvert de $D'_{1,g}(X)$. De plus on a

5.3. Théorème. — *Soit X une variété complexe. Alors l'ouvert R de $D'_{1,g}(X)$ est hyperbolique*

Démonstration. — Soit $\psi_g : \widetilde{D}'_{1,g}(X) \longrightarrow T'_g$ l'application holomorphe définie dans le théorème 3.1. D'après l'injectivité de δ_Y pour tout Y de R, la restriction $\psi_g|_{\widetilde{R}} : \widetilde{R} \longrightarrow T'_g$ est un plongement local où $\widetilde{R}$ est l'image réciproque de R par le revêtement universel $\widetilde{D}'_{1,g}(X) \longrightarrow D'_{1,g}(X)$. Or T'_g est hyperbolique, donc d'après le théorème 1.1.1.3, 1), $\widetilde{R}$ (et par conséquent R) est hyperbolique. ∎

Chapitre 6

L'HYPERBOLICITÉ SUR L'ESPACE DE DOUADY DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES PLONGÉES

Dans ce chapitre nous allons reprendre les techniques utilisées pour établir le théorème principal du chapitre précédent (théorème 5.4.1) dans l'étude de l'espace de Douady des variétés abéliennes plongées. Étant donné X un espace analytique projectif (c'est-à-dire plongé dans un certain $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$). Par définition l'espace de Douady des variétés abéliennes de dimension m de X est l'ensemble des sous-variétés complexes compactes et connexes de X de dimension d qui sont des tores complexes *i.e.* des variétés abéliennes puisque X est projectif. On le notera $D_d^T(X)$. De la même façon que dans la section 3 du chapitre 2 et grâce à un théorème de Mumford ([M1], proposition 6.16), on voit que $D_d^T(X)$ est un sous-espace analytique ouvert de l'espace de Douady $D(X)$ de X.

1. Familles de variétés abéliennes polarisées

Notons par V un espace vectoriel complexe de dimension d et Λ un réseau de V. Par définition Λ est un sous-groupe discret de rang $2d$ de V. Le réseau Λ agit sur V par addition.

Le quotient
$$X = V/\Lambda$$
est appelé *un tore complexe*. C'est une variété complexe connexe. De plus X est compact, puisque Λ est un sous-groupe de V de rang maximum et donc X est l'image d'un sous-ensemble borné de V. Un tore complexe est un groupe de Lie complexe et inversement tout groupe de Lie complexe connexe et compact est un tore complexe.

Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe de dimension d et L un fibré en droites sur X et H sa première classe de Chern. H est une forme hermitienne sur V telle que la forme alternée $E = \operatorname{Im} H$ est à valeurs entières sur le réseau Λ. D'après le théorème de diviseur élémentaire [Bourbaki, Alg. IX, 5.1, th. 1], il existe une base $\lambda_1,\dots,\lambda_d,\mu_1,\dots,\mu_d$ de Λ pour laquelle E est donnée par la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$
où $D = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_d)$ avec d_ν des entiers ≥ 0 vérifiant $d_\nu/d_{\nu+1}$ pour $\nu = 1,\dots,d-1$. Les entiers $d_1,\dots,d_d$ sont déterminés d'une façon unique par E et Λ et donc par L.

La matrice D ou même aussi le vecteur $(d_1,\dots,d_d)$ sont appelés : *le type* du fibré en droites L et la base $\lambda_1,\dots,\lambda_d,\mu_1,\dots,\mu_d$ est dite *base symplectique (ou canonique)* de Λ pour L (ou H ou E respectivement).

1.1. Définition 1. — *Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe. Une* polarisation *sur X est par définition la première classe de Chern $H = c_1(L)$ d'un fibré en droites L sur X défini* *positif. Par abus de notation, on considère parfois le fibré en droites lui-même L comme polarisation. Le type de L est appelé* le type de la polarisation. *Une polarisation est dite* principale *si elle est de type* $(1,\dots,1)$.

Une variété abélienne *est par définition un tore complexe X admettant une polarisation $H = c_1(L)$.*

La paire (X,H) est appelée variété abélienne polarisée. *On la note aussi (X,L) au lieu de (X,H). Une variété abélienne polarisée est projective, c'est le théorème de Lifschetz.*

Un homomorphisme de variétés abéliennes polarisées $f : (X,M) \to (X,L)$ *est un homomorphisme de tores complexes $f : Y \to X$ tel que $f^* c_1(L) = c_1(M)$. Cette dernière condition signifie que $f^* L$ et M sont analytiquement équivalents i.e. il existe un espace complexe analytique connexe T, un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur $X \times T$ et des points $t_1, t_2 \in T$ tel que*

$$\mathcal{L}_{|X\times\{t_1\}} \simeq f^* L \text{ et } \mathcal{L}_{|X\times\{t_2\}} \simeq M\,.$$

1.2. E . — Soit $X = \mathbb{C}/\Lambda$ une courbe elliptique. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\{1,z\}$ est une base de Λ où z est un nombre complexe vérifiant $\operatorname{Im} z > 0$. On définit

$$\begin{array}{rcc} H : \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (v,w) & \longmapsto & \dfrac{v\cdot\overline{w}}{\operatorname{Im} z}\,. \end{array}$$

Il est facile de vérifier que H est une forme hermitienne définie positive avec $\operatorname{Im} H(\Lambda,L) \subseteq \mathbb{Z}$. Donc H est la première classe de Chern d'un fibré en droites L sur X. Par conséquent, chaque courbe elliptique est une variété abélienne polarisée. Cependant, ce n'est pas vrai que tout tore complexe de dimension ≥ 2 est une variété abélienne.

1.3. Définition. — *Une* variété abélienne de type D à base symplectique *est par définition le triplet $\big(X,H,(\lambda_1,\dots,\lambda_d,\mu_1,\dots,\mu_d)\big)$ avec $X = V/\Lambda$ une variété abélienne, H une polarisation de type D sur X et $(\lambda_1,\dots,\lambda_d,\mu_1,\dots,\mu_d)$ une base symplectique de Λ pour H. d étant la dimension complexe de X.*

1.4. Définition.

i) Soit S un espace analytique. Le triplet (X,π,S), où $\pi : X \to S$ est un groupe de Lie complexe relatif sur S, est appelé famille de variétés abéliennes polarisées *de dimension d si π est lisse et propre à fibres connexes de dimension d et il existe un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur X tel que les restrictions $L_s := \mathcal{L}_{|X_s}$ aux fibres de π sont toutes définies positives. Dans ce cas, $\mathcal{L}$ s'appelle* polarisation *de la famille.*

ii) Si de plus les fibres de π ont même type D et même base symplectique la famille s'appelle famille (analytique) de variétés abéliennes polarisées de dimension d, de type D et à base symplectique.

Un isomorphisme entre deux telles familles se définit de façon évidente. Le théorème suivant de Grothendieck (cf. Mumford [M1], théorème 6.14) donne une condition su sante pour avoir des familles de variétés abéliennes polarisées :

1.5. Théorème. — *Soient S un espace analytique connexe et $\pi : X \to S$ un morphisme projectif et lisse d'espaces analytiques. S'il existe une section $\varepsilon : S \to X$ holomorphe de π et un point $s \in S$ tel que la fibre X_s de π au-dessus de s soit une variété abélienne avec identité $\varepsilon(s)$. Alors (X,π,S) est une famille de variétés abéliennes polarisées.*

1.6. R . — Pour une variété abélienne polarisée X, fixer une base symplectique de type D revient à choisir convenablement une base du groupe de cohomologie $H^1(X,\mathbb{Z})$ puisque ce dernier coïncide avec le groupe fondamental $\pi_1(X)$. Donc une famille de variétés abéliennes polarisées de dimension d de type D et à base symplectique $(\mathcal{U},\pi,S)$ donne naissance à un isomorphisme de faisceaux sur S :

$$R^1\pi_*(\underset{\sim}{\mathbb{Z}}) \simeq \underset{\sim}{\mathbb{Z}}^{2d}$$

qui détermine complètement le type D et la base symplectique.

2. Espace de modules de Siegel

2.1. Définition. — *Soit $M_d(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes. L'ensemble $S_d = \left\{Z \in M_d(\mathbb{C}) / \ {}^tZ = Z \text{ et } \operatorname{Im} Z > 0\right\}$ est appelé* le demi-espace supérieur de Siegel *ou tout simplement* l'espace de Siegel. *C'est une sous-variété ouverte de dimension $\frac{1}{2}d(d+1)$ de l'espace vectoriel des matrices symétriques dans $M_d(\mathbb{C})$. Pour $d = 1$ l'espace de Siegel coïncide avec le demi-plan supérieur dans $\mathbb{C}$ et s'appelle le* demi-plan supérieur de Siegel.

Chaque variété abélienne polarisée de type D avec une base symplectique détermine un point $Z \in S_d$. En e et, soit $X = V/\Lambda$ une variété abélienne de dimension d et H une forme hermitienne sur V définissant une polarisation de type $D = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_d)$. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_d,\mu_1,\dots,\mu_d)$ une base symplectique de Λ pour H. Par définition, la forme alternée $\operatorname{Im} H$ est donnée par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{smallmatrix}\right)$ pour cette base. Posons $e_\nu = \frac{1}{d_\nu}\mu_\nu$,

$\nu = 1,\ldots,d$. Alors $(e_1,\ldots,e_d)$ est une $\mathbb{C}$-base de V pour laquelle la matrice période de X est de la forme $\pi = (Z,D)$.

Z est une matrice de $M_g(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^tZ = Z$ et $\operatorname{Im} Z > 0$ et $(\operatorname{Im} Z)^{-1}$ est la matrice de H par la base $(e_1,\ldots,e_d)$. C'est une conséquence des conditions de Riemann pour les variétés abéliennes $Z \in S_d$. Z détermine complètement X.

Inversement, étant donné un type D, chaque $Z \in S_d$ détermine une variété abélienne polarisée avec une base symplectique. Pour voir cela, remarquons que $\Lambda_Z := (Z,D)\mathbb{Z}^{2d}$ est un réseau de $V = \mathbb{C}^d$. Le quotient

$$X_Z = \mathbb{C}^d/\Lambda_Z$$

est un tore complexe. Définissons une forme hermitienne H_Z par la matrice $(\operatorname{Im} Z)^{-1}$ pour la base canonique de $\mathbb{C}^d$. Alors H_Z est une polarisation de type D sur X_Z. D'abord c'est une forme définie positive. En plus, considérons l'isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire $\mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{C}^d$ donné par la matrice (Z,D). Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_d,\mu_1,\ldots,\mu_d$ les images de la base canonique de $\mathbb{R}^{2d}$ dans $\mathbb{C}^d$. Ce sont les colonnes de la matrice (Z,D) pour la base canonique de $\mathbb{C}^d$. Donc $(\lambda_1,\ldots,\lambda_d,\mu_1,\ldots,\mu_d)$ est une base de Λ_Z.

Pour cette base, $\operatorname{Im} H_{Z|\Lambda_Z\times\Lambda_Z}$ est donné par la matrice

$$\operatorname{Im}\left({}^t(Z,D)(\operatorname{Im} Z)^{-1}(\overline{Z,D})\right) = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

donc X_Z est une variété abélienne de type D à base symplectique.

Par conséquent, l'application $Z \to \left(X_Z,H_Z,\{\text{colonnes de } (Z,D)\}\right)$ donne une bijection entre l'espace de Siegel S_d et l'ensemble des (classes d'isomorphismes de) variétés abéliennes polarisées de dimension d, de type D et à base symplectique.

Analytiquement, on a le théorème suivant (voir [L-B]).

2.2. Théorème. — *Soit $D = \operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_d)$ un type. Soit le réseau*

$$\Lambda_D = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\mathbb{Z}^{2d}$$

dans $\mathbb{R}^{2d}$. Posons $\mathfrak{X}_D := (\mathbb{C}^d \times S_d)/\Lambda_D$ (c'est une variété complexe). Soit $\pi : \mathfrak{X}_D \to S_d$ la projection naturelle. Alors il existe un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur $\mathfrak{X}_D$ et des applications holomorphes $\lambda_\nu,\mu_\nu : S_d \to \mathbb{C}^d$, $\nu = 1,\ldots,d$, pour lesquelles la famille $(\mathfrak{X}_D,\pi,S_d,\mathcal{L}, (\lambda_1,\ldots,\lambda_d,\mu_1,\ldots,\mu_d))$ est une famille analytique universelle de variétés abéliennes polarisées de type D à base symplectique.

3. L'hyperbolicité sur $D_d^T(X)$

Soient X un espace analytique projectif et $\widetilde{D}_d^T(X)$ le revêtement universel de $D_d^T(X)$. Alors :

3.1. Proposition.

i) L'universalité de S_d fournit une application holomorphe naturelle

$$\varphi_d : \widetilde{D}_d^T(X) \longrightarrow S_d$$

qui à chaque $Z \in \widetilde{D}_d^T(X)$ associe la classe d'isomorphismes de la variété abélienne correspondante à Z de la famille au-dessus de $\widetilde{D}_d^T(X)$.

Démonstration.

i) Soit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & D_d^T(X) \times X \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ D_d^T(X) & \end{tikzcd}$$

la famille universelle de $D_d^T(X)$. On peut trouver un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de $D_d^T(X)$ pour lequel il existe pour tout i :

– un isomorphisme de faisceaux $h_i : R^1(\pi_{|\pi^{-1}(U_i)})_*(\underset{\sim}{\mathbb{Z}}) \simeq \underset{\sim}{\mathbb{Z}}^{2d}$ sur U_i.

– une section holomorphe $\varepsilon_i : U_i \to \mathcal{Y}$ holomorphe de π.

Compte tenu du fait que X est projectif et de la remarque 1.6, on en déduit que la famille $\mathfrak{X}_i = (\pi^{-1}(U_i), \pi_{|\pi^{-1}(U_i)}, U_i)$ est une famille de variétés abéliennes polarisées de type D_i et à base symplectique. Le type D_i et la base symplectique sont complètement déterminés par le choix de l'isomorphisme h_i.

E ectuons le changement de base $p : \widetilde{D}_d^T(X) \to D_d^T(X)$ à la famille universelle au-dessus de $D_d^T(X)$. De la même façon que dans la démonstration du théorème 5.3.1, on obtient un isomorphisme de faisceaux sur $\widetilde{D}_d^T(X)$

$$R^1\pi'_*(\underset{\sim}{\mathbb{Z}'}) \simeq \underset{\sim}{\mathbb{Z}}^{2d} \tag{1}$$

où $\pi' : \widetilde{D}_d^T(X) \underset{D_d^T(X)}{\times} \mathcal{Y} \to \widetilde{D}_d^T(X)$ est la projection naturelle. Ceci permet de conclure que les familles images réciproques des $\mathfrak{X}_i$ par p ont même type D et même base symplectique, et par universalité de l'espace de modules de Siegel S_d, il existe des applications holomorphes

$$\varphi_d^i : p^{-1}(\mathcal{U}_i) \longrightarrow S_d\,,\ \forall i \in I\,,$$

qui se recollent de la même manière que dans la démonstration du théorème 5.3.1 et donnent naissance à une application holomorphe

$$\varphi_d : \widetilde{D}_d^T(X) \longrightarrow S_d \,.$$

En e et, soient $i, j \in I$ et considérons les familles de variétés abéliennes polarisées de type D et à base symplectique respectivement au-dessus de $p^{-1}(U_i)$ et $p^{-1}(U_j)$. Elles induisent deux structures de familles de variétés abéliennes de type D et à base symplectique (ceux-ci sont déterminés par l'isomorphisme (1)) au-dessus de $p^{-1}(U_i) \cap p^{-1}(U_j)$. Or ces deux structures sont équivalentes car l'application holomorphe de $\pi^{-1}(p^{-1}(U_i) \cap p^{-1}(U_j))$ sur lui-même est définie sur chaque fibre par la translation qui transforme le point marqué pour la premières structure en le point marqué pour la deuxième, est un $(p^{-1}(U_i) \cap p^{-1}(U_j))$-isomorphisme qui induit l'identité sur les groupes de cohomologie et donc conserve le type D et la base symplectique. Ce qui implique que $\varphi_d^i = \varphi_d^j$ sur $p^{-1}(U_i) \cap p^{-1}(U_j)$ et ainsi s'achève la démonstration. ∎

3.2. R . — En prenant le cas spécial $d = 1$ dans la proposition 3.1, nous retrouvons l'application $\Psi_1 : \widetilde{D}'_{1,1}(X) \to S_1 = H$ du théorème 5.3.1. Dans ce cas, l'hypothèse de projectivité sur X est superflue. En e et, le morphisme $\pi : \mathcal{Y} \to D'_{1,1}(X)$ de la famille universelle de $D'_{1,1}(X)$ est localement projectif. Pour voir cela, soit S un voisinage d'un point d de $D'_{1,1}(X)$ pour lequel, il existe une section holomorphe $\varepsilon : S \to \mathcal{Y}$. Comme $\pi_{|S} : \pi^{-1}(S) \subset \mathcal{Y} \to S$ est propre, ε est une immersion fermée. Elle définit donc un isomorphisme de S dans un sous-espace analytique A de $\mathcal{Y}$. Soit I l'idéal sur X qui définit A. Alors I est un faisceau inversible (voir Mumford [M2]). En plus $I^{\otimes -n}$ est très ample relativement à S (cf. Grothendieck [Gr], VIII, corollaire 2.2) pour tout $n \geq 3$ et par conséquent, I est relativement ample pour S et $\pi_{|S}$ est donc projectif. ∎

3.3. Théorème. — *Soit X un espace analytique projectif de dimension n. Supposons que X est $(d+1)$-mesure hyperbolique, $1 \leq d \leq n-1$. Alors $D_d^T(X)$ est discret.*

Démonstration. — Soit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & D_d^T(X) \times X \arrow[d, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ D_d^T(X) & X \end{tikzcd} \qquad (1)$$

la famille universelle au-dessus de $D_d^T(X)$. Soit $F : \mathcal{Y} \to X$ l'application holomorphe induite par le diagramme (1). Il est clair que F est de rang au moins égal à $d+1$. Supposons que $D_d^T(X)$ est non-discret, alors il existe une application holomorphe non-constante $f : \Delta \to D_d^T(X)$ du disque unité Δ de $\mathbb{C}$ vers $D_d^T(X)$. Puisque la famille $\mathfrak{X} := (\mathcal{Y}, \pi, D_d^T(X))$

est localement une famille de variétés abéliennes polarisées de type D à base symplectique (voir la démonstration de la proposition 3.1), nous pouvons choisir f de telle façon que la famille $\mathfrak{X}' := (\mathcal{Y}', \pi', \Delta)$, image réciproque de $\mathfrak{X}$ par le changement de base f, est elle-même une famille de variétés abéliennes polarisées de type D à base symplectique. D'après la construction de la famille universelle au-dessus de l'espace de Siegel S_d (voir le théorème 2.2), il existe une application holomorphe surjective $G : \mathbb{C}^d \times \Delta \to \mathcal{Y}'$. De plus, l'application $f^*F : \mathcal{Y}' \to X$ induite de F par le changement de base f est de rang supérieur ou égal à $d+1$, d'où le rang de la composée $f^*F \circ G$ est égal à $d+1$. Or ceci est absurde car X est $(d+1)$-mesure hyperbolique. Par conséquent, $D_d^T(X)$ est discret. ■

Supposons maintenant que X est une variété projective non singulière. Soit R le sous-ensemble de $D_d^T(X)$ des variétés abéliennes Y plongées dans X telles que le morphisme δ_Y défini dans 5.5 est injectif. Puisque toute déformation semi-universelle d'un tore complexe est universelle donc chaque élément de R vérifie la condition (P) définie dans 5.5.1. Par conséquent, R est un ouvert de $D_d^T(X)$ d'après le lemme 5.5.2.

3.4. Théorème. — *Soit X une variété projective non singulière. Alors l'ouvert R de $D_d^T(X)$ est hyperbolique.*

Démonstration. — Soit $\varphi_d : \widetilde{D}_d^T(X) \to S_d$ l'application holomorphe définie dans la proposition 3.1. Notons $\widetilde{R}$ l'image réciproque de R par le revêtement universel $\widetilde{D}_d^T(X) \to D_d^T(X)$. D'après l'injectivité de δ_Y pour tout Y de R, l'application $\varphi_d|_{\widetilde{R}} : \widetilde{R} \to S_d$ est un plongement local. Or S_d est hyperbolique, donc d'après le théorème 1.1.1.3, 1), $\widetilde{R}$ (et par conséquent R) est aussi hyperbolique. ■

Bibliographie

[B] B D. — *Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes de dimension finie*, Séminaire F. Norguet, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag **482** ( ), 1–158.

[Be] B L. — *Spaces of Riemann surfaces*, Proc. Int. Cong. 1958, Cambridge, .

[Bin] B J. — *O enheit der Versalität in der analytischen Geometrie*, Math. Z **173** ( ), 241–281.

[Br] B R. — *Compact manifolds and hyperbolicity*, Trans. Amer. Math. Soc. **235** ( ), 213–217.

[C1] C H. — *Espaces fibrés analytiques*, Symp. Int. Topol. Algebraica Mexico ( ), 97–121.

[C2] C H. — *Quotients of complex analytic spaces*, Contributions to function theory (Internat. Coloq, Bombay, 1960), Tata institute of fundamental research Bombay ( ), 1–15.

[De] D P. — *Équations di érentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag **163** ( ), .

[D] D A. — *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **16** (1) ( ), 1–95.

[E] E D. — *Intrinsic measures on complex manifolds and holomorphic mappings*, Mem. Amer. Math. Soc. **96** ( ), .

[Fi] F G. — *Complex Analytic Geometry*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag **538** ( ), .

[Fo] F J. — *Algebraic families on an algebraic surface*, Amer. J. Math. **90** ( ), 511–521.

[Fu] F A. — *Projectivity of the space of divisors on a normal compact-complex space*, Pub. RIMS Kyoto Univ. **18** ( ), 1163–1173.

[G-W] G I., W H. — *Some remarks on the intrinsic measures of Eisenman*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** ( ), 625–660.

[G-F] G H., F G. — *Lokale-triviale familien kompacter komplexer mannigfaltigkeiten*, Nach. Akad. Wiss. Götting. Math.-Phys. K1, **II** ( ), 89–94.

[G-H] G P., H J. — *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, New York, .

[Gr] G . — *Techniques de construction en géométrie analytique*, Séminaire Cartan, 13ème année, / .

[Hu] H J. — *Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller*, Mem. Amer. Math. Soc. **166** ( ), .

[K1] K S. — *Hyperbolic manifolds and holomorphic mapping*, Pure and appl. Math., 2, Dekker, New York, .

[K2] K S. — *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** ( ), 357–416.

[K-O] K S., O T. — *Mappings into compact complex manifolds with negative first Chern class*, J. Math. Soc. Japan **23** (1) ( ), 137–148.

[K-S] K K., S C. — *On deformations of complex analytic structures*, Ann. Math. **67** ( ), 328–460.

[L] L S. — *Introduction to complex hyperbolic spaces*, Springer-Verlag, New York, .

[L-B] L H., B C . — *Complex abelian varieties*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, .

[Ma] M A. — *Picard bundles*, Illinois J. Math. **5** ( ), 550–564.

[M1] M D. — *Geometric invariant theory*, Springer Verlag, .

[M2] M D., S K. — *Introduction to the theory of moduli*, Proceeding of the 5th nordic summer-school in Math. Oslo ( ), 171–222.

[N] N S. — *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*, John Wiley & sons, .

[Na] N R. — *Introduction to the theory of analytic spaces*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag **25** ( ), .

[P] P G. — *Théorème de Douady au-dessus de S*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Pisa, Sci. Fis. Mat., III **23** ( ), 451–459.

[R1] R H. — *Remarks on the Kobayashi metric*, Several complex variables, II (Proc. int. conf. univ. of Mariland, College Park, Md, 1970), Lecture Notes in Math. Springer-Verlag **185** ( ), 125–137.

[R2] R H. — *Automorphisms and isometries on Teichmüller spaces*, Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stony Brook, N.Y. 1969), Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press. Princeton N.J. **66** ( ), 369–383.

[S] S N. — *The topology of fibre bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, .

[U] U T. — *The hyperbolicity of complex analytic spaces*, Bull. Aich. Univ. of Education (Natural Science) **31** ( ), 65–75.

[W] W A. — *Modules des surfaces de Riemann*, Séminaire Bourbaki **168** ( ), .

[Wh] W H. — *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley Publishing company, .

[Wo] W B. — *On the automorphism group of compact measure hyperbolic manifolds and complex analytic bundles with compact measure hyperbolic fibres*, Proc. Amer. Math. Soc. **62** (1) ( ), 54–56.

[Y] Y S. — *Intrinsic measures of compact complex manifolds*, Math. Ann. **212** ( ), 351–358.

– ◊ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

e-mail : maarouf@fourier.ujf-grenoble.fr

(29 mai 1996)