Je voudrais tout d'abord exprimer mes remerciements et ma gratitude à mon directeur Siegmund Kosarew pour son soutien et ses encouragements tout le long de ce travail. Sa disponibilité et son expérience m'ont beaucoup aidé à améliorer et corriger ce texte.

Gerd Dethloff et Hubert Flenner me font grand honneur d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse, je les remercie profondément pour leur patience et le temps qui ont consacré pour lire ce travail, qu'ils trouvent ici ma profonde reconnaissance et gratitude.

Je remercie également Jean-Pierre Demailly et Mikhail Zaidenberg de participer au Jury, leur présence me fait grand honneur, je leur en suis reconnaissant.

Enfin, je tiens à remercier mon père, ma mère ainsi que toute ma famille pour leur amour et leur soutien malgré les distances.

Table des matières

Introduction-Résumé

Résumé

Le but de ce travail est l'étude des espaces des modules dans le cadre de la géométrie hyperbolique complexe. On a établi l'existence de *l'espace des modules des espaces complexes compacts hyperboliques* en considérant des déformations localement triviales et des déformations équisingulières à singularités isolées, ainsi que *l'espace des modules des variétés hyperboliquement plongées*.

L'espace des modules des variétés compactes hyperboliques a été prouvé par Brody [7] et Wright[67].

On donne une preuve alternative dans le cas des variétés en utilisant essentiellement un critère dans un travail de Fujiki [19] pour démontrer qu'un sous-ensemble analytique dans l'espace de Douady relatif soit propre sur la base.

Fujiki [19] l'utilise pour prouver l'existence de l'espace des modules des variétés kählériennes compactes polarisées.

Chacun de nos espaces hyperboliques est "polarisé" par une métrique de Finsler qui est la métrique de Kobayashi-Royden, elle est intrinsèque à la structure complexe de l'espace.

On utilise un critère très général pour prouver la représentabilité par un espace de module grossier des foncteurs analytiques. Ce critère est dû à Schumacher [56], Fujiki [19] voir aussi Kosarew-Okonek [40] pour une généralisation de ce critère pour des familles relatives.

Ce critère a été utilisé par plusieurs auteurs pour démontrer l'existence de divers espaces des modules par exemple Narasimhan-Simha [47] pour démontrer l'existence de l'espace des modules des variétés à fibré canonique ample mais bien sûr sans le mentionner explicitement, aussi par Schumacher [55] pour l'espace de modules des variétés kählériennes polarisées et récemment pour les "Framed Manifolds" [57].

L'espace des modules des espaces complexes compacts hyperboliques

Pour passer des variétés aux espaces complexes plusieurs définitions devraient être

modifiées en particulier la définition de la métrique de Royden K_X qui est définie sur le fibré tangent. Dans le cas des espaces complexes, elle est définie seulement sur le cône tangent qui est réduit à zéro pour certaines singularités.

Venturini[65] a définit une famille de métriques $(K_X^k)_{k\geq 1}$ de Kobayashi-Royden en utilisant l'espace des jets et il a prouvé que d_X la distance de Kobayashi est la forme intégrée des cette famille de métriques. On donne un critère infinitésimal d'hyperbolicité en utilisant ces métriques semblable à celui donné par Royden. Par conséquent, on montre que la propriété de Landau caractérise aussi l'hyperbolicité dans le cas des espaces complexes et non seulement dans le cas des variétés [25] ou des espaces complexes à singularités isolées [14].

Proposition 0.0.1 *Soit X un espace complexe.*
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *X est hyperbolique*
2. *X vérifie la propriété de Landau i.e. pour tout $p \in X$, il existe W un voisinage de p relativement compact et $R > 0$ tel que :*

$$\sup \{|f'(0)| \ f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X) \ \ et \ \ f(0) \in W\} \leq R$$

Maintenant on passe aux questions de régularité de la métrique de Kobayashi-Royden, la semi continuité inférieure de K_X est assurée (resp. à travers une déformation) dès que X est compact hyperbolique (resp. à travers une déformation d'espace complexe compact hyperbolique).

K_X est semi-continue supérieurement en dehors des lieux singuliers et on montre que sous l'hypothèse de l'existence d'une *résolution simultanée* des singularités ces métriques restent semi-continues supérieurement à travers cette déformation équisingulière.

Le critère de représentabilité de Schumacher utilise la théorie de la déformation dont on fera un rappel dans le chapitre III, il repose sur les deux conditions suivantes :

1. Chaque objet possède une déformation semi-universelle.
2. Soient $\mathfrak{X}/S$ et $\mathfrak{Y}/S$ deux familles paramétrées alors l'application naturelle projection
$$(**) \quad p : \mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S \quad \textit{est propre}.$$
où $\mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \cup_{s\in S}\mathrm{Isom}(X_s, Y_s)$ comme espace topologique.

Dans le cas des espaces complexes on sait que :

1. Tout espace complexe compact possède une déformation semi-universelle, donc le premier point est vérifié.

2. Pour le deuxième point, on montre qu'on a :

$$p : \mathrm{Bime}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S \quad \text{est propre}$$

Ce deuxième point est l'analogue de (**) pour les espaces complexes puisque toute application *méromorphe* d'une variété complexe dans un espace hyperbolique compact est en réalité *holomorphe*.

Kodama [39] a construit l'exemple d'un espace complexe X, hyperbolique, complet, normal et irréductible tel que $\mathrm{Isom}(X) \neq \mathrm{Bime}(X)$.

Le but c'est de chercher une famille adéquate qui vérifie le critère.

On considère tout d'abord le cas des déformations localement triviales. Grâce à un théorème du à Kosarew-Flenner[17], on sait que tout espace complexe compact possède une déformation localement triviale semi-universelle ensuite on montre que pour tout espace complexe M et toute famille d'espaces compactes hyperboliques $\mathfrak{Y}/S$, on a :

$$\cup_{s \in S} \mathrm{Hol}(M, Y_s) \quad \text{est compact pour } S \text{ un voisinage compact}$$

Ceci nous permet de démontrer le 1er théorème principal :

Théorème 0.0.2 (1er Théorème Principal) *Il existe un espace de modules des espaces complexes compacts hyperboliques qui représente comme espace de module grossier le foncteur des déformations localement triviales.*

Dans la suite on cherche une condition plus faible pour démontrer (**) tout en conservant le premier point.

Pour répondre à la question (**) on considère les approches suivantes :

(i) En regardant de près la démonstration de Brody [7] pour prouver que p est propre dans le cas des variétés, on constate qu'on obtient seulement une application holomorphe limite f_0 définie sur $X_{s_{0_{reg}}}$, la partie régulière de la fibre distinguée, ceci nous conduit naturellement à étudier le problème de prolongement suivant :

Sous quelles conditions une application holomorphe $f : X_{reg} \longrightarrow Y$ se prolonge sur tout X holomorphiquement ? où X est un espace complexe et Y est compact hyperbolique.

On sait à l'aide d'un exemple (voir Chapitre 2 section 2.2 : Obstructions topologiques aux théorèmes de prolongement) qu'un tel prolongement n'existe pas toujours et on donne des conditions pour que f soit prolongeable.

L'existence de prolongement dépend de manière essentielle de la nature des singularités de l'espace de départ.

Kiernan[31] a étudié le problème où X est une variété et A un sous ensemble analytique à singularités normales, dans ce cas f est prolongeable sur X mais dans le cas où X est un espace complexe, il a donné une condition sur la résolution des singularités (dont en général on n'a pas une expression explicite) et sur d_{X-A} pour prouver l'existence d'un prolongement holomorphe de f.

On étudie ensuite les obstructions topologiques aux théorèmes de prolongement. En utilisant un lemme d'Urata [63] et Horst[27], on donne une condition nécessaire et suffisante sur le nombre de composantes connexes pour que f soit prolongeable et on montre que si f n'est pas prolongeable alors aucun élément de la composante connexe contenant f n'est prolongeable.

Théorème 0.0.3 *Soit $f : X_{reg} \longrightarrow Y$ une application holomorphe, x un point singulier de X et $\pi : \tilde{X} \longrightarrow V(x)$ une résolution des singularités.*

f se prolonge holomorphiquement sur X si et seulement si $\mathrm{Hol}(V(x), Y)$ *et* $\mathrm{Hol}(\tilde{X}, Y)$ *ont le même nombre de composante connexes.*

Cette approche étudie le prolongement *d'une application holomorphe quelconque* de X_{reg} dans Y mais notre application est assez particulière c'est une limite d'applications qui sont définies sur les fibres proches.

(ii) le cas équisingulier i.e. il existe *une résolution simultanée des singularités*, cette condition d'équisingularité est satisfaite dans le cas par exemple des déformations localement triviales.

En utilisant le théorème de factorisation faible des applications birationelles, on montre que le foncteur résolution simultanée des singularités ne dépend pas de la résolution choisie.

Théorème 0.0.4 (2ème Théorème Principal) *Il existe un espace de modules grossier pour les espaces complexes compacts hyperboliques maximales à singularités isolées qui représente comme espace de module grossier le foncteur des déformations équisingulières.*

On généralise la caractérisation topologique de l'hyperbolicité du à Abate [1] aux espaces hyperboliquement plongés dans la cas où l'espace considéré n'est pas d'adhérence compact.

Théorème 0.0.5 *Y est hyperboliquement plongé dans Z si et seulement si pour tout X un espace complexe, la famille* $\mathrm{Hol}(X, Y)$ *est relativement compacte dans* $\mathcal{C}(X, \overline{Y}^+)$

Ici $\overline{Y}$ désigne l'adhérence de Y dans Z et $\overline{Y}^+$ est le compactifié d'Alexandroff.

On définit une hyperbolicité relative en s'inspirant de la caractérisation topologique de l'hyperbolicité par Abate [1] et le travail d'Ohgai [52]. On montre que si les fibres sont compactes alors cette notion coïncide avec la définition d'un espace fibré hyperbolique voir Noguchi [48]. i.e. toutes les fibres sont hyperboliques.

Espace des modules des variétés hyperboliquement plongées

Douady a établi l'existence de l'espace des modules des applications holomorphes d'un espace complexe *compact* X dans un espace complexe quelconque Y i.e. l'espace $\mathrm{Hol}(X, Y)$ et qu'il porte une structure analytique sous jacente de l'espace de Douady du produit (par le graphe) et que cet espace porte une structure analytique universelle.

Si Y est *compact hyperbolique* alors $\mathrm{Hol}(X, Y)$ est un espace complexe *compact*, ce dernier résultat nous permet de démontrer certain résultats de finitude en appliquant le principe du maximum, voir Urata [63].

L'espace des modules des applications holomorphes de $X - A$ dans un espace hyperboliquement plongé i.e. $\mathrm{Hol}(X - A, Y)$ où Y est hyperboliquement plongé dans Z, X étant une variété compacte et A est un diviseur dans X à croisements normaux a été étudié par Noguchi [50], il a prouvé que c'est un ouvert de Zariski dans un sous espace analytique compact de $\mathrm{Hol}(X, Z)$ et que l'application évaluation de $X - A$ dans Y se prolonge en une application holomorphe de $X \times \overline{\mathrm{Hol}(X - A, Y)}$ dans Z, l'adhérence considérée ici est dans $\mathrm{Hol}(X, Z)$.

Cet espace peut-être considéré comme une version *"non compacte"* de l'espace des modules des applications holomorphes établie par Douady.

On construit l'espace des modules des variétés hyperboliquement plongées, cet espace est une version *"non compacte"* de l'espace des modules des variétés hyperboliques compactes établie par Brody et Wright.

Les objets des déformations sont les triplets $(X, \overline{X}, D)$ où $\overline{X}$ est une variété compacte et D est un diviseur à croisements normaux simples tels que $X = \overline{X} \setminus D$ soit hyperboliquement plongé dans $\overline{X}$.

Dans ce cadre, la distance de Kobayashi relative joue un rôle essentiel ainsi que la variante du théorème de Brody appliquée aux espaces hyperboliquement plongés du à Green [23], Urata [64] et Zaidenberg [68].

la stratégie utilise toujours le même critère, l'existence *d'une déformation semi-universelle logarithmique* est du à Kawamata [30] où $T_X(\log D)$ qui est le faisceau des automorphismes infinitésimaux qui envoient D sur lui même, joue le même rôle que le faisceau tangent T_X dans la théorie des déformations des variétés.

Le deuxième point du critère est une conséquence du théorème de stabilité des espaces hyperboliquement plongés et la pseudo-distance relative de Kobayashi qui simplifie beaucoup les techniques des preuves.

Théorème 0.0.6 (Troisième théorème principal) *Il existe un espaces des modules des variétés compactifiables hyperboliquement plongées*

Résumé du texte

Le texte est réparti comme suit :

Dans le premier chapitre, on rappelle la définition et les propriétés des espaces hyperboliques, hyperboliquement plongés ainsi que le théorème de Brody, les théorèmes de prolongement du type grand théorème de Picard du à Kiernan et Kwack.

Dans le deuxième chapitre, on démontre quelques résultats intermédiaires sur la métrique de Royden-Kobayashi et son comportement à travers les déformations équisingulières, ensuite je discute la propriété de Landau-Schottky et enfin les obstructions topologiques aux théorèmes de prolongement.

Dans le troisième chapitre, on rappelle quelques notions sur la théorie des déformations et on énonce le critère de représentabilité des foncteurs analytiques par un espace de module grossier, en étudiant le cas localement trivial, ensuite équisingulier et que ce dernier *ne dépend pas de la résolution des singularités choisie.*

Dans le dernier chapitre, on construit l'espace des modules des variétés hyperboliquement plongées.

Chapitre I

Préliminaires

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Hyperbolicité-Propriétés

Dans cette partie, on rappelle la définition de l'hyperbolicité au sens de Kobayashi ainsi que quelques théorèmes fondamentaux qui seront utiles par la suite. Pour ces notions et les théorèmes qui sont dans cette section, on se réfère à Kobayashi [33, 34], Lang [44, 45] et Noguchi-Ochiai [51].

Soit X un espace complexe et p et q deux points de X.

On appelle *une chaîne de Kobayashi* reliant les deux points p et q, une suite $(p_i, f_i)_{i=0}^{i=n}$ où $p_i \in \Delta$, Δ dénote le disque unité et $f_i : \Delta \longrightarrow X$ une séquence d'applications holomorphes vérifiant :

$$f_0(0) = p \ \ , \ \ f_i(p_i) = f_{i+1}(0) \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1 \ \text{ et } \ f_n(p_n) = q$$

Si X est connexe, il est facile de prouver qu'il existe une chaîne de Kobayashi reliant p et q voir Lang [45].

On note par d_Δ la distance de Poincaré du disque unité. On associe à chaque chaîne α de Kobayashi sa longueur $l(\alpha)$ par :

$$l(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} d_\Delta(0, p_i)$$

On définit d_X une pseudo-distance appelée *pseudo-distance de Kobayashi* par :

$$d_X(p,q) = \inf l(\alpha) \ \text{ où } \alpha \ \text{ est une chaîne de Kobayashi reliant } p \text{ et } q$$

Exemples 1.1.1

1. *Pour $X = \Delta$, la pseudo-distance de Kobayashi est en fait une distance et coïncide avec la distance de Poincaré du disque unité*
2. *Pour $X = \mathbb{C}$, on a d_X=0*
3. *Pour $X = \mathbb{C}^*$, on a $d_X = 0$*

Directement à partir de la définition on a :

Proposition 1.1.2 *Soient X et Y deux espaces complexes et $f : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe alors f est décroissante de d_Y à d_X i.e.*

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y) \ \text{pour tout}\ x, y \in X$$

De plus d_X est la plus grande pseudo-distance vérifiant cette propriété de décroissance pour $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$

Proposition 1.1.3 *d_X est une pseudo-distance continue.*

Idée de la preuve

Pour la preuve, on distingue le cas d'une variété et on utilise que la distance du polydisque est continue ensuite en utilisant une résolution des singularités, il est facile de conclure que pour X un espace complexe, d_X est continue.

Définition 1.1.4 *Soit X un espace complexe connexe.*

1. *On dit que X est hyperbolique si d_X est une distance i.e. pour tout $p, q \in X$ deux points distincts on a $d_X(p, q) > 0$.*
2. *X est dit hyperbolique complet si X est hyperbolique et (X, d_X) est complet.*

Des exemples triviaux d'espaces hyperboliques sont les disques les polydisques et plus généralement les domaines bornés de $\mathbb{C}^n$.

Proposition 1.1.5

1. *Tout sous espace d'un espace hyperbolique est hyperbolique.*
2. *Si X et Y sont deux espaces complexes hyperboliques alors $X \times Y$ est hyperbolique et on a :*

$$d_{X\times Y} = \max(d_X, d_Y)$$

On en déduit que tout espace complexe est évidement localement hyperbolique comme sous espace d'un polydisque qui est hyperbolique donc la propriété de l'hyperbolicité est de nature globale.

Proposition 1.1.6 *Soit X un espace complexe hyperbolique alors d_X est un distance qui définit la topologie de X*

Ce résultat a été prouvé par Barth[4].

La propriété de l'hyperbolicité est invariante par biholomorphisme et même par des revêtements non ramifiés :

Théorème 1.1.7 *Soient X un espace complexe et $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement de X.*
Alors :

1. *Si $p, q \in X$ et $\pi(\tilde{p}) = p$ on a :*

$$d_X(p,q) = \inf \ d_{\tilde{X}}(\tilde{p}, \tilde{q})$$

où l'infimum est pris sur $\tilde{q} \in \tilde{X}$ tel que $\pi(\tilde{q}) = q$

2. *$\tilde{X}$ est hyperbolique (complet) si et seulement si X est hyperbolique (complet)*

Exemples 1.1.8

1. *Toute surface de Riemann (lisse) de genre $g \geq 2$ est hyperbolique complet de plus par le théorème d'uniformisation de Riemann, on déduit que toute surface de Riemann de genre g est hyperbolique si et seulement si $g \geq 2$.*
2. *$X = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ est hyperbolique complet.*

Pour les applications holomorphes quelconques, on a ce résultat qui sera utilisé ultérieurement :

Proposition 1.1.9 *Soient X et Y deux espaces complexes et $f : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe.*

On suppose que Y est hyperbolique et que pour tout $y \in Y$ il existe U un voisinage ouvert de y tel que $Y_U = f^{-1}(U)$ est hyperbolique (complet) alors X est hyperbolique (complet).

Mais pour les applications finies, propres on a :

Proposition 1.1.10 *Soit $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ une application holomorphe finie et propre.*
Si X est hyperbolique (complet) alors $\tilde{X}$ l'est aussi.

On en déduit que :

Corollaire 1.1.11 *La normalisation d'un espace hyperbolique (complet) est hyperbolique (complet).*

1.2 Hyperbolicité au sens de Brody-Applications

Dans cette section, on rappelle le théorème d'hyperbolicité de Brody ainsi que quelques applications.

Définition 1.2.1 *Soit X un espace complexe.*

On dit que X est hyperbolique au sens de Brody si toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$ est constante, on dit aussi que X ne possède aucune droite complexe.

Cette propriété est plus faible que l'hyperbolicité puisque si X est hyperbolique alors toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$ est constante car d_X est une distance et que $d_{\mathbb{C}} = 0$.

Dans le cas où X est compact, ces deux notions d'hyperbolicité coïncident par ce théorème de Brody :

Théorème 1.2.2 (Brody [7]) *X est hyperbolique si et seulement si X ne possède aucune droite complexe.*

Ce théorème a été généralisé par Urata [64], Zaidenberg [68] aux espaces hyperboliquement plongés. Voir Chapitre IV pour les énoncés précis de ce théorème.

Remarque 1.2.3 La condition de compacité est essentielle dans le théorème de Brody. Voir l'exemple donné par D.Eisenman et L.Taylor :

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2,\ |z| < 1 \text{ et } |zw| < 1\} - \{(0, w),\ |w| \geq 1\}$$

X n'est pas hyperbolique et ne possède aucune droite complexe.

La démonstration du théorème 1.2.2 utilise un résultat connu sous le nom du lemme de paramétrisation de Brody.

Avant de donner l'énoncé de ce lemme fixons quelques notations.

Définition 1.2.4 *Une métrique de Finsler H sur un espace complexe X est une fonction positif H définie sur l'espace tangent TX*

$H : TX \longrightarrow R^+$ vérifiant :

1. *$H(\xi) = 0$ si et seulement si $\xi = 0$*
2. *$H(\alpha\xi) = |\alpha| H(\xi)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\xi \in TX$*

Quand il n'y a pas d'ambiguïté on note pour $\xi \in TX$ $|\xi|$ au lieu de $H(\xi)$

Le disque Δ_r possède une métrique : métrique de Poincaré dont sa forme intégrée est la distance de Poincaré(=distance de Kobayashi du disque), on note cette métrique par h_r ou par K_{Δ_r} (métrique de Kobayashi-Royden du disque de rayon r).

$$h_r(z, \xi) = \frac{r|\xi|}{r^2 - |z|^2}$$

Lemme 1.2.5 (Lemme de paramétrisation de Brody [7])
Soient X un espace complexe muni d'une métrique H et $f : \Delta_r \longrightarrow X$ une application holomorphe, on définit

$$u_f = \frac{f^*H}{rh_r} \quad sur \Delta_r$$

si $u_f(0) > c$ alors il existe $g \in \mathrm{Hol}(\Delta_r, X)$ telle que :
(1) u_g est borné par c et atteint son maximum c en 0
(2) $g = f \circ \mu_r \circ \phi$ où $\phi \in \mathrm{Aut}(\Delta_r)$ et μ_r est l'homothétie de rayon r' avec $0 < r' < 1$

De manière analogue à la preuve du théorème de Brody et en utilisant le lemme plus haut, Noguchi-Ochiai [51] montrent que :

Proposition 1.2.6 *Soit Y un sous espace compact d'un espace complexe X alors l'une des deux assertions est vérifiée :*
(1) il existe un voisinage de Y qui est hyperbolique (il est même hyperboliquement plongé dans X)
(2) il existe $f : \mathbb{C} \longrightarrow Y$ une droite complexe telle que $|f'(z)| \leq 1$ et $|f'(0)| = 1$.

Pour une version plus forte de cette proposition voir Lang [45], mais ce résultat est suffisant pour la suite.

Corollaire 1.2.7 *Soit $f : X \longrightarrow S$ une application holomorphe propre.*

1. *Si X_{s_0} est hyperbolique alors il existe un voisinage W de s_0 tel que X_W est hyperbolique, en particulier on aura X_s est hyperbolique pour tout $s \in W$.*
2. *Si S est hyperbolique et X_s est hyperbolique pour tout $s \in W$ alors X est hyperbolique.*

DÉMONSTRATION:

1. Si X_{s_0} est hyperbolique, grâce à la proposition 1.2.6, on déduit qu'il existe un voisinage V de X_{s_0} qui est hyperbolique. Comme f est propre, il existe un voisinage W de s_0 tel que $f^{-1}(W) \subset V$ d'où X_W est hyperbolique et toutes les fibres X_s pour $s \in W$ sont hyperboliques.
2. Ceci découle de (1) et la proposition 1.9

□

1.3 Espaces hyperboliquement plongés

Soient Z un espace complexe et Y un sous espace d'adhérence compacte dans Z.

Définition 1.3.1

1. *$p \in \overline{Y}$ est un point d'hyperbolicité si pour tout U un voisinage de p, il existe un voisinage V de p tel que $\overline{V} \subset U$ et $d_Y(\overline{V} \cap Y, Y - U) > 0$*
2. *Y est hyperboliquement plongé dans Z si pour tout p et q deux points distincts dans $\overline{Y}$, il existe U_p et U_q voisinages respectivement de p et de q tels que*

$$d_Y(U_p \cap Y, U_q \cap Y) > 0$$

Il est facile de prouver que :

Proposition 1.3.2 *Y est hyperboliquement plongé dans Z si et seulement si tout point p de $\overline{Y}$ est un point d'hyperbolicité.*

Cette notion a été introduite par Kobayashi pour généraliser le grand théorème de Picard : *Toute application holomorphe $f : \Delta^* \longrightarrow P^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$ se prolonge en $\tilde{f} : \Delta \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$ holomorphe.*

Dans les définitions précédentes, on n'utilise pas le fait que Y est relativement compact dans Z mais dans la pratique, Y est souvent un ouvert d'adhérence compact.

En utilisant des métriques sur l'espace Z, on a le théorème suivant voir Kiernan [32], Zaidenberg [68]

Théorème 1.3.3 *Soit Y un sous espace relativement compact d'un espace complexe Z. On a les équivalences suivantes :*

1. *Y est hyperboliquement plongé dans Z.*
2. *Soient p et q deux points dans $\overline{Y}$ et (p_n), (q_n) deux suites dans Y telles que $p_n \longrightarrow p$ $q_n \longrightarrow q$, si $d_Y(p_n, q_n) \longrightarrow 0$ alors $p = q$.*
3. *$\mathrm{Hol}(\Delta, Y)$ est relativement compact dans $\mathrm{Hol}(\Delta, Z)$.*
4. *Il existe H une métrique sur Z telle que $f^*(H) \leq K_\Delta$ pour tout $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, Y)$.*

DÉMONSTRATION:

$(1 \Rightarrow 2)$ Soient (p_n) et (q_n) deux suites dans Y qui convergent respectivement vers p et q deux points dans $\overline{Y}$. Si $p \neq q$, il existe par hypothèse U_p et U_q voisinages respectifs de p et de q tels que $d_Y(p_n, q_n) \geq c > 0$ avec $c = d_Y(U_p \cap Y, U_q \cap Y)$

$(2 \Rightarrow 3)$ Il suffit de prouver que la famille $\mathrm{Hol}(\Delta, Y)$ est *équicontinue*. Sinon il existe $p \in \overline{Y}$, U un voisinage de p, $(f_n)_n$ une suite d'applications holomorphes de Δ dans Y et α_n une suite dans Δ convergente vers 0 tels que :

$$f_n(0) \longrightarrow 0 \ \text{ et } \ f_n(\alpha_n) \notin U$$

or $d_Y(f_n(\alpha_n), f_n(0)) \leq d_\Delta(\alpha_n, 0) \longrightarrow 0$

(3 $\Rightarrow$ 4) Sinon il existe H une métrique sur Z et (f_n) une suite dans $\mathrm{Hol}(\Delta, Y)$ telles que $|f_n^{'}(0)| \longrightarrow \infty$. De la suite (f_n) on peut extraire une sous suite convergente vers $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, Z)$ donc $|f_n^{'}(0)| \longrightarrow |f'(0)|$.

(4 $\Rightarrow$ 5) Il existe une métrique H sur Z telle que $d_H \leq d_Y$ donc Y est hyperboliquement plongé dans Z.

□

Ce théorème montre que la notion de *plongement hyperbolique* est plus forte que le prolongement du type grand théorème de Picard

Théorème 1.3.4 *Soit Y un sous espace relativement compact dans Z.*

Y est hyperboliquement plongé dans Z si et seulement si pour tout $f_n \in \mathrm{Hol}(\Delta^*, Y)$, z_n une suite dans Δ^* avec $z_n \to 0$ telles que $f_n(z_n) \to p \in \overline{Y}$ alors $f_n(z_n') \to p\ \forall z_n' \to 0$ i.e. (Pour tout voisinage U de p, il existe $0 < r < 1$ tel que $f_n(\Delta_r^*) \subset U$)

Démonstration:

Condition nécessaire : ce résultat est du à Joseph et Kwack voir Théorème 2.1 dans [43].

Condition suffisante : on suppose que Y n'est pas hyperboliquement plongé dans Z, par négation de la propriété 4 du théorème 1.3.3, il existe $f_n : \Delta \longrightarrow Y$ holomorphe et $(z_n\ \zeta_n) \in T\Delta$ tels que $K_\Delta(z_n, \zeta_n) = 1$ et $|f_n'(z_n)| \to \infty$.

On peut supposer que $z_n = 0$ (il suffit de composer avec un automorphisme de Δ) et $f_n(0) \to p \in \overline{Y}$.

Soit U un voisinage de p relativement compact hyperbolique, il existe $0 < r < 1$ tel que $f_n(\Delta_r) \subset U$ donc la suite f_n converge uniformément vers f sur un voisinage de 0 par conséquent $|f_n'(0)|$ sera bornée ce qui est absurde.

□

La notion d'être hyperboliquement plongé est intimement liée à la notion de famille uniformément normale ou (*s-normale* selon la terminologie de Zaidenberg voir [69]). Ces familles se comportent comme si l'espace d'arrivée est hyperbolique et elles ont des propriétés similaires aux espaces hyperboliques.

On a aussi des théorèmes d'extensions et de prolongement voir Funahashi [21], Joseph et Kwack [43].

1.4 Les Théorèmes de Prolongement

Ce genre de théorème est une généralisation en dimension supérieure du grand théorème de Picard. On se place dans les conditions suivantes : X une *variété* , A un sous ensemble analytique de X à croisements normaux et Y est hyperboliquement plongé dans Z. On étudie le prolongement analytique des applications holomorphes qui sont définies de $X - A$ dans Y.

On résume les résultats connus dans le théorème suivant voir Kwack [41], Kiernan [32] et Campbell-Ogawa[9] :

Théorème 1.4.1 *Soient X une variété complexe, A un sous ensemble analytique de X, Y est hyperboliquement plongé dans Z et $f : X - A \longrightarrow Y$ une application holomorphe.*

f se prolonge en $\tilde{f} : X \longrightarrow Z$ dans les cas suivants :

1. codim $A \geq 2$ *et donc* $d_{X-A} = d_X$
2. Sing(A) *est à croisement normales i.e. localement* $X - A = \Delta^{*k} \times \Delta^{n-k}$

Corollaire 1.4.2 *Si Y est compact hyperbolique alors f se prolonge en $\tilde{f}$ (sans condition sur les singularités de A)*

Démonstration:

f se prolonge en $\tilde{f}_1 : X - \mathrm{Sing}(A) \longrightarrow Y$ (car Reg(A) sont à croisement normaux évidement) de même $\tilde{f}_1$ se prolonge en $\tilde{f}_2 : X - S^2(A) \longrightarrow Y$ et on répète ce raisonnement jusqu'à $\tilde{f}_{n+1} : X \longrightarrow Y$ qui est le prolongement cherché. □

Remarque 1.4.3 La condition que A soit à croisement normaux est essentielle dans le théorème précédent.

Exemples 1.4.4 *On considère $X = \Delta \times \Delta$ et $A = (0 \times \Delta) \cup (\Delta \times 0) \cup (Diag(X))$*

$$f : X \setminus A \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \text{ et } f(z, w) = \frac{z}{w}$$

f ne se prolonge pas même en une application continue en 0 *dans* $P^1(\mathbb{C})$

On donne la définition d'une application méromorphe due à Remmert

Définition 1.4.5 *Une application méromorphe f d'un espace complexe X dans Y, un espace complexe aussi, est :*

(i) Pour tout $x \in X$, $f(x)$ est un compact non vide de Y.

(ii) Le graphe $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y | y \in f(x)\}$ de f est un sous espace complexe irréductible de $X \times Y$ avec $\dim \Gamma_f = \dim X$.

(iii) il existe un ouvert X' dense dans X tel que $f(x)$ est réduit à un singleton pour tout $x \in X'$ et codim $X' \geq 2$

Inversement tout sous espace complexe irréductible Γ de $X \times Y$ tel que la première projection $p_1 : \Gamma \longrightarrow X$ est une *modification propre* définit une application méromorphe f. Si on dénote par p_2 la deuxième projection sur Y, $f = pr_2 \circ pr_1^{-1}$ est l'application méromorphe recherchée et $\Gamma = \Gamma_f$.

En combinant le théorème de prolongement et de résolution des singularités, on obtient le théorème suivant voir Kiernan[31].

Théorème 1.4.6 *Soient A un sous espace d'un espace complexe X et Y est hyperboliquement plongé dans Z. Alors toute application holomorphe $f : X - A \longrightarrow Y$ se prolonge en une application méromorphe $f : X \longrightarrow Z$*

Pour que le prolongement de f soit holomorphe, il est nécessaire d'imposer d'autres conditions, il est difficile de les exprimer sans utiliser une résolution des singularités ou la pseudo-distance d_{X-A}.

Dans Kiernan [31], on trouve une condition sur la résolution des singularités pour que le prolongement soit holomorphe.

Proposition 1.4.7 *Soit A un sous espace d'un espace complexe normal X, considérons une résolution des singularités $\pi : M \longrightarrow X$, $E \subset M$ le diviseur exceptionnel et Y un sous espace relativement compact et hyperboliquement plongé dans Z.*

On suppose que pour tout couple (p, q) dans E tel que $\pi(p) = \pi(q)$ il existe deux suites p_n et q_n dans $M - E$ vérifiant $p_n \longrightarrow p$, $q_n \longrightarrow q$ et $d_{X-A}(\pi(p_n), \pi(q_n)) \longrightarrow 0$. Alors toute application holomorphe $f : X - A \longrightarrow Y$ se prolonge en une application holomorphe $f : X \longrightarrow Z$.

Chapitre II

Régularité et Déformations des Pseudo-métriques de Kobayashi-Royden

Chapitre 2

Régularité et Déformations des Pseudo-métriques de Kobayashi

2.0.1 Pseudo-métrique de Kobayashi-Royden

Pour X une variété complexe, Royden [54] a définit une pseudo-métrique K_X sur le fibré tangent vérifiant des propriétés similaires à la pseudo-distance de Kobayashi.

$$K_X(x,\xi) = \inf\left\{\frac{1}{r} \ : \ f : \Delta_r \longrightarrow X \ \text{ holomorphe telle que } \ f_*(0) = (x,\xi)\right\} \quad (x,\xi) \in TX$$

où Δ_r dénote le disque de rayon r du plan complexe.

K_X est appelée *la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden.*

Proposition 2.0.8 *Soit X une variété complexe alors on a :*

1. $K_X(0) = 0$.
2. $K_X(\alpha\xi) = |\alpha| K_X(\xi)$ *pour* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\xi \in TX$.
3. *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *une application holomorphe entre variétés, on a :* $f^*(K_Y) \leq K_X$ *et si f est biholomorphe on a l'égalité.*
4. *Si* $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ *est un revêtement alors* $f^*(K_X) = K_{\tilde{X}}$
5. *Si X est hyperbolique,* $K_X(\xi) = 0$ *donne* $\xi = 0$

Ces propriétés découlent facilement de la définition de K_X.

Royden a prouvé que si X est une variété complexe alors K_X est semi continue supérieurement, la preuve utilise ce lemme d'extension :

Lemme 2.0.9 (Royden [54]) *Soient X une variété complexe de dimension n et* $f : \Delta_R \longrightarrow X$ *une application holomorphe, telles que* $f'(0) \neq 0$.

Alors pour tout $r < R$, il existe $s < r$ et $\psi : \Delta_r \times \Delta_s^{n-1} \longrightarrow X$ *holomorphe tels que :* $\psi_{|}\Delta_r = f$ *et ψ est biholomorphe au voisinage de* 0

Il a donné un prolongement explicite de f dans le cas local i.e. X est un polydisque de $\mathbb{C}^n$, on peut prouver ce lemme dans le cas général en utilisant des résultats de Siu [60].

De plus Royden a prouvé que d_X la pseudo-distance de Kobayashi est la forme intégrée de K_X.

Soient p et q deux points de X et γ un chemin C^1 par morceaux reliant p et q. On définit la longueur de γ par :

$$L(\gamma) = \int_a^b K_X(\dot{\gamma}(t))dt$$

et une pseudo-distance d'_X par $d'_X(p,q) = \inf L(\gamma)$ où l'infimum est pris sur tous les chemins γ C^1 par morceaux reliant les deux points p et q.

Théorème 2.0.10 (Royden [54]) *Pour X une variété complexe, on a $d'_X = d_X$.*

Maintenant on s'intéresse aux cas des espaces complexes, K_X est définie seulement sur le cône tangent $\check{T}_X$

$$\check{T}_x X = \{f_*(u),\ f : \Delta \longrightarrow X \text{ holomorphe },\ u \in T_0\Delta \text{ et } f(0) = x\}$$

Si x est un point régulier, le cône tangent $\check{T}_x X$ coïncide avec l'espace tangent $T_x X$ mais aux points singuliers, $\check{T}_x X$ peut-être réduit à $\{0\}$.

Exemples 2.0.11

Considérons l'espace complexe définie par $X = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2\ z^2 = w^3\}$, 0 est un point singulier et $\check{T}_0 X = \{0\}$

Dans Duc-Thai [14], l'auteur étudie la régularité de la métrique de Royden, ensuite il montre en utilisant une résolution des singularités que K_X est semi-continue supérieurement sut TX_{reg}.

Enfin l'auteur remarque dans le cas des espaces complexes à singularités isolées qu'il suffit de définir la métrique de Royden sur le cône tangent et l'intégrale reste inchangée si on intègre seulement sur les points réguliers en considérant les chemins γ à valeurs presque partout dans les lieux réguliers ; la preuve est presque la même que celle donnée par Royden.

Une approche plus originale pour la généralisation de la métrique de Royden aux espaces complexes est due à Venturini [65]. L'auteur définit un autre domaine d'action pour la métrique de Royden en utilisant *les espaces des jets*.

On donne une caractérisation infinitésimale de l'hyperbolicité semblable à celle de Royden dans le cas des variétés complexes.

2.0.2 Approche de Venturini

Soient X un espace complexe, $x \in X$ et $k \in \mathbb{Z}^+$, on définit $\mathcal{F}^k(X)_x$: *l'espace osculateur de X en x d'ordre k* par :

$$\mathcal{F}^k(X)_x = {\mathcal{O}_X}_x{}^*/\equiv^k \text{ où } {\mathcal{O}_X}_x^* = \mathrm{mor}\left((\mathbb{C},0) \longrightarrow (X,x)\right)$$

mor désigne ici les morphismes des germes

$$\mathcal{X}_1 \equiv^k \mathcal{X}_2 \text{ ssi } \mathcal{X}_1^{(i)}(0) = \mathcal{X}_2^{(i)}(0) \ \ \forall\, 1 \leq i \leq k \ \text{ pour } \mathcal{X}_1 \,, \mathcal{X}_2 \in {\mathcal{O}_X}_x^*$$

ceci se traduit au niveau des algèbres analytiques par :

$$\mathcal{X}_{1k} = \mathcal{X}_{2k} \text{ où } \mathcal{X}_k : {\mathcal{O}_X}_x \longrightarrow {\mathcal{O}_X}_x/m^{k+1}_{{\mathcal{O}_X}_x} \longrightarrow \mathcal{O}_0/z^{k+1}\mathcal{O}_0$$

donc il existe un morphisme injectif $\mathcal{F}^k(X)_x \longrightarrow J_k(X)_x$ où

$$J_k(X)_x = \mathrm{mor}\left({\mathcal{O}_X}_x \longrightarrow \mathcal{O}_0/z^{k+1}\right) \textit{ est l'espace des k-jets de X en x}$$

Remarques 2.0.12

1. si $k = 1$, $\mathcal{F}^1(X)_x$ est un sous espace de $J_1(X)_x = \ T(X)_x$ donc on peut définir une métrique sur $\mathcal{F}^1(X)_x$ qui est la métrique sous-jacente d'une métrique hermitienne.

   En général, $\mathcal{F}^k(X)$ est un espace fibré holomorphe sur X, mais pour $k \geq 2$ il n'est pas un fibré vectoriel et il porte une topologie naturelle voir Venturini[65] p :31.
   Il existe une action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{F}^k(X)$ donnée par $\lambda.[\phi] = [\phi_\lambda]$ où $\phi_\lambda(t) = \phi(\lambda t)$.
2. Si X est une variété, le morphisme canonique entre $\mathcal{F}^k(X)_x$ et $J_k(X)_x$ est un isomorphisme.
3. Tout morphisme de germe $f : (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ définit une application au niveau des espaces osculateurs

$$f_x^* : \mathcal{F}^k(X)_x \longrightarrow \mathcal{F}^k(Y)_y \qquad f_x^*([\phi]) = [f \circ \phi]$$

Venturini définit d'une manière analogue à la pseudo-métrique de Kobayashi la famille K_X^k :

$$K_X^k : \mathcal{F}^k(X) \longrightarrow [0,+\infty[$$

$$\mathcal{X} \longmapsto \inf\left\{\frac{1}{r} \ : \ \exists\varphi : \Delta_r \longrightarrow X \ \text{ holomorphe telle que } \ [\varphi]_k = \mathcal{X}\right\}$$

Soient γ une courbe analytique et $t \in [a,b]$, il existe $\varphi_t \ \in \mathrm{mor}((\mathbb{C},0) \longrightarrow \ (X,\gamma(t))$ unique tel que $\varphi_t(s) = \gamma(t+s)$ pour tout $s \in]-\varepsilon,+\varepsilon[$, on note $j_k\gamma(t) = [\varphi_t]_k$.

Lemme 2.0.13 (Venturini [65]) *Soit γ une courbe analytique de $[a,b]$ dans X, il existe $c>0$ telle que :*

$$d_X(\gamma(t),\gamma(t')) \leq c|t-t'| \quad \forall t,t' \in [a,b]$$

$$K_X^k(\gamma(t), j_k\gamma(t)) \leq c$$

On définit :

$$L_X^k(\gamma) = \int_a^b K_X^k(\gamma(t), j_k\gamma(t))dt$$

$$L_X(\gamma) = \sup_{k\geq 1} L_X^k(\gamma) \qquad \delta^k(p,q) = \inf_\gamma L_X^k(\gamma) \qquad \delta'_X(p,q) = \inf_\gamma L_X(\gamma)$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes analytiques par morceaux dans X joignant p et q.

$L_X(\gamma)$ est bien définie puisque la suite $k \longrightarrow L_X^k(\gamma)$ est bornée et croissante.

Théorème 2.0.14 (Venturini [65]) *Soit X un espace complexe alors on a :*

1. *$\delta'_X = d_X$ où d_X est la distance de Kobayashi.*
2. *Si X est compact, il existe k tel que $\delta_X^k = \delta'_X = d_X$.*
3. *Si X est une variété ou X est à singularités isolées, on a $\delta_X^1 = \delta'_X = d_X$.*

La base de la démonstration est le *lemme 2.0.16* qui donne une majoration entre d_X la pseudo-distance de Kobayashi et d_H la distance induite d'une métrique H définie sur X. Ce lemme est l'analogue de celui connu pour les variétés :

Lemme 2.0.15 *Soient X une variété et H une métrique sur X alors pour tout W relativement compact dans X, il existe $C_W>0$ telle que $d_X \leq C_W d_H$ sur W*

Lemme 2.0.16 (Venturini [65]) *Soit X un espace complexe, $U \subset X$ ouvert, $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ une application holomorphe injective et $p \in X$, alors il existe V un voisinage de p, $c \geq 0$ et $\alpha \in]0,1]$ tels que*

$$d_X(m,m') \leq c|F(m)-F(m')|^\alpha \; sur V$$

Dans la pratique, on utilise ce lemme avec F le plongement local de X dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Démonstration:

L'inégalité $\delta'_X \leq d_X$ est facile, puisque d_X est la plus grande pseudo-distance qui vérifie le principe de décroissance pour la famille $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$.

L'inégalité inverse se fait en plusieurs étapes :

*La première étape : on introduit les deux applications suivantes : M_X^k, N_X^k : $\mathcal{F}^k(X) \longrightarrow [0,\infty[$ par

$$M_X^k(p,\xi) = \inf_{\phi}\{\limsup_{s\to 0} \frac{d_X(p,\phi(s))}{s}; \phi \in \mathrm{Hol}(\Delta(r),X), \phi(0)=p, [\phi]_k = \xi\}$$

$$N_X^k(p,\xi) = \sup_{\phi}\{\limsup_{s\to 0} \frac{d_X(p,\phi(s))}{s}; \phi \in \mathrm{Hol}(\Delta(r),X), \phi(0)=p, [\phi]_k = \xi\}$$

On montre que pour $p_0 \in X$, il existe un voisinage V et $k \geq 1$ tels que $M_X^k(p,\xi) = N_X^k(p,\xi)$ c.a.d que le calcul de $M_X^k(p,\xi)$ est indépendant du représentant de la classe ξ.

Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux représentant de ξ donc $|\phi_1(s) - \phi_2(s)| = O(s^{k+1})$, en utilisant le lemme 2.0.16, on déduit que :

$$\frac{d_X(\phi_1(s),\phi_2(s))}{s} = O(s^{\alpha(k+1)-1})$$

qui tend vers 0 pour $k > \frac{1}{\alpha} - 1$

*La deuxième étape : On monte que si $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ est un chemin analytique dans X alors il existe k qui dépend de γ tel que

$$d_X(\gamma(a),\gamma(b)) \leq L_X^k(\gamma)$$

En considérant l'application ρ définie sur $[a,b]$ par $\rho(t) = d_X(\gamma(a),\gamma(t))$, elle est lipschitzienne d'après le lemme 2.0.13 donc presque partout dérivable et on a : $d_X(\gamma(a),\gamma(b)) = \rho(b) - \rho(a) = \int_a^b \rho'(t)dt$

Par définition de la dérivée on a :

$$|\rho'(t)| \leq N_X^k(\gamma(t), j_k\gamma(t)) = M_X^k(\gamma(t), j_k\gamma(t)) \leq K_X^k(\gamma(t), j_k\gamma(t))$$

Et il n'est pas difficile de prouver qu'on a $M_X^k(p,\xi) \leq K_X^k(p,\xi)$ puisque si $p \in X$, $\xi \in \mathcal{F}^k(X)_p$ et $f : \Delta_r \longrightarrow X$ une application holomorphe arbitraire telle que $f(0) = p$ et $[f]_k = \xi$ on a :

$$M_X^k(p,\xi) \leq \limsup_{s\to 0} \frac{d_X(p,f(s))}{s} \leq \limsup_{s\to 0} \frac{d_{\Delta_r}(0,s)}{s} = \frac{1}{r}$$

$\square$

Maintenant on peut donner l'énoncé analogue de Royden qui caractérise l'hyperbolicité au niveau infinitésimal :

Proposition 2.0.17 *Soient X un espace complexe et H une métrique sur X alors*

X est hyperbolique si et seulement si pour tout $p \in X$, il existe W un voisinage de p et $c > 0$ tels que $K_X^1(p,\zeta) \geq cH(p,\zeta)$ sur W

DÉMONSTRATION:

Condition suffisante : Soient $p, p' \in X$ tels que $p \neq p'$ et W un voisinage de p tel que $p' \notin \overline{W}$ on a $d_X(p,p') = \delta'_X(p,p') \geq \delta_X^1(p,p') \geq c d_H(p, \partial W) > 0$

Condition nécessaire : Sinon il existe $p \in X$ et $\zeta_n \in \mathcal{F}^1(X)_{p_n}$ tels que $p_n \to p$, $H(\zeta_n) = 1$ et $K_X^1(p_n,\zeta_n) \to 0$ donc il existe $f_n : \Delta_{r_n} \longrightarrow X$ telle que $f_n(0) = p_n$ et $[f_n]_1 = \zeta_n$ et $r_n \to +\infty$

Considérons l'application $g_n : \Delta \longrightarrow X$ définie par $g_n(z) = f_n(r_n z)$.

Soit W un voisinage de p relativement compact, on a $g_n(0) \in W$ par conséquent g_n converge uniformément vers g sur un voisinage de 0 (La famille $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ est équicontinue).

Or $|g_n'(0)| = r_n |f_n'(0)| = r_n \longrightarrow +\infty$ ce qui est absurde.

$\square$

Dans un travail récent, D. D. Thai [16] donne une amélioration de la répresentation de Venturini, il définit une pseudo-métrique sur $\mathcal{F}(X) = \lim\mathrm{proj}\, \mathcal{F}^k(X)$ par

$\tilde{K_X}(\xi) = \sup_k K_X^k(\xi_k)$ où $\xi = (\xi_k) \in \mathcal{F}(X)$ et il montre qu'elle est la forme infinitésimale de la pseudo-distance de Kobayashi.

2.0.3 Pseudo-distance et Pseudo-métrique relatives de Kobayashi

Pseudo-distance relative de Kobayashi $d_{Y,Z}$

Dans [36, 38], Kobayashi a introduit une nouvelle pseudo-distance relative $d_{Y,Z}$ et c'est une distance si et seulement si Y est hyperboliquement plongé dans Z. Il a définit aussi une nouvelle pseudo-métrique relative $K_{Y,Z}$.

En suivant essentiellement les idées de Royden, on montre que $d_{Y,Z}$ est la forme intégrée de $K_{Y,Z}$ dans les cas suivants :

1. Z est une variété et $Y = Z - A$ où A est un diviseur à croisement normaux.
2. Z est un espace complexe et $Y = Z - A$ où A est un sous ensemble analytique de Z qui contient $\mathrm{Sing}(Z)$.

Dans le cas général et d'une manière analogue à la construction de Venturini, on définit une famille de métrique $(K_{Y,Z}^k)$, on montre que $d_{Y,Z}$ est la la forme intégrée de $K_{Y,Z}^k$.

Dans les cas (1) et (2) cités plus haut il suffit de prendre $k = 1$.

Tout d'abord, on rappelle la définition de $d_{Y,Z}$ ainsi que quelques propriétés :

Définition 2.0.18

Soit Y un sous espace d'un espace complexe Z.

On définit une sous-famille $\mathcal{F}_{Y,Z}$ de $\mathrm{Hol}(\Delta, Z)$ par

$$\mathcal{F}_{Y,Z} = \{f \in \mathrm{Hol}(\Delta, Z) \text{ tel que} f^{-1}(Z \setminus Y) \text{ est au plus un singleton}\}$$

pour p , $q \in \overline{Y}$ on a une pseudo-distance $d_{Y,Z}$ sur $\overline{Y}$

$$d_{Y,Z}(p, q) = \inf_{\alpha} l(\alpha) \quad \alpha \text{ chaine de Kobayashi dans } \mathcal{F}_{Y,Z}$$

Remarque 2.0.19

Si Y est un ouvert de Zariski dans Z, alors il existe au moins une chaîne de Kobayashi dans $\mathcal{F}_{Y,Z}$ qui relie deux points dans $\overline{Y}$ telle que $d_{Y,Z}(p, q)$ soit finie.

Propriétés

1. $d_Z \leq d_{Y,Z} \leq d_Y$
2. $d_{\Delta^*,\Delta} = d_\Delta$ et $d_{\Delta^{*k} \times \Delta^{n-k}, \Delta^n} = d_{\Delta^n}$; on utilise que $d_{Y \times Y', Z \times Z'} = \max(d_{Y,Z}; d_{Y',Z'})$.
3. $d_{Y',Z'}(f(x), f(y)) \leq d_{Y,Z}(x, y)$ pour tout $\{f \in \mathrm{Hol}(Z, Z')$ telle que $f(Y) \subset Y'\}$.
4. $d_{Y,Z}$ est la plus grande pseudo-distance sur $\overline{Y}$ qui vérifie le principe de décroissance pour $\mathcal{F}_{Y,Z}$ i.e. $f^*(d_{Y,Z}) \leq d_\Delta$ pour tout $f \in \mathcal{F}_{Y,Z}$ et si δ est une pseudo-distance sur $\overline{Y}$ vérifiant $\delta(f(x), f(y)) \leq d_\Delta(x, y)$ pour tout $f \in \mathcal{F}_{Y,Z}$ alors $d_{Y,Z} \geq \delta$
5. Si Y est un ouvert de Zariski dense alors $d_{Y,Z}$ est continue sur $Z \times Z$

Pseudo-métrique relative de Kobayashi $K_{Y,Z}$

D'une manière analogue au cas absolu, Kobayashi a définit aussi une pseudo-métrique relative $K_{Y,Z}$.

La définition de cette métrique est semblable à celle de la métrique de Kobayashi-Royden sauf qu'on remplace la famille $\mathrm{Hol}(\Delta, Z)$ par $\mathcal{F}_{Y,Z}$.

Définition 2.0.20 *Soient Z une variété et Y un ouvert de Zariski dans Z*

$$K_{Y,Z}(x, \xi) = \inf\{\frac{1}{R} \ : \ f \in \mathcal{F}^R_{Y,Z} \text{ telle que } f(0) = x \text{ et } f'(0) = \xi\} \text{ pour } (x, \xi) \in TZ$$

Il est facile de prouver les propriétés suivantes :

Propriétés

1. $K_Z \leq K_{Y,Z} \leq K_Y$
2. $K_{\Delta^*,\Delta} = K_\Delta$ et $K_{\Delta^{*k} \times \Delta^{n-k}, \Delta^n} = K_{\Delta^n}$
3. Pour $Y' \subset Z'$ et $f : Z \longrightarrow Z'$ une application holomorphe telles que $f(Y) \subset Y'$ alors $f^*K_{Y',Z'}(x, \xi)) \leq K_{Y,Z}(x, \xi)$ et on a l'égalité si f est un isomorphisme telle que $f(Y) = Y'$.

4. $K_{Y,Z}$ est la plus grande pseudo-métrique qui vérifie le principe de décroissance pour $\mathcal{F}_{Y,Z}$ i.e. si H est une métrique sur Z telle que $f^*(H) \leq K_\Delta$ pour tout $f \in \mathcal{F}_{Y,Z}$ alors $K_{Y,Z} \geq H$.

En appliquant le lemme d'extension de Royden et les propriétés (2) et (3) on aura :

Théorème 2.0.21 *Soient Z une variété et $Y = Z - A$ où A est un diviseur à croisement normaux dans Z, alors $K_{Y,Z}$ est semi-continue supérieurement dans TZ*

En utilisant une résolution des singularités et le théorème de semi-continuité 2.0.21 on montre que :

Théorème 2.0.22 *Soit Z un espace complexe alors $K_{Z_{reg},Z}$ est semi-continue supérieurement sur TZ_{reg}.*

La preuve est une modification légère de celle de Kobayashi et de Duc Thai dans le cas absolu.

DÉMONSTRATION:

Soient $(x_0, v_0) \in TZ_{reg}$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe $f \in \mathcal{F}^r_{Z_{reg},Z}$ telle que : $\frac{1}{r} \leq K_{Z_{reg},Z}(x_0, v_0) + \varepsilon$.

Soient $\pi : X \longrightarrow Z$ une résolution des singularités et E le diviseur exceptionnel dans X, puisque $f(\Delta_r) \not\subset Z_{sing}$ alors f se relève en $\tilde{f} \in \mathcal{F}^r_{X\setminus E,X}$.

On pose $(\tilde{x_0}, \tilde{v_0}) = \tilde{f}_*(0)$ donc $\pi_*(\tilde{x_0}, \tilde{v_0}) = (x, v_0)$ et

$$K_{Z_{reg},Z}(x_0, v_0) \leq K_{X\setminus E,X}(\tilde{x_0}, \tilde{v_0}) \leq \frac{1}{r} \leq K_{Z_{reg},Z}(x_0, v_0) + \varepsilon$$

car π renvoie $X \setminus E$ sur Z_{reg} d'où $K_{Z_{reg},Z}(x_0, v_0) = K_{X\setminus E,X}(\tilde{x_0}, \tilde{v_0})$

D'après le théorème précédent, on a $K_{X\setminus E,X}$ est semi-continue supérieure, il existe alors un voisinage $\tilde{V}$ dans TX tel que $K_{X\setminus E,X}(\tilde{v}') \leq K_{X\setminus E,X}(\tilde{v_0}) + \varepsilon$ pour $\tilde{v}' \in \tilde{V}$.

Soit $V = \pi_*(\tilde{V})$.

Pour $v' \in V$, on a $v' = \pi_*(\tilde{v}')$ et donc

$$K_{Z_{reg},Z}(v') \leq K_{X\setminus E,X}(\tilde{v}') \leq K_{X\setminus E,X}(\tilde{v_0}) + \varepsilon \leq K_{Z_{reg},Z}(v_0) + \varepsilon$$

□

Soit γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Z qui rencontre A en un nombre fini de points. On définit $\delta'_{Y,Z} = \inf_\gamma \int K_{Y,Z}(\gamma'(t))dt$

Théorème 2.0.23 *Dans les deux cas suivants on a $\delta'_{Y,Z} = d_{Y,Z}$*

1. *Z est une variété et $Y = Z \setminus A$ où A est un diviseur à croisement normaux.*
2. *Z est un espace complexe et $Y = Z_{reg}$ i.e. $A = \mathrm{Sing}(Z)$.*

DÉMONSTRATION:

Il est facile de prouver que $\delta'_{Y,Z} \leq d_{Y,Z}$, en effet soient $x, y \in Z$, $\varepsilon > 0$ et (p_i, f_i) une chaîne de Kobayashi dans $\mathcal{F}_{Y,Z}$ reliant les points x et y tels que :

$$\sum_{i=0}^{n} d_\Delta(0,p_i) \leq d_{Y,Z}(x,y)+\varepsilon$$

On considère h_i la géodésique dans Δ qui relie 0 et p_i et $\gamma_i(t) = f_i \circ h_i(t)$ un chemin qui touche A en un nombre fini de points et qui relie les points x et y. On a :

$$\delta'_{Y,Z}(x,y) \leq \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 K_{Y,Z}(\gamma'_i(t))dt \leq \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 K_\Delta(h'_i(t))dt \leq \sum_{i=0}^{n} d_\Delta(0,p_i) \leq d_{Y,Z}(x,y)+\varepsilon$$

La preuve de $\delta'_{Y,Z} \geq d_{Y,Z}$ est semblable à celle donné par Royden, la semi-continuité supérieure joue un rôle essentiel.

Pour le deuxième cas, la semi-continuité supérieure sur TZ_{reg} est suffisante puisque on considère des chemins qui touchent les lieux singuliers en un nombre fini de points. La preuve est similaire à celle donnée par Duc Thai [14] où il considère le cas des singularités isolées.

$\square$

Approche de Venturini dans le cas relatif

On se place en toute généralité dans le cas où Z est un espace complexe, A est un sous ensemble analytique et $Y = Z \setminus A$.

On reprend la construction de Venturini et on montre que $d_{Y,Z}$ est la forme intégrée de la famille $K^k_{Y,Z}$.

On définit des *espaces osculateurs relatifs d'ordre k*,

$$\mathfrak{J}^k(Y,Z)_x = \{\mathrm{mor}((\mathbb{C},0) \longrightarrow (Z,x)) \text{ morphisme de germes dans } \mathcal{F}_{Y,Z}\}/\equiv^k$$

mor désigne ici les morphismes des germes

$$K^k_{Y,Z} : \mathfrak{J}^k(Y,Z) \longrightarrow [0,+\infty[$$
$$\mathcal{X} \longmapsto \inf\left\{\frac{1}{r} \ : \ \exists\varphi \in \mathcal{F}^r_{Y,Z}\ [\varphi]_k = \mathcal{X}\right\}$$

Soient γ une courbe analytique qui touche A en un nombre fini de points et $t \in [a,b]$, il existe $\varphi_t \in \mathrm{mor}((\mathbb{C},0) \longrightarrow (X,\gamma(t))$ un morphisme de germe unique dans $\mathcal{F}_{Y,Z}$ tel que $\varphi_t(s) = \gamma(t+s)$ pour tout $s \in]-\varepsilon,+\varepsilon[$, on note $j_k\gamma(t) = [\varphi_t]_k$.

On définit d'une manière analogue :

$$L^k_{Y,Z}(\gamma) = \int_a^b K^k_{Y,Z}(\gamma(t), j_k\gamma(t))dt$$

$$L_{Y,Z}(\gamma) = \sup_{k\geq 1} L^k_{Y,Z}(\gamma) \qquad \delta'_{Y,Z}(p,q) = \inf_{\gamma} L_{Y,Z}(\gamma)$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes analytiques γ par morceaux dans Z et qui rencontrent A en un nombre fini de points joignant p et q.

Théorème 2.0.24 *Pour tout espace complexe Z, A un sous ensemble analytique quelconque de Z et $Y = Z \setminus A$ on a :*

1. $d_{Y,Z} = \delta'_{Y,Z}$
2. *Dans les deux cas du théorème 2.0.23, on a* $d_{Y,Z} = d^1_{Y,Z} = \delta'_{Y,Z}$.

La preuve de Venturini est basée sur ces les lemmes 2.0.15 et 2.0.16 qui restent valables dans le cas relatif :

Lemme 2.0.25 *Soient Z une variété munie d'une métrique hermétienne H et $Y = Z - A$ où A est un diviseur à croisement normaux. Alors pour tout voisinage W relativement compact, il existe $c > 0$ telle que :*

$$d_{Y,Z} \leq c.d_H \quad \text{sur} \quad W$$

où d_H est la distance induite par H

Il suffit que pour tout point $p \in Z$ il existe un voisinage $W(p)$ vérifiant l'inégalité demandée. Dans ce cas le lemme est facile puisque $d_{Y,Z} \leq d_{\Delta^{*k}\times\Delta^{n-k},\Delta^n} = d_{\Delta^n}$ sur $W(p) = \Delta^n$.

Lemme 2.0.26 *Soient Z un espace complexe, A un sous ensemble analytique de Z, $Y = Z \setminus A$ et $U \subset Z$ un ouvert,*

$F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ une application holomorphe injective et $p \in U$, alors il existe V un voisinage de p, $c \geq 0$ et $\alpha \in]0,1]$ tels que

$$d_{Y,Z}(m,m') \leq c|F(m) - F(m')|^{\alpha} \quad \textit{sur } V$$

La preuve est semblable à celle donnée par Venturini dans le cas absolu : on utilise une résolution de singularité $\pi : X \longrightarrow Z$ de (Z,A) où $\pi^{-1}(A) = E$ est un diviseur à croisement normaux dans X et que π est décroissante entre $d_{X\setminus E,X}$ et $d_{Y,Z}$. On se ramène au lemme 2.0.25.

2.1 Déformation des métriques de Kobayashi-Royden

2.1.1 Cas des variétés

On étudie la semi-continuité d'une famille de métrique de Royden à travers les déformations.

Soit $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow S$ une application holomorphe, propre et submersive entre $\mathfrak{X}$ une variété de dimension $m+n$ et S une variété complexe de dimension m donc les fibres $X_s = \pi^{-1}(s)$ sont des variétés compactes de dimension n.

Proposition 2.1.1 *La famille $\{K_{X_s}\}$ est semi-continue supérieure au sens suivant :*

Soient $(x_0,\xi_0) \in TX_{s_0}$ et $\varepsilon > 0$, il existe alors $V \subset T\mathfrak{X}$ un voisinage de (x_0,ξ_0) tel que :

$$K_{X_s}(x,\xi) \leq K_{X_{s_0}}(x_0,\xi_0) + \varepsilon \text{ pour } (x,\xi) \in V \cap TX_s$$

$$i.e.\ \limsup K_{X_s}(x,\xi) \leq K_{X_0}(x_0,\xi_0)$$

Soient X une variété et D est un diviseur à croisement normaux dans X. On considère $\mathfrak{D} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ sur (S,s_0) une déformation localement triviale ou dite également *une déformation logarithmique de* $D \xhookrightarrow{i} X$ i.e. pour tout $x \in \mathfrak{X}$ il existe U un voisinage ouvert (resp. V) de x (resp. de $s = \pi(x) \in S$) et un isomorphisme $\alpha : U \longrightarrow (U \cap \pi^{-1}(s)) \times V$ qui renvoie $U \cap \mathfrak{D}$ sur $U \cap \mathfrak{D} \cap \pi^{-1}(s) \times V$ et $\pi = pr_V \circ \alpha$. Ceci implique en particulier que D_s est un diviseur à croisement normaux dans X_s pour s dans un voisinage de s_0.

Proposition 2.1.2 *$K_{X_s \setminus D_s, X_s}$ est semi-continue supérieurement.*

Ceci repose comme le cas absolu sur un théorème d'extension. Dans le cas d'une famille de variétés complexes on a le lemme 2.1.3 qui est la version relative du théorème d'extension de Royden.

On remarque que si $f \in \mathcal{F}^r_{X \setminus D, X}$ est une immersion, on applique le lemme 2.1.3 et on constate que f se déforme en $f_s \in \mathcal{F}^r_{X_s \setminus D_s, X_s}$ où X_s (resp. D_s) est la fibre de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{D}$) au dessus de s.

Lemme 2.1.3 *Soit $f : \Delta_R \longrightarrow X_{s_0}$ une application holomorphe telle que $f'(0) \neq 0$.*

Il existe alors U un voisinage de s_0 et une application holomorphe

$$\phi : \Delta \times \Delta^{n-1} \times U \longrightarrow \mathfrak{X}$$

tels que $\pi \circ \phi = p_2$ où p_2 désigne la projection sur S

$\phi_{|}\Delta_R \times 0 \times s_0 = f$ et ϕ est biholomorphe au voisinage de $(0, s_0)$

Pour la preuve voir Kobayashi [38].

2.1.2 Cas des espaces complexes

On considère une famille d'espaces complexes paramétrée par S i.e. une application holomorphe $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow S$ propre et plate.

Il est clair qu'on ne peut pas espérer avoir le lemme 2.1.3, on ne peut même pas déformer une application holomorphe $f : \Delta_r \longrightarrow X_{s_0}$ en $F : \Delta_r \times (S, s_0) \longrightarrow \mathfrak{X}$ car ceci implique l'existence d'une section $F(0, .)$ de $\mathfrak{X}$ qui n'existe pas en général.

Cette observation nous suggère de considérer un type assez particulier des déformations *une résolution simultanée des singularités*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D} \arrow[r, hook] & \mathfrak{M} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathfrak{X} \arrow[dl, "\pi"] \\ & & S & \end{tikzcd}$$

où

1. $\alpha : \mathfrak{M} \longrightarrow S$ est submersive.
2. $\sigma : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est une modification propre le long de $\mathfrak{A} = \bigcup \mathrm{Sing(X_s)}$.
3. $\mathfrak{D} = \sigma^{-1}(\mathfrak{A}) \hookrightarrow \mathfrak{M}$ est une déformation logarithmique du diviseur exceptionnel dans M_0.

Proposition 2.1.4 *Sous l'hypothèse de l'existence d'une résolution simultanée des singularités on a K_{X_s} et K_{X_{sreg}, X_s} sont semi-continue supérieurement (s.c.s.) :*

Soient $(x_0, \xi_0) \in TX_{s_{0reg}}$, $\varepsilon > 0$ alors il existe $U \subset T\mathfrak{X}$ un voisinage de (x_0, ξ_0) tel que :

(i) s.c.s. de K_{X_s} : $K_{X_s}(x, \xi) \leq K_{X_0}(x_0, \xi_0) + \varepsilon$
(ii) s.c.s. de K_{X_{sreg}, X_s} : $K_{X_{sreg}, X_s}(x, \xi) \leq K_{X_{0reg}, X_0}(x_0, \xi_0) + \varepsilon$
pour tout $(x, \xi) \in U \cap T\mathfrak{X}$.

Démonstration:

i) Soient $(x_0, v_0) \in TX_{s_{0reg}}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $f : \Delta_R \longrightarrow X_{s_0}$ une application holomorphe telle que $f_*(0) = (x_0, v_0)$ et $\frac{1}{R} < K_{X_{s_0}}(x_0, v_0) + \varepsilon$.

Comme $f(\Delta_R) \not\subset S(X_{s_0})$ et $\sigma : M_{s_0} \longrightarrow X_{s0=\alpha(t_0)}$ est une résolution des singularités, f se relève en $\tilde{f} : \Delta_R \longrightarrow M_{s_0}$ et $\sigma \circ \tilde{f} = f$.

Soit $(\tilde{x_0}, \tilde{v_0}) = \tilde{f}_*(0)$ on aura $\sigma_*(x_0, v_0) = (\tilde{x_0}, \tilde{v_0})$.

De la même manière que la preuve précédente, on montre que $K_{M_{s_0}}(\tilde{x_0}, \tilde{v_0}) = K_{X_{s_0}}(x_0, v_0)$

Par semi-continuité supérieure de K_{M_s}, il existe un voisinage $\tilde{V}$ dans $T(\mathfrak{M} \backslash \sigma^{-1}(\mathfrak{A}))$ tel que :

$$K_{M_s}(\tilde{x}, \tilde{v}) \leq K_{M_{s_0}}(\tilde{x_0}, \tilde{v_0}) + \varepsilon$$

Soit $V = \sigma_*(\tilde{V})$ voisinage de (x_0, v_0) donc :

$$K_{X_s}(\sigma_*(x, v)) \leq K_{M_s}(x, v) \leq K_{M_{s_0}}(\tilde{x_0}, \tilde{v_0}) + \varepsilon = K_{X_{s_0}}(x_0, v_0) + \varepsilon$$

ii) La preuve est la même que (i), il suffit juste de remarquer que tout $f \in \mathcal{F}_{X_{0reg},X_0}$ se relève à travers une résolution des singularités. Si on note par E_0 le diviseur exceptionnel de la résolution $\sigma_0 : M_{s_0} \longrightarrow X_0$ et on conserve les mêmes notations que (i) alors $K_{M_{s_0}\setminus E_0, M_{s_0}}(\tilde{x_0}, \tilde{v_0}) = K_{X_{0reg},X_0}(x_0, v_0)$ puisque σ_0 renvoie $M_{s_0} \setminus E_0$ sur X_{0reg} et que la famille $K_{M_s\setminus E_s, M_s}$ est semi-continue supérieurement. □

Semi-continuité inférieure

La semi-continuité inférieure ne pose aucun problème et la distinction entre variétés et espaces complexes s'avère inutile ici.

Proposition 2.1.5 *Soit X un espace complexe compact hyperbolique alors K_X est semi-continue inférieure.*

DÉMONSTRATION:

Soit $(x_n, v_n) \in TX$ une suite convergente vers (x_0, v_0) telle que $K_X(x_n, v_n) \longrightarrow \liminf K_X(x_n, v_n)$.

Il existe $f_n : \Delta_{r_n} \longrightarrow X$, une suite d'applications holomorphes telle que

$$f_{n*}(0) = (x_n, v_n) \text{ et } K_X(x_n, v_n) \leq \frac{1}{r_n} \leq K_X(x_n, v_n) + \frac{1}{n} \text{ donc } \frac{1}{r_n} = \liminf K_X(x_n, v_n)$$

Soit $g_n : \Delta \longrightarrow X$ l'application holomorphe définie par $g_n(z) = f_n(r_n z)$

On a $g_n(0) = x_n$ et $g_n'(0) = r_n v_n$

X est hyperbolique compact donc la famille $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ est compacte et on peut supposer que g_n converge uniformément sur tout compact vers g holomorphe sur Δ et que $g(0) = 0$, $g'(0). \liminf K_X(x_n, v_n) = v_0$.

D'après la définition de K_X, on aura $K_X(x_0, v_0) \leq \liminf K_X(x_n, v_n)$.

□

Considérons dans la suite $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow S$ une application holomorphe propre à fibres hyperboliques compactes.

La semi-continuité inférieure reste vraie à travers une déformation.

Proposition 2.1.6 *Soit $(x_n, v_n) \in TX_{s_n}$ une suite convergente vers $(x_0, v_0) \in TX_{s_0}$.*
Alors $\liminf K_{X_{s_n}}(x_n, v_n) \geq K_{X_{s_0}}(x_0, v_0)$

La preuve de la semi-continuité inférieure dans le cas absolu utilise le fait que la famille $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ est compacte. Ce résultat reste vrai même si on remplace X par une famille paramétrée d'espaces hyperboliques compacts voir lemme 2.1.7. Plus précisément on a ces deux lemmes voir Brody [7]. On donne ici des preuves plus simples que celles données par Brody et en fait on montre qu'on a une équivalence entre ces deux lemmes.

Lemme 2.1.7 *Soit s_0 un point dans S et $\tilde{S}$ un voisinage compact de s_0*

$$\text{Alors la famille} \bigcup_{s\in\tilde{S}} \mathrm{Hol}(\Delta, X_s) \text{ est compacte}$$

Lemme 2.1.8 *Soit $D : S \longrightarrow]0, +\infty[$ l'application définie par :*

$$D(s) = \sup_{f\in\mathrm{Hol}(\Delta,X_s)} |f'(0)|$$

Alors D est semi-continue supérieurement

Remarque 2.1.9

1. X_s est hyperbolique si et seulement si $D(s)$ est fini.
   En effet : si X_s est hyperbolique compact alors $\mathrm{Hol}(\Delta, X_s)$ est compact donc le sup est atteint et $D(s)$ est fini.
   Inversement si $D(s)$ est fini on aura $|f'(0)| \leq D(s)$ pour tout $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X_s)$ donc $|f'(z)| \leq D(s)K_\Delta(z)$ d'où $K_{X_s} \geq \frac{1}{D(s)}H$, ce qui implique que X_s est hyperbolique.
2. La proposition 1.2.7(1) se traduit par : si $D(s_0)$ est fini alors il existe un voisinage W de s_0 tel que pour tout $s \in W$ on a $D(s)$ est fini.(c'est la stabilité de l'hyperbolicité)

Démonstration: (Lemme 2.1.7)

Soit $f_n \in \mathrm{Hol}(\Delta, X_{s_n})$, par compacité de $\tilde{S}$, on peut supposer que $s_n \longrightarrow s_0$.

X_{s_0} est hyperbolique compact, il existe un voisinage W de s_0 tel que X_W est hyperbolique donc pour n assez grand on a :

$$d_{X_W}(f_n(z), f_n(w)) \leq d_{X_n}(f_n(z), f_n(w)) \leq d_\Delta(z, w)$$

ce qui implique que la famille (f_n) est équicontinue donc f_n converge uniformément sur tout compact vers $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X_{s_0})$.

□

Démonstration: (Lemme 2.1.8)

Soit $s_n \longrightarrow s_0$ une suite convergente dans S vers s_0.

Il existe $f_n : \Delta \longrightarrow X_{s_n}$ un suite d'applications holomorphes telle que $D(s_n) = |f_n'(0)|$.

Soit $W(s_0)$ un voisinage compact de s_0, on a $f_n \in \bigcup_{s\in W(s_0)} \mathrm{Hol}(\Delta, X_s)$ qui est compact donc f_n converge uniformément sur tout compact vers f.

On a $|f_n'(0)| \longrightarrow |f'(0)| \leq D(s_0)$ d'où $\limsup D(s_n) \leq D(s_0)$

□

Remarque 2.1.10

1. Dans le lemme 2.1.7, on peut remplacer Δ par n'importe quel espace complexe Y.

2. Le lemme 2.1.7 et le lemme 2.1.8 sont équivalents. D'après les preuves données plus haut, on déduit que 2.1.8 est une conséquence de 2.1.7. Inversement considérons f_n une suite dans $\mathrm{Hol}(\Delta, X_n)$. Par semi-continuité supérieure de D, il existe $M > 0$ telle que $|\Psi'(0)| \leq M$ pour tout $\Psi \in \mathrm{Hol}(\Delta, X_n)$ donc $|f_n'(z)| \leq MK_\Delta(z)$ d'où $d_H(f_n(z), f_n(w)) \leq Md_\Delta(z, w)$, on en déduit qu'on peut extraire de f_n une sous suite convergente.

Proposition 2.1.11 *Soient $W(s_0)$ un voisinage compact de s_0 et H une métrique sur $\mathfrak{X}$, il existe alors une constante $c > 0$ telle que*

$$K_{X_s} \geq cH \text{ pour tout } s \in W(s_0)$$

DÉMONSTRATION:

Soit D l'application définie dans le lemme plus haut. D'après la définition de D on a $|f'(0)| \leq D(s)$ pour tout $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X_s)$. En composant avec un automorphisme de Δ on aura :

$$|f'(z)| \leq D(s)K_\Delta(z) \text{ pour tout } f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X_s) \text{ et tout } z \in \Delta$$

Donc $K_{X_s} \geq \frac{1}{D(s)}H$. D est semi-continue supérieurement, pour $W(s_0)$ un voisinage compact de s_0, il existe M une constante positive telle que $D(s) \leq M$ pour tout $s \in W(s_0)$ d'où $K_{X_s} \geq \frac{1}{M}H$ pour tout $s \in W(s_0)$

□

2.2 Remarques sur propriétés de Landau-Schottky

Dans l'article [25], les auteurs ont introduit la propriété de Landau et de Schottky en dimension quelconque généralisant le fait qu'un domaine de $\mathbb{C}$ vérifiant l'une de ces propriétés est hyperbolique.

On démontre que la propriété de Landau est équivalente à l'hyperbolicité dans le cas des espaces complexes et non seulement dans le cas des variétés [25] ou dans le cas des espaces à singularités isolées [15].

Alors que la propriété de Schottky est équivalente à l'hyperbolicité que si l'espace est compact.

Maintenant on fixe X un espace complexe, H une métrique sur X et d_H la distance sur X induite par H. Pour $(x, \xi) \in TX$, on note $|\xi| = H(x, \xi)$

Soit $p \in X$, on note par $\sum(p)$ l'ensemble des voisinages de p

Propriété de Landau *Pour tout $p \in X$, il existe $W \in \sum(p)$ relativement compact et $R > 0$ tels que :*

$$\sup \{|f'(0)| \ : \ f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X) \ \text{ et } \ f(0) \in W\} \leq R$$

Remarques 2.2.1

1. Dans le cas où X est compact, cette propriété est équivalente à : $\sup |f'(0)|$ est fini sur $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X)$ qui caractérise l'hyperbolicité.
2. On donne une propriété similaire à celle de Landau et on montre qu'elle caractérise les espaces hyperboliquement plongés voir proposition 4.2.2.

Proposition 2.2.2 *Pour X un espace complexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *X est hyperbolique.*
2. *X vérifie la propriété de Landau.*

Tout d'abord on commence par ce lemme du à Royden.

Lemme 2.2.3 (Royden [54]) *X est hyperbolique si et seulement si $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ est équicontinue i.e. pour tout $p \in X$, $W \in \sum(p)$, il existe $V \in \sum(p)$ et $r \in]0, 1[$ tels que si $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X)$ et $f(0) \in V$ alors $f(\Delta_r) \subset W$.*

La condition n'est autre que la traduction en terme d'espaces topologiques de l'équicontinuité qui est réservée pour les espaces métriques.

Démonstration [(Proposition 2.2.2)]:

Pour la *première implication* : Soient $p \in X$ et W un voisinage de p, par équicontinuité, il existe $V \in \sum(p)$ et $r \in]0,1[$ tels que si $f \in \sum(p)$ et $f(0) \in V$ alors $f(\Delta_r) \subset W$ donc $\sup\{|f'(0)|\, f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X)\, ,\, f(0) \in V\} \leq \sup\{|f'(0)|\, f \in \mathrm{Hol}(\Delta_r, W)\}$ qui est fini en utilisant la formule intégrale de Cauchy.

Pour la *deuxième implication* : Si X n'est pas hyperbolique, par négation de la propriété infinitésimale de l'hyperbolicité dans le cas des espaces complexes (voir proposition 2.0.17), il existe $p \in X$ et (p_n, ζ_n) tels que $p_n \to p$, $H(\zeta_n) = 1$ et $K^1_X(p_n, \zeta_n) \to 0$ donc il existe $f_n : \Delta_{r_n} \longrightarrow X$ telle que $f_n(0) = p_n$, $[f_n]_1 = \zeta_n$ et $r_n \to +\infty$.

Considérons l'application holomorphe h_n définie sur Δ par $h_n(z) = f_n(r_n z)$.

Soit W un voisinage de p relativement compact, on a $h_n(0) = p_n \in W$, par conséquent $|h'_n(0)| \leq R$ mais $|h'_n(0)| = r_n|f'_n(0)| = r_n \longrightarrow +\infty$.

□

La définition de la propriété de Schottky donnée dans [25] est la suivante :

Propriété de Schottky : *Pour tout* $p \in X\, , W \in \sum(p)$ *et* $r \in\,]0,1[$, *il existe* $s > 0$ *tels que si* $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X)$ *et* $f(0) \in W$ *alors*

$$d_H(p, f(z)) \ \leq \ s \ \ \forall z \in \Delta_r$$

Remarques 2.2.4

1. La démonstration du théorème 1 (a => b) p.50 dans [25] reste valable dans le cas où X est compact. Cette preuve utilise la caractérisation infinitésimale de l'hyperbolicité due à Royden i.e. $K_X \geq cH$ localement mais cette condition n'implique pas que cette inégalité reste valable au niveau des distances (si X n'est pas compact) car la constante c dépend du voisinage choisi.
2. La propriété de Schottky est équivalente à X est *taut* i.e. $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ est une famille normale si (X, d_H) est complet, voir Duc Thai[15].

2.3 Obstructions Topologiques aux théorèmes de Prolongement

Soient X et Y deux espaces complexes et $\mathcal{F}$ une sous famille de $\mathrm{Hol}(X, Y)$.

On dit que $\mathcal{F}$ possède une *structure universelle* si $\mathcal{F}$ a les propriétés “naturelles attendues” :

1. l'application évaluation $\phi : X \times \mathcal{F} \longrightarrow Y$ est holomorphe
2. si T est un espace complexe et $\varphi : X \times T \longrightarrow Y$ une application holomorphe telle que $\varphi(., t) \in \mathcal{F}$ alors l'application naturelle $\tilde{\varphi} : T \longrightarrow \mathcal{F}$ est holomorphe.

Si X est un espace complexe *compact* et Y un espace complexe quelconque alors $\mathrm{Hol}(X, Y)$ possède une *structure complexe universelle* par le théorème de Douady.

Si X est une variété, il existe une preuve plus directe de Kaup.

Tout d'abord on donne un lemme du à Horst[27], Urata[63] :

Lemme 2.3.1 *Soient X et Y deux espaces complexes tels que X est compact et connexe, $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(X, Y)$ une sous famille connexe et $\phi : X \times \mathcal{F} \longrightarrow Y$ l'application évaluation. Soit $f_0 \in \mathcal{F}$*

si $\phi(., f_0)$ est constante alors $\phi(., f)$ est constante pour tout $f \in \mathcal{F}$

DÉMONSTRATION:

On considère la famille $\mathcal{F}_\prime = \{f \in \mathcal{F}; \phi(., f) \text{ est constante}\}$.

La famille $\mathcal{F}_\prime$ est un fermé non vide de $\mathcal{F}$.

Soient $f_1 \in \mathcal{F}_\prime$ donc $f_1(X) = y$ i.e. f_1 est constante et $W(y)$ un voisinage de y dans Y ; par compacité de X, il existe un voisinage U de f_1 tel que $f(X) \subset W$ pour tout $f \in U$.

Par le principe du maximum, f est constante pour tout $f \in U$ donc $\mathcal{F}_\prime$ est un ouvert d'où $\mathcal{F}_\prime = \mathcal{F}$.

□

Soient X est un espace complexe maximale, $x \in X$ un point singulier de X et $\pi : \tilde{X} \longrightarrow V(x)$ une résolution des singularités au voisinage de x. On étudie le prolongement de $f : X - A \longrightarrow Y$ holomorphe où A est un sous ensemble analytique de X et Y est *hyperbolique compact*.

On sait qu'une telle application se prolonge sur $A \cap X_{reg}$ donc il suffit d'étudier le cas où $A = X_{sing}$.

Dans la cas général, $f : X_{reg} \longrightarrow Y$ n'est prolongeable sur X même dans le cas où Y est *hyperbolique compact*.

On considère l'exemple suivant :(Cette exemple m'a été communiqué par Zaidenberg) Soit C une courbe lisse de genre $g \geq 2$ donc hyperbolique et $\Delta : C \longrightarrow C \times C$ l'application diagonale, on a $N_{C|C \times C} = TC$ qui est négatif donc d'après un théorème de Grauert, il existe une modification de $C \times C$ sur X' qui contracte C sur un point $*$ et on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook, "\Delta"] \arrow[d] & C \times C \arrow[d] \\ * \arrow[r, hook, "i"] & X' \end{tikzcd}$$

avec X' est une surface normale, $*$ un point singulier de X' et $X' - \{*\}$ est isomorphe à $C \times C - C$.
L'application $X' - \{*\} \longrightarrow C \times C$ n'est pas holomorphiquement prolongeable sur X'.

On se pose donc la question suivante : Sous quelles conditions existe-t-il $\tilde{f}$: $V(x) \longrightarrow Y$ un prolongement holomorphe tel que $\tilde{f} \circ \pi = f$?

Pour cette question on considère l'application :

$$\psi : \mathrm{Hol}(V(x), Y) \longrightarrow \mathrm{Hol}(\tilde{X}, Y) \qquad \psi(f) = f \circ \pi$$

On remarque pour Y est hyperbolique compact et X un espace complexe on a $\mathrm{Hol}(X, Y)$ est compact et donc il possède un nombre fini de composante connexes.

On annonce le résultat principal de ce paragraphe qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit un homéomorphisme

Théorème 2.3.2 *Soient X un espace complexe maximal, $x \in X$ un point singulier de X, $\pi : \tilde{X} \longrightarrow V(x)$ une résolution des singularités et Y un espace complexe compact hyperbolique.*

ψ est un homéomorphisme si et seulement si $\mathrm{Hol}(V(x), Y)$ *et* $\mathrm{Hol}(\tilde{X}, Y)$ *possèdent le même nombre de composante connexe*

Dans ce cas f se prolonge en $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$ holomorphe.

DÉMONSTRATION:

ψ est une application continue, fermée et injective. Il reste à prouver que ψ est surjective.

Soient $f_0 \in \mathrm{Hol}(V(x), Y)$, $\tilde{f_0} = f_0 \circ \pi \in \mathrm{Hol}(\tilde{X}, Y)$, $\mathcal{F}$ la composante connexe contenant f_0 dans $\mathrm{Hol}(V(x), Y)$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ la composante connexe contenant $\tilde{f}_0$ dans $\mathrm{Hol}(\tilde{X}, Y)$.

On montre que l'application ψ :

$$\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}} \qquad \psi(f) = f \circ \pi$$

est un homéomorphisme.

Soient $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $y \in V(x)$ et $E_y = \pi^{-1}(y)$ un sous espace compact de $\tilde{X}$.

Considérons l'application évaluation $\tilde{\mathcal{F}} \times E_y \longrightarrow Y$.

On a $\tilde{f}_0|E_y = f_0(y)$ donc constante. E_y étant compact, $\tilde{\mathcal{F}}$ connexe, on en déduit que $\tilde{f}|E_y$ est constante pour tout $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$.

On définit alors l'application f par $f(y) = \tilde{f}|E_y$ i.e. $\tilde{f} = f \circ \pi$, l'application f ainsi définie est continue, holomorphe sur X_{reg} par hypothèse. Comme X est maximale f est holomorphe sur X.

Si C_1 et C_2 sont deux composantes connexes alors $\psi(C_1) \cap \psi(C_2) = \emptyset$ i.e ψ transforme une composante connexe en une composante connexe.

Comme $\mathrm{Hol}(V(x), Y) = \cup_{i=1}^{n} C_i$ où n est le nombre de composante connexes. $\psi(\mathrm{Hol}(V(x), Y)) = \cup_{i=1}^{n} \psi(C_i) = \cup_{i=1}^{n} C_i^{'}$.

En général on a : *le nombre de composante connexe de* $\mathrm{Hol}(V(x), Y) \leq$ *le nombre de composante connexe de* $\mathrm{Hol}(\tilde{X}, Y)$ donc ψ est surjective si et seulement si on a l'égalité.

L'application $f : X_{reg} \longrightarrow Y$ se prolonge d'une manière holomorphe sur X si et seulement si $\mathrm{Hol}(V(x), Y)$ et $\mathrm{Hol}(\tilde{X}, Y)$ ont le même nombre de composante connexes $\square$

2.4 Hyperbolicité Relative

Dans cette partie, on donne une généralisation de la notion de l'hyperbolicité au sens de Kobayashi en considérant des espaces relatifs. Dans ce cadre plusieurs approches peuvent-être développées :

Espace fibré hyperbolique introduit par Noguchi [48] est une application holomorphe $\pi : Y \longrightarrow X$ à fibres hyperboliques compactes, cette définition présente plusieurs avantages, on peut définir un espace fibré relativement complet, relativement hyperboliquement plongé comme dans le cas absolu en considérant ces propriétés sur les fibres.

NOTATIONS
Soient X , Y et S des espaces complexes.
On note

1. $Y^+ = Y \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff
2. $\mathcal{C}(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications continues de X dans Y muni de la topologie compact-ouvert.
3. Un espace relatif X/S est une application holomorphe $\pi : X \xrightarrow{\sigma_X} S$.
4. $\mathrm{Hol}_S(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \,; \sigma_X \circ f = \sigma_Y\}$

Notre point de départ est une caractérisation topologique de l'hyperbolicité due à Abate.

Théorème 2.4.1 ([1]) *Soit Y un espace complexe et Y^+ le compactifié d'Alexandroff de Y.*

Y est hyperbolique si et seulement si pour tout X un espace complexe la famille $\mathrm{Hol}(X, Y)$ *est relativement compact dans* $\mathcal{C}(X, Y^+)$

Soit Y un sous espace de Z non nécessairement relativement compact.

On donne ici un généralisation de théorème d'Abate pour qu'un espace soit hyperboliquement plongé

Théorème 2.4.2 *Y est hyperboliquement plongé dans Z si et seulement si pour tout X un espace complexe la famille* $\mathrm{Hol}(X, Y)$ *est relativement compact dans* $\mathcal{C}(X, \overline{Y}^+)$

$\overline{Y}$ désigne l'adhérence de Y dans Z

Remarque 2.4.3 Si Y est relativement compact, on remplace $\overline{Y}^+$ par $\overline{Y}$ dans le théorème précédent et aussi $\mathcal{C}(X, \overline{Y}^+)$ par $\mathrm{Hol}(\Delta, Z)$ et obtient la proposition 3 du *théorème 1.3.3*

Pour la preuve on utilise une version du théorème d'Ascoli pour caractériser les parties (relativement) compactes dans l'espace des applications continues.

Lemme 2.4.4 *Soit* $\Omega \subset \mathcal{C}(X,Y)$.

Ω *est compact si et seulement si :*

1. Ω *est équicontinue.*
2. $\Omega(x) = \{f(x)\,;\, f \in \Omega\}$ *est compact pour tout* $x \in X$

On rappelle que Ω est équicontinue en $(x,y) \in X \times Y$ si :

Pour tout U un voisinage de x, il existe V et W deux voisinages respectivement de x et de y tels que : Si $f \in \Omega$ et $f(x) \in W$ alors $f(V) \subset U$.

DÉMONSTRATION [THÉORÈME 2.4.2]:

On suppose que Y est hyperboliquement plongé dans Z.

Si $\mathrm{Hol}(X,Y)$ n'est pas relativement compact dans $\mathcal{C}(X,\overline{Y}^+)$, il existe $x_0 \in X$, $y_0 \in \overline{Y}^+$, U un voisinage de y_0, $f_n \in \mathrm{Hol}(X,Y)$ et x_n une suite dans X convergente vers x_0 tels que :

$$f_n(x_0) \longrightarrow y_0 \text{ et } f_n(x_n) \notin U$$

On a

$$(**) \;\; d_Y(f_n(x_n), f_n(x_0)) \leq d_X(x_n, x_0) \longrightarrow 0$$

On distingue deux cas :

1. $y_0 \in \overline{Y}$: la condition $(**)$ implique que y_0 n'est pas un point d'hyperbolicité.
2. $y_0 = \infty$: soit $U = \mathcal{C}K \cup \{\infty\}$ où K est un compact dans $\overline{Y}$. Par passage à une sous suite on peut supposer que $f_n(x_n) \longrightarrow \alpha \in \overline{Y}$ et comme $d_Y(f_n(x_n), f_n(x_0)) \longrightarrow 0$, on déduit que α n'est pas un point d'hyperbolicité.

Inversement

Il faut et il suffit de prouver que chaque point de $\overline{Y}$ est un point d'hyperbolicité.

Sinon il existe $p \in \overline{Y}$ et $f_n \in \mathrm{Hol}(\Delta, Y)$ tels que : $f_n(0) \longrightarrow p$ et $|f_n'(0)| \longrightarrow \infty$

Assertion : Soit U un voisinage relativement compact de p, il existe $r > 0$ tel que $f_n(\Delta_r) \subset U$.

Preuve : Sinon il existe U un voisinage de p et x_n une suite convergente vers 0 tels que : $f_n(0) \longrightarrow p$ et $f_n(x_n) \notin U$.

Or $f_n \longrightarrow f \in \mathcal{C}(\Delta, \overline{Y}^+)$ donc $f_n(x_n)$ et $f_n(0)$ ont la même limite.

De notre assertion on déduit que $f_n \longrightarrow f : \Delta_r \longrightarrow Z$ et donc la suite $|f_n'|$ sera bornée sur un voisinage de 0. □

On considère maintenant un espace relatif Y/S

Définition 2.4.5

1. *On dit que* Y *est relativement hyperbolique sur* S *si pour tout* X/S *un espace relatif la famille* $\mathrm{Hol}_S(X,Y)$ *est relativement compact dans* $\mathcal{C}(X,Y^+)$.

Remarques 2.4.6

1. Si $S=*$, on retrouve la notion de l'hyperbolicité.
2. Dans l'article de Ohgai[52], l'auteur développe de la même manière la notion de $/S$ *− hyperbolique* mais l'hyperbolicité au sens de Kaup = qui est *taut* en terminologie récente.

Propriétés 2.4.7

1. *Soit* $Y \longrightarrow S$ *un espace relatif*
   Si Y *est hyperbolique alors* Y *est relativement hyperbolique sur* S.
2. *Soit* Y/S *un sous espace relatif de* Z/S.
   Si Z/S *est relativement hyperbolique alors* Y/S *est relativement hyperbolique.*
3. *Soit* $Y \longrightarrow S$ *un espace relativement hyperbolique.*
   Alors pour tout $s \in S$ *on a* $Y_s=\pi^{-1}(s)$ *est hyperbolique.*

   Conséquence *Si* $Y \longrightarrow S$ *est une application holomorphe, propre et relativement hyperbolique sur* S *alors* $Y \longrightarrow S$ *espace fibré hyperbolique compact.*

4. *Soient* X/S *et* Y/S *deux espaces relativement hyperboliques sur* S.
   Alors $X\times_S Y \longrightarrow S$ *est relativement hyperbolique sur* S.

DÉMONSTRATION:

1. $\mathrm{Hol}_S(X,Y)\subset \mathrm{Hol}(X,Y)\subset \mathcal{C}(X,Y)$
2. Pour tout X/S, $\mathrm{Hol}_S(X,Y)\subset \mathrm{Hol}_S(X,Z)$ et la limite reste dans $\mathcal{C}(X,Y^+)$
3. Soit X un espace complexe.
   $\mathrm{Hol}_S(X\times\{s\},Y)=\mathrm{Hol}(X,Y_s)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(X,Y_s^+)$
4. Pour tout Z/S on a $\mathrm{Hol}_S(Z,X\times_S Y)=\mathrm{Hol}_S(Z,X)\times \mathrm{Hol}_S(Z,Y)$
   Soit $f_n=(h_n,g_n)\in \mathrm{Hol}_S(Z,X\times_S Y)$ on peut extraire une sous suite convergente vers $(h,g)\in\mathcal{C}(Z,X^+)\times\mathcal{C}(Z,Y^+)$
   mais $(h_n(x),g_n(x))\in X_s\times Y_s$ donc $(h(x),g(x))\in (X_s\times Y_s)^+\subset (X\times_S Y)^+$ i.e $f=(h,g)\in\mathcal{C}(Z,X\times_S Y^+)$

□

2.4.1 L'application évaluation

Soient X/S et Y/S deux espaces relatifs et :

$$\phi : X \times \mathrm{Hol}_S(X,Y) \longrightarrow X \times_S Y$$

l'application évaluation.

Proposition 2.4.8 *Soient X un espace complexe compact connexe relatif sur S et Y un espace complexe compact relativement hyperbolique sur S.*

Alors ϕ est fini et donc :

1. $\dim \mathrm{Hol}_S(X,Y) \leq \dim Y_s$ *pour tout $s \in S$.*
2. *Chaque composante connexe de* $\mathrm{Hol}_S(X,Y)$ *est hyperbolique compacte.*

Remarque 2.4.9 si $S = *$ on retrouve le résultat d'Urata[63].

DÉMONSTRATION:

(1) Soient $x_0 \in X$, $f_0 \in \mathrm{Hol}_S(X,Y)$, $y_0 = f_0(x_0)$, U un voisinage dans Y de y_0 et $s_0 = \pi(x_0)$.

Considérons $\mathcal{F}$ la composante connexe de $\mathrm{Hol}_S(X,Y)$ contenant f_0.

On montre que $\{f \in \mathcal{F} \,;\, f(x_0) = f_0(x_0) = y_0\} = \{f_0\}$

Soit $f \in \mathcal{F}$, par compacité de $\mathcal{F}$, il existe un voisinage W de x_0 tel que $f(x) \in U$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et $x \in W$.

Donc l'application évaluation restreinte à $\mathcal{F}$ est à image dans U

$\phi_x : \mathcal{F} \longrightarrow U$ pour $\quad x \in W$

$\quad f \longrightarrow f(x)$

Par un théorème de Douady, $\mathcal{F}$ porte une structure d'espace complexe et compacte donc en appliquant le principe du maximum, on aura $f(x) = f_0(x)$ sur W. X est connexe donc $f = f_0$.

(2) Chaque composante connexe de $\mathrm{Hol}_S(X,Y)$ est hyperbolique.

l'application évaluation donne :

$\phi_{x_0} : \mathcal{F} \longrightarrow Y_{s_0}$

$\quad f \longrightarrow f(x_0)$ est holomorphe injective ${\phi_{x_0}}^{-1}(f_0(x_0)) = \{f_0\}$

Comme Y_{s_0} est hyperbolique donc $\mathcal{F}$ est hyperbolique.

$\square$

Proposition 2.4.10 *Soit Y un espace compact relativement hyperbolique sur S alors $Aut_S(X)$ est fini*

Ceci découle du lemme suivant

Lemme 2.4.11 *Soit G un groupe de Lie compact hyperbolique alors G est fini.*

DÉMONSTRATION: Soit X un champ de vecteur sur G et on considère le groupe à 1-paramètre associé $\mathbb{C} \longrightarrow G$, il est constant car G est hyperbolique, donc G est discret. G étant compact donc G est fini.

$\square$

La propriété d'hyperbolicité est une notion locale sur S

Proposition 2.4.12 *Si pour tout $s \in S$, il existe U un voisinage ouvert de s tel que $Y_U \longrightarrow U$ est relativement hyperbolique alors $Y \longrightarrow S$ est relativement hyperbolique.*

Conséquence *Si pour tout $s \in S$, il existe U tel que Y_U est hyperbolique alors $Y \longrightarrow S$ est relativement hyperbolique.*

Théorème 2.4.13 *Soit $p : Y \longrightarrow S$ une application holomorphe propre. Y est relativement hyperbolique sur S si et seulement si $p : Y \longrightarrow S$ est un espace fibré hyperbolique compact*

DÉMONSTRATION:

La première implication est évidente puisque les fibres sont hyperboliques et compactes.

Inversement les fibres sont compactes hyperboliques alors pour tout $s \in S$, il existe U un voisinage ouvert de s tel que Y_U est hyperbolique. En utilisant la **conséquence** plus haut, on déduit que $p : Y \longrightarrow S$ est un espace fibré compact hyperbolique.

$\square$

La notion d'hyperbolicité relative nous permet de déduire quelques propriétés sur l'espace $\mathrm{Hol}_S(X, Y)$; d'une manière analogue si $Y \xrightarrow{\pi} S$ est un fibré compact hyperbolique, on déduit des propriétés similaires sur $\Gamma(S, Y)$: l'espace des sections holomorphes de π

Théorème 2.4.14 *Soit $Y \longrightarrow S$ un espace fibré compact avec la base S est aussi compact. Alors :*

1. *$\Gamma(S, Y)$ est un sous espace complexe et compact de* $\mathrm{Hol}(S, Y)$
2. *Chaque composante connexe de $\Gamma(S, Y)$ est hyperbolique compacte.*
3. *L'application évaluation $S \times \Gamma(S, Y) \longrightarrow Y$ est fini et donc* $\dim \Gamma(S, Y) \leq Y_s$ *pour tout $s \in S$*

Pour la preuve voir Kobayashi [38].

Chapitre III

Espace des Modules des Espaces Complexes Compacts Hyperboliques

Chapitre 3

Espace des Modules des Espaces Complexes Compacts Hyperboliques

Introduction

Dans ce chapitre, on annonce le critère de représentabilité par un espace de module grossier des foncteurs analytiques dû à Schumacher[56] ensuite on l'applique à notre situation. La première condition suppose que chaque objet possède une déformation semi-universelle, la deuxième que l'application naturelle $p : \mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S$ est propre pour $\mathfrak{X}/S$ et $\mathfrak{Y}/S$ deux familles paramétrées.

On applique le théorème fondamental d'existence d'une déformation semi-universelle pour chaque espace complexe compact dû à Palamodov [53] Douady [13] Forster-Knorr [18] Grauert [22]. Mais pour le deuxième point, on peut montrer que :

$$\tilde{p} : \mathrm{Bime}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S \text{ est propre .}$$

Donc dans la suite notre but est de chercher des conditions supplémentaires sur la déformation ou sur la nature des singularités pour que $p : \mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S$ soit propre.

On considère les approches suivantes :

1) On montre tout d'abord que si la déformation est localement triviale alors p est propre, de plus par un théorème de Flenner-Kosarew [17], on a que chaque espace complexe compact possède une déformation localement triviale semi-universelle.

2) On donne une condition sur $d^*_{X_{reg}}$ pour que toute application holomorphe de X_{reg} dans Y où X est un espace maximal, Y est compact hyperbolique, se prolonge en une application holomorphe sur tout l'espace.

3) On suppose qu'il existe une résolution simultanée des singularités.

3.1 Critère de Représentabilité des Foncteurs Analytiques

On donne un critère dû à Schumacher pour qu'un foncteur analytique possède un espace de module grossier et on peut même donner une description locale de cet espace de module comme quotient par une opération de groupe.

La preuve repose essentiellement sur la théorie de déformation dont on rappelle quelques définitions :

Définition 3.1.1

1. *Une déformation est une application holomorphe propre et plate* $f : \mathfrak{X} \longrightarrow S$*. L'espace* S *est appelé la base de la déformation et* $\mathfrak{X}$ *est l'espace de la déformation.*

   A toute application de changement de base $g : T \longrightarrow S$ *on lui associe* $g^*(f) : \mathfrak{X} \times_S T \longrightarrow T$ *qui est aussi une déformation. En particulier si* g *est un plongement* $g^*(f)$ *est la restriction de la déformation* f *sur* T*.*

2. *Soient* S *un espace complexe avec* $*$ *un point distingué et* X_0 *un espace complexe donné.*

   Une déformation de l'espace X_0 *de base* $(S, *)$ *est une application holomorphe plate* $f : \mathfrak{X} \longrightarrow S$ *avec un isomorphisme* $i : X_0 \simeq f^{-1}(*)$

$$\begin{tikzcd} X_o \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ * \arrow[r, hook] & (S, *) \end{tikzcd}$$

3. *Une déformation* $f : \mathfrak{X} \longrightarrow S$ *de* X *est dite localement triviale si pour tout point* $x \in X$ *la déformation* $(X, x) \longrightarrow (S, *)$ *est isomorphe à la déformation triviale* $(X, x) \times (S, *) \longrightarrow (S, *)$

4. *Une déformation* $\mathfrak{X} \longrightarrow S$ *de* X_0 *est dite verselle si toute déformation* $\mathfrak{X}' \longrightarrow S'$ *de* X_0*, il existe* $\alpha : S' \longrightarrow S$ *telle que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ S' \arrow[r, "\alpha"] & S \end{tikzcd}$$

   avec $\mathfrak{X}' \simeq \mathfrak{X}_{\times S} S'$

   Elle est semi-universelle si $T\alpha$ *: l'application tangente est unique.*

   Elle est universelle si α *est unique.*

5. *On appelle une catégorie fibrée F, un foncteur $p : F \longrightarrow$ (An) vérifiant :*
   (a) *Pour tout morphisme $f : R \longrightarrow S$ dans (An) et pour tout objet a sur S il existe $\tilde{f} : b \longrightarrow a$ telle que $p(\tilde{f}) = f$ qui est cartésien i.e. pour tout $c \longrightarrow a$ sur f il existe $c \longrightarrow b$ sur id_R, b existe à isomorphisme près on la note par $f^*(a)$ ou par $a \times_S R$*
   (b) *La composition de morphismes cartésiens est cartésien.*
   (c) *$\tilde{f} : b \longrightarrow a$ est un isomorphisme si et seulement si $p(\tilde{f})$ est un isomorphisme.*

   A chaque foncteur analytique on lui associe une catégorie fibrée : la catégorie des objets paramétrés.

Maintenant on peut énoncer l'outil principal dans notre travail :

Théorème 3.1.2 *Soient F : (An) $\longrightarrow$ (Ens) un foncteur analytique et $p : F \longrightarrow$ (An) la catégorie fibrée associée à F*

F possède un espace de module grossier si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. *Chaque objet a tel que $p(a) = *$ possède une déformation semi-universelle.*
2. *Pour b et c deux objets dans F telles que $p(b) = p(c) = S$, le foncteur* $\mathrm{Isom}(b, c)$: (An)$/S \longrightarrow$ (Ens) *est représentable par un morphisme $k : I \longrightarrow S$ propre.*
   I_s s'identifie comme espace topologique à $\mathrm{Isom}(b_s, c_s)$

Idée de la preuve Schumacher[56]

Un espace des module est un espace complexe dont ses points correspondent à des classes d'isomorphie. La structure complexe de $\mathfrak{M}$ est donnée telle que pour toute famille $f : X \longrightarrow S$ holomorphe propre, donne une application naturelle :

$$\phi_f : S \longrightarrow \mathfrak{M} \quad s \mapsto [X_s] \text{ est } \textit{holomorphe.}$$

(a) Construction Topologique :

Soit $a_0 \in F$ telle que $p(a_0) = *$

$$\mathfrak{M} = \bigcup p(a)/\sim \text{ où } a \text{ est un objet semi-universelle}$$

$\mathfrak{M}$ est la réunion disjointe des bases des déformations semi-universelles et en identifiant les points à fibres isomorphes, i.e. la relation d'équivalence est donnée par $s_1 \sim s_2$ si $X_{s_1} \simeq X_{s_2}$.

$\mathfrak{M}$ est un espace topologique qui porte la topologie quotient, il est Hausdorff puisque k est propre.

L'hypothèse que l'application k est propre nous permet aussi de montrer l'analycité de certain ensembles.

(2) Construction analytique :

On fixe a un objet semi-universelle et $(S, s_0) = p(a)$ la base de l'objet a. On note par $\mathrm{Aut}(a_0)$ les automorphismes de a_0 et $\mathrm{Aut}^{\varepsilon}(a_0)$ les automorphismes de a_0 qui se prolonge sur a (même sur un petit voisinage de s_0.)

On suppose que $\mathrm{Aut}^{\circ}(a_0) \subset \mathrm{Aut}^{\varepsilon}(a_0)$ alors

1. a est universelle.
2. $(S/\sim)$ s'identifie à S/G où G est un groupe qui agit sur S ; $G = \mathrm{Aut}(a_0)/\mathrm{Aut}^{\varepsilon}(a_0)$.

donc $S/\sim$ porte une structure naturelle d'espace complexe et pour tout $g : b \longrightarrow T$ une autre déformation de a_0 l'application $\varphi_g : T \longrightarrow \mathfrak{M}$ est la composition de $T \longrightarrow S$ et de $S \longrightarrow \mathfrak{M} = S/G$.

Soit $\pi_j : S \times S \longrightarrow S$ la j-ème projection (j=1,2).

$$p : Isom(\pi_1^* a, \pi_2^* a) \longrightarrow S \times S \text{ est propre}$$

donc $\Gamma(= \mathrm{Im}(k))=$ Graphe $(\sim)$ est un sous ensemble analytique de $S \times S$.

Dans la suite on décrit brièvement l'action de $\mathrm{Aut}(a_0)$ sur la base (S, s_0).

Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(a_0)$ ceci nous donne autre déformation de a_0 et on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & a_0 \arrow[r, hook, "i"] & a \arrow[r, "A"] \arrow[d] & a \arrow[d] \\
* \arrow[rr, hook] & & S \arrow[r, "\alpha"] & S
\end{tikzcd}$$

Comme a est universelle, il existe $\alpha(\varphi)$ unique telle que $A \circ i \circ \varphi = i$. Si φ et ψ dans $\mathrm{Aut}(a_0)$ telles que $\alpha(\varphi) = \alpha(\psi)$ alors les deux déformations associées sont isomorphes i.e. $\varphi \circ \psi^{-1} \in \mathrm{Aut}^{\varepsilon}(a_0)$. On obtient ainsi la représentation suivante :

$$G = \mathrm{Aut}(a_0)/\mathrm{Aut}^{\varepsilon}(a_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(S, s_0)$$

On montre que si Γ_0 est une composante irréductible de Γ qui contient (s_0, s_0) alors $\Gamma_0 = \{(s, g.s)/s \in S\}$ $g \in G$.

3.2 Espace des Modules des Variétés Compactes Complexes Hyperboliques

Dans cette partie, on suit l'approche de Fujiki [19], Schumacher [58] pour prouver l'existence de l'espace des modules des variétés kählériennes polarisées. Dans notre cas les variétés qu'on considère sont hyperboliques donc polarisées d'une manière naturelle par leur métrique de Royden, qui sont de Finsler.

Le point essentiel à prouver est que $I = \mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S$ est propre pour $\mathfrak{X}/S$ et $\mathfrak{Y}/S$ deux familles de variétés compactes et hyperboliques.

Tout d'abord on commence par des résultats préliminaires :

1. Soient $\mathfrak{X}/S$ et $\mathfrak{Y}/S$ deux morphismes d'espaces complexes propres, on note par $D_{\mathfrak{X}\times_S\mathfrak{Y}} \longrightarrow S$ l'espace des modules de Douady [12] associé à $\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{Y} \longrightarrow S$. On considère $I = \mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, l'ouvert de Zariski de $D_{\mathfrak{X}\times_S\mathfrak{Y}}$, qui représente le foncteur
$$\tilde{I} : (\mathrm{An}/S) \longrightarrow (\mathrm{Ens}) \quad \tilde{I}(T/S) = \mathrm{Isom}_T(\mathfrak{X} \times_S T, \mathfrak{Y} \times_S T)$$
voir Schuster [59].
2. Soit $\alpha : I \longrightarrow S$ un morphisme d'espaces complexes avec I est un ouvert de Zariski dans $\bar{I}$ et α se prolonge en $\bar{\alpha} : \bar{I} \longrightarrow S$ qui est *propre*.
Alors il existe U un ouvert de Zariski maximal au sens de l'inclusion tel que α soit propre sur U. Il suffit de prendre $U = S - \bar{\alpha}(\bar{U} - U)$
3. On montre que la clôture de I dans $D_{\mathfrak{X}\times_S\mathfrak{Y}}$ est analytique voir Fujiki [20].
4. Fujiki[19] donne un critère pour qu'un sous ensemble analytique $A \subset D_{\mathfrak{X}/Y}$ soit propre sur Y via $\delta : A \longrightarrow Y$ la projection naturelle.
Soient $f : \mathfrak{X} \longrightarrow Y$ un morphisme propre, β une 2-forme sur $\mathfrak{X}$ telle que sa restriction sur les fibres est une (1,1)- forme positive. $D_{\mathfrak{X}/Y}$ dénote l'espace de Douady relatif et $A \subset D_{\mathfrak{X}/Y}$ un sous ensemble analytique avec $\delta : A \longrightarrow Y$ la projection induite par $D_{\mathfrak{X}/Y} \longrightarrow Y$.

Définition 3.2.1 *On dit que A est borné s'il existe un ouvert de Zariski V et une constante $R > 0$ tels que :*
pour tout $d \in V$ et $Z_d \subset X_{\delta(d)}$ un représentant de d qui est de dimension pure q on a :
$$\mathrm{Vol}(Z_d) = \int_{Z_d} \beta^q_{\delta(d)} \leq R$$

Proposition 3.2.2 *Soit $A \subset D_{\mathfrak{X}/Y}$, on suppose que pour tout $U \subset Y$ on a $A_U \longrightarrow U$ est bornée. Alors A est propre sur Y.*

Proposition 3.2.3 *Soient $\mathfrak{X}/S$ et $\mathfrak{Y}/S$ deux familles de variétés hyperboliques compactes alors on a : $\bar{I}$ est propre sur S.*

Démonstration:
Soient $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow S$ et $\sigma : \mathfrak{Y} \longrightarrow S$ deux applications holomorphes propres à fibres hyperboliques
$$\text{et } f_s : X_s \longrightarrow Y_s \text{ biholomorphe}$$

on dénote par $\Gamma_s = Gr(f_s) \subset X_s \times Y_s$

Soient ω_1 une 1-1 forme sur $\mathfrak{X}$ et H_1 la métrique associée à ω_1 et ω_2 une 1-1 forme sur $\mathfrak{Y}$ et H_2 la métrique associée à ω_2
Le volume de $\Gamma_s = Gr(f_s)$ est donné par :

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_s) = \int_{X_s} (\omega_1 + f_s^*\omega_2)^k$$

où k est la dimension des fibres.

En appliquant la proposition précédente, il suffit de prouver que les volumes Γ_s restent bornés.

$\{K_{Y_s}\}$ est semi-continue inférieurement, il existe c_2 une constante positive telle que $H_2 \leq c_2 K_{Y_s}$ donc $f_s^* H_2 \leq c_2 f_s^*(K_{Y_s}) \leq c_2 K_{X_s}$
$\{F_{X_s}\}$ est semi-continue supérieurement, il existe c_1 une constante positive telle que $K_{X_s} \leq c_1 H_1$.
Par conséquent

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_s) = \int_{X_s} (\omega_1 + f_s^*\omega_2)^k \leq (1 + c_1 c_2)^k \int_{X_s} (\omega_1)^k$$

or le volume des X_s par rapport à ω_1 reste borné pour s qui varie dans un compact.
Donc le volume des Γ_s reste borné.

$\square$

5. Il reste à prouver que $\bar{I} = I$ ou que $S = U$.
Sinon il existe s_0 tel que $\bar{I}_{s_0} \neq I_{s_0}$ et $h : \Delta \longrightarrow \bar{I}$ une courbe avec $h(0) \in \bar{I}_{s_0} \setminus I_{s_0}$ et $h^{-1}(\bar{I} \setminus I) = \{0\}$. On note par $\bar{h}$ la composition de h avec la projection naturelle $\bar{I} \longrightarrow S$, on considère ensuite $(\mathfrak{X} \times_S \Delta, \Delta)$ et $(\mathfrak{Y} \times_S \Delta, \Delta)$ les images réciproques de $\mathfrak{X}/S$ et $\mathfrak{Y}/S$ par Δ/S.
l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \times_S \Delta & \xrightarrow{\Psi} & \mathfrak{Y} \times_S \Delta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta & \xrightarrow{id} & \Delta \end{array}$$

Ψ est biméromorphe et biholomorphe sur $\mathfrak{X} \times_S \Delta^*$, cette application se prolonge sur $\mathfrak{X} \times_S \Delta$ en une application biholomorphe car $\mathfrak{X} \times_S \Delta$ et $\mathfrak{Y} \times_S \Delta$ sont des variétés donc $X_{s_0} \simeq Y_{s_0}$ par $h(0)$ ce qui est absurde.

Ce critère est la “version hyperbolique” du critère de Matsusaka-Mumford pour les variétés polarisées, ce même critère a été démontré par Fujiki [19], Schumacher [58] dans le cas des variétés kählériennes polarisées.

3.3 Espace des Modules des Espaces Complexes Compacts Hyperboliques

On considère le foncteur suivant :

$$F : (\mathrm{An}) \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

$F(S) =$ L'ensemble des classes d'isomorphie des déformations $\mathfrak{X}/S$ localement triviales à fibres compactes hyperboliques .

On applique le critère plus haut pour prouver que le foncteur F possède un espace de module grossier.

Par un théorème de Palamodov [53], Douady [13], Forster-Knorr [18] et Grauert [22] on sait que :

Théorème 3.3.1 *Tout espace complexe compact possède une déformation semi-universelle.*

Aussi par un théorème de Flenner-Kosarew [17] on a :

Théorème 3.3.2 *Tout espace complexe compact possède une déformation semi-universelle localement triviale.*

Il reste donc à vérifier que :

$$p : \mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S$$

est propre pour $\mathfrak{X}/S$ et $\mathfrak{Y}/S$ deux familles paramétrées dans F.

Si $\mathfrak{X}/S$ et $\mathfrak{Y}/S$ sont deux déformations à fibres hyperboliques compactes, on montre qu'on a :

Théorème 3.3.3 *la projection naturelle* $\tilde{p} : \mathrm{Bime}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S$ *est propre.*

Corollaire 3.3.4 *pour S hyperbolique, l'espace* $\mathrm{Bime}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *est hyperbolique*

DÉMONSTRATION:

Soit $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ une suite d'applications méromorphes, on a $f_s|X_{s_{reg}} : X_{s_{reg}} \longrightarrow Y_s$ est holomorphe.

Soit $x_0 \in X_{s_0}$ un point régulier, en ce point la déformation est localement triviale donc il existe un voisinage U et un $S-$isomorphisme $U \simeq \Delta^n \times S$ par suite $X_s \cap U \simeq \Delta^n$.

$f_s|X_s \cap U : \Delta^n \longrightarrow Y_s$ est holomorphe et comme la famille $\cup_{s\in\tilde{S}}\mathrm{Hol}(\Delta^n, Y_s)$ est compacte pour $s \in \tilde{S}$ un voisinage compact de s_0, on déduit que $f_s \longrightarrow f$ uniformément sur tout compact de $X_{0_{reg}}$

D'après les théorèmes de prolongement voir section 1.4, f se prolonge en $\tilde{f}$: $X_{s_0} \longrightarrow Y_{s_0}$ méromorphe.

On applique la même stratégie à f^{-1}, on déduit que $\tilde{p}$ est propre.

□

En considérant les déformations localement triviales, on montre que p est propre.

Théorème 3.3.5 *On suppose que $\mathfrak{X}/S$ et $\mathfrak{Y}/S$ sont localement triviales alors*

$$p : \mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S$$

est propre

DÉMONSTRATION:

On reprend la preuve précédente et on utilise que pour $\tilde{S}$ un voisinage compact qu'on a $\cup_{s\in\tilde{S}}\mathrm{Hol}(M, Y_s)$ est compact pour M un espace complexe quelconque, voir le lemme 2.1.7 et la remarque 2.1.10.

□

On déduit le théorème suivant :

Théorème 3.3.6 *Le foncteur F est représentable par un espace de module grossier.*

3.3.1 Deuxième Approche

A partir du raisonnement de la preuve 3.3, on remarque qu'on obtient une application holomorphe $f : X_{s_{0reg}} \longrightarrow Y_{s_0}$ mais f ne se prolonge que méromorphiquement sur X_{s_0}.

On constate alors qu'il suffit d'étudier les conditions pour prolonger $f : X_{s_{0reg}} \longrightarrow Y_{s_0}$ sur X_{s_0} holomorphiquement.

On se place en toute généralité dans le cas où X est un espace complexe, A un sous ensemble analytique et Y est compact hyperbolique.

La situation ici et beaucoup plus subtile et les théorèmes de prolongements dépendent des lieux singuliers de X et de A et même dans la situation où X ne possède que des singularités isolées, il est difficile de donner des conditions sur les singularités sans faire intervenir la pseudo-distance d_{X-A}.

On donne une condition dans le cas des singularités isolées, ainsi une condition (C) qui ne fait pas intervenir une résolution des singularités dont on n'a pas toujours une expression explicite.

Il suffit d'étudier le cas où $A \subset \mathrm{Sing}(X)$ puisque f se prolonge sur $A \cap X_{reg}$, voir corollaire 1.4.2.

Avant de continuer, on rappelle la construction de la pseudo-distance de Kobayashi d^*.

Dans [37, 38], Kobayashi a introduit une nouvelle pseudo-distance d^*_Y pour simplifier les preuves des théorèmes de prolongements de Noguchi.

Définition 3.3.7 *Soit Y espace complexe.*

$$d^*_Y = \inf_{\alpha}\ l(\alpha) \text{ \textit{où} } \alpha \text{ \textit{chaîne de Kobayashi dans} } \mathrm{Hol}(\Delta^*, Y)$$

Il est facile de prouver les propriétés suivantes :

Exemples et propriétés

1. $d_Y^* \leq d_Y$ et $d_Y^* = d_Y$ dans le cas Y est compact hyperbolique.
2. $d_\Delta^* = d_\Delta$ (sur Δ) et $d_{\Delta^*}^* = d_\Delta$ sur Δ^*.
3. d_Y^* est la plus grande pseudo-distance sur Y qui vérifie le principe de décroissance pour $\mathrm{Hol}(\Delta^*, Y)$ entre d_Y^* et d_Δ.
4. $d_Z^*(f(x), f(y)) \leq d_Y^*(x, y)$ pour tout $f \in \mathrm{Hol}(Y, Z)$.

La propriété (4) du théorème 1.3.3 qui caractérise la fait que Y est hyperboliquement plongé dans Z entraîne qu'il existe une métrique H sur Z telle que $d_H \leq d_Y$. Cette dernière estimation peut-être amélioré en $d_H \leq d_Y^*$ et même en $d_H \leq d_{Y,Z}$.

Théorème 3.3.8 *Y est hyperboliquement plongé dans Z si et seulement si il existe une métrique H sur Z telle que pour tout $f \in \mathrm{Hol}(\Delta^*, Y)$ on a $f^*(H) \leq K_\Delta$ et par conséquent $d_H \leq d_Y^*$*

Maintenant, on énonce la condition (C) :

Condition (C) : Soient $p \in X$ et p_n et q_n deux suites quelconques dans $X - A$ qui convergent vers p alors $\lim d_{X-A}^*(p_n, q_n) \longrightarrow 0$.

Cette condition est satisfaite dans les exemples suivants :

Exemples 3.3.9

1. *$X = \Delta$ et $A = \{0\}$ on a : $d_{X-A}^* = d_\Delta$.*
2. *X est une variété, A est un sous ensemble analytique de codim ≥ 2 on a $d_{X-A}^* \leq d_{X-A} = d_X$.*
3. *$X = \Delta^n$ et $A = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_1 \ldots . z_k = 0\}$, $(1 \leq k \leq n)$ on a :*

$$(*) \quad d_{X-A}^* \leq n.d_X$$

L'estimation (*) a été démontrée par Kobayashi voir [37] en explicitant une chaîne de Kobayashi entre Δ^* et $\Delta^{*k} \times \Delta^{n-k}$.

Proposition 3.3.10 *Soient X est un espace complexe maximale, A est un sous ensemble analytique et Y est hyperboliquement plongé dans Z.*

On suppose que (X, A) vérifie la condition (C). Alors toute application holomorphe $f : X - A \longrightarrow Y$ se prolonge holomorphiquement sur X dans Z

DÉMONSTRATION:

Assertion : Il existe une métrique H sur Z telle que

$$(**) \qquad d_H(f(x), f(y)) \leq d_{X-A}^*(x, y) \text{ pour tout } f \in \mathrm{Hol}(X - A, Y)$$

On utilise deux ingrédients : le premier qu'il existe une métrique H sur Z qui vérifie $d_H \leq d_Y^*$ puisque Y est hyperboliquement plongé dans Z et le deuxième que si $f : X - A \longrightarrow Y$ est une application holomorphe alors $d_Y^*(f(x), f(y)) \leq d_{X-A}^*(x, y)$ par conséquent on aura $d_H(f(x), f(y)) \leq d_{X-A}^*(x, y)$.

Pour prouver que f se prolonge sur X, il suffit de prouver qu'elle se prolonge sur $\mathcal{C}(X - A \cup \{p\}, Z)$ pour tout $p \in X$.

Pour tout $p \in X$, il existe un suite $(x_n) \in X - A$ qui converge vers p, de la suite $f(x_n)$ on peut extraire une sous suite convergente, mais dans ce cas $f(x_n)$ est convergente grâce à l'inégalité $(**)$. De plus cette limite est indépendante de la suite (x_n) choisie, on définit ainsi $\tilde{f}(p) := \lim f(x_n)$, $\tilde{f}$ est le prolongement continue de f sur X. Puisque X est maximale, $\tilde{f}$ est holomorphe. □

Sous la condition (C), on peut même prouver les théorèmes d'extension et de convergence de Noguchi :

1er cas : X est une variété et A est un diviseur à croisement normaux

Ce sont les théorèmes de Noguchi "usuels". Dans ce cas on a l'estimation (*). On redémontre ces théorèmes de manière encore plus directe en utilisant l'estimation (*) démontrée par Kobayashi [36] et le théorème 3.3.11.

A partir de $(*)$ et $(**)$, on remarque qu'on a :

$$d_H(f(x), f(y)) \leq c.d_X(x, y) \text{ pour tout } f \in \mathrm{Hol}(X - A, Y)$$

et donc tout $f \in \mathrm{Hol}(X - A, Y)$ est c-lipschitzienne, par suite on peut appliquer un théorème classique de topologie sur le prolongement des applications lipschitzienne suivant :

Théorème 3.3.11 *Soient $f : X_0 \longrightarrow Y$ une application continue entre espaces métriques où X_0 est dense dans X , (Y, d_Y) est complet et f est c-lipschitzienne :*

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq c.d_X(x, y)$$

Alors f se prolonge en $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$ continue (même c-lipschitzienne)

L'idée de la preuve est simple, puisque f transforme une suite de Cauchy dans X en une suite de Cauchy dans Y.

Maintenant les théorèmes de Noguchi sont des conséquences faciles de $(*)$ et le théorème plus haut : il est clair que si $f_n : X - A \longrightarrow Y$ une suite d'applications holomorphes, f_n se prolonge en $\tilde{f}_n : X \longrightarrow Z$ et les $(\tilde{f}_n)$ constituent une famille équicontinue dans $\mathrm{Hol}(X, Z)$ puisqu'ils sont encore c-lipschitzienne entre d_H et d_X i.e

$$d_H(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}_n(y)) \leq c.d_X(x, y)$$

2ème cas : X est un espace complexe et A est un sous ensemble analytique de X

Inspirés de la caractérisation de plongement hyperbolique voir théorème 1.3.4, Joseph et Kwack [42] ont introduit une propriété topologique (k) :

Propriété k : Soient X et Y deux espaces topologiques, $X_0 \subset X$ un sous espace dense dans X et $\Omega \subset \mathcal{C}(X_0, Y)$.

On dit que Ω vérifie la *propriété k* si $x \in X$; $y \in Y$ et $(x_\alpha, \nu_\alpha, f_\alpha) \in X_0 \times X_0 \times \Omega$ une suite tels que : si $x_\alpha \longrightarrow x$; $\nu_\alpha \longrightarrow x$ et $f_\alpha(x_\alpha) \longrightarrow y$ alors $f_\alpha(\nu_\alpha) \longrightarrow y$.

En utilisant des méthodes purement topologiques, les auteurs montrent les théorèmes de prolongement et de convergence de Noguchi et même plus, voir théorème p :1242 dans Joseph et Kwack [42].

Le point essentiel de la preuve : $\Omega \subset \mathcal{C}(X, Y)$ est équicontinue si et seulement si Ω est équicontinue de $X_0 \cup \{\nu\}$ dans Y pour tout $\nu \in X$

Corollaire 3.3.12 *Sous la condition C les théorèmes de prolongement et de convergence de Noguchi restent valables*

Il est facile de voir *propriété (k)* est une conséquence de la condition (C) puisque $d_H((f(x), f(y)) \leq d^*_{X-A}(x, y)$

On considère maintenant un cas simple où f se prolonge holomorphiquement sur tout l'espace.

Théorème 3.3.13 *Soient X un espace complexe maximal, $f : X_{reg} \longrightarrow Y$ holomorphe tels que* dim *S(X)=0 et Y est hyperbolique compact. Considérons x un point singulier et π une résolution des singularités $\pi : M \longrightarrow V(x)$ telle que $E = \pi^{-1}(x)$ est dégénérée i.e. $d_E = 0$. Alors f se prolonge holomorphiquement sur X en $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$.*

DÉMONSTRATION:

Considérons $f \circ \pi_{|M-E} : M - E \longrightarrow Y$, d'après le *Théorème 1.4.1* $f \circ \pi$ se prolonge en $g : M \longrightarrow Y$ holomorphe. L'application $g \circ \pi^{-1} : V(x) \longrightarrow Y$ est méromorphe et $g \circ \pi^{-1}|V(x) - x = f$ et $g_{|E} =$ un singleton car $d_Y(g(x), g(y)) \leq d_E(x, y) = 0$ pour tout x,y $\in$ E.

Donc $g \circ \pi^{-1}$ est le prolongement continue de f sur $V(x)$. X est maximale alors le prolongement de f est holomorphe.

□

Théorème 3.3.14 *On suppose que les fibres sont maximales. Sous l'une des ces conditions*

i) la condition (C)

ii) les fibres sont des surfaces à singularités isolées rationnelles.
Alors on a

$$p : \mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S$$

est propre, elle est même fini.

Théorème 3.3.15 *Il existe un espace de module grossier pour les surfaces complexes compactes hyperboliques à singularités rationnelles ou elliptiques.*

3.3.2 Troisième Approche

Morphisme contraction des déformations

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une modification propre entre espaces complexes réduits où Y est normale donc $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$.

On note par :

$\mathcal{C}$: la catégorie des anneaux Artiniens locaux de corps résiduel $\mathbb{C}$.

$\mathrm{Def}_X, \mathrm{Def}_Y : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}$: le foncteur des déformations de X (resp. de Y).

Soient $A \in \mathcal{C}$ et $\tilde{X}$ une déformation de X sur A.

Définition 3.3.16 *On dit que $\tilde{X}$ se contracte sur $\tilde{Y}$ une déformation de Y sur A s'il existe le diagramme commutatif suivant des A-déformations :*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[dd] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & & X \arrow[ll, hook'] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd] & \\
& \tilde{Y} \arrow[dl] & & Y \arrow[ll] \arrow[dl] \\
A \arrow[rr] & & * &
\end{tikzcd}$$

Si un tel diagramme existe alors $\tilde{f}_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ voir Wahl [66].

De plus Wahl donne une condition nécessaire et suffisante pour contracter les déformations : $\tilde{X}$ se contracte en une déformation $\tilde{Y}$ une déformation de Y sur A si et seulement si $f_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ est $A-$ plat si et seulement si $f_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \otimes_A \mathbb{C} \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ est surjective.

Il existe une construction plus explicite du morphisme contraction $\beta : \mathrm{Def}_X \longrightarrow \mathrm{Def}_Y$ sous la condition que $R^1 f_* \mathcal{O}_X = 0$ où $f : X \longrightarrow Y$ est l'application birationelle propre considérée.

Soient $A \in \mathcal{C}$ et X_A une déformation de X sur A alors X_A induit une déformation $f_*(\mathcal{O}_{X_A})$ de Y sur A :

DÉMONSTRATION:

La preuve est par récurrence sur la longueur de A. Si $A = \mathbb{C}$ le résultat est clair.

Soit A arbitraire et

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow A \longrightarrow A' \longrightarrow 0$$

une petite extension de A par des $\mathbb{C}$-algèbres. On suppose que la proposition est démontrée pour A'. Soient X_A une déformation de X sur A et $X_{A'} \longrightarrow A'$ la déformation induite sur A'. On a la suite exacte suivante sur X :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{A'}} \longrightarrow 0$$

on applique f_* on aura :

$$0 \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_{X_A}) \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_{X_{A'}}) \longrightarrow R^1 f_*(\mathcal{O}_Y)$$

mais on a : $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ et $R^1 f_*(\mathcal{O}_X) = 0$.

On conclut qu'on obtient ainsi $(Y, f_*(\mathcal{O}_{X_A}))$ une déformation plate de Y sur A puisque ${\mathrm{Tor}_1}^A(f_*(\mathcal{O}_{X_A}), A') = 0$ et $f_*(\mathcal{O}_{X_{A'}})$ est A'-plat par hypothèse de récurrence.

$\square$

L'application tangente $\beta(\mathbb{C}[\varepsilon]) : \mathbf{T}^1_X \longrightarrow \mathbf{T}^1_Y$ est donnée aussi d'une manière explicite où $\mathbf{T}^1_X$ (resp. $\mathbf{T}^1_Y$) est isomorphe d'une manière canonique à $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ (resp. $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_Y)$) :

Soit $0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow F \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow 0$ une extension qui représente un élément dans $\mathbf{T}^1_X$, on applique f_* et on obtient $0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*(F) \longrightarrow f_*(\Omega^1_X) \longrightarrow 0$ une suite exacte car $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ et $\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{O}_X = 0$. Cette extension donne un élément dans $\mathrm{Ext}^1(f_*(\Omega^1_X), \mathcal{O}_Y)$. Par l'application naturelle $\Omega^1_Y \longrightarrow f_*(\Omega_X)$, on obtient un élément de $\mathbf{T}^1_Y = \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_Y)$.

Déformations Équisingulières

Soit $\tilde{X} \longrightarrow X$ une résolution des singularités de X de diviseur exceptionnel $D \subset \tilde{X}$. On considère les déformations équisingulières de $\mathfrak{X}/S$ de X :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D} \arrow[r, hook] & \tilde{\mathfrak{X}} \arrow[rr] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & \mathfrak{X} \arrow[dl, "\pi"] \\ & & S & \end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{D} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{X}}$ est une déformation logarithmique de $D \hookrightarrow \tilde{X}$

Un isomorphisme de déformation entre $a = (\mathfrak{D} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X}, S)$ et $b = (\mathfrak{B} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{Y}, S)$ est donné par le diagramme suivant sur S.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathfrak{X}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "\wr"] \\
\tilde{\mathfrak{Y}} \arrow[r] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

et l'isomorphisme entre $\tilde{\mathfrak{X}}$ et $\tilde{\mathfrak{Y}}$ renvoie $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{B}$.

Voir Huikeshoven[28] proposition 2.1 et pour l'aspect formel du foncteur résolution simultanée des singularités et le travail de Horikawa [26] pour l'aspect convergent dans le cadre analytique.

Tout d'abord on montre que le foncteur des résolutions équisingulières est indépendant de la résolution choisie.

L'outil principal dans ce paragraphe est le théorème de factorisation faible des applications birationnelles : ce théorème dit qu'on peut décomposer une application birationnelle entre deux variétés algébriques lisses complètes en une suite d'éclatements et contractions de centres lisses, ce théorème est déjà connu pour les surfaces. Ce théorème est du à Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk voir l'exposé L. Bonavero [6].

Théorème 3.3.17 *Soit $\phi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle entre deux variétés algébriques complètes et lisses X_1 et X_2 sur k un corps algébriquement clos. Alors ϕ se décompose en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses i.e.*

$$X_1 = V_0 \overset{\phi_0}{\dashrightarrow} V_1 \overset{\phi_1}{\dashrightarrow} \dots V_i \overset{\phi_i}{\dashrightarrow} V_{i+1} \overset{\phi_{i+1}}{\dashrightarrow} \dots \overset{\phi_{l-2}}{\dashrightarrow} V_{l-1} \overset{\phi_{l-1}}{\dashrightarrow} V_l = X_2$$

avec ϕ_i ou ϕ_i^{-1} est un éclatement de centre lisse le long d'une sous variété irréductible.

Dans le cas de la géométrie complexe ce théorème se traduit par : *Toute application biméromorphe entre variétés compactes projectives se décompose en une suite d'éclatements et contractions de centres lisses.*

En appliquant le théorème de factorisation faible, on constate que étant donnée une résolution des singularités alors toutes les autres résolutions sont obtenues à partir de celle ci par une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses.

Soient X un espace complexe compact, $\pi : Y \longrightarrow X$ une résolution des singularités de diviseur exceptionnel $D = \cup D_i$ à croisement normaux où D_i sont des hypersurfaces lisses et $\varphi : Z \longrightarrow Y$ un éclatement de centre lisse C.

On sait qu'il existe une contraction $\varphi_* : \mathrm{Def}(Z) \longrightarrow \mathrm{Def}(Y)$ puisque $\varphi_*(\mathcal{O}_Z) = \mathcal{O}_Y$ et que $\mathrm{R}^1\varphi_*\mathcal{O}_Z = 0$.

$$\varphi_* : \mathrm{Def}(Z) \longrightarrow \mathrm{Def}(Y) \qquad [\mathcal{Z}] \mapsto [\mathcal{Y}]$$

On note par $\mathrm{ES}_Y(A)$ les classes d'isomorphie des déformations $\mathcal{D}_1, \dots \mathcal{D}_n \hookrightarrow \mathcal{Y}$ sur A de $D_1, \dots D_n \hookrightarrow Y$ qui se contractent sur X. C'est un sous foncteur des déformations de Y.

Il existe une application naturelle : $\mathrm{ES}_Y(A) \longrightarrow \mathrm{Def}_A(X)$.

Il est facile de voir grâce à la caractérisation des contractions des déformations de Wahl que si $\mathcal{Y}$ se contracte sur X si et seulement si $\mathcal{Z}$ se contracte aussi, puisque $\varphi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}) = \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$.

Donc φ_* induit une application naturelle entre $\mathrm{ES}_Z(A)$ et $\mathrm{ES}_Y(A)$.

Assertion : L'application φ_* est surjective.

Ainsi on aura que l'image de ES dans $\mathrm{Def}(X)$ est indépendante de la résolution choisie.

Soit $\mathcal{Y}$ une déformation de Y sur A, il existe un recouvrement V_i de Y telle que : $\mathcal{Y}_i \simeq V_i \times A$. Soit $\mathcal{Z}$ la déformation de Z donnée localement par $\mathcal{Z}_i = \varphi^{-1}(V_i) \times A$ sur A (ces morceaux se recollent bien) et on obtient $\mathcal{Z}$ une déformation de Z sur A.

Il reste maintenant à vérifier que cette construction est indépendante de la classe d'isomorphie de la déformation de Y.

Soient $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}'$ deux déformations de Y isomorphes dans $\mathrm{ES}_Y(A)$ qui se contractent sur $\mathrm{Def}_X(A)$. D'après la propriété universelle des applications monoïdales on constate qu'il existe un isomorphisme entre $X_i \times A$ et $X_i \times A$ avec $X_i = \varphi^{-1}(V_i)$ dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X_i \times A \arrow[r, dashed, "\sim"] \arrow[d] & X_i \times A \arrow[d] \\ \mathcal{Y}_i \simeq V_i \times A \arrow[r, "\sim"] & V_i \times A \simeq \mathcal{Y}_i' \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des éclatements le long de $C_i \times A$, puisque $C_i \times A$ est envoyé sur $C_i \times A$.

Remarques 3.3.18

Brieskorn et Artin [2] ont construit dans le cas d'une surface à singularité rationnelle double une résolution équisingulière modulo un changement de base fini. Plus précisément si $\mathfrak{X} \longrightarrow S$ est une déformation semi-universelle de (X_0, x_0), alors il existe $\mathfrak{Y} \longrightarrow T$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] & X_0 \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ T \arrow[r, "\varphi"] & S & s_0 \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

avec

1. $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est propre surjective.
2. $T \longrightarrow S$ est surjective fini.
3. $\mathfrak{Y} \longrightarrow T$ est lisse.
4. Pour tout $t \in T$, le morphisme $Y_t \longrightarrow X_{\varphi(t)}$ est une résolution minimale des singularités.

De plus ce diagramme est une résolution semi-universelle des déformations équisingulières voir [28] et Burns-Wahl[8].

Maintenant on s'intéresse à prouver que p est propre dans le cas des déformations équisingulières assez particulières.

Soient a=($\mathfrak{D} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X}, S$) et b=($\mathfrak{B} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{Y}, S$) deux déformations équisingulières avec :

1. Pour $s \in S$, les fibres X_s (resp. Y_s) sont hyperboliques, compacts, *maximales* à *singularités isolées.*
2. Pour tout $s \in S$, $\tilde{X}_s \setminus D_s$ (resp. $\tilde{Y}_s \setminus B_s$) est *hyperboliquement plongé dans* $\tilde{X}_s$ (resp. $\tilde{Y}_s$).

Soient (s_n) une suite dans S qui tend vers s_0 et (f_n, g_n) des isomorphismes qui réalise le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{s_n} \arrow[r, "g_n", "\sim"'] \arrow[d, "\sigma"'] & \tilde{Y}_{s_n} \arrow[d, "\nu"] \\ X_{s_n} \arrow[r, "f_n", "\sim"'] & Y_{s_n} \end{tikzcd}$$

où

$\sigma : \tilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathfrak{X}$, $\nu : \tilde{\mathfrak{Y}} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ sont les résolutions simultanées des singularités associées aux objets a et b et $g_n(D_{s_n}) = B_{s_n}$.

D'après le théorème 4.4.2 du chapitre 4, par passage à une sous suite on peut supposer que g_n converge uniformément sur tout compact vers $g : \tilde{X}_{s_0} \xrightarrow{\sim} \tilde{Y}_{s_0}$ un isomorphisme qui vérifie $g(D_0) = B_0$ i.e. g renvoie le diviseur exceptionnel de $\tilde{X_{s_0}}$ sur celui de $\tilde{Y_{s_0}}$

On définit alors $f = \nu \circ g \circ \sigma^{-1}$, f est une application biméromorphe, de plus f est un isomorphisme entre $X_{s_{0reg}}$ et $Y_{s_{0reg}}$. Si x_0 est un point singulier de X_{s_0} alors $f(x_0) = \nu \circ g(D_{s_0}) = \alpha(B_0) = \{y_0\}$ et on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{s_0} \arrow[r, "g", "\sim"'] \arrow[d, "\sigma"'] & \tilde{Y}_{s_0} \arrow[d, "\nu"] \\ X_{s_0} \arrow[r, "f", "\sim"'] & Y_{s_0} \end{tikzcd}$$

Remarque 3.3.19

(1) Si on suppose qu'on peut déformer un chemin γ_0 reliant deux points réguliers dans une fibre distinguée et qui touche les lieux singuliers un nombre fini de fois en un chemin $\tilde{\gamma_0}$ qui est dans *les lieux réguliers* avec $|L(\gamma_0) - L(\tilde{\gamma_0})| \leq \varepsilon$ où $L(\gamma)$ est la longueur de γ par rapport à la métrique de Kobayashi-Royden. La proposition 2.1.4 de la semi-continuité supérieure est essentielle pour prouver que f_0 est lipschitzienne, donc prolongeable sur $X_{s_{0reg}}$

(2) Si on procède réciproquement et on arrive à prouver que f_0 est un isomorphisme, on utilise des résolutions des singularités canoniques voir [5] pour obtenir g qui est un isomorphisme avec $f \circ \sigma = \nu \circ g$ i.e. l'isomorphisme f se remonte en un isomorphisme g.

Chapitre IV

Espace des Modules des Variétés Hyperboliquement Plongées

Chapitre 4

Espace des Modules des Variétés Hyperboliquement Plongées

L'espace des modules des applications holomorphes d'une variété compacte dans un espace hyperboliquement plongé i.e. $\mathrm{Hol}(X, Y)$ où X est une variété compacte et Y est hyperboliquement plongé dans Z a été étudié précédemment par Noguchi [50, 46], il a montré que cet espace est un ouvert de Zariski dans un sous espace compact de $\mathrm{Hol}(X, Z)$ et que l'application évaluation est holomorphe ceci peut-être vu comme une version "non compacte" du théorème de structure de Douady. Suzuki [61, 62] a généralisé les résultats de Noguchi, il remplace l'espace du départ par $X - A$ où X est un variété compacte et A un diviseur à croisement normaux. Il montre qu'on a des propriétés analogues sur Y (Y est hyperboliquement plongé) comme dans le cas compact, je cite par exemple les théorèmes de finitude de $\mathrm{Surj}(X, Y)$, en particulier de $\mathrm{Aut}(Y)$ et $\mathrm{Hol}(X, Y, k)$ l'espace des applications holomorphes de rang k est un ouvert et fermé dans $\mathrm{Hol}(X, Y)$.

On construit l'espace des modules des variétés hyperboliquement plongées. Dans ce cadre la distance relative de Kobayashi joue un rôle crucial ainsi que le critère de plongement hyperbolique d'un sous espace qui est une généralisation du théorème de Brody dû à Zaidenberg, Urata et Green.

La stratégie de la construction utilise le critère de Schumacher pour prouver l'existence d'un espace de modules grossier qui repose sur la vérification de deux points : le premier consiste à démontrer l'existence d'une déformation semi-universelle le second que la projection naturelle de $\mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow S$ est propre sur S pour $\mathfrak{X}/S$ et $\mathfrak{Y}/S$ deux familles paramétrées.

4.1 Déformations Logarithmiques

Soient X une variété compacte et D un diviseur à croisement normaux simples i.e. $D = \cup D_i$ où D_i sont des hypersurfaces lisses.

On considère le couple (X, D) tel que $X\backslash D$ soit *hyperboliquement plongé* dans X, dans ce cas il est même *hyperbolique complet* (D est un diviseur de Cartier)

Exemples 4.1.1

1. L'espace projectif complexe $P^n(\mathbb{C})$ et D une réunion de $(2n+1)$ hyperplans en position générales, on a $P^n(\mathbb{C})\backslash D$ est hyperboliquement plongé dans $P^n(\mathbb{C})$ voir Green[24], il est même de courbure sectionnelle négative voir Babets [3] aussi les travaux de Dethloff-Schumacher-Wong [10, 11], Siu.
2. Dans le cas irréductible, la situation est beaucoup plus compliquée, en général le degré est très grand par rapport à la dimension de l'espace. On rappelle la conjecture de Kobayashi : une hypersurface générique de degré d est hyperbolique, son complémentaire est hyperboliquement plongé dès que $d \geq 2n+1$.

   Zaidenberg a prouvé qu'il existe une courbe lisse de degré $d \geq 5$ dans $P^2(\mathbb{C})$ (resp. une surface de degré ≥ 350 dans $P^3(\mathbb{C})$) de complémentaire hyperboliquement plongé dans $P^n(\mathbb{C})$ (resp. dans $P^3(\mathbb{C})$)

Dans ce paragraphe, on décrit les déformations du couple (X, D) où X est une variété compacte et D est un diviseur à croisement normaux simples selon le travail de Kawamata [30]. La théorie de déformations des variétés compactes a été développée par Kodaira-Spencer, l'existence d'une déformation semi-universelle a été prouvé pour Kuranishi. Dans ce cadre le faisceau tangent joue un rôle essentiel pour décrire les obstructions et la construction du complexe cotangent.

On s'intéresse qu'au cas où D est un diviseur de Cartier dans la variété X car si CodimD ≥ 2 on a $d_{X\backslash D} = d_X$ et donc $X\backslash D$ est hyperboliquement plongé dans X. On rappelle les définitions suivantes :

Définitions 4.1.2

1. *Soient X une variété complexe et D est un diviseur de Cartier.*

   On dit que D est diviseur à croisement normaux simples *si $D = \cup_{i=1}^{h} D_i$ où D_i est une hypersurface lisse.*
2. *Soit X une variété complexe, une compactification non singulière de X est une variété $\bar{X}$ complexe compacte telle que $\bar{D} = \bar{X}\backslash X$ est un diviseur à croisements normaux simples*
3. *Soit le triplet $(X, \bar{X}, \bar{D})$qui est une compactification de X.*

   On appelle une famille de déformations logarithmiques le 7-uplets
   $\mathfrak{F} = (\mathfrak{X}, \bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{D}}, \bar{\pi}, S, s_0, \bar{\Psi})$ *vérifiant :*
   (i) $\bar{\pi} : \bar{\mathfrak{X}} \longrightarrow S$ *est une submersion lisse, propre.*
   (ii) $\bar{\mathfrak{D}}$ *est un diviseur de Cartier et* $\mathfrak{X} = \bar{\mathfrak{X}}\backslash\bar{\mathfrak{D}}$
   (iii) $\bar{\Psi} : \bar{X} \longrightarrow \bar{\pi}^{-1}(s_0)$ *est un isomorphisme et* $\Psi(X) = \bar{\pi}^{-1}(s_0) \cap \mathfrak{X}$

(iv) $\bar{\pi}$ est localement une projection ainsi que sa restriction sur $\bar{\mathfrak{D}}$ i.e. pour tout p dans $\bar{\mathfrak{X}}$, il existe U un voisinage de p et ϕ un isomorphisme $\phi : U \longrightarrow V \times W$ où $V = \bar{\pi}(U)$ et $W = U \cap \bar{\pi}^{-1}(\bar{\pi}(p))$ tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & V \times W \\ {\scriptstyle \bar{\pi}}\downarrow & & {\scriptstyle pr_1}\downarrow \\ V & \xrightarrow{id} & V \end{array}$$

et on a $\phi(U \cap \bar{\mathfrak{D}}) = V \times (W \cap \bar{\mathfrak{D}})$

4. *Soient X une variété complexe et D un diviseur de Cartier, le faisceau tangent logarithmique $T_X(\log D)$ est le sous-faisceau de T_X qui consiste aux dérivations de $\mathcal{O}_X$ qui envoient $\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}$ dans $\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}$ où $\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}$ est l'idéal qui définit D i.e. $T_X(\log D)$ est le faisceau des automorphismes infinitésimaux de X qui renvoient D sur lui même. On montre comme dans le cas classique qu'on a $\mathrm{H}^1(X, T(\log D)) = \mathrm{Def}_{\mathbb{C}[\varepsilon]}(X, D)$ l'espace des déformations logarithmiques du couple (X, D), on définit ainsi l'application de Kodaira-Spencer :*

$$\varrho_{s_0} : T_S, s_0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, T(\log D))$$

Description locale de $T_X(\log D)$ voir Itaka[29]

On se place toujours dans les mêmes conditions énoncées plut haut : X est une variété complexe, D est un diviseur à croisement normaux.

On note par $z_1, \ldots, z_n$ des coordonnées locales de X autour de $x \in X$ et que D est donné (localement) par $D = \{z_1 \ldots . z_k = 0\}$

1. si $x \notin D$ alors $T_X(\log D)_x = \mathcal{O}_{X,x}$
2. si $x \in D$ alors $T_X(\log D)_x$ est engendré par $\{z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, z_k \frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial z_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$ comme $\mathcal{O}_{X,x}$-module.

   Son dual $\Omega_X(\log D)_x$ le faisceau des 1-formes logarithmiques est engendré par $\{\frac{dz_1}{z_1}, \ldots, \frac{dz_k}{z_k}, dz_{k+1}, \ldots, dz_n\}$ comme $\mathcal{O}_{X,x}$-module.

Remarque 4.1.3 On peut définir aussi les espaces des jets logarithmiques d'ordres supérieurs voir Noguchi [49].

Comme dans le cas d'une déformation d'une variété complexe, on a ces résultats :

(i) Si $\mathfrak{F} = (\mathfrak{X}, \bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{D}}, \bar{\pi}, S, s_0, \bar{\Psi})$ est une famille telle que ϱ_{s_0} est surjective et S est lisse alors $\mathfrak{F}$ est une famille verselle.

(ii) Si $\mathrm{H}^1(\bar{X}, T(\log D)) = 0$ alors $(X, \bar{X}, D)$ est rigide i.e. toute déformation est globalement triviale.

(iii) Si $\mathrm{H}^2(\bar{X}, T(\log D)) = 0$ alors la base de la déformation semi-universelle de $(X, \bar{X}, D)$ est lisse.

Dans [30], Kawamata a démontré le théorème suivant d'existence de déformation semi-universelle logarithmique :

Théorème 4.1.4 *Pour $(X, \bar{X}, D)$ une compactification lisse de X, il existe une déformation semi-universelle dans la famille des déformations logarithmiques.*

On donne ici une preuve alternative :

Soient $\mathfrak{D} \longrightarrow T$ une déformation semi-universelle localement triviale, on sait qu'une telle déformation existe d'après Flenner-Kosarew [17] et $\mathfrak{X} \longrightarrow S$ une déformation semi-universelle de X.

Soit $R = (\mathrm{Mor}_{T\times S}(\mathfrak{D}_{T\times S}, \mathfrak{X}_{T\times S}), i) \longrightarrow T \times S$ alors il existe un R- morphisme $\mathfrak{D}_R \hookrightarrow \mathfrak{X}_R$. Cette flèche est une déformation verselle de $D \overset{i}{\hookrightarrow} X$. Par la théorie générale de la déformation, il existe une déformation semi-universelle, donc le premier point du critère est démontré.

Remarque 4.1.5 Il existe une flèche naturelle :

$$\mathrm{Def}_{\mathbb{C}[\varepsilon]}(X, D) \longrightarrow \mathrm{Def}_{\mathbb{C}[\varepsilon]}(X)$$

qui est en général ni injective ni surjective.

En effet, il existe une suite exacte courte au niveau des faisceaux :

$$0 \longrightarrow T_X(\log(D)) \longrightarrow T_X \longrightarrow N_D \longrightarrow 0$$

qui induit une suite longue au niveau de la cohomologie :

$$\ldots \longrightarrow H^0(X, N_D) \longrightarrow H^1(X, T_X(\log(D)) \longrightarrow H^1(X, T_X) \longrightarrow H^1(X, N_D) \longrightarrow \ldots$$

et on a ces isomorphismes :

$\mathrm{H}^1(X, T_X(\log(D)) \backsimeq \mathrm{Def}_{\mathbb{C}[\varepsilon]}(X, D)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphie des déformations logarithmiques du couple (X, D) sur $\mathbb{C}[\varepsilon]$.

$\mathrm{H}^1(X, T_X) \backsimeq \mathrm{Def}_{\mathbb{C}[\varepsilon]}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie des déformations de (la variété) X sur $\mathbb{C}[\varepsilon]$.

4.2 Espaces Hyperboliquement Plongés et Caractérisations

On donne ici deux caractérisations pour qu'un espace soit hyperboliquement plongé semblable à ceux de l'hyperbolicité. La première est au niveau infinitésimal et la deuxième est comparable à la propriété de Landau qui sont équivalentes et on peut même donner une relation entre les deux constantes $R = \frac{1}{c}$.

Proposition 4.2.1 *Soit H une métrique sur Z.*

Y est hyperboliquement plongé dans Z si et seulement si pour tout $p \in \overline{Y}$, il existe W un voisinage de p et $c > 0$ tels que $K^1_Y \geq cH$ sur $W \cap Y$

Proposition 4.2.2 (Propriété de Landau) *On suppose que Y est relativement compact dans Z.*

Y est hyperboliquement plongé dans Z si et seulement si pour tout $p \in \overline{Y}$, il existe W un voisinage de p et $R > 0$ tels que

$$\sup \{|f'(0)| \ : \ f \in \mathrm{Hol}(\Delta, Y) \, et \, f(0) \in W\} \leq R$$

les preuves sont semblables à la proposition 2.0.17

Il y a aussi l'analogue de ce théorème pour la famille $\mathcal{F}_{Y,Z}$, voir Kobayashi [38]. Plus précisément on a ce théorème :

Théorème 4.2.3 *Soit $Y \subset Z$ un ouvert de Zariski d'adhérence compacte.*
On a les équivalences suivantes.

1. *Y est hyperboliquement plongé dans Z*
2. *Pour toute métrique H sur Z, il existe c une constante positive telle que $f^*(H) \leq cK_\Delta$ pour tout $f \in \mathcal{F}_{Y,Z}$.*
3. *$d_{Y,Z}(p, q) > 0$ pour tout $p \neq q \in \bar{Y}$.*

Proposition 4.2.4 *On a les équivalences suivantes :*

1. *Y est hyperboliquement plongé dans Z.*
2. *Pour toutes suites p_n , $q_n \in Y$ telles que $p_n \to p$, $\quad q_n \to q$ avec p, $q \in \overline{Y}$, si $d^*_Y(p_n, q_n) \to 0$ alors p=q .*

DÉMONSTRATION:

Pour la condition nécessaire on a Y est hyperboliquement plongé dan Z donc il existe une métrique H sur Z telle que $d_H \leq d^*_Y$ d'où le résultat.

Pour la condition suffisante : il suffit d'après le théorème 1.3.3 de démontrer l'assertion (2)du théorème mais par rapport à la distance d_Y, le résultat découle de l'inégalité suivante : $d^*_Y \leq d_Y$.

□

4.3 Critère de Brody pour les Espaces Hyperboliquement Plongés et le Théorème de Stabilité

4.3.1 Théorème de Brody

Le critère de Brody est un outil simple et très utile pour la caractérisation de l'hyperbolicité dans le cas où l'espace est compact.

X est hyperbolique si et seulement si il n'existe pas de droite complexe dans X.

On rappelle qu'une *droite complexe* est une application holomorphe $h : \mathbb{C} \longrightarrow X$ non constante telle que $|h'(z)| \leq c$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
L'analogue du théorème de Brody pour les espaces hyperboliquement plongés a été prouvé par Urata [64], Green[23] et Zaidenberg[68].

Définition 4.3.1 *Soient Y un ouvert relativement compact de Z, $f : \mathbb{C} \longrightarrow Z$ est une droite complexe qui provient de Y si pour tout $R > 0$ il existe une suite $f_n : \Delta_R \longrightarrow Y$ telle que $f_n \longrightarrow f_{|\Delta_R}$ uniformément sur tout compact.*

En modifiant légèrement la démonstration du théorème de Brody, Urata[64] a prouvé

Théorème 4.3.2 *Soient Z un espace complexe et Y un ouvert relativement compact dans Z alors Y est hyperboliquement plongé dans Z si et seulement il n'existe pas de droites complexes qui proviennent de Y*

De la même manière Zaidenberg, Lang [45] prouvent même plus :

Théorème 4.3.3 *Soient Z un espace complexe et Y un ouvert relativement compact dans Z et U_n une suite décroissante d'ouverts telle que $\cap_n U_n = Y$. On suppose que aucun des U_n est hyperboliquement plongé dans Z. Il existe une suite $h_n : \mathbb{C} \longrightarrow Z$ qui provient de U_n et h_n converge uniformément vers $h : \mathbb{C} \longrightarrow Z$ et que $h(\mathbb{C}) \subset \overline{Y}$*

Maintenant on s'intéresse au cas où $Y = Z \setminus A$ où A est *un diviseur de Cartier.* Ceci a été étudié par Green et Zaidenberg.

Théorème 4.3.4 *Soient Z un espace complexe, Y un ouvert de Zariski tels que $A = Z \setminus Y$ un diviseur de Cartier, si*

(i) Il n'existe pas de droite complexe dans Y

(ii) Il n'existe pas de droite complexe dans A

Alors Y est hyperboliquement plongé dans Z

Plus précisément on a :

Théorème 4.3.5 *Soient Z un espace complexe et A un diviseur de Cartier et $Y = Z \setminus A$. Alors Y est hyperboliquement plongé dans Z si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Il n'y a pas de droite complexe dans Y*
2. *Pour toute partition d'indice $I \cup J = \{1, 2, \ldots, m\}$, il n'y a pas de droite complexe dans $\cap_{i \in I} A_i - \cup_{j \in J} A_j$*

Pour prouver l'inverse on a un résultat dû à Zaidenberg[70, 72] qui s'avère suffisant où il considère le cas d'un *diviseur à croisements normaux simples* i.e $A = \cup_{0 \leq i \leq k} A_i$ où A_i est une hypersurface lisse.

On a le lemme suivant dû à Zaidenberg qui utilise le résultat de Siu [60]

Lemme 4.3.6 *Soient Z une variété complexe et A un diviseur de Cartier, A_{reg} désigne le lieu des points réguliers de A. Alors toute application holomorphe $f : \Delta_R \longrightarrow A_{reg}$ peut-être approximé par une application sur Δ_r à valeurs dans $Z\backslash A$ pour tout $r < R$.*

En utilisant ce lemme, Zaidenberg prouve l'inverse du théorème 4.3.5 :

Théorème 4.3.7 (Zaidenberg[70, 72]) *Soient Z une variété complexe et $A = \cup A_i$ un diviseur à croisements normaux simples, A_i est une hypersurface lisse. Si Y est hyperboliquement plongé dans Z alors*

1. *Il n'y a pas de droite complexe dans Y*
2. *Pour toute partition d'indice $I \cup J = \{1, 2, \dots, m\}$, il n'y a pas de droite complexe dans $\cap_{i\in I} A_i - \cup_{j\in J} A_j$*

Voir aussi le résultat de Zaidenberg où il considère une partition de A en strate suivant la multiplicité.

4.3.2 Théorème de Stabilité

Les théorèmes de stabilité sont des applications directes du théorème de Brody et ses variantes.

Dans cette section, on considère le cas des espaces hyperboliquement plongés.

Soient $\pi : \overline{\mathfrak{X}} \longrightarrow S$ une application holomorphe propre, submersive et $s_0 \in S$, $\mathfrak{D}$ un diviseur de Cartier dans $\overline{\mathfrak{X}}$ et on pose $\mathfrak{X} = \overline{\mathfrak{X}}\backslash\mathfrak{D}$

Ce théorème de stabilité est du à Kobayashi[38] p :149.

Théorème 4.3.8 (Théorème de stabilité) *On conserve les mêmes notations plus haut.*

On suppose que $\mathfrak{D} \cap X_{s_0}$ est un diviseur à croisements normaux simples. Si X_{s_0} est hyperboliquement plongé dans $\overline{X}_{s_0}$ alors il existe un voisinage ouvert U de s_0 tel que $\mathfrak{X}_U$ est hyperboliquement plongé dans $\overline{\mathfrak{X}}_U$

En particulier pour tout $s \in U$ on a X_s est hyperboliquement plongé dans $\overline{X}_s$

DÉMONSTRATION:

$\mathfrak{D} = \cup_{1\leq i\leq m}\mathfrak{D}_i$ une réunion de composante irréductible.

On note $D_i = \mathfrak{D}_i \cap \overline{X}_{s_0}$, D_i est lisse et on définit $D = \cup_{1\leq i\leq m} D_i$ qui est un diviseur dans $\overline{X}_{s_0}$ à croisements normaux simples.

Soit U_n une suite décroissante d'ouverts hyperboliques voisinage de s_0 telle que $\cap_n \mathfrak{X}_{U_n} = X_{s_0}$.

Si $\mathfrak{X}_{U_n}$ n'est pas hyperboliquement plongé dans $\overline{\mathfrak{X}}$, il existe $h_n : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathfrak{X}}_{U_n}$ une droite complexe qui provient de $\mathfrak{X}_{U_n}$ et h_n converge uniformément sur tout compact vers $h : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathfrak{X}}$ d'après le théorème 4.3.3.

Par le théorème d'Hurwitz on a $h_n(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{X}$ ou $h_n(\mathbb{C}) \subset \cap_{i\in I}\mathfrak{D}_i - \cup_{j\in J}\mathfrak{D}_j$

encore par le théorème de Hurwitz on aura $h(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{X}$ ou $h(\mathbb{C}) \subset \cap_{i\in I}\mathfrak{D}_i - \cup_{j\in J}\mathfrak{D}_j$

Considérons maintenant l'application holomorphe $\pi \circ h_n : \mathbb{C} \longrightarrow U_n$, elle est constante puisque U_n est hyperbolique soit $s_n = \pi \circ h_n$ donc $h_n : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathfrak{X}}_{s_n}$ qui provient de X_{s_n}

Puisque $s_n \longrightarrow s_0$ on aura $h(\mathbb{C}) \subset X_{s_0}$ ou $h(\mathbb{C}) \subset \cap_{i\in I} D_i - \cup_{j\in J} D_j$ c.a.d. qu'il existe une droite complexe dans X_{s_0} ou dans $\cap_{i\in I} D_i - \cup_{j\in J} D_j$ ceci implique par le théorème 4.3.7 que X_{s_0} n'est pas hyperboliquement plongé dans $\overline{X}_{s_0}$ $\square$

4.4 Espace des Modules des Variétés Hyperboliquement plongées

Après ces résultats intermédiaires dans les sections précédentes, on montre qu'il existe un espace des modules des variétés hyperboliquement plongées.

On utilise comme d'habitude la théorie des déformations pour construire un tel espace des modules et on applique le critère de Schumacher.

Théorème 4.4.1 *Il existe un espace des modules des variétés hyperboliquement plongées pour la famille des déformations logarithmiques.*

Soit $(X, D, \overline{X})$ une compactification de X et on suppose que X est hyperboliquement plongé dans $\overline{X}$. On considère une déformation logarithmique de ce triplet $(X, D, \overline{X})$.

On applique le critère de Schumacher à notre situation : le premier point qui consiste à démontrer l'existence d'une déformation semi-universelle est vérifié d'après le travail de Kawamata[30]. Il reste à prouver que si on considère deux déformations logarithmiques qu'on les note par $(\overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X}, \mathfrak{D}, S)$ et $(\overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, S)$, les fibres $\overline{X}_s = (\overline{\mathfrak{X}})_s$ sont des variétés complexes de dimension m.

Théorème 4.4.2 *L'application naturelle*

$$k : \mathrm{Isom}_S((\overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}), (\overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B})) \longrightarrow S \textit{ est propre.}$$

Cet ensemble $\mathrm{Isom}_S((\overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}), (\overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B}))$ porte une structure naturelle d'espace complexe sur S comme sous espace de $\mathrm{Isom}_S(\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{Y}})$ voir Fujiki [20].

Démonstration:

Soit $\tilde{f}_n \in \mathrm{Isom}_S((\overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}), (\overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B}))$ une suite d'isomorphisme entre $(\overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X}, \mathfrak{D}, S)$ et $(\overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, S)$ i.e. $\tilde{f}_n : \overline{X}_{s_n} \longrightarrow \overline{Y}_{s_n}$ un isomorphisme tel que $\tilde{f}_n(X_{s_n}) = Y_{s_n}$ (ou $\tilde{f}_n(D_{s_n}) = B_{s_n}$) et s_n une suite dans S qui converge vers s_0.

En appliquant le théorème de stabilité on peut supposer que $\mathfrak{X}$ est hyperboliquement plongé dans $\overline{\mathfrak{X}}$ et de même pour $\mathfrak{Y}$.

La déformation logarithmique est localement triviale sur $\overline{\mathfrak{X}}$ et sur $\overline{\mathfrak{D}}$.

Donc pour $x \in \overline{X}_{s_0}$ un point dans la fibre spéciale, il existe un ouvert U dans $\overline{\mathfrak{X}}$ tel que U est isomorphe au produit $\Delta^m \times S$ et $U \cap \mathfrak{X} = \Delta^{*k} \times \Delta^{m-k} \times S$.

On note par $f_n = \tilde{f}_n \restriction \mathfrak{X}$. Si on restreint f_n sur $U \cap \mathfrak{X}$
on a $f_n \restriction U \cap \mathfrak{X} : \Delta^{*k} \times \Delta^{m-k} \longrightarrow Y_{s_n} \hookrightarrow \mathfrak{Y}$.

$$d_{\mathfrak{Y},\overline{\mathfrak{Y}}}(f_n(x), f_n(y)) \leq d_{Y_n,\overline{Y}_n}(f_n(x), f_n(y)) \leq d^*_{Y_n}(f_n(x), f_n(y)) \leq d^*_{\Delta^{*k}\times\Delta^{n-k}}(x,y) \leq md_{\Delta^m}(x,y)$$

Pour tout $x, y \in \Delta^{*k} \times \Delta^{m-k}$

A partir de cette inégalité, je déduis que la famille $\mathrm{Hol}(\Delta^{*k} \times \Delta^{m-k}, \mathfrak{Y})$ est relativement compact dans $\mathrm{Hol}(\Delta^m, \overline{\mathfrak{Y}})$ par conséquent f_n converge uniformément sut tout compact vers f et f se prolonge sur Δ^m en $\tilde{f}$ et $\tilde{f}_n$ converge uniformément sur tout compact vers $\tilde{f}$.

Comme $\mathfrak{B}$ est un diviseur de Cartier donc $f(X) \subset Y$ ou $f(X) \subset B$ (et donc $\tilde{f}(\overline{X}) \subset B$).

On applique le même raisonnement à f_n^{-1}, on déduit qu'il existe g et $\tilde{g}$ tels que $g = \tilde{g} \restriction Y$, $g(Y) \subset X$ ou $g(Y) \subset D$ (et donc $\tilde{g}(\overline{Y}) \subset D$) , $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id$ et $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id$.

Donc $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont des isomorphismes tels que $f(X) = Y$ et $g(Y) = X$ i.e. $f \in \mathrm{Isom}_S((\overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}), (\overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B}))$

$\square$

Remarque 4.4.3

Si on considère des déformations plus générales que celles considérées plus haut du triplet $(X, D, \overline{X})$ elles sont données par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & \overline{\mathfrak{X}} \arrow[d, "\pi"'] \\
 & S
\end{tikzcd}$$

et que $\mathfrak{D}$ soit plat sur la base S et non nécessairement localement triviale. On sait qu'il existe une déformation semi-universelle dans cette famille.

Pour le deuxième point, d'après ce qui précède il est clair qu'on peut construire une application $f_0 : \overline{X_0} - D_{sing} \longrightarrow \overline{Y_0}$ mais on ne peut pas la prolonger en général.

Bibliographie

Bibliographie

[1] M. Abate, *A caracterization of hyperbolic manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 789-793

[2] M. Artin, *Algebraic construction of Brieskorn's resolutions*, Jour. of Alg. **29** (1974) 330-348

[3] V. A. Babets, *Picard type theorems for holomorphic mappings*, Siberian Math. J. (1984) 195-200

[4] T. Barth, *The Kobayashi distance induces the standard topology*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 439-441

[5] E. Bierstone et P. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata ol local invariant*, Invent. math. **128** (1997) 207-302

[6] L. Bonavero, *Factorisation faible des applications birationnelles [D'après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli]*, Séminaire Bourbaki **880** (Novembre 2000)

[7] R. Brody, *Compact manifolds and hyperbolicity*, Bull. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 213-219

[8] D. Burns et J. Wahl, *Local contributions to global deformations of surfaces*, Inven. Math. **26** (1974), 67-88

[9] L.A. Campbell et R. H. Ogawa, *On preserving the Kobayashi pseudodistance*, Nogoya Math. J. **57** (1975), 37-47

[10] G. Dethloff, G. Schumacher et P. M. Wong, *Hyperbolicity of the complements of plane algebraic curves*, Mathematica Göttingensis, Heft 31 (1992) Amer. J. Math. **117** (1995) 573-599

[11] G. Dethloff, G. Schumacher et P. M. Wong, *On the hyperbolicity of the complement of curves in algebraic surfaces, the three component case*, Duke. Math. J. **78** (1995) 193-212

[12] A. Douady, *Le problème de Modules pour les sous espaces analytiques complexes d'un espace analytique donné*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **16** (1966) 1-95

[13] A. Douady, *Le problème des modules locaux des espaces $\mathbb{C}$-analytiques compactes*, Ann. Sci. ENS, **7** (1974) 569-602

[14] Do Duc Thai, *Royden Kobayashi pseudometric and tautness of normalization of complex spaces*, Boll. U.M.I., VIII, Ser. A5, No 2, (1991), 147-156

[15] Do Duc Thai, *On the hyperbolicity and the Schottky property of complex spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 1025-1027

[16] Do Duc Thai, Pham Viet Duc, *The Bobayashi k-metrics on complex spaces*, Int. J. Math. **10** No. 7 (1999) 917-924

[17] H. Flenner, S. Kosarew, *On locally trivial deformations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **23** (1987) 627-665

[18] O. Forster, K. Knorr, *Konstruktion verselle Familien kompacter complexer Raüme*, Lecture Notes in Mathematics **705** Springer V. 1979

[19] A. Fujiki, *Coarse moduli space for polorized compact kähler manifolds*, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **20** (1984) 977-1005

[20] A. Fujiki, *On a holomorphic fibre bundle with meromorphic structure*, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **19** (1983) 117-134

[21] K. Funahashi, *Normal holomorphic mappings and classical theorems of function theory*, Nogoya. Math. J. **94** (1984) 89-104

[22] H. Grauert, *Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Raüme*, Inv. Math. **25** (1974) 107-142

[23] M. L. Green, *Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties*, Amer. J. Math. **97** (1975) 43-75

[24] M. L. Green, *The hyperbolicity of the complement of 2n+1 hyerplanes in general position in P_n and related results*, Proc. Amer. Math. Soc. **66** (1977) 109-113

[25] K. T. Hahn, K. T. Tim, *Hyperbolicity of complex manifolds and other equivalent properties*, Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), 49-53

[26] E. Horikawa, *On Deformations of holomorphic maps III*, Math. Ann. **222** (1976) 275-282

[27] C. Horst, *Compact varieties of surjective holomorphic endomorphims*, Math. Z. **190** (1985), 499-504

[28] F. Huikeshoven, *On the versal resoltutions of deformations of rational double points*, Inventiones math. **20** (1973), 15-33

[29] S. Itaka, *Logarithmic forms of algebraic varieties*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **23** (1976) 525-544

[30] Y. Kawamata, *On Deformations of Compactifiable Complex Manifolds*, Math. Ann. **235** (1978) 247-265

[31] P. Kiernan, *Extensions of holomorphic maps*, Trans. Amer. Math. Soc **172** (1972), 347-355

[32] P. Kiernan, *Hyperbolically embedded spaces and the big Picard theorem*, Math. Ann. **204** (1973), 203-209

[33] S. Kobayashi, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, New York, 1970.

[34] S. Kobayashi, *Intrinsic distances, meausures and geometric function theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 357-416

[35] S. Kobayashi, *A new invariant infinitisimal metric*, Int. Math. **1** (1990), 83-90

[36] S. Kobayashi, *Relative intrinsic distance and hyperbolic imbedding*, Intern'l Symp. Holomorphic Mappings, Diophantine Geometry and Related Topics, RIMS, Kyoto, 1992, 239-242

[37] S. Kobayashi, *On the intrinsic relative distance*, Geometric Complex Analysis, Proc. 3rd Intern'l Research Inst. Math. Soc. Japan (1995), 1996, 355-361

[38] S. Kobayashi, *Complex Hyperbolic Spaces*, Springer Verlag, New-York, 1998

[39] A. Kodama, *On the bimeromorphic automorphisms of hyperbolic complex spaces*, Nogoya Math. J. **73** (1979), 1-5

[40] S. Kosarew et C.Okonek, *Global Moduli Spaces and Simple Holomorphic Bundles*, Pub. R.I.M.S. **25** (1989), 1-19

[41] M. Kwack, *Generalizations on the big Picard theorem*, Ann. Math. **90** (1969), 9-22

[42] J.E., Joseph et M. H. Kwack, *The topological nature of two Noguchi theorems on sequences of holomorphic mappings between complex spaces*, Canadian J. Math. **47** (1995), 1240-1252

[43] J.E., Joseph et M. H. Kwack, *Extension and convergence theorems for families of normal maps in several complex variables*, Proc. Amer. Math. Soc **125** (1997), 1675-1684

[44] S. Lang, *Hyperbolic and Diaphantine analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **14** (1986), 159-205

[45] S. Lang, *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces*, Springer-Verlag, N.Y., 1987

[46] T. Miyano et J. Noguchi, *Moduli spaces for harmonic and holomorphic mappings and diaphantine geometry*, Lecture Notes in Maths. No. 1468, 227-253, Springer-Verlag, 1991

[47] M. S. Narashiman et R. R. Simha, *Manifolds with Ample Canonical class*, Invent. Math. (1968) 120-128

[48] J. Noguchi, *Hyperbolic fiber spaces and Mordell's conjecture over function field*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21** (1985), 27-46

[49] J. Noguchi, *Logarithmic jet spaces and extensions of Franchi's theorem*, Contributions to Several Complex variables, pp 227-249, Aspects Math. No 9, Vieweg, 1986

[50] J. Noguchi, *Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and locally symmetric spaces*, Invent. Math. **93** (1988), 15-34

[51] J. Noguchi et T. Ochai, *Geometric Function Theory in Several Complex Variables*, Trans. Math. Monogr., vol. 80, Amer. Math. Soc. 1990

[52] S. Ohgai, *On the relative hyperbolicity of complex analytic spaces*, Kumamoto J. Sci. (Math.) **15** (1982), 47-58

[53] V. P. Palamodov, *Deformations of complex spaces*, Russ. Math. Surveys, **31** (1976) 129-197

[54] H. Royden, *Remarks on the Kobayashi metric*, Several Complex Variables II. Lect. Notes in Math. **189**. Springer, 1971, 125-137

[55] G. Schumacher, *Moduli of polorized kähler manifolds*, Math. Ann. **269**, (1984) 137-144

[56] G. Schumacher, *On Moduli spaces of Kähler manifolds, the generalized Peterson-Weil metric and positive line bundle*, Rev. Roumaine Pures Appl. **36** (1991) 291-308

[57] G. Schumacher, *Moduli of framed manifolds*, Invent. Math. **134** (1998) 229-249

[58] G. Schumacher, *Construction of the coarse moduli space of compact kähler manifolds with $c_1 = 0$*, Math. Ann. **264** (1983) 81-90

[59] H. W. Schuster, *Zur Theorie der Deformationen kompacter komplexer Räume*, Invent. Math. **9** (1970), 284-294

[60] Y-T., Siu, *Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood*, Invent. Math. **38** (1976), 89-100

[61] M. Suzuki, *Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and hyperbolic fiber spaces*, J. Math. Soc. Japan **46** (1994) 681-698

[62] M. Suzuki, *The mordell property of hyperbolic fiber spaces with noncompact fibers*, Tohoku. Math. J. ser ser **47** n° 4 (1995) 601-611

[63] T. Urata, *Holomorphic mappings into a certain compact complex analytic space*, Tohoku Math. J. **33** (1981), 573-585

[64] T. Urata, *The hyperbolicity of complex analytic spaces*, Bull. Aichi univ. Educ. **31** (Natural Sci.) (1982), 65-75

[65] S. Venturini, *The Kobayashi metric on complex spaces*, Math. Ann. **305** (1996), 25-44

[66] J. Wahl, *Equisingular deformations of normal surface singularities I*, Annals of Math. **104** (1976), 325-356

[67] M. Wright, *The Kobayashi pseudometric on algebraic manifolds of general type and in deformations of complex manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. **232** (1977), 357-370

[68] M.G. Zaidenberg, *Picard's theorems and hyperbolicity*, Sibirisk. Mat. Zh. **24** (1983), no 6, 44-55 ; English transl. in Seberian Math. J. **24** (1983) 858-866

[69] M.G. Zaidenberg, *Schottky-Landau growth for s-normal families of holomorphic mappings*, Math. Ann. **293** (1992) 123-141

[70] M.G. Zaidenberg, *On the hyperbolic embedding of complements of divisors and the limit behavior of the Kobayashi-Royden metric*, Mat. Sb. **127** (169) (1985), 55-71 English transl. in Math. USSR Sb. **55** (1986) N°1 55-70

[71] M.G. Zaidenberg, *Satbility of hyperbolic embedding and construction of examples*, Math. USSR Sb. **63** (1989) N°2 351-361

[72] M.G. Zaidenberg, *Criteria for hyperbolic embedding of complements to hypersurfaces*, Russian math. surveys **41** (1986) 249-250