

Sur quelques problèmes en topologie géométrique

LOUIS FUNAR

June 18, 2001

Résumé: On survole quelques problèmes de topologie géométrique. L'article consiste en quatre parties indépendantes:

- la structure des TQFT et la relation avec les CFT, la présentation du groupoïde de Teichmuller conjecturée par Moore et Seiberg, les groupes modulaires et leurs représentations TQFT et une application à la détection des bouts non-simples des variétés ouvertes,
- les invariants de noeuds donnés par un système de relations skein dont une est cubique, obtenus par l'étude des algèbres de Hecke cubiques et une famille particulière de quotients de dimension finie,
- une caractérisation algébrique de la simple connexité géométrique des variétés ouvertes en toute dimension, la présence des 1-anses dans les décompositions de toutes les variétés ouvertes ayant le type propre d'homotopie donné et la conjecture de Poénaru pour les 4-variétés,
- l'ensemble des classes d'équivalence de cubications des variétés par les transformations cubiques (introduites par Habegger et analogues aux mouvements de Pachner) et sa structure multiplicative, l'isomorphisme au groupe de bordismes d'immersions en codimension 1, le calcul de ce dernier en dimension 3 et 4, et l'équivalence des cubications applicables.

Mots-Clés: TQFT, CFT, groupes modulaires, groupoïde de Teichmuller, invariants à l'infini, relations skein, algèbres de Hecke cubiques, simple connexité géométrique, décomposition en anses, bouts compressibles, type propre d'homotopie, cubications, transformations cubiques de Habegger, groupe de bordismes d'immersions en codimension 1, construction de Thom-Pontryagin.

Classification mathématique: 57 R 56, 57 M 27, 57 N 10, 57 Q 40, 57 R 60, 57 N 12.

Contents

1	TQFT et la tour de groupes modulaires	2
2	Invariants de noeuds et relations écheveau	12
3	Topologie asymptotique des variétés ouvertes	18
4	Cubications des variétés et immersions	24

1 TQFT et la tour de groupes modulaires

Introduction. Les constructions d'invariants quantiques de variétés de dimension 3 font référence aux théories conformes de champs rationnelles (RCFT) en dimension 2, en particulier au modèle de Wess-Zumino-Witten pour le groupe $SU(2)$. C'est surtout le cas des papiers écrits par les physiciens, qui ont été d'abord concernés par l'étude des RCFT dans les années quatre-vingt et ensuite par les théories quantiques de champs topologiques (TQFT) en dimension 3.

La première définition d'une CFT a été formulée par Segal. Dans la littérature (physique) on rencontre plusieurs notions de CFT qui répondent plutôt aux exigences physiques qu'à la rigueur mathématique. On mettait en évidence soit l'algèbre chirale et la fonction de partition avec l'action du groupe modulaire $SL(2, \mathbf{Z})$, ou encore les blocs conformes et la forme de Sugawara associée et l'identité de Ward (équivalente à la platitude d'une connexion dans un fibré). Une version particulièrement attirante pour les topologues est l'approche de Moore et Seiberg ([16]), qui s'inspire du programme de Grothendieck.

Notre premier but est de donner une formulation encore plus précise de la CFT combinatoire de Moore et Seiberg. On prouve que le groupoïde de dualité admet une présentation explicite par les générateurs et les relations conjecturées par Moore et Seiberg (et Grothendieck). La preuve utilise des idées de J.Harer, A.Hatcher et W.Thurston, et améliore la preuve non-publiée K.Walker. Un de nos résultats intermédiaires a été obtenu indépendamment par A.Hatcher, P.Loachak et L.Schneps dans [12], et une autre preuve a été donnée par B.Bakalov et A.Kirillov Jr. (voir [3, 4]) en utilisant des moyens différents.

Avec cette définition de la CFT notre résultat principal dans cette section est l'équivalence des TQFT en dimension 3 aux CFT en dimension 2. Il faut noter que cette équivalence a été implicite dans plusieurs papiers. D'abord la construction de E.Witten d'invariants topologiques des variétés de dimension 3 était basée sur le modèle WZW (correspondant au groupe de Lie $SU(2)$) de la RCFT. Peu après L.Crane, M.Kontsevich, T. Kohno et ensuite P.Degiovanni ont montré qu'à chaque RCFT on peut associer un invariant topologique des variétés de dimension 3, et plus généralement une TQFT. Notre résultat montre que cette construction est universelle. Remarquons aussi que la donnée d'une RCFT combinatoire est presque la même chose qu'une catégorie modulaire dans le sens de V.Turaev ([18]).

Invariants de 3-variétés. Soit $\mathcal{M}_{*,*}$ la tour des groupes de classes d'homéomorphismes (des surfaces compactes orientées à bord). On a une multiplication multivalente

$$\sigma : \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_h \longrightarrow \mathcal{M}_{g+h},$$

donnée par $\sigma(x, y) = \{\tilde{x} \# \tilde{y}; \pi_g(\tilde{x}) = x, \pi_h(\tilde{y}) = y\} \subset \mathcal{M}_{g+h}$. Ici $\pi_* : \mathcal{M}_{*,1} \longrightarrow \mathcal{M}_*$ est la projection canonique et $\# : \mathcal{M}_{g,1} \times \mathcal{M}_{h,1} \longrightarrow \mathcal{M}_{g+h}$ est le morphisme induit par le recollement des homéomorphismes.

Définition 1.1 Une représentation hermitienne tensorielle (abrégé r.h.t.) de la tour \mathcal{M}_* (correspondant aux surfaces fermées) est la donnée suivante:

1. Une famille d'espaces vectoriels complexes W_* munis des formes hermitiennes non-dégénérées \langle, \rangle . Soit $U(W_g)$ le groupe des transformations linéaires de W_g qui préservent la forme hermitienne.
2. Une structure tensorielle $\otimes : W_g \times W_h \longrightarrow W_{g+h}$ (famille d'applications bilinéaires) compatible avec la structure hermitienne (voir la suite).
3. Une famille de représentations $\rho_* : \mathcal{M}_* \longrightarrow U(W_*)$ telles que

$$\langle \rho_{g+h}(c)(x \otimes y), x' \otimes y' \rangle = \langle \rho_g(a)x, x' \rangle \langle \rho_h(b)y, y' \rangle,$$

pour tout $x, x' \in W_g, y, y' \in W_h, a \in \mathcal{M}_g, b \in \mathcal{M}_h, c \in \sigma(a, b) \subset \mathcal{M}_{g+h}$.

La r.h.t. ρ_* est dite pondérée s'il existe un vecteur $w_g \in W_g$ (le vecteur vide) qui satisfait les conditions:

4. $w_{g+h} = w_g \otimes w_h$ pour tous g, h .

5. Soit $\mathcal{M}_g^+ \subset \mathcal{M}_g$ le sous-groupe des homéomorphismes qui s'étendent au tore solide de genre g . Alors

$$\rho_g(c)w_g = w_g, \text{ pour tout } c \in \mathcal{M}_g^+.$$

6. $d = \langle w_1, \rho_1(\tau)w_1 \rangle \neq 0$, où $\tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) = \mathcal{M}_1$.

Soit M^3 une variété fermée et orientée de dimension 3 et $M^3 = T_g \cup_\varphi \overline{T_g}$ un scindement de Heegaard en deux tores pleins de genre g qui se recollent le long de la surface $\Sigma_g = \partial T_g$, en utilisant l'homéomorphisme $\varphi \in \mathcal{M}_g$. Soit ρ_* une r.h.t.p.(onderée). On pose

$$f_{\rho_*}(M^3) = d^{-g} \langle \rho_g(\varphi)w_g, \overline{w_g} \rangle \in \mathbf{C}.$$

On vérifie facilement que le nombre $f_{\rho_*}(M^3) \in \mathbf{C}$ ne dépend pas des choix faits, donc f_{ρ_*} est un invariant topologique des variétés fermées et orientées. Réciproquement, tout invariant f des variétés fermées et orientées de dimension 3 qui est multiplicatif (c'est-à-dire $f(M \# N) = f(M)f(N)$), et sensitif à l'orientation (c'est à dire $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$), détermine une r.h.t.p. ρ_* telle que $f = f_{\rho_*}$. Cette r.h.t.p. n'est pas unique, mais il existe une construction canonique et universelle (voir [2, 5]). De cette manière on arrive à associer aux surfaces Σ_g de genre g un espace vectoriel W_g .

Découpages de surfaces et des espaces associés. On va considérer dans la suite que \langle, \rangle est positive et les espaces W_* sont de dimension finie.

Soit $c_* = \{c_1, c_2, \dots, c_{3g-3}\}$ un système de courbes qui décomposent la surface Σ_g en pantalons et Γ le graphe dual à la décomposition. On assume que la r.h.t.p. ρ_* est *cyclique*, c'est à dire que W_g est l'espace vectoriel engendré par l'orbite $\rho_g(\mathcal{M}_g)w_g$. On note par t_c le twist de Dehn le long du cercle c plongé dans Σ_g . Soit v un sommet du graphe Γ et $c_1, c_2, c_3 \in c_*$ les cercles correspondants aux arêtes incidentes au sommet v . Soit

$$Z(\Gamma, v, (a_1, a_2, a_3)) = \{x \in W_g; \rho_g(t_{c_i})x = a_i x\} \subset W_g.$$

On a un morphisme $\mathcal{M}_{0,3} \rightarrow \mathcal{M}_g$ (déterminé par la position du sommet v) ce qui donne $Z(\Gamma, v, (a_1, a_2, a_3))$ la structure de $\mathbf{C}[\mathcal{M}_{0,3}]$ -module. Remarquons que $\mathcal{M}_{0,3} \cong \mathbf{Z}^3$, est engendré par les twists de Dehn le long des composantes du bord. Le module $Z(\Gamma, v, (a_1, a_2, a_3))$ scinde dans une somme directe de $\mathbf{C}[\mathcal{M}_{0,3}]$ -modules simples (et cycliques) qui sont deux-à-deux isomorphes et dont la classe d'isomorphisme on la dénote par $W(\Gamma, v, (a_1, a_2, a_3))$. On prouve que $W(\Gamma, v, (a_1, a_2, a_3))$ ne dépend pas du choix du découpage c_* , ni du sommet v , or du genre g , et donc on peut le rebaptiser $W(a_1, a_2, a_3)$. D'autre part l'ensemble des valeurs propres (et leurs inverses) des twists de Dehn de courbes de c_* est un sous-ensemble fini $L \subset \mathbf{C}$ qui, lui aussi, ne dépend pas du découpage choisi.

Proposition 1.1 *Supposons que la r.h.t.p. ρ_* est cyclique, unitaire, de dimension finie et le vecteur w_g est unique en chaque genre. Alors on a la décomposition*

$$W_g \stackrel{i_\Gamma}{\cong} \bigoplus_{l \in \mathcal{L}} \bigotimes_{v \in V(\Gamma)} W(l(e_1(v)), l(e_2(v)), l(e_3(v))),$$

où $V(\Gamma)$ est l'ensemble des sommets de Γ , \mathcal{L} est l'ensemble des coloriage des arêtes de Γ (avec l'ensemble des couleurs L) et $\{e_1(v), e_2(v), e_3(v)\}$ sont les arêtes incidentes au sommet v . Ci-dessus Γ est le graphe dual d'un découpage étendu (qui peut contenir des cercles qui bordent)

Notons que L engendre une algèbre commutative, *l'algèbre de fusion*, avec la multiplication $i \cdot j = \sum_k \dim W(i, j, k) \cdot k$. La plupart des théories sont déterminées par l'algèbre de fusion.

Définition du groupoïde de dualité (ou de Teichmuller). Le pas suivant est de voir que cette décomposition est équivariante dans un sens large, par rapport aux actions des groupes modulaires des surfaces découpées.

L'objet qu'on aimerait considérer est la tour des groupes modulaires avec la structure (dite tensorielle) additionnelle induite par les recollements des surfaces. Les ambiguïtés inhérentes à la définition du recollement d'homéomorphismes font que cette multiplication est bien définie seulement pour les surfaces rigides. En particulier le cadre algébrique naturel est celui des 2-groupoïdes. Rappelons qu'un 1-groupoïde est une catégorie dont les morphismes sont des isomorphismes.

Définition 1.2 *Un 2-groupoïde C est une catégorie ayant les propriétés suivantes:*

1. *La collection des objets $\mathcal{O}(C)$ est une catégorie elle-même, qui est un 1-groupoïde avec une loi de composition associative \otimes , qui donne $\mathcal{O}(C)$ la structure d'une catégorie tensorielle (stricte). Ça veut dire que les objets dans $\mathcal{O}(C)$ sont des ensembles d'homomorphismes $\text{Hom}^0(u, v)$ d'une catégorie C^0 . La composition $\text{Hom}^0(u, v) \times \text{Hom}^0(v, w) \rightarrow \text{Hom}^0(u, w)$ est la structure tensorielle \otimes .*
2. *Sur les morphismes de C on a une composition \circ de groupoïde et une structure tensorielle*

$$\otimes : \text{Hom}(X, X') \otimes \text{Hom}(Y, Y') \longrightarrow \text{Hom}(X \otimes Y, X' \otimes Y'),$$

induite par \otimes sur $\mathcal{O}(C)$ et compatible avec la composition.

L'exemple central est le 2-groupoïde de transformations des structures rigides sur les surfaces. Une décomposition DAP de la surface Σ est une décomposition dans des surfaces élémentaires: disques, anneaux et pantalons, déterminée par une collection de courbes simples fermées tracées sur la surface Σ . Une *structure rigide* consiste dans une DAP-decomposition avec la structure additionnelle suivante:

1. une numérotation des surfaces élémentaires;
2. pour chaque surface élémentaire Σ_0 on a une numérotation de ses composantes de bord, par 1 si Σ_0 est un disque, 1 et 2 si Σ_0 est un cylindre, et 1, 2 et 3 si Σ_0 est un pantalon (une sphère à trois trous);
3. une paramétrisation de chaque composante du bord C de Σ_0 par $S^1 = \{z; |z| = 1\}$ (la paramétrisation étant compatible avec l'orientation de Σ_0 avec la convention "le premier en dehors") de telle façon que les paramétrages des deux surfaces élémentaires voisines sont l'une la conjuguée complexe de l'autre;
4. des arcs disjoints plongés dans chaque Σ_0 reliant $e^{i\epsilon}$ (avec $\epsilon > 0$ petit) sur la j -ième composante du bord et $e^{-i\epsilon}$ sur la $j + 1$ -ième composante. On appelle ces arcs les coutures.
5. une ordre sur les surfaces élémentaires, suivant le type topologique.

Les structures rigides seront considérées modulo isotopie. Dans ce contexte les objets de la catégorie C^0 sont des cercles et les homomorphismes sont les structures rigides sur les surfaces à bord.

Définition 1.3 *Le groupoïde de dualité \mathcal{D} (ou de Teichmuller) est le groupoïde de transformations des structures rigides, qui consiste en:*

1. La collection des objets (Σ, r) , qui sont des structures rigides sur des cobordismes. Donc Σ est une surface, dont le bord $\partial\Sigma$ est scindé $\partial\Sigma = \partial_+\Sigma \cup \partial_-\Sigma$, avec des numérotations pour les composantes connexes de $\partial_+\Sigma$ et $\partial_-\Sigma$ respectivement, et r est une structure rigide sur Σ .
2. Les morphismes entre (Σ, r) and (Σ', r') sont les paires $\lambda = (\varphi, c)$, où $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ est un homéomorphisme préservant le scindement du bord (donc $\Sigma = \Sigma'$) et $c : \varphi(r) \rightarrow r'$ est un changement de la structure rigide. On identifie deux morphismes s'ils sont équivalents par la relation suivante:

- (a) $(\varphi, c) \sim (\varphi', c)$ si φ et φ' sont isotopiques;
- (b) $(\varphi, c) \sim (\varphi', c')$ si $c' = c\varphi_*(\varphi'_*)^{-1}$, où φ_* est l'application induite par l'homéomorphisme φ au niveau des structures rigides.

3. Une composition naturelle des morphismes et une structure tensorielle:

- (a) Au niveau des objets le produit tensoriel (incomplet) est donné par: $(\Sigma, r) \otimes (\Sigma', r') = (\Sigma \otimes \Sigma', r \otimes r')$, où $\Sigma \otimes \Sigma'$ est la somme connexe de Σ and Σ' , identifiant les dernières k composantes de $\partial_-\Sigma$ avec les premières k composantes de $\partial_+\Sigma'$. Le nombre k est un paramètre du produit tensoriel. Maintenant $r \otimes r'$ est la structure rigide induite par le recollement.

- (b) Au niveau des morphismes, le produit tensoriel induit des applications:

$$Hom((\Sigma, r), (\Sigma', r')) \otimes Hom((\tilde{\Sigma}, \tilde{r}), (\tilde{\Sigma}', \tilde{r}')) \rightarrow Hom((\Sigma, r) \otimes (\tilde{\Sigma}, \tilde{r}), (\Sigma', r') \otimes (\tilde{\Sigma}', \tilde{r}')).$$

D'autres versions pour le groupoïde de Teichmuller peuvent être obtenues en restreignant les recollement admissibles. Par exemple on considère seulement des recollement le long d'un seul cercle, ou bien pour $\partial_-\Sigma = \partial_+\Sigma'$. Le théorème de présentation ci-dessous a des reformulations immédiates dans ces cas.

Remarquons que la tour $\mathcal{M}_{*,*}$ se plonge dans le groupoïde. On associe à $\varphi \in \mathcal{M}(\Sigma)$ l'élément $(1, \varphi_*) \in Hom((\Sigma, r), (\Sigma, \varphi(r)))$, où φ_* est la transformation de la structure r dans $\varphi(r)$.

Une présentation du groupoïde de Teichmuller. Une version faible d'une conjecture de Grothendieck revue par Moore et Seiberg affirme que le groupoïde de dualité est engendré par les éléments suivants (voir les dessins pour plus de précision):

- T_1 le twist de Dehn autour du méridien du tore avec un trou, $T_1 \in \mathcal{M}_{1,1}$.
- $S \in \mathcal{M}_{1,1}$ qui change la structure rigide comme l'élément $\tau \in SL(2, \mathbf{Z})$.
- B_{23} , le tressage, qui échange les deux cercles 2 et 3 du bord du pantalon (remarquer la transformations des coutures).
- R , la permutation cyclique de la numérotation des composantes du bord d'une surface élémentaire.
- P , la transposition qui échange les nombres associés à deux surfaces élémentaires du même type topologique.
- Considérons la sphère à quatre trous $\Sigma_{0,4} = S^2 - d_1 \cup d_2 \cup d_3 \cup d_4$. Soit e un cercle plongé qui sépare $d_1 \cup d_2$ et $d_3 \cup d_4$ et f le cercle qui sépare $d_1 \cup d_4$ et $d_2 \cup d_3$. Soit F la transformation des structures rigides qui échange e avec f , en gardant les coutures.
- Les applications D et A qui correspondent à la contraction des disques et des anneaux respectivement.

Le résultat suivant établit une présentation pour le groupoïde de dualité (voir [9] pour la preuve):

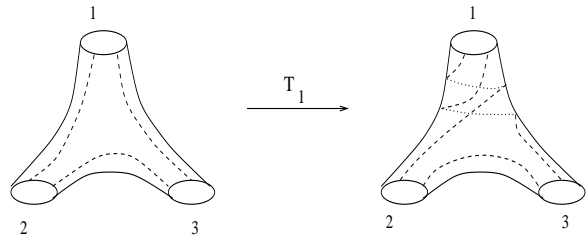


Figure 1: T_1

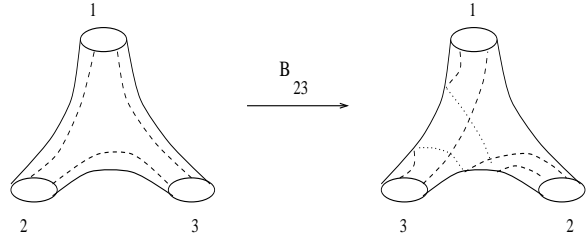


Figure 2: B_{23}

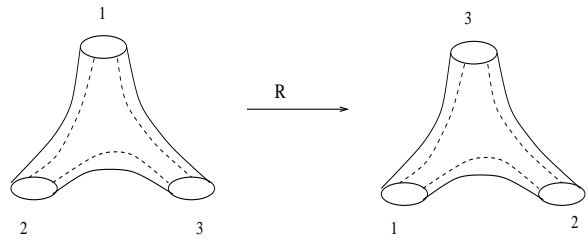


Figure 3: R

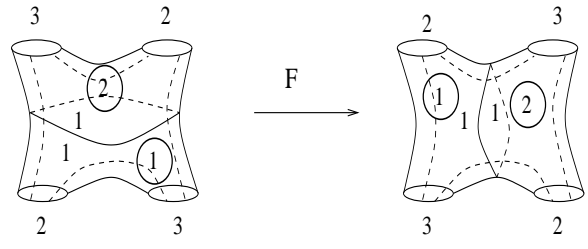


Figure 4: F

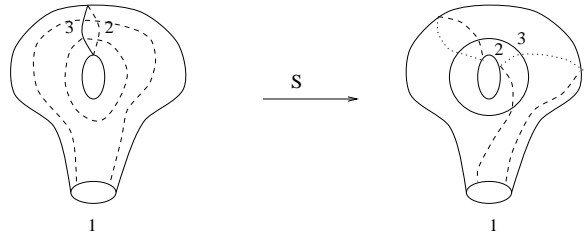


Figure 5: S

Théorème 1.1 *Le 2-groupe de dualité \mathcal{D} admet la présentation suivante:*

Générateurs $T_1, R, B_{23}, F, S, A, D, P$ et leur inverses.

Relations (équations de Moore-Seiberg). Les indices nous disent sur lesquels des facteurs d'un produit tensoriel on agit et la structure tensorielle est implicite.

1. *pour une sphère à trois trous:*

- $T_1 B_{23} = B_{23} T_1, T_2 B_{23} = B_{23} T_3, T_3 B_{23} = B_{23} T_2$, où $T_2 = R T_1 R^{-1}$ et $T_3 = R^{-1} T_1 R$,
- $B_{23}^2 = T_1 T_2^{-1} T_3^{-1}$,
- $R^3 = 1$,
- $R B_{23} R^2 B_{23} R B_{23} R^2 = B_{23} R B_{23} R^2 B_{23}$,

2. *relations définissant les inverses:*

- $P^{(12)} F^2 = 1$,
- $T_3^{-1} B_{23}^{-1} S^2 = 1$,

3. *relations déduites des singularités triangle:*

- $P^{(13)} R^{(2)} F^{(12)} R^{(2)} F^{(23)} R^{(2)} F^{(12)} R^{(2)} F^{(23)} R^{(2)} F^{(12)} = 1$,
- $T_3^{(1)} F B_{23}^{(1)} F B_{23}^{(1)} F B_{23}^{(1)} = 1$,
- $B_{23}^{-1} T_3^{-2} S T_3^{-1} S T_3^{-1} S = 1$,
- $R^{(1)} (R^{(2)})^{-1} F S^{(1)} F B_{23}^{(2)} B_{23}^{(1)} = F S^{(2)} T_3^{(2)} (T_1^{(2)})^{-1} B_{23}^{(2)} F$,

4. *relations déduites des groupes symétriques:*

- $P^2 = 1$,
- $P^{(23)} P^{(12)} P^{(23)} = P^{(12)} P^{(23)} P^{(12)}$.

5. *relations concernant les anneaux et les disques:*

- $A^{(12)} D^{(23)} = A^{(23)} D^{(12)}$,
- $A^{(12)} D_3^{(13)} = A^{(13)} D_3^{(13)} F$,
- $A^{(12)} A^{(23)} = A^{(23)} A^{(12)}$
- $SD = DS$.

CFT et TQFT. On peut maintenant formaliser la définition d'une CFT combinatoire, comme suit:

Définition 1.4 *Une CFT combinatoire (respectivement rationnelle) est une représentation unitaire du groupe de dualité (de dimension finie).*

Le résultat principal de cette section est:

Théorème 1.2 *Toute r.h.t.p. cyclique, unitaire, de dimension finie et de vecteur w_g unique provient d'une CFT.*

Remarque 1.1 *Les exemples intéressants sont des invariants de variétés de dimension 3 avec une structure additionnelle (e.g. p_1 -structure). Celle-ci correspond à une extension centrale de chaque groupe modulaire \mathcal{M}_g , ou encore à une représentation projective du groupoïde de dualité.*

Retrouver la TQFT à partir de la CFT. Soit M^3 un cobordisme orienté entre $\partial_+ M$ et $\partial_- M$. Alors $M^3 = C_+ \cup_\varphi \overline{C_-}$ se décompose en deux corps de compression. La présence d'automorphismes non-triviaux des composantes du bord impose l'addition d'une structure supplémentaire. On fixe donc des structures rigides $(\Sigma_g, c_*, \Gamma \subset \Sigma_g)$ sur Σ_g , où Γ est le graphe des coutures et c_* le découpage. Soit C un corps de compression obtenu en attachant des anses d'indice 2 le long des cercles $c_1, c_2, \dots, c_s \subset \Sigma_g$ (qui bordent dans T_g) au cylindre $\Sigma_g \times [0, 1]$. On suppose que le découpage c_* contient les cercles d'attachement. Supposons que l'autre bord du corps C est connexe donc c'est la surface Σ_h avec $h = g - s$ (à part quelques sphères S^2). Soit

$$X = \Sigma_g - \bigcup_{i=1}^s c_i \times [-\varepsilon, \varepsilon] \bigcup_{i=1}^s d_{i1} \cup d_{i2},$$

où $c_i \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \Sigma_g$ sont des voisinages réguliers disjoints des c_i 's, et d_{i1}, d_{i2} sont des disques (disjoints) plongés proprement dans T_g qui bordent $c_i \times \{\varepsilon\}$ et $c_i \times \{-\varepsilon\}$ respectivement. Alors X est homéomorphe à $\Sigma_h \cup_j S^2$. On considère les cercles $\{c_i; i \in A\}$ qui restent dessinés sur Σ_h (en particulier quelque cercles parmi les c_1, \dots, c_s). Alors $c'_* = \{c_i; i \in A\}$ est un découpage étendu sur Σ_h . La trace du graphe Γ dans Σ_h est un plongement $\Gamma' \subset \Sigma_h$ du graphe dual de c'_* . On obtient ainsi le transport de la structure rigide de Σ_g sur l'autre bord du corps de compression. Un coloriage l de Γ' est admissible si $l(x) = 1$ pour $x \in \{c_1, c_2, \dots, c_s\}$. Un coloriage admissible l s'étend à un coloriage l^e de Γ par 1. On trouve une application injective

$$Z(C) : W_h \xrightarrow{i_{\Gamma'}} \bigoplus_{l \text{ admissible}} W(\gamma', l) \simeq \bigoplus_l W(\Gamma, l^e) \subset \bigoplus_l W(\Gamma, l) \xrightarrow{i_\Gamma} W_g,$$

où $W(\Gamma, l) = \bigotimes_{v \in V(\Gamma)} W(l(e_1(v)), l(e_2(v)), l(e_3(v)))$. Revenons au cobordisme M^3 scindé comme avant. On fixe des structures rigides $\alpha_+ = \varphi \alpha_-$ sur la surface de recollement Σ_g . Soit β_+ et β_- les structures rigides sur $\partial_+ M$ et $\partial_- M$ obtenues par transport, en utilisant les deux corps de compression C_+ et $\overline{C_-}$.

Théorème 1.3 *L'invariant f des variétés fermées orientées déterminé par la r.h.t.p. ρ_* s'étend à une TQFT par la formule*

$$f(M^3, \beta_+, \beta_-) = d^{-g} Z(C_+)^* \circ \rho_g(\varphi) \circ Z(C_-).$$

Commentaires. On a un résultat similaire pour les représentations projectives qui correspondent aux invariants des 3-variétés framées. Néanmoins il paraît que cette extension centrale joue un rôle central dans les questions liées à la classification des 3-variétés. Remarquer aussi que l'on peut déduire de de la classe de Virasoro de l'algèbre de Lie des champs vectoriels sur S^1 .

On peut envisager de construire des espaces de modules de TQFT. Pour trouver des objets raisonnables il faudrait qu'on se restreint aux représentations du groupoïde de Teichmüller dans une famille d'espaces fixée. L'espace de modules correspondant est l'espace de représentations du groupoïde, qui généralise l'espace de représentations d'un groupe discret dans un groupe de Lie (modulo conjugaison). On vérifie sans peine que la représentation triviale est isolée, en utilisant les équations de Moore-Seiberg. On pense que ces espaces de modules sont de dimension 0, de cette façon ayant une autre explication pour le fait que les invariants sont définis seulement aux racines de l'unité. Il y a des arguments en faveur de cette affirmation. Dans le

cas des groupes quantiques on peut récupérer toute la catégorie modulaire à partir de l'algèbre de fusion, par exemple pour $SL(n, C)$ (les résultats sont dus à D. Kazdan et H. Wenzl).

Une question naturelle est la construction d'un groupe modulaire universel, qui devrait contenir tous les groupes modulaires de surfaces à bord, tout en respectant la structure tensorielle de la tour. Un tel groupe serait une version discrète du groupe de difféomorphismes du cercle, et on devrait pouvoir les comparer au moins au niveau infinitésimal. On mentionne qu'il y a des candidats pour le groupe universel en genre 0, liés au groupe de Thomson. On utilise pour ça une surface de genre 0 avec les bouts modélés sur un ensemble de Cantor.

La propriété essentielle d'une TQFT est l'axiome du recollement. Ça permet de calculer la valeur pour une variété en fonction des valeurs associées aux variétés obtenues en la découpant le long d'une surface plongée. Pour certaines TQFT (comme celle décrite ci-dessus) on peut considérer des découpages le long d'une famille de surfaces, qui pourraient s'intersecter transverselement le long des cercles. Pour une famille encore plus petite de TQFT on peut aller jusqu'aux coupures le long des coins, où les morceaux élémentaires sont des boules topologiques. C'est le cas des théories de type Turaev-Viro. Cette propriété donc fait que les TQFT sont calculables, mais l'interaction avec la géométrie est absente.

Les GQFT (i.e. les théories quantiques de champs géométriques), sont des QFT dont l'axiome du recollement n'est pas toujours valide. Notre modèle est la théorie de jauge pour le groupe de Lie non-compact $SL_2(\mathbf{R})$. On restreint les découpages admissibles pour l'axiome du recollement aux découpages le long des surfaces incompressibles (plongées). Ça rend le calcul récursif de la théorie assez difficile car beaucoup de 3-variétés ne sont pas Haken. Il faudrait donc remplacer les sommes statistiques par des formules intégrales, par exemple en intégrant une demi-densité sur l'espace de modules de connexions plates.

Applications des TQFT à la détection des bouts des variétés ouvertes. Les applications connues des TQFT à la topologie des variétés de dimension 3 se résument aux estimations du genre de Heegaard ainsi qu'à la définition du module de Turaev-Viro, qui généralise le module d'Alexander. Nous avons considéré une autre application, bien que dans la même lignée de raisonnement, la détection des bouts non-triviaux des 3-variétés ouvertes. La définition des invariants à l'infini est similaire à celle du module de Turaev-Viro (voir [7, 6]).

Considérons une TQFT Z en dimension 3 et W^3 une 3-variété ouverte. Soit $K_n \subset \text{int}(K_{n+1}) \subset \dots$ une suite ascendante de sous-variétés compactes de codimension 0 dont la réunion est W^3 . Les variétés intermédiaires $V_j = K_{j+1} - \text{int}(K_j)$ sont des cobordismes entre les bords ∂K_j and ∂K_{j+1} . On choisit des structures rigides arbitraires sur les bords. Le foncteur Z définit alors une suite de morphismes

$$Z : Z(\partial K_j) \rightarrow Z(\partial K_{j+1}),$$

qui forme un système inductif d'espaces vectoriels. On définit $Z_\infty(W^3)$ comme la limite inductive du système ci-dessus. Il est un invariant topologique, associé aux bouts de la variété W^3 . L'intérêt de l'invariant est de pouvoir détecter le genre à l'infini. Par définition le genre à l'infini est l'infimum du genre maximal des surfaces $\inf\{\sup_n g(\partial K_n)\}$, l'infimum étant pris sur toutes les suites ascendantes $\{K_n\}$. En particulier une variété qui est simplement connexe à l'infini est de genre 0 à l'infini, car les surfaces intermédiaires sont des sphères.

Il est évident que, pour toute TQFT réduite (c'est-à-dire que $Z(S^2) \cong \mathbf{C}$) et toute variété W^3 de genre 0 à l'infini on a $\dim Z_\infty(W^3) \leq 1$. Par des calculs explicites on va montrer que ce test est effectif.

L'exemple typique de variété qui n'est pas simplement connexe à l'infini est la variété de Whitehead. Rappelons cette construction: soit $T_0 \hookrightarrow T_1$ le plongement des tores solides du dessin ci-dessous, qui est homotopiquement trivial. Il existe un homéomorphisme h de la sphère S^3 tel que $h(T_0) = T_1$. On considère alors les itérations de h et on pose $Wh^3 = \bigcup_{n \geq 0} h^n(T_0)$.

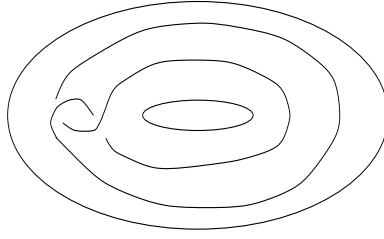


Figure 6: L'inclusion des tores

Proposition 1.2 *Si Z est la $sl_2(\mathbf{C})$ -TQFT en niveau 3 alors $\dim Z_\infty(Wh^3) = 2$, où Wh^3 est la variété de Whitehead.*

Une question naturelle se pose dans ce contexte: est-ce que les invariants à l'infini calculent des approximations suffisamment bonnes pour le genre à l'infini des variétés ouvertes? Dans toute la généralité on prouve que la réponse est négative. En effet ils existent des variétés (non-contractibles) ayant le genre à l'infini non zero mais dont les invariants à l'infini (associés aux CFT) sont triviaux (voir [7]). Pour les variétés contractibles par contre, les exemples qu'on a traités suggéreraient une réponse affirmative.

Conjecture 1.1 *Soit $Z_{\mathcal{G},k}$ la TQFT associée à l'algèbre de Lie \mathcal{G} en niveau k . Soit W^3 une variété ouverte contractible de dimension 3, ayant le genre à l'infini $g(W^3)$. Alors on a:*

$$\sup_{\mathcal{G},k} \frac{\dim(Z_{\mathcal{G},k})_\infty(W^3)}{\dim(Z_{\mathcal{G},k}(\Sigma_{g(W^3)-1}))} > 1.$$

D'autres calculs par S. Abchir et C.Blanchet dans le cas $\mathcal{G} = sl(2, \mathbf{C})$ et W^3 la variété de Whitehead confortent cette conjecture.

Les groupes modulaires. On a vu que les représentations des groupes modulaires \mathcal{M}_g déterminent la TQFT, et permettent le calcul des foncteurs pour les cobordismes. Réciproquement, on peut envisager d'obtenir de nouvelles informations sur la structure des "mapping class" groupes en utilisant des TQFT explicites.

Soit ρ_g la représentation du groupe modulaire \mathcal{M}_g , en genre g , associée à la $SU(2)$ -TQFT. Il était connu (surtout dans la communauté physique intéressée aux théories conformes de champs) que l'image de ρ_l est finie, pour toutes les valeurs du niveau l . La preuve est due à P.Gilmer (voir [11]). Ce résultat était suggéré d'ailleurs par le fait que les invariants de Reshetikhin-Turaev des espaces lenticulaires ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, pour un niveau fixé. Les calculs explicites de C.Blanchet et G.Masbaum, G.Wright montrent que l'image de ρ_g est finie pour les petites valeurs de $l = 4, 6$, en tout genre. Des résultats partiels et des questions reliées à la classification des CFT algébriques ont été discutées dans [15, 17]. Le problème de la finitude de l'image de ρ_g est donc motivé tant pour les topologues, que pour les physiciens. Notre résultat principal est (voir [8]) le suivant:

Théorème 1.4 *L'image de ρ_g (pour les TQFT associées à $SU(2)$ ou $SO(3)$, dans les versions BHMV ou Reshetikhin-Turaev) est infinie pour tout $g \geq 2$ et niveau $l \neq 2, 3, 4, 6$, avec $l \neq 10$ si $g = 2$.*

La preuve a été simplifiée dans la plupart des cas par Masbaum [14] qui a trouvé un élément explicite d'ordre infini, en utilisant la même idée. Nous considérons un sous-groupe de \mathcal{M}_g , isomorphe à $\mathcal{M}_{0,n}$, et on calcule la restriction de la représentation ρ_g à $\mathcal{M}_{0,n}$ (sur un sous-espace invariant). Cette représentation du

groupe de tresses pures P_n s'étend naturellement au groupe de tresses. On montre que celle-ci est en fait la représentation canonique du groupe de tresses dans l'algèbre de Temperley-Lieb (aux racines de l'unité). V.Jones avait considéré ces représentations et prouvé que leur image est infinie, sauf quelques exceptions. L'identification de sous-représentations du groupe modulaire avec des représentations explicites du groupe de tresses (aux racines de l'unité) est intéressante en soi-même. Une application dans "quantum computing" a été récemment considérée par M. Freedman, M.Larsen et Z.Wang dans [10], où on améliore l'infinitude ci-dessus par un résultat de densité (pour des valeurs particulières du niveau).

D'autre part on obtient des informations sur la structure des groupe modulaires, en généralisant le résultat de Humpries ([13]), qui répondait au problème 28 posé par J.Birman dans [1], p.219:

Corollaire 1.1 *Les groupes quotient $\mathcal{M}_g/N(t^l)$ par le normalisateur de la l -ième puissance d'un twist de Dehn t sont infinis si $g \geq 3$, $l \geq 3$.*

Remarquons que la preuve de Humpries ([13]) utilise la représentation de Jones pour \mathcal{M}_2 , qui se construit comme suit: on remarque que \mathcal{M}_2 est un quotient du groupe de tresses B_6 et on vérifie que la représentation de l'algèbre de Hecke associée au diagramme de Young rectangulaire factorise par \mathcal{M}_2 . Pour $g > 2$ on on remplace B_6 par B_{2g+2} et on trouve une représentation d'un sous-groupe propre de \mathcal{M}_g , le centralisateur de l'involution hyperélliptique. Une présentation de ce sous-groupe a été donnée par J.Birman et H.Hilden.

Bibliographie

1. J. Birman, *Braids, links and mapping class groups*, Ann. Math.Studies, Princeton Univ. Press, no.82, 1974.
2. C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum and P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket*, Topology, 34(1995), 883-927.
3. B. Bakalov and A. Kirillov, Jr., *On the Lego-Teichmüller game*, Transformation Groups, 5 (2000), 207-244.
4. B. Bakalov and A. Kirillov, Jr., *Lectures on tensor categories and modular functor*, AMS Publications, to appear.
5. L.Funar, *2+1-D TQFT and 2-D RCFT*, Commun.Math.Phys. 171 (1995), 405-458.
6. L.Funar, *TQFT for general Lie algebras and applications to open 3-manifolds*, J.Math.Sci., Univ of Tokyo, 4(1997), 121-181.
7. L.Funar, *TQFT and the Whitehead manifold*, J.Knot Theory Its Ramif., 6(1997), 13-30.
8. L.Funar, *On the TQFT representations of the mapping class groups*, Pacific J. Math., 188(1999), 251-274.
9. L. Funar and R. Gelca, *On the groupoid of transformations of rigid structures*, J.Math.Sci., Univ of Tokyo, 6(1999), 599-646.
10. M. Freedman, M.Larsen et Z.Wang, *A modular functor which is universal for quantum computation*, quant-ph/0001108.
11. P. Gilmer, *On the Witten-Reshetikhin-Turaev representations of mapping class groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 127(1999), 2483-2488.
12. A. Hatcher, P. Lochak and L.Schneps, *On the Teichmüller tower of mapping class groups*, J.Reine Angew. Math. 521(2000), 1-24.
13. S.P.Humpries, *Normal closures of powers of Dehn twists in mapping class groups*, Glasgow J. Math. 34(1992), 313-317.
14. G.Masbaum, *An element of infinite order in TQFT-representations of mapping class groups*, Nencka, Hanna (ed.), Low dimensional topology, Contemporary Math. 233(1999), 137-139.
15. S.D.Mathur and A.Sen, *Group theoretic classification of rational conformal field theories with algebraic characters*, Nucl.Phys. B, 327(1989), 725-743.
16. G. Moore and N. Seiberg, *Classical and quantum field theory*, Commun. Math. Phys. 123(1989), 177-254.
17. Y.S.Stanev and I.T.Todorov, *On the Schwarz problems for the $\widehat{su(2)}$ Knizhnik-Zamolodchikov equation*, Lett. Math.Phys. 35(1995), 123-134.
18. V. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, vol. 18, de Gruyter Studies in Math., 1994.

2 Invariants de noeuds et relations écheveau

Introduction. John Conway a montré qu'une normalisation convenable du polynôme d'Alexander d'un noeud vérifie la relation skein (écheveau) suivante:

$$\nabla \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - \nabla \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right) = (t^{-1/2} - t^{1/2}) \nabla \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \right)$$

Étant donné un diagramme planaire d'un noeud on peut toujours changer quelques croisements pour que le nouveau diagramme représente le noeud trivial. De cette manière on peut utiliser la relation skein ci-dessus pour un calcul récursif de ∇ , quoique cet algorithme est assez lent (exponentiel).

Dans les années quatre-vingt Vaughan Jones a découvert (voir [7]) un nouvel invariant, le polynôme de Jones, vérifiant une relation différente, mais semblable à celle de ∇ comme suit:

$$t^{-1}V \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - tV \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right) = (t^{-1/2} - t^{1/2})V \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \right)$$

Cette relation a été étendue en remplaçant le facteur $(t^{1/2} - t^{-1/2})$ par une nouvelle variable x , et on obtient l'invariant HOMFLY. L'invariant associé se spécialise à la fois au polynôme d'Alexander et celui de Jones, pour des valeurs particuliers des paramètres. Le polynôme de Kauffman est l'autre extension connue pour le polynôme de Jones, qui satisfait une relation skein pour les diagrammes non-orientés cette fois. Plus précisément les formules:

$$\Lambda \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) + \Lambda \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right) = z \left(\Lambda \left(\begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array} \right) + \Lambda \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \right) \right) \\ \Lambda \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \end{array} \right) = a\Lambda \left(\text{---} \right)$$

définissent un invariant d'isotopie régulière d'entrelacs, qui peut être rénormalisé (en utilisant la torsion du diagramme orienté) pour qu'il soit un vrai invariant. Quelques manipulations élémentaires montrent que Λ vérifie une relation skein cubique:

$$\Lambda \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \right) = \left(\frac{1}{a} + z \right) \Lambda \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - \left(\frac{z}{a} + 1 \right) \Lambda \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right) + \left(\frac{1}{a} \right) \Lambda \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \right)$$

On ne sait pas si cette relation est aussi suffisante pour le calcul récursif des valeurs de Λ (on dirait alors que la relation skein est complète). Une conjecture de Montesinos et Nakanishi affirmerait qu'une relation cubique non-orientée est complète.

Ces invariants ont été depuis généralisés comme invariants quantiques associés aux algèbres de Lie (super Lie etc) et leur représentations. Turaev ([8]) a aussi identifié les polynômes de HOMFLY et Kauffman avec les invariants qu'on obtient à partir des séries A_n et B_n, C_n, D_n respectivement. En ce qui concerne les algèbres exceptionnelles Kuperberg ([6]) a donné une description de l'invariant G_2 par des relations skein explicites qui font intervenir des diagrammes de graphes trivalents.

Noter que tout invariant dérivé d'une R-matrice R satisfait une relation skein du type:

$$\sum_{j=0}^n a_j \left\langle \left. \begin{array}{c} \text{diagram of } j \text{ twists} \\ \text{with } n \text{ strands} \end{array} \right\} j \text{ twists} \right\rangle = 0.$$

Ces relations skein satisfaites par les invariants sont liées à la théorie des représentations de l'algèbre de Hopf associée à R . En particulier on ne connaît pas des relations skein explicites (et complètes) pour d'autres invariants et on s'attend que les invariants quantiques associés aux autres (super) algèbres de Lie (de rang supérieur) satisfassent des relations polynômiales d'ordre au moins 4.

Pour toutes ces raisons la recherche d'un système complet de relations parmi lesquelles une relation est cubique est particulièrement difficile et intéressante. Nous avons approché ce problème dans [4] pour une valeur particulière des paramètres et dans le cas général dans [5]. On obtient des invariants d'entrelacs qui sont récursivement calculables et qui sont différents des polynômes de HOMFLY et Kauffman, bien qu'il est possible qu'ils soient des combinaisons linéaires des cablages des deux polynômes. La preuve combinatoire est une extension de l'approche de Jones dans [7].

L'invariant cubique. Le résultat principal de cette section est l'existence de l'invariant cubique:

Théorème 2.1 *Ils existent deux invariants d'entrelacs $I_{(\alpha, \beta)}$ et $I^{(z, \delta)}$ qui sont uniquement définis par les relations skein du dessin ci-dessous (et par leur valeur sur le noeud trivial, qui est traditionnellement 1). Ces invariants prennent valeurs dans*

$$\frac{\mathbb{Z}[\alpha, \beta, (\alpha^2 - 2\beta)^{\pm\epsilon/2}, (\beta^2 + 2\alpha)^{\pm\epsilon/2}]}{(H_{(\alpha, \beta)})},$$

et respectivement

$$\frac{\mathbb{Z}[z^{\pm\epsilon/2}, \delta^{\pm\epsilon/2}]}{(P^{(z, \delta)})},$$

où $\epsilon - 1 \in \{0, 1\}$ est le nombre de composantes mod 2 et

$$\begin{aligned} H_{(\alpha, \beta)} := & 8\alpha^6 - 8\alpha^5\beta^2 + 2\alpha^4\beta^4 + 36\alpha^4\beta - 34\alpha^3\beta^3 + 17\alpha^3 + 8\alpha^2\beta^5 + 32\alpha^2\beta^2 - \\ & - 36\alpha\beta^4 + 38\alpha\beta + 8\beta^6 - 17\beta^3 + 8, \end{aligned}$$

et respectivement

$$P^{(z, \delta)} := z^{23} + z^{18}\delta - 2z^{16}\delta^2 - z^{14}\delta^3 - 2z^9\delta^4 + 2z^7\delta^5 + \delta^6z^5 + \delta^7.$$

Ici on dénote par (Q) l'idéal engendré par l'élément Q dans l'algèbre respective.

Les polynômes A, B, C, \dots, P correspondant à $I_{(\alpha, \beta)}$ sont donnés ci-dessous. Pour obtenir les coefficients associés à $I^{(z, \delta)}$ il suffit de faire le changement de variables $w = (-z^4/(\delta z))^{1/2}$, $\alpha = -(z^7 + \delta^2)/(z^4\delta)$ et $\beta = (\delta - z^2)/z^3$ dans le tableau 1.

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagram 1} \rangle &= \alpha w \langle \text{Diagram 2} \rangle + \beta w^2 \langle \text{Diagram 3} \rangle + w^3 \langle \text{Diagram 4} \rangle \\
- \langle \text{Diagram 5} \rangle &= A w^{-2} \langle \text{Diagram 6} \rangle + B w^{-1} \langle \text{Diagram 7} \rangle + B w^{-1} \langle \text{Diagram 8} \rangle + C w^{-1} \langle \text{Diagram 9} \rangle + D \langle \text{Diagram 10} \rangle \\
+ E \langle \text{Diagram 11} \rangle + E \langle \text{Diagram 12} \rangle + F \langle \text{Diagram 13} \rangle + F \langle \text{Diagram 14} \rangle + G w \langle \text{Diagram 15} \rangle + G w \langle \text{Diagram 16} \rangle + H w \langle \text{Diagram 17} \rangle \\
+ H w \langle \text{Diagram 18} \rangle + I w \langle \text{Diagram 19} \rangle + L w^2 \langle \text{Diagram 20} \rangle + L w^2 \langle \text{Diagram 21} \rangle + M w^2 \langle \text{Diagram 22} \rangle + M w^2 \langle \text{Diagram 23} \rangle \\
+ N w^3 \langle \text{Diagram 24} \rangle + O w^3 \langle \text{Diagram 25} \rangle + P w^4 \langle \text{Diagram 26} \rangle
\end{aligned}$$

Figure 7: Les relations skein

$w = ((\alpha^2 + 2\beta)/(2\alpha - \beta^2))^{1/2}$	$A = (\beta^2 - \alpha)$
$B = (\alpha^2 - \alpha\beta^2 - \beta)$	$C = (\alpha^2 - \alpha\beta^2)$
$D = (1 + 2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^3)$	$E = (1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^3)$
$F = (1 + 2\alpha\beta - \beta^3)$	$G = (\alpha\beta^3 - 2\alpha - 2\alpha^2\beta)$
$H = (\alpha\beta^3 - 2\alpha - 2\alpha^2\beta + \beta^2)$	$I = (\alpha^4 - \alpha^3\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 3\alpha)$
$L = (2\alpha^3\beta + 3\alpha^2 - \alpha^2\beta^3 - \alpha\beta^2)$	$M = (\beta^4 - 2\beta - 3\alpha\beta^2 + \alpha^2)$
$N = (1 + 4\alpha\beta + 3\alpha^2\beta^2 - \alpha^3 - \alpha\beta^4 - \beta^3)$	$O = (1 + 3\alpha\beta + 3\alpha^2\beta^2 - \alpha^3 - \alpha\beta^4)$
$P = (3\beta^2 - \beta^5 - 2\alpha - 3\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^3)$	

Tableau 1

Conjectures and spéculations. On connaît actuellement quatre invariants provenant des traces de Markov sur les algèbres de Hecke cubiques. Pour tout facteur quadratique P_i du polynôme cubique Q on a une trace de Markov qui factorise par $H(P_i, n)$ et qui donne comme invariant un réparamétrage du polynôme HOMFLY. Il y a ensuite le polynôme de Kauffman et finalement $I_{(\alpha, \beta)}$ et $I^{(z, \delta)}$ ci-dessus. Il existe en fait un cinquième invariant, qui a été introduit par Akutsu, Deguchi et Wadati (voir [1]), en utilisant les modèles exactement résolubles de la mécanique statistique. Il s'agit de l'invariant à deux variables associé au modèle vertex pour $N = 3$, mais il s'avère que ce polynôme est une version du polynôme de Jones colorié. Il est donc important de savoir s'il y a une relation algébrique entre ces invariants. D'abord on se pose la question de savoir si les indéterminations engendrées par les polynômes H et P sont essentielles.

Conjecture 2.1 *Il y a une trace de Markov sur $H(Q, n)$ à valeurs dans une extension algébrique de $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ qui relève la trace de Markov sous-jacente à $I_{(\alpha, \beta)}$.*

Remarquons que les polynômes H et P définissent des courbes algébriques planes non-rationnelles, donc on ne peut pas expliciter une variable.

Conjecture 2.2 *Les invariants cubiques $I_{(\alpha, \beta)}$ and $I^{(z, \delta)}$ sont des combinaisons linéaires des polynômes Jones et Kauffman coloriés.*

Algèbres de Hecke cubiques. La première des relations skeins ci-dessus provient des considérations sur les quotients cubiques des algèbres de groupes de tresses $\mathbb{C}[B_n]$. On définit l'algèbre de Hecke cubique par analogie avec les algèbres de Hecke classiques (voir [2]):

$$H(Q, n) = \mathbb{C}[B_n]/(Q(b_j); j = 1, \dots, n-1),$$

où $Q(b_j) = b_j^3 - \alpha b_j^2 - \beta b_j - 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et B_n a la présentation standard

$$B_n = \langle b_1, \dots, b_{n-1} \mid b_i b_j = b_j b_i, |i - j| > 1 \text{ and } b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}, i < n-1 \rangle.$$

Notre but est de construire des traces de Markov sur la tour d'algèbres de Hecke cubiques, qui définissent des invariants pour les entrelacs. Pour $Q(0) \neq 0$ on a (voir aussi [3]):

- $\dim_{\mathbb{C}} H(Q, 3) = 24$, et $H(Q, 3)$ est une déformation de l'algèbre du groupe binaire tétraédral $\langle 2, 3, 3 \rangle$ d'ordre 24 (isomorphe à $SL(2, \mathbf{Z}_3)$).
- $\dim_{\mathbb{C}} H(Q, 4) = 96$, et $H(Q, 4)$ est une déformation de l'algèbre du groupe $\langle -2, 3 \mid 4 \rangle$.

- $\dim_{\mathbb{C}} H(Q, 5) = 600$ et $H(Q, 5)$ est une déformation de l'algèbre du groupe $GL(2, \mathbf{Z}_5)$.
- $\dim_{\mathbb{C}} H(Q, n) = \infty$ pour $n \geq 6$.

Il suit que la définition directe d'une trace sur $H(Q, n)$, $n \geq 6$ est non-triviale. Pour rester dans un contexte de dimension finie on introduit les quotients $K_n(\alpha, \beta)$, en rajoutant une relation de plus qui vit dans $H(Q, 3)$. La forme exacte de cette relation est:

$$b_2 b_1^2 b_2 + A b_1^2 b_2^2 b_1^2 + B b_1 b_2^2 b_1^2 + B b_1^2 b_2^2 b_1 + C b_1^2 b_2 b_1^2 + D b_1 b_2^2 b_1 + E b_1 b_2 b_1^2 + E b_1^2 b_2 b_1 + F b_2^2 b_1^2 + F b_1^2 b_2^2 + G b_2 b_1^2 + G b_1^2 b_2 + H b_2^2 b_1 + H b_1 b_2^2 + I b_1 b_2 b_1 + L b_2 b_1 + L b_1 b_2 + M b_1^2 + M b_2^2 + N b_1 + O b_2 + P = 0$$

où les valeurs de A, B, \dots, P sont celles du tableau 1.

Remarque 2.1 *Les algèbres $K_n(\alpha, \beta)$ sont de dimension finie pour tout n .*

Voici une explication intuitive du choix de cette relation. L'algèbre $H(Q, 3)$ est sémi-simple (pour Q générique) et se décompose comme $\mathbb{C}^3 \oplus M_2^{\oplus 3} \oplus M_3$, où M_m est l'algèbre des matrices $m \times m$. L'algèbre de Hecke usuelle (quadratique) s'obtient si on quotient par le facteur $\mathbb{C} \oplus M_2^{\oplus 2} \oplus M_3$. De même l'algèbre de Birman-Wenzl (lié au polynôme de Kauffman) s'obtient en passant au quotient par $\mathbb{C} \oplus M_2^2$. Dans notre cas on prend le quotient par \mathbb{C}^3 .

Notre résultat principal est une conséquence immédiate du résultat technique ci-dessous:

Théorème 2.2 *Il y a exactement quatre valeurs de (z, \bar{z}) pour lesquelles il existe une (unique) trace de Markov \mathcal{T} sur $K_n(\alpha, \beta)$ avec les paramètres (z, \bar{z}) , c'est-à-dire:*

1. $\mathcal{T}(xy) = \mathcal{T}(yx)$,
2. $\mathcal{T}(xb_{n-1}) = z\mathcal{T}(x)$,
3. $\mathcal{T}(xb_{n-1}^{-1}) = \bar{z}\mathcal{T}(x)$.

Le premier couple (z, \bar{z}) est

$$z = (2\alpha - \beta^2)/(\alpha\beta + 4), \quad \bar{z} = -(\alpha^2 + 2\beta)/(\alpha\beta + 4),$$

et la trace associée est $\mathcal{T}_{\alpha, \beta} : K_n(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{Z}[\alpha, \beta, 1/(\alpha\beta + 4)]/(H_{(\alpha, \beta)})$.

Les trois autres solutions ne sont pas des fonctions rationnelles et c'est plus convenable de donner α, β et \bar{z} comme fonctions de z, δ ($\delta = z^2(\beta z + 1)$). Plus précisément on pose:

$$\mathcal{T}^{(z, \delta)} : K_*(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{Z}[z^{\pm 1}, \delta^{\pm 1}]/(P^{(z, \delta)}),$$

ou

$$\beta = (\delta - z^2)/z^3, \quad \alpha = -(z^7 + \delta^2)/(z^4\delta), \quad \bar{z} = -z^4/\delta.$$

Quelques propriétés. On sait qu'à partir d'une trace de Markov \mathcal{T} on définit un invariant d'entrelacs par la formule:

$$I(x) = \left(\frac{1}{z\bar{z}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{e(x)}{2}} \mathcal{T}(x),$$

où $x \in B_n$ est une tresse dont la clôture est l'entrelacs L et $e(x)$ est la somme des exposants de x . On trouve donc deux invariants $I_{(\alpha, \beta)}$ et $I^{(z, \delta)}$. Des calculs explicites montrent que:

- ces invariants distinguent les noeuds avec au plus 10 croisements, ayant les même invariants HOMFLY. Tout comme HOMFLY et Kauffman, ils semblent ne pas distinguer les mutants.
- $I_{(\alpha, \beta)} = I_{(-\beta, -\alpha)}$ pour les noeuds amphichirals, et $I_{(\alpha, \beta)}$ détecte la chiralité de tous les noeuds avec au plus 10 croisements dont la chiralité n'est pas détectée par HOMFLY.

Bibliographie

1. Y. Akutsu, T. Deguchi et M. Wadati, *The Yang-Baxter relation: A new tool for knot theory*, Braid group, knot theory and statistical mechanics, Advanced Ser. Math. Phys. vol. 9, 151-200, 1989.
2. N.Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, IV, V, VI* Masson, Paris, 1982.
3. H.S.M. Coxeter, *Factors of braid groups*, Proc. 4-th Canadian Math. Congress, Banff, 1957, Univ.Toronto Press, 1959, 95-122.
4. L.Funar *On the quotients of cubic Hecke algebras*, Commun.Math.Phys. 173(1995), 513-558.
5. P.Bellingeri and L.Funar, *On polynomial invariants of links satisfying cubic skein relations*, math.QA/0009233.
6. G.Kuperberg, *The quantum G_2 link invariant*, International Journal of Math., 5(1994), 61-85.
7. V.Jones, *Hecke algebras and a polynomial invariant for knots*, Ann. of Math. 126(1987), 335-388.
8. V. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Inventiones Math. 92(1988), 527-553.

3 Topologie asymptotique des variétés ouvertes

Introduction. Le problème qu'on adresse dans cette section est l'existence de décompositions en anses des variétés ouvertes simplement connexes, sans anses d'indice 1. En particulier on s'intéresse à la possibilité de tuer les 1-anses quitte à remplacer une variété ouverte donnée par d'autres ayant le même type propre d'homotopie.

La relation entre la connectivité algébrique et celle géométrique a été explorée d'abord par E.C.Zeeman (see [15]) en liaison avec la conjecture de Poincaré. Un espace est dit géométriquement k -connexe au sens de Zeeman si tout compact de dimension k s'engouffre dans une boule. On prouve qu'une n -variété k -connexe (algébriquement) est géométriquement k -connexe au sens de Zeeman si $k \leq n - 3$. Notons qu'il n'y a pas de différence entre les variétés compactes et ouvertes. Plus tard C.T.C.Wall ([13]) a introduit un autre concept de connectivité géométrique utilisant les décompositions en anses, concept qui a été ensuite développé par V.Poénaru dans son travail autour de la conjecture de Poincaré. Cette fois la k -connectivité géométrique est une conséquence de la k -connexité algébrique seulement pour les n -variétés compactes dont la dimension vérifie $k \leq n - 4$. Poénaru a étendu cette notion aux variétés non-compactes de la manière suivante:

Définition 3.1 Une variété non-compacte (possiblement à bord non-vide) est géométriquement k -connexe (abrégié *g.k.c.*) s'il existe une décomposition en anses propre et sans d'anses d'indice $1 \leq j \leq k$.

Remarque 3.1 Décompositions en anses existent pour toutes les variétés, dans les catégories *TOP*, *PL*, ou *DIFF*, sauf dans le cas des variétés topologiques de dimension 4 (quand l'existence des décompositions entraîne l'existence d'une structure *PL* ou *DIFF*). Pour les variétés ouvertes une telle structure *DIFF* existe toujours (en dimension 4). Bien que la plupart des résultats ci-dessous peuvent être prouvés dans d'autres catégories, nous allons nous restreindre dans la suite au cas des variétés et décompositions *PL*.

On se concentrera dans la suite sur la simple connexité géométrique (*g.s.c.*) mais on peut traiter de la même façon les connexités supérieures. La *g.s.c.* s'étend encore à l'univers polyédral:

Définition 3.2 Un polyèdre non-compact P est *g.s.c.* au sens faible (abrégié *f.g.s.c.*) si $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, où les K_j sont des sous-polyèdres compacts avec $\pi_1(K_j) = 0$. Autrement dit, tout compact est contenu dans un sous-polyèdre compact, simplement connexe.

Notre premier résultat est une caractérisation de la *g.s.c.* en termes algébriques. Comme conséquence on trouve qu'ils existent des variétés ouvertes simplement connexes qui ne sont pas *g.s.c.* en toute dimension n (contrastant avec le cas compact). On démontre qu'il existe en fait une infinité non-dénombrable de telles variétés contractibles (donnant une réponse positive à une question de Wright [14]).

En utilisant les techniques de Poénaru [10] on montre que la *f.g.s.c.* est un invariant du type propre d'homotopie, en dimension différente de 4. En particulier si le produit avec une boule compacte $W^n \times D^k$ est *f.g.s.c.* alors la variété W^n elle-même est *f.g.s.c.*, pour tout k . Ce type de critère a été utilisé par Poénaru (voir [2, 11]) dans sa preuve de la conjecture d'uniformisation en dimension 3, qui affirme que le revêtement universel d'une 3-variété compacte à groupe fondamental infini est simplement connexe à l'infini (donc il est \mathbf{R}^3 si l'on rajoute l'irréductibilité).

La dimension 4 mérite bien plus d'attention, car la *f.g.s.c.* et la *g.s.c.* semble ne pas être équivalentes, et aussi parce que on ne sait pas grande chose sur le nombre minimal des 1-anses d'une 4-variété compacte. Il est conjecturé que la plupart des 4-variétés simplement connexes ne sont pas *g.s.c.* Un problème central est:

Conjecture 3.1 (Conjecture de Poénaru) *Si l'intérieur de la 4-variété compacte contractible à bord une sphère d'homologie est g.s.c. alors la 4-variété compacte est aussi g.s.c.*

Un corollaire immédiat serait que l'intérieur d'une 4-variété de Poénaru-Mazur est f.g.s.c. mais non pas g.s.c., car certaines variétés compactes ne sont pas g.s.c. (la conjecture de géométrisation impliquerait ça pour toute variété de Poénaru-Mazur). La preuve de la dernière assertion est due à Casson, et elle est basée sur des solutions partielles positives de la conjecture algébrique suivante ([8, p.117] [9, p.403]):

Conjecture 3.2 (Conjecture de Kervaire) *Supposons que l'on rajoute un nombre égal de générateurs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et relations r_1, \dots, r_n à la présentation d'un groupe non-trivial G , alors le groupe $\frac{G * \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}{\langle \langle r_1, \dots, r_n \rangle \rangle}$ qu'on obtient de cette façon est aussi non-trivial.*

Dans [3] on s'attaque à la conjecture de Poénaru, plutôt dans le cas où le bord n'est pas une sphère d'homotopie. Le résultat typique est que la conjecture est vraie pour certaines types de décomposition en anses, mais on ne sait toujours pas si toutes les décompositions vérifient ces conditions. Notons que la conjecture de Poénaru ci-dessus (dans le cas particulier d'une boule d'homotopie) entraînerait la conjecture de Poincaré en dimension 3.

La caractérisation des variétés géométriquement simplement connexes. On sait que la g.s.c. est une conséquence (en dimension 3 équivalence) de la simple connexité à l'infini. De plus, une simple application du théorème de Wall ([13]) montre qu'en toute dimension, sauf la dimension de 4, les f.g.s.c. et g.s.c. sont équivalentes (en dimension 3 il faut assumer en plus l'irréductibilité). Nous allons introduire une version algébrique de la f.g.s.c., que l'on pourra ensuite tester sur n'importe quelle exhaustion de la variété.

Définition 3.3 *Considérons la paire $(\varphi : A \rightarrow B, \psi : A \rightarrow C)$ de morphismes de groupes. On définit inductivement le sous-groupe $G_\alpha \subset C$ pour tout ordinal α . Soit $G_0 = C$. Si G_α est défini pour tout $\alpha < \beta$ (i.e. β est un ordinal limite) alors on pose $G_\beta = \bigcap_{\alpha < \beta} G_\alpha$. Ensuite on pose $G_{\alpha+1} = \mathcal{N}(\psi(\ker \varphi), G_\alpha) \triangleleft G_\alpha$ pour les autres ordinaux, où $\mathcal{N}(K, G)$ est le plus petit sous-groupe normal de G contenant K . Les groupes G_α forment une suite décroissante de sous-groupes de C . Le lemme de Zorn entraîne l'existence d'un infimum (par rapport à l'inclusion) des G_α , qu'on dénote par $G_\infty = \bigcap_{\alpha} G_\alpha$ (sur tous les ordinaux α). La paire $(\varphi : A \rightarrow B, \psi : A \rightarrow C)$ est α -compressible si $\psi(A) \subset G_\alpha$ (ou α peut être aussi ∞).*

Définition 3.4 *Le sous-groupe K est plein dans Γ si $\mathcal{N}(K, \Gamma) = \Gamma$. Pour une paire comme avant, on dit que Γ est admissible si $\psi(\ker \varphi)$ est plein dans Γ .*

Définition 3.5 *La paire d'espaces (T', T) est α -compressible si pour chacune des composantes S_j de ∂T et V_j de $T' - \text{int}(T)$ telles que $S_j \subset V_j$, la paire $(*_j \pi_1(S_j) \rightarrow \pi_1(T), *_j \pi_1(S_j) \rightarrow *_j \pi_1(V_j))$ est α -compressible. Les morphismes sont ceux induits par les inclusions. On dénote par $G_\infty(T, T')$ le groupe G_∞ associé à la paire ci-dessus.*

Remarque 3.2 *Ces morphismes dépendent des choix de points bases dans chaque composante, mais la compressibilité n'en dépend pas.*

Définition 3.6 *La variété ouverte W^n est aux bouts compressibles (respectivement k -compressibles) s'il existe une exhaustion par des sous-variétés compactes*

$$W^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i, \quad T_i \subset \text{int}(T_{i+1}),$$

telle que:

1. toutes les paires (T_{i+1}, T_i) sont ∞ -compressible (respectivement k -compressibles).
2. si $S_{i,j}$ dénotent les composantes de ∂T_i alors le morphisme $*_j \pi_1(S_{i,j}) \rightarrow \pi_1(T_i)$ induit par l'inclusion est surjective.
3. chaque composante de $T_{i+1} - \text{int}(T_i)$ intersecte T_i le long d'une seule composante.
4. Pour chaque i il existe un sous-groupe admissible Γ_i de $G_\infty(T_i, T_{i+1})$ qui est de présentation finie.

Théorème 3.1 Une n -variété ouverte, simplement connexe qui est f.g.s.c. est aux bouts compressibles. Réciproquement, toute variété ouverte de dimension $n \geq 5$, simplement connexe, aux bouts compressibles est g.s.c.

Remarque 3.3 Ce théorème s'étend au cas des variétés non-compactes à bord, pour une définition de la f.g.s.c. appropriée.

On voudrait maintenant une critère pratique permettant de décider qu'une variété ne l'est pas g.s.c., car l'inexistence d'une exhaustion comme dans l'énoncé du théorème est difficile à tester.

Proposition 3.1 Toute exhaustion $\{T_i\}_i$ de la variété f.g.s.c. W^n ayant la propriété 3. ci-dessus (i.e. chaque composante de $T_{i+1} - \text{int}(T_i)$ intersecte T_i le long d'une seule composante) admet un raffinement dont les termes consécutifs vérifient les conditions:

1. toutes les paires (T_{i+1}, T_i) sont ∞ -compressible.
2. si $S_{i,j}$ dénotent les composantes de ∂T_i alors l'application $*_j \pi_1(S_{i,j}) \rightarrow \pi_1(T_i)$ induite par l'inclusion est surjective.
3. Pour chaque i il existe un sous-groupe admissible $\Gamma_i \subset G_\infty(T_i, T_{i+1})$ de présentation finie.

On remarque aussi que le premier niveau de la compressibilité est trivial, car on a montré la proposition suivante:

Proposition 3.2 Toute variété ouverte de dimension $n \geq 5$, simplement connexe est aux bouts 1-compressibles.

Variétés de Whitehead en dimensions supérieures. La variété de Whitehead en dimension 3 est le prototype de la variété contractible qui n'est pas simplement connexe à l'infini, et il y a une infinité non-dénombrable de telles exemplaires non homéomorphes deux-à-deux.

Nous rappelons qu'un espace non-compact W est simplement connexe à l'infini (s.c.i.) (et on écrit aussi $\pi_1^\infty(W) = 0$), si pour tout compact K_1 il existe un autre compact K_2 avec $K_1 \subset K_2 \subset W$, tel que tout lacet dans $W - K_2$ est nul homotope dans $W - K_1$. Certaines auteurs appellent ça π_1 -trivialité à l'infini et réservent le terme s.c.i pour le cas spécial où K_2 est choisi tel que $W - K_2$ est connexe. Dans les cas des variétés ayant un seul bout (comme c'est le cas des variétés contractibles) ces définitions sont équivalentes. La s.c.i. est une condition importante de non-sauvagerie des bouts. Elle a été utilisée pour la caractérisation des espaces euclidiens parmi les variétés contractibles (Edwards, Wall, Siebenmann et Freedman).

En général s.c.i. et g.s.c. sont indépendantes, car ils existent des variétés de dimension $n \geq 4$ qui sont g.s.c. mais qui ne sont pas s.c.i. En dimension 3 par contre, ce sont des propriétés équivalentes.

En utilisant une interprétation géométrique du nombre d'enveloppement des deux tores solides, qui se généralise en toute dimension on prouve que:

Théorème 3.2 *Il existe une infinité non-dénombrable de variétés de type Whitehead en toute dimension.*

Ceci répond à la question de Wright ([14]).

La présence des 1-anses comme invariant du type propre d'homotopie. Contrairement au cas compact, où la stabilisation permet d'obtenir la simple connexité géométrique Poénaru ([10]) a démontré le théorème suivant:

Théorème 3.3 *Si W^3 est une variété ouverte simplement connexe de dimension 3 telle que le produit $W^3 \times D^n$, avec une boule compacte, admet une décomposition sans anses d'indice 1, alors W^3 est simplement connexe à l'infini.*

Poénaru avait demandé s'il y a une connexion entre le type simple d'homotopie et la g.s.c. en dimension 3. La conjecture naturelle serait qu'une variété de dimension 3 ouverte dont le type simple (infini) propre d'homotopie est celui d'un CW-complexe de dimension finie f.g.s.c., est s.c.i. En utilisant le théorème de Chapman cette affirmation correspond à remplacer D^n par le cube d'Hilbert dans le théorème ci-dessus. On établit dans [5] ce résultat sans demander que le type d'homotopie soit simple:

Théorème 3.4 *Si W^3 est une variété ouverte simplement connexe de dimension 3 qui a le même type propre d'homotopie qu'un polyèdre f.g.s.c. alors W^3 est s.c.i.*

La preuve utilise les techniques développées par Poénaru et le théorème se généralise encore au cas où la variété W^3 est proprement dominée par un polyèdre f.g.s.c. On dit qu'un polyèdre P domine (proprement) X s'il existe une application PL $f : X \rightarrow P$ telle que le cylindre $Z_f = X \times [0, 1] \cup_f P$ de f se retracte (proprement) sur X .

Remarque 3.4 • *Ce résultat est purement trois dimensionnel, et il ne s'étend pas aux dimensions supérieures, tel quel. En effet les variétés de Poénaru-Mazur M^n sont compactes, contractibles et $M^n \times D^1 = D^{n+1}$, mais $\pi_1(\partial M^n) \neq 0$. La dernière condition nous dit que $\text{int}(M^n)$ n'est pas s.c.i. mais on peut montrer que $\text{int}(M^n) \times D^1$ est g.s.c. pour $n \geq 4$.*

- *La condition de propreté ci-dessus est essentielle, car $\pi_1^\infty(W \times \mathbf{R}) = 0$ pour toute n -variété contractible V ($n \geq 3$).*

On a obtenu une autre amélioration dans un travail commun avec T.Thickstun ([6]). L'avantage de cette approche est que l'on utilise que des techniques basiques de la topologie en dimension 3.

Définition 3.7 *On dit que l'application $f : X \rightarrow U$ est H_3 -nontriviale si pour chaque compact $K \subset U$ il existe un compact $L \supset f^{-1}(K)$ tel que l'application $f_* : H_3(X, X - L) \rightarrow H_3(U, U - K)$ est nontriviale.*

On a prouvé dans [6]:

Théorème 3.5 *Supposons qu'il existe une application H_3 -nontriviale, $f : P \rightarrow U^3$ entre le polyèdre f.g.s.c. P et la variété U^3 . Alors les bouts de U^3 sont simples. En particulier si U^3 est simplement connexe alors U^3 est aussi s.c.i.*

Remarque 3.5 *Si U^3 est un retract de déformation de P ou bien U^3 a le même type propre d'homotopie que P alors les conditions du théorème sont satisfaites et les résultats de d'avant s'obtiennent comme corollaire.*

On a aussi donné une extension de ce résultat en dimensions supérieures (voir [3]):

Théorème 3.6 *Une n -variété non-compacte, pour $n \neq 4$, (respectivement $n = 4$) qui a le même type propre d'homotopie qu'un polyèdre f.g.s.c. est aussi f.g.s.c. (respectivement elle a les bouts compressibles).*

La dimension 4. Casson a montré que certaines 4-variétés $(W^4, \partial W^4)$ n'ont pas de décompositions sans anses d'indice 1, en montrant que si elles y avaient alors $\pi_1(\partial W^4)$ violerait la conjecture de Kervaire énoncée avant. Les arguments de Casson fonctionnent dans tous les cas où la conjecture de Kervaire est vérifiée. Par exemple dans [7] il a été prouvé que la conjecture est vraie pour les sous-groupes des groupes de Lie compacts. Ensuite Rothaus ([12]) a étendu ce résultat aux groupes résiduellement finis. En particulier l'argument de Casson est valable pour toutes les variétés dont le bord vérifie la conjecture de géométrisation. Un argument simple étend encore la validité de la conjecture aux groupes ayant un quotient non-trivial qui la vérifie.

Notre but dans cette section serait de montrer que la plupart des 4-variétés contractibles ne sont pas g.s.c., et la méthode serait la réduction de cette affirmation au cas compact. Pour l'instant on peut utiliser ce chemin seulement pour des décompositions ayant des propriétés additionnelles. Le résultat principal s'énonce comme suit:

Théorème 3.7 *Supposons qu'on a une décomposition propre en anses, sans anses d'indice 1, de l'intérieur d'une 4-variété de Poénaru-Mazur V^4 . S'il existe une 3-variété intermédiaire M^3 (lorsque l'on rajoute les anses) suffisamment loin, dont*

- *l'homologie est représentée par des surfaces disjointes plongées et,*
- *le groupe fondamental se projete sur le sous-groupe trivial dans $\pi_1(\partial V^4)$,*

alors la variété compacte V^4 est g.s.c.

D'autre part il existe toujours une collection de surfaces immergées, qui pourraient avoir des intersections non-triviales, et des auto-intersections le long des courbes null-homologues, qui vérifient les conditions ci-dessus.

Conjectures et commentaires. On sait depuis le contre-exemple de M.Davis ([1]) qu'ils existent des variétés asphériques de dimension $n \geq 4$ dont le revêtement universel n'est pas simplement connexe à l'infini. Ces exemples peuvent avoir comme groupes fondamentaux des groupes hyperboliques au sens de Gromov. On voudrait proposer, une version plus faible de la conjecture d'uniformisation, comme suit:

Conjecture 3.3 *Le revêtement universel de toute variété compacte asphérique est f.g.s.c.*

En suivant Gromov on définit la propriété f.g.s.c. pour les groupes discrets. On dit que Γ est f.g.s.c. s'il existe une variété de groupe fondamental Γ dont le revêtement universel est f.g.s.c. Ce sera alors le cas pour n'importe quel autre espace dont le groupe fondamental est Γ , et donc f.g.s.c. est une propriété du groupe. On est même tentés de conjecturer que tout groupe de présentation finie est f.g.s.c., car on n'a pas d'exemples qui disent le contraire.

Conjecture 3.4 *Ils existent des 4-variétés ouvertes W^4 aux bouts compressibles qui ne sont pas f.g.s.c. (donc telles que leur produit $W^4 \times D^1$ est f.g.s.c.). Ils existent des 4-variétés f.g.s.c. qui ne sont pas g.s.c.*

Conditions géométriques. Dans [4] on s'attaque aux conditions géométriques requises pour que la topologie asymptotique de la variété soit finie. Ça veut dire qu'on trouve une fonction de Morse f , propre et telle que les sous-variétés $f^{-1}(n)$, pour $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, sont toutes difféomorphes.

Définition 3.8 Une variété riemannienne ouverte est dite à géométrie bornée si la courbure est bornée et le rayon d'injectivité minoré (par une constante positive).

Définition 3.9 On dit que la variété riemannienne ouverte est à croissance linéaire si la fonction volume de la boule de rayon r est minorée et majorée par des fonctions linéaires en r .

M.Gromov avait prouvé qu'on peut réaliser des métriques à géométrie bornée et croissance prescrite, mais strictement sur-linéaire, sur toute variété ouverte. Nous allons montrer qu'il y a une seule obstruction topologique à la croissance linéaire. Il était aussi connu qu'on peut trouver des métriques à croissance linéaire sur les variétés à topologie finie à l'infini (résultat dû à R.Grimaldi). Le résultat principal de [4] est la nécessité de cette condition:

Théorème 3.8 Une variété ouverte à géométrie bornée et croissance linéaire a la topologie finie à l'infini.

La preuve utilise la théorie de Cheeger-Gromov, le théorème de finitude de Cheeger et une (nouvelle) estimation pour la longueur des lacets presque-géodésiques dans les variétés à géométrie bornée. Dans le cas où la courbure de Ricci est non-négative et la croissance est linéaire, C.Sormani a prouvé que la variété est proche dans la distance de Gromov-Hausdorff d'un produit tordu ("warped product").

Bibliographie

1. M.W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. Math., 117(1983), 293-324.
2. L.Funaru, *A Dehn exhaustibility lemma*, 10p., appendice de V.Poénaru, *Universal covering spaces of closed 3-manifolds are simply-connected at infinity*, preprint Orsay 20/2000.
3. L.Funaru and S.Gadgil, *On the geometric simple connectivity of open manifolds*, preprint, math.GT/0006003.
4. L.Funaru and R. Grimaldi, *La topologie à l'infini des variétés à géométrie bornée et croissance linéaire*, J.Math.Pures Appl., 76(1997), 851-858.
5. L.Funaru, *On proper homotopy type type and simple connectivity at infinity for open 3-manifolds*, Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 2000.
6. L.Funaru and T.L. Thickstun, *On open 3-manifolds proper homotopy equivalent to geometrically simply connected polyhedra*, Topology Its Appl., 109(2001), 191-200.
7. M. Gerstenhaber and O. S. Rothaus, *The solution of sets of equations in groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48(1962) 1531-1533.
8. M. Kervaire, *On higher dimensional knots*, Differential and combinatorial topology (Symposium in honour of Marston Morse), Princeton Math. Series, vol. 27, 1965.
9. W. Magnus, A. Karras et D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Interscience, 1966.
10. V. Poénaru, *Killing handles of index one stably and π_1^∞* , Duke Math. J., 63(1991), 431-447.
11. V. Poénaru, *Universal covering spaces of closed 3-manifolds are simply connected at infinity*, preprint Orsay, 2000/20, 203 p.
12. O.S.Rothaus, *On the non-triviality of some group extensions given by generators and relations*, Ann. of Math, 106(1977), 599-612.
13. C.T.C. Wall, *Geometrical connectivity I, II*, J.London Math.Soc. (2), 3(1971), 597-604, 605-608.
14. D.G. Wright, *Contractible open manifolds which are not covering spaces*, Topology, 31(1992), 281-291.
15. E.C. Zeeman, *The Poincaré conjecture for $n \geq 5$* , Topology of 3-manifolds and related topics, (M.K.Fort Jr., Editor), Prentice Hall, N.J., 1962, 198-204.

4 Cubications des variétés et immersions

Introduction. Les mouvements étoile ont été considérés par Alexander ([1]) qui a montré que toute triangulation d'un polyèdre peut être obtenue par des tels mouvements à partir d'une triangulation donnée. Pachner (voir [27]) a raffiné ce résultat en considérant un nombre fini de mouvements (bi-étoile) ayant la même propriété de transitivité. Une application de ce résultat est la construction de Turaev et Viro (voir [29]) d'invariants quantiques des variétés de dimension 3 en utilisant des sommes statistiques associées à une triangulation. L'invariance de cette somme aux mouvements de Pachner est équivalente à l'invariance topologique. En partant de la même catégorie modulaire, le formalisme de Reshetikhin-Turaev (utilisant les présentation de chirurgie pour les variétés) fournit plus d'informations que le formalisme de Turaev-Viro. En particulier il y avait l'espoir que des invariants obtenus en utilisant les cubications peuvent éventuellement donner aussi la phase des invariants de Reshetikhin-Turaev, non seulement leur module (comme c'était le cas pour les triangulations)

Un complexe cubique est un complexe K qui consiste en cubes Euclidiens tel que l'intersection des deux cubes est une réunion finie des cubes de K , toutes les fois qu'un cube est dans K ses faces seront dans K aussi, et il n'y a pas d'identification des faces du même cube. Une *cubication* d'une variété est la donnée d'un complexe cubique PL homéomorphe à la variété. Pour appliquer le formalisme des sommes statistiques aux cubications on a besoin d'un analogue pour le théorème de Pachner. N.Habegger a demandé (voir le problème 5.13 de la liste de R.Kirby ([21])) la question suivante:

Probleme 1 *Soit M et N deux cubications de la même variété PL de dimension n . Est-ce que les deux cubications sont reliées par les transformations suivantes: on excise B et on le remplace par B' , où B et B' sont des boules, sous-complexes du bord du cube standard de dimension $n + 1$?*

Les mouvements ci-dessus seront appelés des transformations cubiques (voir un exemple dans le dessin).

Soit $C(M)$ l'ensemble des cubications de la variété M et $CB(M)$ les classes d'équivalence par les mouvements cubiques. On vérifie facilement que $CB(S^1) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Le but de cette section est de donner une description de $CB(M)$ (qui manifestement n'est pas trivial). Une autre version du problème de Habegger est de trouver une classe suffisamment large de cubications ayant une description intrinsèque et dont toutes les cubications soient équivalentes.

La classe des cubications que nous allons considérer est celle des cubications qui admettent une immersion combinatoire dans la cubication standard de l'espace Euclidien de dimension assez grande, qui seront appelées applicables. L'étude de ces cubications a été commencée par Dolbilin, Shtanko et Shtogrin, en relation avec le modèle d'Ising et suivant une suggestion de Novikov (voir [7, 8, 26]).

D'autre part, à toute cubication C de M on associe une immersion φ_C en M de codimension 1. On montre que cette application induit un isomorphisme de $CB(M)$ sur le groupe $\mathcal{I}(M)$ de bordismes d'immersions dans M . La construction de Thom-Pontryagin donne une descriptin homotopique du dernier, qui malheureusement est difficile à expliciter. Les résultats de Benedetti et Silhol [5] donnent la réponse explicite en dimension 3, et dans un travail commun avec R.Gini (voir [15, 14]) on va l'étendre à la dimension 4.

Obstructions élémentaires. L'approche combinatoire la plus directe est de considérer pour toute cubication $x \in C(M)$ de la variété n -dimensionnelle M le f -vecteur $\mathbf{f}(x)$, dont la composante $f_i(x)$ compte le nombre de cubes de dimension i dans x . L'orbite de \mathbf{f} par les transformations cubiques est de la forme $\mathbf{f} + \Lambda(n) \subset \mathbf{Z}^{n+1}$, où $\Lambda(n)$ est un réseau. On a donc une application $CB(M) \rightarrow \mathbf{Z}^{n+1}/\Lambda(n)$ à valeurs dans un groupe fini abélien.

Proposition 4.1 *On a les nombres paires $a_i(n) \in \mathbf{Z}_+$ tels que la projection $\mathbf{Z}^{n+1}/\Lambda(n) \rightarrow \prod_{i=0}^n \mathbf{Z}/a_i(n)\mathbf{Z}$ est surjective. Les plus grands des nombres ayant cette propriété $a_i(n)$ vérifient $a_n(n) = 2$, $a_{n-1}(n) = 2n$,*

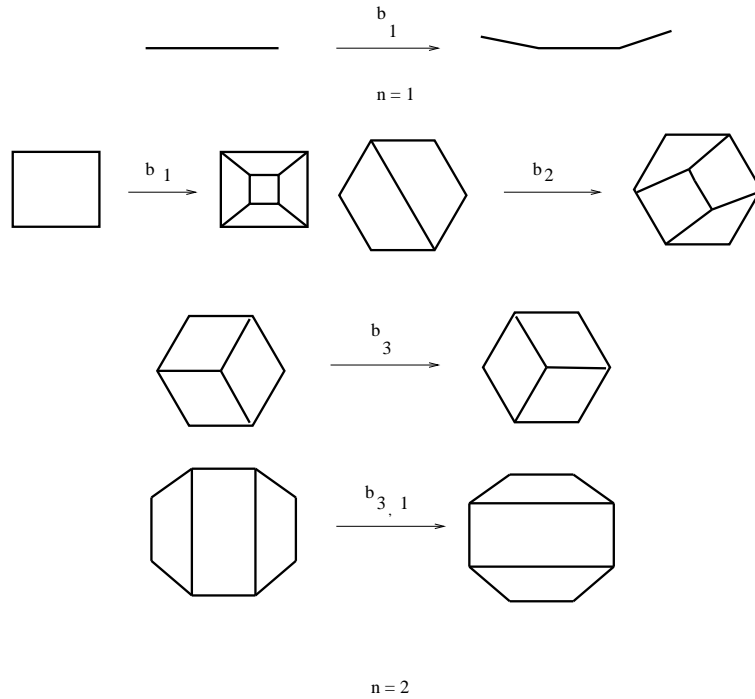


Figure 8: Transformations cubiques pour $n = 1$ et $n = 2$

$a_{n-2}(n) = 2$, $a_0(n) = 2$, $a_1(n) = 3 + (-1)^n$, ($n > 2$).

Voir [13] pour la preuve. Soit fb la classe de \mathbf{f} dans $\prod_{i=0}^n \mathbf{Z}/a_i(n)\mathbf{Z}$ et $fb^{(2)}$ l'élément réduit modulo $(2, 2, 2, \dots, 2, 2n, 2)$. Remarquons que $\Lambda(n)$ n'est pas un réseau produit, en général. Par exemple, pour $n = 3$ on a un invariant additionnel, $f_0 + f_1 \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.

Un problème naturel serait le calcul de l'image $fb(CB(M))$, pour M fixé. Quelques résultats partiels pour $fb^{(2)}(CB(M))$ sont connus. En effet il suffit de voir lesquels des f -vecteurs mod 2 se réalisent par les cubications de M . On sait qu'il y a des contraintes pour l'existence d'un polyèdre simplicial de f -vecteur et type topologique prescrits. La caractérisation complète des f -vecteurs des polytopes simpliciaux (et sphères PL) a été obtenue par Stanley ([28]). Le problème analogue pour les polytopes cubiques a été adressé récemment (voir [4, 3, 17, 19]). La nouveauté par rapport au cas simplicial est la présence des conditions de parité ([4]). Babson et Chan ont démontré ([3]) que les cubications des sphères sont étroitement liées aux immersions:

Proposition 4.2 *Il existe une cubication de la n -sphère K avec $f_i \pmod{2}$ prescrits si et seulement s'il existe une immersion (aux croisements normaux) de codimension 1 $\varphi : M \rightarrow S^n$ telle que $f_i(K) = \chi(X_i(M, \varphi)) \pmod{2}$, ou χ dénote la caractéristique d'Euler, et $X_i(M, \varphi)$ est l'ensemble des points de multiplicité i .*

Il y a une littérature abondante sur les immersions, et en special sur la fonction θ_n , qui compte le nombre des points n -multiples mod 2 (considérée par Freedman dans [11]). Banchoff [2] avait prouvé que le nombre de points triples d'une surface immergée dans \mathbf{R}^3 est $\chi(S) \pmod{2}$. On a un morphisme de groupes $\theta_n : B_n \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur le groupe abélien B_n des classes de bordismes d'immersions de $(n-1)$ -variétés dans S^n . θ_n est surjective (i.e. nontrivial) si et seulement si $fb_{n-1}^{(2)}(S^n) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. En utilisant les résultats concernant

la fonction θ_n [11, 9, 10, 22, 23, 6] on en déduit que les f -vecteurs d'une cubication de S^n ont les propriétés suivantes:

1. Pour $n = 2$ on a $f_0 = f_2(\text{mod } 2)$ et $f_1 = 0(\text{mod } 2)$, donc $fb^{(2)}(CB(S^2)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
2. Pour $n = 3$, $f_0 = f_1 = 0(\text{mod } 2)$, $f_2 = f_3(\text{mod } 2)$. L'immersion de Boy $j : \mathbf{R}P^2 \rightarrow S^3$ n'a qu'un seul point triple, donc il existe une S^3 cubique avec un nombre impair de faces. Il suit que $fb^{(2)}(CB(S^3)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
3. La caractérisation de $fb_{n-1}^{(2)}(S^n)$ se réduit au problème homotopique suivant: $fb_{n-1}^{(2)}(S^n) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si et seulement si
 - (a) soit n est 1, 3, 4 ou 7.
 - (b) ou alors $n = 2^a - 2$, où $a \in \mathbf{Z}_+$, et il existe une n -variété framée d'invariant de Kervaire 1. L'existence d'une telle variété est connue pour $n = 2, 6, 14, 30, 62$.
4. Si on considère seulement les cubications "edge-orientable" (voir [17]) alors les valeurs de $fb_{n-1}^{(2)}(S^n)$ sont connues. Les cubications "edge-orientable" sont celles associées aux immersions des variétés orientables dans S^n . Donc il suffit de calculer la restriction de θ_n au sous-groupe des bordismes orientés, chose faite par Freedman (voir [11]). En particulier $f_{n-1} = 0(\text{mod } 2)$ si $n \neq 1, 2, 4$.

La dimension 2. À chaque cubication d'une surface on peut associer une collection de cercles immergés K_i , obtenus en joignant les milieux des arêtes opposées de chaque carré. Cette cubication est dite *simple* si chaque cercle est plongé (individuellement). Notons que simple est équivalent à applicable (voir ci-dessous) pour S^2 .

Proposition 4.3 *L'application $fb^{(2)} = f_0(\text{mod } 2)$ est un isomorphisme entre $CB(S^2)$ and $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.*

La preuve est combinatoire (voir [12]) et élémentaire. L'ensemble de transformations cubiques contient une famille distinguée de mouvements, dont les boules B et B' ne contiennent pas des faces parallèles. On montre de cette façon que cette famille est loin d'être convenable pour le problème de Habegger.

Bordismes d'immersions. Soit $\mathcal{I}(M)$ le groupe de bordismes d'immersions de codimension 1 dans M . On peut supposer que les immersions n'ont que des croisements normaux dans la suite. Deux immersions $f_i : N_i \rightarrow M$ des $(n-1)$ -variétés N_i sont *bordantes* s'il existe une immersion propre $f : N \rightarrow M \times [0, 1]$ d'un cobordisme N entre N_1 et N_2 , tel que la restriction de f à N_i est isotopique à f_i .

Une cubication *marquée* est une cubication C de M , dotée d'un homéomorphisme $\text{PL } |C| \rightarrow M$ de l'espace sous-jacent $|C|$, considéré à isotopie près. Si on opère une transformation cubique sur C , on induit un marquage naturel pour la nouvelle cubication. Il suit donc que l'ensemble $\widetilde{CB}(M)$ des cubications marquées mod transformations cubiques est bien défini. En effet il est le bon objet à considérer.

On associe maintenant à chaque cubication marquée C une immersion $\varphi_C : N_C \rightarrow M$ comme suit. Tout cube est divisé en 2^n cubes égaux par n hyperplanes qu'on appelle sections. Quand on récolle les cubes d'une cubication les sections de chaque cube sont recollées de la même façon. L'union des sections est l'image d'une immersion de codimension 1. On a prouvé dans [12, 14]

Théorème 4.4 *L'application $C \rightarrow \varphi_C$ induit une bijection $I : \widetilde{CB}(M) \rightarrow \mathcal{I}(M)$.*

La surjectivité est prouvée (et l’injectivité conjecturée) dans [12].

Ceci dit que $\widetilde{CB}(M)$ dépend seulement du type d’homotopie de M , et le foncteur \widetilde{CB} est représentable. Notons que $CB(M) = \widetilde{CB}(M)/\mathcal{M}(M)$, où $\mathcal{M}(M)$ est le groupe d’homéomorphismes de M à isotopie près. En utilisant la construction de Pontryagin-Thom (voir [30]) il suit que $\mathcal{I}(M) = [M_c, \Omega^\infty S^\infty \mathbf{RP}^\infty]$, où M_c est la compactification par un point de M , Ω dénote l’espaces des lacets, S la suspension réduite et les parenthèses dénotent les classes d’homotopie d’applications. Si M est avec bord non-vide ∂M alors $\mathcal{I}(M) = [M/\partial M, \Omega^\infty S^\infty \mathbf{RP}^\infty]$. Les coefficients de cette théorie sont les groupes P_* d’homotopie stable de \mathbf{RP}^∞ , qui ont été calculés par Liulevicius [25] pour des petits valeurs de n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_n = \pi_n^s(\mathbf{RP}^\infty)$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/16\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\oplus 3}$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\oplus 4}$

Soit maintenant $\mathcal{C}(M)$ l’ensemble des bordismes de cubications. Deux cubications C_1 et C_2 sont *bordantes* s’il existe une cubication C de $M \times [0, 1]$ dont les restrictions au bords soient les C_i . On a une application naturelle $CB(M) \rightarrow \mathcal{C}(M)$. L’existence d’une section pour cette application est similaire au theoreme de Wall sur l’existence des déformations formelles entre deux n -complexes ayant le même type d’homotopie simple par des $n + 1$ -complexes (ici $n \neq 2$). Remarquons que dans notre cas, n’importe quelles deux cubications déviennent cobordantes après sous-divisions.

Considérons une cubication de S^n qui est équivalente (par des transformations cubiques) à la cubication standard. On peut voir les transformations cubiques comme le résultat de l’attachement des $n + 1$ -cubes à l’épaississement de la cubication. En particulier toute cubication comme avant borde, c’est à dire que c’est le bord d’une cubication de la $n + 1$ -boule. Par exemple, pour $n = 1$ un polygône borde si et seulement s’il a un nombre pair d’arêtes. Le problème ci-dessus est de voir que, réciproquement toute cubication qui borde est équivalente à la cubication standard. Pour $n = 2$ la réponse pourrait être encore positive, mais pour $n = 3$ la réponse est negative. Ce phénomène est l’analogie de l’existence des triangulations non-décorticable (“non-shellable”) de la boule (voir [24]).

On dit qu’on remue une cubication si on l’épaissit et après, à chaque pas ou bien l’on rajoute un $n + 1$ -cube (le long d’une boule) ou alors on enlève un $n + 1$ -cube ayant une boule commune avec le bord. La cubication induite sur l’autre bord, est dite être obtenue en remuant. Le théorème de Pachner dit en fait que toute triangulation s’obtient d’une triangulation donnée en la remuant. Dans le cas des cubications de la sphère une première obstruction serait que la cubication borde (pour être équivalente à la cubication standard). Mais ils existent des cubications de S^3 qui bordent mais ne s’obtient pas de la cubication standard en la remuant. Considérons par exemple la somme connexe $x\sharp x$, où $I(x)$ est le générateur de $\pi_3^s(\mathbf{RP}^\infty) = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$. On va prouver ci-dessous que la somme connexe des cubications est une composition de monoïde sur $CB(S^n)$ et que I respecte cette structure de monoïde. Mais $x\sharp x$ borde et ce n’est pas l’élément trivial, ce qui prouve notre affirmation.

Cubications plongéables et applicables. Les complexes cubiques, comme objets d’étude topologique, ont été considérés par S. Novikov ([26], p.42) qui avait demandé quand est-ce qu’un tel complexe se plonge (respectivement s’immerge) dans le squelette du réseau cubique standard de \mathbf{R}^N , pour N assez grand. Ces complexes sont appelés *plongéables* (respectivement *applicables*). Un grand nombre de résultats dans cette direction ont été obtenus par l’école russe (voir e.g. [8, 7, 20]). Notre résultat principal est le suivant (voir [12]):

Théorème 4.1 *Les cubications applicables d’une variété PL sont équivalentes (par des transformations cubiques).*

On dit qu'une cubication est *simple* si, dans la relation d'équivalence contenant toutes les paires d'arêtes opposées dans un carré de la cubication, il n'y a pas de classe d'équivalence d'arêtes contenant deux arêtes orthogonales du même cube. La cubication est *standard* si n'importe quels deux de ses cubes sont ou bien disjoints ou alors ils ont en commun exactement une face. On observe que toute cubications plongéable est standard et simple, et que les cubications applicables sont simples. D'autre part la simplicité est très proche de l'applicabilité, du moins pour les variétés ayant des groupes fondamentaux petits. On a les résultats suivants de Karalashvili ([20]) et Dolbilin, Shtanko and Shtogrin ([8]):

1. Le double (i.e. le résultat de la division de chaque k -cube dans 2^k cubes égaux) d'une cubication simple est applicable.
2. Une cubication simple d'une variété ayant $H^1(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$ est applicable.
3. À chaque triangulation S on peut associer une cubication $C(S)$ en divisant tout n -simplexe dans $n+1$ cubes. Alors la décomposition cubique $C(S)$ est plongéable.

En particulier il suit que les cubications dérivées des triangulations, tout comme les cubications simples de la sphère sont équivalentes. Notons que l'ensemble des cubications simples (ou applicables) n'est pas invariant aux transformations cubiques.

La structure multiplicative. La somme connexe des variétés M et N est notée par $M\sharp N$. La somme connexe se définit de la même façon pour les cubications marquées de M et N , et dépendent de différents choix qu'on a fait. Après le passage à l'équivalence par les transformations cubiques ces ambiguïtés disparaissent:

Théorème 4.2 *On a une application $\widetilde{CB}(M) \times \widetilde{CB}(N) \longrightarrow \widetilde{CB}(M\sharp N)$ induite par la somme connexe des cubications.*

D'autre part il y a une lois de composition naturelle sur l'ensemble des bordismes d'immersions, qui est la somme connexe en dehors des immersions. On montre que l'application I est fonctorielle:

Théorème 4.3 *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{CB}(M) \times \widetilde{CB}(N) & \longrightarrow & \widetilde{CB}(M\sharp N) \\ I \downarrow & & \downarrow I \\ \mathcal{I}(M) \times \mathcal{I}(N) & \longrightarrow & \mathcal{I}(M\sharp N) \end{array}$$

Notons que le monoïde $CB(S^m)$ est actuellement un groupe, mais il semble difficile de trouver une construction géométrique pour l'inverse d'une cubication. D'autre part $\mathcal{I}(M)$, avec la multiplication correspondant à la réunion (transverse), a la structure d'un groupe pour toute variété M , mais on n'a pas pour l'instant l'analogie de cette structure en termes de cubications.

Le calcul des groupes de bordismes. La formule obtenue ci-dessus pour $\mathcal{I}(M)$ est inutilisable telle quelle, et on voudrait l'expliquer en termes d'invariants topologiques classiques. Le foncteur $\mathcal{I}(M) = [M, Q\mathbf{RP}^\infty]$ est le terme de degré 0 d'une théorie de cohomologie généralisée ([18]) qui est associée au spectre de suspension $SQ\mathbf{RP}^\infty$. Les coefficients de la théorie sont les groupes P_q de q -homotopie stable de \mathbf{RP}^∞ , qu'on a déjà aperçu auparavant. L'approche classique, de la théorie d'homotopie, est l'étude de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch, qui converge vers (le gradué de) la cohomologie généralisée de l'espace. Malheureusement la partie algébrique est assez technique et les résultats sont souvent encryptés dans les propriétés des différentielles de cette suite.

En utilisant des méthodes géométriques, R.Benedetti et R.Silhol ([5]) et R.Gini ([15]) respectivement, ont calculé $\mathcal{I}(M)$ en dimension 3:

Théorème 4.4 *Pour une variété M de dimension 3 le groupe $\mathcal{I}(M)$ est isomorphe à $H^1(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \oplus H^2(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \oplus H^3(M, \mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$, le second ayant une structure de groupe tordu.*

Autrement dit, la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch dégénère au second terme. On s'attend que cette suite ne dégénère pas pour les variétés de dimensions supérieures à 3.

Choisissons une décomposition cellulaire de la variété M et soit $M = M_d \supset M_{d-1} \supset \dots M_0 \supset \emptyset$, la filtration par les squelettes, $d = \dim M$. On obtient une filtration sur $\mathcal{I}(M)$, par

$$F^k \mathcal{I}(M) = \ker(\mathcal{I}(M) \rightarrow \mathcal{I}(M_{k-1})),$$

où l'application à droite est celle induite par l'inclusion $M_{k-1} \hookrightarrow M$. Soit $gr^* \mathcal{I}(M)$ le gradué associé à cette filtration, qui ne dépend pas de la décomposition choisie. On peut voir le résultat ci-dessus comme une identification du gradué à $H^{*\geq 1}(M, P_*)$. La suite de Atiyah-Hirzebruch nous donne des surjections $H^{*\geq 1}(M, P_*) \rightarrow gr^* \mathcal{I}(M)$, qui ne sont pas toujours injectives. Notre approche dans [14, 16] permet d'avoir d'informations sur les noyaux de ces flèches et de calculer le gradué $gr^* \mathcal{I}(M)$ pour les variétés de dimension $d \leq 7$. Dans [14, 16] on va prouver:

Théorème 4.5 *Si M est une 4-variété alors $gr^* \mathcal{I}(M)$ est isomorphe à*

$$H^1(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \oplus E^2(M) \oplus H^3(M, \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}) \oplus H^4(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}),$$

où

$$E^2(M) = \{\alpha \in H^2(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}); \alpha \cup \alpha = 0\}.$$

Bibliographie

1. J.W. Alexander, *The combinatorial theory of complexes*, Annals of Math., 31(1930), 292-320.
2. T. Banchoff, *Triple points and surgery of immersed surfaces*, Proc.Amer.Math.Soc., 46(1974), 407-413.
3. E.K. Babson and C.S. Chan, *Counting faces of cubical spheres modulo two*, Preprint, 1997.
4. G. Blind and R. Blind, *Gaps in the number of faces of cubical polytopes*, Discrete and Comp. Geometry, 11(1994), 351-356.
5. R.Benedetti et R.Silhol, *Spin and Pin⁻ structures, immersed and embedded surfaces and a result of Segre on real cubic surfaces*, Topology, 34(1995), 651-678.
6. J. Scott Carter, *On generalizing Boy's surface: Constructing a generator of the third stable stem*, Trans. Amer.Math.Soc., 298(1986), 103-122.
7. N.P. Dolbilin, M.A. Shtan'ko and M.I.Shtogrin, *The problem of parameterizations of cycles modulo 2 in a three dimensional cubic lattice*, Izv.Ross.Akad.Nauk, Ser. Mat., 52(1988), 355-377, translated in Russian Acad.Sci.Izvestya Math., 32(1989).
8. N.P. Dolbilin, M.A. Shtan'ko and M.I.Shtogrin, *Cubic manifolds in lattices*, Izv.Ross.Akad.Nauk, Ser. Mat., 58(1994), translated in Russian Acad.Sci.Izvestya Math., 44(1995), 301-313.
9. P.J. Eccles, *Codimension 1 immersions and the Kervaire invariant one problem*, Math.Proc.Cambridge Phil.Soc., 90(1981), 483-493.
10. P.J. Eccles, *Multiple points of codimension one immersions of oriented manifolds*, Math.Proc.Cambridge Phil.Soc., 87(1980), 213-220.
11. M. Freedman, *Quadruple points of 3-manifolds in S^4* , Comment.Math.Helvetici, 53(1978), 385-394.
12. L.Funar, *Cubulations, mappability, immersions and a problem of Habegger*, Ann.Sci.Ecole Normale Sup.,32(1999), 681-700.
13. L.Funar, *Cubulations mod bubble moves*, Contemporary Math. 233, "Low Dimensional Topology", Proc. Conf. Low Dimensional Topology, Funchal, Madeira, 1998 (H.Nencka Ed.), 29-43, 1999.

14. L.Funar and R.Gini, *The graded cobordism group of codimension-one immersions*, 23 p., math.GT/0104037.
15. R.Gini, *Cobordism of immersions of surfaces in non-orientable 3-manifolds*, Manuscripta Math. 104(2001), 49-69.
16. R.Gini, *Cobordism of codimension one immersions*, thèse de doctorat, Univ. Pisa, 2000-2001.
17. G. Hetyei, *On the Stanley ring of a cubical complex*, Discrete and Comp. Geometry, 14(1995), 305-330.
18. P. Hilton, General cohomology theory and K-theory, *London Math. Notes Series no.1*, Cambridge Univ.Press, 1971.
19. W. Jockusch, *The lower and upper bound problems for cubical polytopes*, Discrete and Comp. Geometry, 9(1993), 159-163.
20. O.R. Karalashvili, *On mappings of cubic manifolds into the standard lattice of Euclidean space*, Trudy Mat.Inst.Steklov, 196(1991),86-89, translated in Proc.Steklov Inst.Math., 196(1992).
21. R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, "Geometric Topology", Georgia International Topology Conference, (W.H.Kazez, Ed.), AMS-IP Studies in Advanced Math., vol.2., part 1, 35-472, 1995.
22. U. Koschorke and B. Sanderson, *Selfintersections and higher Hopf invariants*, Topology, 17(1978), 283-290.
23. J. Lannes, *Sur les immersions de Boy*, "Algebraic Topology", Aarhus, 1982, Lecture Notes Math., no.1051, 263-270, 1984.
24. R. Lickorish, *Unshellable triangulations of spheres*, European J. Combinatorics, 12(1991), 527-530.
25. A. Liulevicius, *A theorem in homological algebra and stable homotopy of projective spaces*, Trans. A.M.S., 109(1963), 540-552.
26. S.P. Novikov, Topology, *Itogi Nauki i Tekhniki: Sovremennyye Problemy Mat.: Fundamentl'nye Naprovleniya*, vol. 12 VINITI Moscow, 1986, 5-252, translated in *Encyclopaedia of Math.Sci.*, vol.12, Topology I, Springer Verlag, Berlin, 1992.
27. U. Pachner, *Homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings*, European J. Combinatorics, 12(1991), 129-145.
28. R. Stanley, *The number of faces of a simplicial polytopes and spheres*, "Discrete Geometry and Convexity", (J.E.Goodman and all., Eds.), Annals of the N.Y.Academy of Sci., 440(1985), 212-223.
29. V. Turaev, Quantum invariants of links and 3-valent graphs in 3-manifolds. *De Gruyter Studies Math.*, vol.18, 1994.
30. P. Vogel, *Cobordisme d'immersions*, Ann.Sci.École Norm.Sup. 7(1974), 317-358.