Estimations spectrales asymptotiques en géométrie hermitienne

Laurent LAENG

Version définitive - 1er décembre 2002

Jean-Pierre Demailly m'a constamment soutenu,
qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je tiens à remercier les membres du jury,
en particulier les rapporteurs, pour leur présence aujourd'hui.

À mes parents, à mon frère.

À Alexis, Christophe, Dan, Erwan,
Marie-Rose et sa famille, Romain, Seden et Thierry.

Table des matières

Introduction

Le sujet de cette thèse est l'étude asymptotique (existence et estimation en nombre) des section propres d'une suite de laplaciens antiholomorphes. Elle s'inspire principalement des travaux de Jean-Pierre Demailly concernant les inégalités de Morse holomorphes.

L'étude qui suit a été divisée en deux parties : une première partie établit des formules de type Bochner-Kodaira-Nakano, tandis que la deuxième partie s'attache aux estimations spectrales proprement dites.

Formules de type Bochner-Kodaira-Nakano

Une formule de type Bochner-Kodaira-Nakano relie les laplaciens holomorphe, antiholomorphe et la courbure associés à un fibré holomorphe au-dessus d'une variété complexe. Si la variété est kählérienne, cette formule prend la forme suivante : $\Delta'' = \Delta' + [i\Theta,\Lambda]$. L'intérêt de ce type de formule est qu'il exprime le laplacien antiholomorphe comme somme d'un opérateur positif et de termes de courbure. Cela permet par exemple, sous des hypothèses de courbure positive, de montrer qu'en bidegré convenable, les sections holomorphes du fibré sont nulles. On obtient ainsi des théorèmes d'annulation.

Dans le cas où la variété n'est qu'hermitienne (i.e. la métrique hermitienne ω ne vérifie pas $d\omega = 0$, ω étant vue comme une 2-forme réelle), J.-P. Demailly a montré (dans [Dem83]) qu'on avait encore une formule analogue, moyennant quelques termes d'erreurs.

Nous aurons besoin dans l'étude spectrale asymptotique de la deuxième partie d'une formule de type Bochner-Kodaira-Nakano pour un fibré C^∞ (et non plus holomorphe) au-dessus d'une variété hermitienne. C'est l'objet du chapitre 2, qui reprend la démonstration de J.-P. Demailly en l'adaptant au cas C^∞. Nous aurions pu renvoyer le lecteur à l'article initial [Dem83], la preuve s'adaptant sans difficulté, mais nous avons préféré reproduire la démonstration, puisque cette formule nous servira en deuxième partie.

Les chapitres 1 et 3 établissent aussi des formules de type Bochner-Kodaira-Nakano, au-dessus de variétés respectivement presque kählérienne et presque complexe. Ces formules ne servent pas pour la suite, aussi on pourra s'étonner de les voir figurer ici. C'est pourquoi il me faut mentionner qu'au début de cette thèse, je m'intéressais à des résultats de plongement asymptotique d'une variété presque kählérienne dans des espaces projectifs. On sait qu'une variété compacte complexe munie d'une (1,1)-forme entière strictement positive se plonge dans un espace projectif. C'est le théorème de Kodaira. Il est alors naturel, pour une variété presque kählérienne compacte dont la forme symplectique est entière, de se demander si on peut la plonger asymptotiquement, de façon la plus holomorphe possible, dans des espaces projectifs.

Pour construire ces plongements, mimant la démonstration dans le cas complexe, il est naturel de considérer les sections des puissances tensorielles d'un fibré en droites de courbure la forme symplectique de la variété. Les sections candidates à produire un plongement sont celles qui sont les plus proches d'être holomorphes, par exemple une base des sections propres du laplacien antiholomorphe pour de petites valeurs propres tendant asymptotiquement vers zéro. Pour produire de telles sections et obtenir des estimées a priori, nous avons été amenés à établir une formule de type Bochner-Kodaira-Nakano. Nous nous sommes cependant heurtés ensuite à certaines difficultés techniques, et entre-temps, B. Shiffman et S. Zelditch ont réussi à démontrer les résultats de plongement asymptotique par des méthodes d'opérateurs de Fourier intégraux (nous renvoyons à leur article [SZ02], paru en 2002). Cependant cette formule nous a semblé intéressante en soi, et c'est pourquoi nous l'avons reproduite.

Quant à la troisième formule, établie au chapitre 3, c'est dans un simple souci de généralisation que nous l'avons établie. Elle contient en effet les deux formules précédentes comme cas particuliers, et s'énonce comme suit.

Théorème 0.1. *Si (X,J) est une variété presque complexe munie d'une métrique riemannienne g J-invariante, et si $(E,h_E,D_E) \to X$ est un fibré hermitien C^∞, alors :*

1) *$\Delta'_\tau := \left[D'_E + \tau \,, \delta'_E + \tau^*\right]$ est un opérateur positif formellement autoadjoint de même partie principale que Δ', où nous avons noté $\tau = [\Lambda \,, d'\omega]$.*
2) *Notant $T_\omega = \left[\Lambda \,, \left[\Lambda \,, -\frac{i}{2} d''d'\omega\right]\right] - \left[d'\omega, (d'\omega)^*\right]$ et $T_{\mathcal{N}} = i\left[\Lambda \,, [\theta'_E, \theta''_E]\right]$, nous avons*

$$\Delta''_E = \Delta'_\tau + \left[i\theta^{(1,1)}_{(E,D_E)} \,, \Lambda\right] + T_\omega + T_{\mathcal{N}} \,,$$

où T_ω et $T_{\mathcal{N}}$ sont des opérateurs scalaires d'ordre 0.

Signalons enfin que peu de temps avant la rédaction de cette thèse, nous avons appris que S.K. Donaldson avait déjà mentionné la formule de type Bochner-Kodaira-Nakano pour une variété presque kählérienne dans un article datant de 1989 ([Don89]). Nous l'ignorions bien sûr. Nous laissons cependant tout de même dans cette thèse la formule et sa démonstration, parce que nous pensons que la démonstration élémentaire que nous donnons pourra intéresser ceux qui souhaitent se familiariser avec la géométrie symplectique et le cas non intégrable. Ceux-ci pourront aussi consulter avec intérêt la discussion des dernières pages de [Don89], intéressante à lire rétrospectivement quand on sait ensuite les travaux remarquables que S.K. Donaldson a établis dans [Don96].

Estimations spectrales asymptotiques

Commençons par rappeler le cadre classique des inégalités de Morse, tel que développé par J.-P. Demailly dans [Dem85]. Considérons une variété analytique complexe compacte X de dimension n, L un fibré vectoriel holomorphe en droites et E un fibré holomorphe hermitien de rang r au-dessus de X. Notons $\alpha = \frac{i}{2\pi} c(E)$ la forme de Chern du fibré L. Les inégalités de Morse holomorphes bornent la dimension des espaces de cohomologie $H^q(X, L^k \otimes E)$ en fonction d'invariants intégraux de la courbure de L. Plus précisément, si $X(\alpha,q)$ désigne l'ouvert des points $x \in X$ en lesquels $\alpha(x)$ a exactement q valeurs propres strictement négatives et $n-q$ valeurs propres strictement positives, et si nous posons $X(\alpha, \leq q) = X(\alpha,0) \cup \ldots \cup X(\alpha,q)$, nous avons alors

Théorème (J.-P. Demailly, 1985).

a) Inégalités de Morse :

$$\dim H^q(X,L^k \otimes E) \;\leq\; \frac{k^n}{n!} \int_{X(\alpha,\leq q)} (-1)^q \alpha^n + \mathrm{o}(k^n)\,,$$

b) Inégalités de Morse fortes :

$$\sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \dim H^j(X,L^k \otimes E) \;\leq\; \frac{k^n}{n!} \int_{X(\alpha,\leq q)} (-1)^q \alpha^n + \mathrm{o}(k^n)\,.$$

Le point *a*) est une conséquence directe du point *b*). Ces inégalités ont de nombreuses applications. En particulier, elles ont permis à J.-P. Demailly de généraliser un résultat de Y.T. Siu donnant un critère analytique suffisant pour qu'une variété soit de Moishezon, que nous reformulons de la manière suivante :

Théorème (J.-P. Demailly, Y.T. Siu, 1985). Soit X une variété compacte complexe de dimension n, et α une (1,1)-forme réelle entière. Si α vérifie l'une des conditions suivantes :

a) α est partout semi-positive et définie positive en au moins un point de X (condition énoncée par Y.T. Siu),
b) $\int_{X(\alpha,\leq 1)} \alpha^n > 0$ (condition énoncée par J.-P. Demailly),

alors X est de Moishezon. En particulier, il existe un courant T fermé de bidegré (1,1), strictement positif (i.e. minoré par une (1,1)-forme continue hermitienne strictement positive) tel que $\{T\} \in H^2(X,\mathbb{Z})$.

Pour démontrer ce théorème (condition b)), J.-P. Demailly a en fait montré qu'on avait l'estimation suivante, conséquence directe des inégalités de Morse fortes :

$$\dim H^0(X,L^k) \;\geq\; \frac{k^n}{n!} \int_{X(\alpha,\leq 1)} \alpha^n + \mathrm{o}(k^n)\,,$$

où L est un fibré holomorphe en droites au-dessus de X de courbure $-2i\pi\alpha$. L'hypothèse b) implique donc que le nombre de sections du fibré L^k (qui a pour courbure $-2i\pi k\alpha$) croît au moins en k^n, ce qui entraîne (voir [Dem85]) que la dimension algébrique de X est n, autrement dit que X est de Moishezon.

Nous avons ici le point de départ de notre travail. Supposons que la variété complexe compacte X soit munie d'une (1,1)-forme réelle α, pas forcément entière, qui vérifie $\int_{X(\alpha,\leq 1)} \alpha^n > 0$. Il n'y a pas de fibré dont α soit la forme de courbure. Cependant, en utilisant le lemme de Kronecker (qui est une conséquence facile du principe des tiroirs de Dirichlet), nous pouvons approcher, pour une infinité de k (nous écrirons $k \in S$, où S est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$) $k\alpha$ dans $H^2(X,\mathbb{R})$ par des formes entières α_k. À ces formes sont donc associés (voir appendice C) des fibrés hermitiens L_k de classe C^∞ ayant pour forme de courbure $-2i\pi\alpha_k$.

Sur ces fibrés, munis de connexions hermitiennes D_k, nous pouvons considérer les laplaciens antiholomorphes Δ''_k. Ils n'admettent peut-être pas de sections propres pour la valeur propre 0 (puisque $\bar{\partial}_k^2 \neq 0$), mais nous montrons qu'ils admettent, une fois renormalisés par $1/k$, beaucoup de sections propres associées à de petites valeurs propres. C'est ce qu'exprime notre résultat principal, qui s'énonce comme suit :

Théorème 0.2. *Soit X une variété complexe compacte et α une (1,1)-forme réelle fermée, non nécessairement entière. Il existe une suite (indexée par un sous-ensemble infini S de $\mathbb{N}$) de fibrés hermitiens $(L_k,D_k)_{k\in S}$ au-dessus de X dont les formes de courbures approchent $-2i\pi k\alpha$ et ayant la propriété suivante : soit, pour $k \in S$, $h_k(\lambda)$ le nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) $\leq \lambda$ de $\frac{1}{k}\Delta''_k$, où $\Delta''_k = D''^*_k D''_k$ est le laplacien antiholomorphe agissant sur $C^\infty(X,L_k)$; nous avons alors la minoration asymptotique*

$$\liminf_{k\to+\infty,\, k\in S} k^{-n}\, h_k(\lambda_k) \;\geq\; \frac{1}{n!}\int_{X(\alpha,\leq 1)} \alpha^n \,,$$

valable pour toute suite $(\lambda_k)_{k\in S}$ de réels > 0 tendant vers zéro plus lentement que $1/k^{2+2/b_2(X)}$.

Notre travail, dans la deuxième partie, s'organise comme suit. Après avoir justifié au chapitre 1 l'approximation de $k\alpha$ par des formes entières, nous expliquons (suivant [Dem85]) dans le chapitre 2 comment utiliser la formule de Bochner-Kodaira-Nakano de la première partie pour établir une formule de type Weitzenböck. Ceci nous permet d'interpréter le laplacien antiholomorphe Δ''_k comme un opérateur de Schrödinger. Dans le troisième chapitre nous montrons que les estimations spectrales sur les opérateurs de Schrödinger démontrées par J.-P. Demailly (th. 2.16 de [Dem85]) restent vraies pour la classe plus large d'opérateurs que nous considérons et sous la forme plus générale suivante (voir le chapitre 3 pour les notations) :

Théorème 0.3. *Soit Ω un ouvert relativement compact et $N_{\Omega,k}(\lambda)$ le nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) $\leq \lambda$ de l'opérateur de Schrödinger considéré. Alors pour tout réel λ et pour toute suite (v_k) de réels tendant vers zéro, nous avons les encadrements asymptotiques suivantes :*

$$\liminf_{k\to+\infty} k^{-n}\, N_{\Omega,k}(\lambda+v_k) \;\geq\; \sum_{j=1}^{r}\int_X \nu_B(\lambda+V_j)d\sigma \,,$$

$$\limsup_{k\to+\infty} k^{-n}\, N_{\Omega,k}(\lambda+v_k) \;\leq\; \sum_{j=1}^{r}\int_X \bar{\nu}_B(\lambda+V_j)d\sigma \,.$$

Ceci nous permet au chapitre 4 d'en déduire deux estimations spectrales pour des valeurs propres très petites. Depuis le début, la difficulté réside dans le fait que nous souhaitons à la fois faire tendre k vers l'infini (estimations asymptotiques) et les valeurs propres vers zéro. Nous obtenons une première estimation précise du nombre de sections propres de $\frac{1}{k}\Delta''_k$ associées à des valeurs propres tendant vers zéro strictement moins vite que $k^{-1/6}$. Une application possible de ces estimations est la construction de courants dans la classe de cohomologie de α positifs sur un ouvert suffisamment grand. Et dans l'espoir de construire de tels courants dont nous contrôlons la partie positive, il est préférable d'avoir des estimées asymptotiques associées à des valeurs propres les plus petites possibles (nous illustrerons ce propos dans la dernière section du dernier chapitre). C'est pourquoi nous obtenons une deuxième estimation, bien meilleure puisqu'elle autorise une décroissance un peu plus rapide que k^{-2} pour les valeurs propres. Cette estimation ne découle pas immédiatement des encadrements asymptotiques pour les opérateurs de Schrödinger. Nous l'obtenons en étudiant la dérivée antiholomorphe $\bar{\partial}_k$. Sur un fibré holomorphe, $\bar{\partial}_k$ est injective et envoie les sections propres de bidegré (0,0) sur des sections propres de bidegré (0,1). Mais le caractère seulement C^∞ de nos fibrés L_k fait que laplacien antiholomorphe et dérivée antiholomorphe ne commutent plus, donc que des sections propres de bidegré (0,0) ne sont plus envoyées sur des sections propres de bidegré (0,1). Cependant le défaut de commutation étant petit, les images des sections propres ne sont pas très éloignées de sections propres en bidegré (0,1). Ces considérations permettent d'aboutir au théorème 0.2 énoncé plus haut, beaucoup plus intéressant puisqu'il autorise à faire tendre les valeurs propres vers zéro un peu plus vite que $1/k^2$ pour un nombre de sections qui croît en k^n, pourvu que $\int_{X(\alpha,\leq 1)} \alpha^n > 0$.

Nous terminons, en utilisant cette dernière estimation, en donnant un exemple de résultat d'existence de courant dans la même classe de cohomologie que α avec contrôle effectif de la partie positive, moyennant une hypothèse vraisemblable.

Bibliographie

En ce qui concerne la géométrie symplectique, le lecteur pourra consulter par exemple [MS95], [Dui96], [Lae98] et [Don89]. [BGM71] aborde aussi la géométrie presque complexe et kählérienne.

Les ouvrages [Dem97], [GH78], [KN69], [We89] et [Kob87] couvrent largement le domaine de la géométrie analytique complexe et des fibrés vectoriels.

Pour la théorie des distributions et des opérateurs pseudo-différentiels, [Ho76], [EG97] et [Leb] pourront être consultés avec profit.

Quant à l'analyse fonctionnelle, de bonnes références sont [Kat80] et [RS72]. Et on trouvera dans [BGM71] une étude des valeurs propres du laplacien riemannien, ainsi qu'une bonne introduction au noyau de la chaleur, qui est un autre outil pour l'étude spectrale du laplacien (voir par ex. [Bis87] et [Bou90]).

Première partie

Formules de type Bochner-Kodaira-Nakano

Chapitre 1

Cas d'une variété presque kählérienne

Résumé

Soit (X,J,ω) une variété presque kählérienne et $(E,D,h) \to X$ un fibré hermitien. Nous établissons les relations de commutations usuelles sur X et E, puis obtenons la formule de type Bochner-Kodaira-Nakano suivante : $\Delta''_E = \Delta'_E + [i\Theta^{(1,1)}_{(E,D)},\Lambda_\omega] + T$, où T est un opérateur scalaire d'ordre 0 dépendant de ω et du tenseur de Nijenhuis. Cela généralise la formule bien connue dans le cas d'une variété kählérienne.

1.1 Notations et rappels

1.1.1 Variétés symplectiques presque complexes

Une variété presque kählérienne est une variété symplectique (X,ω), de dimension paire $2n$, munie d'une structure presque complexe J vérifiant les conditions de compatibilité et de positivité $\omega(Jv,Jw) = \omega(v,w)$ et $\omega(v,Jv) > 0$. X est alors naturellement munie de la métrique riemannienne J-invariante $g(v,w) = \omega(v,Jw)$.

J s'étend en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T_{\mathbb{C}}X = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} TX$. Soit $T^{1,0}X$ (resp. $T^{0,1}X$) le sous-fibré holomorphe (resp. antiholomorphe) du fibré tangent complexe ; i.e. $J = i$ sur $T^{1,0}X$ et $J = -i$ sur $T^{0,1}X$.

Si $(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)$ sont des coordonnées locales sur X, notant $z_j = x_j + iy_j$, le repère dual de $(dz_1,\ldots,dz_n,d\bar{z}_1,\ldots,d\bar{z}_n)$ est noté $\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_n},\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)$. On a

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \ , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Mais généralement $\frac{\partial}{\partial z_j}$ n'est pas dans $T^{1,0}X$ (les coordonnées z_j n'étant pas holomorphes).

1.1.2 Différentiation et (p,q)-formes

On note $T^*_{\mathbb{C}}X = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^*X$, $\bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}}X = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \bigwedge^\bullet T^*X$ l'algèbre extérieure complexifiée et $\bigwedge^{p,q} T^*_{\mathbb{C}}X$ le sous-espace de $\bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}}X$ engendré par les $\alpha\wedge\beta$, $\alpha \in \bigwedge^p(T^{1,0}X)^*$, $\beta \in \bigwedge^q(T^{0,1}X)^*$. Par ailleurs $C^s_{p,q}(X,\mathbb{C}) = C^s(X,\bigwedge^{p,q} T^*_{\mathbb{C}}X)$ désigne l'espace des formes différentielles complexes de classe C^s et de bidegré (p,q) sur X.

Rappelons les décompositions

$$\bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} T^*_{\mathbb{C}}X \ , \quad C^s_k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} C^s_{p,q}(X,\mathbb{C}).$$

Soit $\Pi^{p,q}$ l'opérateur de projection $C^\infty_k(X,\mathbb{C}) \to C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C})$ (où $k = p + q$) suivant la décomposition en somme directe ci-dessus. On définit alors $d^{0,1}$ sur $C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C})$ par $\Pi^{p,q+1} \circ d$. On définit de la même manière $d^{1,0}$, $d^{2,-1}$ et $d^{-1,2}$. On a $d = d^{1,0} + d^{0,1} + d^{2,-1} + d^{-1,2}$ (il n'y a pas d'autres composantes ; on renvoie à l'appendice A pour une démonstration).

1.1.3 Tenseur de Nijenhuis

Le tenseur de Nijenhuis (encore appelé la forme de torsion de J) est l'application bilinéaire antisymétrique

$$\mathcal{N}_J : C^\infty(X,T^{1,0}X) \times C^\infty(X,T^{1,0}X) \to C^\infty(X,T^{0,1}X)$$

qui à une paire de vecteurs (ξ,η) de type $(1,0)$ associe la partie de type $(0,1)$ de leur crochet de Lie $[\xi,\eta]$. C'est une $(2,0)$-forme à valeurs dans $T^{0,1}X$.

Si $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ est un repère orthonormé de $T^{1,0}_J X_{|U}$, on peut écrire

$$\mathcal{N}_J = \sum_{j=1}^n \alpha_j \otimes \xi_j, \quad \alpha_j \in C^\infty_{2,0}(U,\mathbb{C}).$$

On définit alors deux opérateurs conjugués θ' et θ'' sur $\bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}}X$ tels que

$$\theta' u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \wedge \big(\bar{\xi}_j \lrcorner\, u\big), \quad \theta'' u = \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \wedge \big(\xi_j \lrcorner\, u\big).$$

Si u est de bidegré (p,q), $\theta' u$ et $\theta'' u$ sont de bidegrés $(p+2,q-1)$ et $(p-1,q+2)$.

Propriété 1.1. *θ', θ'' sont reliés à $d^{2,-1}$ et $d^{-1,2}$ par les relations*

$$d^{2,-1} = -\theta' \ , \quad d^{-1,2} = -\theta'' \ .$$

On utilisera les notations plus commodes $d^{1,0} = d'$ et $d^{0,1} = d''$. On a alors

$$d = d' + d'' - \theta' - \theta''.$$

1.1.4 Métriques

La métrique riemannienne $g(v,w) = \omega(v,Jw)$ sur X s'étend en un produit hermitien sur les formes $\mathbb{R}$-linéaires à valeurs complexes puis sur les q-formes : si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})$ est un repère réel orthonormé de $TX_{|_U}$, $\langle \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j \varepsilon_j^*, \sum_{j=1}^{2n} \beta_j \varepsilon_j^* \rangle \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j \bar{\beta}_j$; et $\langle u_1 \wedge \ldots \wedge u_q, v_1 \wedge \ldots \wedge v_q \rangle \overset{\text{déf}}{=} \det\big(\langle u_i,v_j \rangle\big)$. On remarquera que $\overline{\langle u,v \rangle} = \langle \bar{u},\bar{v} \rangle = \langle v,u \rangle$.

Les produits hermitiens précédement définis sont ponctuels. On définit un produit hermitien global en posant pour $u,v \in C_k^\infty(X,\mathbb{C})$ à supports compacts

$$\langle\!\langle u, v \rangle\!\rangle = \int_X \langle u, v \rangle \, dV_\omega .$$

On peut maintenant définir les adjoints formels δ'' de d'' et δ' de d'. Par exemple

$$\langle\!\langle \delta'' u, v \rangle\!\rangle = \langle\!\langle u, d'' v \rangle\!\rangle \quad \forall u, v \ C^\infty \text{ à supports compacts.}$$

1.1.5 Opérateurs usuels

Si A, B sont des endomorphismes de l'algèbre $C^\infty_{\bullet,\bullet}(X,\mathbb{C})$, leur crochet de commutation gradué est défini par

$$[A,B] = AB - (-1)^{\deg A \cdot \deg B} BA.$$

Si A, B, C sont des endomorphismes de degrés respectifs a, b et c, l'identité de Jacobi s'écrit

$$(-1)^{ac}\big[A\,,[B\,,C]\big] + (-1)^{ba}\big[B\,,[C\,,A]\big] + (-1)^{cb}\big[C\,,[A\,,B]\big] = 0.$$

Le crochet vérifie les relations évidentes $[A,B]^* = [B^*,A^*]$ et $\overline{[A,B]} = [\bar{A},\bar{B}]$.

On définit L sur $\bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}} X$ par $L(u) = \omega \wedge u$. C'est un opérateur réel de type (1,1), dont l'adjoint formel est noté $\Lambda = L^*$.

1.2 Choix de coordonnées locales adaptées

1.2.1 Ecritures locales

Soit (X,ω,J) une variété symplectique presque complexe. et $\phi : U \subset X \to V \subset \mathbb{R}^{2n}$ une carte locale symplectique centrée en un point $p \in X$:

$$\phi : \begin{cases} U \subset X & \to \quad V \subset \mathbb{R}^{2n} \\ \quad m & \mapsto \quad (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\phi(p) = 0$ et $\omega = \phi^*(dx_1 \wedge dy_1 + \ldots + dx_n \wedge dy_n)$ sur U. Par changement linéaire de coordonnées, on peut choisir ϕ de sorte que $(\phi_* J)\,(0)$ soit la structure complexe canonique J_0 de $\mathbb{R}^{2n}$, autrement dit de sorte que pour $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{\partial}{\partial y_k}_{|_p} = J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}_{|_p}\right).$$

On a alors $\omega = \frac{i}{2} \sum\limits_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$, $\frac{\partial}{\partial z_k}{}_{|p} \in T_p^{1,0}X$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}{}_{|p} \in T_p^{0,1}X$.

Par construction, $J(0) = J_0 = i \sum\limits_{k=1}^{n} \left(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right)$. Le développement de Taylor de J au voisinage de $z = 0$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} J(z) &= i \sum_{k=1}^{n} \left(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) \\ &\quad + \sum_{k,l=1}^{n} A_{k,l} dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_l} + B_{k,l} dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} + C_{k,l} d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_l} + D_{k,l} d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \\ &\quad + \mathcal{O}\big(|z|^2\big), \end{aligned}$$

où $A_{k,l}$, $B_{k,l}$, $C_{k,l}$ et $D_{k,l}$ sont des termes d'ordre 1 en z, $\bar{z}$.

De simples calculs montrent que les coefficients de J vérifient les trois conditions suivantes :

- $J^2 = -\mathrm{Id} \quad \Rightarrow \quad J \circ dJ + dJ \circ J = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{k,l} = D_{k,l} = 0$
- $\bar{J} = J \quad \Rightarrow \quad \bar{B}_{k,l} = C_{k,l}$
- $\omega(J\,\cdot\,, J\,\cdot) = \omega \quad \Rightarrow \quad B_{k,l} = B_{l,k}$

L'écriture locale de J est donc :

Propriété 1.2.

$$J(z) = i \sum_{k=1}^{n} \left(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) + \sum_{k,l=1}^{n} B_{k,l} dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} + \bar{B}_{k,l} d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_l} + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)$$

et $B_{k,l}$, terme d'ordre 1, est de la forme $B_{k,l} = \sum\limits_{m=1}^{n} z_m B_{k,l}^{m} + \bar{z}_m B_{k,l}'^{m}$.

Venons-en à l'écriture locale du tenseur de Nijenhuis $\mathcal{N}_J$.

Soit $\xi = \frac{\partial}{\partial z_j}$ et $\eta = \frac{\partial}{\partial z_k}$: alors $u = \frac{1}{2}(\xi - iJ(\xi)) \in T^{1,0}X$, $v = \frac{1}{2}(\eta - iJ(\eta)) \in T^{1,0}X$, $u(0) = \xi(0)$ et $v(0) = \eta(0)$.

$$u = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{n} B_{j,l} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) \ , \quad v = \frac{\partial}{\partial z_k} - \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{n} B_{k,l} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)$$

$$\begin{aligned} [u,v] &= \left[\frac{\partial}{\partial z_j}, - \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{n} B_{k,l} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \right] + \left[- \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{n} B_{j,l} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}, \frac{\partial}{\partial z_k} \right] + \mathcal{O}\big(|z|\big) \\ &= -\frac{i}{2} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial B_{k,l}}{\partial z_j} - \frac{\partial B_{j,l}}{\partial z_k} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} + \mathcal{O}\big(|z|\big) \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\mathcal{N}_J\left(\frac{\partial}{\partial z_j}_{|0},\frac{\partial}{\partial z_k}_{|0}\right)=-\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial B_{k,l}}{\partial z_j}(0)-\frac{\partial B_{j,l}}{\partial z_k}(0)\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}_{|0}.$$

Comme $B_{k,l}=\sum_{m=1}^{n} z_m B_{k,l}^m+\bar{z}_m B_{k,l}'^m$, il vient

$$\mathcal{N}_J\left(\frac{\partial}{\partial z_j}_{|0},\frac{\partial}{\partial z_k}_{|0}\right)=\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{n}\left(B_{l,j}^k-B_{l,k}^j\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}_{|0}.$$

Notons $\mathcal{N}_{J_{|z=0}}=\sum_{j,k,l}N_{j,k}^l dz_{j_{|0}}\otimes dz_{k_{|0}}\otimes\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}_{|0}=\sum_{j,k,l}\frac{1}{2}N_{j,k}^l dz_{j_{|0}}\wedge dz_{k_{|0}}\otimes\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}_{|0}$, avec pour tous j,k,l : $N_{j,k}^l=-N_{k,j}^l$. Ainsi $N_{j,k}^l=\frac{i}{2}(B_{l,j}^k-B_{l,k}^j)$.

Résumons tout celà dans la

Propriété 1.3.

$$\mathcal{N}_J=\sum_{j,k,l}N_{j,k}^l dz_j\otimes dz_k\otimes\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}+\mathcal{O}\big(|z|\big)=\sum_{j,k,l}\frac{1}{2}N_{j,k}^l dz_j\wedge dz_k\otimes\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}+\mathcal{O}\big(|z|\big),$$

et on a, pour tous j,k,l : $N_{j,k}^l=-N_{k,j}^l$, $N_{j,k}^l=\frac{i}{2}(B_{l,j}^k-B_{l,k}^j)$.

1.2.2 Changement de coordonnées

Nous constatons que les termes en $\bar{z}_m$ des $B_{k,l}$ n'interviennent pas dans $\mathcal{N}_J$. Nous allons allons donc sûrement pouvoir trouver de nouvelles coordonnées dans lesquelles l'écriture de J ne contiendra pour $B_{k,l}$ que des termes en z_m. Mais nous allons aussi demander que ces nouvelles coordonnées restent le plus symplectique possible. Nous allons donc montrer le

Théorème 1.4. *Il existe des coordonnées $(z_1,\dots,z_n)$ de classe C^∞ symplectiques à l'ordre 2 (c'est-à-dire que $\omega=\frac{i}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}dz_k\wedge d\bar{z}_k+\mathcal{O}(|z|^2)$) telles que*

$$\begin{aligned}J &= i\sum_{k=1}^{n}\left(dz_k\otimes\frac{\partial}{\partial z_k}-d\bar{z}_k\otimes\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right)\\ &\quad+\sum_{k,l=1}^{n}\left[\left(\sum_{m=1}^{n}z_m B_{k,l}^m\right)dz_k\otimes\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}+\left(\sum_{m=1}^{n}\bar{z}_m\bar{B}_{k,l}^m\right)d\bar{z}_k\otimes\frac{\partial}{\partial z_l}\right]+\mathcal{O}\big(|z|^2\big)\end{aligned}$$

où les $B_{k,l}^m$ sont symétriques en (k,l) et vérifient :

- *si $m\le k,l$: $B_{k,l}^m=0$;*
- *si $k\le l,m$: $B_{k,l}^m=-2iN_{k,m}^l$;*
- *si $l\le k,m$: $B_{k,l}^m=-2iN_{l,m}^k$.*

Le reste de cette sous-section consiste en la démontronstration de ce théorème. Signalons simplement que les dernières conditions reliant $B_{k,l}^m$ et $N_{k,m}^l$ ne pas nécessaires pour la suite des calculs. Elles expriment simplement qu'on peut récupérer le tenseur de Nijenhuis à partir des coefficients d'ordre 1 de J.

Considérons un changement de coordonnées de la forme :

$$Z_l = z_l + \sum_{1\le r,s\le n} a_{r,s}^l z_r z_s + \sum_{1\le r,s\le n} b_{r,s}^l z_r \bar{z}_s + \sum_{1\le r,s\le n} c_{r,s}^l \bar{z}_r \bar{z}_s .$$

La transformation inverse s'écrit :

$$z_l = Z_l - \sum_{1\le r,s\le n} a_{r,s}^l Z_r Z_s - \sum_{1\le r,s\le n} b_{r,s}^l Z_r \bar{Z}_s - \sum_{1\le r,s\le n} c_{r,s}^l \bar{Z}_r \bar{Z}_s + \mathcal{O}\left(|Z|^3\right).$$

D'où les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_\alpha}{\partial Z_k} &= \delta_{\alpha,k} - \sum_{r=1}^n (a_{k,r}^\alpha + a_{r,k}^\alpha) Z_r - \sum_{r=1}^n b_{k,r}^\alpha \bar{Z}_r + \mathcal{O}\left(|Z|^2\right) \\
\frac{\partial z_\alpha}{\partial \bar{Z}_k} &= - \sum_{r=1}^n b_{r,k}^\alpha Z_r - \sum_{r=1}^n (c_{k,r}^\alpha + c_{r,k}^\alpha) \bar{Z}_r + \mathcal{O}\left(|Z|^2\right) \\
\frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta} &= \delta_{l,\beta} + \sum_{r=1}^n (a_{\beta,r}^l + a_{r,\beta}^l) Z_r + \sum_{r=1}^n b_{\beta,r}^l \bar{Z}_r + \mathcal{O}\left(|Z|^2\right) \\
\frac{\partial Z_l}{\partial \bar{z}_\beta} &= \sum_{r=1}^n b_{r,\beta}^l Z_r + \sum_{r=1}^n (c_{\beta,r}^l + c_{r,\beta}^l) \bar{Z}_r + \mathcal{O}\left(|Z|^2\right)
\end{aligned}$$

Nous voulons exprimer J et ω dans les nouvelles coordonnées. Commençons par J. Pour ce faire, considérons de manière générale un endomorphisme A qui a pour écriture locale

$$A = \sum_{k,l} A_{k,l} dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_l} + B_{k,l} dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} + C_{k,l} d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_l} + D_{k,l} d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} .$$

Observons que pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial Z_k}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial Z_k} + \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_k}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j}\frac{\partial}{\partial Z_k} + \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial \bar{z}_j}\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_k},$$

$$dz_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_j}{\partial Z_k} dZ_k + \frac{\partial z_j}{\partial \bar{Z}_k} d\bar{Z}_k \quad \text{et} \quad d\bar{z}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial Z_k} dZ_k + \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \bar{Z}_k} d\bar{Z}_k .$$

Ceci nous permet d'écrire, un peu fastidieusement, l'écriture locale de A après changement de coordonnées :

$$
\begin{aligned}
A \;=\; & \sum_{k,l}\sum_{\alpha,\beta}\left(A_{k,l}\frac{\partial z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial Z_\beta}{\partial z_l}+B_{k,l}\frac{\partial z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial Z_\beta}{\partial \bar z_l}+C_{k,l}\frac{\partial \bar z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial Z_\beta}{\partial z_l}+D_{k,l}\frac{\partial \bar z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial Z_\beta}{\partial \bar z_l}\right)dZ_\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial Z_\beta}\\
&+\left(A_{k,l}\frac{\partial z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial \bar Z_\beta}{\partial z_l}+B_{k,l}\frac{\partial z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial \bar Z_\beta}{\partial \bar z_l}+C_{k,l}\frac{\partial \bar z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial \bar Z_\beta}{\partial z_l}+D_{k,l}\frac{\partial \bar z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial \bar Z_\beta}{\partial \bar z_l}\right)dZ_\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial \bar Z_\beta}\\
&+\left(A_{k,l}\frac{\partial z_k}{\partial \bar Z_\alpha}\frac{\partial Z_\beta}{\partial z_l}+B_{k,l}\frac{\partial z_k}{\partial \bar Z_\alpha}\frac{\partial Z_\beta}{\partial \bar z_l}+C_{k,l}\frac{\partial \bar z_k}{\partial \bar Z_\alpha}\frac{\partial Z_\beta}{\partial z_l}+D_{k,l}\frac{\partial \bar z_k}{\partial \bar Z_\alpha}\frac{\partial Z_\beta}{\partial \bar z_l}\right)d\bar Z_\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial Z_\beta}\\
&+\left(A_{k,l}\frac{\partial z_k}{\partial \bar Z_\alpha}\frac{\partial \bar Z_\beta}{\partial z_l}+B_{k,l}\frac{\partial z_k}{\partial \bar Z_\alpha}\frac{\partial \bar Z_\beta}{\partial \bar z_l}+C_{k,l}\frac{\partial \bar z_k}{\partial \bar Z_\alpha}\frac{\partial \bar Z_\beta}{\partial z_l}+D_{k,l}\frac{\partial \bar z_k}{\partial \bar Z_\alpha}\frac{\partial \bar Z_\beta}{\partial \bar z_l}\right)d\bar Z_\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial \bar Z_\beta}\\
\;=\; & \sum_{k,l}\sum_{\alpha,\beta}\left(A_{\alpha,\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial Z_k}\frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta}+B_{\alpha,\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial Z_k}\frac{\partial Z_l}{\partial \bar z_\beta}+C_{\alpha,\beta}\frac{\partial \bar z_\alpha}{\partial Z_k}\frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta}+D_{\alpha,\beta}\frac{\partial \bar z_\alpha}{\partial Z_k}\frac{\partial Z_l}{\partial \bar z_\beta}\right)dZ_k\otimes\frac{\partial}{\partial Z_l}\\
&+\left(A_{\alpha,\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial Z_k}\frac{\partial \bar Z_l}{\partial z_\beta}+B_{\alpha,\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial Z_k}\frac{\partial \bar Z_l}{\partial \bar z_\beta}+C_{\alpha,\beta}\frac{\partial \bar z_\alpha}{\partial Z_k}\frac{\partial \bar Z_l}{\partial z_\beta}+D_{\alpha,\beta}\frac{\partial \bar z_\alpha}{\partial Z_k}\frac{\partial \bar Z_l}{\partial \bar z_\beta}\right)dZ_k\otimes\frac{\partial}{\partial \bar Z_l}\\
&+\left(A_{\alpha,\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial \bar Z_k}\frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta}+B_{\alpha,\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial \bar Z_k}\frac{\partial Z_l}{\partial \bar z_\beta}+C_{\alpha,\beta}\frac{\partial \bar z_\alpha}{\partial \bar Z_k}\frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta}+D_{\alpha,\beta}\frac{\partial \bar z_\alpha}{\partial \bar Z_k}\frac{\partial Z_l}{\partial \bar z_\beta}\right)d\bar Z_k\otimes\frac{\partial}{\partial Z_l}\\
&+\left(A_{\alpha,\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial \bar Z_k}\frac{\partial \bar Z_l}{\partial z_\beta}+B_{\alpha,\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial \bar Z_k}\frac{\partial \bar Z_l}{\partial \bar z_\beta}+C_{\alpha,\beta}\frac{\partial \bar z_\alpha}{\partial \bar Z_k}\frac{\partial \bar Z_l}{\partial z_\beta}+D_{\alpha,\beta}\frac{\partial \bar z_\alpha}{\partial \bar Z_k}\frac{\partial \bar Z_l}{\partial \bar z_\beta}\right)d\bar Z_k\otimes\frac{\partial}{\partial \bar Z_l}
\end{aligned}
$$

Pour nous, $A = J$. Donc $A_{k,l} = i\delta_{k,l}$ et $D_{k,l} = -i\delta_{k,l}$, alors que $B_{k,l}$ et $C_{k,l}$ sont des termes d'ordre 1.

Nous désignerons dans la suite par $\bar z$ des termes d'ordre 1 ne dépendant que de $\bar z_1, \ldots \bar z_n$, et pas de $z_1, \ldots, z_n$. De même, nous désignerons par z des termes d'ordre 1 ne dépendant que de $z_1, \ldots, z_n$, et pas de $\bar z_1, \ldots \bar z_n$.

Pour les calculs ci-dessous, nous omettrons d'écrire les termes d'ordre 2 en z et $\bar z$, et nous remplacerons éventuellement par des pointillés les termes d'ordre 1 qui vont donner, après multiplication, des termes d'ordre 2, et qui n'interviennent donc pas.

Le terme en facteur de $dZ_k \otimes \frac{\partial}{\partial Z_l}$ est :

$$
i\delta_{k,l} + \mathcal{O}\big(|Z|^2\big)\,,
$$

tandis que le terme en facteur de $dZ_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar Z_l}$ est :

$$
2i\sum_{r=1}^{n} \bar b^l_{r,k}\bar Z_r + 2i\sum_{r=1}^{n}(\bar c^l_{k,r} + \bar c^l_{r,k})Z_r + B_{k,l} + \mathcal{O}\big(|Z|^2\big)\,.
$$

Exprimons maintenant ω dans les nouvelles coordonnées.

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{i}{2}\sum_k dz_k \wedge d\bar z_k \\
&= \frac{i}{2}\sum_k \sum_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial z_k}{\partial Z_\alpha}dZ_\alpha + \frac{\partial z_k}{\partial \bar Z_\alpha}d\bar Z_\alpha\right] \wedge \left[\frac{\partial \bar z_k}{\partial Z_\beta}dZ_\beta + \frac{\partial \bar z_k}{\partial \bar Z_\beta}d\bar Z_\beta\right] \\
&= \frac{i}{2}\sum_k \sum_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial \bar z_k}{\partial Z_\beta}dZ_\alpha \wedge dZ_\beta + \frac{\partial z_k}{\partial \bar Z_\alpha}\frac{\partial \bar z_k}{\partial \bar Z_\beta}d\bar Z_\alpha \wedge d\bar Z_\beta \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{\partial z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial \bar z_k}{\partial \bar Z_\beta} - \frac{\partial z_k}{\partial \bar Z_\beta}\frac{\partial \bar z_k}{\partial Z_\alpha}\right) dZ_\alpha \wedge d\bar Z_\beta\right] .
\end{aligned}
$$

Le coefficient de $dZ_\alpha \wedge dZ_\beta$ est

$$
\sum_k \frac{\partial z_k}{\partial Z_\alpha}\frac{\partial \bar z_k}{\partial Z_\beta} = -\sum_{r=1}^n \bar b^\alpha_{r,\beta}\bar Z_r - \sum_{r=1}^n (\bar c^\alpha_{\beta,r} + \bar c^\alpha_{r,\beta}) Z_r + \mathcal{O}\big(|Z|^2\big) .
$$

Il sera nul (à l'ordre 1) s'il est symétrique en (α,β).

Et le coefficient de $dZ_\alpha \wedge d\bar Z_\beta$ est

$$
\delta_{\alpha,\beta} - \sum_r \left(\bar b^\alpha_{\beta,r} + (a^\beta_{\alpha,r} + a^\beta_{r,\alpha})\right) Z_r - \sum_r \overline{\left(\bar b^\alpha_{\beta,r} + (a^\beta_{\alpha,r} + a^\beta_{r,\alpha})\right) Z_r} + \mathcal{O}\left(|Z|^2\right) .
$$

Rappelons-nous que nous ne voulons pas de termes en $\bar Z$ dans J, et que nous voulons que ω soit symplectique à l'ordre 2.

La condition pour supprimer les termes en $\bar Z_m$ dans J est :

$$
2i\bar b^l_{r,k} + B'^r_{k,l} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b^l_{r,k} = -\frac{i}{2}\bar B'^r_{k,l} \quad \forall\, r,k,l
$$

Les conditions pour que $\omega = \frac{i}{2}\sum_k dZ_k \wedge d\bar Z_k + \mathcal{O}\left(|Z|^2\right)$ sont :

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
c^\alpha_{\beta,r} + c^\alpha_{r,\beta} & \text{symétrique en } (\alpha,\beta) & \\
\bar b^\alpha_{r,\beta} & \text{symétrique en } (\alpha,\beta) & \text{(toujours vrai car } B'^m_{k,l} \text{ symétrique)} \\
a^\beta_{\alpha,r} + a^\beta_{r,\alpha} = & -\bar b^\alpha_{\beta,r} &
\end{array}
\right.
$$

La dernière condition est aisée à réaliser. Il suffit de poser $a^\beta_{\alpha,r} = -\frac{1}{2}\bar b^\alpha_{\beta,r}$ qui est symétrique en (α,r).

Posons $d^m_{k,l} = 2i(\bar c^l_{k,m} + \bar c^l_{m,k})$. Il s'agit de choisir les $d^m_{k,l}$ symétriques en (k,l) et en (k,m). Le nouveau coefficient de $dZ_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar Z_l}$ sera alors $\sum_{m=1}^n \tilde B^m_{k,l} Z_m$, où $\tilde B^m_{k,l} = B^m_{k,l} + d^m_{k,l}$.

Posons par exemple $d^m_{k,l} = -B^m_{k,l}$ pour $m \le k \le l$, les autres valeurs de $d^m_{k,l}$ étant toutes imposées par le fait que $d^m_{k,l}$ doit être symétrique en (k,l) et (m,l). On notera par exemple qu'en fait $d^m_{k,l} = -B^m_{k,l}$ pour $m \le k,l$.

Non seulement ces $d^m_{k,l}$ conviennent. Mais de plus les formules

$$N^m_{k,l} = \frac{i}{2}\left(\tilde{B}^l_{m,k} - \tilde{B}^k_{m,l}\right)$$

s'inversent facilement :

(i) pour $m \leq k,l$, on a donc $\tilde{B}^m_{k,l} = 0$.

(ii) pour $l \leq k,m$, on a $\tilde{B}^l_{k,m} = 0$. Donc $N^k_{l,m} = \frac{i}{2}\left(\tilde{B}^m_{k,l} - \tilde{B}^l_{k,m}\right) = \frac{i}{2}\tilde{B}^m_{k,l}$.

(iii) pour $k \leq l,m$, on a $\tilde{B}^k_{l,m} = 0$. Donc $N^l_{k,m} = \frac{i}{2}\left(\tilde{B}^m_{l,k} - \tilde{B}^k_{l,m}\right) = \frac{i}{2}\tilde{B}^m_{k,l}$.

Le tenseur de Nijenhuis peut donc bien être récupéré à partir des termes d'ordre 1 de J.

1.3 Formules sur la variété

1.3.1 Expression de la métrique en coordonnées locales

Nous utilisons les coordonnées $(z_1,\ldots,z_n)$ données par le théorème 1.4, de sorte que la structure symplectique vérifie $\omega = \frac{i}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k + \mathcal{O}(|z|^2)$ et que J a une écriture normalisée.

Propriété 1.5. *Dans les coordonnées ci-dessus,*

$$g = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(dz_k \otimes d\bar{z}_k + d\bar{z}_k \otimes dz_k\Big) + \frac{i}{2}\sum_{k,l}\left(B_{k,l}dz_k \otimes dz_l - \bar{B}_{k,l}d\bar{z}_k \otimes d\bar{z}_l\right) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big).$$

Et pour $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$,
$$\begin{array}{rcl} \langle dz_j,dz_k\rangle_h &=& 2\delta_{j,k} + \mathcal{O}\big(|z|^2\big), \\ \langle dz_j,d\bar{z}_k\rangle_h &=& 2i\bar{B}_{j,k} + \mathcal{O}\big(|z|^2\big), \\ \langle d\bar{z}_j,dz_k\rangle_h &=& -2iB_{j,k} + \mathcal{O}\big(|z|^2\big), \\ \langle d\bar{z}_j,d\bar{z}_k\rangle_h &=& 2\delta_{j,k} + \mathcal{O}\big(|z|^2\big). \end{array}$$

Démonstration -

- Tout d'abord nous avons :

$$g = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(dz_k \wedge d\bar{z}_k)(\cdot,J\cdot) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \otimes d\bar{z}_k(J\cdot) + d\bar{z}_k \otimes dz_k(J\cdot) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)\,,$$

$$J = i\sum_{k=1}^{n}\left(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) + \sum_{k,l=1}^{n}\left(B_{l,k}dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \bar{B}_{l,k}d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k}\right) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)\,,$$

$$d\bar{z}_k(J\cdot) = -id\bar{z}_k + \sum_{l=1}^{n} B_{l,k}dz_l + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)$$

$$dz_k(J\,\cdot\,) = idz_k + \sum_{l=1}^{n} \bar{B}_{l,k} d\bar{z}_l + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
g &= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big[-idz_k\otimes d\bar{z}_k - id\bar{z}_k\otimes dz_k\Big] \\
&\quad + \frac{i}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\Big[B_{l,k}dz_k\otimes dz_l - \bar{B}_{l,k}d\bar{z}_k\otimes d\bar{z}_l\Big] + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(dz_k\otimes d\bar{z}_k + d\bar{z}_k\otimes dz_k\Big) \\
&\quad + \frac{i}{2}\sum_{k,l}\Big(B_{l,k}dz_k\otimes dz_l - \bar{B}_{l,k}d\bar{z}_k\otimes d\bar{z}_l\Big) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)\,.
\end{aligned}$$

- Soit ensuite $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n})$ une base réelle orthonormée pour $g = \omega(\cdot,J\cdot)$. Notons $\mathcal{B}_2$ la base réelle de coordonnées donnée par $\mathcal{B}_2 = (\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_n})$. Par souci de simplification des notations, nous posons $x_{j+n} = y_j$. Notons par ailleurs

$P = (p_{i,j})_{1\le i,j\le 2n}$	la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$
$P^* = \big(p^{i,j}\big)_{1\le i,j\le 2n} = {}^tP^{-1}$	la matrice de passage de $\mathcal{B}_1^*$ à $\mathcal{B}_2^*$
$G = (g_{i,j})_{1\le i,j\le 2n} = {}^tPP$	avec $g_{i,j} = g(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j})$
$G^* = \big(g^{i,j}\big)_{1\le i,j\le 2n} = {}^tP^*P^* = G^{-1}$	avec $g^{i,j} = \langle dx_i,dx_j\rangle$

D'après le calcul précédent, la métrique sur TX est donnée par

$$\begin{aligned}
g_{j,k} &= g\left(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \delta_{j,k} - \mathrm{Im}(B_{j,k}) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) \\
g_{j,k+n} &= g\left(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\mathrm{Re}(B_{j,k}) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) \\
g_{j+n,k+n} &= g\left(\frac{\partial}{\partial y_j},\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \delta_{j,k} + \mathrm{Im}(B_{j,k}) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)
\end{aligned}$$

Comme $G^* = G^{-1}$ et $G = \mathrm{Id} + zA + \ldots$, il vient $G^{-1} = \mathrm{Id} - zA + \ldots$, d'où

$$\begin{aligned}
g^{j,k} &= \langle dx_j,dx_k\rangle = \delta_{j,k} + \mathrm{Im}(B_{j,k}) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) \\
g^{j,k+n} &= \langle dx_j,dy_k\rangle = \mathrm{Re}(B_{j,k}) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) \\
g^{j+n,k+n} &= \langle dy_j,dy_k\rangle = \delta_{j,k} - \mathrm{Im}(B_{j,k}) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)
\end{aligned}$$

La propriété s'en déduit immédiatement.

□

Propriété 1.6. *Le calcul de* $\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J, dz_K \wedge d\bar{z}_L\rangle$ *donne :*

- $\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J, dz_I \wedge d\bar{z}_J\rangle = 2^{|I|+|J|} + \mathcal{O}(|z|^2)$,
- $\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J, dz_{I\cup\{p\}} \wedge d\bar{z}_{J\setminus\{q\}}\rangle = -\varepsilon(I,\{p\})\,\varepsilon(\{q\},J\setminus\{q\})\,2^{|I|+|J|}\,i\,B_{p,q} + \mathcal{O}(|z|^2)$
  où $p \notin I$ *et* $q \in J$,
- $\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J, dz_{I\setminus\{p\}} \wedge d\bar{z}_{J\cup\{q\}}\rangle = \varepsilon(I\setminus\{p\},\{p\})\varepsilon(\{q\},J)2^{|I|+|J|}\,i\,\bar{B}_{p,q} + \mathcal{O}(|z|^2)$
  où $p \in I$ *et* $q \notin J$,
- $\langle dz_I \wedge d\overline{z}_J, dz_K \wedge d\overline{z}_L\rangle = \mathcal{O}(|z|^2)$ *dans tous les autres cas.*

Démonstration - Remarquons que s'il y a deux éléments au moins dans $I\setminus K$ (ou $K\setminus I$, $J\setminus L$ ou $L\setminus J$), alors le déterminant est en $\mathcal{O}(|z|^2)$, car il y a au moins deux lignes (ou deux colonnes) qui sont en $\mathcal{O}(|z|)$. Discutons maintenant :
- si $|I| = |K|$, alors $|J| = |L|$, donc

$$\det\left(\begin{array}{c|c} & \mathcal{O}(|z|) \\ \hline \mathcal{O}(|z|) & \end{array}\right) = \langle dz_I, dz_K\rangle \cdot \langle d\bar{z}_J, d\bar{z}_L\rangle + \mathcal{O}(|z|^2) = 2^{|I|+|J|}\delta_{I,K}\delta_{J,L} + \mathcal{O}(|z|^2)$$

- si $|I| = |K| + 1$, alors $|J| = |L| - 1$: si on n'a pas $K \subset I$, alors $|I\setminus K| \geq 2$, et si on n'a pas $J \subset L$, alors $|L\setminus J| \geq 2$. Donc $K \subset I$ et $J \subset L$. C'est-à-dire que $I = K \cup \{p\}$ et $J = L\setminus\{q\}$.
- si $||I| - |K|| \geq 2$, par ex. $|I| \geq |K| + 2$, alors $|I\setminus K| \geq 2$.

Le cas $I = K$, $J = L$ vient d'être traité au cours de la discussion ci-dessus; il ne reste donc plus qu'à étudier les deux cas

$$\left\{\begin{array}{l} K = I\cup\{p\} \\ L = J\setminus\{q\}\end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} K = I\setminus\{p\} \\ L = J\cup\{q\}\end{array}\right. .$$

- si $p \notin I$ et $q \in J$,

$$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J, dz_{I\cup\{p\}} \wedge d\bar{z}_{J\setminus\{q\}}\rangle =} \\ = & \varepsilon(\{q\},J\setminus\{q\})\varepsilon(I,\{p\})\langle dz_I \wedge d\bar{z}_q \wedge d\bar{z}_{J\setminus\{q\}}, dz_I \wedge dz_p \wedge d\bar{z}_{J\setminus\{q\}}\rangle \\ = & \varepsilon(\{q\},J\setminus\{q\})\varepsilon(I,\{p\})\langle d\bar{z}_q, dz_p\rangle 2^{|I|+|J\setminus\{q\}|} + \mathcal{O}(|z|^2) \\ = & -\varepsilon(\{q\},J\setminus\{q\})\varepsilon(I,\{p\})2^{|I|+|J|} i \left(\sum_m z_m B^m_{p,q}\right) + \mathcal{O}(|z|^2) \ ; \end{array}$$

- si $p \in I$ et $q \notin J$, on déduit le résultat du cas précédent par conjugaison.

$\square$

Il est utile d'introduire une base de formes J-linéaires et J-antilinéaires, plus facile à manipuler dans les calculs que la base $(dz_1,\dots,dz_n,d\bar{z}_1,\dots,d\bar{z}_n)$. Posons donc

$$w_k = \frac{1}{2}\,(dz_k - i dz_k\circ J) \in \bigwedge\nolimits^{1,0} T^*_{\mathbb{C}}X\ , \quad \bar{w}_k = \frac{1}{2}\,(d\bar{z}_k + i d\bar{z}_k\circ J) \in \bigwedge\nolimits^{0,1} T^*_{\mathbb{C}}X.$$

$\bar{w}_k$ est bien la forme conjuguée de w_k, puisque $\overline{dz_k\circ J} = d\bar{z}_k\circ J$ (car $\bar{J}=J$).

Propriété 1.7. *De simples calculs donnent :*

- $w_k = dz_k - \frac{i}{2}\sum_{l=1}^n \bar{B}_{k,l} d\bar{z}_l + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)\ , \quad \bar{w}_k = d\bar{z}_k + \frac{i}{2}\sum_{l=1}^n B_{k,l} dz_l + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)\ ,$
- $$\begin{aligned}\langle w_j,w_k\rangle &= 2\delta_{j,k} + \mathcal{O}\big(|z|^2\big),\\ \langle w_j,\bar{w}_k\rangle &= \mathcal{O}\big(|z|^2\big),\end{aligned}$$
- $\langle w_I\wedge\bar{w}_J, w_I\wedge\bar{w}_J\rangle = 2^{|I|+|J|} + \mathcal{O}(|z|^2)\ ,$
- $\langle w_I\wedge\bar{w}_J, w_K\wedge\bar{w}_L\rangle = \mathcal{O}(|z|^2)$ *dans tous les autres cas.*

Du point de vue métrique, tout se passe comme si la variété était kählérienne, du moment qu'on ne fait agir que des opérateurs d'ordre 0 ou 1.

1.3.2 Expression locale de d''

Propriété 1.8.

$$\begin{aligned}&w_k = dz_k - \tfrac{i}{2}\textstyle\sum_l \bar{B}_{k,l} d\bar{z}_l + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)\,, \qquad dz_k = w_k + \tfrac{i}{2}\textstyle\sum_l \bar{B}_{k,l}\bar{w}_l + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)\,,\\ &dw_k = -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\alpha,\beta} \bar{N}^k_{\alpha,\beta}\bar{w}_\alpha\wedge\bar{w}_\beta + \mathcal{O}\big(|z|\big)\,.\end{aligned}$$

Démonstration - Les deux premières formules s'obtiennent facilement.

$$\begin{aligned}dw_k &= -\frac{i}{2}\sum_{l,m}\bar{B}^m_{k,l} d\bar{z}_m\wedge d\bar{z}_l + \mathcal{O}\big(|z|\big) = -\frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta}\bar{B}^\alpha_{k,\beta} d\bar{z}_\alpha\wedge d\bar{z}_\beta + \mathcal{O}\big(|z|\big)\\ &= -\frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta}\bar{B}^\alpha_{k,\beta}\bar{w}_\alpha\wedge\bar{w}_\beta + \mathcal{O}\big(|z|\big)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta}\bar{B}^\beta_{k,\alpha}\bar{w}_\alpha\wedge\bar{w}_\beta - \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta}\bar{B}^\alpha_{k,\beta}\bar{w}_\alpha\wedge\bar{w}_\beta\right] + \mathcal{O}\big(|z|\big)\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\bar{N}^k_{\alpha,\beta}\bar{w}_\alpha\wedge\bar{w}_\beta + \mathcal{O}\big(|z|\big)\end{aligned}$$

□

Propriété 1.9.

$$d''(w_I \wedge \bar{w}_J) = \mathcal{O}(|z|)\,, \quad d'(w_I \wedge \bar{w}_J) = \mathcal{O}(|z|)\,,$$
$$d^{2,-1}(w_I \wedge \bar{w}_J) = -\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} N^{\gamma}_{\alpha,\beta}\, w_\alpha \wedge w_\beta \wedge \Big(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_\gamma} \lrcorner\,(w_I \wedge \bar{w}_K)\Big) + \mathcal{O}(|z|)\,.$$

La base choisie est presque holomorphe. Donc les calculs seront les mêmes que dans le cas kählérien. Le lecteur qui le désire peut se passer des calculs suivants et se reporter directement aux formules de commutation.

Démonstration - Nous ne ferons le calcul que pour d'', celui pour d' se faisant de la même manière (ou se déduisant par conjugaison).

$$\begin{aligned}
d(w_I \wedge \bar{w}_J) &= d\left(w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_p} \wedge \bar{w}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \bar{w}_{j_q}\right)\\
&= \sum_{p \in I} \varepsilon(\{p\},I \setminus \{p\})\, dw_p \wedge w_{I\setminus\{p\}} \wedge \bar{w}_J\\
&\qquad\qquad + \sum_{q\in J} \varepsilon(\{q\},J \setminus \{q\})\,(-1)^{|I|}\, d\bar{w}_q \wedge w_I \wedge \bar{w}_{J\setminus\{q\}}\\
d''(w_I \wedge \bar{w}_J) &= \sum_{p \in I} \varepsilon(\{p\},I \setminus \{p\}) \Big[\mathcal{O}(|z|)\Big] \wedge w_{I\setminus\{p\}} \wedge \bar{w}_J\\
&\quad + \sum_{q\in J} \varepsilon(\{q\},J \setminus \{q\})\,(-1)^{|I|} \Big[\mathcal{O}(|z|)\Big] \wedge w_I \wedge \bar{w}_{J\setminus\{q\}} + \mathcal{O}(|z|^2)\\
&= \mathcal{O}(|z|)
\end{aligned}$$

La formule pour $d^{2,-1}(w_I \wedge \bar{w}_K)$ provient de la relation $d^{2,-1} = -\theta'$ et de la définition de θ'. □

Propriété 1.10.

$$d''(u\, w_I \wedge \bar{w}_J) = \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_\alpha}\Big[\bar{w}_\alpha \wedge w_I \wedge \bar{w}_J + \mathcal{O}(|z|^2)\Big] + \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial z_\alpha}\Big[\bar{z} + \mathcal{O}(|z|^2)\Big] + u\mathcal{O}(|z|),$$

$$d'(u\, w_I \wedge \bar{w}_J) = \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial z_\alpha}\Big[w_\alpha \wedge w_I \wedge \bar{w}_J + \mathcal{O}(|z|^2)\Big] + \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_\alpha}\Big[z + \mathcal{O}(|z|^2)\Big] + u\,\mathcal{O}(|z|),$$

$$d^{2,-1}(u\, w_I \wedge \bar{w}_J) = -\frac{1}{2}\, u \sum_{\alpha,\beta,\gamma} N^{\gamma}_{\alpha,\beta} w_\alpha \wedge w_\beta \wedge \Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\gamma} \lrcorner\,(w_I \wedge \bar{w}_K)\Big) + \mathcal{O}(|z|).$$

Rappelons que la notation $\bar{z}$ désigne des termes d'ordre 1 ne dépendant que de $\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n$ (voir remarque à la fin du paragraphe 1.2.2).

Démonstration - Nous ne ferons là encore que le calcul pour d'', celui pour d' se faisant de la même manière ou s'en déduisant par conjugaison.

$$\begin{aligned}
d(u\,w_I\wedge\bar w_J) &= du\wedge w_I\wedge\bar w_J + u\,d(w_I\wedge\bar w_J)\\
&= \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial z_\alpha}\Big[w_\alpha + \frac{i}{2}\sum_l \bar B_{\alpha,l}\bar w_l + \mathcal{O}(|z|^2)\Big]\wedge w_I\wedge\bar w_J\\
&\quad + \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar z_\alpha}\Big[\bar w_\alpha - \frac{i}{2}\sum_l B_{\alpha,l}w_l + \mathcal{O}(|z|^2)\Big]\wedge w_I\wedge\bar w_J + u\,d(w_I\wedge\bar w_J)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
d''(u\,w_I\wedge\bar w_J) &= \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar z_\alpha}\bar w_\alpha\wedge w_I\wedge\bar w_J + \frac{i}{2}\sum_{\alpha,l}\frac{\partial u}{\partial z_\alpha}\bar B_{\alpha,l}\bar w_l\wedge w_I\wedge\bar w_J\\
&\quad + u\,d''(w_I\wedge\bar w_J) + \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial z_\alpha}\mathcal{O}(|z|^2) + \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar z_\alpha}\mathcal{O}(|z|^2)\\
&= \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar z_\alpha}\bar w_\alpha\wedge w_I\wedge\bar w_J + u\,d''(w_I\wedge\bar w_J)\\
&\quad + \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial z_\alpha}\Big(\bar z + \mathcal{O}(|z|^2)\Big) + \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar z_\alpha}\mathcal{O}(|z|^2)
\end{aligned}$$

□

1.3.3 Expression locale de l'adjoint δ'' de d''

Propriété 1.11.

$$\delta''(v\,w_K\wedge\bar w_L) = -2\sum_\alpha (-1)^{|K|}\frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\,w_K\wedge\Big(\frac{\partial}{\partial \bar z_\alpha}\lrcorner\,\bar w_L\Big) + \mathcal{O}(|z|),$$

$$\delta'(v\,w_K\wedge\bar w_L) = -2\sum_\alpha \frac{\partial v}{\partial \bar z_\alpha}\Big(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\lrcorner\,w_K\Big)\wedge\bar w_L + \mathcal{O}(|z|).$$

Démonstration - Soient $u = \sum_{I,J} u_{I,J}\,w_I\wedge\bar w_J$ et $v\,w_K\wedge\bar w_L$ des formes à support compact dans un voisinage de l'origine $z=0$. Par définition de l'adjoint, il vient

$$
\begin{aligned}
& \langle \sum_{I,J} u_{I,J}\, w_I \wedge \bar{w}_J \,, \delta''(v\, w_K \wedge \bar{w}_L) \rangle \\
= \;& \langle \sum_{I,J} d''(u_{I,J}\, w_I \wedge \bar{w}_J) \,, v\, w_K \wedge \bar{w}_L \rangle \\
= \;& \int_X \sum_{I,J} \qquad \sum_\alpha \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_\alpha}\, \bar{v}\; \underbrace{\langle \bar{w}_\alpha \wedge w_I \wedge \bar{w}_J \,, w_K \wedge \bar{w}_L \rangle}_{I=K, J\cup\{\alpha\}=L} \\
& \quad + \sum_{I,J} \Big[u_{I,J} \mathcal{O}(|z|) + \sum_\alpha \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_\alpha} \Big(\bar{z} + \mathcal{O}(|z|^2) \Big) + \sum_\alpha \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_\alpha} \mathcal{O}(|z|^2) \Big] \\
= \;& \int_X \sum_{\alpha \in L} \frac{\partial u_{K, L\setminus\{\alpha\}}}{\partial \bar{z}_\alpha}\, \bar{v}\, (-1)^{|K|}\, \varepsilon(\{\alpha\}, L \setminus \{\alpha\}) \Big(2^{|K|+|L|} + \mathcal{O}(|z|^2) \Big) \\
& \quad + \sum_{I,J} \Big[u_{I,J} \mathcal{O}(|z|) + \sum_\alpha \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_\alpha} \Big(\bar{z} + \mathcal{O}(|z|^2) \Big) + \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_\alpha} \Big(\mathcal{O}(|z|^2) \Big) \Big] \\
= \;& \int_X \sum_{\alpha \in L} -u_{K, L\setminus\{\alpha\}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}_\alpha}\, (-1)^{|K|}\, \varepsilon(\{\alpha\}, L \setminus \{\alpha\})\, 2^{|K|+|L|} \\
& \quad + \sum_{I,J} u_{I,J}\, \mathcal{O}(|z|) \\
= \;& \Big\langle \sum_{I,J} u_{I,J}\, w_I \wedge \bar{w}_J \,,\, - \sum_{\alpha \in L} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\, (-1)^{|K|}\, \varepsilon(\{\alpha\}, L \setminus \{\alpha\})\, 2\, w_K \wedge \bar{w}_{L\setminus\{\alpha\}} + \mathcal{O}(|z|) \Big\rangle
\end{aligned}
$$

On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
& \delta''(v\, w_K \wedge \bar{w}_L) \\
& \quad = \; - \sum_{\alpha \in L} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\, (-1)^{|K|}\, \varepsilon(\{\alpha\}, L \setminus \{\alpha\})\, 2\, w_K \wedge \bar{w}_{L\setminus\{\alpha\}} + \mathcal{O}(|z|) \\
& \quad = \; -2 \sum_\alpha (-1)^{|K|}\, \frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\, w_K \wedge \Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \lrcorner\, \bar{w}_L \Big) + \mathcal{O}(|z|)
\end{aligned}
$$

$\square$

1.3.4 Relations de commutation

Propriété 1.12.

$$\Big[\delta''\,,L\Big]\big(v\,w_K\wedge\bar w_L\big)=i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial z_k}\,w_k\wedge w_K\wedge\bar w_L+\mathcal{O}(|z|),$$

$$\Big[\delta'\,,L\Big]\big(v\,w_K\wedge\bar w_L\big)=-i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial\bar z_k}\,\bar w_k\wedge w_K\wedge\bar w_L+\mathcal{O}(|z|).$$

Démonstration - Commençons par voir que

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big[w_k+\frac{i}{2}\sum_{l}\bar B_{k,l}\,\bar w_l+\mathcal{O}(|z|^2)\Big]\wedge\Big[\bar w_k-\frac{i}{2}\sum_{l}B_{k,l}\,w_l+\mathcal{O}(|z|^2)\Big]+\mathcal{O}(|z|^2)\\
&= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}w_k\wedge\bar w_k+\frac{1}{4}\underbrace{\sum_{k,l}B_{k,l}\,w_k\wedge w_l}_{=0\ \text{ car } B_{k,l}\text{ symétrique}}-\frac{1}{4}\underbrace{\sum_{k,l}\bar B_{k,l}\,\bar w_l\wedge\bar w_k}_{=0\ \text{ car } B_{k,l}\text{ symétrique}}+\mathcal{O}(|z|^2)\\
&= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}w_k\wedge\bar w_k+\mathcal{O}(|z|^2)
\end{aligned}$$

On notera dans la suite, pour simplifier :

$$\omega_0=\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}w_k\wedge\bar w_k.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Big[\delta''\,,L\Big]\big(v\,w_K\wedge\bar w_L\big) &= \delta''\big(v\,\omega\wedge w_K\wedge\bar w_L\big)-\omega\wedge\delta''\big(v\,w_K\wedge\bar w_L\big)\\
&= \delta''\big(v\,\omega_0\wedge w_K\wedge\bar w_L\big)-\omega_0\wedge\delta''\big(v\,w_K\wedge\bar w_L\big)+\mathcal{O}(|z|)
\end{aligned}$$

Si $k \notin K$,

$$\begin{aligned}
&\delta''\big(v\, w_k \wedge \bar{w}_k \wedge w_K \wedge \bar{w}_L\big)\\
&= (-1)^{|K|}\, \delta''\big(v\, w_k \wedge w_K \wedge \bar{w}_k \wedge \bar{w}_L\big)\\
&= -2\sum_\alpha (-1)^{|K|}\,(-1)^{|K|+1}\,\frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\, w_k \wedge w_K \wedge \big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \lrcorner\, (\bar{w}_k \wedge \bar{w}_L)\big) + \mathcal{O}(|z|)\\
&= 2\sum_\alpha \frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\, w_k \wedge w_K \wedge \Big[(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \lrcorner\, \bar{w}_k)\, \bar{w}_L - \bar{w}_k \wedge (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \lrcorner\, \bar{w}_L\Big] + \mathcal{O}(|z|)\\
&= 2\,\frac{\partial v}{\partial z_k}\, w_k \wedge w_K \wedge \bar{w}_L - 2\sum_\alpha \frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\, w_k \wedge w_K \wedge \bar{w}_k \wedge (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \lrcorner\, \bar{w}_L) + \mathcal{O}(|z|)\\
&= w_k \wedge \bar{w}_k \wedge \delta''\big(v\, w_K \wedge \bar{w}_L\big) + 2\,\frac{\partial v}{\partial z_k}\, w_k \wedge w_K \wedge \bar{w}_L + \mathcal{O}(|z|)\\
&= w_k \wedge \bar{w}_k \wedge \delta''\big(v\, w_K \wedge \bar{w}_L\big) + 2\,\frac{\partial v}{\partial z_k}\, w_k \wedge w_K \wedge \bar{w}_L + \mathcal{O}(|z|)
\end{aligned}$$

Et si $k \in K$, la formule reste encore vraie puisque les deux membres de l'égalité valent 0.
Donc

$$\Big[\delta''\,, L\Big]\big(v\, w_K \wedge \bar{w}_L\big) = i\sum_k \frac{\partial v}{\partial z_k}\, w_k \wedge w_K \wedge \bar{w}_L + \mathcal{O}(|z|)$$

□

Nous avons donc, au point $z = 0$:

$$\big[\delta''\,, L\big] = id'.$$

Il s'en suit aussitôt la

Propriété 1.13.

$$\begin{aligned}
\big[\delta''\,, L\big] &= id' & \qquad \big[\Lambda\,, d''\big] &= -i\delta'\\
\big[\delta'\,, L\big] &= -id'' & \qquad \big[\Lambda\,, d'\big] &= i\delta''
\end{aligned}$$

Posons $\Delta' = d'\delta' + \delta' d' = \big[d'\,, \delta'\big]$, $\Delta'' = d''\delta'' + \delta'' d'' = \big[d''\,, \delta''\big]$ et $\Delta = d\delta + \delta d = \big[d\,, \delta\big]$. Nous avons alors la

Propriété 1.14.

$$\Delta'' = \Delta' + T$$

où $T = -i\big[\Lambda\,, [d'\,, d'']\big]$ est d'ordre 0 (car $[d'\,, d''] = -[\theta', \theta'']$).

Démonstration -

$$\begin{aligned}
\Delta'' &= \big[d''\,, \delta''\big] = \big[d''\,, -i[\Lambda\,, d']\big]\\
&= -i\big[d''\,, [\Lambda\,, d']\big]
\end{aligned}$$

or l'idendité de Jacobi donne : $\quad -\big[d'' , [\Lambda , d']\big] + \big[\Lambda , [d' , d'']\big] + \big[d' , [d'' , \Lambda]\big] = 0$
donc

$$\begin{aligned} \Delta'' &= -i\big[d' , [d'' , \Lambda]\big] - i\big[\Lambda , [d' , d'']\big] \\ &= \big[d' , \delta'\big] - i\big[\Lambda , [d' , d'']\big] \end{aligned}$$

□

Signalons encore les deux formules classiques suivantes :
Propriété 1.15.

$$\big[d'' , L\big] = 0 \quad et \quad \big[L , \Lambda\big] = (p + q - n)\,\mathrm{Id} \qquad sur \ \bigwedge^{p,q} T^*X \, .$$

Démonstration - $d(\omega \wedge \Phi) = d\omega \wedge \Phi + \omega \wedge d\Phi = \omega \wedge d\Phi$, donc $d''(\omega \wedge \Phi) = \omega \wedge d''\Phi$. Ceci établit la première relation. Concernant la seconde, nous avons

$$\begin{aligned} \big[L , \Lambda\big](dz_I \wedge d\bar z_J) &= L\Lambda(dz_I \wedge d\bar z_J) - \Lambda L(dz_I \wedge d\bar z_J) \\ &= \underbrace{L\Big(-2i \sum_k \frac{\partial}{\partial \bar z_k} \lrcorner \frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner \, dz_I \wedge d\bar z_J\Big)}_{\alpha} - \underbrace{\Lambda\Big(\frac{i}{2} \sum_k dz_k \wedge d\bar z_k \wedge dz_I \wedge d\bar z_J\Big)}_{\beta} \end{aligned}$$

Or

$$\alpha = \sum_{k,l} dz_k \wedge d\bar z_k \wedge \frac{\partial}{\partial \bar z_k} \lrcorner \frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner (dz_I \wedge d\bar z_J)$$

et

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial \bar z_l} \lrcorner \frac{\partial}{\partial z_l} \lrcorner (dz_k \wedge d\bar z_k \wedge dz_I \wedge d\bar z_J) \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial \bar z_l} \lrcorner \Big\{ \frac{\partial}{\partial z_l} \lrcorner (dz_k \wedge d\bar z_k) \wedge dz_I \wedge d\bar z_J + dz_k \wedge d\bar z_k \wedge \frac{\partial}{\partial z_l} \lrcorner (dz_I \wedge d\bar z_J) \Big\} \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial \bar z_l} \lrcorner \frac{\partial}{\partial z_l} \lrcorner (dz_k \wedge d\bar z_k) \wedge dz_I \wedge d\bar z_J - \frac{\partial}{\partial z_l} \lrcorner (dz_k \wedge d\bar z_k) \wedge \frac{\partial}{\partial \bar z_l} \lrcorner (dz_I \wedge d\bar z_J) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial \bar z_l} \lrcorner (dz_k \wedge d\bar z_k) \wedge \frac{\partial}{\partial z_l} \lrcorner (dz_I \wedge d\bar z_J) + dz_k \wedge d\bar z_k \wedge \frac{\partial}{\partial \bar z_l} \lrcorner \frac{\partial}{\partial \bar z_l} \lrcorner (dz_I \wedge d\bar z_J) \\ &= n dz_I \wedge d\bar z_J - \sum_k d\bar z_k \wedge \frac{\partial}{\partial \bar z_k} \lrcorner (dz_I \wedge d\bar z_J) - \sum_k dz_k \wedge \frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner (dz_I \wedge d\bar z_J) + \alpha \\ &= n \, dz_I \wedge d\bar z_J - |J| \, dz_I \wedge d\bar z_J - |I| \, dz_I \wedge d\bar z_J + \alpha \\ &= \alpha - (|I| + |J| - n) \, dz_I \wedge d\bar z_J \end{aligned}$$

□

1.4 Formules sur un fibré

1.4.1 Connexions de type (1,0) et (0,1)

Soit (X,J) une variété presque complexe et $E \to X$ un fibré complexe C^∞ de rang (complexe) $r \geq 1$. On note $C^\infty_{p,q}(X,E)$ l'espace des sections C^∞ du fibré $\bigwedge^{p,q} T^*_{\mathbb{C}}X \otimes E$. On a alors la décomposition

$$C^\infty_k(X,E) = \bigoplus_{p+q=k} C^\infty_{p,q}(X,E)$$

Les connexions de type (1,0) ou (0,1) sont des opérateurs agissant sur les formes à valeurs vectorielles et imitant les opérateurs usuels d', d'' agissant sur $C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C})$. Plus précisément, une connexion de type (1,0) sur E est un opérateur différentiel D' d'ordre 1 agissant sur $C^\infty_{\bullet,\bullet}(X,E)$ et vérifiant :

$$D' : C^\infty_{p,q}(X,E) \to C^\infty_{p+1,q}(X,E) \ , \quad D'(f \wedge s) = d'f \wedge s + (-1)^{\deg f} f \wedge D's$$

pour toutes $f \in C^\infty_{p_1,q_1}(X,\mathbb{C})$ et $s \in C^\infty_{p_2,q_2}(X,E)$ telles que $p_1 + p_2 = p$, $q_1 + q_2 = q$.

Dans une trivialisation $E_{|U_\alpha} \simeq_{\theta_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$, de repère local associé $(e^\alpha_1,\ldots,e^\alpha_r)$, posons $D'e^\alpha_k = \sum_{j=1}^r {A^\alpha_{jk}}' \otimes e^\alpha_j$, où ${A^\alpha_{jk}}' \in C^\infty_{1,0}(U_\alpha,\mathbb{C})$. Pour $s = \sum_{j=1}^r \sigma^\alpha_j \otimes e^\alpha_j \in C^\infty_{p,q}(U_\alpha,E)$, il vient l'écriture suivante :

$$D's = \sum_{j=1}^r \left(d'\sigma^\alpha_j + \sum_{k=1}^r {A^\alpha_{jk}}' \wedge \sigma^\alpha_k \right) \otimes e^\alpha_j \ , \qquad \text{i.e. } D's \simeq_{\theta_\alpha} d'\sigma^\alpha + A^{\alpha\prime} \wedge \sigma^\alpha$$

avec $A^{\alpha\prime} \in C^\infty_{1,0}(U_\alpha, \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^r))$. La définition et l'écriture locale d'une (0,1)-connexion sont similaires.

Propriété 1.16. *Soit (X,J) une variété presque complexe, $E \to X$ un fibré complexe de rang r et ∇ une connexion sur E. Alors ∇ se décompose de manière unique en*

$$\nabla = \partial_E + \bar\partial_E - \theta'_E - \theta''_E$$

où ∂_E est une connexion de type (1,0), $\bar\partial_E$ une connexion de type (0,1), et θ'_E, θ''_E deux opérateurs globaux $C^\infty(X,\mathbb{C})$-linéaires. De plus, ∂_E et $\bar\partial_E$ sont conjugués, tout comme θ'_E et θ''_E.

Démonstration - Dans une trivialisation $E_{|U_\alpha} \simeq_{\theta_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ de repère local $(e^\alpha_1,\ldots,e^\alpha_r)$ associé, on a $\nabla \simeq_{\theta_\alpha} d + A^\alpha\wedge$ et $A^\alpha = A^{\alpha\prime} + A^{\alpha\prime\prime} \in C^\infty_1(U_\alpha, \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^r))$, la décomposition étant relative à J. On pose alors

$$\begin{aligned}
\partial_E(s) &= \sum_{j=1}^{r}\left(d'\sigma_j^\alpha + \sum_{k=1}^{r} A_{jk}^{\alpha}{}' \wedge \sigma_k^\alpha\right)\otimes e_j^\alpha \simeq_{\theta_\alpha} d'\sigma^\alpha + A^{\alpha\prime}\wedge\sigma^\alpha,\\
\bar\partial_E(s) &\simeq_{\theta_\alpha} d''\sigma^\alpha + A^{\alpha\prime\prime}\wedge\sigma^\alpha,\\
\theta'_E(s) &= \sum_{j=1}^{r}\theta'(\sigma_j^\alpha)\otimes e_j^\alpha,\\
\theta''_E(s) &= \sum_{j=1}^{r}\theta''(\sigma_j^\alpha)\otimes e_j^\alpha.
\end{aligned}$$

Montrons, par exemple pour ∂_E, que cette écriture locale fournit effectivement un opérateur global. Si on considère une autre trivialisation $E_{|U_\beta} \simeq_{\theta_\beta} U_\beta \times \mathbb{C}^r$, soit $g = g_{\alpha\beta}$ la matrice de transition. Sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on a $\sigma^\alpha = g_{\alpha\beta}\sigma^\beta$ et $A^\beta = g^{-1}A^\alpha g + g^{-1}dg$. Ainsi

$$\begin{aligned}
d'\sigma^\alpha + A^{\alpha\prime}\wedge\sigma^\alpha &= d'(g\sigma^\beta) + g\left(g^{-1}A^{\alpha\prime}g\right)\wedge(g^{-1}\sigma^\alpha)\\
&= d'g\wedge\sigma^\beta + gd'\sigma^\beta + g\left(g^{-1}A^\alpha g\right)'\wedge\sigma^\beta\\
&= d'g\wedge\sigma^\beta + gd'\sigma^\beta + gA^{\beta\prime}\wedge\sigma^\beta - gg^{-1}d'g\wedge\sigma^\beta\\
&= g\left(d'\sigma^\beta + A^{\beta\prime}\wedge\sigma^\beta\right)
\end{aligned}$$

Cela établit que ∂_E, défini à priori localement, est effectivement un opérateur global. $\square$

1.4.2 Formules de commutation

Considérons maintenant une variété presque kählérienne (X,ω,J), et $E \to X$ un fibré complexe C^∞ de rang r, muni d'une métrique hermitienne h et d'une connexion ∇ compatible avec h.

L s'étend en un opérateur sur E via $L(s) = \omega \wedge s$ pour $s \in C^\infty_{p,q}(X,E)$ (i.e. $L := L \otimes \mathrm{Id}_E$).

La métrique riemannienne de X et celle hermitienne de E permettent de définir les adjoints δ'_E, δ''_E, ${\theta'_E}^*$, ${\theta''_E}^*$ et Λ de ∂_E, $\bar\partial_E$, θ'_E, θ''_E et L.

Choisissons une trivialisation isométrique $E_{|U_\alpha} \simeq_{\theta_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$, de repère associé $(e_1^\alpha, \ldots, e_r^\alpha)$. Soient $s = \sum \sigma_j^\alpha \otimes e_j^\alpha$ et $t = \sum \tau_j^\alpha \otimes e_j^\alpha$ des sections à support compact dans U_α :

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle \delta''_E(s),t\rangle\!\rangle_E &= \langle\!\langle s,\bar\partial_E(t)\rangle\!\rangle_E \\
&= \int \langle \sum\nolimits_j \sigma_j^\alpha \otimes e_j^\alpha \,,\, \sum\nolimits_j (d''\tau_j^\alpha + \sum\nolimits_k A_{jk}^{\alpha\,\prime\prime} \wedge \tau_k^\alpha) \otimes e_j^\alpha \,\rangle dV_\omega \\
&= \int \sum\nolimits_j \langle \sigma_j^\alpha \,, d''\tau_j^\alpha + \sum\nolimits_k A_{jk}^{\alpha\,\prime\prime} \wedge \tau_k^\alpha \rangle \cdot \underbrace{h(e_j^\alpha,e_j^\alpha)}_{=1} \, dV_\omega \\
&= \sum\nolimits_j \langle\!\langle \sigma_j^\alpha, d''\tau_j^\alpha\rangle\!\rangle_X + \sum\nolimits_{j,k} \langle\!\langle \sigma_j^\alpha, A_{jk}^{\alpha\,\prime\prime} \wedge \tau_k^\alpha\rangle\!\rangle_X \\
&= \sum\nolimits_j \langle\!\langle \delta''\sigma_j^\alpha, \tau_j^\alpha\rangle\!\rangle_X + \sum\nolimits_{j,k} \langle\!\langle (A_{jk}^{\alpha\,\prime\prime})^* \,\sigma_j^\alpha, \tau_k^\alpha\rangle\!\rangle_X \\
&= \sum\nolimits_j \langle\!\langle \delta''\sigma_j^\alpha + \sum\nolimits_k (A_{kj}^{\alpha\,\prime\prime})^* \,\sigma_k^\alpha \,,\, \tau_j^\alpha\rangle\!\rangle_X \\
&= \langle\!\langle \sum\nolimits_j \left(\delta''\sigma_j^\alpha + \sum\nolimits_k (A_{kj}^{\alpha\,\prime\prime})^* \,\sigma_k^\alpha\right) \otimes e_j^\alpha \,,\, \sum\nolimits_l \tau_l^\alpha \otimes e_l^\alpha \rangle\!\rangle_E
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\delta''_E(s) = \sum_{j=1}^{r} \left(\delta''\sigma_j^\alpha + \sum\nolimits_k (A_{kj}^{\alpha\,\prime\prime})^* \,\sigma_k^\alpha\right) \otimes e_j^\alpha \,, \quad \text{i.e. } \delta''_E \simeq_{\theta_\alpha} \delta''\sigma^\alpha + (A^{\alpha\prime\prime})^*(\sigma^\alpha).
$$

Nous pouvons choisir une trivialisation isométrique $\tilde\theta_\alpha$ telle que $\tilde A^\alpha = \mathcal{O}(|z|)$. En effet, considérons une trivialisation isométrique $E_{|U_\alpha} \simeq_{\theta_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$: le repère local $(e_1^\alpha,\ldots,e_r^\alpha)$ est orthonormé. Nous avons $H^\alpha \equiv \mathrm{Id}$ et iA^α est hermitienne. Donc $iA^\alpha(z) = B + \mathcal{O}(|z|)$ avec B matrice hermitienne constante. Elle est diagonalisable en base orthonormée :

$$
P^{-1}BP = \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \lambda_j = \sum_k a_k^j dz_k + \bar a_k^j d\bar z_k \text{ et } {}^t\bar P = P^{-1}.
$$

Posons

$$
\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r \end{pmatrix}, \mu_j = \sum_k a_k^j z_k + \bar a_k^j \bar z_k \quad \text{et } g = P\mathrm{e}^{i\mu}P^{-1}.
$$

Notons que λ, μ et $\mathrm{e}^{i\mu}$ commutent deux à deux, car ce sont des matrices diagonales. Donc B et g commutent aussi.

g définit une nouvelle trivialisation $\tilde\theta_\alpha$. Calculons :

$$
dg = P\,id\mu\,\mathrm{e}^{i\mu}P^{-1} = iP\lambda\mathrm{e}^{i\mu}P^{-1} = iP\mathrm{e}^{i\mu}\lambda P^{-1} = i(P\mathrm{e}^{i\mu}P^{-1})(P\lambda P^{-1}) = igB.
$$

Donc $g^{-1}dg = iB$. Il s'en suit que

$$
\begin{aligned}
\tilde A^\alpha &= g^{-1}A^\alpha g + g^{-1}dg = g^{-1}(-iB + \mathcal{O}(|z|))g + g^{-1}dg \\
&= -ig^{-1}Bg + iB + \mathcal{O}(|z|) \\
&= -ig^{-1}gB + iB + \mathcal{O}(|z|) \\
&= \mathcal{O}(|z|)
\end{aligned}
$$

Et $\tilde{H}^\alpha = {}^t\!gH^\alpha\bar{g} = {}^t\!g\bar{g} = {}^tP^{-1}\mathrm{e}^{i\mu}\,{}^tP\bar{P}\mathrm{e}^{-i\mu}\bar{P}^{-1} = \bar{P}\mathrm{e}^{i\mu}\bar{P}^{-1}\bar{P}\mathrm{e}^{-i\mu}\bar{P}^{-1} = \mathrm{Id}$. Donc la nouvelle trivialisation est encore isométrique, et $\tilde{A}^\alpha = \mathcal{O}(|z|)$.

Ainsi, dans cette nouvelle trivialisation :

$$\begin{array}{rcl} Ls & \simeq & \omega\wedge\tilde{\sigma}^\alpha \\ \partial_E s & \simeq & d'\tilde{\sigma}^\alpha + \mathcal{O}(|z|) \\ \delta''_E s & \simeq & \delta''\tilde{\sigma}^\alpha + \mathcal{O}(|z|) \end{array}$$

Ce développement de Taylor des opérateurs montre que le calcul de $[\delta''_E,L]$ se ramène au cas scalaire. Nous avons donc

$$[\delta''_E,L] = i\partial_E.$$

Nous en déduisons les formules de commutation suivantes :

Théorème 1.17.

$$\begin{array}{rclcrcl} [\delta''_E\,,L] & = & i\partial_E\,, & \qquad & [\delta'_E\,,L] & = & -i\bar{\partial}_E\,, \\ [\Lambda\,,\bar{\partial}_E] & = & -i\delta'_E\,, & & [\Lambda\,,\partial_E] & = & i\delta''_E\,. \end{array}$$

1.4.3 Formule de type Bochner-Kodaira-Nakano

Propriété 1.18.

$$\nabla^{2(1,1)} = [\partial_E,\bar{\partial}_E] + [\theta'_E,\theta''_E].$$

Démonstration -

$$\begin{array}{rcl} \nabla^2 & = & (\partial_E+\bar{\partial}_E-\theta'_E-\theta''_E)(\partial_E+\bar{\partial}_E-\theta'_E-\theta''_E) \\ & = & {\partial_E}^2+\bar{\partial}_E^2+{\theta'_E}^2+{\theta''_E}^2+[\partial_E,\bar{\partial}_E]+[\theta'_E,\theta''_E]-[\partial_E,\theta'_E]-[\partial_E,\theta''_E]-[\bar{\partial}_E,\theta'_E] \\ & & -[\bar{\partial}_E,\theta''_E]\,. \end{array}$$

La propriété vient immédiatement en séparant les bidegrés. □

Calculons maintenant

$$\begin{array}{rcl} \Delta''_E & = & [\bar{\partial}_E,\delta''_E] \\ & = & \Big[\bar{\partial}_E,-i\,[\Lambda,\partial_E]\Big] \\ & = & -i\Big[\bar{\partial}_E,[\Lambda,\partial_E]\Big]\,. \end{array}$$

L'identité de Jacobi donne

$$-\Big[\bar{\partial}_E,[\Lambda,\partial_E]\Big]+\Big[\Lambda,[\partial_E,\bar{\partial}_E]\Big]+\Big[\partial_E,[\bar{\partial}_E,\Lambda]\Big]=0\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\Delta''_E &= -i\Big[\Lambda,[\partial_E,\bar\partial_E]\Big] - i\Big[\partial_E,[\bar\partial_E,\Lambda]\Big]\\ &= -i\Big[\Lambda,[\partial_E,\bar\partial_E]\Big] - i[\partial_E,i\delta'_E]\\ &= \Delta'_E - i\Big[\Lambda,\nabla^{2(1,1)} - [\theta'_E,\theta''_E]\Big]\\ &= \Delta'_E + i\Big[\nabla^{2(1,1)},\Lambda\Big] + i\Big[\Lambda,[\theta'_E,\theta''_E]\Big]\,.\end{aligned}$$

Or $\nabla^2 s = \Theta_{(E,\nabla)} \wedge s$, et Λ est scalaire dans les fibres de E. Donc $\Big[\nabla^{2(1,1)},\Lambda\Big] = [\Theta^{(1,1)}_{(E,\nabla)},\Lambda]$.

Nous avons donc démontré le

Théorème 1.19.

$$\Delta''_E = \Delta'_E + i[\Theta^{(1,1)}_{(E,\nabla)},\Lambda] + T$$

où $\Theta_{(E,\nabla)}$ est la courbure de (E,∇) et $T = i\Big[\Lambda,[\theta'_E,\theta''_E]\Big]$ est un opérateur scalaire d'ordre 0.

Remarquons que $i[\Theta^{(1,1)}_{(E,\nabla)},\Lambda]$ n'agit sur la partie E de $\bigwedge^{\bullet,\bullet} T^*X \otimes E$ que via $\Theta^{(1,1)}_{(E,\nabla)}$ (si E est de rang $r = 1$, alors il n'agit pas sur E). Et T n'agit que sur la partie $\bigwedge^{\bullet,\bullet} T^*X$ de $\bigwedge^{\bullet,\bullet} T^*X \otimes E$.

1.4.4 Cas particulier

Propriété 1.20. *Soit (X,ω) une variété symplectique telle que $[\omega]_{dR}$ soit entière. Alors il existe $(E,h) \to X$ fibré en droites complexes hermitien et ∇ connexion sur E tels que $\frac{i}{2\pi}\nabla^2 = \omega$.*

Donnons-nous donc (X^{2n},J,ω) variété presque kählérienne entière (i.e. telle que $[\omega]_{dR} \in H^2(M,\mathbb{R})$), et $E \to X$ fibré en droites complexes (i.e. de rang 1) muni d'une métrique hermitienne h et d'une connexion ∇ compatible de courbure $\frac{i}{2\pi}\nabla^2 = \omega$. Nous avons alors le

Théorème 1.21. *En bidegré (p,q),*

$$\Delta''_E = \Delta'_E + 2\pi(p+q-n) + T$$

où $T = i\Big[\Lambda,[\theta'_E,\theta''_E]\Big]$ est un opérateur scalaire d'ordre 0.

Chapitre 2

Cas d'une variété complexe hermitienne et d'un fibré non holomorphe

Résumé

Ce chapitre n'a rien d'original. Nous reprenons simplement la formule de type Bochner-Kodaira-Nakano démontrée par Jean-Pierre Demailly dans le cas d'un fibré holomorphe au-dessus d'une variété hermitienne, et montrons qu'elle s'adapte encore au cas d'un fibré non nécessairement holomorphe, quitte à ne considérer que la partie de type (1,1) de la courbure du fibré. Cette formule nous sera utile dans la seconde partie.

Soit (X,ω) une variété hermitienne de dimension (complexe) n, et (E,h_E,D_E) un fibré hermitien $\boldsymbol{C}^\infty$ de rang r (la connexion D_E étant hermitienne).

Nous avons la décomposition canonique $D_E = D'_E + D''_E$ (si $D \simeq d + A$, alors $D' \simeq d' + A'$ et $D'' \simeq d'' + A''$). Remarquons que, D_E étant hermitienne, la forme de connexion vérifie, dans une trivialisation isométrique, $A' = -(A'')^*$.

Théorème 2.1. *Notant $\tau = \left[\Lambda, d'\omega\right]$, nous avons alors*

$$\begin{aligned} \left[\delta''_E\,, L\right] &= i(D'_E + \tau) & \qquad \left[\Lambda\,, D''_E\right] &= -i(\delta'_E + \tau^*) \\ \left[\delta'_E\,, L\right] &= -i(D''_E + \bar\tau) & \qquad \left[\Lambda\,, D'_E\right] &= i(\delta''_E + \bar\tau^*) \end{aligned}$$

Démonstration - $D's \simeq \sum_\lambda (d\sigma_\lambda) \otimes e_\lambda + \mathcal{O}(|z|)$, $\delta''_E s \simeq (\delta''\sigma_\lambda) \otimes e_\lambda + \mathcal{O}(|z|)$. Ceci nous ramène au cas scalaire. □

Théorème 2.2.

$$\Delta''_E = \Delta'_E + \left[i(D_E^2)^{(1,1)}\,, \Lambda\right] + \left[D'_E\,, \tau^*\right] - \left[D''_E\,, \bar\tau^*\right].$$

Démonstration -

$$\begin{aligned}
\Delta''_E &= \big[D''_E\,,\delta''_E\big] = \big[D''_E\,,\,-i[\Lambda,D'_E]-\bar\tau^*\big] = -i\big[D''_E\,,[\Lambda,D'_E]\big] - \big[D''_E\,,\bar\tau^*\big]\\
&= -i\Big(\big[\Lambda\,,\underbrace{[D'_E,D''_E]}_{(D_E^2)^{(1,1)}}\big] + \big[D'_E\,,[D''_E,\Lambda]\big]\Big) - [D''_E,\bar\tau^*]\\
&= -i\big[\Lambda\,,(D_E^2)^{(1,1)}\big] - i\big[D'_E\,,i(\delta'_E+\tau^*)\big] - \big[D''_E,\bar\tau^*\big]\\
&= [D'_E,\delta'_E] + \big[i(D_E^2)^{(1,1)},\Lambda\big] + [D'_E,\tau^*] - [D''_E,\bar\tau^*]
\end{aligned}$$

$\square$

Propriété 2.3.

$$[L\,,\tau] = 3d'\omega \qquad et \qquad [\Lambda\,,\tau] = -2i\bar\tau^*$$

Démonstration -

- $[L,d'\omega] = \omega\wedge d'\omega - d'\omega\wedge\omega = 0$ (ω est de degré 2, donc commute au wedge)
-

$$\begin{aligned}
[L,\tau] &= \big[L,[\Lambda,d'\omega]\big] \overset{Jacobi}{=} -\big[d'\omega,[L,\Lambda]\big]\\
&= -\big(d'\omega(p+q-n) - (p+q+3-n)d'\omega\big) = 3d'\omega
\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}
[\Lambda,\tau] &= \big[\Lambda,-i[\delta''_E,L] - D'_E\big] = -i\big[\Lambda,[\delta''_E,L]\big] - [\Lambda,D'_E]\\
&\overset{(Jacobi)}{=} -i\Big(-\big[L,[\Lambda,\delta''_E]\big] - \big[\delta''_E,[L,\Lambda]\big] - i(\delta''_E+\bar\tau^*)\Big)\\
&= i\big[L,[\Lambda,\delta''_E]\big] + i\big(\delta''_E(p+q-n) - (p+q-1-n)\delta''_E\big) - i(\delta''_E+\bar\tau^*)\\
&= i\big[L,[\Lambda,\delta''_E]\big] - i\bar\tau^*\\
&= i\big[[D''_E,L],\Lambda\big]^* - i\bar\tau^*\\
&= i[d''\omega,\Lambda]^* - i\bar\tau^* = -i[\Lambda,d''\omega]^* - i\bar\tau^* = -2i\bar\tau^*
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
[D''_E,L] &= (d''+A'')(\omega\wedge\cdot) - \omega\wedge(d''+A'') = d''(\omega\wedge\cdot) + A''\wedge\omega - \omega\wedge d'' - \omega\wedge A''\\
&= (d''\omega) + \omega\wedge d'' - \omega\wedge d'' = d''\omega
\end{aligned}$$

$\square$

Propriété 2.4.

$$\big[D''_E\,,\bar\tau^*\big] = -\Big(T_\omega + [\tau\,,\delta'_E+\tau^*]\Big) \quad où\ \ T_\omega = \big[\Lambda,[\Lambda,\frac{i}{2}d'd''\omega]\big] - \big[d'\omega,(d'\omega)^*\big]\,.$$

Démonstration -

- $[\Lambda,\tau] = -2i\bar{\tau}^*$, donc $\bar{\tau}^* = \frac{i}{2}[\Lambda,\tau]$, donc

$$\big[D''_E,\bar{\tau}^*\big] = \frac{i}{2}\big[D''_E,[\Lambda,\tau]\big] = \frac{i}{2}\left(\big[\tau,[D''_E,\Lambda]\big] + \big[\Lambda,[\tau,D''_E]\big]\right) .$$

- On a $[d'\omega,D''_E] = d''d'\omega$. Notons $C = [D''_E,\Lambda]$. Nous avons alors

$$\begin{array}{rcl}
\big[\tau,D''_E\big] & = & \big[D''_E,\tau\big] = \big[D''_E,[\Lambda,d'\omega]\big] = \big[d'\omega,[D''_E,\Lambda]\big] + \big[\Lambda,[d'\omega,[D''_E]\big] \\
 & = & [d'\omega,C] + [\Lambda,d''d'\omega] \\
\big[\Lambda,[\tau,D''_E]\big] & = & \big[\Lambda,[d'\omega,C]\big] + \big[\Lambda,[\Lambda,d''d'\omega]\big] \\
 & = & \big[C,[\Lambda,d'\omega]\big] - \big[d'\omega,[C,\Lambda]\big] + \big[\Lambda,[\Lambda,d''d'\omega]\big] \\
 & = & [C,\tau] + \big[d'\omega,[\Lambda,C]\big] + \big[\Lambda,[\Lambda,d''d'\omega]\big] \\
\text{Or} \quad [\Lambda,C] & = & \big[\Lambda,i(\delta'_E+\tau^*)\big] = i\big[\Lambda,\delta'_E+\tau^*\big] = i\big[D'_E+\tau,L\big]^* \\
 & = & i\left([D'_E,L] + [\tau,L]\right)^* = i\left(d'\omega - 3d'\omega\right)^* = -2i(d'\omega)^* \\
\text{d'où} \quad \big[\Lambda,[\tau,D''_E]\big] & = & [\tau,C] - 2i[d'\omega,(d'\omega)^*] + \big[\Lambda,[\Lambda,d''d'\omega]\big] \\
 & = & \big[\tau,[D''_E,\Lambda]\big] - 2i[d'\omega,(d'\omega)^*] + \big[\Lambda,[\Lambda,d''d'\omega]\big] \\
\text{Donc} \quad \big[D''_E,[\Lambda,\tau]\big] & = & 2\big[\tau,\underbrace{[D''_E,\Lambda]}_{i(\delta'_E+\tau^*)}\big] - 2i[d'\omega,(d'\omega)^*] + \big[\Lambda,[\Lambda,d''d'\omega]\big] \\
 & = & 2i\Big(\big[\Lambda,[\Lambda,-\frac{i}{2}d''d'\omega]\big] - [d'\omega,(d'\omega)^*]\Big) + 2i[\tau,\delta'_E+\tau^*]
\end{array}$$

- D'où $\big[D''_E,\bar{\tau}^*\big] = -T_\omega - \big[\tau,\delta'_E+\tau^*\big]$.

$\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la formule de type Bochner-Kodaira-Nakano. Bien sûr, elle est pratiquement identique à celle obtenue par Jean-Pierre Demailly, le caractère holomorphe du fibré n'intervenant que dans le fait que la courbure d'un fibré holomorphe est de type (1,1).

Théorème 2.5. *Si (X,ω) est une variété complexe hermitienne et $(E,h_E,D_E) \to X$ un fibré hermitien C^∞, alors :*

1) $\Delta'_\tau := \big[D'_E+\tau\,,\delta'_E+\tau^*\big]$ *est un opérateur positif formellement autoadjoint de même partie principale que Δ'.*

2) Notant $T_\omega = \big[\Lambda\,,\big[\Lambda\,,\frac{i}{2}d'd''\omega\big]\big] - \big[d'\omega,(d'\omega)^*\big]$, nous avons

$$\Delta''_E = \Delta'_\tau + \big[i(D_E^2)^{(1,1)}\,,\Lambda\big] + T_\omega\,.$$

Démonstration -

- $(D'_E+\tau)^* = \delta'_E+\tau^*$, donc Δ'_τ est formellement autoadjoint.
  Et $\langle\!\langle \Delta'_\tau u\,,u\rangle\!\rangle = \|D'_E u+\tau u\|^2 + \|\delta'_E u+\tau^* u\|^2 \geq 0$.

- $$\begin{aligned} & \Delta'_E + [D'_E, \tau^*] - [D''_E, \bar{\tau}^*] \\ = \; & [D'_E, \delta'_E] + [D'_E, \tau^*] + [\tau, \delta'_E + \tau^*] + T_\omega \text{ d'après le lemme 3} \\ = \; & [D'_E + \tau, \delta'_E + \tau^*] + T_\omega \end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 3

Cas d'une variété presque complexe et d'un fibré hermitien

Résumé

Nous donnons ci-dessous une généralisation des formules de type Bochner-Kodaira-Nakano démontrées dans les chapitres précédents. Nous supposons simplement que la variété X est muni d'une structure presque complexe J. Nous ne demandons pas qu'elle soit intégrable, ni qu'elle soit symplectique.

Soit (X,J) une variété presque complexe de dimension (réelle) $2n$, et $(E,h_E,D_E) \to X$ un fibré hermitien C^∞ de rang r (la connexion D_E étant hermitienne).

Soit g une métrique riemannienne sur X. Quitte à remplacer g par $\frac{1}{2}\big(g + g(J,J)\big)$, nous pouvons supposer que g est J-invariante. Posons alors $\omega(u,v) = g(Ju,v)$: cela définit une 2-forme J-invariante. Mais ω n'est pas forcément fermée (si $d\omega = 0$, alors X est presque kählérienne).

Reprenant les notations du premier chapitre, nous avons, respectivement sur X et E, les décompositions en types suivantes :

$$d = d' + d'' - \theta' - \theta''\,, \qquad D_E = D'_E + D''_E - \theta'_E - \theta''_E\,.$$

Notons L la multiplication extérieure par ω. La métrique riemannienne de X et celle hermitienne de E permettent de définir les adjoints δ'_E, δ''_E, ${\theta'_E}^*$, ${\theta''_E}^*$ et Λ de D'_E, D''_E, θ'_E, θ''_E et L.

Théorème 3.1. *Si (X,J) est une variété presque complexe munie d'une métrique riemannienne g J-invariante, et si $(E,h_E,D_E) \to X$ est un fibré hermitien C^∞, alors :*

1) $\Delta'_\tau := \big[D'_E + \tau\,, \delta'_E + \tau^*\big]$ *est un opérateur positif formellement autoadjoint de même partie principale que Δ', où nous avons noté $\tau = [\Lambda\,, d'\omega]$.*
2) *Notant $T_\omega = \big[\Lambda\,, \big[\Lambda\,, -\frac{i}{2} d''d'\omega\big]\big] - \big[d'\omega, (d'\omega)^*\big]$ et $T_{\mathcal{N}} = i\,\big[\Lambda\,, [\theta'_E, \theta''_E]\big]$, nous avons*

$$\Delta''_E = \Delta'_\tau + \big[i\theta^{(1,1)}_{(E,D_E)}\,, \Lambda\big] + T_\omega + T_{\mathcal{N}}\,,$$

où T_ω et $T_{\mathcal{N}}$ sont des opérateurs scalaires d'ordre 0.

Comme dans les deux chapitres précédents, nous allons d'abord établir des formules de commutation sur la variété. Elles resteront valides sur E, et nous en déduirons alors le théorème.

3.1 Formules de commutation sur la variété

Soient $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ des coordonnées locales sur X telles que le repère local $\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_n}\right)$ soit orthonormée au point $z=0$. Par changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $J(0)$ est la structure complexe canonique, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial y_k}_{|z=0} = J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}_{|z=0}\right).$$

Nous posons bien sûr $z_j = x_j + iy_j$. Alors $g(0) = \sum dx_j^2 + dy_j^2 = \frac{1}{2}\sum dz_j \otimes d\bar{z}_j + d\bar{z}_j \otimes dz_j$, $\omega(0) = \sum dx_j \wedge dy_j = \frac{i}{2}\sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$ et $J(0) = i\sum\left(dz_j \otimes \frac{\partial}{\partial z_j} - d\bar{z}_j \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)$.

Nous avons $\omega = \omega(0) + \mathcal{O}(|z|)$ et $J = J(0) + \mathcal{O}(|z|)$.

Tout comme dans le premier chapitre, en utilisant le fait que J est réel et ω J-invariante, et en effectuant un changement de coordonnées, nous obtenons l'existence d'un système de coordonnées locales $(z_1,\dots,z_n)$ tel que

$$\begin{aligned}
\omega(z) &= \frac{i}{2}\sum dz_j \wedge d\bar{z}_j + \mathcal{O}(|z|) \\
J(z) &= i\sum_{k=1}^{n}\left(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) + \sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n} z_m B_{k,l}^m\right) dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}\,, \\
&\qquad + \sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n} \bar{z}_m \bar{B}_{k,l}^m\right) d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_l} + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)\,,
\end{aligned}$$

où $B_{k,l}^m = -B_{m,l}^k$. Nous noterons $B_{k,l} = \sum_{m=1}^n z_m B_{k,l}^m$. $B_{k,l}$ n'est pas à priori symétrique en (k,l). Il vient alors $\mathcal{N}_J\left(\frac{\partial}{\partial z_j}_{|0}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}_{|0}\right) = i\sum_l B_{j,l}^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}_{|0}$. Donc $\mathcal{N}_J(0) = \frac{1}{2}\sum N_{j,k}^l dz_j \wedge dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}_{|0}$ et $N_{j,k}^l = iB_{j,l}^k$.

Écrivons le développement limité à l'ordre 2 de ω :

$$\omega = \omega(0) + \underbrace{i\sum_{j,k}\gamma_{j,k}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k + \sum_{j,k}\left(a_{j,k}\, dz_j \wedge dz_k + \bar{a}_{j,k}\, d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k\right)}_{\text{termes d'ordre 1, en } z,\ \bar{z}} + \mathcal{O}(|z|^2)\,,$$

où $(\gamma_{j,k})$ est hermitienne et $(a_{j,k})$ antisymétrique.

Posons

$$\left\{\begin{array}{lllll} w_k & = & \frac{1}{2}\big(dz_k - i dz_k \circ J\big) & = & dz_k - \frac{i}{2}\sum_l \bar{B}_{l,k} d\bar{z}_l + \mathcal{O}(|z|^2)\,, \\ \bar{w}_k & = & \frac{1}{2}\big(d\bar{z}_k + i d\bar{z}_k \circ J\big) & = & d\bar{z}_k + \frac{i}{2}\sum_l B_{l,k} dz_l + \mathcal{O}(|z|^2)\,. \end{array}\right.$$

$(w_1, \ldots ,w_n)$ est une base des 1-formes J-invariantes. Un calcul simple montre que

$$\omega = \frac{i}{2}\sum w_j \wedge \bar{w}_j + \frac{i}{2}\sum 2\gamma_{j,k}\, w_j \wedge \bar{w}_k + \mathcal{O}(|z|^2)\,.$$

Posons $\omega_0(z) = \frac{i}{2}\sum w_j \wedge \bar{w}_j$ et $\gamma(z) = \frac{i}{2}\sum 2\gamma_{j,k}\, w_j \wedge \bar{w}_k + \mathcal{O}(|z|^2)$. Donc $\omega = \omega_0 + \gamma$. Attention : $\omega_0(0) = \omega(0)$, mais $\omega_0(z) \neq \omega(0)$.

Nous renvoyons pour la suite à [Dem97], chapitre 6 (Hodge Theory), section 6 (Commutation Relations), sous-section 6.2 (Commutation Relations on Hermitian Manifolds).

Nous allons reprendre le fil de la démonstration des relations de commutation dans le cas holomorphe hermitien. Nous avons utilisé les mêmes notations que [Dem97]. La différence avec [Dem97] réside dans le fait que ω_0 est constante dans [Dem97], alors que ce n'est pas le cas pour nous. Cependant cela n'est pas essentiel.

Parce qu'il s'agit simplement d'un raisonnement d'algèbre linéaire, le lemme 6.9 de [Dem97] est encore vrai dans notre cadre :

$$\langle u\,, v\rangle_\omega\, dV_\omega = \langle u - \big[\gamma,\Lambda_{\omega_0}\big] u\,, v\rangle_{\omega_0}\, dV_{\omega_0} + \mathcal{O}(|z|^2)\,.$$

Ainsi l'adjoint d''^* de d'' coincidera en $z = 0$ avec l'adjoint de d'' pour la métrique

$$\langle\!\langle u\,, v\rangle\!\rangle_1 = \int_X \langle u - \big[\gamma,\Lambda_{\omega_0}\big] u\,, v\rangle_{\omega_0}\, dV_{\omega_0}\,.$$

Donc $d''^* = \delta_0'' - \big[\delta_0'',[\gamma,\Lambda_{\omega_0}]\big]$ en $z = 0$, où δ_0'' désigne l'adjoint de d'' relativement à la métrique $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_{\omega_0}\, dV_{\omega_0}$. Parce que

$$dV_{\omega_0} = \frac{\omega_0^n}{n!} = \big(\frac{i}{2} dz_1 \wedge d\bar{z}_1\big) \wedge \ldots \wedge \big(\frac{i}{2} dz_n \wedge d\bar{z}_n\big) + \mathcal{O}(|z|^2)\,,$$

un calcul simple montre que

$$\delta_0''(u w_I \wedge \bar{w}_J) = -2\sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial z_\alpha}\, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \lrcorner\, (w_I \wedge \bar{w}_J) + \mathcal{O}(|z|)\,.$$

Nous avons $d''(w_j \wedge \bar{w}_j) = \mathcal{O}(|z|)$, donc $d''\omega_0 = \mathcal{O}(|z|)$. Donc les mêmes calculs que ceux effectués par [Dem97] donnent

$$d''^* = \delta_0'' + \big[\Lambda_\omega\,, [\delta_0'',\gamma]\big] \quad \text{en } z = 0\,.$$

Par ailleurs, il est évident que nous avons

$$[\delta_0'',\omega_0] = i d' + \mathcal{O}(|z|)\,, \quad \big[\gamma\,, [\omega_0,\delta_0'']\big] = i d'\omega + \mathcal{O}(|z|)$$

et

$$[\omega_0,\Lambda_{\omega_0}] = (p+q-n) \text{ sur les formes de type (relativement à } J) \ (p,q)\,.$$

Nous pouvons conclure alors, comme dans [Dem97], que

$$[\omega,d''^*] = -id' - [\Lambda_{\omega_0},id'\omega] + \mathcal{O}(|z|)\,.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Notant* $\tau = \left[\Lambda,d'\omega\right]$, *nous avons* $\left[d''^*\,,L\right] = i(d'+\tau)$.

3.2 Preuve du théorème

Nous donnerons uniquement les grandes lignes de la preuve, celle-ci étant très proche du cas holomorphe hermitien.

Théorème 3.3. *Notant* $\tau = \left[\Lambda,d'\omega\right]$, *nous avons*

$$\begin{array}{rclcrcl} \left[\delta''_E\,,L\right] & = & i(D'_E+\tau)\,, & \qquad & \left[\Lambda\,,D''_E\right] & = & -i(\delta'_E+\tau^*)\,,\\ \left[\delta'_E\,,L\right] & = & -i(D''_E+\bar\tau)\,, & & \left[\Lambda\,,D'_E\right] & = & i(\delta''_E+\bar\tau^*)\,. \end{array}$$

Démonstration - Dans un repère normal, les opérateurs sont égaux à l'ordre 0 à leurs analogues scalaires : $D's \simeq \sum_\lambda (d\sigma_\lambda)\otimes e_\lambda + \mathcal{O}(|z|)$, $\delta''_E s \simeq (\delta''\sigma_\lambda)\otimes e_\lambda + \mathcal{O}(|z|)$. Les formules sont donc les mêmes que dans le cas scalaire. □

Nous avons la décomposition en types suivante :

Propriété 3.4.

$$\begin{aligned} D_E^2 \;=\; \Theta_{(E,D_E)} \;&=\; (D'_E + D''_E - \theta'_E - \theta''_E)^2\\ &=\; \underbrace{{D'_E}^2 - [D''_E,\theta'_E]}_{2,0} + \underbrace{{D''_E}^2 - [D'_E,\theta''_E]}_{0,2} + \underbrace{{\theta'_E}^2}_{4,-2} + \underbrace{{\theta''_E}^2}_{-2,4} + \underbrace{[D'_E,D''_E] + [\theta'_E,\theta''_E]}_{1,1}\\ &\quad - \underbrace{[D'_E,\theta'_E]}_{3,-1} - \underbrace{[D''_E,\theta''_E]}_{0,2}\,. \end{aligned}$$

Des calculs élémentaires donnent alors

Propriété 3.5.

$$\Delta''_E = \Delta'_E + \left[i\Theta^{(1,1)}_{(E,D_E)}\,,\Lambda\right] + \left[D'_E\,,\tau^*\right] - \left[D''_E\,,\bar\tau^*\right] - i\left[[\theta'_E\,,\theta''_E]\,,\Lambda\right]\,.$$

Nous avons encore $[L\,,\tau] = 3d'\omega$ et $[\Lambda\,,\tau] = -2i\bar{\tau}^*$. Tout comme subsiste la formule

$$\left[D''_E\,,\bar{\tau}^*\right] = -\Big(T_\omega + [\tau\,,\delta'_E + \tau^*]\Big) \quad \text{où} \quad T_\omega = \left[\Lambda,[\Lambda,-\frac{i}{2}d''d'\omega]\right] - \left[d'\omega,(d'\omega)^*\right].$$

Le seul point à noter est qu'il n'est plus permis d'écrire l'égalité $-id''d'\omega = id'd''\omega$, étant donné que $d'd'' + d''d' = -[\theta',\theta'']$.

Il vient donc finalement

$$\begin{aligned}
\Delta''_E &= \Delta'_E + \left[i\Theta^{(1,1)}_{(E,D_E)}\,,\Lambda\right] + [D'_E,\tau^*] - [D''_E,\bar{\tau}^*] - i\left[[\theta'_E,\theta''_E]\,,\Lambda\right] \\
&= [D'_E,\delta'_E] + [D'_E,\tau^*] + [\tau\,,\delta'_E + \tau^*] + T_\omega + \left[i\Theta^{1,1}_{(E,D_E)}\,,\Lambda\right] - i\left[[\theta'_E,\theta''_E]\,,\Lambda\right].
\end{aligned}$$

Deuxième partie

Estimations spectrales asymptotiques sur une variété hermitienne

Chapitre 1

Approximation d'une forme non entière par des formes rationnelles

Résumé

Nous montrons que si α est une (1,1)-forme réelle sur une variété compacte complexe X de dimension n, la classe $k[\alpha]$ peut être approchée dans $H^2(X,\mathbb{R})$ par des formes entières α_k, et nous avons l'estimation $\|k\alpha - \alpha_k\|_{C^\infty} \leq C(X)\, k^{-1/b_2(X)}$, où $b_2(X)$ est le deuxième nombre de Betti de X.

1.1 Lemme de Kronecker

Propriété 1.1. *Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $N \geq 1$, il existe un entier $k \in [\![1; N^n]\!]$ et un point à coordonnées entières $p \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\|kx - p\| \leq C(n)/N \leq C(n)k^{-1/n}$.*

Démonstration - Choisissons pour norme $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Comme nous allons le voir, la constante $C(n)$ apparaissant dans l'estimation vaut $\sqrt{n}$ pour cette norme. Le choix d'une autre norme, forcément équivalente, modifiera cette constante.

Découpons le cube unité $[0;1[^n$ en petits cubes de côté $1/N$: il y a N^n tels petits cubes. Considérons la suite $y_k = kx \bmod \mathbb{Z}^n = kx - p_k \in [0;1[^n$ pour $k = 0, \ldots, N^n$. Ces $(N^n + 1)$ points $y_0, y_1, \ldots, y_{N^n}$ sont tous dans $[0;1[^n$, lui-même union disjointe de N^n petits cubes. Par le principe des tiroirs de Dirichlet, deux éléments y_{k_1} et y_{k_2} $(k_1 \neq k_2)$ sont dans le même petit cube. Donc

$$\|y_{k_1} - y_{k_2}\| \leq \text{diagonale du petit cube} = \sqrt{n}\frac{1}{N}\,.$$

Puisque $y_{k_1} - y_{k_2} = (k_1 - k_2)x - (p_{k_1} - p_{k_2})$, posons $k = |k_1 - k_2|$, $p = \text{signe}(k_1 - k_2)\cdot(p_{k_1} - p_{k_2})$. Alors $1 \leq k \leq N^n$, donc $1/N \leq k^{-1/n}$. $\square$

Corollaire 1.2. *Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe une suite d'entiers $(k_N)_{N\geq 1}$ et une suite de* *points à coordonnées entières* $p_{k_N} \in \mathbb{Z}^n$ *vérifiant :*

i) $\|k_N x - p_{k_N}\| \leq C(n) k_N^{-1/n}$,

ii) $(k_N)_{N\geq 1}$ *est strictement croissante (donc tend vers* $+\infty$*).*

Démonstration - Notons tout d'abord que si la suite (k_N) est strictement croissante, nous pouvons indexer les points à coordonnées entières par k_N ou par N. Nous écrirons donc indifféremment p_N ou p_{k_N}.

Si $x \in \mathbb{Q}^n$, écrivons $x = \frac{1}{q} \cdot p$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}^n$. Alors $(Nq)x = Np$; en posant par exemple $k_N = Nq$ et $p_N = Np$, nous avons $k_N x - p_N = 0$ et $k_N \to +\infty$.

Si $x \notin \mathbb{Q}^n$, la propriété précédente nous fournit des suites (k_N) et (p_N). Celles-ci ne vont sans doute pas convenir, mais nous allons montrer que la suite (k_N) n'est pas bornée. Le corollaire sera alors prouvé, puisque n'importe quelle suite extraite strictement croissante de (k_N) conviendra.

Si (k_N) était bornée, l'ensemble $A = \{k_N x\,,\ N \in \mathbb{N}\}$ serait un ensemble fini de points irrationnels, donc la distance $d(A,\mathbb{Z}^n)$ de cet ensemble au réseau $\mathbb{Z}^n$ des points entiers serait strictement positive. Or cette distance est plus petite que chaque $\|k_N x - p_N\|$, et cette dernière quantité est majorée par $C(n)/N$, donc tend vers zéro. Ceci implique $d(A,\mathbb{Z}^n) = 0$. Cette contradiction établit que la suite (k_N) n'est pas bornée. □

1.2 Application

Soit X une variété complexe compacte. Le choix d'une base de $H^2(X,\mathbb{Z})$ donne un isomorphisme $H^2(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{b_2(X)} \subset H^2(X,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{b_2(X)}$. Notons que $b_2(X) = \dim H^2(X,\mathbb{R})$ dépend de X, et pas seulement de $n = \dim(X)$. Soit $[\alpha] \in H^2(X,\mathbb{R})$. D'après le corollaire précédent, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(k_N)_{N\geq 1}$ et une suite de classes $[\tilde{\alpha}_{k_N}] \in H^2(X,\mathbb{Z})$ telles que

$$\|k_N[\alpha] - [\tilde{\alpha}_{k_N}]\| \leq C(X) {k_N}^{-1/b_2(X)}\,.$$

Dans le souci d'alléger les notations nous supposerons par la suite, sans le préciser à chaque fois, que $k \in S = \{k_N\,,\ N \geq 1\}$.

Notons $\Delta = d^*d + dd^*$ le laplacien riemannien. Nous avons

$$C_2^\infty(X,\mathbb{C}) = \mathcal{H}^2_\Delta(X,\mathbb{C}) \oplus \Delta\left(C_2^\infty(X,\mathbb{C})\right) \quad \text{et} \quad H^2(X,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^2_\Delta(X,\mathbb{C})\,.$$

Écrivons $\alpha = h + \Delta v$. Puisque $d\alpha = 0 = dd^*dv$, il vient $\langle\!\langle dd^*dv\,, dv\rangle\!\rangle = \langle\!\langle d^*dv\,, d^*dv\rangle\!\rangle = 0$, donc $\alpha = h + dd^*v$. α étant réelle, il en est de même pour h et v. De même, $\tilde{\alpha}_k = h_k + dd^*v_k$. Posons $\alpha_k := h_k + kdd^*v$. Alors $[\alpha_k] = [\tilde{\alpha}_k]$, puisque $\alpha_k - \tilde{\alpha}_k = dd^*(kv - v_k)$ est exacte. Et

$$\|\alpha_k - k\alpha\|_{C^\infty} = \|h_k - kh\|_{C^\infty} \leq C\|[\tilde{\alpha}_k] - k[\alpha]\| \leq C(X)k^{-1/b_2(X)}\,.$$

En particulier, nous avons les majorations suivantes :

$$\|\alpha_k^{0,2}\|_{C^\infty} = \|(\alpha_k - k\alpha)^{0,2}\|_{C^\infty} \leq C(X)k^{-1/b_2(X)} \,,$$

$$\|k\alpha - \alpha_k^{1,1}\|_{C^\infty} = \|(k\alpha - \alpha_k)^{1,1}\|_{C^\infty} \leq C(X)k^{-1/b_2(X)} \,,$$

$$\|d''\alpha_k^{0,2}\|_{C^\infty} = \|d''(h_k - kh)^{0,2}\|_{C^\infty} \leq C(X)\|(h_k - kh)^{0,2}\|_{C^\infty} \leq C(X)k^{-1/b_2(X)} \,,$$

puisque d'' est continue sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}^2_\Delta(X,\mathbb{C})$ qui est de dimension finie.

Remarques : $\alpha_k^{1,1}$ n'est pas forcément fermée. Et par exemple $h_k^{0,2}$ n'est pas forcément harmonique (le laplacien n'étant à priori pas homogène au niveau des bidegrés).

Nous avons donc prouvé le

Théorème 1.3. *Soit X une variété complexe compacte de dimension n, et α une 2-forme réelle fermée. Alors il existe une suite α_k de 2-formes réelles fermées sur X telles que*

$$\begin{aligned}
&\|k\alpha - \alpha_k\|_{C^\infty} \leq C(X)\, k^{-1/b_2(X)} \,,\\
&[\alpha_k] \in H^2(X,\mathbb{Z}) \,,\\
&\|k\alpha - \alpha_k^{1,1}\|_{C^\infty} \leq C(X)\, k^{-1/b_2(X)} \,, \quad \|\alpha_k^{0,2}\|_{C^\infty} \leq C(X)\, k^{-1/b_2(X)} \,.
\end{aligned}$$

Non seulement la différence $k\alpha - \alpha_k$ est bornée, mais elle tend vers zéro !

1.3 Construction d'un fibré hermitien associé à α_k

Soit (X,ω) une variété hermitienne compacte et α une 2-forme réelle fermée sur X. Approchons $k\alpha$ par des formes entières α_k. Il existe alors un fibré en droites hermitien $(L_k,h_{L_k}) \to X$ de classe C^∞ muni d'une connexion hermitienne D_{L_k} telle que $\frac{i}{2\pi}D^2_{L_k} = \alpha_k$.

Dans une trivialisation, $D_{L_k} \simeq d + A_{L_k}$. Décomposons suivant la (vraie) structure complexe de X : $d = d' + d''$, $A_{L_k} = A^{1,0}_{L_k} + A^{0,1}_{L_k}$. Alors $D''_{L_k} \simeq d'' + A^{0,1}_{L_k}$.

$$D^2_{L_k} \simeq dA_{L_k} = d'A^{1,0}_{L_k} + (d''A^{1,0}_{L_k} + d'A^{0,1}_{L_k}) + d''A^{0,1}_{L_k} = -2i\pi\alpha_k = -2i\pi(\alpha_k^{2,0} + \alpha_k^{1,1} + \alpha_k^{0,2})$$

${D''_{L_k}}^2 \simeq d''A^{0,1}_{L_k} \wedge . = -2i\pi\alpha_k^{0,2} \wedge . \to 0$: la suite des fibrés est donc "asymptotiquement holomorphe".

Chapitre 2

Interprétation de Δ_k'' comme un opérateur de Schrödinger

Résumé

Nous montrons dans ce chapitre comment, à l'aide de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano rappelée dans le second chapitre de la partie précédente, nous obtenons une formule de type Weitzenböck, qui nous permet d'interpréter le laplacien antiholomorphe comme un opérateur de Schrödinger.

2.1 Notations

Soit (X,ω) une variété hermitienne compacte de dimension (complexe) n, α une (1,1)-forme réelle fermée et $(E,h_E,D_E) \to X$ un fibré hermitien C^∞ de rang r.

Soit $(\alpha_k)_k$ une suite de 2-formes réelles fermées entières sur X qui approximent $k\alpha$ (une telle suite a été construite au chapitre précédent), et $(L_k,h_{L_k},D_{L_k}) \to X$ des fibrés hermitiens C^∞ de rang (complexe) r et de courbure $\Theta_{L_k,D_{L_k}} = D_{L_k}^2 = -2i\pi\alpha_k$.

Construisons successivement plusieurs fibrés hermitiens et leurs connexions hermitiennes associées :

$\underline{(E_k,D_k)}$: Notons $E_k = L_k \otimes E$. Ce fibré est muni des métrique hermitienne $h_k = h_{L_k} \otimes h_E$ et connexion hermitienne $D_k = D_{L_k} \otimes \mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_{L_k} \otimes D_E$ induites par celles de L_k et E. Nous avons

$$\Theta_{(E_k,D_k)} = \Theta_{(L_k,D_{L_k})} \otimes \mathrm{Id}_E + \Theta_{(E,D_E)} = -2i\pi\, \alpha_k \otimes \mathrm{Id}_E + \Theta_{(E,D_E)}.$$

$\Delta_k'' = D_k''D_k''^* + D_k''^*D_k''$ et $\Delta_k' = D_k'D_k'^* + D_k'^*D_k'$ désignent respectivement les laplaciens antiholomorphe et holomorphe associés.

$\underline{(\tilde{E}_k,\tilde{D}_k)}$: Notons $\tilde{E}_k = E_k \otimes \bigwedge^n TX$. Le fibré en droites $\bigwedge^n TX$ est holomorphe et muni de la métrique hermitienne induite par ω. Nous noterons ∇^{TX} sa connexion de Chern. $\tilde{E}_k$ est ainsi muni de la connexion hermitienne $\tilde{D}_k$ induite par D_k et ∇^{TX}. $\tilde{\Delta}''_k = \tilde{D}''_k \tilde{D}''^*_k + \tilde{D}''^*_k \tilde{D}''_k$ désigne le laplacien antiholomorphe associé.

$\underline{(\bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k, \nabla^q_k)}$: Considérons le fibré antiholomorphe $\bigwedge^{0,q} T^*X = \overline{\bigwedge^{q,0} T^*X}$. La connexion hermitienne holomorphe du fibré $\bigwedge^{q,0} T^*X$ induit sur $\bigwedge^{0,q} T^*X$ une connexion, que nous noterons $\bar{\nabla}^q_{TX}$, dont la partie de type (1,0) est d'. Ainsi, le fibré $\bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k$ est muni d'une connexion hermitienne, que nous noterons ∇^q_k.

2.2 Utilisation de la formule de type Bochner-Kodaira-Nakano

Soit u une $(0,q)$-forme à valeurs dans E_k, i.e. $u \in C^\infty_{0,q}(X,E_k)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_X \langle \Delta''_k u,u\rangle &= \int_X \langle \Delta'_{k,\tau} u,u\rangle + \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(E_k,D_k)}, \Lambda_\omega \big] u,u\rangle + \langle T_\omega u,u\rangle \\
&= \int_X |D'_k u + \tau u|^2 + \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(E_k,D_k)}, \Lambda_\omega \big] u,u\rangle + \langle T_\omega u,u\rangle \,,
\end{aligned}$$

les intégrales étant calculées par rapport à l'élément de volume $d\sigma = \frac{\omega^n}{n!}$. Rappelons que nous avons noté $\tau = \big[\Lambda, d'\omega\big]$, $\Delta'_{k,\tau} = \big[D'_k + \tau \,, D'^*_k + \tau^*\big]$ et $T_\omega = \big[\Lambda \,, \big[\Lambda \,, \frac{i}{2} d'd''\omega\big]\big] - \big[d'\omega, (d'\omega)^*\big]$.

Une $(0,q)$-forme à valeurs dans E_k peut aussi se voir comme une (n,q)-forme à valeurs dans $\tilde{E}_k = E_k \otimes \bigwedge^n TX$, via l'isométrie

$$\sim \ : \left\{ \begin{array}{ccc} C^\infty_{0,q}(X,E_k) & \to & C^\infty_{n,q}(X, E_k \otimes \bigwedge^n TX) \\ u = u_J \, d\bar{z}_J \otimes \varepsilon & \mapsto & \tilde{u} = (-1)^{nq} \, dz_{[\![1,n]\!]} \wedge u_J \, d\bar{z}_J \otimes \varepsilon \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \,. \end{array} \right.$$

Il est clair que $\sim$ est une isométrie, car

$$\begin{aligned}
& \left\| dz_{[\![1,n]\!]} \wedge d\bar{z}_J \otimes \varepsilon \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \right\|^2 = \left\| dz_{[\![1,n]\!]} \wedge d\bar{z}_J \right\|^2 \times h_k(\varepsilon) \times \left\| \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \right\|^2 \\
= \quad & \det\big(\langle dz_j, dz_k\rangle_{1\le j,k\le n}\big) \times \overline{\det\big(\langle dz_j, dz_k\rangle_{(j,k)\in J^2}\big)} \times h_k(\varepsilon) \times \det\Big(\langle \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\rangle_{1\le j,k\le n}\Big) \\
= \quad & \overline{\det\big(\langle dz_j, dz_k\rangle_{(j,k)\in J^2}\big)} \times h_k(\varepsilon) = \|d\bar{z}_J \otimes \varepsilon\|^2
\end{aligned}$$

Parce que $\bigwedge^n TX$ est holomorphe, un calcul simple montre que $\tilde{D}''_k(\tilde{u}) = \widetilde{D''_k u}$:

Soient $(z_1,\ldots,z_n)$ des coordonnées locales et $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)$ un repère local de E_k. Notons $D_k\varepsilon_b = \sum_a (A_k)_{a,b}\otimes\varepsilon_a$.

$$\begin{array}{rcl}
u & = & \displaystyle\sum_b u_{J,b}\, d\bar z_J \otimes \varepsilon_b\,, \quad \tilde u \;=\; (-1)^{nq}\, dz_{[\![1,n]\!]}\wedge u_J\, d\bar z_J \otimes \varepsilon \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \\
\tilde D''_k(\tilde u) & = & \displaystyle(\tilde D''_k)\Big[\sum_b (-1)^{nq}\, u_{J,b}\, dz_{[\![1,n]\!]}\wedge d\bar z_J \otimes \varepsilon_b \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}}\Big] \\
 & = & \displaystyle\sum_b D''_k\Big[(-1)^{nq}\, u_{J,b}\, dz_{[\![1,n]\!]}\wedge d\bar z_J \otimes \varepsilon_b\Big] \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \\
 & & \displaystyle\qquad +(-1)^{nq}\, u_{J,b}\, dz_{[\![1,n]\!]}\wedge d\bar z_J \otimes \varepsilon_b \otimes \underbrace{\nabla^{TX''}\Big(\frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}}\Big)}_{=0} \\
 & = & \displaystyle\sum_b d''\Big[(-1)^{nq}\, u_{J,b}\, dz_{[\![1,n]\!]}\wedge d\bar z_J\Big] \otimes \varepsilon_b \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \\
 & & \displaystyle\qquad +(-1)^{n+q}\,(-1)^{nq}\, u_{J,b}\, dz_{[\![1,n]\!]}\wedge d\bar z_J \wedge \Big[\sum_a (A_k)^{0,1}_{a,b}\,\varepsilon_a\Big] \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \\
 & = & \displaystyle\sum_b (-1)^{nq}\Big(d''u_{J,b} + \sum_a (A_k)^{0,1}_{b,a}\, u_{J,a}\Big)\wedge dz_{[\![1,n]\!]}\wedge d\bar z_J \otimes \varepsilon_b \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \\
 & = & \displaystyle(-1)^{nq+n} dz_{[\![1,n]\!]}\wedge \Big(d''u_{J,b} + \sum_a (A_k)^{0,1}_{b,a}\, u_{J,b}\Big)\wedge d\bar z_J \otimes \varepsilon_b \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \\
 & = & \widetilde{D''_k u}
\end{array}$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
C^\infty_{0,q}(X,E_k) & \xrightarrow{\quad D''_k \quad} & C^\infty_{0,q+1}(X,E_k) \\
\downarrow\sim & & \downarrow\sim \\
C^\infty_{n,q}(X,\tilde E_k) & \xrightarrow{\quad \tilde D''_k \quad} & C^\infty_{n,q+1}(X,\tilde E_k)
\end{array}$$

est donc commutatif. Nous avons alors aussi un diagramme commutatif analogue pour les adjoints D''^*_k et $\tilde D''^*_k$, donc aussi pour Δ''_k et $\tilde\Delta''_k$.

Soit finalement :

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_X \langle\Delta''_k u,u\rangle & = & \displaystyle\int_X \langle\tilde\Delta''_k\tilde u,\tilde u\rangle \\
 & = & \displaystyle\int_X \langle\tilde\Delta'_{k,\tau}\tilde u,\tilde u\rangle + \langle\big[i\Theta^{1,1}_{(\tilde E_k,\tilde D_k)},\Lambda_\omega\big]\tilde u,\tilde u\rangle + \langle T_\omega\tilde u,\tilde u\rangle \\
 & = & \displaystyle\int_X |\tilde D'^*_k\tilde u + \tau^*\tilde u|^2 + \langle\big[i\Theta^{1,1}_{(\tilde E_k,\tilde D_k)},\Lambda_\omega\big]\tilde u,\tilde u\rangle + \langle T_\omega\tilde u,\tilde u\rangle
\end{array}$$

2.3 Relation entre D'_k et $\nabla^{q\,\prime}_k$

Soit $u \in C^\infty_{0,q}(X,E_k) = C^\infty(X,\bigwedge^{0,q}T^*X\otimes E_k)$.
D_k étant une connexion sur E_k et ∇^q_k une connexion sur $\bigwedge^{0,q}T^*X\otimes E_k$, nous avons

$$\left\{\begin{array}{lcl}
D'_k & : & C^\infty(X,\bigwedge^{0,q}T^*X\otimes E_k) \longrightarrow C^\infty(X,\bigwedge^{1,q}T^*X\otimes E_k) \\
\nabla^{q\,\prime}_k & : & C^\infty(X,\bigwedge^{0,q}T^*X\otimes E_k) \longrightarrow C^\infty(X,\bigwedge^{1,0}T^*X\otimes\bigwedge^{0,q}T^*X\otimes E_k)
\end{array}\right.$$

Montrons que via l'isométrie $C^\infty(X,\bigwedge^{1,0} T^*X \otimes \bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k) \to C^\infty(X,\bigwedge^{1,q} T^*X \otimes E_k)$, nous avons $D'_k = {\nabla^q_k}'$ sur $C^\infty_{0,q}(X,E_k) = C^\infty(X,\bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k)$.

Soit $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$ un repère local de E_k. Notons $D_k\,\varepsilon_b = \sum_a (A_k)_{a,b} \otimes \varepsilon_a$.

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{|J|=q,\ 1\le b\le r} u_{J,b}\, d\bar z_J \otimes \varepsilon_b \\
D'_k u &= \sum_{J,b} d'(u_{J,b}\, d\bar z_J) \otimes \varepsilon_b + (-1)^q u_{J,b}\, d\bar z_J \wedge (D'_k \varepsilon_b) \\
&= \sum_{J,b} d' u_{J,b} \wedge d\bar z_J \otimes \varepsilon_b + (-1)^q u_{J,b}\, d\bar z_J \wedge \Big[\sum_a (A_k)^{1,0}_{a,b} \otimes \varepsilon_a \Big] \\
&= \sum_{J,b} \Big[d' u_{J,b} + \sum_a (A_k)^{1,0}_{b,a}\, u_{J,a} \Big] \wedge d\bar z_J \otimes \varepsilon_b \\
{\nabla^q_k}' u &= \sum_{J,b} {\bar\nabla^q_{TX}}'(u_{J,b}\, d\bar z_J) \otimes \varepsilon_b + u_{J,b}\, d\bar z_J \otimes (D'_k \varepsilon_b) \\
&\qquad \text{(parce que } u_J\, d\bar z_J \text{ est considéré comme une section de degré 0 de } \textstyle\bigwedge^{0,q} T^*X) \\
&= \sum_{J,b} [d' u_{J,b} \otimes d\bar z_J + u_{J,b} {\bar\nabla^q_{TX}}'(d\bar z_J)] \otimes \varepsilon_b + u_{J,b}\, d\bar z_J \otimes (\sum_a (A_k)^{1,0}_{a,b} \otimes \varepsilon_a) \\
&= \sum_{J,b} [d' u_{J,b} \otimes d\bar z_J + 0] \otimes \varepsilon_b + \sum_{J,a,b} (A_k)^{1,0}_{b,a} \otimes u_{J,a}\, d\bar z_J \otimes \varepsilon_b \\
&\qquad \text{(car } \nabla^q_{TX} \simeq d' \text{ sur } \textstyle\bigwedge^{0,q} T^*X = \overline{\bigwedge^q T^*X} \text{ antiholomorphe)} \\
&= \sum_{J,b} \Big[d' u_{J,b} + \sum_a u_{J,a}\, (A_k)^{1,0}_{b,a} \Big] \otimes d\bar z_J \otimes \varepsilon_b
\end{aligned}
$$

Pour $u \in C^\infty_{0,q}(X,E_k)$, notons $S'u \in C^\infty(X,\bigwedge^{1,0} T^*X \otimes \bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k)$ le relèvement isométrique de $\tau u \in C^\infty(X,\bigwedge^{1,q} T^*X \otimes E_k)$.

Reprenant alors la formule de la section précédente, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\int_X \langle \Delta''_k u,u\rangle &= \int_X |D'_k u + \tau u|^2 + \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(E_k,D_k)},\Lambda_\omega \big] u,u\rangle + \langle T_\omega u,u\rangle\,, \\
&= \int_X |{\nabla^q_k}' u + S'u|^2 + \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(E_k,D_k)},\Lambda_\omega \big] u,u\rangle + \langle T_\omega u,u\rangle\,,
\end{aligned}
$$

2.4 Rappels sur l'opérateur de Hodge

Choisissons des coordonnées complexes telles que

$$\omega(z=0) = \frac{i}{2} \sum_k dz_k \wedge d\bar z_k = \sum_k dx_k \wedge dy_k.$$

Alors

$$g(z=0) = \frac{1}{2} \sum_k (dz_k \otimes d\bar z_k + d\bar z_k \otimes dz_k) = \sum_k (dx_k \otimes dx_k + dy_k \otimes dy_k)\,,$$

ce qui nous donne $\|\frac{\partial}{\partial z_j}_{|z=0}\|^2 = \frac{1}{2}$, $\|dz_{j_{|z=0}}\|^2 = 2$, $\|\frac{\partial}{\partial x_j}_{|z=0}\|^2 = 1$ et $\|dx_{j_{|z=0}}\|^2 = 1$. Et

$$dV_\omega = \frac{\omega^n}{n!} = \left(\frac{i}{2}\right)^n \prod_{k=1}^n (dz_k \wedge d\bar{z}_k) = \prod_{k=1}^n (dx_k \wedge dy_k)$$

Remarque :

$$\prod_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dz_{[\![1;n]\!]} \wedge d\bar{z}_{[\![1;n]\!]} \text{ et } \prod_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dx_{[\![1;n]\!]} \wedge dy_{[\![1;n]\!]}.$$

Propriété 2.1. *Si* $v = v_{AB}\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \in \bigwedge^{a,b} T^*_{z=0}X$*, alors*

$$\begin{aligned} *v &= i^{-n^2} 2^{a+b-n}(-1)^{n(n-a)}\varepsilon(A,\complement A)\varepsilon(B,\complement B) v_{AB}\, dz_{\complement B} \wedge d\bar{z}_{\complement A}, \\ **\, v &= (-1)^{a+b} v. \end{aligned}$$

Démonstration - Rappelons que l'opérateur de Hodge est l'opérateur $\mathbb{C}$-linéaire $*$: $\bigwedge^{p,q} T^*X \to \bigwedge^{n-q,n-p} T^*X$ défini par $u \wedge \overline{*v} = \langle u,v\rangle dV_\omega$ pour $u,v \in \bigwedge^{p,q} T^*X$.

Écrivons (en $z = 0$) : $u = \sum_{\substack{|I|=a \\ |J|=b}} u_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J$, $v = v_{AB}\, dz_A \wedge d\bar{z}_B$ et $*v = \sum_{\substack{|K|=n-b \\ |L|=n-a}} w_{KL}\, dz_K \wedge d\bar{z}_L$.

Alors

$$\begin{aligned} u \wedge \overline{*v} &= \sum_{\substack{|I|=a,|J|=b \\ |K|=n-b,|L|=n-a}} u_{IJ}\bar{w}_{KL} dz_I \wedge d\bar{z}_J \wedge d\bar{z}_K \wedge dz_L \\ &= \sum_{|I|=a,|J|=b} u_{IJ}\bar{w}_{\complement J \complement I}\varepsilon(I,\complement I)\varepsilon(J,\complement J)(-1)^{|\complement I|.n} dz_{[\![1;n]\!]} \wedge d\bar{z}_{[\![1;n]\!]} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle u,v\rangle dV_\omega &= \sum_{|I|=a,|J|=b} u_{IJ}\bar{v}_{AB}\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J, dz_A \wedge d\bar{z}_B\rangle dV_\omega \\ &= u_{AB}\bar{v}_{AB} 2^{a+b}\left(\frac{i}{2}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dz_{[\![1;n]\!]} \wedge d\bar{z}_{[\![1;n]\!]} \end{aligned}$$

Donc $\bar{w}_{\complement B \complement A} = \bar{v}_{AB} i^n 2^{a+b-n}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\varepsilon(A,\complement A)\varepsilon(B,\complement B) dz_{\complement B} \wedge d\bar{z}_{\complement A}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $i^{-n}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = i^{-n^2}$. En effet, écrivons $n = 2p + \alpha$, $\alpha \in \{0;1\}$. $n^2 = 4p^2 + 4p\alpha + \alpha^2$. Alors $i^{-n} = (-1)^p i^\alpha$ et $i^{-n^2} = i^{\alpha^2} = i^\alpha$ car $\alpha^2 = \alpha$. Enfin, $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2p+\alpha)(2p+\alpha-1)}{2} = \frac{4p^2+2p\alpha-2p+2p\alpha+\alpha^2-\alpha}{2} = p \bmod 2$. D'où

$$*(v_{AB} dz_A \wedge d\bar{z}_B) = i^{-n^2} 2^{a+b-n}(-1)^{n(n-a)}\varepsilon(A,\complement A)\varepsilon(B,\complement B) v_{AB} dz_{\complement B} \wedge d\bar{z}_{\complement A}.$$

$$
\begin{aligned}
**v &= \Big[i^{-n^2} 2^{a+b-n} (-1)^{n(n-a)} \varepsilon(A,\complement A)\varepsilon(B,\complement B) \Big] \times \\
&\qquad\qquad i^{-n^2} 2^{(n-b)+(n-a)-n} (-1)^{nb} \varepsilon(\complement A,A)\varepsilon(\complement B,B) dz_A \wedge d\bar{z}_B \\
&= (-1)^{-n^2}(-1)^{n(n-a)}(-1)^{nb}(-1)^{a(n-a)}(-1)^{b(n-b)} v \\
&= (-1)^{-a^2-b^2} v = (-1)^{a+b} v
\end{aligned}
$$

□

Exemple : On a
$*(dx_1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dx_{[\![2;n]\!]} \wedge dy_{[\![1;n]\!]}$ (car $dx_1 \wedge *(dx_1) = dV_\omega$)
$*(dy_1) = (-1)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dx_{[\![1;n]\!]} \wedge dy_{[\![2;n]\!]}$ (car $dy_1 \wedge *(dy_1) = dV_\omega$)
$*(dz_1) = i^{-n}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^{1-n} dz_{[\![1;n]\!]} \wedge d\bar{z}_{[\![2;n]\!]}$

Un calcul relativement simple montre que $*(dz_1) = *(dx_1) + i * (dy_1)$.

2.5 Relation entre $\tilde{D}_k'^*$ et $\nabla_k^{q\prime\prime}$

Soit, comme précédement, des coordonnées locales (holomorphes) $(z_1, \ldots, z_n)$ telles que $\omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k + \mathcal{O}(|z|)$. Nous avons donc $\langle dz_j, dz_k \rangle = 2\delta_{jk} + \mathcal{O}(|z|)$ et

$$
dV_{\omega_{|z=0}} = \frac{\omega^n{}_{|z=0}}{n!} = \left(\frac{i}{2}\right)^n (dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \ldots \wedge (dz_n \wedge d\bar{z}_n) = \left(\frac{i}{2}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dz_{[\![1,n]\!]} \wedge d\bar{z}_{[\![1,n]\!]}.
$$

- Rappelant que $\tilde{E}_k = E_k \otimes \bigwedge^n TX$, notons $\{\cdot\,,\cdot\}$ l'accouplement sesquilinéaire canonique :

$$
\left\{ \begin{array}{ccc} \bigwedge^{p_1,q_1} T^*X \otimes (\tilde{E}_k) \times \bigwedge^{p_2,q_2} T^*X \otimes (\tilde{E}_k) & \longrightarrow & \bigwedge^{p_1+q_2,q_1+p_2} T^*X \\ \left(u \otimes \varepsilon \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}}, v \otimes \varepsilon \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}}\right) & \longmapsto & u \wedge \bar{v}\; h_k(\varepsilon,\varepsilon)\, h_{TX}\left(\frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}}, \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}}\right) \end{array} \right.
$$

- Il permet de définir l'opérateur de Hodge-De Rham-Poincaré :

$$
* : \bigwedge^{p,q} T^*X \otimes \tilde{E}_k \longrightarrow \bigwedge^{n-q,n-p} T^*X \otimes \tilde{E}_k\,;
$$

$*$ est $\mathbb{C}$-linéaire, et $\{u\,, *\,v\} = \langle u,v \rangle dV_\omega\,, \qquad \forall\, u,v \in \bigwedge^{p,q} T^*X \otimes \tilde{E}_k$.

Propriété 2.2. *Si* $v = v_{AB}\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \otimes \varepsilon \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}}{}_{|z=0} \in \bigwedge^{a,b} T^*X \otimes \tilde{E}_k$, *alors*

$$
*v = i^{-n^2} (-1)^{n(n-a)}\, \varepsilon(A,\complement A)\, \varepsilon(B,\complement B)\, 2^{a+b-n}\, v_{AB}\, dz_{\complement B} \wedge d\bar{z}_{\complement A_{|z=0}} \otimes \varepsilon \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}}{}_{|z=0}.
$$

Démonstration - Il suffit de choisir un repère orthonormé de $\tilde{E}_k = E_k \otimes \bigwedge^n TX$. Le calcul nous ramène alors au cas scalaire, rappelé dans la section précédente. $\square$

- <u>Définissons un isomorphisme entre $C^\infty_{0,1}(X, \bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k)$ et $C^\infty_{n-1,q}(X, E_k \otimes \bigwedge^n TX)$</u> :

  Soit Ψ_0 la composition

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \bigwedge^{0,1} T^*X \otimes E_k & \xrightarrow{\sim} & \bigwedge^{n,1} T^*X \otimes E_k \otimes \bigwedge^n TX \\ u_j \, d\bar{z}_j \otimes \varepsilon & \longmapsto & (-1)^n \, u_j \, dz_{[\![1,n]\!]} \wedge d\bar{z}_j \otimes \varepsilon \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{cc} \xrightarrow{*} & \bigwedge^{n-1,0} T^*X \otimes E_k \otimes \bigwedge^n TX \\ \longmapsto & i^{-n^2} \, (-1)^{j-1} \, 2 \, (-1)^n \, u_j \, dz_{[\![1,n]\!] \setminus j} \otimes \varepsilon \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \end{array}$$

Ψ_0 est une isométrie. En la tensorisant par $\bigwedge^{0,q} T^*X$, on obtient l'isométrie Ψ_1 :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} C^\infty_{0,1}(X, \bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k) & \xrightarrow{\Psi_1} & C^\infty_{n-1,q}(X, E_k \otimes \bigwedge^n TX) \\ u_j \, d\bar{z}_j \otimes \big(d\bar{z}_J \otimes \varepsilon \big) & \longmapsto & i^{-n^2} \, (-1)^{nq} \, (-1)^{n-1+j} \, 2 \, u_j \, dz_{[\![1,n]\!] \setminus j} \wedge d\bar{z}_J \otimes \big(\varepsilon \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}} \big) \end{array} \right.$$

(le $(-1)^{nq}$ apparaît lors de la tensorisation, en raison de $\sim$)

La propriété suivante est classique :

Propriété 2.3. *$\tilde{D}'^{\,*}_k = - * \tilde{D}''_k *$ sur $C^\infty_{p,q}(X, E_k \otimes \bigwedge^n TX)$.*

Démonstration - Rappelons que D_k est une connexion sur E_k, compatible avec h_k. Et ∇^{TX} est une connexion sur $\bigwedge^n TX$, compatible avec h_{TX}. Donc $\tilde{D}_k$, qui est la connexion induite sur $\tilde{E}_k = E_k \otimes \bigwedge^n TX$ par D_k et ∇^{TX}, est compatible avec $\tilde{h}_k = h_k \otimes h_{TX}$.

Soient $u \in C^\infty_{p-1,q}(X, E_k \otimes \bigwedge^n TX)$ et $v \in C^\infty_{p,q}(X, E_k \otimes \bigwedge^n TX)$ à supports compacts. Alors

$$\begin{aligned} \langle\!\langle \tilde{D}'_k u, v \rangle\!\rangle &= \int_X \langle \tilde{D}'_k u, v \rangle dV_\omega = \int_X \{ \underbrace{\tilde{D}'_k u}_{(p,q)}, \underbrace{*v}_{(n-q,n-p)} \} \\ &= \int_X d' \underbrace{\{u, *v\}}_{(n-1,n),\ \text{donc } d=d'} - (-1)^{p+q-1} \{u, \underbrace{\tilde{D}''_k(*v)}_{(n-q,n-p+1)} \} \\ &= \int_X (-1)^{p+q} \left\{ u, (-1)^{n-q+n-p+1} * * \tilde{D}''_k * v \right\} \\ &= \int_X \left\{ u, * \left[(-1)^{p+q} \, (-1)^{2n-q-p+1} * \tilde{D}''_k * v \right] \right\} \\ &= \langle\!\langle u, - * \tilde{D}''_k * v \rangle\!\rangle \end{aligned}$$

$\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la

Propriété 2.4. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(X,\bigwedge^{0,q}T^*X\otimes E_k) & \xrightarrow{\nabla_k^{q\,\prime\prime}} & C^\infty_{0,1}(X,\bigwedge^{0,q}T^*X\otimes E_k) \\ \downarrow\sim & & \downarrow\Psi=-i^{-n^2}\Psi_1 \\ C^\infty_{n,q}(X,E_k\otimes\bigwedge^n TX) & \xrightarrow{\tilde D_k^{\prime\,*}} & C^\infty_{n-1,q}(X,E_k\otimes\bigwedge^n TX) \end{array}$$

est commutatif, et les flèches verticales sont des isométries.

Démonstration - Distinguons les cas $q=0$ et $q\geq 1$.

$\underline{q=0}$: Soit donc $u\in C^\infty(X,E_k)$; $\tilde u\in C^\infty_{n,0}(X,\tilde E_k)$, donc $*\tilde u=i^{-n^2}\tilde u$. Puisque nous avons montré plus haut que $\tilde D_k'^{\,*}\tilde u=-*\tilde D_k''*\tilde u$, il vient

$$\begin{aligned}\tilde D_k'^{\,*}\tilde u &= -*\tilde D_k''\big[i^{-n^2}\tilde u\big]=-i^{-n^2}*\tilde D_k''\tilde u=-i^{-n^2}*\widetilde{D_k''u}\\ &= -i^{-n^2}(*\circ\sim)\big(D_k''u\big)=-i^{-n^2}\Psi_0\big(D_k''u\big)\\ &= \Psi\big(D_k''u\big)=\Psi\big(\nabla_k^{0\,\prime\prime}u\big)\end{aligned}$$

car $D_k''=\nabla_k^{0\,\prime\prime}$ sur $C^\infty(X,E_k)$. Ainsi, le diagramme est commutatif pour $q=0$.

$\underline{q\neq 0}$: Trivialisons $\bigwedge^{0,q}T^*X$ au voisinage de 0 en choisissant un repère orthonormé $(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ de $\bigwedge^{0,q}T^*X$ tel que $\nabla\alpha_1(0)=\ldots=\nabla\alpha_N(0)=0$. Nous sommes alors ramené au calcul fait pour $q=0$.

□

En fin de compte, nous avons

$$\tilde D_k'^{\,*}\tilde u=\Psi\left(\nabla_k^{q\,\prime\prime}u\right)\quad\text{et}\quad\left|\nabla_k^{q\,\prime\prime}u\right|^2=\left|\tilde D_k'^{\,*}\tilde u\right|^2 .$$

Si S'' est le relèvement de τ^* par Ψ (i.e. $S''(u)=\Psi^{-1}(\tau^*\tilde u)$), alors

$$\tilde D_k'^{\,*}\tilde u+\tau^*\tilde u=\Psi\left(\nabla_k^{q\,\prime\prime}u+S''u\right)\quad\text{et}\quad\left|\tilde D_k'^{\,*}\tilde u+\tau^*\tilde u\right|^2=\left|\nabla_k^{q\,\prime\prime}u+S''u\right|^2 .$$

Reprenant la formule obtenue en fin de section 2.2, il vient alors

$$\begin{aligned}\int_X\langle\Delta_k''u,u\rangle &= \int_X|\tilde D_k'^{\,*}\tilde u+\tau^*\tilde u|^2+\langle\big[i\Theta^{1,1}_{(\tilde E_k,\tilde D_k)},\Lambda_\omega\big]\tilde u,\tilde u\rangle+\langle T_\omega\tilde u,\tilde u\rangle\\ &= \int_X|\nabla_k^{q\,\prime\prime}u+S''u|^2+\langle\big[i\Theta^{1,1}_{(\tilde E_k,\tilde D_k)},\Lambda_\omega\big]\tilde u,\tilde u\rangle+\langle T_\omega\tilde u,\tilde u\rangle\end{aligned}$$

2.6 Formule de type Weitzenböck

Nous avons construit deux morphismes de fibrés

$$\begin{aligned} S' &: \bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k \longrightarrow \bigwedge^{1,0} T^*X \otimes \bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k \\ S'' &: \bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k \longrightarrow \bigwedge^{0,1} T^*X \otimes \bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k \end{aligned}$$

où $S' = \tau = \big[\Lambda, d'\omega\big]$ et $S'' = \Psi^{-1}{}_{o}\tau^*{}_{o} \sim$ est le relèvement de $\tau^* = \big[(d'\omega)^*, \omega\big]$ par les isométries $\sim$ et Ψ.

Nous avons montré que

$$\begin{aligned} \int_X \langle \Delta''_k u, u\rangle &= \int_X |D'_k u + \tau u|^2 + \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(E_k,D_k)}, \Lambda_\omega\big] u, u\rangle + \langle T_\omega u, u\rangle \\ &= \int_X |\nabla^{q}_k{}' u + S' u|^2 + \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(E_k,D_k)}, \Lambda_\omega\big] u, u\rangle + \langle T_\omega u, u\rangle\,, \\ \int_X \langle \Delta''_k u, u\rangle &= \int_X |\tilde{D}'_k{}^* \tilde{u} + \tau^* \tilde{u}|^2 + \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(\tilde{E}_k,\tilde{D}_k)}, \Lambda_\omega\big] \tilde{u}, \tilde{u}\rangle + \langle T_\omega \tilde{u}, \tilde{u}\rangle \\ &= \int_X |\nabla^{q}_k{}'' u + S'' u|^2 + \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(\tilde{E}_k,\tilde{D}_k)}, \Lambda_\omega\big] \tilde{u}, \tilde{u}\rangle + \langle T_\omega \tilde{u}, \tilde{u}\rangle\,. \end{aligned}$$

Posons $S = S' \oplus S''$. En additionnant les deux formules, nous obtenons, pour $u \in C^\infty_{0,q}(X, E_k)$:

$$\begin{aligned} 2\int_X \langle \Delta''_k u, u\rangle = \int_X |\nabla^q_k u + S u|^2 &+ \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(E_k,D_k)}, \Lambda_\omega\big] u, u\rangle + \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(\tilde{E}_k,\tilde{D}_k)}, \Lambda_\omega\big] \tilde{u}, \tilde{u}\rangle \\ &+ \langle T_\omega u, u\rangle + \langle T_\omega \tilde{u}, \tilde{u}\rangle\,. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \Theta_{(E_k,D_k)} &= \Theta_{(L_k,D_{L_k})} \otimes \mathrm{Id}_E + \Theta_{(E,D_E)} = -2i\pi\alpha_k \otimes \mathrm{Id}_E + \Theta_{(E,D_E)}\,, \\ \Theta_{(\tilde{E}_k,\tilde{D}_k)} &= \Theta_{(E_k,D_k)} + \Theta_{\bigwedge^n TX} \otimes \mathrm{Id}_E\,, \\ \Theta_{\bigwedge^n TX} &= \Theta_{(-K_X)} = -2i\pi\,\mathrm{Ricci}(\omega)\,. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{2}{k}\int_X \langle \Delta''_k u, u\rangle = \int_X \frac{1}{k}|\nabla^q_k u + S u|^2 &+ 2\pi\langle \Big[\frac{1}{k}\alpha_k^{1,1}, \Lambda_\omega\Big] u, u\rangle + 2\pi\langle \Big[\frac{1}{k}\alpha_k^{1,1}, \Lambda_\omega\Big] \tilde{u}, \tilde{u}\rangle \\ &+ \frac{1}{k}\Big(\langle \big[i\Theta^{1,1}_{(E,D_E)}, \Lambda_\omega\big] u, u\rangle + \langle \big[i\Theta^{1,1}_{(E,D)}, \Lambda_\omega\big] \tilde{u}, \tilde{u}\rangle + 2\pi\langle \big[\mathrm{Ricci}(\omega), \Lambda_\omega\big] \tilde{u}, \tilde{u}\rangle \\ &+ \langle T_\omega u, u\rangle + \langle T_\omega \tilde{u}, \tilde{u}\rangle\Big)\,. \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu la formule de type Weitzenböck suivante :

Théorème 2.5. *Pour $u \in C^\infty_{0,q}(X,E_k)$,*

$$\frac{2}{k}\int_X \langle \Delta''_k u,u\rangle = \int_X \frac{1}{k}\,|\nabla^q_k u + Su|^2 - \langle V^q u,u\rangle + \frac{1}{k}\,\langle \Theta^q_k u,u\rangle\,,$$

où V^q et Θ^q_k sont les endomorphismes hermitiens de $\bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k$ définis par

$$\begin{array}{rcl}\langle V^q u,u\rangle &=& -2\pi\Big(\langle\big[\alpha,\Lambda_\omega\big]u,u\rangle + \langle\big[\alpha,\Lambda_\omega\big]\tilde u,\tilde u\rangle\Big)\,,\\ \langle \Theta^q_k u,u\rangle &=& 2\pi\Big(\langle\big[\alpha^{1,1}_k - k\alpha,\Lambda_\omega\big]u,u\rangle + \langle\big[\alpha^{1,1}_k - k\alpha,\Lambda_\omega\big]\tilde u,\tilde u\rangle\Big)\\ && +2\pi\langle\big[\mathrm{Ricci}(\omega),\Lambda_\omega\big]\tilde u,\tilde u\rangle\\ && +\langle\big[i\Theta^{1,1}_{(E,D_E)},\Lambda_\omega\big]u,u\rangle + \langle\big[i\Theta^{1,1}_{(E,D)},\Lambda_\omega\big]\tilde u,\tilde u\rangle\\ && +\langle T_\omega u,u\rangle + \langle T_\omega \tilde u,\tilde u\rangle\\ &=& \mathcal{O}(1)\,.\end{array}$$

Propriété 2.6. *Pour tout $x \in X$, soient $\alpha_1(x),\ldots,\alpha_n(x)$ les valeurs propres de $\alpha(x)$ relativement à $\omega(x)$. Alors les valeurs propres de l'endomorphisme V^q sur $\bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k$ sont les $\{2\pi(\alpha_{\complement J} - \alpha_J)\,,\,|J| = q\}$, comptés avec multiplicité $r = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}} E$.*

Démonstration - Il existe des coordonnées locales holomorphes $(z_1,\ldots,z_n)$ centrées en x telles que $\omega(x) = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar z_j$ et $\alpha(x) = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n \alpha_j(x)\,dz_j \wedge d\bar z_j$. Soit $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)$ un repère orthonormé de E_k au voisinage de x.

Pour $u = \sum u_{I,J,b}\,dz_I \wedge d\bar z_J \wedge \varepsilon_b \in \bigwedge^{p,q} T^*X \otimes E_k$, nous avons $|u|^2 = 2^{p+q}\sum |u_{I,J,b}|^2$ et $\langle\big[\alpha,\Lambda_\omega\big]u,u\rangle = 2^{p+q}\sum(\alpha_I + \alpha_J - \sum_{j=1}^n \alpha_j)|u_{I,J,b}|^2$.

Donc pour $u = \sum_{J,b} u_{J,b}\,d\bar z_J \wedge \varepsilon_b \in \bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E_k$, nous avons

$$\tilde u = (-1)^{nq}\sum_{|J|=q,b} u_{J,b}\,dz_{[\![1,n]\!]} \wedge d\bar z_J \wedge \varepsilon_b \otimes \frac{\partial}{\partial z_{[\![1,n]\!]}}\,,$$

$$\begin{array}{rcl}\langle\big[\alpha,\Lambda_\omega\big]u,u\rangle &=& 2^q\sum_{J,b}(-\alpha_{\complement J})\,|u_{J,b}|^2\,,\\ \langle\big[\alpha,\Lambda_\omega\big]\tilde u,\tilde u\rangle &=& 2^q\sum_{J,b}\alpha_J\,|u_{J,b}|^2\,.\end{array}$$

Ainsi $\langle V^q u,u\rangle = 2\pi\,\sum_{J,b}(\alpha_{\complement J} - \alpha_J)\,2^q\,|u_{J,b}|^2$. □

Chapitre 3

Encadrement asymptotique pour le nombre de valeurs propres d'opérateurs de Schrödinger

Résumé

Nous reprenons dans ce chapitre les techniques employées par J.-P. Demailly dans [Dem85] pour obtenir des théorèmes spectraux relatifs aux opérateurs de Schrödinger. La différence avec [Dem85] réside dans le fait que nous considérons une suite de fibrés (L_k) ayant pour courbures α_k, au lieu des puissances tensorielles $L^{\otimes k}$ d'un même fibré L, dont les courbures sont simplement $k\alpha$. Nous exploitons au maximum ces techniques et obtenons un encadrement asymptotique un peu plus général que [Dem85] pour le nombre de valeurs propres du laplacien antiholomorphe.

Commençons par décrire la classe suivante d'opérateurs de Schrödinger que nous allons considérer.

(M,g) est une variété riemannienne de dimension (réelle) m, α une 2-forme réelle fermée et $(F,D_F) \to M$ un fibré hermitien C^∞ de rang (complexe) r. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de 2-formes réelles fermées entières telles que

$$\|\alpha_k - k\alpha\|_{C^\infty} \leq Ck^{-\mu} \quad (\mu > 0 \text{ fixé}),$$

et $(L_k,D_{L_k}) \to M$ une suite de fibrés hermitiens en droites tels que $\frac{i}{2\pi}D_{L_k}^2 = \alpha_k$. Notons ∇_k la connexion hermitienne induite sur $F_k = L_k \otimes F_k$ par D_{L_k} et D_F.

Soient S une section continue du fibré $\bigwedge^1_{\mathbb{R}} T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F,F)$ et V une section continue du fibré $\mathrm{Herm}(F)$ des endomorphismes hermitiens de F. Nous désignerons encore par S et V les endomorphismes $\mathrm{Id}_{L_k} \otimes S$ et $\mathrm{Id}_{L_k} \otimes V$ opérant sur $L_k \otimes F$.

Nous allons considérer la suite d'opérateurs de Schrödinger

$$\frac{1}{k}\big((\nabla_k + S)^*(\nabla_k + S) - V\big).$$

La situation est un peu plus générale que dans [Dem85], la différence résidant dans le fait que nous considérons plus généralement L_k au lieu de L^k, et que nous n'avons donc pas $\alpha_k = k\alpha$.

Rappelons les notations utilisées dans [Dem85] (nous garderons les mêmes). $B = -2\pi\alpha$ désigne le pseudo champ magnétique (ce n'est un champ magnétique, c'est-à-dire la courbure d'un fibré linéaire, que si α est entière) et $B_1(x) \geq \ldots \geq B_s(x) > 0$ sont les modules des valeurs propres non nulles de l'endomorphisme antisymétrique associé à B. Définissons la fonction ν du couple $(x,\lambda) \in M \times \mathbb{R}$, continue à gauche en λ, en posant

$$\nu_B(\lambda) = \frac{2^{s-m}\pi^{-m/2}}{\Gamma(m/2 - s + 1)} B_1 \ldots B_s \sum_{(p_1,\ldots,p_s)\in\mathbb{Z}^s} [\lambda - \sum(2p_j + 1)B_j]_+^{m/2}$$

avec la convention $0^0 = 0$. Définissons également la fonction $\bar{\nu}$, continue à droite en λ :

$$\bar{\nu}_B(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0} \nu_B(\lambda + \varepsilon)\,.$$

Enfin, si Ω est un ouvert relativement compact de M, $N_{\Omega,k}(\lambda)$ est le nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) $\leq \lambda$ de la forme quadratique

$$Q_{\Omega,k}(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{k}\left|\nabla_k u + Su\right|^2 - \langle Vu,u\rangle\right) d\sigma\,, \quad u \in L^2(M,F_k)$$

pour le problème de Dirichlet (c'est-à-dire avec condition de Dirichlet $u_{|\partial\Omega} = 0$). Soient $V_1(x) \leq \ldots \leq V_r(x)$ les valeurs propres de $V(x)$ en tout point $x \in M$.

Le théorème 2.16 de [Dem85] est alors encore valable dans cette situation, et même sous une forme à peine plus générale que nous énonçons comme suit :

Théorème 3.1. *Pour tout réel λ et toute suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers zéro, nous avons les encadrements asymptotiques suivants :*

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to+\infty} k^{-m/2}\, N_{\Omega,k}(\lambda + v_k) \quad &\geq \quad \sum_{j=1}^r \int_X \nu_B(\lambda + V_j)d\sigma\,,\\
\limsup_{k\to+\infty} k^{-m/2}\, N_{\Omega,k}(\lambda + v_k) \quad &\leq \quad \sum_{j=1}^r \int_X \bar{\nu}_B(\lambda + V_j)d\sigma\,.
\end{aligned}$$

Nous allons reprendre la démonstration de [Dem85], en donnant d'abord une estimée dans le cas d'un champ magnétique constant et de F trivial, puis nous démontreront successivement des estimées locales et globales (F étant à chaque fois supposé trivial), enfin nous terminerons par le cas général. Nous renvoyons à [Dem85] pour de plus amples détails.

3.1 Champ magnétique constant

Soit tout d'abord $P(R) = \{|x_i| < R/2\} \subset \mathbb{R}^m$, $B = \sum_{j=1}^s B_j\, dx_j \wedge dx_{j+s}$ constant et

$$Q_{P(R)}(u) = \int_{P(R)} \left(\sum_{j=1}^s \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_{j+s}} + iB_j x_j u\right|^2\right) + \left(\sum_{j>2s}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right).$$

$N_{P(R)}(\lambda)$ désigne le nombre de valeurs propres (avec multiplicité) de $Q_{P(R)}$ (pour le problème de Dirichlet) inférieures ou égales à λ.

Notons $n_B = \frac{2^{s-m}\pi^{-m/2}}{\Gamma(m/2-s+1)} B_1 \dots B_s$, et posons $[x]_+^s = \big(\max(x,0)\big)^s$ si $s > 0$, $[x]_+^0 = 0$ si $x \le 0$, $[x]_+^0 = 1$ si $x > 0$. Une lecture attentive de [Dem85] montre que nous avons la

Propriété 3.2 (Théorème 1.6 de [Dem85]). *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $R > 0$, nous avons*

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^s} n_B \left(\left[\lambda - \left(1 + \tfrac{C(p,B)}{R}\right)\sum(2p_j+1)B_j\right]_+^{1/2} - \tfrac{\pi\sqrt{m-2s}}{R}\right)_+^{m-2s} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{R}}\right)^s - \tfrac{m}{R}\left(\sqrt{\lambda_+} + \tfrac{1}{R}\right)^{m-1}$$

$$\le R^{-m} N_{P(R)}(\lambda)$$

$$\le \sum_{p\in\mathbb{N}^s} n_B \left(\left[\lambda - \sum(2p_j+1)B_j\right]_+^{1/2} + \tfrac{\pi\sqrt{m-2s}}{R}\right)^{m-2s} \times \prod_{j=1}^{s}\left(1 + \tfrac{2\sqrt{\lambda_+}}{B_j R} + \tfrac{2\pi}{B_j R^2}\right),$$

la dernière somme ne portant que sur les p tels que $\sum(2p_j+1)B_j < \lambda$.

Faisons immédiatement une remarque : Nous avons écrit que les inégalités étaient vraies pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $R > 0$. C'est vrai pour la première inégalité, car à p fixé, si $(1 + C(p,B)/R)\sum(2p_j+1)B_j < \lambda$, on sait que des l existent. Par contre, ce n'est pas tout à fait vrai pour la seconde inégalité lorsque $2s = m$: en effet, dans ce cas, la lecture de [Dem85] montre que l'inégalité n'est licite que si R est assez grand pour que $\Phi_{p_j}(R\sqrt{B_j}/2) \neq 0$, et ceci pour tous les p concernés.

Cependant, si $\lambda \in]-\infty; A[$, comme on ne doit compter (voir [Dem85]) que les p tels que $\sum(2p_j+1)B_j < \lambda$, cela donne $p_j \le A/B_j$, donc il n'y a qu'un nombre fini de p. Ainsi, pour R assez grand (indépendant de λ), l'inégalité est vraie.

Un calcul sans difficultés nous permet d'obtenir la majoration (uniforme en λ) suivante :

$$\begin{aligned} R^{-m} N_{P(R)}(\lambda) &\le \sum_{p\in\mathbb{N}^s} \left(n_B\left[\lambda - \sum(2p_j+1)B_j\right]_+^{m/2-s} + \frac{C(m,A,B)}{R}\right) \\ &\le \left(\sum_{p\in\mathbb{N}^s} n_B\left[\lambda - \sum(2p_j+1)B_j\right]_+^{m/2-s}\right) + \frac{C(m,A,B)}{B_1\dots B_s R}, \end{aligned}$$

les sommes ne portant que sur les p tels que $\sum(2p_j+1)B_j < \lambda$. Nous avons donc bien une estimation uniforme par rapport à λ, mais la sommation sur p fait que la constante d'uniformité dépend des $1/B_j$. Il n'y a donc pas d'espoir d'obtenir une uniformité dans les estimations globales. Il en est de même pour la première inégalité.

Corollaire 3.3 (Corollaire 1.7 de [Dem85]). *$X = \mathbb{R}^m$, $\Omega = \{|x_i| < r/2\} \subset X$,*

$B = \sum_{j=1}^s B_j\, dx_j \wedge dx_{j+s}$, $g = \sum_{j=1}^m dx_j^2$.

$$\begin{aligned} Q_{\Omega,k}(u) &= \int_\Omega \frac{1}{k}\Big[\Big(\sum_{j=1}^s \Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_{j+s}} + ikB_j x_j u\Big|^2\Big) + \Big(\sum_{j>2s}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^2\Big) \\ &= k^{-m/2} Q_{P(\sqrt{k}r)}(\tilde u) \qquad \text{où} \quad \tilde u(X) = u(X/\sqrt{k})\,, \\ N_{\Omega,k}(\lambda) &= N_{P(\sqrt{k}r)}(\lambda)\,. \end{aligned}$$

Nous avons alors les estimations suivantes, valables pour tout réel λ et pour kr assez grand :

$$\begin{aligned} &\sum_{p\in\mathbb{N}^s} n_B \left(\Big[\lambda - \big(1+\tfrac{C(p,B)}{\sqrt{k}r}\big)\sum(2p_j+1)B_j\Big]_+^{1/2} - \tfrac{\pi\sqrt{m-2s}}{\sqrt{k}r}\right)_+^{m-2s} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{\sqrt{k}r}}\right)^s \\ &\qquad\qquad\qquad - \tfrac{m}{\sqrt{k}r}\left(\sqrt{\lambda_+} + \tfrac{1}{\sqrt{k}r}\right)^{m-1} \\ &\le k^{-m/2} r^{-m} N_{\Omega,k}(\lambda) \\ &\le \sum_{p\in\mathbb{N}^s} n_B\left(\Big[\lambda - \sum(2p_j+1)B_j\Big]_+^{1/2} + \tfrac{\pi\sqrt{m-2s}}{\sqrt{k}r}\right)^{m-2s} \times \prod_{j=1}^s \left(1 + \tfrac{2\sqrt{\lambda_+}}{B_j\sqrt{k}r} + \tfrac{2\pi}{B_j k r_k^2}\right) \end{aligned}$$

3.2 Estimation locale asymptotique

Plaçons-nous d'abord dans la situation locale, c'est-à-dire supposons $X = \mathbb{R}^m$. L_k est alors trivial. Nous supposerons F trivial de rang 1. Soit A un potentiel du pseudo champ magnétique $B = -2\pi\alpha$ sur $\mathbb{R}^m$ (ce n'est un champ magnétique que si α est entière), V une fonction continue sur X. Soit $a \in \mathbb{R}^m$, et P_k une suite de pavés ouverts contenant a, de rayon $r_k = k^{-\beta}$, $\beta > 0$.

Il existe A_k potentiel de $B_k = -2\pi\alpha_k$ et $\tilde A_k$ potentiel de $B(a)$ sur $\bar P_k$ tels que

$$|A_k(x) - kA(x)| \le C\|\alpha_k - k\alpha\|_{C^\infty}\, r_k\,, \quad |\tilde A_k(x) - A(x)| \le C r_k^2 \quad \text{sur } P_k\,.$$

Démonstration -

- Soit A_k' le potentiel de $B_k - kB$ calculé au moyen de la formule d'homotopie usuelle. Alors $|A_k'(x)| \le C\|B_k - kB\| r_k = C\|\alpha_k - k\alpha\| r_k$. Posons $A_k = kA + A_k'$: A_k est un potentiel de B_k, puisque $dA_k = kB + (B_k - kB) = B_k$.
- Soit A_k'' potentiel de $B(a) - B(x)$. Alors $|A_k''(x)| \le Cr_k^2$. Posons $\tilde A_k = A + A_k''$: $\tilde A_k$ est un potentiel de $B(a)$.

□

Donc sur P_k, nous avons

$$
\begin{aligned}
|k\tilde{A}_k(x) - A_k(x)| &\leq |k\tilde{A}_k(x) - kA(x)| + |kA(x) - A_k(x)| \\
&\leq Ckr_k^2\Big(1 + (kr_k)^{-1}\|k\alpha - \alpha_k\|\Big) \leq Ckr_k^2
\end{aligned}
$$

dès que $\beta < 1 + \mu$, puisque $(kr_k)^{-1}\|k\alpha - \alpha_k\| \leq Ck^{-1+\beta-\mu}$.

Signalons d'emblée que dans toute la suite, C désignera une constante (indépendante de k, indépendante de a si a parcourt un compact) dont la valeur pourra changer d'une ligne à l'autre.

Posons $\tilde{B} \equiv B(a) = \sum_{j=1}^{s} B_j\, dy_j \wedge dy_{j+s}$ et $\tilde{g} \equiv g(a) = \sum_{j=1}^{m} dy_j^2$. Notons :

$$
Q_{P_k}(u) = \int_{P_k} \Big(\frac{1}{k}\,|du + iA_k u|_g^2 - V|u|_g^2\Big)\, d\sigma_g\,, \quad \tilde{Q}_{P_k}(u) = \int_{P_k} \Big(\frac{1}{k}\,|du + ik\tilde{A}_k u|_{\tilde{g}}^2 - V(a)|u|_{\tilde{g}}^2\Big)\, d\sigma_{\tilde{g}}\,.
$$

Commençons par observer que $(1 - Cr_k)\|\cdot\|_{\tilde{g}}^2 \leq \|\cdot\|_g^2 \leq (1 + Cr_k)\|\cdot\|_{\tilde{g}}^2$ sur P_k. En effet, $\|\tilde{g} - g\| \leq Cr_k\tilde{g} \Rightarrow (1 - Cr_k)\tilde{g} \leq g \leq (1 + Cr_k)\tilde{g}$.

Comparons ensuite les formes volumes $d\sigma_g$ et $d\sigma_{\tilde{g}}$:

$$
\begin{aligned}
(1 - Cr_k)\tilde{g} \leq g \leq (1 + Cr_k)\tilde{g} &\Rightarrow \sqrt{(1 - Cr_k)^m}\, d\sigma_{\tilde{g}} \leq d\sigma_g \leq \sqrt{(1 + Cr_k)^m}\, d\sigma_{\tilde{g}} \\
&\Rightarrow (1 - C_1 r_k)\, d\sigma_{\tilde{g}} \leq d\sigma_g \leq (1 + C_1 r_k)\, d\sigma_{\tilde{g}}
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{array}{rrcccl}
 & (1 - Cr_k)(1 - C_1 r_k)|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} & \leq & |u|_g^2 d\sigma_g & \leq & (1 + Cr_k)(1 + C_1 r_k)|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} \\
\Rightarrow & (1 - C_2 r_k)|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} & \leq & |u|_g^2 d\sigma_g & \leq & (1 + C_2 r_k)|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} \\
\Rightarrow & -C_2 r_k |u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} & \leq & |u|_g^2 d\sigma_g - |u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} & \leq & C_2 r_k |u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}}
\end{array}
$$

Enfin, terminons ces préliminaires par la double inégalité suivante :

$$
(1 - \eta)(a^2 - \eta^{-1}b^2) \leq (a + b)^2 \leq (1 + \eta)(a^2 + \eta^{-1}b^2) \text{ si } \alpha, a, b > 0.
$$

(preuve : étudier $f(\eta) = (1 + \eta)(a^2 + \eta^{-1}b^2)$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

Nous pouvons maintenant comparer Q_{P_k} et $\tilde{Q}_{P_k}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\int_{P_k}\left|du+iA_ku\right|_g^2 d\sigma_g \\
&\leq \frac{1}{k}\int_{P_k}(1+Cr_k)\left|du+iA_ku\right|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} \\
&\leq \frac{1}{k}\int_{P_k}(1+Cr_k)\left|du+ik\tilde{A}_ku-ik\tilde{A}_ku+iA_ku\right|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} \\
&\leq (1+Cr_k)\frac{1}{k}\int_{P_k}(1+\eta_k)\Big(\left|du+ik\tilde{A}_ku\right|_{\tilde{g}}^2+\eta_k^{-1}\left|A_ku-k\tilde{A}_ku\right|_{\tilde{g}}^2\Big)\, d\sigma_{\tilde{g}} \\
&\leq (1+Cr_k)(1+\eta_k)\frac{1}{k}\int_{P_k}\left|du+ik\tilde{A}_ku\right|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} \\
&\quad +(1+Cr_k)(1+\eta_k)\frac{1}{k}\eta_k^{-1}(Ckr_k^2)^2\int_{P_k}|u|_{\tilde{g}}^2\, d\sigma_{\tilde{g}}\,.
\end{aligned}$$

Posons $\eta_k=k^{-\gamma}$. Alors $k^{-1}\eta_k^{-1}(kr_k^2)^2=k^{-1+\gamma+2-4\beta}=k^{\gamma+1-4\beta}$ tendra vers zéro si l'on peut choisir γ tel que $\gamma<4\beta-1$, c'est-à-dire si $\beta>1/4$. Ayant ainsi choisi, nous avons

$$\frac{1}{k}\int_{P_k}\left|du+iA_ku\right|_g^2 d\sigma_g \leq (1+\varepsilon_k^1)\int_{P_k}\frac{1}{k}\left|du+ik\tilde{A}_ku\right|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}}+\varepsilon_k^1\|u\|_{\tilde{g}}^2\,.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
-V|u|_g^2 d\sigma_g &= -V(a)|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}}+V(a)\Big(|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}}-|u|_g^2 d\sigma_g\Big)+\Big(V(a)-V\Big)|u|_g^2 d\sigma_g \\
&\leq -V(a)|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}}+|V(a)|C_2r_k|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}}+\sup_{P_k}|V(a)-V|\,(1+C_2r_k)|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} \\
&= -V(a)|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}}+\gamma_k|u|_{\tilde{g}}^2 d\sigma_{\tilde{g}} \qquad \text{avec } \gamma_k=\mathcal{O}(r_k)\to 0 \text{ quand } k\to+\infty\,.
\end{aligned}$$

Nous avons donc établi les inégalités suivantes (l'autre inégalité entre Q_{P_k} et $\tilde{Q}_{P_k}$ s'établissant de la même manière) :

Propriété 3.4.

$$(1-\varepsilon_k)\|\cdot\|_{\tilde{g}}^2 \leq \|\cdot\|_g^2 \leq (1+\varepsilon_k)\|\cdot\|_{\tilde{g}}^2$$
$$(1-\varepsilon_k)\tilde{Q}_{P_k}(u)-\varepsilon_k\|u\|_{\tilde{g}}^2 \leq Q_{P_k}(u) \leq (1+\varepsilon_k)\tilde{Q}_{P_k}(u)+\varepsilon_k\|u\|_{\tilde{g}}^2$$

Nous pouvons observer que $\varepsilon_k=\mathcal{O}(k^{-\min(\beta,\gamma,4\beta-1-\gamma)})$. De la comparaison entre les formes quadratiques, nous déduisons les relations suivantes entre les valeurs propres de Q_{P_k} et $\tilde{Q}_{P_k}$:

Propriété 3.5.

$$N_{\tilde{Q}_{P_k}}\left(\frac{\lambda(1-\varepsilon_k)-\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k}\right) \leq N_{Q_{P_k}}(\lambda) \leq N_{\tilde{Q}_{P_k}}\left(\frac{\lambda(1+\varepsilon_k)+\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}\right)\,.$$

Démonstration -

- Soit F de dim p tel que $Q_{P_k} \leq \lambda$ sur F ; alors
$(1-\varepsilon_k)\tilde{Q}_{P_k}(u) \leq \varepsilon_k\|u\|^2_{\tilde{g}} + \lambda\|u\|^2_g \leq \varepsilon_k\|u\|^2_{\tilde{g}} + \lambda(1+\varepsilon_k)\|u\|^2_{\tilde{g}} \leq \big[\lambda(1+\varepsilon_k)+\varepsilon_k\big]\|u\|^2_{\tilde{g}}$.
Donc sur F, $\tilde{Q}_{P_k} \leq \frac{\lambda(1+\varepsilon_k)+\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}$. Donc la p-ième valeur propre de $\tilde{Q}_{P_k}$ est inférieure ou égale à $\frac{\lambda(1+\varepsilon_k)+\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}$.
- Soit $\tilde{F}$ de dim $\tilde{p}$ tel que $\tilde{Q}_{P_k} \leq \frac{\lambda(1-\varepsilon_k)-\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k}$ sur $\tilde{F}$; alors
$Q_{P_k}(u) \leq \big[\lambda(1-\varepsilon_k)-\varepsilon_k\big]\|u\|^2_{\tilde{g}} + \varepsilon_k\|u\|^2_{\tilde{g}} = \lambda(1-\varepsilon_k)\|u\|^2_{\tilde{g}} \leq \lambda\|u\|^2_g$.
Donc $Q_{P_k} \leq \lambda$ sur $\tilde{F}$. Donc la $\tilde{p}$-ième valeur propre de Q_{P_k} est inférieure à λ.

□

Notons encore $\tilde{Q}^0_{P_k}(u) = \int_{P_k} \frac{1}{k}|du + ik\tilde{A}_k u|^2_{\tilde{g}}\, d\sigma_{\tilde{g}}$ (ce qui revient à supposer $V(a)=0$). Alors

$$N_{\tilde{Q}_{P_k}}(\lambda) = N_{\tilde{Q}^0_{P_k}}(\lambda + V(a)) .$$

En effet, $\tilde{Q}_{P_k}(u) = \lambda\|u\|^2_{\tilde{g}}$ équivaut à $\Longleftrightarrow \quad \tilde{Q}^0_{P_k}(u) = (\lambda+V(a))\|u\|^2_{\tilde{g}}$.

Nous ne pouvons pas appliquer directement les résultats de la section précédente, car P_k n'est pas forcément un parallélépipède dans les coordonnées y_j. Pour contourner cette difficulté, J.-P. Demailly pave P_k par des cubes dans les coordonnées y_j.

Soit $\tilde{\varepsilon}_k = k^{-\delta}$. Considérons le pavage $\bigcup_{d\in A} P_{k,d} \subset P_k \subset \bar{P}_k \subset \bigcup_{d\in B} P'_{k,d}$, où $P_{k,d}$ est un cube de côté $\tilde{\varepsilon}_k r_k$ et $P'_{k,d}$ un cube de côté $\tilde{\varepsilon}_k(1+\tilde{\varepsilon}_k)r_k$, tous deux centrés au point $\tilde{\varepsilon}_k r_k d$, $d \in \mathbb{Z}^m$. Soit $\Psi_k = (\Psi_{k,d})_{d\in B}$ tel que pour tout k, $\sum_{d\in B}\Psi^2_{k,d} = 1$ sur $\bar{P}_k$, $\operatorname{supp}(\Psi_{k,d}) \subset P'_{k,d}$ et

$$\frac{1}{k}C(\Psi_k) = \frac{1}{k}\sup_{P_k}\Big(\sum_{d\in B}|d\Psi_{k,d}|^2\Big) \leq \frac{C_9}{k(\tilde{\varepsilon}^2_k r_k)^2} .$$

Nous avons $(1-C_7\tilde{\varepsilon}_k)\mathrm{Vol}(P_k) \leq \sum_{d\in A}\mathrm{Vol}(P_{k,d}) = \sum_{d\in A}(\tilde{\varepsilon}_k r_k)^m \leq \mathrm{Vol}(P_k)$ et $\mathrm{Vol}(P_k) \leq \sum_{d\in B}\mathrm{Vol}(P'_{k,d}) = \sum_{d\in B}\big(\tilde{\varepsilon}_k(1+\tilde{\varepsilon}_k)r_k\big)^m \leq (1+C_7\tilde{\varepsilon}_k)\mathrm{Vol}(P_k)$.

D'après la proposition 2.6 de [Dem85], nous avons :

$$\sum_{d\in A} N_{\tilde{Q}^0_{P_{k,d}}}(\lambda) \leq N_{\tilde{Q}^0_{P_k}}(\lambda) \leq \sum_{d\in B} N_{\tilde{Q}^0_{P'_{k,d}}}\big(\lambda + \frac{1}{k}C(\Psi_k)\big) ,$$

donc

$$\sum_{d\in A} N_{\tilde{Q}^0_{P_{k,d}}}(\lambda+V(a)) \leq N_{\tilde{Q}_{P_k}}(\lambda) \leq \sum_{d\in B} N_{\tilde{Q}^0_{P'_{k,d}}}\big(\lambda + V(a) + \frac{1}{k}C(\Psi_k)\big) .$$

Afin d'éviter des formules trop volumineuses et découpées sur plusieurs lignes, nous adoptons provisoirement les notations suivantes :

$$F_1(a,p,B,k) = V(a) - \big(1 + \frac{C(p,B)}{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k}\big)\sum(2p_j+1)B_j ,$$

$$F_2(a,p,B,k) = V(a) + \frac{1}{k}C(\Psi_k) - \sum(2p_j+1)B_j\,.$$

D'après la propriété 3.2, nous avons alors

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{d\in A} N_{\tilde{Q}^0_{P_{k,d}}}\big(\lambda+V(a)\big)}{\mathrm{Vol}(P_k)}\\
&\quad\geq \sum_{d\in A}\sum_{p\in\mathbb{N}^s}\frac{(\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k)^m}{\mathrm{Vol}(P_k)}n_B\bigg(\Big[\lambda+F_1(a,p,B,k)\Big]_+^{1/2}-\frac{\pi\sqrt{m-2s}}{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k}\bigg)_+^{m-2s}\\
&\qquad\qquad\times\bigg(1-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k}}\bigg)^s-\sum_{d\in A}\frac{(\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k)^{m-1}}{\mathrm{Vol}(P_k)}m\bigg(\sqrt{\big(\lambda+V(a)\big)_+}+\frac{1}{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k}\bigg)^{m-1}\\
&\quad\geq \sum_{p\in\mathbb{N}^s}k^{m/2}(1-C_7\tilde{\varepsilon}_k)n_B\bigg(\Big[\lambda+F_1(a,p,B,k)\Big]_+^{1/2}-\frac{\pi\sqrt{m-2s}}{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k}\bigg)_+^{m-2s}\\
&\qquad\qquad\times\bigg(1-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k}}\bigg)^s-k^n\frac{m}{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k}\bigg(\sqrt{\big(\lambda+V(a)\big)_+}+\frac{1}{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k}\bigg)^{m-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{d\in B} N_{\tilde{Q}^0_{P'_{k,d}}}\big(\lambda+V(a)+\frac{1}{k}C(\Psi_k)\big)}{\mathrm{Vol}(P_k)}\\
&\quad\leq \sum_{d\in B}\sum_{p\in\mathbb{N}^s}\frac{\big(\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k(1+\tilde{\varepsilon}_k)r_k\big)^m}{\mathrm{Vol}(P_k)}n_B\bigg(\Big[\lambda+F_2(a,p,B,k)\Big]_+^{1/2}+\frac{\pi\sqrt{m-2s}}{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k(1+\tilde{\varepsilon}_k)r_k}\bigg)_+^{m-2s}\\
&\qquad\qquad\times\prod_{j=1}^s\bigg(1+\frac{2\sqrt{\big(\lambda+V(a)+\frac{1}{k}C(\Psi_k)\big)_+}}{B_j\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k(1+\tilde{\varepsilon}_k)r_k}+\frac{2\pi}{B_jk\tilde{\varepsilon}_k^2(1+\tilde{\varepsilon}_k)^2r_k^2}\bigg)\\
&\quad\leq \sum_{p\in\mathbb{N}^s}k^{m/2}(1+C_7\tilde{\varepsilon}_k)n_B\bigg(\Big[\lambda+F_2(a,p,B,k)\Big]_+^{1/2}+\frac{\pi\sqrt{m-2s}}{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k(1+\tilde{\varepsilon}_k)r_k}\bigg)_+^{m-2s}\\
&\qquad\qquad\times\prod_{j=1}^s\bigg(1+\frac{2\sqrt{\big(\lambda+V(a)+\frac{1}{k}C(\Psi_k)\big)_+}}{B_j\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k(1+\tilde{\varepsilon}_k)r_k}+\frac{2\pi}{B_jk\tilde{\varepsilon}_k^2(1+\tilde{\varepsilon}_k)^2r_k^2}\bigg)\,,
\end{aligned}$$

la somme portant sur les p tels que $\lambda+F_2(a,p,B,k)=\lambda+V(a)+\frac{1}{k}C(\Psi_k)-\sum(2p_j+1)B_j>0$.

De cet encadrement de $N_{\tilde{Q}_{P_k}}(\lambda)\,/\,\mathrm{Vol}(P_k)$, nous en déduisons l'encadrement suivant de $N_{Q_{P_k}}(\lambda)\,/\,\mathrm{Vol}(P_k)$. Pour cela, il suffit de "recoller" toutes les estimations précédentes, ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
&(1-C_7\tilde\varepsilon_k)\sum_{p\in N^s} n_B\Big(\Big[\frac{\lambda(1-\varepsilon_k)-\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k}+F_1(a,p,B,k)\Big]_+^{1/2}-\frac{\pi\sqrt{m-2s}}{\sqrt{k}\tilde\varepsilon_k r_k}\Big)_+^{m-2s}\\
&\qquad\times\Big(1-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{k}\tilde\varepsilon_k r_k}}\Big)^s-\frac{m}{\sqrt{k}\tilde\varepsilon_k r_k}\Big(\sqrt{\Big(\frac{\lambda(1-\varepsilon_k)-\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k}+V(a)\Big)_+}+\frac{1}{\sqrt{k}\tilde\varepsilon_k r_k}\Big)^{m-1}\\
\leq\;& k^{-m/2}\,\frac{N_{Q_{P_k}}(\lambda)}{\mathrm{Vol}(P_k)}\\
\leq\;& (1+C_7\tilde\varepsilon_k)\sum_{p\in N^s} n_B\Big(\Big[\frac{\lambda(1+\varepsilon_k)+\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}+F_2(a,p,B,k)\Big]_+^{1/2}+\frac{\pi\sqrt{m-2s}}{\sqrt{k}\tilde\varepsilon_k(1+\tilde\varepsilon_k)r_k}\Big)_+^{m-2s}\\
&\qquad\times\prod_{j=1}^{s}\Big(1+\frac{2\sqrt{\Big(\frac{\lambda(1+\varepsilon_k)+\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}+V(a)+\frac1k C(\Psi_k)\Big)_+}}{B_j\sqrt{k}\tilde\varepsilon_k(1+\tilde\varepsilon_k)r_k}+\frac{2\pi}{B_jk\tilde\varepsilon_k^2(1+\tilde\varepsilon_k)^2r_k^2}\Big),
\end{aligned}
$$

la dernière somme portant sur les p tels que $\frac{\lambda(1+\varepsilon_k)+\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}+V(a)+\frac1k C(\Psi_k)-\sum(2p_j+1)B_j>0$.

Ceci démontre la proposition 2.9 de [Dem85] dans notre cas plus général.

Rappelons que $r_k=k^{-\beta}$, avec les conditions $1/4<\beta<1+\mu$, et $\tilde\varepsilon_k=k^{-\delta}$. Nous voulons

$$
\begin{array}{lclcl}
\sqrt{k}\tilde\varepsilon_k r_k\longrightarrow\infty & \Longleftrightarrow & 1/2-\delta-\beta>0 & \Longleftrightarrow & \beta+\delta<1/2\\
\frac1k C(\Psi_k)\longrightarrow 0 & \Longleftrightarrow & -1+4\delta+2\beta<0 & \Longleftrightarrow & \beta+2\delta<1/2
\end{array}
$$

La deuxième condition implique la première.

Appliquons maintenant ces inégalités à $\lambda=\lambda_0+v_k$, où $v_k\to 0$:

- Étudions la première inégalité : le terme entre crochets $[\quad]_+^{1/2}$ est égal à

$$
\begin{aligned}
&\frac{\lambda(1-\varepsilon_k)-\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k}+V(a)-\Big(1+\frac{C(p,B)}{\sqrt{k}\tilde\varepsilon_k r_k}\Big)\sum(2p_j+1)B_j\\
&\quad=\;\lambda_0+V(a)-\sum(2p_j+1)B_j\\
&\qquad\qquad+\;\underbrace{v_k\frac{1-\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k}-\frac{\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k}(2\lambda_0+1)-\frac{C(p,B)}{\sqrt{k}\tilde\varepsilon r_k}\sum(2p_j+1)B_j}_{\text{tend vers zéro quand }k\to+\infty}
\end{aligned}
$$

  Donc pour $2s=m$, la somme du membre de gauche de la première inégalité compte au moins (pour k assez grand) tous les p tels que $\lambda_0+V(a)-\sum(2p_j+1)B_j>0$. Donc la limite de ce terme sera supérieure ou égale à

$$
\sum_{p\in N^s} n_B\Big[\lambda_0+V(a)-\sum(2p_j+1)B_j\Big]_+^{m/2-s}.
$$

- Quant à la seconde inégalité, le terme entre crochets $[\quad]_+^{1/2}$ est égal à

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda(1+\varepsilon_k)+\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}+V(a)+\frac{1}{k}C(\Psi_k)-\sum(2p_j+1)B_j \\
&= \quad \lambda_0+V(a)-\sum(2p_j+1)B_j+\underbrace{\frac{\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}(2\lambda_0+1)+v_k\frac{1+\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}+\frac{1}{k}C(\Psi_k)}_{\text{tend vers zéro quand } k\to+\infty}\,.
\end{aligned}$$

Or la somme ne compte que les p tels que

$$\frac{\lambda(1+\varepsilon_k)+\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}+V(a)-\sum(2p_j+1)B_j>0\,,$$

c'est-à-dire les p tels que

$$\lambda_0+V(a)-\sum(2p_j+1)B_j+v_k\frac{1+\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}+\frac{\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}(2\lambda_0+1)>0\,.$$

Donc pour $2s=m$ et k assez grand, elle comptera au plus les p tels que $\lambda_0+V(a)-\sum(2p_j+1)B_j\geq 0$. Donc la limite sera inférieure ou égale à

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^s} n_B\Big[\lambda_0+V(a)-\sum(2p_j+1)B_j\Big]_{++}^{m/2-s}\,,$$

où l'on a posé $[x]_{++}^s=\big(\max(x,0)\big)^s$ si $s>0$, $[x]_{++}^0=0$ si $x<0$, $[x]_{++}^0=1$ si $x\geq 0$.

Comme $\nu_B(\lambda)=\sum_{p\in\mathbb{N}^s} n_B\Big[\lambda-\sum(2p_j+1)B_j\Big]_+^{m/2-s}$ et $\bar\nu_B(\lambda)=\sum_{p\in\mathbb{N}^s} n_B\Big[\lambda-\sum(2p_j+1)B_j\Big]_{++}^{n-s}$, nous obtenons alors la

Propriété 3.6 (cf. Théorème 2.9 de [Dem85]). *Pour tout $\lambda_0\in\mathbb{R}$, sous les hypothèses $v_k\to 0$, $\sqrt{k}r_k\to+\infty$ et $\sqrt{k}r_k^2\to 0$, nous avons*

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to+\infty} k^{-m/2}\,\frac{N_{Q_{P_k}}(\lambda_0+v_k)}{\mathrm{Vol}(P_k)} &\geq \nu_{B(a)}\big(\lambda_0+V(a)\big)\,,\\
\limsup_{k\to+\infty} k^{-m/2}\,\frac{N_{Q_{P_k}}(\lambda_0+v_k)}{\mathrm{Vol}(P_k)} &\leq \bar\nu_{B(a)}\big(\lambda_0+V(a)\big)\,.
\end{aligned}$$

Démonstration - Il suffit d'être capable de choisir β, γ, δ tels que $1/4<\beta<1+\mu$, $\beta+2\delta<1/2$ et $\gamma<4\beta-1$. Cela ne pose aucune difficulté. □

3.3 Estimations globales (cas F trivial)

Théorème 3.7 (cf. Théorème 2.3 de [Dem85]). *Si Ω est un ouvert relativement compact de X, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et $v_k \to 0$, nous avons*

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to+\infty} k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0+v_k) &\geq \int_\Omega \nu_B(\lambda_0+V)d\sigma_g\,,\\ \limsup_{k\to+\infty} k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0+v_k) &\leq \int_\Omega \bar{\nu}_B(\lambda_0+V)d\sigma_g\,.\end{aligned}$$

Démonstration - Nous supposerons d'abord que Ω est un ouvert de carte, c'est-à-dire que nous supposerons que $X=\mathbb{R}^m$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$.

- Pavons Ω : soit $\Pi_{k,d}$ le cube ouvert de côté $r_k = k^{-\beta}$ et $\Pi'_{k,d}$ le cube ouvert de côté $k^{-\beta}(1+k^{-\gamma})$, tous deux centrés au point $k^{-\beta}d$, $d\in\mathbb{Z}^m$.
  Soient $I(k)=\{d \text{ tel que } \Pi_{k,d}\subset\Omega\}$ et $I'(k)=\{d \text{ tel que } \bar{\Pi}'_{k,d}\cap\bar{\Omega}\neq\emptyset\}$. Il existe une partition de l'unité $\Psi_k=(\Psi_{k,d})_{d\in I'(k)}$ telle que $\sum\Psi^2_{k,d}=1$ sur $\bar\Omega$, $\mathrm{supp}(\Psi_{k,d})\subset\Pi'_{k,d}$ et $C(\Psi_k)=\sum_\Omega\sum_{d\in I'(k)}|d\Psi_{k,d}|^2\leq C_{10}k^{2(\beta+\gamma)}$. Ainsi

$$\frac{1}{k}C(\Psi_k)\to 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 1-2(\beta+\gamma)>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \beta+\gamma<1/2\,.$$

- Soit $\lambda_0\in\mathbb{R}$ et $v_k\to 0$. Considérons les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} f_k &= \sum_{d\in I(k)} k^{-m/2}\,\frac{N_{\Pi_{k,d}}(\lambda_0+v_k)}{\mathrm{Vol}(\Pi_{k,d})}\,\mathbf{1}_{\Pi_{k,d}}\\ f'_k &= \sum_{d\in I'(k)} k^{-m/2}\,\frac{N_{\Pi'_{k,d}}(\lambda_0+v_k+\frac{1}{k}C(\Psi_k))}{\mathrm{Vol}(\Pi_{k,d})}\,\mathbf{1}_{\Pi_{k,d}}\end{aligned}$$

  D'après la propriété 2.6 de [Dem85], nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_k d\sigma \leq k^{-m/2}N_{\Omega,k}(\lambda_0+v_k)\leq\int_{\mathbb{R}^m} f'_k d\sigma\,.$$

  Soit $Z=\bigcup_{k\in\mathbb{N},\,d\in\mathbb{Z}^m}\partial\Pi_{k,d}$ et $x\in\Omega\setminus Z$. Pour k assez grand, $\exists!\,d(k)$ tel que $x\in\Pi_{k,d(k)}$. Alors

$$f_k(x)=k^{-m/2}\,\frac{N_{\Pi_{k,d(k)}}(\lambda_0+v_k)}{\mathrm{Vol}(\Pi_{k,d(k)})}\,,\qquad f'_k(x)=k^{-m/2}\,\frac{N_{\Pi'_{k,d(k)}}(\lambda_0+v_k+\frac{1}{k}C(\Psi_k))}{\mathrm{Vol}(\Pi_{k,d(k)})}\,.$$

  Donc $\liminf f_k(x)\geq\nu_{B(x)}\big(\lambda_0+V(x)\big)=\nu_{B(x)}\big(\lambda_0+V(x)\big)\,\mathbf{1}_\Omega(x)$ et $\limsup f'_k(x)\leq\bar\nu_{B(x)}\big(\lambda_0+V(x)\big)=\bar\nu_{B(x)}\big(\lambda_0+V(x)\big)\,\mathbf{1}_{\bar\Omega}(x)$.

  On prendra garde au fait que ces inégalités ne sont licites que si $\sqrt{k}r_k\to+\infty$, $\sqrt{k}r_k^2\to 0$ et $\frac{1}{k}C(\Psi_k)\to 0$, c'est-à-dire si $1/4<\beta<1/2$ et $\beta+\gamma<1/2$. Ces conditions sont faciles à réaliser.

Nous avons donc presque partout $\liminf f_k \geq \nu_B(\lambda_0 + V)\,\mathbf{1}_\Omega$ et $\limsup f'_k \leq \bar{\nu}_B(\lambda_0 + V)\,\mathbf{1}_{\bar{\Omega}}$. Le lemme de Fatou nous dit que $\int \liminf f_k \leq \liminf \int f_k$ et $\int \limsup f'_k \geq \limsup \int f'_k$. Il vient finalement

$$\begin{aligned}&\int \nu_B(\lambda_0 + V)\,\mathbf{1}_\Omega\,d\sigma \leq \int \liminf f_k \leq \liminf \int f_k \leq \liminf k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k)\\ &\leq \limsup k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k) \leq \limsup \int f'_k \leq \int \limsup f'_k \leq \int \bar{\nu}_B(\lambda_0 + V)\,\mathbf{1}_{\bar{\Omega}}\,d\sigma\,.\end{aligned}$$

Soit maintenant Ω un ouvert relativement compact quelconque de X. Soient $(\Omega_j)_{1\leq j\leq N}$ des ouverts deux à deux disjoints inclus dans Ω, et $(\Omega'_j)_{1\leq j\leq N'}$ des ouverts dont la réunion contient $\bar{\Omega}$. Soit $\Psi = (\Psi_j)_{1\leq j\leq N'}$ une partition de l'unité associée à $(\Omega'_j)_{1\leq j\leq N'}$. Alors

$$\sum_{j=1}^{N} N_{\Omega_j,k}(\lambda) \leq N_{\Omega,k}(\lambda) \leq \sum_{j=1}^{N'} N_{\Omega'_j,k}\big(\lambda + \frac{1}{k}C(\Psi)\big)\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega_j} \nu_B(\lambda_0 + V)d\sigma \quad &\leq \liminf k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k)\\ &\leq \limsup k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k)\\ &\leq \limsup k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k + \tfrac{1}{k}C(\Psi))\\ &\leq \textstyle\sum_{j=1}^{N'} \int_{\bar{\Omega}'_j} \bar{\nu}_B(\lambda_0 + V)d\sigma\,.\end{aligned}$$

Comme $\liminf k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k)$ et $\limsup k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k)$ ne dépendent pas des Ω_j et Ω'_j, que ces inégalités sont vraies pour tous (Ω_j) et (Ω'_j) et que nous avons des majorations uniformes $f_k \leq f'_k \leq C(1 + \sqrt{\lambda_+ C})^m$ (cf. [Dem85]), il vient immédiatement

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nu_B(\lambda_0 + V)\,d\sigma \quad &\leq \quad \liminf k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k)\\ &\leq \quad \limsup k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k) \quad \leq \quad \int_{\bar{\Omega}} \bar{\nu}_B(\lambda_0 + V)\,d\sigma\,.\end{aligned}$$

□

3.4 Estimations globales (cas général)

L_k est muni de la connexion D_{L_k}, tandis que $F_k = L_k \otimes F \to X$ est muni de la connexion ∇_k. S est une section continue de $\bigwedge^1_{\mathbb{R}} T^*X \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(F)$, et V une section continue de $\mathrm{Herm}(F)$. Notons $V_1(x), \ldots, V_r(x)$ ses valeurs propres en un point $x \in M$. Ω est un ouvert relativement compact de X. Enfin, $N_{Q_{\Omega,k}}(\lambda)$ compte toujours le nombre de valeurs propres inférieures ou égales à λ de

$$Q_{\Omega,k}(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{k}\big|\nabla_k u + Su\big|^2 - \langle Vu,u\rangle\Big)\,d\sigma\,, \quad u \in W^1_0(\Omega, L_k \otimes F)\,.$$

Théorème 3.8 (cf. Théorème 2.16 de [Dem85]). *Si* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *et* $v_k \to 0$, *alors*

$$\begin{aligned} \liminf k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k) &\geq \sum_{j=1}^{r} \int_{\Omega} \nu_B(\lambda_0 + V_j)\, d\sigma \\ \limsup k^{-m/2} N_{\Omega,k}(\lambda_0 + v_k) &\leq \sum_{j=1}^{r} \int_{\bar\Omega} \bar\nu_B(\lambda_0 + V_j)\, d\sigma\,. \end{aligned}$$

Démonstration - Soient $a \in X$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Il existe un voisinage $W_\varepsilon(a)$ de a sur lequel $(e_1, \ldots, e_r)$ est un repère orthonormé local de F et $\big(e_1(a), \ldots, e_r(a)\big)$ une base de vecteurs propres de l'endomorphisme $V(a)$, assocée aux valeurs $\big(V_1(a), \ldots, V_r(a)\big)$. Écrivons $u = \sum_{j=1}^{r} u_j \otimes e_j$, u_j étant une section de $L_{k|_{W_\varepsilon(a)}}$.

Quitte à restreindre $W_\varepsilon(a)$, nous pouvons supposer que

$$\sum_{j=1}^{r} \Big(V_j(a) - \varepsilon\Big)|u_j|^2 \leq \langle Vu, u\rangle \leq \sum_{j=1}^{r} \Big(V_j(a) + \varepsilon\Big)|u_j|^2\,.$$

Nous avons $\nabla_k u = \sum_{j=1}^{r} D_{L_k} u \otimes e_j + u_j \otimes \nabla_k e_j$. Donc pour $W \subset W_\varepsilon(a)$, nous avons

$$\begin{aligned} Q_{W,k}(u) &= \int_W \Big(\frac{1}{k}\Big|\sum_{j=1}^{r} D_{L_k} u_j \otimes e_j + \underbrace{\sum_{j=1}^{r} u_j \otimes \nabla_k e_j + Su}_{S'u}\Big|^2 - \langle Vu, u\rangle\Big)\, d\sigma \\ &\leq \int_W \Big(\frac{1}{k}(1 + k^{-1/2})\Big|\sum_{j=1}^{r} D_{L_k} u_j \otimes e_j\Big|^2 + \frac{1}{k}(1 + k^{-1/2})k^{1/2}\Big|S'u\Big|^2 - \langle Vu, u\rangle\Big)\, d\sigma \\ &\leq \int_W \Big(\frac{1}{k}(1 + k^{-1/2})\sum_{j=1}^{r} \big|D_{L_k} u_j\big|^2 + \frac{1}{k}(1 + k^{1/2})\big|S'u\big|^2 - \big(\sum_{j=1}^{r} V_j(a) - \varepsilon\big)|u_j|^2\Big)\, d\sigma \\ &= (1 + k^{-1/2}) \int_W \Big(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} \big|D_{L_k} u_j\big|^2 - \sum_{j=1}^{r} V_j(a)|u_j|^2\Big)\, d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{k}(1 + k^{1/2}) \int_W \Big|S'u\Big|^2 + \varepsilon \int_\Omega \sum_{j=1}^{r} |u_j|^2\, d\sigma + k^{-1/2} \sum_{j=1}^{r} \int_\Omega V_j(a)\, |u_j|^2\, d\sigma \\ &\leq (1 + \varepsilon)\tilde{Q}_{W,k}(u) + \varepsilon\|u\|^2 \end{aligned}$$

pour $k \geq k_0(\varepsilon)$ et $W \subset W_\varepsilon(a)$. On établit de même l'inégalité inverse, ce qui donne

$$(1 - \varepsilon)\tilde{Q}_{W,k}(u) - \varepsilon\|u\|^2 \leq Q_{W,k}(u) \leq (1 + \varepsilon)\tilde{Q}_{W,k}(u) + \varepsilon\|u\|^2\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} N_{\tilde{Q}_{W,k}}\Big(\lambda - \tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(1 + \lambda)\Big) = N_{\tilde{Q}_{W,k}}\Big(\tfrac{\lambda - \varepsilon}{1+\varepsilon}\Big) &\leq N_{Q_{W,k}}(\lambda) \\ &\leq N_{\tilde{Q}_{W,k}}\Big(\tfrac{\lambda + \varepsilon}{1-\varepsilon}\Big) = N_{\tilde{Q}_{W,k}}\Big(\lambda + \tfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(1 + \lambda)\Big)\,, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{j=1}^r N_{\tilde Q_{j,W,k}}\Big(\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(1+\lambda_0) - \frac{\varepsilon v_k}{1+\varepsilon}\Big) &\le N_{W,k}(\lambda_0+v_k)\\ &\le \textstyle\sum_{j=1}^r N_{\tilde Q_{j,W,k}}\Big(\lambda_0 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(1+\lambda_0) + \frac{\varepsilon v_k}{1-\varepsilon}\Big)\,.\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j=1}^r \int_W \nu_B\Big(\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(1+\lambda_0) + V_j(a)\Big)\,d\sigma \le \liminf k^{-m/2} N_{Q_{W,k}}(\lambda_0+v_k)\\ &\quad\le \limsup k^{-m/2} N_{Q_{W,k}}(\lambda_0+v_k) \le \textstyle\sum_{j=1}^r \int_{\bar W} \bar\nu_B\Big(\lambda_0 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(1+\lambda_0) + V_j(a)\Big)\,d\sigma\,.\end{aligned}$$

Par continuité des valeurs propres, quitte à restreindre $W_\varepsilon(a)$, nous avons $\big|V_j - V_j(a)\big| \le \varepsilon$ sur $W_\varepsilon(a)$. Donc $V_j - \varepsilon \le V_j(a) \le V_j + \varepsilon$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j=1}^r \int_W \nu_B\Big(\lambda_0 + V_j - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(1+\lambda_0) - \varepsilon\Big)\,d\sigma \le \liminf k^{-m/2} N_{Q_{W,k}}(\lambda_0+v_k)\\ &\quad\le \limsup k^{-m/2} N_{Q_{W,k}}(\lambda_0+v_k) \le \textstyle\sum_{j=1}^r \int_{\bar W} \bar\nu_B\Big(\lambda_0 + V_j + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(1+\lambda_0) + \varepsilon\Big)\,d\sigma\,,\end{aligned}$$

vrai pour tout $W \subset W_\varepsilon(a)$.

Par compacité (recouvrir par des ouverts de taille moitié), le résultat est donc vrai pour tout ouvert suffisamment petit de X (le suffisamment petit dépendant de ε). Finalement, nous avons

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j=1}^r \int_\Omega \nu_B\Big(\lambda_0 + V_j - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(1+\lambda_0) - \varepsilon\Big)\,d\sigma \le \liminf k^{-m/2} N_{Q_{\Omega,k}}(\lambda_0+v_k)\\ &\quad\le \limsup k^{-m/2} N_{Q_{\Omega,k}}(\lambda_0+v_k) \le \textstyle\sum_{j=1}^r \int_{\bar \Omega} \bar\nu_B\Big(\lambda_0 + V_j + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(1+\lambda_0) + \varepsilon\Big)\,d\sigma\,.\end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers zéro : ν_B étant continue à gauche et $\bar\nu$ continue à droite, nous pouvons passer à la limite, pour obtenir finalement

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j=1}^r \int_\Omega \nu_B\Big(\lambda_0 + V_j\Big)\,d\sigma \le \liminf k^{-m/2} N_{Q_{\Omega,k}}(\lambda_0+v_k)\\ &\quad\le \limsup k^{-m/2} N_{Q_{\Omega,k}}(\lambda_0+v_k) \le \textstyle\sum_{j=1}^r \int_{\bar \Omega} \bar\nu_B\Big(\lambda_0 + V_j\Big)\,d\sigma\,.\end{aligned}$$

□

3.5 Application au laplacien antiholomorphe

Nous avons établi au chapitre précédent la formule de type Weitzenböck

$$\underbrace{\frac{2}{k}\int_X \langle \Delta''_k u, u\rangle}_{Q_k^{\mathrm{tot}}(u)} = \underbrace{\int_X \left(\frac{1}{k}\left|\nabla_k u + Su\right|^2 - \langle V^q u, u\rangle\right) d\sigma}_{Q_k(u)} + \frac{1}{k}\int_X \langle \Theta_k^q u, u\rangle\,.$$

Appliquons les résultats obtenus sur les opérateurs de Schrödinger à la situation complexe : $M = X$ (donc $m = 2n$), $F = \bigwedge^{0,q} T^*X \otimes E$ (où $\bigwedge^{0,q} T^*X$ est de rang s et E de rang r), $\nabla_k = \nabla_k^q$, $V = V^q$ et S est le même. Enfin nous prendrons $\Omega = X$.

Sachant que Θ_k^q est majoré par une constante M, il vient

$$Q_k(u) - \frac{M}{k}\|u\|^2 \leq Q_k^{\text{tot}}(u) \leq Q_k(u) + \frac{M}{k}\|u\|^2 \,,$$

ce qui implique au niveau des valeurs propres (les notations étant évidentes) :

$$N_k\Big(\lambda - \frac{M}{k}\Big) \leq N_k^{\text{tot}}(\lambda) \leq N_k\Big(\lambda + \frac{M}{k}\Big) \,.$$

Donc

$$N_k\big(\lambda_0 + v_k - \frac{M}{k}\big) \leq N_k^{\text{tot}}(\lambda_0 + v_k) \leq N_k\big(\lambda_0 + v_k + \frac{M}{k}\big) \,.$$

Comme $v_k \pm \frac{M}{k} \Longrightarrow 0$, nous avons donc encore

$$\begin{aligned}
\liminf k^{-n} N_k^{\text{tot}}(\lambda_0 + v_k) &\geq r \sum_{j=1}^{s} \int_X \nu_B(\lambda_0 + V_j^q)\, d\sigma \,, \\
\limsup k^{-n} N_k^{\text{tot}}(\lambda_0 + v_k) &\leq r \sum_{j=1}^{s} \int_X \bar{\nu}_B(\lambda_0 + V_j^q)\, d\sigma \,,
\end{aligned}$$

puisque les valeurs propres de V^q agissant sur F sont celles ($V_1^q \leq \ldots \leq V_s^q$) agissant sur $\bigwedge^{0,q} T^*X$ avec multiplicité r.

Notons $h_k^{0,q}(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de Δ_k'' (agissant sur $C_{0,q}^\infty(X,L_k \otimes E)$) inférieures ou égales à $k\lambda$ en bidegré $(0,q)$. Nous avons $h_k^{0,q}(\lambda) = N_k^{\text{tot}}(2\lambda)$, $B = -2\pi\alpha$, et les valeurs propres de V^q ont été décrites par la propriété 2.6. L'estimation précédente s'écrit donc encore

Théorème 3.9. *Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et $v_k \to 0$, alors*

$$\begin{aligned}
r \sum_{|J|=q} \int_X \nu_{-2\pi\alpha}\big(2\lambda_0 + 2\pi(\alpha_{\complement J} - \alpha_J)\big)\, d\sigma \quad &\leq \quad \liminf k^{-n} h_k^{0,q}(\lambda_0 + v_k) \\
&\leq \quad \limsup k^{-n} h_k^{0,q}(\lambda_0 + v_k) \quad \leq \quad r \sum_{|J|=q} \int_X \bar{\nu}_{-2\pi\alpha}\big(2\lambda_0 + 2\pi(\alpha_{\complement J} - \alpha_J)\big)\, d\sigma \,.
\end{aligned}$$

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons aux petites valeurs propres, c'est-à-dire que nous prendrons $\lambda = 0$ (ainsi que E trivial). Notons alors déjà que nous avons (voir [Dem85], page 224) :

$$\sum_{|J|=q} \int_X \bar{\nu}_{-2\pi\alpha}\big(2\pi(\alpha_{\complement J} - \alpha_J)\big)\, d\sigma = \frac{1}{n!} \int_{X(\alpha,q)} (-1)^q\, \alpha^n \,.$$

Chapitre 4

Théorèmes spectraux

Résumé

Nous minorons asymptotiquement dans ce chapitre le nombre de sections propres du laplacien antiholomorphe Δ''_k associées à des valeurs propres plus petites que $k\lambda_k$, (λ_k) étant une suite de réels positifs tendant vers zéro. La difficulté est d'obtenir beaucoup de section propres (croissance de leur nombre en k^n) tout en faisant tendre λ_k le plus rapidement possible vers zéro.

Ce chapitre s'inscrit dans le continuité de la section 3.5 du chapitre précédent.

Rappelons que nous considérons la suite de laplaciens antiholomorphes Δ''_k agissant, en bidegré (0,0), sur $C^\infty(X,L_k)$. Nous supposons donc E trivial et $q = 0$.

Definition 4.1. *Pour toute suite (λ_k) de réels > 0 tendant vers zéro, définissons les deux conditions suivantes :*

$$\begin{array}{ll} \text{(C1)} & \exists\, \gamma \in]\,0\,;1/6\,[\,,\ \exists\, C > 0 \textit{ tels que } \lambda_k \geq Ck^{-\gamma} \textit{ pour } k \textit{ assez grand;} \\ \text{(C2)} & k^{2+2/b_2(X)}\,\lambda_k \longrightarrow +\infty \textit{ quand } k \to +\infty\,. \end{array}$$

De manière imagée, on peut dire qu'une suite (λ_k) vérifie (C1) si elle tend vers zéro "strictement" plus lentement que $k^{-1/6}$, et qu'elle vérifie (C2) si elle tend vers zéro plus lentement que $k^{-(2+2/b_2(X))}$.

Nous allons maintenant donner deux estimées pour le nombre de valeurs propres de Δ''_k (comptées avec multiplicité) $\leq k\lambda$: la première sera valable pour toute suite (λ_k) vérifiant C1 et la deuxième pour toute suite (λ_k) vérifiant C2.

4.1 Première estimation spectrale

Revenons à l'estimation locale asymptotique (section 3.2) : nous avions noté $r_k = k^{-\beta}$, $\eta_k = k^{-\gamma}$, $\tilde{\varepsilon}_k = k^{-\delta}$ et obtenu $\varepsilon_k = \mathcal{O}(k^{-\min(\beta,\gamma,4\beta-1-\gamma)})$. Posons $v_k = k^{-\nu}$: l'idée est que si

v_k tend suffisament lentement vers zéro, nous pourrons tout de même compter les p tels que $\lambda_0 + V(a) - \sum(2p_j+1)B_j \geq 0$.

Nous avons déjà les conditions

$$1/4 < \beta < 1+\mu\,, \quad \gamma < 4\beta - 1 \quad \text{ et } \quad \beta + 2\delta < 1/2 \quad (\text{donc } \beta < 1/2)\,.$$

Le premier membre de l'inégalité compte (pour $s = m/2$) $\lambda_0 + V(a) - \sum(2p_j+1)B_j = 0$ si et seulement si

$$-\frac{\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k}(2\lambda_0+1) + v_k\frac{1-\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k} - \frac{C(p,B)}{\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}_k r_k}\sum(2p_j+1)B_j > 0\,,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$v_k\Big[-\frac{\varepsilon_k}{v_k}\frac{2\lambda_0+1}{1+\varepsilon_k} + \frac{1-\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k} - \frac{C(p,B)}{k^{1/2-\delta-\beta-\nu}}\sum(2p_j+1)B_j\Big] > 0\,.$$

Or $\varepsilon_k/v_k = \mathcal{O}(k^{\nu-\min(\beta,\gamma,4\beta-1-\gamma)})$.

Nous cherchons donc ν le plus grand possible tel que $\nu < \min(\beta,\gamma,4\beta-1-\gamma)$ et $\delta+\beta+\nu < 1/2$.

Posons $\beta = 1/4 + c$. Les conditions s'écrivent alors

$$\begin{cases} 0 < c < 1/4 \\ \gamma < 4c \\ 2\delta < \frac{1}{4} - c \\ \delta + \nu < \frac{1}{4} - c \\ \nu < \min\big(\frac{1}{4}+c,\gamma,4c-\gamma\big) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < c < 1/4 \\ \gamma < 4c \\ 2\delta < \frac{1}{4} - c \\ \delta + \nu < \frac{1}{4} - c \\ \nu < \min\big(\gamma,4c-\gamma\big) \quad (\text{car } \nu < \frac{1}{4} - c < \frac{1}{4} + c) \end{cases}$$

Or $\min(\gamma,4c-\gamma) \leq 2c$, puisque $0 < \gamma < 4c$. Donc $\nu < 1/4 - c$ et $\nu < 2c$, ce qui implique $\nu < 1/6$ (car $1/4 - c = 2c \Leftrightarrow c = 1/12$, et dans ce cas $1/4 - c = 2c = 1/6$). Nous ne pourrons obtenir mieux.

Si donc nous prenons $\beta = 1/4 + 1/12 = 1/3$, les conditions deviennent

$$\gamma < 1/3\,, \quad 2\delta < 1/6\,, \quad \delta + \nu < 1/6 \quad \text{ et } \quad \nu < \min(\gamma,1/3-\gamma)\,.$$

Donc pour $\nu < 1/6$, $\gamma = 1/6$ convient et δ existe.

Ainsi, pour $v_k = k^{-\nu}$ (et même pour $v_k \geq Ck^{-\nu}$, $v_k \to 0$) avec $0 < \nu < 1/6$,

$$\lim k^{-m/2}\,\frac{N_{Q_{P_k}}(\lambda_0 + v_k)}{\mathrm{Vol}(P_k)} = \bar{\nu}_{B(a)}\big(\lambda_0 + V(a)\big)\,.$$

Malheureusement, nous ne pouvons pas déduire le même genre de résultat dans les estimations globales générales (F non forcément trivial, ni S nul), car il y a des passages à la limite, et $\bar\nu$ n'est pas continue à gauche. Cependant, dans le cas F trivial et $S = 0$, c'est-à-dire dans les conditions du paragraphe 3.3, l'estimation globale "passe". Notant

$$Q_k(u) = \int_X \Big(\frac{1}{k}\Big|\nabla_k u\Big|^2 - \langle Vu,u\rangle\Big)\, d\sigma\,,$$

nous avons

$$\lim k^{-m/2} N_{Q_k}(\lambda_0 + v_k) = \int_X \bar\nu_B\big(\lambda_0 + V\big)\, d\sigma\,.$$

En utilisant la même astuce que lors de la comparaison de Q_{P_k} et $\tilde Q_{P_k}$ dans les estimations locales, nous obtenons aisément, en revenant au laplacien antiholomorphe (dans le cas $q = 0$ et E trivial) avec cette fois-ci S non nul, et en reprenant les notations de la section 3.5 :

$$(1 - k^{-1/2})Q_k(u) - k^{-1/2}M \le Q_k^{\mathrm{tot}}(u) \le (1 + k^{-1/2})Q_k(u) + k^{-1/2}M\,,$$

où M majore $V = V^0$, S et Θ_k^0. Nous en déduisons l'inégalité suivante sur les valeurs propres, valable pour tout réel λ :

$$N_{Q_k}\Big(\frac{\lambda - k^{-1/2}M}{1 + k^{-1/2}}\Big) \le N_{Q_k^{\mathrm{tot}}}(\lambda) \le N_{Q_k}\Big(\frac{\lambda + k^{-1/2}M}{1 - k^{-1/2}}\Big)\,.$$

Donc

$$N_{Q_k}\Big(\lambda + v_k - k^{-1/2}\frac{M + \lambda + v_k}{1 + k^{-1/2}}\Big) \le N_{Q_k^{\mathrm{tot}}}(\lambda + v_k) \le N_{Q_k}\Big(\lambda + v_k + k^{-1/2}\frac{M + \lambda + v_k}{1 - k^{-1/2}}\Big)\,.$$

Puisque $v_k \ge Ck^{-\nu}$ avec $0 < \nu < 1/6$, nous avons encore $v_k - k^{-1/2}\frac{M+\lambda+v_k}{1+k^{-1/2}} \ge C'k^{-\nu}$ pour k assez grand. Finalement, il vient :

$$\lim_{k\to+\infty} N_{Q_k}(\lambda_0 + v_k) = \int_X \bar\nu_{-2\pi\alpha}(\lambda_0 + V^0)d\sigma\,.$$

En particulier, nous avons (en renvoyant à la définition 4.1 pour les notations) le

Théorème 4.2. *Pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et toute suite (v_k) vérifiant* (C1)*, nous avons*

$$\lim k^{-n} h_k^{0,0}(\lambda_0 + v_k) = \int_X \bar\nu_{-2\pi\alpha}\Big(2\lambda_0 + 2\pi\alpha_{\{1,\ldots,n\}}\Big)\, d\sigma\,.$$

Nous en déduisons l'estimation asymptotique suivante :

Corollaire 4.3. *Si (λ_k) est une suite vérifiant* (C1)*, le nombre de valeurs propres de $\frac{1}{k}\Delta_k''$ inférieures à λ_k vérifie l'estimation*

$$\lim_{k\to+\infty} k^{-n}\, h_k^{0,0}(\lambda_k) \;=\; \frac{1}{n!}\int_{X(\alpha,0)} \alpha^n\,.$$

Pouvons-nous obtenir mieux que cette limitation de vitesse de décroissance en $k^{-1/6}$? Nous allons voir dans la prochaine section que oui, puisque nous allons pouvoir obtenir une vitesse de décroissance légèrement meilleure que k^{-2}.

4.2 Deuxième estimation spectrale

Pour notre deuxième estimation spectrale, nous utiliserons l'estimation asymptotique globale du théorème 3.9, à la fois en bidegré (0,0) et (0,1), dans le cas où E est trivial.

L'idée est que dans le cas des puissances tensorielles d'une fibré en droites holomorphe, Δ''_k et $\bar\partial_k$ commutent, donc $\bar\partial_k$ envoie injectivement les sous-espaces propres associés à des valeurs propres non nulles en bidegré (0,0) dans des sous-espaces propres pour les mêmes valeurs propres en bidegré (1,1). Cela implique, pour tous réels $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, l'inégalité

$$h_k^{0,1}(\lambda_2) - h_k^{0,1}(\lambda_1) \geq h_k^{0,0}(\lambda_2) - h_k^{0,0}(\lambda_1)\,,$$

dont nous déduisons la minoration $h_k^{0,0}(\lambda_1) \geq h_k^{0,0}(\lambda_2) - h_k^{0,1}(\lambda_2)$. Il n'y a plus qu'à faire ensuite tendre λ_1 et λ_2 vers 0.

Dans notre situation cependant, Δ''_k et $\bar\partial_k$ ne commutent plus. Le défaut de commutation est donné par

$$\Delta''_k\bar\partial_k - \bar\partial_k\Delta''_k = (\bar\partial_k^*\bar\partial_k + \bar\partial_k\bar\partial_k^*)\bar\partial_k - \bar\partial_k(\bar\partial_k^*\bar\partial_k + \bar\partial_k\bar\partial_k^*) = \bar\partial_k^*\bar\partial_k^2 - \bar\partial_k^2\bar\partial_k^*\,.$$

En bidegré (0,0), cela donne :

$$\Delta''_k\bar\partial_k - \bar\partial_k\Delta''_k = \bar\partial_k^*\bar\partial_k^2\,.$$

4.2.1 Estimée en norme L^2 de l'erreur $\bar\partial_k^*\bar\partial_k^2$

Soit $\sigma \in C^\infty(X,L_k)$. Rappelons que nous avons les identités et estimation suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
\|\alpha_k^{0,2}\|_{C^\infty} & \leq & Ck^{-1/b_2(X)} \\
[\Lambda\,,\partial_k] & = & i\big(\bar\partial_k^* + \bar\tau^*\big) \\
[\Lambda\,,\bar\partial_k] & = & -i\big(\partial_k^* + \tau^*\big) \\
\Delta''_k & = & \Delta'_{k,\tau} + \big[2\pi\alpha_k^{1,1}\,,\Lambda\big] + T_\omega
\end{array}$$

où $\tau = [\Lambda,d'\omega]$, $\Delta'_{k,\tau} = \big[\partial_k + \tau\,,\partial_k^* + \tau^*\big]$ et $T_\omega = \big[\Lambda\,,[\Lambda,\frac{i}{2}d'd''\omega]\big] - [d'\omega,(d'\omega)^*]$.

Nous pouvons écrire (en norme L^2) :

$$\begin{array}{rcl}
\|\bar\partial_k{}^*\bar\partial_k^2\sigma\|^2 & = & \|(-i[\Lambda,\partial_k] - \bar\tau^*)\bar\partial_k^2\sigma\|^2 \\
& = & \|-i\Lambda\partial_k\bar\partial_k^2\sigma - \bar\tau^*\bar\partial_k^2\sigma\|^2 \\
& \leq & 2\Big(\|\Lambda\partial_k\bar\partial_k^2\sigma\|^2 + \|\bar\tau^*\bar\partial_k^2\sigma\|^2\Big)
\end{array}$$

- $\|\bar\tau^*\bar\partial_k^2\sigma\|^2 = \|2\pi\bar\tau^*(\alpha_k^{0,2}\wedge\sigma)\|^2 \leq Ck^{-2/b_2(X)}\|\sigma\|^2$.

- Quant à $\Lambda\partial_k\bar\partial_k^2$, il vérifie en bidegré (0,0) :

$$\begin{aligned}\Lambda\partial_k\bar\partial_k^2 &= \Lambda(\partial_k\bar\partial_k)\bar\partial_k \;=\; \Lambda(-2i\pi\alpha_k^{1,1}-\bar\partial_k\partial_k)\bar\partial_k\\ &= -2i\pi[\Lambda,\alpha_k^{1,1}]\bar\partial_k - \Lambda\bar\partial_k(\partial_k\bar\partial_k)\\ &= -2i\pi[\Lambda,\alpha_k^{1,1}]\bar\partial_k - \Lambda\bar\partial_k(-2i\pi\alpha_k^{1,1}-\bar\partial_k\partial_k)\\ &= -2i\pi[\Lambda,\alpha_k^{1,1}]\bar\partial_k + 2i\pi\Lambda(d''\alpha_k^{1,1}+\alpha_k^{1,1}\wedge\bar\partial_k)+\Lambda\bar\partial_k^2\partial_k\\ &= 2i\pi[\Lambda,d''\alpha_k^{1,1}]+\Lambda\bar\partial_k{}^2\partial_k\\ &= 2i\pi[\Lambda,-d'\alpha_k^{0,2}]+\Lambda(-2i\pi\alpha_k^{0,2})\wedge\partial_k\end{aligned}$$

car $d\alpha_k=0$ et la partie de type (1,2) est $d''\alpha_k^{1,1}+d'\alpha_k^{0,2}$. Il vient donc

$$\begin{aligned}\|\Lambda\partial_k\bar\partial_k^2\sigma\|^2 &\le 2\Big(4\pi^2\big\|[\Lambda,d'\alpha_k^{0,2}]\sigma\big\|^2+4\pi^2\|\Lambda(\alpha_k^{0,2}\wedge\partial_k\sigma)\|^2\Big)\\ &\le Ck^{-2/b_2(X)}\Big(\|\sigma\|^2+\|\partial_k\sigma\|^2\Big)\,.\end{aligned}$$

En additionnant les deux estimations précédentes, nous obtenons :

$$\|\bar\partial_k^*\bar\partial_k^2\sigma\|^2\le Ck^{-2/b_2(X)}\big(\|\sigma\|^2+\|\partial_k\sigma\|^2\big)\,.$$

Reste à évaluer $\|\partial_k\sigma\|^2=\langle\!\langle\partial_k^*\partial_k\sigma,\sigma\rangle\!\rangle$. Nous avons

$$\langle\!\langle\Delta'_{k,\tau}\sigma,\sigma\rangle\!\rangle=\langle\!\langle(\partial_k^*+\tau^*)(\partial_k+\tau)\sigma,\sigma\rangle\!\rangle \;=\; \|\partial_k\sigma+\tau\sigma\|^2$$

et

$$\begin{aligned}\|\bar\partial_k\sigma\|^2 &= \langle\!\langle\Delta''_k\sigma,\sigma\rangle\!\rangle \;=\; \langle\!\langle\Delta'_{k,\tau}\sigma+2\pi[\alpha_k^{1,1},\Lambda]\sigma+T_\omega\sigma\,,\sigma\rangle\!\rangle\\ &= \|(\partial_k+\tau)\sigma\|^2+2\pi\langle\!\langle[\alpha_k^{1,1},\Lambda]\sigma,\sigma\rangle\!\rangle+\langle\!\langle T_\omega\sigma,\sigma\rangle\!\rangle\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\partial_k\sigma\|^2 &= \|(\partial_k+\tau)\sigma-\tau\sigma\|^2\\ &\le 2\Big(\|\tau\sigma\|^2+\|(\partial_k+\tau)\sigma\|^2\Big)\\ &\le 2\Big(\|\tau\sigma\|^2+\|\bar\partial_k\sigma\|^2+2\pi\big|\langle\!\langle[\alpha_k^{1,1},\Lambda]\sigma,\sigma\rangle\!\rangle\big|+\big|\langle\!\langle T_\omega\sigma,\sigma\rangle\!\rangle\big|\\ &\le C\Big(\|\sigma\|^2+\|\bar\partial_k\sigma\|^2+k\|\sigma\|^2+\|\sigma\|^2\Big)\\ &\le C\Big(k\|\sigma\|^2+\|\bar\partial_k\sigma\|^2\Big)\,.\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement l'estimation suivante pour le défaut de commutation du laplacien antiholomorphe et de la dérivée antiholomorphe :

$$\|\bar{\partial}_k^* \bar{\partial}_k^2 \sigma\|^2 \leq C k^{-2/b_2(X)} \Big(k \|\sigma\|^2 + \|\bar{\partial}_k \sigma\|^2 \Big) .$$

Remarquons que les calculs sont plus simples si la variété est kählérienne.

4.2.2 Estimation des espaces propres en bidegré (0,1)

Dans la suite, nous allons nous intéresser tout particulièrement aux très petites valeurs propres de $\frac{1}{k}\Delta_k''$. Considérons $\varepsilon > 0$, $I =]\lambda_1 ; \lambda_2] \cap \mathrm{Sp}^{0,0}(\frac{1}{k}\Delta_k'')$ et $J = [0; \lambda_2 + \varepsilon] \cap \mathrm{Sp}^{0,1}(\frac{1}{k}\Delta_k'')$. Ici, λ_1 et λ_2 sont des réels strictement positifs vérifiant simplement $\lambda_1 \leq 1$ et $\lambda_2 > \lambda_1$. Ultérieurement, nous choisirons λ_1 dépendant de k, λ_2 indépendant de k, et dans l'optique d'obtenir des informations sur le bas du spectre, nous ferons tendre les deux vers 0. Notons

$$E_\lambda^{0,0} = \mathrm{Ker}\Big(\frac{1}{k}\Delta_k'' - \lambda\Big) , \quad E_I^{0,0} = \bigoplus_{\lambda \in I} E_\lambda^{0,0} \quad \text{en bidegré } (0,0)$$

et

$$E_\mu^{0,1} = \mathrm{Ker}\Big(\frac{1}{k}\Delta_k'' - \mu\Big) , \quad E_J^{0,1} = \bigoplus_{\mu \in J} E_\mu^{0,1} \quad \text{en bidegré } (0,1) .$$

Enfin Π_J désignera la projection orthogonale sur $E_J^{0,1}$.

Considérons la composée $E_I^{0,0} \xrightarrow{\Pi_J \circ \bar{\partial}_k} E_J^{0,1}$. Est-elle injective ?

Soit $(\sigma_\lambda)_{\lambda \in I}$ une base orthonormée de $E_I^{0,0}$, composée de vecteurs propres. C'est-à-dire que $\frac{1}{k}\Delta_k''\sigma_\lambda = \lambda \sigma_\lambda$, $\lambda \in I$ et $\|\sigma_\lambda\|^2 = 1$. Alors la famille $(\bar{\partial}_k \sigma_\lambda)_{\lambda \in I}$ est orthogonale (donc libre), et $\|\bar{\partial}_k \sigma_\lambda\|^2 = \lambda k$.

Supposons qu'une combinaison linéaire $u = \sum_{\lambda \in I} x_\lambda \sigma_\lambda \neq 0$ vérifie $\Pi_J(\bar{\partial}_k u) = 0$. Alors

$$\bar{\partial}_k u \in \bigoplus_{\mu \notin J} E_\mu^{0,1} .$$

Si (Ψ_μ) est une base orthonormée de vecteurs propres du laplacien en bidegré (0,1), nous pouvons donc écrire $\bar{\partial}_k u = \sum_{\mu \notin J} v_\mu \Psi_\mu$. Alors $\Delta_k''(\bar{\partial}_k u) = \sum_{\mu \notin J} k\mu \, v_\mu \Psi_\mu$. Donc $\|\bar{\partial}_k u\|^2 = \sum_{\mu \notin J} |v_\mu|^2$ et $\|\Delta_k''(\bar{\partial}_k u)\|^2 = \sum_{\mu \notin J} |v_\mu|^2 (k\mu)^2 \geq (\lambda_2 + \varepsilon)^2 k^2 \|\bar{\partial}_k u\|^2$.

Par ailleurs, $\Delta_k'' \bar{\partial}_k u = \bar{\partial}_k \Delta_k'' u + \bar{\partial}_k^* \bar{\partial}_k^2 u$. Puisque $\|\bar{\partial}_k u\|^2 = \sum_{\lambda \in I} \lambda k |x_\lambda|^2 \geq \lambda_1 k \|u\|^2$, la première partie entraîne l'estimation suivante pour le défaut de commutation :

$$\|\bar{\partial}_k^* \bar{\partial}_k^2 u\|^2 \leq C k^{-2/b_2(X)} \Big(1 + \frac{1}{\lambda_1}\Big) \|\bar{\partial}_k u\|^2 .$$

Et $\bar{\partial}_k \Delta_k'' u = \bar{\partial}_k \big(\sum_{\lambda \in I} \lambda k x_\lambda \sigma_\lambda \big) = \sum_{\lambda \in I} \lambda k x_\lambda \bar{\partial}_k \sigma_\lambda$. D'où

$$\|\bar{\partial}_k \Delta_k'' u\|^2 \leq (\lambda_2 k)^2 \sum |x_\lambda|^2 \|\bar{\partial}_k \sigma_\lambda\|^2 = (\lambda_2 k)^2 \|\bar{\partial}_k u\|^2 .$$

Il vient donc finalement :

$$\begin{aligned}\|\Delta_k''\bar\partial_k u\| &\geq (\lambda_2+\varepsilon)k\|\bar\partial_k u\| \\ \|\Delta_k''\bar\partial_k u\| &\leq \lambda_2 k\|\bar\partial_k u\| + Ck^{-1/b_2(X)}\tfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\bar\partial_k u\|\end{aligned}$$

Faisons maintenant λ_1 dépendre de k ($\lambda_1 = \lambda_1(k)$), tandis que λ_2 reste indépendant de k. Alors pour k assez grand nous aurons, si $k^{2+2/b_2(X)}\lambda_1 \to +\infty$:

$$\lambda_2 + Ck^{-1-1/b_2(X)}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} < \lambda_2 + \varepsilon\,,$$

ce qui est contradictoire, puisque $\bar\partial_k u \neq 0$.

Nous avons donc prouvé que $\Pi_I \circ \bar\partial_k$ était injective de $E_I^{0,0}$ dans $E_J^{0,1}$. Cela implique

$$\dim(E_J^{0,1}) = h_k^{0,1}(\lambda_2+\varepsilon) \geq \dim(E_I^{0,0}) = h_k^{0,0}(\lambda_2) - h_k^{0,0}(\lambda_1)\,.$$

Cette inégalité est vraie pour toute suite $(\lambda_1(k))$ de réels strictement positifs telle que $k^{2+2/b_2(X)}\lambda_1(k) \to +\infty$, pour tous $\lambda_2 > 0$, $\varepsilon > 0$, et pour k assez grand (dépendant de ε et λ_2).

4.2.3 Application à l'existence de sections propres

Soient $\varepsilon > 0$ et (λ_k) une suite vérifiant (C2), c'est-à-dire une suite de réels strictement positifs tendant vers zéro telle que

$$k^{2+2/b_2(X)}\,\lambda_k \to +\infty\,.$$

Alors pour tout réel strictement positif λ et pour k assez grand, nous avons (en prenant $\lambda_1(k) = \lambda_k$, $\lambda_2 = \lambda$ avec les notations de la sous-section précédente) :

$$k^{-n}h_k^{0,0}(\lambda_k) \geq k^{-n}h_k^{0,0}(\lambda) - k^{-n}h_k^{0,1}(\lambda+\varepsilon)\,.$$

En passant à la limite, nous obtenons

$$\begin{aligned}\liminf k^{-n}h_k^{0,0}(\lambda_k) &\geq \liminf k^{-n}h_k^{0,0}(\lambda) - \limsup k^{-n}h_k^{0,1}(\lambda+\varepsilon) \\ &\geq \int_X \nu_{-2\pi\alpha}(2\lambda + 2\pi\alpha_{[\![1;n]\!]}) - \sum_{|J|=1}^{n}\int_X \bar\nu_{-2\pi\alpha}\big(2\lambda+2\varepsilon+2\pi(\alpha_{\complement J}-\alpha_J)\big)\end{aligned}$$

En faisant maintenant tendre λ et ε vers 0 (puisque k n'intervient plus dans l'inégalité ci-dessus), nous obtenons :

$$\liminf k^{-n}h_k^{0,0}(\lambda_k) \geq \int_X \bar\nu_{-2\pi\alpha}(2\pi\alpha_{[\![1;n]\!]}) - \sum_{|J|=1}^{n}\int_X \bar\nu_{-2\pi\alpha}\big(2\pi(\alpha_{\complement J}-\alpha_J)\big) = \frac{1}{n!}\int_{X(\alpha,\leq 1)}\alpha^n\,.$$

Nous avons donc montré le

Théorème 4.4. *Il existe une suite (indexée par un sous-ensemble infini S de $\mathbb{N}$) de fibrés hermitiens $(L_k)_{k\in S}$ au-dessus de X avec la propriété suivante : notons (pour $k \in S$) $h_k(\lambda)$ le nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) $\leq \lambda$ de $\frac{1}{k}\Delta_k''$ en bidegré* (0,0) *; nous avons alors la minoration asymptotique*

$$\liminf_{k\to+\infty,\, k\in S} k^{-n} h_k^{0,0}(\lambda_k) \ \geq \ \frac{1}{n!} \int_{X(\alpha,\leq 1)} \alpha^n ,$$

valable pour toute suite $(\lambda_k)_{k\in S}$ vérifiant la condition (C2)*.*

Notons que les estimations spectrales asymptotiques pour les opérateurs de Schrödinger impliquent

$$\limsup_{k\to+\infty,\, k\in S} k^{-n} h_k^{0,0}(\lambda_k) \ \leq \ \frac{1}{n!} \int_{X(\alpha,0)} \alpha^n .$$

Donc si $\int_{X(\alpha,\leq 1)} \alpha^n > 0$, nous avons bien une croissance en k^n du nombre de sections propres en bidegré (0,0) du laplacien antiholomorphe associées à de petites valeurs propres.

Nous pouvons retraduire ce théorème en termes d'estimations L^2 pour $\bar\partial_k$ de la manière suivante :

Propriété 4.5. *Pour toute suite $(\lambda_k)_{k\in S}$ vérifiant la condition* (C2)*, il existe une suite (indexée par S) d'espaces vectoriels $\mathcal{H}_k \subset C^\infty(X,L_k)$ tels que*

1) $\liminf_{k\to+\infty,\, k\in S} k^{-n} \dim(\mathcal{H}_k) \ \geq \ \frac{1}{n!} \int_{X(\alpha,\leq 1)} \alpha^n$*,*

2) pour toute section $\sigma \in \mathcal{H}_k$, $\|\bar\partial_k \sigma\|_{L^2(X)} \leq \sqrt{k\lambda_k}\, \|\sigma\|_{L^2(X)}$.

4.3 Application à l'existence de courants

Soit (X,ω) une variété holomorphe compacte hermitienne de dimension (complexe) n, et α une (1,1)-forme réelle fermée telle que $\int_{X(\alpha,\leq 1)} \alpha^n > 0$. On ne suppose pas $\{\alpha\} \in H^2(X,\mathbb{Z})$. Nous montrons ci-dessous comment utiliser les estimations asymptotiques pour obtenir l'existence de courants dans la classe de cohomologie de α dont on contrôle la partie négative.

Rappelons que grâce au lemme de Kronecker, nous avons une approximation rationnelle : $\alpha_k - k\alpha = \mathcal{O}(k^{-1/b_2(X)})$ pour $k \in S$, avec $\{\alpha_k\} \in H^2(X,\mathbb{Z})$. À chaque α_k nous associons un fibré $(L_k, D_k, h_k = |\ |)$ hermitien C^∞ de courbure $\frac{i}{2\pi}\Theta_{(L_k,D_k)} = \alpha_k$. Pour $\lambda_k > 0$, notons $\mathcal{H}_k$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de Δ_k'' associés à des valeurs propres $\leq k\lambda_k$. Soit $N_k = \dim(\mathcal{H}_k)$ et $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{N_k})$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}_k$. Nous ne notons pas explicitement la dépendance en k des sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_{N_k}$ pour ne pas alourdir les notations.

Propriété 4.6. *La fonction*

$$b_k(x) = \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} |\sigma_j(z)|^2$$

ne dépend pas du choix de la base hilbertienne de $\mathcal{H}_k$.

Démonstration - Soit $(\tau_1,\ldots,\tau_{N_k})$ une autre base hilbertienne, et A la matrice de passage de (σ_j) à (τ_j), i.e. $\tau_j = \sum_i a_{ij}\sigma_i$. $A \in \mathrm{U}(N)$, c'est-à-dire que ${}^t\bar{A}A = \mathrm{Id}$. D'où

$$\begin{aligned}
\sum_j \|\tau_j\|^2 &= \sum_j \Big\| \sum_i a_{ij}\sigma_i \Big\|^2 = \sum_j \Big(\langle \sum_i a_{ij}\sigma_i \,,\, \sum_l a_{lj}\sigma_l \rangle \Big) = \sum_{j,i,l} a_{ij}\bar{a}_{lj} \langle \sigma_i \,,\sigma_l \rangle \\
&= \sum_{i,l} \Big(\underbrace{\sum_j a_{ij}\bar{a}_{lj}}_{=(A{}^t\bar{A})_{il}=\delta_{il}} \Big) \langle \sigma_i \,,\sigma_l \rangle = \sum_i \|\sigma_i\|^2 \,.
\end{aligned}$$

□

Soit aussi $(\varepsilon_k)_{k\in S}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. Posons

$$T_k := \alpha + \frac{i}{2\pi k}\, d'd'' \log\big(\varepsilon_k + b_k\big) \;=\; \alpha + \frac{i}{2\pi k}\, d'd'' \log\left(\varepsilon_k + \frac{1}{N_k}\sum_{j=1}^{N_k} |\sigma_k|^2\right).$$

4.3.1 Transformation de l'écriture de T_k

Nous avons

$$T_k := \alpha + \frac{i}{2\pi k}\, d'd'' \log\left(\varepsilon_k + \frac{1}{N_k}\sum_{j=1}^{N_k} |\sigma_k|^2\right) = \alpha + \frac{i}{2\pi k}\, d'd'' \log\left(N_k\varepsilon_k + \sum_{j=1}^{N_k} |\sigma_k|^2\right).$$

Remarquons que $i(D_k^2)^{1,1} = i(\partial_k\bar{\partial}_k + \bar{\partial}_k\partial_k) = 2\pi\alpha_k^{1,1}$, donc $\bar{\partial}_k\partial_k = -2i\pi\alpha_k^{1,1} - \partial_k\bar{\partial}_k$. Un calcul facile mais fastidieux donne alors

$$
\begin{aligned}
T_k &= \alpha + \frac{i}{2\pi k}\, d'd'' \log\left(N_k\varepsilon_k + \sum |\sigma_j|^2\right) \\
&= \alpha + \frac{i}{2\pi k}\left[\frac{\sum_j d'd''|\sigma_j|^2}{N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2} - \frac{\sum_\alpha d'|\sigma_\alpha|^2 \wedge \sum_\beta d''|\sigma_\beta|^2}{\left(N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2\right)^2}\right] \\
&= \alpha + \frac{i}{2\pi k}\,\frac{\sum_j \{\partial_k\bar\partial_k\sigma_j,\sigma_j\} - \{\bar\partial_k\sigma_j,\bar\partial_k\sigma_j\} + \{\partial_k\sigma_j,\partial_k\sigma_j\} + \{\sigma_j,\bar\partial_k\partial_k\sigma_j\}}{N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2} \\
&\quad - \frac{i}{2\pi k}\,\frac{\sum_{\alpha,\beta}\ \left(\{\partial_k\sigma_\alpha,\sigma_\alpha\} + \{\sigma_\alpha,\bar\partial_k\sigma_\alpha\}\right) \wedge \left(\{\bar\partial_k\sigma_\beta,\sigma_\beta\} + \{\sigma_\beta,\partial_k\sigma_\beta\}\right)}{\left(N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2\right)^2} \\
&= \alpha + \frac{i}{2\pi k}\left[\frac{2i\pi\alpha_k^{1,1}\left(\sum_j |\sigma_j|^2\right) + \sum_j \{\partial_k\sigma_j,\partial_k\sigma_j\} - \{\bar\partial_k\sigma_j,\bar\partial_k\sigma_j\} + \{\partial_k\bar\partial_k\sigma_j,\sigma_j\}}{N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2}\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{\sum_j \{\sigma_j,\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\}}{N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2}\right] \\
&\quad - \frac{i}{2\pi k}\left[\frac{\sum_{\alpha,\beta} \{\partial_k\sigma_\alpha,\sigma_\alpha\} \wedge \{\bar\partial_k\sigma_\beta,\sigma_\beta\} + \langle\sigma_\beta,\sigma_\alpha\rangle\{\partial_k\sigma_\alpha,\partial_k\sigma_\beta\} - \langle\sigma_\alpha,\sigma_\beta\rangle\{\bar\partial_k\sigma_\beta,\bar\partial_k\sigma_\alpha\}}{\left(N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2\right)^2}\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{\sum_{\alpha,\beta} \{\sigma_\alpha,\bar\partial_k\sigma_\alpha\} \wedge \{\sigma_\beta,\partial_k\sigma_\beta\}}{\left(N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2\right)^2}\right] \\
&= \alpha - \frac{\sum_j |\sigma_j|^2}{N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2}\,\frac{1}{k}\alpha_k^{1,1} + \frac{i}{2\pi k}\,\frac{\sum_j \{\partial_k\bar\partial_k\sigma_j,\sigma_j\} - \{\sigma_j,\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\}}{N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2} \\
&\quad + \frac{i}{2\pi k}\,\frac{N_k\varepsilon_k \sum_j \{\partial_k\sigma_j,\partial_k\sigma_j\} - \{\bar\partial_k\sigma_j,\bar\partial_k\sigma_j\}}{\left(N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2\right)^2} \\
&\quad + \frac{i}{2\pi k}\,\frac{\sum_{\alpha,\beta}\ |\sigma_\alpha|^2\{\partial_k\sigma_\beta,\partial_k\sigma_\beta\} - |\sigma_\alpha|^2\{\bar\partial_k\sigma_\beta,\bar\partial_k\sigma_\beta\}}{\left(N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2\right)^2} \\
&\quad - \frac{i}{2\pi k}\,\frac{\sum_{\alpha,\beta} \langle\sigma_\beta,\sigma_\alpha\rangle\{\partial_k\sigma_\alpha,\partial_k\sigma_\beta\} - \langle\sigma_\alpha,\sigma_\beta\rangle\{\bar\partial_k\sigma_\beta,\bar\partial_k\sigma_\alpha\}}{\left(N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2\right)^2} \\
&\quad - \frac{i}{2\pi k}\,\frac{\sum_{\alpha,\beta} \{\partial_k\sigma_\alpha,\sigma_\alpha\} \wedge \{\bar\partial_k\sigma_\beta,\sigma_\beta\} + \{\sigma_\alpha,\bar\partial_k\sigma_\alpha\} \wedge \{\sigma_\beta,\partial_k\sigma_\beta\}}{\left(N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2\right)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Soit (e_k) une trivialisation orthonormée de L_k. Notons (de manière un peu abusive, mais suffisament claire) :

$$\sigma_j = s_j \otimes e_k\,, \quad \partial_k\sigma_j = \partial_k s_j \otimes e_k\,, \quad \bar\partial_k\sigma_j = \bar\partial_k s_j \otimes e_k\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\beta} |\sigma_\alpha|^2\{\partial_k\sigma_\beta,\partial_k\sigma_\beta\} - \langle\sigma_\beta,\sigma_\alpha\rangle\{\partial_k\sigma_\alpha,\partial_k\sigma_\beta\} \\
= &\sum_{\alpha<\beta} |s_\alpha|^2\partial_k s_\beta\wedge\overline{\partial_k s_\beta} + |s_\beta|^2\partial_k s_\alpha\wedge\overline{\partial_k s_\alpha} - s_\beta\bar{s}_\alpha\partial_k s_\alpha\wedge\overline{\partial_k s_\beta} - s_\alpha\bar{s}_\beta\partial_k s_\beta\wedge\overline{\partial_k s_\alpha} \\
= &\sum_{\alpha<\beta} \big(s_\alpha\partial_k s_\beta - s_\beta\partial_k s_\alpha\big)\wedge\overline{\big(s_\alpha\partial_k s_\beta - s_\beta\partial_k s_\alpha\big)}
\end{aligned}$$

et de même

$$\sum_{\alpha,\beta} |\sigma_\alpha|^2\{\bar\partial_k\sigma_\beta,\bar\partial_k\sigma_\beta\} - \langle\sigma_\alpha,\sigma_\beta\rangle\{\bar\partial_k\sigma_\beta,\bar\partial_k\sigma_\alpha\} = \sum_{\alpha<\beta}\big(s_\alpha\bar\partial_k s_\beta - s_\beta\bar\partial_k s_\alpha\big)\wedge\overline{\big(s_\alpha\bar\partial_k s_\beta - s_\beta\bar\partial_k s_\alpha\big)}\,.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
T_k \;=\; & \underbrace{\alpha\cdot\frac{N_k\varepsilon_k}{N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2}}_{T_k^1} + \underbrace{\Big(\alpha-\frac{1}{k}\alpha_k^{1,1}\Big)\cdot\frac{\sum_j|\sigma_j|^2}{N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2}}_{T_k^2} \\
& + \underbrace{\frac{i}{2\pi k}\,\frac{N_k\varepsilon_k\sum_j\{\partial_k\sigma_j,\partial_k\sigma_j\}}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}}_{T_k^3\,\geq\,0} + \underbrace{\frac{i}{2\pi k}\,\frac{\sum_{\alpha<\beta}\big(s_\alpha\partial_k s_\beta - s_\beta\partial_k s_\alpha\big)\wedge\overline{\big(s_\alpha\partial_k s_\beta - s_\beta\partial_k s_\alpha\big)}}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}}_{T_k^4\,\geq\,0} \\
& - \underbrace{\frac{i}{2\pi k}\,\frac{N_k\varepsilon_k\sum_j\{\bar\partial_k\sigma_j,\bar\partial_k\sigma_j\}}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}}_{T_k^5\,\geq\,0} - \underbrace{\frac{i}{2\pi k}\,\frac{\sum_{\alpha<\beta}\big(s_\alpha\bar\partial_k s_\beta - s_\beta\bar\partial_k s_\alpha\big)\wedge\overline{\big(s_\alpha\bar\partial_k s_\beta - s_\beta\bar\partial_k s_\alpha\big)}}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}}_{T_k^6\,\geq\,0} \\
& + \underbrace{\frac{i}{2\pi k}\,\frac{\sum_j\{\partial_k\bar\partial_k\sigma_j,\sigma_j\} - \{\sigma_j,\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\}}{N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2}}_{T_k^7} \\
& - \underbrace{\frac{i}{2\pi k}\,\frac{\sum_{\alpha,\beta}\{\partial_k\sigma_\alpha,\sigma_\alpha\}\wedge\{\bar\partial_k\sigma_\beta,\sigma_\beta\} + \{\sigma_\alpha,\bar\partial_k\sigma_\alpha\}\wedge\{\sigma_\beta,\partial_k\sigma_\beta\}}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}}_{T_k^8} \\
= \;& T_k^1+T_k^2+T_k^3+T_k^4-T_k^5-T_k^6+T_k^7-T_k^8\,.
\end{aligned}$$

4.3.2 Choix de λ_k et ε_k

Notre seconde estimation spectrale nous montre qu'en choisissant $\lambda_k = k^{-2(1+\gamma)}$ avec $-1<\gamma<1/b_2(X)$, nous avons la minoration asymptotique

$$\liminf_{k\to+\infty,\,k\in S} k^{-n}\,h_k^{0,0}(\lambda_k) \;\geq\; \frac{1}{n!}\int_{X(\alpha,\leq 1)}\alpha^n\,.$$

Si $\varepsilon_k = k^{-(1+\beta)}$ avec $-1 < \beta < \gamma$, alors $\sqrt{\lambda_k}/\varepsilon_k$ et λ_k/ε_k sont majorés par $Ck^{\beta-\gamma}$, donc tendent vers 0.

4.3.3 Estimation de $\partial_k\bar\partial_k\sigma_j$

Nous avons établi en 4.2.1 l'inégalité suivante :

$$\|\partial_k\sigma\|^2_{L^2(X)} \le C\Big(k\|\sigma\|^2_{L^2(X)} + \|\bar\partial_k\sigma\|^2_{L^2(X)}\Big)\,.$$

Chaque σ_j vérifie $\|\sigma_j\|^2_{L^2(X)} = \int_X |\sigma_j|^2 = 1$ et $\|\bar\partial_k\sigma_j\|^2_{L^2(X)} \le k\lambda_k$. D'où $\|\partial_k\sigma_j\|^2_{L^2(X)} \le Ck$.

Nous aurons besoin, dans la suite, d'une estimation de $\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)}$:

$$\begin{aligned}
& \|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|^2_{L^2(X)} \\
= \;& \langle\!\langle \partial_k\bar\partial_k\sigma_j\,,\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \partial_k^*\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle \\
= \;& \langle\!\langle \big(i\big[\Lambda\,,\bar\partial_k\big] - \tau^*\big)\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle \\
= \;& \langle\!\langle i\Lambda\bar\partial_k\partial_k\bar\partial_k\sigma_j - i\bar\partial_k\Lambda\partial_k\bar\partial_k\sigma_j - \tau^*\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle \\
= \;& \langle\!\langle i\Lambda(-2i\pi\alpha_k^{1,1} - \partial_k\bar\partial_k)\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle - \langle\!\langle i\bar\partial_k(\Lambda\partial_k)\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \tau^*\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle \\
= \;& \langle\!\langle 2\pi\big[\Lambda\,,\alpha_k^{1,1}\big]\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle - \langle\!\langle i\Lambda\partial_k\bar\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle - \langle\!\langle i\bar\partial_k(i\bar\partial_k^* + i\bar\tau^*)\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle \\
& -\langle\!\langle \tau^*\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle \\
= \;& \langle\!\langle 2\pi\big[\Lambda\,,\alpha_k^{1,1}\big]\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle - \langle\!\langle i\Lambda\partial_k(-2i\pi\alpha_k^{0,2}\sigma_j),\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \bar\partial_k^*\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k^*\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle \\
& +\langle\!\langle \bar\tau^*\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k^*\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \tau^*\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle \\
= \;& \langle\!\langle 2\pi\big[\Lambda\,,\alpha_k^{1,1}\big]\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle - \langle\!\langle 2\pi\big[\Lambda\,,d'\alpha_k^{0,2}\big]\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle - \langle\!\langle 2\pi\alpha_k^{0,2}\wedge\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle \\
& +\langle\!\langle \Delta_k''\sigma_j\,,\Delta_k''\sigma_j\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \bar\tau^*\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k^*\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \tau^*\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\,,\bar\partial_k\sigma_j\rangle\!\rangle \\
\le \;& C\|\alpha_k^{1,1}\|_0\,\|\bar\partial_k\sigma_j\|^2_{L^2(X)} + C\|d'\alpha_k^{0,2}\|_0\,\|\sigma_j\|_{L^2(X)}\,\|\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)} \\
& +C\|\alpha_k^{0,2}\|_0\,\|\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)}\,\|\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)} + \|\Delta_k''\sigma_j\|^2_{L^2(X)} + C\|\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)}\,\|\Delta_k''\sigma_j\|_{L^2(X)} \\
& +C\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)}\,\|\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)} \\
\le \;& C\Big(k(k\lambda_k) + k^{-1/b_2(X)}(k\lambda_k)^{1/2} + k^{-1/b_2(X)}k^{1/2}(k\lambda_k)^{1/2} + (k\lambda_k)^2 + (k\lambda_k)^{1/2}(k\lambda_k) \\
& \quad +(k\lambda_k)^{1/2}\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)}\Big)\,.
\end{aligned}$$

En utilisant $\lambda_k = k^{-2-2\gamma}$, il vient alors

$$\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|^2_{L^2(X)} \le Ck^{-2\gamma} + Ck^{-(1/2+\gamma)}\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)}\,.$$

Il ne reste plus qu'à écrire

$$\begin{aligned}
\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|^2_{L^2(X)} &\le Ck^{-2\gamma} + Ck^{-(1/2+\gamma)}\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)}\,, \\
\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|^2_{L^2(X)} - Ck^{-(1/2+\gamma)}\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)} &\le Ck^{-2\gamma}\,, \\
\Big(\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|_{L^2(X)} - \frac{1}{2}Ck^{-(1/2+\gamma)}\Big)^2 &\le Ck^{-2\gamma} + \frac{1}{4}C^2k^{-(1+2\gamma)} \;\le\; Ck^{-2\gamma}
\end{aligned}$$

pour obtenir finalement

$$\|\partial_k \bar{\partial}_k \sigma_j\|_{L^2(X)} \leq C k^{-\gamma}\,.$$

4.3.4 Estimées des différentes composantes T_k^i de T_k

Rappelons que si $T = i\,\sum_{\alpha,\beta} T_{\alpha\beta}\, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$ est un courant d'ordre 0 et $\omega = i\,\sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$, alors

$$T \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = \big(\sum_j T_{jj}\big)\frac{\omega^n}{n!} = [\Lambda\,, T]\,\frac{\omega^n}{n!}\,.$$

Nous avons les estimées suivantes :

- Estimation de T_k^1 : $\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_k + \frac{1}{N_k}\sum_j |\sigma_j|^2}$ est à valeurs dans $[0;1]$, donc est uniformément borné.
- Estimation de T_k^2 : T_k^2 converge uniformément vers 0, car $\|\alpha - 1/k\, \alpha_k^{1,1}\|_{C^\infty} \leq C k^{-1-1/b_2(X)}$.
- Estimation de $T_k^3 + T_k^4$: Supposons que ω soit une métrique de Gauduchon, i.e. telle que $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$ (ce qui est toujours possible sur une variété compacte complexe, voir [Gau77]). Nous avons alors

$$\begin{aligned}\int T_k \wedge \omega^{n-1} &= \int \alpha \wedge \omega^{n-1}\\ &= \int (T_k^1 + T_k^2) \wedge \omega^{n-1} + \int (T_k^3 + T_k^4) \wedge \omega^{n-1} + \int (-T_k^5 - T_k^6 + T_k^7 - T_k^8) \wedge \omega^{n-1}\,.\end{aligned}$$

  L'intégrale contenant $T_k^1 + T_k^2$ est bornée, et nous allons voir ci-dessous que l'intégrale contenante T_k^5, T_k^6, T_k^7 et T_k^8 tend vers 0. Cela assurera que la partie positive $T_k^3 + T_k^4$ est bornée en masse.
- Estimation de T_k^5 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\int \frac{N_k\varepsilon_k \sum_j |\bar{\partial}_k \sigma_j|^2}{\big(N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2\big)^2} &\leq \frac{1}{k}\int \frac{\sum_j |\bar{\partial}_k \sigma_j|^2}{N_k\varepsilon_k + \sum_j |\sigma_j|^2} \leq \frac{1}{kN_k\varepsilon_k}\sum_{j=1}^{N_k}\int |\bar{\partial}_k \sigma_j|^2\\ &\leq \frac{1}{kN_k\varepsilon_k}\sum_{j=1}^{N_k} k\lambda_k = \frac{\lambda_k}{\varepsilon_k}\end{aligned}$$

- Estimation de T_k^6 :

$$\frac{1}{k}\,\frac{\sum_{\alpha<\beta}\ \big(s_\alpha\bar\partial_k s_\beta - s_\beta\bar\partial_k s_\alpha\big)\wedge\overline{(s_\alpha\bar\partial_k s_\beta - s_\beta\bar\partial_k s_\alpha)}}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}\wedge\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= \frac{1}{k}\,\frac{\sum_{\alpha<\beta}\ |s_\alpha\bar\partial_k s_\beta - s_\beta\bar\partial_k s_\alpha|^2_\omega}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}\,\frac{\omega^n}{n!} \ \le\ \frac{2}{k}\,\frac{\sum_{\alpha<\beta}\ |s_\alpha\bar\partial_k s_\beta|^2+|s_\beta\bar\partial_k s_\alpha|^2}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}\,\frac{\omega^n}{n!}$$
$$\le\ \frac{2}{k}\,\frac{\sum_{\alpha,\beta}\ |s_\alpha|^2|\bar\partial_k s_\beta|^2}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}\,\frac{\omega^n}{n!}\ \le\ \frac{2}{k}\,\frac{\sum_\alpha|\sigma_\alpha|^2}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}\cdot\Big(\sum_\beta|\bar\partial_k\sigma_\beta|^2\Big)\,\frac{\omega^n}{n!}$$
$$= \frac{2}{kN_k\varepsilon_k}\,\frac{N_k\varepsilon_k\cdot\sum_\alpha|\sigma_\alpha|^2}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}\cdot\Big(\sum_\beta|\bar\partial_k\sigma_\beta|^2\Big)\,\frac{\omega^n}{n!}\ \le\ \frac{1}{2kN_k\varepsilon_k}\sum_\beta|\bar\partial_k\sigma_\beta|^2\,\frac{\omega^n}{n!}\,,$$

d'où

$$\int T_k^5\wedge\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}\le\frac{1}{4\pi kN_k\varepsilon_k}\sum_{\beta=1}^{N_k}\int|\bar\partial_k\sigma_\beta|^2\le\frac{1}{4\pi k\varepsilon_k}\,k\lambda_k\le\frac{\lambda_k}{\varepsilon_k}\,.$$

- Estimation de T_k^7 :

$$\frac{\sum_j|\sigma_j|\,|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j|}{N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2}\le\frac{\sqrt{\sum_j|\sigma_j|^2}\sqrt{\sum_j|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j|^2}}{N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2}\le\frac{1}{2\sqrt{N_k\varepsilon_k}}\sqrt{\sum_j|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j|^2}\,,$$

d'où

$$\frac{1}{k}\int\frac{\sum_j|\sigma_j|\,|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j|}{N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2}\ \le\ \frac{1}{2k\sqrt{\varepsilon_k}}\int\sqrt{\frac{1}{N_k}\sum_{j=1}^{N_k}|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j|^2}$$
$$\le\ \frac{C}{2k\sqrt{\varepsilon_k}}\sqrt{\int\frac{1}{N_k}\sum_{j=1}^{N_k}|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j|^2}\ =\ \frac{C}{2k\sqrt{\varepsilon_k}}\sqrt{\frac{1}{N_k}\sum_{j=1}^{N_k}\|\partial_k\bar\partial_k\sigma_j\|^2_{L^2(X)}}$$
$$\le\ \frac{C}{2k\sqrt{\varepsilon_k}}\sqrt{Ck^{-2\gamma}}\ \le\ C\frac{k^{-1-\gamma}}{\sqrt{\varepsilon_k}}\ =\ C\sqrt{\frac{\lambda_k}{\varepsilon_k}}\,.$$

- Estimation de T_k^8 :

$$\frac{|\sum_{\alpha,\beta}\{\partial_k\sigma_\alpha,\sigma_\alpha\}\wedge\{\bar\partial_k\sigma_\beta,\sigma_\beta\}|}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}\ \le\ \frac{\sum_{\alpha,\beta}|\{\partial_k\sigma_\alpha,\sigma_\alpha\}|\,|\{\bar\partial_k\sigma_\beta,\sigma_\beta\}|}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}$$
$$\le\ \frac{\sum_{\alpha,\beta}|\sigma_\alpha|\,|\sigma_\beta|\,|\partial_k\sigma_\alpha|\,|\bar\partial_k\sigma_\beta|}{\big(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\big)^2}$$
$$\le\ \frac{\sum_\alpha|\sigma_\alpha|\,|\partial_k\sigma_\alpha|}{N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2}\times\frac{\sum_\beta|\sigma_\beta|\,|\bar\partial_k\sigma_\beta|}{N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2}\,,$$

or

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_\alpha |\sigma_\alpha|\,|\partial_k\sigma_\alpha|}{N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2} &\leq \frac{\sqrt{\sum_\alpha|\sigma_\alpha|^2}\sqrt{\sum_\alpha|\partial_k\sigma_\alpha|^2}}{N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2}\\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{N_k\varepsilon_k}}\sqrt{\sum_\alpha|\partial_k\sigma_\alpha|^2} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_k}}\sqrt{\frac{1}{N_k}\sum_\alpha|\partial_k\sigma_\alpha|^2}\,,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{k}\frac{|\sum_{\alpha,\beta}\{\partial_k\sigma_\alpha,\sigma_\alpha\}\wedge\{\bar\partial_k\sigma_\beta,\sigma_\beta\}|}{\left(N_k\varepsilon_k+\sum_j|\sigma_j|^2\right)^2} &\leq \frac{1}{k(2\sqrt{\varepsilon_k})^2}\int\sqrt{\frac{1}{N_k}\sum_\alpha|\partial_k\sigma_\alpha|^2}\sqrt{\frac{1}{N_k}\sum_\alpha|\bar\partial_k\sigma_\alpha|^2}\\
&\leq \frac{1}{4k\varepsilon_k}\sqrt{\int\frac{1}{N_k}\sum_\alpha|\partial_k\sigma_\alpha|^2}\sqrt{\int\frac{1}{N_k}\sum_\alpha|\bar\partial_k\sigma_\alpha|^2}\\
&\leq \frac{1}{4k\varepsilon_k}\sqrt{Ck}\sqrt{k\lambda_k}\\
&\leq C\frac{\sqrt{\lambda_k}}{\varepsilon_k}
\end{aligned}$$

Nous voyons donc maintenant pourquoi la deuxième estimation en $k^{-2-2/b_2(X)}$ est plus utile que la première en $k^{-1/6}$.

En effet, les différentes composantes de T_k sont contrôlées justement par $\sqrt{\lambda_k}/\varepsilon_k$ et λ_k/ε_k. Ainsi, nous voyons que puisque nous devons diviser par ε_k qui tend vers zéro, il est mieux d'avoir λ_k le plus petit possible, donc tendant le plus vite possible vers zéro.

Par ailleurs, $\partial_k\bar\partial_k\sigma_j$ ne peut être contrôlé, avec notre méthode de calcul, qu'avec $\lambda_k = k^{-2-\gamma}$, où $0<\gamma<1/b_2(X)$. La première estimation ne suffisait donc pas.

4.3.5 Existence d'un courant

Donnons un résultat effectif de contrôle de la partie positive du courant limite, qui illustrera l'intérêt d'avoir des estimées spectrales asymptotiques pour des valeurs propres les plus petites possibles.

Posons $f_k(x)=\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_k+b_k(x)}$. Cette fonction est à valeurs dans $[0;1]$, donc est L^∞. Or $L^\infty(X)$ est le dual de $L^1(X)$, qui est séparable. On peut donc extraire de la suite $(f_k)_{k\in S}$ une sous-suite convergeant faiblement (pour la topologie faible $*$ sur $L^1(X)'$) vers une fonction $f\in L^\infty(X)$ à valeurs dans $[0;1]$.

Par ailleurs on peut aussi extraire de la suite de courants $T_k^3+T_k^4$ (courants positifs bornés en masse) une sous-suite convergente (faiblement, au sens des courants) vers un courant positif, que nous noterons P. Enfin, les autres termes de T_k tendent vers zéro en norme L^1.

Nous pouvons donc extraire de $(T_k)_{k\in S}$ une sous-suite convergente vers un courant $T=f\cdot\alpha+P$ tel que $\{T\}=\{\alpha\}$, P étant un courant positif et f une fonction L^∞ à valeurs dans $[0;1]$.

Nous pouvons donc énoncer par exemple :

Théorème 4.7. *Si la suite $(b_k)_{k\in S}$ vérifie uniformément sur un ouvert U l'estimation*

$$|b_k(x)| \geq Ck^{-A}\,, \quad \textit{pour } A < 1 + \frac{1}{b_2(X)} \textit{ fixé}\,,$$

alors il existe un courant T dans la même classe de cohomologie que α, et qui est positif au-dessus de $X(\alpha,0)$ et au-dessus de U.

Démonstration - Si $A < 1 + 1/b_2(X)$, nous pouvons trouver $0 < \gamma < 1/b_2(X)$ et $0 < \beta < \gamma$ de sorte que $A - 1 < \beta$. Alors $|b_k(x)|/\varepsilon_k \leq Ck^{-A+1+\beta} \to +\infty$, donc $f_k(x) \to 0$. Donc $f \equiv 0$ sur U. □

APPENDICE

Annexe A

Variétés presque complexes

A.1 Espace tangent complexe

Soit (X,J) une variété symplectiue. On a donc $J^2 = -\mathrm{Id}$ sur $T_{\mathbb{R}}X$. On étend par $\mathbb{C}$-linéarité J en $\mathrm{Id} \otimes J$, endomophisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T_{\mathbb{C}}X$. J induit la décomposition en sous-espaces propres

$$T_{\mathbb{C}}X = T_J^{1,0}X \oplus T_J^{0,1}X$$

relativement aux valeurs propres i et $-i$.

On a

$$\begin{array}{rcl} T_J^{1,0}X & = & \{\xi - iJ\xi \mid \xi \in T_{\mathbb{R}}X\} = \{u \in T_{\mathbb{C}}X \mid J(u) = iu\}, \\ T_J^{0,1}X & = & \{\xi + iJ\xi \mid \xi \in T_{\mathbb{R}}X\} = \{u \in T_{\mathbb{C}}X \mid J(u) = -iu\}. \end{array}$$

La conjugaison de $\mathbb{C}$ induit une conjugaison sur le complexifié, donnée par

$$\overline{\alpha \otimes \xi} = \bar{\alpha} \otimes \xi \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \;, \forall \xi \in T_{\mathbb{R}}X.$$

Par suite, il vient que

$$\overline{\alpha \otimes \xi} = \bar{\alpha} \otimes \bar{\xi} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \;, \forall \xi \in T_{\mathbb{C}}X.$$

On a deux isomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires

$$\varphi^{1,0} : \left\{ \begin{array}{ccc} T_{\mathbb{R}}X & \to & T_J^{1,0}X \\ \xi & \mapsto & \frac{1}{2}(\xi - iJ\xi) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \varphi^{0,1} : \left\{ \begin{array}{ccc} T_{\mathbb{R}}X & \to & T_J^{0,1}X \\ \xi & \mapsto & \frac{1}{2}(\xi + iJ\xi)\,. \end{array} \right.$$

On a $\varphi^{1,0} \circ J = i\varphi^{1,0}$ et $\varphi^{0,1} \circ J = -i\varphi^{0,1}$. Ainsi on peut voir $\left(T_J^{0,1}X,i\right)$ comme l'espace complexe conjugué de $\left(T_J^{1,0}X,i\right)$.

On identifie

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}}^*X & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{C}}X,\mathbb{C}) \\ \alpha \otimes \phi & \longmapsto & (\alpha\,\mathrm{Id}) \otimes \phi \end{array}$$

J agit sur $T^*_{\mathbb{C}}X = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{C}}X,\mathbb{C})$ par $J(\phi) = \phi \circ J$, ce qui induit encore une décomposition en sous-espaces propres

$$T^*_{\mathbb{C}}X = T_{1,0}X \oplus T_{0,1}X$$

relativement aux valeurs propres i et $-i$.

$$\begin{aligned}
T_{1,0}X &= \{\mathrm{Id} \otimes \phi - i\mathrm{Id} \otimes \phi \circ J \mid \phi \in T^*_{\mathbb{R}}X\} = \{f \in T^*_{\mathbb{C}}X \mid f_{|_{T_J^{0,1}X}} = 0\} = \{f \in T^*_{\mathbb{C}}X \mid f \circ J = if\},\\
T_{0,1}X &= \{\mathrm{Id} \otimes \phi + i\mathrm{Id} \otimes \phi \circ J \mid \phi \in T^*_{\mathbb{R}}X\} = \{f \in T^*_{\mathbb{C}}X \mid f_{|_{T_J^{1,0}X}} = 0\} = \{f \in T^*_{\mathbb{C}}X \mid f \circ J = -if\}.
\end{aligned}$$

Nous avons là-aussi une conjugaison induite par $\mathbb{C}$:

$$\overline{\alpha \otimes \phi} = \bar{\alpha} \otimes \phi \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}\ , \forall \phi \in T^*_{\mathbb{R}}X.$$

Par suite, il vient que

$$\overline{\alpha \cdot f} = \bar{\alpha} \cdot \bar{f} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}\ , \forall f \in T^*_{\mathbb{C}}X.$$

En particulier, pour toute $\phi \in T^*_{\mathbb{R}}X$, $\overline{\alpha \mathrm{Id} \otimes \phi} = \bar{\alpha}\mathrm{Id} \otimes \phi$.

On constate donc que

$$\bar{f}(u) = \overline{f(\bar{u})}\ , \quad \forall f \in T^*_{\mathbb{C}}X\ , \forall u \in T_{\mathbb{C}}X.$$

Il est clair que si $f \in T^*_{\mathbb{C}}X$, $f(u) = \alpha u \Rightarrow \overline{f(u)} = \bar{f}(\bar{u}) = \bar{\alpha}\bar{u}$. Donc la conjugaison induit un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire ($\mathbb{C}$-antilinéaire) entre $T_J^{0,1}X$ et $T_J^{1,0}X$ d'une part, et entre $T_{1,0}X$ et $T_{0,1}X$ d'autre part.

On prend maintenant un système de coordonnées locales $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ et on pose $z_k = x_k + iy_k$. Par un changement linéaire des coordonnées, on peut choisir ces coordonnées locales de manière à ce que $J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}$ au point $z = 0$.

On note encore dx_k et dy_k les extensions $\mathbb{C}$-linéaires à $T_{\mathbb{C}}X$ de dx_k et dy_k. On pose alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),\\
\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),\\
dz_k &= dx_k + idy_k,\\
d\bar{z}_k &= dx_k - idy_k.
\end{aligned}$$

Alors

$$dz_j\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = \delta_{j,k}\,,\ dz_j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) = 0\,,\ d\bar{z}_j\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = 0\,,\ d\bar{z}_j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) = \delta_{j,k}.$$

Ainsi $(dz_1,\ldots,dz_n,d\bar{z}_1,\ldots,d\bar{z}_n)$ est la base duale de $\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_n},\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)$. On notera que l'on a bien $d\bar{z}_k(u) = \overline{dz_k(\bar{u})}$.

Au point $z = 0$, on a

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z_k}_{|0}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_k}_{|0} \, , \, J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}_{|0}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}_{|0} \, ,$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial z_k}_{|0} \in T^{1,0}_{J,0}X \, , \, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}_{|0} \in T^{0,1}_{J,0}X.$$

Et

$$dz_{k|0} \circ J_{|0} = idz_{k|0} \, , \, d\bar{z}_{k|0} \circ J_{|0} = -id\bar{z}_{k|0}.$$

Dans le cas où la structure presque complexe J provient d'une structure complexe sur la variété X, alors les remarques ci-dessus vraies au point $z = 0$ sont en fait vraies en tout point de X. En particulier

$$dz_k|_{T^{0,1}_J X} = 0 \text{ et } d\bar{z}_k|_{T^{1,0}_J X} = 0$$

en tout point de X. Donc dz_k est de type (1,0) et $d\bar{z}_k$ est de type (0,1). Mais revenons dans la suite au cas général d'une structure presque complexe pas forcément intégrable.

On définit le conjugué d'un opérateur F par

$$\bar{F}(u) = \overline{F(\bar{u})} \, , \quad \forall u \in T_{\mathbb{C}}X.$$

Si l'opérateur F est de la forme $F = \mathrm{Id} \otimes f$ avec $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbb{R}}X)$, c'est-à-dire si F provient d'un opérateur réel sur le fibré tangent réel, alors $\bar{F} = F$.

Ce qui suit a pour seul but d'attirer l'attention sur un abus de notation souvent utilisé.

Supposons, jusqu'à la fin du paragraphe, que la structure presque complexe J provient d'une structure complexe sur la variété X. Alors on a

$$\varphi^{1,0}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial z_k} \, , \varphi^{0,1}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}.$$

Et

$$\begin{aligned}
\varphi^{1,0}_*(dx_j)\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) &= dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \delta_{j,k} \\
\varphi^{1,0}_*(dx_j)\left(i\frac{\partial}{\partial z_k}\right) &= dx_j\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = 0 \\
\varphi^{1,0}_*(dy_j)\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) &= dy_j\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = 0 \\
\varphi^{1,0}_*(dy_j)\left(i\frac{\partial}{\partial z_k}\right) &= dy_j\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \delta_{j,k}
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi^{1,0}_*(dx_k) = dz_k \;\text{ et }\; \varphi^{1,0}_*(dy_k) = \overline{dz_k} = d\bar{z}_k \circ \bar{\ }$$

A.2 Différentiation et (p,q)-formes

Soit (X,J) une variété presque complexe de dimension réelle n. Notons $T^*_{\mathbb{C}}X = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^*X$. Soit $\bigwedge^{p,q} T^*_{\mathbb{C}}X$ le sous-espace de $\bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}}X$ engendré par les $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \in \bigwedge^p T_{1,0}X$, $\beta \in \bigwedge^q T_{0,1}X$. On note encore $C^\infty_\bullet(X,\mathbb{C}) = C^\infty(X, \bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}}X)$ l'algèbre des formes différentielles complexes, $C^\infty_k(X,\mathbb{C}) = C^\infty(X, \bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X)$ et $C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C}) = C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} T^*_{\mathbb{C}}X)$. On a les décompositions

$$\bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}}X = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X \ , \quad \bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} T^*_{\mathbb{C}}X \ ,$$

qui induisent les décompositions

$$C^\infty_\bullet(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{n} C^\infty_k(X,\mathbb{C}) \ , \quad C^\infty_k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C}) \, .$$

Soit $\Pi^{p,q}$ la projection $C^\infty_k(X,\mathbb{C}) \to C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C})$ suivant la décomposition en somme directe ci-dessus (où $k = p+q$). $d^{0,1}$ est défini sur $C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C})$ par $\Pi^{p,q+1} \circ d$. On définit de la même manière $d^{1,0}$, $d^{2,-1}$ et $d^{-1,2}$.

$C^\infty_\bullet(X,\mathbb{C})$ est localement engendré par $C^\infty(X,\mathbb{C})$, $C^\infty_{1,0}(X,\mathbb{C})$ et $C^\infty_{0,1}(X,\mathbb{C})$. Et on a les inclusions évidentes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dC^\infty(X,\mathbb{C}) & \subset & C^\infty_{1,0}(X,\mathbb{C}) + C^\infty_{0,1}(X,\mathbb{C}) \\ dC^\infty_{1,0}(X,\mathbb{C}) & \subset & C^\infty_{2,0}(X,\mathbb{C}) + C^\infty_{1,1}(X,\mathbb{C}) + C^\infty_{0,2}(X,\mathbb{C}) \\ dC^\infty_{0,1}(X,\mathbb{C}) & \subset & C^\infty_{2,0}(X,\mathbb{C}) + C^\infty_{1,1}(X,\mathbb{C}) + C^\infty_{0,2}(X,\mathbb{C}) \end{array} \right.$$

d'où

$$dC^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C}) \subset C^\infty_{p+2,q-1}(X,\mathbb{C}) + C^\infty_{p+1,q}(X,\mathbb{C}) + C^\infty_{p,q+1}(X,\mathbb{C}) + C^\infty_{p-1,q+2}(X,\mathbb{C})$$

On a donc toujours

$$d = d^{1,0} + d^{0,1} + d^{2,-1} + d^{-1,2}.$$

Soit α une (p,q)-forme : $\alpha \in \bigwedge^{p,q} T^*X \otimes \mathbb{C}$. Alors $\bar\alpha$ est une (q,p)-forme.

$$d\alpha = \underbrace{d^{1,0}\alpha}_{(p+1,q)} + \underbrace{d^{0,1}\alpha}_{(p,q+1)} + \underbrace{d^{2,-1}\alpha}_{(p+2,q-1)} + \underbrace{d^{-1,2}\alpha}_{(p-1,q+2)}$$

$$\overline{d\alpha} = \underbrace{\overline{d^{1,0}\alpha}}_{(q,p+1)} + \underbrace{\overline{d^{0,1}\alpha}}_{(q+1,p)} + \underbrace{\overline{d^{2,-1}\alpha}}_{(q-1,p+2)} + \underbrace{\overline{d^{-1,2}\alpha}}_{(q+2,p-1)}$$

$$d\bar\alpha = \underbrace{d^{0,1}\bar\alpha}_{(q,p+1)} + \underbrace{d^{1,0}\bar\alpha}_{(q+1,p)} + \underbrace{d^{-1,2}\bar\alpha}_{(q-1,p+2)} + \underbrace{d^{2,-1}\bar\alpha}_{(q+2,p-1)}$$

Il vient donc

$$\overline{d^{1,0}\alpha} = d^{0,1}\bar\alpha \text{ et } \overline{d^{2,-1}\alpha} = d^{-1,2}\bar\alpha \quad \forall u \text{ de type } (p,q)$$

A.3 Tenseur de Nijenhuis

Le tenseur de Nijenhuis est l'application bilinéaire antisymétrique

$$\mathcal{N}_J : C^\infty(X,T^{1,0}X) \times C^\infty(X,T^{1,0}X) \to C^\infty(X,T^{0,1}X)$$

qui à une paire de vecteurs (ξ,η) de type (1,0) associe la partie de type (0,1) de leur crochet de Lie $[\xi,\eta]$.

Il est clair que ceci définit bien un tenseur, car

$$[\xi,f\eta] = f[\xi,\eta] + (\xi \cdot f)\,\eta \quad \text{pour toute } f \in C^\infty(X,\mathbb{C}),$$

ce qui implique $\mathcal{N}_J(\xi,f\eta) = f\mathcal{N}_J(\xi,\eta)$. Autrement dit, $\mathcal{N}_J$ est une (2,0)-forme à valeurs dans $T^{0,1}X$.

La torsion de J est le tenseur de type (1,2) défini par

$$N_J(\xi,\eta) = \Big\{[J\xi,J\eta] - J[\xi,J\eta] - J[J\xi,\eta] - [\xi,\eta]\Big\}\,.$$

Posons $Z = [\frac{1}{2}(\xi - iJ\xi),\frac{1}{2}(\eta - iJ\eta)]$; alors la partie de type (0,1) de Z est

$$\mathcal{N}_J\Big(\frac{1}{2}(\xi-iJ\xi),\frac{1}{2}(\eta-iJ\eta)\Big) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(Z+iJZ) = -\frac{1}{8}\Big(N_J(\xi,\eta)+iJN_J(\xi,\eta)\Big) = -\frac{1}{4}N_J\Big(\frac{1}{2}(\xi-iJ\xi),\frac{1}{2}(\eta-iJ\eta)\Big)\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\text{si } \xi,\eta \text{ sont de type } (1,0)\,, \quad \text{alors} \quad N_J(\xi,\eta) = -4\mathcal{N}_J(\xi,\eta)\,.\\
&\text{si } \xi,\eta \text{ sont de type } (0,1)\,, \quad \text{alors} \quad N_J(\xi,\eta) = -4\overline{\mathcal{N}_J(\bar\xi,\bar\eta)} = -4\bar{\mathcal{N}}_J(\xi,\eta)\,.
\end{aligned}$$

On peut établir les relations

$$N_J(\xi,\eta) = -N_J(\eta,\xi) \quad \text{et} \quad N_J(J\xi,\eta) = N_J(\xi,J\eta) = -JN_J(\xi,\eta)\,.$$

Remarque : dans des coordonnées locales $(x_1,\ldots,x_{2n})$, écrivons

$$N_J\Big(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) = \sum_{i=1}^{2n} N^i_{j,k}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad J = \sum_{1\le i,j\le 2n} J^i_j\, dx_j \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}\,.$$

On a

$$N^i_{j,k} = \sum_{h=1}^{2n}\big(J^h_j\,\partial_h J^i_k - J^h_k\,\partial_h J^i_j - J^i_h\,\partial_j J^h_k + J^i_h\,\partial_k J^h_j\big)$$

où ∂_h désigne la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_h}$.

Si $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ est un repère orthonormé de $T^{1,0}_J X_{|U}$, on peut écrire

$$\mathcal{N}_J = \sum_{j=1}^n \alpha_j \otimes \xi_j, \quad \alpha_j \in C^\infty_{2,0}(U,\mathbb{C})$$

On définit alors deux opérateurs conjugué θ' et θ'' sur $\bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}}X$ tels que

$$\theta' u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \wedge \big(\bar\xi_j \lrcorner u\big), \quad \theta'' u = \sum_{j=1}^n \bar\alpha_j \wedge \big(\xi_j \lrcorner u\big)$$

Il est clair que θ' et θ'' sont des dérivations, c'est-à-dire que

$$\theta'(u \wedge v) = \theta'(u) \wedge v + (-1)^{\deg u} u \wedge \theta'(v)$$

pour toutes formes u,v, et de même pour θ''.

Théorème A.1. *On a les relations* $\theta' = -d^{2,-1}$ *et* $\theta'' = -d^{-1,2}$.

Démonstration - Tous les opérateurs étant des dérivations, il suffit de prouver les formules pour des formes de degré 0 et 1.

Si u est de degré 0, $\theta' u = 0$, $\theta'' u = 0$ et du n'a que des composantes de type (1,0) et (0,1).

Si u est de degré 1 et ξ, η sont des champs de vecteurs, on a

$$du(\xi,\eta) = \xi \cdot u(\eta) - \eta \cdot u(\xi) - u([\xi,\eta])$$

Si maintenant u est de type (0,1) et ξ, η sont de type (1,0), alors

$$(du)^{2,0}(\xi,\eta) = du(\xi,\eta) = -u([\xi,\eta]) = -u\big(\mathcal{N}_J(\xi,\eta)\big)$$

Donc $(du)^{2,0} = -\theta' u$ et bien sûr $(du)^{1,1} = d'u$, $(du)^{0,2} = d''u$, $\theta'' u = 0$. Le résultat pour u (1,0)-forme se déduit par conjugaison. □

Propriété A.2. *Nous avons les relations suivantes :*

$$d'^2 = [d'',\theta'], \quad d''^2 = [d',\theta''], \quad [d',\theta'] = 0, \quad [d'',\theta''] = 0, \quad \theta'^2 = 0, \quad \theta''^2 = 0,$$
$$[d',d''] = -[\theta',\theta''] \ : \ \textit{c'est un opérateur d'ordre 0.}$$

Démonstration -

$$d = \underbrace{d'}_{1,0} + \underbrace{d''}_{0,1} - \underbrace{\theta'}_{2,-1} - \underbrace{\theta''}_{-1,2}$$

Donc il vient

$$0 = d^2 = \underbrace{d'^2}_{2,0} + \underbrace{d''^2}_{0,2} + \underbrace{\theta'^2}_{4,-2} + \underbrace{\theta''^2}_{-2,4} + \underbrace{[d',d'']}_{1,1} - \underbrace{[d',\theta']}_{3,-1} - \underbrace{[d',\theta'']}_{0,2} - \underbrace{[d'',\theta']}_{2,0} - \underbrace{[d'',\theta'']}_{-1,3} + \underbrace{[\theta',\theta'']}_{1,1}$$

Il n'y a plus qu'à regroupper suivant les bidegrés. □

Annexe B

Variétés presque kählériennes

B.1 Quelques formules utiles

Rappelons une formule facile, mais très utile pour la suite : si ξ est un champ de vecteurs et u, v deux formes, alors

$$\xi \lrcorner (u \wedge v) = (\xi \lrcorner u) \wedge v + (-1)^{\deg u}\, u \wedge (\xi \lrcorner v).$$

Si θ est une p-forme, alors

$$d\theta(\xi_0, \ldots, \xi_p) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j\, \xi_j \cdot \theta(\xi_0, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_p) + \sum_{0 \le j < k \le p} (-1)^{j+k}\, \theta([\xi_j, \xi_k], \xi_0, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \hat{\xi}_k, \ldots, \xi_p).$$

Si α est une 1-forme sur X et ∇ une connexion sur X, on peut définir $\nabla\alpha$ par

$$\Big(\nabla_\xi\, \alpha\Big)(\eta) = \xi \cdot \big(\alpha(\eta)\big) - \alpha\Big(\nabla_\xi\, \eta\Big)$$

puis par récurrence

$$\nabla(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\deg \alpha_1 + \cdots + \deg \alpha_{j-1}} \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \nabla\alpha_j \wedge \ldots \wedge \alpha_k.$$

Si J est un endomorphisme de TX et ∇ une connexion sur X, on peut définir ∇J par

$$\Big(\nabla_\xi\, J\Big)(\eta) = \nabla_\xi\big(J(\eta)\big) - J\Big(\nabla_\xi\, \eta\Big).$$

J est dite parallèle à ∇ *ssi* $\nabla J = 0$ *ssi* $\nabla_\xi\big(J(\eta)\big) = J\Big(\nabla_\xi\, \eta\Big)$ pour tous ξ, η.

Remarquons que la dérivation covariante de $J^2 = -\mathrm{Id}$ donne

$$\nabla J \circ J + J \circ \nabla J = 0, \qquad \text{ie. } \Big(\nabla_\xi J\Big)(J\eta) + J\Big(\big(\nabla_\xi J\big)(\eta)\Big) = 0.$$

Propriété B.1. *Si ∇ est la connexion de Lévi-Civita, on a $\nabla J = 0 \Leftrightarrow N_J = 0$.*

Démonstration -

• $N_J(X,Y) = [JX,JY] - J[X,JY] - J[JX,Y] - [X,Y]$. En utilisant les faits que $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (torsion nulle), $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y)$ et $(\nabla_X J)J + J(\nabla_X J) = 0$, il vient après développement et simplification que

$$N_J(X,Y) = (\nabla_X J)JY - (\nabla_Y J)JX + (\nabla_{JX} J)Y - (\nabla_{JY} J)X.$$

• $d\omega(X,Y,Z) = X\cdot\omega(Y,Z) - Y\cdot\omega(X,Z) + Z\cdot\omega(X,Y) - \omega([X,Y],Z) + \omega([X,Z],Y) - \omega([Y,Z],X)$.
Or $\omega(Y,Z) = g(JY,Z)$,
donc $X\cdot\omega(Y,Z) = g(\nabla_X(JY),Z) + g(JY,\nabla_X Z) = g((\nabla_X J)Y,Z) + g(J\nabla_X Y,Z) + g(JY,\nabla_X Z)$ et $\omega([X,Y],Z) = g(J\nabla_X Y - J\nabla_Y X,Z)$. Après calculs et simplifications, en utilisant aussi les faits ci-dessus évoqués, il vient

$$d\omega(X,Y,Z) = g((\nabla_X J)Y,Z) - g((\nabla_Y J)X,Z) + g((\nabla_Z J)X,Y).$$

Maintenant on utilise encore que $\nabla_X J$ anti-commute avec J, et que $g(JX,Y) = -g(X,JY)$. Il vient alors

$$d\omega(JX,Y,Z) + d\omega(X,JY,Z) = 2g((\nabla_Z J)X,JY) + g(N_J(X,Y),Z).$$

Or on a $d\omega = 0$. □

B.2 Produits scalaires et hermitiens

Effectuons d'abord quelques rappels. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\dim_{\mathbb{C}} n$, et $(z_1,\dots,z_n)$ des coordonnées sur V. Elles induisent $(\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n})$ base de V et $(dz_1,\dots,dz_n)$ base de V^*.

On a une correspondance entre formes hermitiennes h sur V et (1,1)-formes u sur V, donnée par

$$h = \sum_{1\le j,k\le n} h_{jk}\, dz_j \otimes d\bar{z}_k \quad (h_{jk} = \bar{h}_{kj}) \quad \longleftrightarrow \quad u = i \sum_{1\le j,k\le n} h_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

avec $u(\xi,\eta) = i \sum\limits_{1\le j,k\le n} h_{jk}(\xi_j\bar{\eta}_k - \eta_j\bar{\xi}_k) = -2\,\mathrm{Im}\, h(\xi,\eta)$ pour tous $\xi,\eta \in V$.

Soit maintenant (X,J,ω) presque kählérienne. $g = \omega(\cdot,J\cdot)$ est une métrique riemannienne sur X. On étend g par $\mathbb{C}$-linéarité à $T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$.

Un calcul simple montre que $g(u,v) = 0$ si $u,v \in T^{1,0}X$ ou $u,v \in T^{0,1}X$ (c'est d'ailleurs vrai de toute forme bilinéaire réelle que l'on étend par $\mathbb{C}$-linéarité).

Démonstration - si $u,v \in T^{1,0}X$, $g(u,v) = g(Ju,Jv) = g(iu,iv) = -g(u,v)$. □

On pose $h(u,v) = g(u,\bar{v})$ pour $u,v \in T^{1,0}X$. Ceci définit une métrique hermitienne sur $T^{1,0}X$.

Soit $(e_1,\dots,e_{2n})$ un repère local orthogonal de $T_{\mathbb{R}}X$ tel que $J(e_j) = e_{j+n}$ et $g(e_j,e_j) = 2$. Posons $\varepsilon_j = \frac{1}{2}(e_j - iJe_j)$. Alors $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ est un repère local de $T^{1,0}X$, unitaire pour h.

Propriété B.2. *Si $\xi = \frac{1}{2}(X - iJX)$ et $\eta = \frac{1}{2}(Y - iJY) \in T^{1,0}X$ avec $X,Y \in T_{\mathbb{R}}X$, alors*

$$h(\xi,\eta) = \frac{1}{2}g(X,Y) - \frac{i}{2}\omega(X,Y).$$

On associe à h la (1,1)-forme sur $T^{1,0}X$ définie par $\omega_h(\xi,\eta) = -2\,\mathrm{Im}\,h(\xi,\eta) = \omega(X,Y)$. (remarque : $\omega_h(i\xi,i\eta) = \omega(JX,JY) = \omega(X,Y) = \omega_h(\xi,\eta)$)

$$\left.\begin{array}{rcl} g\Big(\frac{1}{2}(X - iJX),\frac{1}{2}(Y + iJY)\Big) & = & \frac{1}{2}g(X,Y) - \frac{i}{2}\omega(X,Y) \\ g\Big(\frac{1}{2}(Y + iJY),\frac{1}{2}(X - iJX)\Big) & = & \frac{1}{2}g(Y,X) + \frac{i}{2}\omega(Y,X) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Donc si } \xi \in T^{1,0}X \text{ et } \eta \in T^{0,1}X, \\ \text{alors } g(\xi,\eta) = g(\eta,\xi).\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \omega\Big(\frac{1}{2}(X - iJX),\frac{1}{2}(Y + iJY)\Big) & = & \frac{1}{2}\omega(X,Y) + \frac{i}{2}g(X,Y) \\ \omega\Big(\frac{1}{2}(Y + iJY),\frac{1}{2}(X - iJX)\Big) & = & \frac{1}{2}\omega(Y,X) - \frac{i}{2}g(Y,X) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Donc si } \xi \in T^{1,0}X \text{ et } \eta \in T^{0,1}X, \\ \text{alors } \omega(\xi,\eta) = -\omega(\eta,\xi).\end{array}$$

$$\text{Et } \omega(X,Y) = -2\,\mathrm{Im}\,g(\xi,\bar\eta) = 2\,\mathrm{Re}\,\omega(\xi,\bar\eta) \quad \text{si} \quad \xi,\eta \in T^{1,0}X.$$

Conclusion : pour tous $\xi,\eta \in T_{\mathbb{R}}X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on a

$$g(\xi,\eta) = g(\eta,\xi),\ \overline{g(\xi,\eta)} = g(\bar\xi,\bar\eta),\ \omega(\xi,\eta) = -\omega(\eta,\xi) \text{ et } \overline{\omega(\xi,\eta)} = \omega(\bar\xi,\bar\eta).$$

ω, prolongée par $\mathbb{C}$-linéarité à $T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$, est à valeurs complexes, alors que ω_h est à valeurs réelles. On a bien $\bar\omega = \omega$, mais cela ne signifie nullement que ω est à valeurs réelles, simplement que ω provient d'une forme réelle, et prend des valeurs réelles quand évaluée sur des vecteurs réels.

Annexe C

Courbure d'un fibré vectoriel

C.1 Lien entre cohomologie de De Rham et cohomologie de Cech

Pour ce qui est dans cette section, on pourra consulter par exemple [Wei52].

Dans toute cette section, soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et X une variété C^∞. Considérons $U = (U_\alpha)$ un recouvrement contractile localement fini ouvert de X et une partition de l'unité (h_α) qui lui soit subordonnée. C'est-à-dire que $h_\alpha : X \to [0;1]$ est C^∞, $\mathrm{supp}(f_\alpha) \subset V_\alpha$ et $\sum_\alpha f_\alpha \equiv 1$.

Rappelons que

(i) dire que le recouvrement (U_α) est localement fini signifie que chaque point $x \in X$ a un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de V_α ;

(ii) $\mathrm{supp}(f_\alpha) = \overline{\{x \in X \mid f_\alpha(x) \neq 0\}}$.

C.1.1 Lien entre $H^1_{dR}(X,\mathbb{K})$ et $H^1(U,\mathbb{K})$

- Soit $\omega \in H^1_{dR}$: $d\omega = 0$, donc $\omega_{|U_\alpha} = df_\alpha$. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $d(f_\alpha - f_\beta)_{|U_\alpha \cap U_\beta} = 0$, donc $(f_\alpha - f_\beta)_{|U_\alpha \cap U_\beta} = c_{\alpha\beta} \in \mathbb{K}$. On obtient donc une 1-cochaine $c = (c_{\alpha\beta})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $(\delta c)_{\alpha\beta\gamma} = c_{\hat{\alpha}\beta\gamma} - c_{\alpha\hat{\beta}\gamma} + c_{\alpha\beta\hat{\gamma}} = c_{\beta\gamma} - c_{\alpha\gamma} + c_{\alpha\beta} = \ldots = 0$.
  Si $\omega_{|U_\alpha} = dg_\alpha$, alors $(g_\alpha - f_\alpha)_{|U_\alpha} = \lambda_\alpha \in \mathbb{K}$. Posons $d_{\alpha\beta} = (g_\alpha - g_\beta)_{|U_\alpha \cap U_\beta}$. Alors $d_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} + (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)$, i.e. $d = c - \delta\lambda$.
  Donc $[c]$ ne dépend que de ω. Et si $\omega = df$, alors $[c] = 0$. Donc $[c]$ ne dépend que de $[\omega]$. D'où une application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} H^1_{dR}(X,\mathbb{K}) & \longrightarrow & H^1(U,\mathbb{K}) \\ [\omega] & \longmapsto & [c] \end{array} \right.$$

- Cette application est injective :
  si $\omega \in H^1_{dR}(X,\mathbb{K})$ et $[c] = 0$, alors $c_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha - \lambda_\beta$. Posons $\tilde{f}_\alpha = f_\alpha - \lambda_\alpha$ (si $\omega_{|U_\alpha} = df_\alpha$). Alors $\left(\tilde{f}_\alpha - \tilde{f}_\beta\right)_{|U_\alpha \cap U_\beta} = 0$. Donc $\omega = d\tilde{f}$.

- Cette application est surjective :
  soit c une 1-cochaine à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $\delta c = 0$. Posons
  $$f_\alpha = \sum_{\gamma \,/\, U_\alpha \cap U_\gamma \neq \emptyset} h_\gamma c_{\alpha\gamma} \quad \text{sur } U_\alpha.$$
  $\left(f_\alpha - f_\beta\right)_{|U_\alpha \cap U_\beta} = \sum_{U_\alpha \cap U_\gamma \neq \emptyset} h_\gamma c_{\alpha\gamma} - \sum_{U_\beta \cap U_\gamma} h_\gamma c_{\beta\gamma} = \sum h_\gamma(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma) - \sum h_\gamma(\lambda_\beta - \lambda_\gamma) = \lambda_\alpha - \lambda_\beta \equiv c_{\alpha\beta}$. Posons $\omega_\alpha = df_\alpha$: $(\omega_\alpha - \omega_\beta)_{|U_\alpha \cap U_\beta} = d(f_\alpha - f_\beta) = 0$. Donc $[\omega]$ a pour image $[c]$.

C.1.2 Lien entre $H^2_{dR}(X,\mathbb{K})$ et $H^2(U,\mathbb{K})$

- Soit $\omega \in H^2_{dR}(X,\mathbb{K})$:
  $\omega_{|U_\alpha} = d\eta_\alpha$, $(\eta_\alpha - \eta_\beta)_{|U_\alpha \cap U_\beta} = df_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta,\mathbb{K})$.
  $f_{\beta\gamma} - f_{\alpha\gamma} + f_{\alpha\beta} \equiv c_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{K}$: c est une 2-cochaine à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  On voit facilement que $[c]$ ne dépend que de ω (pas de η_α) et que si $\omega = d\eta$, alors $[c] = 0$. Donc on a une application bien définie
  $$\begin{cases} H^2_{dR}(X,\mathbb{K}) & \longrightarrow & H^2(U,\mathbb{K}) \\ [\omega] & \longmapsto & [c] \end{cases}$$
- Cette application est injective :
  si $c = \delta u$, posons $\tilde f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} - u_{\alpha\beta}$: alors $\tilde f_{\beta\gamma} - \tilde f_{\alpha\gamma} + \tilde f_{\alpha\beta} \equiv 0$ sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Posons
  $$g_\alpha = \sum_{\gamma \,/\, U_\alpha \cap U_\gamma \neq \emptyset} h_\gamma \tilde f_{\alpha\gamma} \quad \text{sur } U_\alpha.$$
  On a $(g_\alpha - g_\beta)_{|U_\alpha \cap U_\beta} = \tilde f_{\alpha\beta}$; posons $\tilde\eta_\alpha = \eta_\alpha - df_\alpha$. Alors $\left(\tilde\eta_\alpha - \tilde\eta_\beta\right)_{|U_\alpha \cap U_\beta} = 0$. Donc $\omega = d\tilde\eta$, i.e. $[\omega] = 0$.
- Cette application est surjective :
  Soit c une 2-cochaine à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $\delta c = 0$. On pose
  (i) $f_{\alpha\beta} = \sum_\gamma h_{\gamma|U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} c_{\alpha\beta\gamma}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$
  (ii) $\eta_\alpha = \sum_\gamma h_\gamma \, df_{\alpha\gamma|U_\alpha \cap U_\gamma}$
  (iii) $\omega_\alpha = d\eta_\alpha$
  Alors $\left(\omega_\alpha - \omega_\beta\right)_{|U_\alpha \cap U_\beta} = 0$, donc ω a pour image $[c]$.

C.2 Prescription de la courbure

Pour les deux propriétés qui suivent, on pourra consulter par exemple [Wa77] (Addendum au chap. 4) ou [Woo92] (Prop. 8.3.1).

Propriété C.1. *Soit X une variété C^∞ et ω une 2-forme réelle fermée entière sur X, c'est-à-dire que $[\omega]_{dR} \in \left(H^2(X,\mathbb{Z})\right)_{\mathbb{R}}$. Alors il existe un fibré en droites complexes C^∞ $E \to X$ et une connexion ∇ sur E de courbure $\nabla^2 = -2i\pi\omega$. De plus il existe une métrique hermitienne h compatible avec ∇.*

Démonstration - Soit $U = (U_\alpha)$ un recouvrement contractile de X, et (ϕ_α) une partition de l'unité subordonnée à U.

- *Construction du fibré et de la connexion* ∇ :
  Sur U_α, parce que $d\omega = 0$, on a $\omega_{|U_\alpha} = d\theta_\alpha$ avec $\theta_\alpha \in C^\infty_1(U_\alpha,\mathbb{R})$.
  Sur $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $d(\theta_\alpha - \theta_\beta) = 0$ donc $\theta_\alpha - \theta_\beta = dh_{\alpha\beta}$ avec $h_{\alpha\beta} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta,\mathbb{R})$.
  Sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, $d(h_{\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\beta}) = 0$, d'où $h_{\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\beta} \equiv c_{\alpha\beta\gamma}$ constante.
  Puisque $[\omega]_{dR} \in \big(H^2(X,\mathbb{Z})\big)_{\mathbb{R}}$, on peut supposer que $c_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{Z}$.

  En effet, si $[\omega]_{dR} \in \big(H^2(X,\mathbb{Z})\big)_{\mathbb{R}}$, cela signifie que $[c_{\alpha\beta\gamma}] \in H^2(U,\mathbb{R})$ appartient en fait à $H^2(U,\mathbb{Z})$. Donc $c = d + \delta\lambda$ avec $d \in \mathcal{C}ochaine^2(U,\mathbb{Z})$ et $\lambda \in \mathcal{C}ochaine^1(U,\mathbb{Z})$, c.-à-d. $c_{\alpha\beta\gamma} = d_{\alpha\beta\gamma} + (\lambda_{\beta\gamma} - \lambda_{\alpha\gamma} + \lambda_{\alpha\beta})$.
  Alors $\tilde{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha\beta}$ vérifie $\tilde{h}_{\beta\gamma} - \tilde{h}_{\alpha\gamma} + \tilde{h}_{\alpha\beta} \equiv d_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{Z}$ et $\theta_\alpha - \theta_\beta = d\tilde{h}_{\alpha\beta}$. Donc on peut remplacer $h_{\alpha\beta}$ par $\tilde{h}_{\alpha\beta}$ et $c_{\alpha\beta\gamma}$ par $d_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{Z}$.

  Posons $g_{\alpha\beta} = \mathrm{e}^{2i\pi h_{\alpha\beta}}$. Alors $g_{\beta\gamma}g_{\alpha\gamma}^{-1}g_{\alpha\beta} = \mathrm{e}^{2i\pi(h_{\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\beta})} = \mathrm{e}^{2i\pi c_{\alpha\beta\gamma}} = 1$. Donc les $g_{\alpha\beta}$ sont les fonctions de transition d'un fibré en droites complexes E sur X.
  Sur $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $(-2i\pi\theta_\beta) - (-2i\pi\theta_\alpha) = 2i\pi dh_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}$. Donc les $-2i\pi\theta_\alpha$ sont les matrices de connexion d'une connexion ∇ sur $E \to X$: $\nabla \simeq_{U_\alpha} d - 2i\pi\theta_\alpha$.
  Alors $\nabla^2 = -2i\pi\omega$, donc $\frac{i}{2\pi}\nabla^2 = \omega$.

- *Construction de la métrique hermitienne* h :
  Soit e_α le repère associé à la trivialisation précédement construite au dessus de U_α (i.e. tel que $\nabla e_\alpha = -2i\pi\theta_\alpha \otimes e_\alpha$). Je pose que $h(e_\alpha,e_\alpha) \equiv 1$.
  Remarquons que comme les potentiels de ω sont réels, les fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$ sont de module 1. Je définis ainsi bien une métrique hermitienne, puisque sur $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $h(e_\beta,e_\beta) = h(g_{\alpha\beta}e_\alpha,g_{\alpha\beta}e_\alpha) = |g_{\alpha\beta}|^2 h(e_\alpha,e_\alpha) = h(e_\alpha,e_\alpha) = 1$.
  Par ailleurs, h est compatible avec ∇, puisque $dh(e_\alpha,e_\alpha) = 0 = (-2i\pi\theta_\alpha) + \overline{(-2i\pi\theta_\alpha)}$.

$\square$

Propriété C.2. *Soit $(E,h) \to X$ un fibré en droites complexes hermitien, ω une forme symplectique sur X et ∇ une connexion (compatible avec h) sur E de courbure $\frac{i}{2\pi}\nabla^2 = \omega$. Si $(z_1,\ldots,z_n)$ sont des coordonnées locales telles que $\omega = \frac{i}{2}\sum dz_k \wedge d\bar{z}_k + \mathcal{O}(|z|^2)$, alors il existe au-dessus de chaque point une trivialisation φ_α dans laquelle $\nabla \simeq_{\varphi_\alpha} d + A_\alpha$ avec $A_\alpha = \frac{\pi}{2}\sum(z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)$.*

Démonstration -

- Soit une trivialisation unitaire φ_α au dessus de U_α, on a $\nabla \simeq d + A_\alpha$. La forme A_α est imaginaire pure et $dA_\alpha = -2i\pi\omega$. Écrivons dans des coordonnées locales :

$$A_\alpha = \sum\big(a_j dz_j - \bar{a}_j d\bar{z}_j\big) + \sum\big(b_{jk}z_j + b'_{jk}\bar{z}_j\big)dz_k - \sum\big(\bar{b}'_{jk}z_j + \bar{b}_{jk}\bar{z}_j\big)d\bar{z}_k + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)$$

Alors

$$\begin{aligned} dA_\alpha &= \sum(-\bar{b}'_{jk} - b'_{kj})dz_j \wedge d\bar{z}_k + b_{jk}dz_j \wedge dz_k - \bar{b}_{jk}d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) \\ &= \pi \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) \end{aligned}$$

Donc $\bar{b}'_{jk} + b'_{kj} = -\pi\delta_{jk}$ et $b_{jk} = 0$. D'où

$$A_\alpha = \sum \big(a_j dz_j - \bar{a}_j d\bar{z}_j\big) + \sum b_{jk}\bar{z}_j dz_k - \bar{b}_{jk} z_j d\bar{z}_k + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) \qquad \text{avec } \bar{b}_{jk} + b_{kj} = -\pi\delta_{jk}$$

- Rappelons que si $e_\beta = g_{\alpha\beta}e_\alpha$, alors $A_\beta = A_\alpha + g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}$.
- Posons $g_{\alpha\beta} = \mathrm{e}^{-\sum(a_j z_j - \bar{a}_j\bar{z}_j)}$. Remarquons que $g_{\alpha\beta}$ est de module 1, car l'argument de l'exponentielle est imaginaire pur. Alors

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta} &= -\sum \big(a_j dz_j - \bar{a}_j d\bar{z}_j\big) \\ A_\beta &= A_\alpha - \sum \big(a_j dz_j - \bar{a}_j d\bar{z}_j\big) = \sum b_{jk}\bar{z}_j dz_k - \bar{b}_{jk} z_j d\bar{z}_k + \mathcal{O}\big(|z|^2\big) \end{aligned}$$

- On a $\overline{b_{kj} + \frac{\pi}{2}\delta_{jk}} = -\Big(b_{jk} + \frac{\pi}{2}\delta_{jk}\Big)$. Posons donc

$$g_{\beta\gamma} = \mathrm{e}^{-\sum(b_{jk}\bar{z}_j z_k) - \frac{\pi}{2}\sum|z_j|^2}$$

Un calcul facile donne $i\,\mathrm{Im}\big(\sum b_{jk}\bar{z}_j z_k\big) = \sum b_{jk}\bar{z}_j z_k + \frac{\pi}{2}\sum|z_j|^2$ et $\mathrm{Re}\big(\sum b_{jk}\bar{z}_j z_k\big) = -\frac{\pi}{2}\sum|z_j|^2$. Donc $g_{\beta\gamma}$ est de module 1 puisque l'argument de l'exponentielle est imaginaire pur.

$$\begin{aligned} g_{\beta\gamma}^{-1}dg_{\beta\gamma} &= -\sum \big(b_{jk}d\bar{z}_j z_k + b_{jk}\bar{z}_j dz_k\big) - \frac{\pi}{2}\sum \big(z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j\big) \\ &= -\sum \big(b_{kj} z_j d\bar{z}_k + b_{jk}\bar{z}_j dz_k\big) - \frac{\pi}{2}\sum \big(z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j\big) \\ &= -\sum \big(-\bar{b}_{jk} z_j d\bar{z}_k + b_{jk}\bar{z}_j dz_k\big) + \pi\sum z_j d\bar{z}_j - \frac{\pi}{2}\sum \big(z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j\big) \\ &= -\sum \big(b_{jk}\bar{z}_j dz_k - \bar{b}_{jk} z_j d\bar{z}_k\big) + \frac{\pi}{2}\sum \big(z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j\big) \end{aligned}$$

D'où

$$A_\gamma = A_\beta - \sum \big(b_{jk}\bar{z}_j dz_k - \bar{b}_{jk} z_j d\bar{z}_k\big) + \frac{\pi}{2}\sum \big(z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j\big) = \frac{\pi}{2}\sum z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j + \mathcal{O}\big(|z|^2\big)$$

- Il est à noter que les changements de trivialisations sont tous unitaires. Donc $h(e_\gamma, e_\gamma) = h(e_\alpha, e_\alpha)$.

$\square$

Remarque : si $E \to X$ est un fibré en droites complexes muni d'une connexion ∇ de courbure $\nabla^2 = -2i\pi\omega$, alors il existe au voisinage de chaque point de X une trivialisation de E dans laquelle $\nabla = -2i\pi\theta_\alpha$ avec θ_α réelle et $d\theta_\alpha = \omega$.

En effet, soit une trivialisation au-dessus de U_α dans laquelle $\nabla \simeq d + A_\alpha$ avec A_α absolument quelconque. Écrivons $A_\alpha = -2i\pi\rho_\alpha$ (donc $d\rho_\alpha = \omega$). Ayant pris le soin de choisir U_α contractile, le fait que $d\omega = 0$ assure que $\omega = d\theta_\alpha$ sur U_α avec θ_α réelle. Ainsi $d(\rho_\alpha - \theta_\alpha) = 0 \Rightarrow \rho_\alpha - \theta_\alpha = df_\alpha$ avec $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, \mathbb{C})$. Posons alors $g = \mathrm{e}^{2i\pi f_\alpha}$: $g^{-1}dg = 2i\pi df_\alpha$, donc $-2i\pi\theta_\alpha = -2i\pi\rho_\alpha + g^{-1}dg$. Donc g fournit le changement de trivialisation désiré.

En particulier, le résultat de la propriété précédente est encore vrai sous l'hypothèse de la remarque, puisque dans la preuve on n'utilise pas h (sauf pour avoir θ_α réelle au départ).

Bibliographie

[BGM71] BERGER, GAUDUCHON & MAZET — *Le spectre d'une variété riemannienne* — Lectures Notes in Math. 194, Springer (1971).

[Bis87] BISMUT, J.-M. — *Demailly's Asymptotic Morse Inequalities: a heat equation proof* — J. Funct. Anal. 72, 263-278 (1987).

[Bou90] BOUCHE, T. — *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif* — Ann. Inst. Fourier 40, No 1, 117-130 (1990).

[Dem83] DEMAILLY, J.-P. — *Sur l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne* — Séminaire P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda (Analyse), 1983-84. Lectures Notes in Math., Springer-Verlag.

[Dem85] DEMAILLY, J.-P. — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie* — Ann. Inst. Fourier, Grenoble 35, No.4, 189-229 (1985).

[Dem97] DEMAILLY, J.-P. — *Complex Analytic and Algebraic Geometry* — *http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.ps.gz*

[Don89] DONALDSON, S.K. — *Part 1 : Four-manifolds and Algebraic Surfaces* — in *Geometry of Low-dimensional Manifolds: 1.* Proceedings of the Durham Symposium, July 1989. Edited by S.K. Donaldson and C.B. Thomas. London Mathematical Society, Lecture Note Series 150, Cambridge Universsity Press (1990).

[Don96] DONALDSON, S.K. — *Symplectic Submanifolds and Almost-complex Geometry* — J. Diff. Geom. 44 (1996).

[Dui96] DUISTERMAAT, J.J. — *Fourier Integral Operators* — Progress in mathematics, vol. 130. Birkhäuser (1996).

[EG97] EGOROV & SCHULZE — *Pseudo-differential Operators, Singularities, Applications* — Operator Theory Advances and Applications, 093. Birkhauser (1997).

[Gau77] GAUDUCHON, P. — *Le théorème de l'excentricité nulle* — C.R.A.S., A, t.285 (1997) 387-390.

[GH78] GRIFFITHS & HARRIS — *Principles of Algebraic Geometry* — John Wiley & Sons, Inc. (1978).

[Ho76] HORMANDER, L. — *Linear Partial Differential Operators* — Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung, Band 116. Springer, 4ème édition (1976).

[Kat80] KATO, T. — *Perturbation Theory for Linear Operators* — Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 132. Springer-Verlag (1980).

[Kob87] KOBAYASHI — *Differential Geometry of Complex Vector Bundles* — Publications of the mathematical society of Japan 15 (Kanô Memorial Lectures 5). Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press (1987).

[KN69] KOBAYASHI & NOMIZU — *Foundations of Differential Geometry*, Vol I and II — John Wiley & Sons (1969).

[Lae98] LAENG, L. — *Introduction à la géométrie symplectique* — Le Journal de maths des élèves de l'École normale supérieure de Lyon. Volume 1, numéro 4 (octobre 1998). *http://www.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num4/_JME4.pdf*

[Leb] LEBEAU, G. — *Théorie des distributions et analyse de Fourier* — Département de Mathématiques de l'École Polytechnique, Palaiseau, France.

[MS95] MCDUFF, D. & SALAMON, D. — *Introduction to Symplectic Topology* — Oxford University Press (1995).

[RS80] REED, M. & SIMON, B. — *Methods of Modern Mathemathical Physics. I. Functional Analysis* — Academic Press (1980).

[SZ02] SHIFFMAN, B. & ZELDITCH, S. — *Asymptotics of Almost Holomorphic Sections of Ample Line Bundles on Symplectic Manifolds* — J. reine angew. Math. 544 (2002), 181-222.

[Wa77] WALLACH, N.R. — *Symplectic Geometry and Fourier Analysis* — Lie Groups: History, Frontiers and Applications. Vol. V. Brookline, Mass.: Math. Sci. Press. XVII (1977).

[Wei52] WEIL, A. — *Sur les théorèmes de de Rham* — Comm. Math. Helv. 26 (1952), 119-145.

[Wel89] WELLS, R.O. — *Differential Analysis on Complex Manifolds* — Graduate Texts in Mathematics n. 65, Springer-Verlag, 2nd edition (1989).

[Woo92] WOODHOUSE — *Geometric Quantization* — Clarendon Press, Oxford (1992).