

SUR LES SOUS-VARIÉTÉS
À COURBURE MOYENNE CONSTANTE
DANS L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Philippe Castillon

Cette page que j'écris en dernier n'est pas la plus facile ; derrière la forme conventionnelle, elle se veut sincère.

J'ai effectué ce travail sous la direction de Pierre Bérard. C'est lui qui m'a soumis les problèmes dont il est question ici et qui m'a appris à les aimer. Je l'en remercie chaleureusement.

Je remercie Harold Rosenberg pour l'enthousiasme avec lequel il a accueilli mes premiers résultats, pour son travail de rapporteur, et pour sa participation au jury.

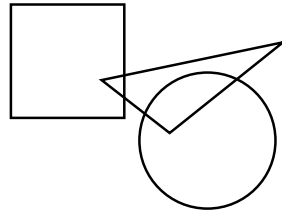
Sylvain Gallot a également rapporté sur cette thèse avec tout le sérieux qu'on lui connaît. Je l'en remercie d'autant plus vivement qu'il a accepté de participer au jury.

Il était pour moi inconcevable que Gérard Besson ne fasse pas partie du jury. Il y est, et je l'en remercie en souvenir des moments passés autour de mon mémoire de D.E.A..

Je remercie également Jacques Gasqui d'apporter sa contribution à ce Jury.

Enfin, je remercie toutes celles et ceux qui de près ou de loin m'ont accompagné dans cette période de thèse, après quoi tout commence vraiment.

figures



Ailleurs il y a du sang,
Ailleurs il y a du crime,
Des raisons qui n'en sont pas.

Vous nous avez dégagées
De ce qui n'était pas nous,
Qui vivait de quelque vie.

Et nous maintenant figées,
Sans colère, intempestives,
Nous collons à vos cornées.

Il faut vous en prendre à vous
Si vous souffrez de savoir
Que nous sommes quelque part.

GUILLEVIC,
Euclidiennes,
Poésie/Gallimard.

Table des matières

Introduction	9
1 PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS	13
1.1 Notations et définitions	15
1.2 Sous-variétés à courbure moyenne constante	16
* Interprétation variationnelle	16
* Indice de Morse de M	18
1.3 Quelques mots sur la variété ambiante	19
2 SUR L'OPÉRATEUR DE STABILITÉ	25
2.1 Inégalités isopérimétriques	28
* Une première inégalité isopérimétrique	28
* Une inégalité isopérimétrique locale	30
* Du local au global: preuve du théorème 2.1.1	34
2.2 Contrôle du noyau de la chaleur de M	35
2.3 Majoration de l'indice	39
* Le cas de la dimension supérieure ou égale à 3	39
* Le cas de la dimension 2	43
3 COMPACTIFICATION	45
3.1 La distance extrinsèque	47
3.2 Un résultat de compactification	49
4 SURFACES DE DELAUNAY	55
4.1 Géométrie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante	57
4.2 Le mouvement plan sur plan hyperbolique	63
* Théorie générale	63
* Le roulement sans glissement	68
4.3 Les roulantes	71
* Une équation pour la roulante	71
* Les courbes d'équation $\tanh r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$	73
4.4 Résolution de l'équation par les roulettes	77
Bibliographie	85

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des sous-variétés à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique de courbure -1 .

Dans les chapitres 2 et 3, on s'intéresse au cas où la courbure moyenne est strictement inférieure à 1. Dans ce cadre là, les recherches actuelles tendent à généraliser les résultats connus pour les sous-variétés minimales de l'espace euclidien; cette thèse s'inscrit dans cette démarche. On s'intéresse plus particulièrement à l'opérateur de stabilité (au chapitre 2), et aux problèmes de compactification (au chapitre 3).

Le chapitre 4 est consacré à l'étude des surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans \mathbb{H}^3 .

Sur l'opérateur de stabilité

Un des centres d'intérêt dans la théorie des sous-variétés à courbure moyenne constante est l'étude de l'opérateur de stabilité.

Pour ce qui est de la stabilité proprement dite, la situation est assez bien connue, aussi bien dans l'espace euclidien (cf. [B-C], [C-P], [FC-S], [dS]) que dans l'espace hyperbolique (cf. [B-C-E], [dS]). On va ici s'intéresser à la finitude de l'indice.

Dans le cadre des surfaces minimales de \mathbb{R}^3 , D. Fischer-Colbrie a montré que l'indice est fini si et seulement si $\int_M |\mathcal{A}|^2 < \infty$, où \mathcal{A} est la seconde forme fondamentale (cf. [FC]). En dimensions supérieures à 3, P. Bérard et G. Besson ont obtenu une majoration de la forme $\text{Ind}(M) \leq C \int_M |\mathcal{A}|^m$ où $\text{Ind}(M)$ est l'indice de la sous-variété M , m sa dimension, et C est une constante (cf. [B-B]). Dans leur preuve, la condition $m \geq 3$ est nécessaire, et on a besoin d'un contrôle du noyau de la chaleur de M .

Dans l'espace hyperbolique, l'opérateur de stabilité s'écrit $S = \Delta + m(1 - h^2) - |\phi|^2$, où $h = |H|$ est la norme du vecteur courbure moyenne. M. do Carmo et A. da Silveira ont obtenu un résultat analogue à celui de D. Fischer-Colbrie, pour les surfaces à courbure moyenne constante égale à 1 dans \mathbb{H}^3 ; l'indice est fini si et seulement si $\int_M |\phi|^2 < \infty$, où $\phi = \mathcal{A} - HId$ est le tenseur "seconde forme fondamentale à trace nulle" (cf. [C-S]). Pour le cas où la courbure moyenne est constante et strictement inférieure à 1, P. Bérard, M. do Carmo et W. Santos ont montré, en dimension quelconque, que si la courbure totale est finie (i.e. $\int_M |\phi|^m < \infty$) alors l'indice est fini, mais leur méthode ne permet pas d'obtenir de majoration (cf. [B-C-S1]).

D'autre part, ils montrent que $m(1 - h^2)$ est un minorant du spectre essentiel de S ; d'un point de vue analytique, il est donc également intéressant de regarder le nombre de valeurs propres inférieures à $m(1 - h^2)$. En reprenant la méthode de la preuve du théorème de P. Bérard et G. Besson, on montre que ce nombre est fini, et on en obtient une majoration :

THÉORÈME A.- *Soit $i : M^m \hookrightarrow \mathbb{H}^{m+1}$, $m \geq 3$, une immersion à courbure moyenne constante $h < 1$. Si $\int_M |\phi|^m dv < \infty$ alors le nombre de valeurs propres de l'opérateur de stabilité qui sont inférieures à $m(1 - h^2)$ est fini; il existe une*

constante $D_{h,m}$ telle que

$$\mathcal{N}_{m(1-h^2)}(S) \leq D_{h,m} \int_M |\phi|^m dv$$

Une étape importante de la preuve est de majorer le noyau de la chaleur sur M ; on obtient cette majoration en montrant qu'on a sur M une inégalité isopérimétrique.

Dans le cas où la dimension de la sous-variété est 2, on ne peut pas utiliser la méthode précédente; cependant grâce à une majoration du noyau de la chaleur meilleure que celle des sous-variétés minimales de \mathbb{R}^n , on montre le théorème suivant:

THÉORÈME B.- *Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbb{H}^3$, une immersion à courbure moyenne constante $h < 1$. Si $\int_M |\phi|^2 dv < \infty$ alors le nombre de valeurs propres de l'opérateur de stabilité qui sont inférieures à $2(1-h^2)$ est fini; pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $D_{h,\alpha}$ telle que*

$$\mathcal{N}_{2(1-h^2)}(S) \leq D_{h,\alpha} \int_M |\phi|^{2+2\alpha} dv$$

Le majorant qu'on obtient est bien fini car l'hypothèse de courbure totale finie implique que $|\phi|$ est bornée sur M .

Compactification

Dans le cadre des sous-variétés minimales (avec une hypothèse de type "courbure totale finie"), se posent aussi des problèmes de compactification. M. Anderson a étudié le cas des sous-variétés minimales de l'espace euclidien (cf. [An]), généralisant des résultats antérieurs de S.S. Chern et R. Osserman (cf. [Os2], [C-O]).

G. de Oliveira a montré que, sous l'hypothèse $\int_M |\mathcal{A}|^m < \infty$, les sous-variétés minimales de l'espace hyperbolique sont difféomorphes à l'intérieur d'une variété compacte, et que l'immersion i s'étend continûment (cf. [dO]). Sa preuve comporte deux parties. Une première partie, analytique consiste à montrer que la norme de \mathcal{A} tend vers 0 à l'infini; la deuxième partie consiste à en déduire le résultat final en étudiant les points critiques de la fonction distance hyperbolique restreinte à la sous-variété.

P. Bérard, M. do Carmo et W. Santos ont généralisé la première partie aux sous-variétés à courbure moyenne constante (cf. [B-C-S2]), on généralise ici la seconde partie; on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME C.- *Soit $i : M^m \hookrightarrow \mathbb{H}^m$ une immersion à courbure moyenne constante $h < 1$. Si $\int_M |\phi|^m dv < \infty$ alors*

- i. l'immersion i est propre;*
- ii. l'immersion i est transverse aux sphères géodésiques de N de rayons suffisamment grands;*

iii. la variété M est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord \overline{M} , et l'immersion se prolonge continûment en une application

$$\bar{i} : \overline{M} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}.$$

Surfaces de Delaunay

On s'intéresse ici aux surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans \mathbb{H}^3 . Dans le cadre euclidien, en 1841 C. Delaunay trouvait un moyen amusant de construire les surfaces de révolution à courbure moyenne constante: leurs méridiennes sont les trajectoires d'un foyer d'une conique qui roule sans glissement sur l'axe de révolution (cf. [De]). Des constructions cinématiques analogues ont été obtenues par W.Y. Hsiang et W.C. Yu pour les sous-variétés $\mathcal{O}(n-1)$ -invariantes de \mathbb{R}^n (cf. [H-Y]), par H. Rosenberg et R. Sá Earp pour les surfaces spéciales de \mathbb{R}^3 (cf. [R-E]), et par I. Sterling pour les hypersurfaces de type σ_l dans \mathbb{H}^m et S^n (cf. [St]).

Pour ce qui est des surfaces de révolution dans \mathbb{H}^3 , I. Sterling a montré que les roulanges ont une équation en coordonnées polaires qui est de la forme $\tanh r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ (cf. [St]). On montre dans ce chapitre que ces courbes ont des propriétés focales similaires à celles des coniques euclidiennes: on trouve les analogues hyperboliques des ellipses, des hyperboles et des paraboles, ainsi qu'une nouvelle famille de "paraboles généralisées". De plus, on montre à l'aide de ces propriétés focales qu'on a une interprétation cinématique "à la Delaunay" (on montre pour cela que la trajectoire du foyer satisfait la même équation différentielle que la méridienne):

THÉORÈME D.- Soit N une variété isométrique à \mathbb{H}^2 , soit $F \in N$, et soit γ une courbe connexe de N vérifiant $d_F + \delta = a$ le long de γ , où δ est une fonction de type distance. Soit \mathcal{C} la trajectoire de F lorsque γ roule sans glissement sur une géodésique Γ de \mathbb{H}^2 . La courbe \mathcal{C} vérifie l'équation

$$-H \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = K$$

où s est l'abscisse curviligne de \mathcal{C} , et $x(s)$ et $y(s)$ sont les coordonnées de Fermi de $\mathcal{C}(s)$ relatives à Γ . En particulier, elle engendre une surface de révolution à courbure moyenne constante d'axe Γ . De plus, la valeur H de la courbure moyenne vérifie

- si $\delta = \pm d_{\tilde{F}}$, $\tilde{F} \in N$ (γ est une ellipse ou une hyperbole), alors $H = \coth |a| > 1$;
- si $\delta = \pm b_\nu$, $\nu \in \partial_\infty N$ (γ est une parabole), alors $H = 1$;
- si $\delta = d_g$, g une géodésique orientée de N (γ est une parabole généralisée), alors $H = \tanh |a| < 1$.

Dans cet énoncé, d_F désigne la fonction distance au point F , b_ν la fonction de Busemann centrée en ν , et d_g la distance signée à la géodésique g .

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

On introduit ici les notations utilisées pour les trois premiers chapitres de cette thèse, le quatrième chapitre étant indépendant.

1.1. Notations et définitions

On étudie dans cette thèse les sous-variétés à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique de courbure -1 , cependant on montrera certains résultats préliminaires dans un cadre plus général ; un argument suffisant pour leur preuve est que la norme de la courbure moyenne ne soit pas trop grande en regard de la courbure sectionnelle de l'espace ambiant.

Plus précisément, soit $i : M \hookrightarrow N$ une immersion isométrique, où M et N sont des variétés riemanniennes complètes de dimensions respectives m et n .

Soit \mathcal{A} la seconde forme fondamentale de i , et H le champ de vecteurs courbure moyenne. Pour tout $x \in M$, $H(x)$ est défini par

$$H(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathcal{A}(e_j, e_j),$$

où $(e_j)_j$ est une base orthonormée de $T_x M$.

Notons \tilde{K} la courbure sectionnelle de N , dans la suite on désignera par $(*)$ les hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSES $(*)$.- *La variété N est simplement connexe, et il existe deux constantes positives a et b telles que*

- $\tilde{K}(\pi) \leq -b^2$ pour tout 2-plan π tangent à N
- $|H(x)| \leq a < b$ pour tout $x \in M$

Ces hypothèses sont en particulier satisfaites par les sous-variétés de l'espace hyperbolique dont la courbure moyenne est constante et inférieure strictement à 1.

Dans la suite, on notera TM et TN les fibrés tangents aux variétés M et N , et UM , UN leurs fibrés unitaires tangents.

D'autre part, on désignera avec un "tilda" les objets attachés à la variété N . Ainsi, on notera ∇ et $\tilde{\nabla}$ les connexions riemanniennes de M et N , dv et $d\tilde{v}$ leurs formes volume induites par les métriques, et d et \tilde{d} les distances riemanniennes.

Par ailleurs, on notera $\phi = \mathcal{A} - HId$ le tenseur "seconde forme fondamentale à trace nulle" ; sa norme est définie par

$$|\phi|^2(x) = \sum_{j,i=1}^m \|\phi(e_j, e_i)\|^2,$$

où $(e_j)_j$ est une base orthonormée de $T_x M$. La norme de ce tenseur mesure le défaut d'ombilicité de M : $|\phi|(x) = 0$ si et seulement si x est un point ombilic (ie. pour tout vecteur $\xi \in T_x M$ de norme 1, on a $\mathcal{A}(\xi, \xi) = H$).

Le tenseur ϕ joue un rôle important dans l'étude des sous-variétés à courbure moyenne constante; il intervient entre autres à travers la courbure totale de M définie par $\int_M |\phi|^m dv$.

Dans la suite, on se servira à plusieurs reprises des fonctions distance et distance extrinsèque: pour tout $o \in N$, on notera $\tilde{r}_o = \tilde{d}(o, \cdot)$ la fonction distance sur N ; on définit la fonction distance extrinsèque sur M par $r_o = \tilde{r}_o|_M$.

1.2. Sous-variétés à courbure moyenne constante

Interprétation variationnelle

On suppose dans cette section que la dimension de N est $n = m + 1$ et que la variété M est orientable. On note ν un champ de vecteurs unitaires normal à M . Comme on est en codimension 1, la courbure moyenne est colinéaire à ν ; on introduit alors $h = \langle H, \nu \rangle$. L'immersion i est dite à courbure moyenne constante si la fonction h est une fonction constante sur M .

En codimension plus grande, le champ de vecteurs courbure moyenne vit dans le fibré normal de M ; on a sur ce fibré une connexion induite par la connexion riemannienne de N , et à la notion de courbure moyenne constante correspond la notion de courbure moyenne parallèle pour cette connexion. Cependant, on n'a pas dans ce cas d'interprétation variationnelle analogue à celle que l'on va présenter maintenant en codimension 1.

La courbure moyenne intervient naturellement quand on déforme l'immersion i et qu'on calcule la variation de l'aire. Les sous-variétés à courbure moyenne constante apparaissent comme des points critiques de la fonctionnelle aire sous une contrainte de volume constant.

Soit Ω un domaine compact de M , et soit $I :]-\varepsilon, \varepsilon[\times \Omega \rightarrow N$ une déformation de i à support dans Ω ; l'application I est telle que pour tout t l'application $i_t = I(t, \cdot)$ est une immersion qui vérifie $i_t|_{\partial\Omega} = i|_{\partial\Omega}$, et I vérifie aussi $i_0 = i|_\Omega$. On associe à cette déformation le champ de vecteurs variation $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial t}$, et on note $f = \langle \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}, \nu \rangle$.

Pour tout t , soient H_t le vecteur courbure moyenne de l'immersion i_t , ν_t le champ de vecteurs normal à $i_t(M)$ qui donne sur M la même orientation que ν , et $h_t = \langle H_t, \nu_t \rangle$. On notera $f_t = \langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu_t \rangle$ et dv_t la forme volume associée à la métrique induite par i_t .

On définit alors la fonction aire par

$$A(t) = \int_{\Omega} dv_t$$

et la fonction volume par

$$V(t) = \int_{[0,t] \times \Omega} I^*(d\tilde{v}).$$

On a les résultats classiques suivants (cf. par exemple [B-C-E], lemme 2.1) :

$$A'(t) = -m \int_{\Omega} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, H_t \right\rangle dv_t = -m \int_{\Omega} h_t f_t dv_t$$

et

$$V'(t) = \int_{\Omega} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu_t \right\rangle dv_t = \int_{\Omega} f_t dv_t$$

On dira que la déformation I préserve le volume si la fonction $V(t)$ est constante. Cela implique notamment que $\int_{\Omega} f dv = 0$.

Comme on s'intéresse ici aux points critiques de A sous la contrainte $V = \text{Constante}$, il est naturel d'introduire la fonction J définie par

$$J(t) = A(t) + mh_0 V(t)$$

où $h_0 = \frac{1}{A(0)} \int_{\Omega} h dv$.

On a alors la proposition suivante qui est un résultat classique sur les multiplieurs de Lagrange (cf. par exemple [B-C-E], proposition 2.3) :

PROPOSITION 1.2.1.- *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- la courbure moyenne de i est constante et égale à h_0 ;
- pour toute déformation à support compact de i qui préserve le volume, on a $A'(0) = 0$;
- pour toute déformation à support compact de i , on a $J'(0) = 0$.

On suppose dorénavant que l'immersion i est à courbure moyenne constante ; c'est donc un point critique de la fonctionnelle aire. Il est naturel de s'intéresser à la dérivée seconde de l'aire afin de savoir s'il s'agit d'un minimum local. On a la notion de stabilité suivante :

DÉFINITION 1.2.2.- L'immersion i est dite stable si pour toute déformation à support compact qui préserve le volume on a $A''(0) \geq 0$.

Comme les déformations considérées préservent le volume, on a $V'(t) = 0$ et $A''(0) = J''(0)$. Or on a

$$J'(t) = -m \int_{\Omega} (h_t - h_0) f_t dv_t$$

d'où

$$J''(0) = -m \int_{\Omega} \left. \frac{\partial h_t}{\partial t} \right|_{t=0} f dv$$

On obtient alors la proposition suivante (cf. par exemple [B-C-E], proposition 2.5) :

PROPOSITION 1.2.3.- On a

$$J''(0) = \int_{\Omega} (f\Delta f - (m\tilde{R} + |\mathcal{A}|^2)f^2)dv$$

où Δ est le laplacien positif (i.e. associé à la forme quadratique $\int_{\Omega} |\nabla f|^2 dv$) pour la métrique induite par i , et où \tilde{R} est la courbure de Ricci normalisée de N dans la direction normale à M (i.e. $\tilde{R}(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \tilde{\mathcal{R}}(\nu, e_k, \nu, e_k)$ où $\tilde{\mathcal{R}}$ est le tenseur de courbure de N et $(e_k)_k$ est une base orthornormée de $T_x N$).

On remarque sur cette expression que la dérivée seconde de l'aire ne dépend que de la fonction f . D'autre part, pour toute fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g|_{\partial\Omega} = 0$ et $\int_{\Omega} g dv = 0$, il existe une déformation de i à support dans Ω dont le champ de vecteurs variation est $g\nu$ (cf. [B-C-E], lemme 2.2). On a donc la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2.4.- Soit S l'opérateur défini par

$$Sf = \Delta f - (m\tilde{R} + |\mathcal{A}|^2)f$$

où $f \in D(S) = \{g \in C_0^\infty(M) \mid \int_M g dv = 0\}$.

L'immersion i est stable si et seulement si la forme quadratique associée à l'opérateur S est positive.

L'opérateur S est appelé l'opérateur de stabilité de l'immersion i .

Indice de Morse de M

La variété M étant un point critique de la fonctionnelle d'aire, on définit son indice de Morse de la façon suivante.

Soit $\Omega \subset M$ un ouvert relativement compact. L'opérateur $\Delta - (m\tilde{R} + |\mathcal{A}|^2)$ agissant sur $\{g \in C_0^\infty(\Omega) \mid \int_{\Omega} g dv = 0\}$ est essentiellement auto-adjoint dans $\{g \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} g dv = 0\}$; on note S_{Ω} son extension auto-adjointe. On définit $\text{Ind}(\Omega)$ comme étant le nombre de valeurs propres strictement négatives de S_{Ω} . L'ouvert Ω étant relativement compact, $\text{Ind}(\Omega)$ est fini; il représente le nombre de déformations linéairement indépendantes, à support dans Ω , pour lesquelles la fonction A a un maximum local en 0.

On définit alors l'indice de Morse de M par

$$\text{Ind}(M) = \sup\{\text{Ind}(\Omega) \mid \Omega \subset M \text{ relativement compact}\}.$$

Cet indice peut être fini ou infini.

Dès lors que l'on s'intéresse à la finitude de $\text{Ind}(M)$, on peut considérer l'opérateur $\Delta - (m\tilde{R} + |\mathcal{A}|^2)$ agissant sur $C_0^\infty(\Omega)$; cet opérateur est essentiellement auto-adjoint, on note S'_{Ω} son extension auto-adjointe dans $L^2(\Omega)$, et $\text{Ind}'(\Omega)$ le nombre de valeurs propres strictement négatives de S'_{Ω} . De même on définit

$$\text{Ind}'(M) = \sup\{\text{Ind}'(\Omega) \mid \Omega \subset M \text{ relativement compact}\}.$$

Notons λ_k (resp. λ'_k) la $k^{\text{ième}}$ valeur propre de S_Ω (resp. de S'_Ω). Par le principe du min-max, on a immédiatement que $\lambda_k \geq \lambda'_k$.

D'autre part, si on note D_Ω (resp. D'_Ω) le domaine de l'opérateur S_Ω (resp. S'_Ω), et Q_Ω la forme quadratique associée à $\Delta - (m\tilde{R} + |\mathcal{A}|^2)$, par le principe du max-min on a

$$\lambda_k = \sup_{E \subset D_\Omega \text{ s.e.v. de dim } k-1} \inf \left\{ \frac{Q(f)}{\|f\|_{L^2}} \mid f \in (E + \mathbb{R}\mathbf{1})^\perp \right\}$$

où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur Ω , et

$$\lambda'_{k+1} = \sup_{F \subset D'_\Omega \text{ s.e.v. de dim } k} \inf \left\{ \frac{Q(f)}{\|f\|_{L^2}} \mid f \in F^\perp \right\}.$$

On en déduit que $\lambda_k \leq \lambda'_{k+1}$, et avec la première inégalité, on obtient $\text{Ind}(\Omega) \leq \text{Ind}'(\Omega) \leq \text{Ind}(\Omega) + 1$

Finalement, on a entre $\text{Ind}(M)$ et $\text{Ind}'(M)$ la relation suivante

$$\text{Ind}(M) \leq \text{Ind}'(M) \leq \text{Ind}(M) + 1$$

Par la suite, pour traiter des problèmes de finitude de l'indice de Morse de M , on utilisera l'extension auto adjointe de l'opérateur $\Delta - (m\tilde{R} + |\mathcal{A}|^2)$ agissant sur $C_0^\infty(\Omega)$.

1.3. Quelques mots sur la variété ambiante

On suppose dans cette section que l'immersion satisfait les hypothèses (*). En particulier, la courbure sectionnelle de N vérifie $\tilde{K}(\pi) \leq -b^2$ pour tout 2-plan π tangent à N .

Les résultats classiques rappelés ici serviront dans les chapitres 2 et 3. Ils concernent uniquement la variété N et résultent de comparaisons "à la Rauch" entre N et $\mathbb{H}^n(-b^2)$, l'espace hyperbolique de courbure $-b^2$.

PROPOSITION 1.3.1.- *Soient o et x deux points de N , $l = \tilde{d}(o, x)$ et $\zeta \in U_o N$ tel que $x = \exp_o(l\zeta)$. Soit $\gamma(t) = \exp_o(t\zeta)$, $\xi \in T_x N$ et X le champ de Jacobi le long de γ tel que $X(0) = 0$ et $X(l) = \xi$. On a alors*

$$\langle \tilde{\nabla}_\gamma X, X \rangle(l) \geq b \coth(bl) |\xi^n|^2 + \frac{1}{l} |\xi^t|^2$$

où n et t désignent les composantes normales et tangentées à γ .

Preuve.- Remarquons d'abord qu'un tel champ X existe car il n'y a pas de point conjugué le long de γ . Soient $V = X^n$ et $W = X^t$; V et W sont des champs de Jacobi le long de γ , et on a

$$\langle \tilde{\nabla}_\gamma X, X \rangle = \langle \tilde{\nabla}_\gamma V, V \rangle + \langle \tilde{\nabla}_\gamma W, W \rangle.$$

Dans la suite, on notera $Z' = \tilde{\nabla}_\gamma Z$ et $Z'' = \tilde{\nabla}_\gamma Z'$ où Z est l'un des champ V ou W .

Le champ W vérifie $W'' = 0$, $W(0) = 0$ et $W(l) = \xi^t$; on en déduit que

$$\langle \tilde{\nabla}_\gamma W, W \rangle(l) = \frac{|\xi^t|^2}{l}.$$

Soit (e_1, \dots, e_n) un repère orthonormé parallèle le long de γ tel que $e_1(t) = \dot{\gamma}(t)$, et soient v_1, \dots, v_n les fonctions coordonnées de V dans ce repère: $V(t) = \sum_{i=2}^n v_i(t)e_i(t)$. On a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_\gamma V, V \rangle(l) &= \int_0^l (\langle V', V' \rangle + \langle V'', V \rangle) \\ &= \int_0^l (\langle V', V' \rangle - |V|^2 \tilde{K}(\dot{\gamma}, V)) \end{aligned}$$

où $\tilde{K}(\dot{\gamma}, V)$ est la courbure sectionnelle du plan engendré par les vecteurs $\dot{\gamma}$ et V .

Pour comparer les situations dans N et dans $\mathbb{H}^n(-b^2)$, on procède de façon analogue à la preuve du théorème de Rauch. Soit α une géodésique de $\mathbb{H}^n(-b^2)$ et $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ un repère orthonormé parallèle le long de α tel que $\hat{e}_1(t) = \dot{\alpha}(t)$. Soit $\hat{V}(t) = \sum_{i=2}^n v_i(t)\hat{e}_i(t)$, on a $|V| = |\hat{V}|$, $|V'| = |\hat{V}'|$ et comme $\tilde{K}(\dot{\gamma}, V) \leq -b^2$, on obtient

$$\langle \tilde{\nabla}_\gamma V, V \rangle(l) \geq \int_0^l (\langle \hat{V}', \hat{V}' \rangle + |\hat{V}|^2 b^2) = I_l(\hat{V})$$

où I_l est la forme indice pour les champs de vecteurs le long de α .

Soit \hat{J} le champ de Jacobi le long de α tel que $\hat{J}(0) = \hat{V}(0)$ et $\hat{J}(l) = \hat{V}(l)$. Par le lemme de l'indice (cf. par exemple [dC] p.212) on a $I_l(\hat{V}) \geq I_l(\hat{J})$. Le calcul donne $I_l(\hat{J}) = b \coth(bl) |\hat{J}(l)|^2$, et comme $|\hat{J}(l)| = |\hat{V}(l)| = |V(l)|$, on obtient finalement

$$\langle \tilde{\nabla}_\gamma V, V \rangle(l) \geq b \coth(bl) |\xi^n|^2$$

■

Comme conséquence de cette proposition, on obtient le résultat suivant qui concerne la fonction distance de N :

COROLLAIRE 1.3.2.- *Soit $o \in N$, et $\tilde{r}_o = \tilde{d}(o, \cdot)$ la fonction distance sur N . Pour tout $x \in N$, et $\xi \in T_x N$. On a*

$$\langle \tilde{\nabla}_\xi \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \xi \rangle \geq b \coth(b\tilde{r}_o(x)) |\xi^n|^2$$

où ξ^n désigne la composante de ξ normale à $\tilde{\nabla} \tilde{r}_o(x)$.

Preuve.- Soit $o \in N$, $\tilde{Y}_o = \tilde{r}_o \tilde{\nabla} \tilde{r}_o$.

Soit $x \in N$, on note $l = \tilde{r}_o(x)$, $\zeta \in U_o N$ tel que $x = \widetilde{\text{exp}}_o(l\zeta)$, et $\gamma(t) = \widetilde{\text{exp}}_o(t\zeta)$. On a $\tilde{Y}_o(x) = l\dot{\gamma}(l)$.

Soit $\xi \in T_x N$, et $\eta \in T_{l\zeta}(T_o N)$ tels que $\xi = (T_{l\zeta} \exp_o)(\eta)$. Le vecteur η existe car il n'y a pas de point conjugué le long de γ . Soit G défini par

$$G: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow N \\ (s, t) & \mapsto \exp_o(t(\zeta + \frac{s}{l}\eta)) \end{cases}$$

On note $\gamma_s(t) = G(s, t)$; on a $\gamma_0 = \gamma$, et pour tout s , γ_s est une géodésique telle que $\gamma_s(0) = o$. Donc $X = \frac{\partial G}{\partial s}(0, t)$ est un champ de Jacobi le long de γ tel que $X(0) = 0$. De plus, on a par construction $X(l) = \xi$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_o(s, t) &= \tilde{d}(o, \gamma_s(t)) \frac{\dot{\gamma}_s(t)}{|\dot{\gamma}_s(t)|} \\ &= t |\dot{\gamma}_s(0)| \frac{\dot{\gamma}_s(t)}{|\dot{\gamma}_s(t)|} \\ &= t \frac{\partial G}{\partial t}(s, t) \end{aligned}$$

Comme $[\frac{\partial G}{\partial s}, t \frac{\partial G}{\partial t}] = 0$, on a aussi $[X, \tilde{Y}_o] = 0$ et

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_\xi \tilde{Y}_o, \xi \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}_o} X, X \rangle(l) \\ &= l \langle \tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} X, X \rangle(l) \\ &\geq bl \coth(bl) |\xi^n|^2 + |\xi^t|^2 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

D'autre part, on a

$$\tilde{\nabla}_\xi \tilde{Y}_o = \tilde{r}_o(x) \tilde{\nabla}_\xi \tilde{\nabla} \tilde{r}_o + \langle \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \xi \rangle \tilde{\nabla} \tilde{r}_o$$

d'où

$$\langle \tilde{\nabla}_\xi \tilde{Y}_o, \xi \rangle = l \langle \tilde{\nabla}_\xi \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \xi \rangle + |\xi^t|^2$$

En utilisant cette égalité dans l'inégalité (1.3.1), on obtient le résultat voulu. \blacksquare

On a également un résultat concernant la projection sur la sphère unité en un point. Soit $o \in N$ fixé, et soit Π_o la projection sur $U_o N$ définie de la façon suivante:

$$\Pi_o \begin{cases} N \setminus \{o\} & \rightarrow U_o N \\ x & \mapsto \frac{\exp_o^{-1}(x)}{\tilde{r}_o(x)} \end{cases}$$

On a le contrôle suivant sur la dérivée de Π_o :

PROPOSITION 1.3.3.- Soit $x \in N$, on a

i. $(T_x \Pi_o)(\tilde{\nabla} \tilde{r}_o) = 0$

ii. pour tout $\xi \in T_x N$ orthogonal à $\tilde{\nabla} \tilde{r}_o$, on a

$$|(T_x \Pi_o)(\xi)| \leq \frac{b|\xi|}{\sinh(b\tilde{r}_o(x))}$$

Preuve.- Le point i . est immédiat.

Pour le point ii ., comme ξ est orthogonal à $\tilde{\nabla} \tilde{r}_o$, on a

$$(T_x \Pi_o)(\xi) = \frac{1}{\tilde{r}_o(x)} (T_x \exp_o^{-1})(\xi)$$

Soit $l = \tilde{r}_o(x)$, γ la géodésique de N telle que $\gamma(0) = o$ et $\gamma(l) = x$, et soit X le champ de Jacobi le long de γ tel que $X(0) = 0$ et $X(l) = \xi$. On a alors

$$(T_x \exp_o^{-1})(\xi) = lX'(0)$$

d'où

$$|(T_x \Pi_o)(\xi)| = |X'(0)|.$$

Soit $\hat{o} \in \mathbb{H}^n(-b^2)$, $\hat{\gamma}$ une géodésique de $\mathbb{H}^n(-b^2)$ telle que $\hat{\gamma}(0) = \hat{o}$, et soit \hat{X} un champ de jacobini le long de $\hat{\gamma}$ tel que $\hat{X}(0) = 0$ et $|\hat{X}(l)| = |X(l)| = |\xi|$.

Dans sa formulation usuelle, le théorème de Rauch permet de comparer les normes de deux champs de Jacobi qui ont les mêmes conditions initiales; ici, $|X|$ et $|\hat{X}|$ ont la même valeur en l et on veut comparer leurs conditions initiales; on procède de façon analogue.

Soit $g(t) = \frac{|\hat{X}(t)|^2}{|X(t)|^2}$; la fonction g se prolonge par continuité en 0 par $g(0) = \frac{|\hat{X}'(0)|^2}{|X'(0)|^2}$. De plus, cette fonction est croissante (la preuve de ce fait est la même que dans le cas du théorème de Rauch, cf par exemple [dC] p.215). Comme $g(l) = 1$, on a $g(0) \leq 1$ et $|X'(0)| \leq |\hat{X}'(0)|$. Le calcul dans $\mathbb{H}^n(-b^2)$ donne $|\hat{X}'(0)| = \frac{b|\hat{X}(l)|}{\sinh(bl)}$. d'où

$$|(T_x \Pi_o)(\xi)| \leq \frac{b|\xi|}{\sinh(b\tilde{r}_o(x))}.$$

■

Comme la variété N est simplement connexe et à courbures sectionnelles négatives, elle admet une compactification en prenant les classes d'équivalence de demi-géodésiques. Plus précisément, deux demi-géodésiques $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow N$ sont dites équivalentes si la fonction $t \mapsto \tilde{d}(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ est bornée par une constante. Le bord à l'infini de N , noté $\partial_\infty N$ est défini comme étant le quotient de l'ensemble des demi-géodésiques de N par cette relation d'équivalence, et le compactifié de N est $\overline{N} = N \cup \partial_\infty N$.

Si on note $[\sigma]$ la classe d'équivalence d'un demi-géodésique σ , on a pour tout $o \in N$ une "projection" de $U_o N$ sur $\partial_\infty N$ définie par

$$\Pi_\infty^o \begin{cases} U_o N & \rightarrow & \partial_\infty N \\ \xi & \mapsto & [s \mapsto \exp_o(s\xi)] \end{cases}$$

Cette application est une bijection, sa réciproque permet d'étendre Π_o en une application de $\overline{N} \setminus \{o\}$ dans $U_o N$.

On munit alors \overline{N} d'une topologie qui en fait un ensemble compact. Une base de voisinages de $\theta \in \partial_\infty N$ est donnée par les ensembles de la forme

$$V_{o,R,\varepsilon} = \{x \in \overline{N} \mid \tilde{d}(x, o) > R \text{ et } d_{U_o N}(\Pi_o(x), \Pi_o(\theta)) < \varepsilon\}$$

où $d_{U_o N}$ est la distance sur $U_o N$ induite par la métrique de N .

Pour plus de détails sur cette construction, voir par exemple le livre de W. Ballmann [Ba].

Chapitre 2
SUR L'OPÉRATEUR DE STABILITÉ

Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'opérateur de stabilité des sous-variétés à courbure moyenne constante $h < 1$ dans l'espace hyperbolique. Cet opérateur s'écrit

$$S = \Delta + m(1 - h^2) - |\phi|^2$$

Si d'un point de vue géométrique c'est le nombre de valeurs propres négatives de S qui a une signification, d'un point de vue de l'analyse, il est plus naturel de s'intéresser au nombre de valeurs propres qui sont sous le spectre essentiel. Comme montré dans [B-C-S1], l'hypothèse de courbure totale finie implique que $m(1 - h^2)$ est un minorant du spectre essentiel; on montre ici que, sous cette hypothèse, le nombre de valeurs propres de S qui sont inférieures à $m(1 - h^2)$ est fini et on en obtient une majoration.

Pour ce faire, on va utiliser un résultat dû à E. Lieb (cf. [Li]), et à P. Bérard et G. Besson (cf. [B-B]) sur les variétés riemanniennes de dimension supérieure à 3; on a besoin pour cela d'un contrôle du noyau de la chaleur.

Dans la première section de ce chapitre, on montre qu'on a sur M deux inégalités isopérimétriques (cf. théorèmes 2.1.1 et 2.1.3). On montre ensuite, dans la deuxième section, que ces inégalités impliquent les majorations voulues sur le noyau de la chaleur (cf. proposition 2.2.2 et corollaire 2.2.3). Dans la troisième section, on reprend la démarche adoptée par E. Lieb et P. Bérard - G. Besson pour obtenir la majoration du nombre de valeurs propres inférieures à $m(1 - h^2)$ dans le cas où la dimension de M est supérieure à 3 (cf. théorème A). Dans le cas de la dimension 2, en reprenant la preuve du théorème A avec une autre majoration du noyau de la chaleur, on obtient également une majoration du nombre de valeurs propres de S inférieures à $2(1 - h^2)$ (cf. théorème B).

Plusieurs constantes qui dépendent de différents paramètres interviennent dans ce chapitre; on notera ces constantes avec les paramètres en indices.

D'autre part, on rappelle qu'on désigne par (*) les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES (*).- *La variété N est simplement connexe, et il existe deux constantes positives a et b telles que*

- $\tilde{K}(\pi) \leq -b^2$ pour tout 2-plan π tangent à N

- $|H(x)| \leq a < b$ pour tout $x \in M$

2.1. Inégalités isopérimétriques

On montre dans cette section le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1.1.- *Inégalité isopérimétrique.*

Soit $i : M \hookrightarrow N$ une immersion isométrique qui satisfait les hypothèses (). Il existe une constante $A_{a,b,m}$ telle que pour tout domaine Ω relativement compact dans M tel que $\partial\Omega$ soit C^1 , on ait*

$$A_{a,b,m} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{m-1}{m}} \leq \text{vol}(\partial\Omega)$$

La méthode de la preuve est une adaptation de celle utilisée par D. Hoffman et J. Spruck (cf. [H-S]); on commence par montrer un résultat local, puis on passe du local au global par un argument de recouvrement.

Au début de cette section, on montre qu'on a une autre inégalité isopérimétrique qui s'obtient simplement par intégration et application de la formule de la divergence.

Une première inégalité isopérimétrique

PROPOSITION 2.1.2.- *Contrôle de $\text{div}(\nabla r_o)$.*

Soit $i : M \hookrightarrow N$ une immersion isométrique qui satisfait les hypothèses (). Pour tout $o \in N$, on a*

$$\text{div}(\nabla r_o) \geq (m - |\nabla r_o|^2)b(\coth(br_o) - \frac{a}{b})$$

Preuve.- Soit $x \in M$, et soit (ξ_1, \dots, ξ_m) une base orthonormée de T_oM . La divergence de ∇r_o s'exprime en fonction de $\tilde{\nabla} \tilde{r}_o$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{div}(\nabla r_o)(x) &= \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{\xi_i} \nabla r_o, \xi_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\nabla}_{\xi_i} (\tilde{\nabla} \tilde{r}_o - (\tilde{\nabla} \tilde{r}_o)^N), \xi_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\nabla}_{\xi_i} \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \xi_i \rangle + \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\nabla}_{\xi_i} \xi_i, (\tilde{\nabla} \tilde{r}_o)^N \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\nabla}_{\xi_i} \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \xi_i \rangle + \langle \sum_{i=1}^m (\tilde{\nabla}_{\xi_i} \xi_i)^N, \tilde{\nabla} \tilde{r}_o \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\nabla}_{\xi_i} \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \xi_i \rangle + m \langle H, \tilde{\nabla} \tilde{r}_o \rangle \end{aligned}$$

où N désigne la composante normale à M . D'après le corollaire 1.3.2, on a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla r_o)(x) &\geq b \coth(b\tilde{r}_o(x)) \sum_{i=1}^m |\xi_i^n|^2 + m \langle H, \tilde{\nabla} \tilde{r}_o \rangle \\ &\geq (m - |\nabla r_o|^2) b \coth(br_o) + m \langle H, \tilde{\nabla} \tilde{r}_o \rangle. \end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses, pour tout $p \in M$ on a

$$m \langle H, \tilde{\nabla} \tilde{r}_o \rangle \geq -ma \sqrt{1 - |\nabla r_o|^2},$$

d'où

$$\operatorname{div}(\nabla r_o)(x) \geq (m - |\nabla r_o|^2) b \left(\coth(br_o) - \frac{a}{b} \frac{m \sqrt{1 - |\nabla r_o|^2}}{m - |\nabla r_o|^2} \right).$$

On voit facilement que $\frac{m \sqrt{1 - |\nabla r_o|^2}}{m - |\nabla r_o|^2} \leq 1$, et on obtient

$$\operatorname{div}(\nabla r_o)(x) \geq (m - |\nabla r_o|^2) b \left(\coth(br_o) - \frac{a}{b} \right).$$

■

Comme conséquence immédiate de cette proposition, on obtient l'inégalité isopérimétrique suivante sur M :

THÉORÈME 2.1.3.- *Soit $i : M \hookrightarrow N$ une immersion isométrique qui satisfait les hypothèses (*). Pour tout domaine Ω relativement compact de M dont le bord $\partial\Omega$ est C^1 , on a*

$$(m - 1)(b - a) \operatorname{Vol}(\Omega) \leq \operatorname{vol}(\partial\Omega)$$

Preuve.- D'après la proposition 2.1.2, on a

$$\operatorname{div}(\nabla r_o) \geq (m - 1)(b - a)$$

En intégrant cette divergence sur Ω on obtient

$$\begin{aligned} (m - 1)(b - a) \operatorname{Vol}(\Omega) &\leq \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla r_o) \\ &\leq \int_{\partial\Omega} \langle \nabla r_o, \nu \rangle \\ &\leq \operatorname{vol}(\partial\Omega) \end{aligned}$$

où ν est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

■

Une inégalité isopérimétrique locale

Pour prouver cette inégalité locale, on va encore utiliser la proposition 2.1.2. On commence par travailler sur le minorant de $\text{div}(\nabla r_o)$.

Soit g la fonction définie par

$$g(s) = \frac{1}{b(\coth(bs) - \frac{a}{b})},$$

sa dérivée vaut 1 en 0 et en $s_0 = \frac{1}{b} \ln(\frac{b+a}{b-a})$, et elle est supérieure à 1 sur $[0, s_0]$ et inférieure à 1 sur $[s_0, +\infty[$. On note f la fonction définie par

$$f(s) = \begin{cases} g(s) & \text{si } s \in [0, s_0], \\ g(s_0) - s_0 + s & \text{si } s \in]s_0, +\infty[. \end{cases}$$

On définit enfin une fonction u par

$$u(\rho) = g(s_0)e^{-as_0} \exp\left(\int_{s_0}^{\rho} \frac{ds}{f(s)}\right)$$

pour $\rho > 0$, et on la prolonge en 0 par $u(0) = 0$. Pour le cas où $a = 0$, on a $s_0 = 0$ et on prend simplement $f(\rho) = u(\rho) = \rho$. On a alors la

PROPOSITION 2.1.4.- *Les fonctions f et u ont les propriétés suivantes :*

- i. pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $f(s) \geq g(s)$ et $f'(s) \geq 1$;*
- ii. $\frac{u(\rho)}{u'(\rho)} = f(\rho)$ pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+$;*
- iii. en 0, $u(\rho) \sim \rho$;*
- iv. $u(\rho) \geq K_{a,b}\rho$ pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+$, où $K_{a,b} = e^{-as_0} = (\frac{b-a}{b+a})^{\frac{a}{b}}$;*
- v. pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in [1, +\infty[$, $u(\rho) \leq tu(\frac{\rho}{t})$.*

Preuve.- Les points *i* et *ii* se déduisent immédiatement des définitions de g , f et u .

Pour le point *iii*, on a pour tout $\rho \in]0, s_0]$

$$u(\rho) = g(s_0)e^{-as_0} \exp\left(\int_{s_0}^{\rho} (b \coth(bs) - a) ds\right).$$

Par intégration, et en remarquant que $g(s_0) = \frac{2a}{b^2 - a^2}$, on trouve

$$u(\rho) = \frac{\sinh b\rho}{b} e^{-a\rho}$$

pour tout $\rho \in]0, s_0]$. Le point *iii* suit.

Le point iv se déduit des majorations $0 \leq f(s) \leq g(s_0) - s_0 + s$ qui donnent

$$\int_{s_0}^{\rho} \frac{ds}{f(s)} \geq \ln\left(\frac{g(s_0) - s_0 + \rho}{g(s_0)}\right) \geq \ln\left(\frac{\rho}{g(s_0)}\right).$$

Le point v est une inégalité de concavité qui résulte du fait que la dérivée seconde de u est négative. En effet, par ii on a

$$u''(\rho) = \frac{u(\rho)(1 - f'(\rho))}{f(\rho)^2}$$

qui est négative par i . ■

On peut maintenant énoncer le résultat local. Dans cet énoncé, ω_m désigne le volume de la boule unité de \mathbb{R}^m et $B_\rho(o)$ désigne la boule extrinsèque de centre o et de rayon ρ , c'est à dire $B_\rho(o) = \{x \in M \mid r_o(x) < \rho\}$.

PROPOSITION 2.1.5.- *Contrôle local.*

Soit $i : M \hookrightarrow N$ une immersion isométrique qui satisfait les hypothèses $(*)$, soit Ω un ouvert relativement compact de M dont le bord $\partial\Omega$ est C^1 , et soit $\rho_0 > 0$ défini par

$$u(\rho_0) = \left(2 \frac{\text{Vol}(\Omega)}{\omega_m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

où la fonction u est celle définie ci-dessus.

Pour tout $o \in \Omega$ et tout $t > 1$, il existe $\rho \in [0, \rho_0[$ tel que

$$\frac{K_{a,b}}{4t^m u(\rho_0)} \text{Vol}(\Omega \cap B_{t\rho}(o)) \leq \text{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o)).$$

Dans [H-S], les auteurs utilisent le champ de vecteurs $r_o \nabla r_o$, et une estimée de sa divergence. On suit ici la stratégie de leur preuve en utilisant le champ de vecteurs $f(r_o) \nabla r_o$, et en ayant régulièrement recours à la proposition 2.1.4.

On s'intéresse aux quantités $\text{Vol}(\Omega \cap B_\rho(o))$ et $\text{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o))$; dans le lemme suivant, on voudrait dériver $\text{Vol}(\Omega \cap B_\rho(o))$ par rapport à ρ , mais ce n'est pas partout dérivable. On va approcher la fonction caractéristique de $B_\rho(o)$ par des fonctions C^1 .

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit φ_ε une fonction C^1 sur \mathbb{R} , croissante, et telle que $\varphi_\varepsilon(s) = 0$ pour tout $s \leq 0$, et $\varphi_\varepsilon(s) = 1$ pour tout $s \geq \varepsilon$. On définit ϕ_ε par

$$\phi_\varepsilon(\rho) = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(\rho - r_o(x)) dv(x).$$

On a en particulier $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(\rho) = \text{Vol}(\Omega \cap B_\rho(o))$.

On commence par montrer le lemme suivant :

LEMME 2.1.6.- *Pour tout $o \in \Omega$, tout $\rho > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$-\frac{d}{d\rho} (u(\rho)^{-m} \phi_\varepsilon(\rho)) \leq u(\rho)^{-m} \text{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o)). \quad (2.1.1)$$

Preuve.- On note $Y_o = f(r_o)\nabla r_o$. En utilisant le point *i* de la proposition 2.1.4 et la proposition 2.1.2, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(Y_o) &= f(r_o)\operatorname{div}(\nabla r_o) + f'(r_o)|\nabla r_o|^2 \\ &\geq (m - |\nabla r_o|^2)\frac{f(r_o)}{g(r_o)} + f'(r_o)|\nabla r_o|^2 \\ &\geq m.\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $\rho > 0$, on a

$$\operatorname{div}(\varphi_\varepsilon(\rho - r_o)Y_o) = \varphi_\varepsilon(\rho - r_o)\operatorname{div}(Y_o) - \varphi'_\varepsilon(\rho - r_o)\langle \nabla r_o, Y_o \rangle.$$

En intégrant cette égalité sur $\Omega \cap B_\rho(o)$, on obtient

$$\begin{aligned}m\phi_\varepsilon(\rho) &\leq \int_\Omega \varphi_\varepsilon(\rho - r_o)\operatorname{div}(Y_o) \\ &\leq \int_\Omega \varphi'_\varepsilon(\rho - r_o)f(r_o)|\nabla r_o|^2 + \int_{\partial\Omega} \varphi_\varepsilon(\rho - r_o)f(r_o)\langle \nabla r_o, \nu \rangle\end{aligned}$$

où ν est la normale extérieure à $\partial\Omega$. En utilisant le fait que $|\nabla r_o| \leq 1$ et que φ_ε et φ'_ε sont nulles sur \mathbb{R}_- on obtient

$$\begin{aligned}m\phi_\varepsilon(\rho) &\leq f(\rho)\phi'_\varepsilon(\rho) + f(\rho) \int_{\partial\Omega \cap B_\rho(o)} \varphi_\varepsilon(\rho - r_o) \\ &\leq f(\rho)\phi'_\varepsilon(\rho) + f(\rho)\operatorname{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o))\end{aligned}$$

En utilisant la propriété *ii* de la proposition 2.1.4, on voit que cette inégalité est équivalente à l'inégalité (2.1.1). \blacksquare

On peut maintenant montrer la proposition 2.1.5 :

Preuve de la proposition 2.1.5.- Soit $\sigma \in]0, \rho_0[$, en intégrant (2.1.1) sur $[\sigma, \rho_0]$ on obtient

$$u(\sigma)^{-m}\phi_\varepsilon(\sigma) \leq u(\rho_0)^{-m}\phi_\varepsilon(\rho_0) + \int_0^{\rho_0} u(\rho)^{-m}\operatorname{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o))d\rho.$$

En faisant tendre ε vers 0, et en prenant la borne supérieure sur σ , on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{\sigma \in]0, \rho_0[} \{u(\sigma)^{-m}\operatorname{Vol}(\Omega \cap B_\sigma(o))\} &\leq u(\rho_0)^{-m}\operatorname{Vol}(\Omega \cap B_{\rho_0}(o)) \\ &\quad + \int_0^{\rho_0} u(\rho)^{-m}\operatorname{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o))d\rho.\end{aligned}\quad (2.1.2)$$

Soit $o \in \Omega$ et $t > 1$, supposons que pour tout $\rho \in [0, \rho_0[$ on ait

$$\operatorname{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o)) < \frac{K_{a,b}}{4t^m u(\rho_0)} \operatorname{Vol}(\Omega \cap B_{t\rho}(o)),$$

et montrons qu'on obtient une contradiction.

Du point *iv* de la proposition 2.1.4 on déduit

$$\text{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o)) < \frac{1}{4t^m \rho_0} \text{Vol}(\Omega \cap B_{t\rho}(o)).$$

Soit

$$I = \int_0^{\rho_0} u(\rho)^{-m} \text{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o)) d\rho.$$

On a alors

$$\begin{aligned} I &< \frac{1}{4t^m \rho_0} \int_0^{\rho_0} u(\rho)^{-m} \text{Vol}(\Omega \cap B_{t\rho}(o)) d\rho \\ &< \frac{1}{4t\rho_0} \int_0^{t\rho_0} \left(tu\left(\frac{\rho}{t}\right)\right)^{-m} \text{Vol}(\Omega \cap B_\rho(o)) d\rho. \end{aligned}$$

En utilisant le point *v* de la proposition 2.1.4, on a

$$\begin{aligned} I &< \frac{1}{4t\rho_0} \int_0^{t\rho_0} u(\rho)^{-m} \text{Vol}(\Omega \cap B_\rho(o)) d\rho \\ &< \frac{1}{4t\rho_0} \int_0^{\rho_0} u(\rho)^{-m} \text{Vol}(\Omega \cap B_\rho(o)) d\rho \\ &\quad + \frac{1}{4t\rho_0} \int_{\rho_0}^{t\rho_0} u(\rho)^{-m} \text{Vol}(\Omega \cap B_\rho(o)) d\rho. \end{aligned}$$

Sur $[\rho_0, t\rho_0]$, on peut majorer $u(\rho)^{-m} \text{Vol}(\Omega \cap B_\rho(o))$ par $u(\rho_0)^{-m} \text{Vol}(\Omega)$. On a donc

$$I \leq \frac{1}{4t} \sup_{\sigma \in]0, \rho_0[} \{u(\sigma)^{-m} \text{Vol}(\Omega \cap B_\sigma(o))\} + \frac{1}{4} u(\rho_0)^{-m} \text{Vol}(\Omega).$$

En reportant cette inégalité dans (2.1.2) et en majorant $\text{Vol}(\Omega \cap B_{\rho_0}(o))$ par $\text{Vol}(\Omega)$ on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{4t}\right) \sup_{\sigma \in]0, \rho_0[} \{u(\sigma)^{-m} \text{Vol}(\Omega \cap B_\sigma(o))\} < \frac{5}{4} u(\rho_0)^{-m} \text{vol}(\Omega).$$

D'après le point *iii* de la proposition 2.1.4, on a

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} u(\sigma)^{-m} \text{Vol}(\Omega \cap B_\sigma(o)) = \omega_m,$$

d'autre part, on a

$$u(\rho_0)^{-m} \text{vol}(\Omega) = \frac{1}{2} \omega_m.$$

On obtient alors $0 < \frac{1}{4t} - \frac{3}{8}$, une contradiction car $t > 1$.

Il existe donc $\rho \in [0, \rho_0[$ tel que

$$\frac{K_{a,b}}{4t^m u(\rho_0)} \text{Vol}(\Omega \cap B_{t\rho}(o)) \leq \text{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o))$$

■

Du local au global : preuve du théorème 2.1.1

Soit $\Omega \subset M$ un ouvert relativement compact dont le bord est de classe C^1 . Pour passer de l'inégalité locale à l'inégalité globale, on va construire un recouvrement de Ω .

Soit $t > 2$, et $\rho_j = (\frac{2}{t})^j \rho_0$, $j \in \mathbb{N}$. On définit

$$\Omega_j = \left\{ o \in \Omega \mid \exists \rho \in]\rho_{j+1}, \rho_j], \frac{K_{a,b}}{4t^m u(\rho_0)} \text{Vol}(\Omega \cap B_{t\rho}(o)) \leq \text{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(o)) \right\}.$$

D'après la proposition 2.1.5, on a $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j$. Soient $F_0, F_1, \dots, F_k, \dots$ des sous ensembles de Ω définis par récurrence de la façon suivante :

- F_0 est un sous ensemble fini de Ω_0 tel que
 - $\Omega_0 \subset \bigcup_{x \in F_0} B_{2\rho_0}(x)$
 - les ensembles $B_{\rho_0}(x)$, $x \in F_0$ sont deux à deux disjoints.
- si F_0, F_1, \dots, F_{k-1} sont connus, soit $D_k = \Omega_k \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{x \in F_j} B_{2\rho_j}(x)$. F_k est un sous ensemble fini de D_k tel que
 - $D_k \subset \bigcup_{x \in F_k} B_{2\rho_k}(x)$
 - les ensembles $B_{\rho_k}(x)$, $x \in F_k$ sont deux à deux disjoints.

On a construit une famille de points de Ω qui a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.1.7.-

- i.* $\Omega \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in F_j} B_{2\rho_j}(x)$;
- ii.* les ensembles $B_{\rho_j}(x)$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in F_j$ sont deux à deux disjoints ;
- iii.* pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in F_j$, on a

$$\frac{K_{a,b}}{4t^m u(\rho_0)} \text{Vol}(\Omega \cap B_{2\rho_j}(x)) \leq \text{vol}(\partial\Omega \cap B_{\rho_j}(x)).$$

Preuve.- Les points *i* se déduit de la construction du recouvrement.

Soient $x \in F_j$ et $y \in F_{j+k}$ avec $k > 0$. On a $y \in D_{j+k}$, donc $y \notin B_{2\rho_j}(x)$ et $d(x, y) \geq 2\rho_j > \rho_j + \rho_{j+k}$. On en déduit que $B_{\rho_j}(x) \cap B_{\rho_{j+k}}(y) = \emptyset$. Le point *ii* suit.

Soient $j \in \mathbb{N}$ et $x \in F_j$, il existe $\rho \in]\rho_{j+1}, \rho_j]$ tel que

$$\frac{K_{a,b}}{4t^m u(\rho_0)} \text{Vol}(\Omega \cap B_{t\rho}(x)) \leq \text{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(x)).$$

Comme $\rho \geq \rho_{j+1}$, on a $t\rho \geq t\rho_{j+1} = 2\rho_j$, et $\text{Vol}(\Omega \cap B_{t\rho}(x)) \geq \text{Vol}(\Omega \cap B_{2\rho_j}(x))$. De même, on a $\rho \leq \rho_j$, donc $\text{vol}(\partial\Omega \cap B_\rho(x)) \leq \text{vol}(\partial\Omega \cap B_{\rho_j}(x))$. On en déduit le point *iii*. ■

L'inégalité isopérimétrique se déduit maintenant de la proposition 2.1.7. On a

$$\begin{aligned} \frac{K_{a,b}}{4t^m u(\rho_0)} \text{Vol}(\Omega) &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{x \in F_j} \frac{K_{a,b}}{4t^m u(\rho_0)} \text{Vol}(\Omega \cap B_{2\rho_j}(x)) \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{x \in F_j} \text{vol}(\partial\Omega \cap B_{\rho_j}(x)) \\ &\leq \text{vol}(\partial\Omega) \end{aligned}$$

En remplaçant $u(\rho_0)$ par sa valeur, on obtient

$$\frac{K_{a,b} \omega_m^{\frac{1}{m}}}{2^{2+\frac{1}{m}} t^m} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{m-1}{m}} \leq \text{vol}(\partial\Omega),$$

et en faisant tendre t vers 2, on obtient

$$A_{a,b,m} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{m-1}{m}} \leq \text{vol}(\partial\Omega).$$

avec $A_{a,b,m} = \frac{K_{a,b} \omega_m^{\frac{1}{m}}}{2^{2+m+\frac{1}{m}}}$ où $K_{a,b} = \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{a}{b}}$.

Ceci termine la preuve du théorème 2.1.1 ■

REMARQUE 2.1.8.- On voit sur l'expression de la constante que $\lim_{a \rightarrow b} A_{a,b,m} = 0$; la méthode utilisée ne permet donc pas d'obtenir une inégalité isopérimétrique pour le cas où l'on aurait simplement $a \leq b$ dans les hypothèses (*).

D'autre part, on n'a pas cherché dans la preuve à obtenir une constante optimale (dans leur preuve, D. Hoffman et J. Spruck introduisent un paramètre supplémentaire qui apparaît dans la constante et qu'ils peuvent choisir en fonction de la dimension de M pour optimiser la constante).

2.2. Contrôle du noyau de la chaleur de M

On montre dans cette section que les inégalités isopérimétriques obtenues impliquent une majoration du noyau minimal de la chaleur de M , ce résultat classique est dû à N. Varopoulos (cf. [Va]).

On va utiliser ces inégalités sous la forme d'inégalités de Sobolev: c'est un résultat bien connu dû à V.G. Maz'ya, et à H. Federer et W.H. Fleming que les inégalités isopérimétriques sur une variété riemannienne sont équivalentes à des inégalités de Sobolev (avec les mêmes constantes). Pour une preuve de ce fait, voir par exemple l'article de R. Osserman sur l'inégalité isopérimétrique (cf. [Os1] théorème 3.1). Dans notre cas, on a la

PROPOSITION 2.2.1.- *Soit $i : M \hookrightarrow N$ une immersion isométrique qui satisfait les hypothèses (*). Pour tout fonction f sur M de classe C^1 et à support compact on a*

$$A_{a,b,m} \|f\|_{\frac{m}{m-1}} \leq \|\nabla f\|_1 \tag{2.2.1}$$

et

$$(m-1)(b-a)\|f\|_1 \leq \|\nabla f\|_1 \quad (2.2.2)$$

où la constante $A_{a,b,m}$ est celle définie dans l'énoncé du théorème 2.1.1.

Soit $K(t, x, y)$ le noyau minimal de la chaleur sur M ; la fonction K est une solution fondamentale de l'équation de la chaleur et satisfait entre autre

$$\Delta_y K(t, x, y) + \frac{\partial K}{\partial t}(t, x, y) = 0$$

où Δ_y désigne le laplacien par rapport à la variable y ; on notera de même $\nabla_y K$ le gradient par rapport à y .

On a par définition

$$K(t, x, y) = \sup\{K_\Omega(t, x, y) \mid \Omega \subset M \text{ relativement compact}\}$$

où $K_\Omega(t, x, y)$ est le noyau de la chaleur sur Ω avec condition de Dirichlet au bord. On a sur K le contrôle suivant :

PROPOSITION 2.2.2.- Soit $i : M \hookrightarrow N$ un immersion isométrique qui satisfait les hypothèses (*). Il existe deux constantes $B_{a,b,m}$ et $B'_{a,b,m}$ telles que

$$K(t, x, x) \leq B_{a,b,m} t^{-\frac{m}{2}} \text{ pour tout } t \in]0, +\infty[$$

et

$$K(t, x, x) \leq B'_{a,b,m} e^{-ct} \text{ pour tout } t \in]1, +\infty[$$

où $c = \frac{(m-1)^2(b-a)^2}{4}$.

Preuve.- On va montrer que ces estimées sont satisfaites par K_Ω , pour tout domaine Ω relativement compact dans M , les constantes $B_{a,b,m}$ et $B'_{a,b,m}$ obtenues étant indépendantes de Ω .

Soit $\Omega \subset M$ un ouvert relativement compact, on note

$$k_\Omega(t, x) = \int_\Omega K_\Omega^2(t, x, y) dv(y) = K_\Omega(2t, x, x).$$

On va travailler sur k_Ω . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_\Omega}{\partial t} &= 2 \int_\Omega K_\Omega(t, x, y) \frac{\partial K_\Omega}{\partial t}(t, x, y) dv(y) \\ &= -2 \int_\Omega K_\Omega(t, x, y) \Delta_y K_\Omega(t, x, y) dv(y) \\ &= -2 \int_\Omega |\nabla_y K_\Omega(t, x, y)|^2 dv(y). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
k_\Omega(t, x) &= \int_\Omega K_\Omega^{\frac{2m}{m+1}}(t, x, y) K_\Omega^{\frac{2}{m+1}}(t, x, y) dv(y) \\
&\leq \left(\int_\Omega K_\Omega^{\frac{2m}{m-1}}(t, x, y) dv(y) \right)^{\frac{m-1}{m+1}} \left(\int_\Omega K_\Omega(t, x, y) dv(y) \right)^{\frac{2}{m+1}} \\
&\leq \left(\int_\Omega K_\Omega^{\frac{2m}{m-1}}(t, x, y) dv(y) \right)^{\frac{m-1}{m+1}}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (2.2.1) à la fonction f^2 , et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left(\int_M |f|^{\frac{2m}{m-1}} \right)^{\frac{2m-1}{m}} \leq B' \left(\int_M f^2 \right) \left(\int_M |\nabla f|^2 \right)$$

pour toute fonction f de classe C^1 à support compact, où $B' = \frac{4}{A_{a,b,m}^2}$. En appliquant cette inégalité à K_Ω et en utilisant l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
k_\Omega^{\frac{2m+1}{m}}(t, x) &\leq \left(\int_\Omega K_\Omega^{\frac{2m}{m-1}}(t, x, y) dv(y) \right)^{\frac{2m-1}{m}} \\
&\leq B' \left(\int_M K_\Omega^2(t, x, y) \right) \left(\int_\Omega |\nabla_y K_\Omega(t, x, y)|^2 dv(y) \right) \\
&\leq -\frac{B'}{2} k_\Omega(t, x) \frac{\partial k_\Omega}{\partial t}(t, x).
\end{aligned}$$

La fonction k_Ω vérifie donc l'inégalité différentielle

$$k_\Omega^{\frac{m+2}{m}}(t, x) + \frac{B'}{2} \frac{\partial k_\Omega}{\partial t}(t, x) \leq 0.$$

Soit $h = k_\Omega^{\frac{-2}{m}}$, on a

$$k_\Omega^{\frac{m+2}{m}}(t, x) \left(1 - \frac{mB'}{4} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) \right) \leq 0.$$

Comme k_Ω est une fonction positive on a

$$\frac{\partial h}{\partial t} \geq \frac{4}{mB'}$$

et comme $h(0) = 0$, on obtient en intégrant

$$h(t, x) \geq \frac{4}{mB'} t$$

et

$$k_\Omega(t, x) \leq \left(\frac{mB'}{4} \right)^{\frac{m}{2}} t^{-\frac{m}{2}}$$

d'où

$$K_\Omega(t, x, x) \leq B_{a,b,m} t^{-\frac{m}{2}}$$

où $B_{a,b,m} = \frac{(2m)^{\frac{m}{2}}}{A_{a,b,m}^m}$.

Pour la deuxième estimée, la méthode est similaire. En appliquant l'inégalité (2.2.2) à la fonction f^2 et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$(m-1)^2(b-a)^2 \left(\int_M |f|^2 \right) \leq 4 \int_M |\nabla f|^2$$

pour toute fonction f de classe C^1 à support compact. En appliquant cette inégalité à K_Ω , on a

$$(m-1)^2(b-a)^2 k_\Omega(t, x) \leq -2 \frac{\partial k_\Omega}{\partial t}(t, x).$$

Comme k_Ω est une fonction strictement positive, on a

$$\frac{1}{k_\Omega(t, x)} \frac{\partial k_\Omega}{\partial t}(t, x) \leq -c'$$

où $c' = \frac{(m-1)^2(b-a)^2}{2}$. En intégrant sur $[1, t]$, on trouve

$$k_\Omega(t, x) \leq k_\Omega(1, x) e^{c'(1-t)}$$

et on obtient finalement

$$K_\Omega(t, x, x) \leq B'_{a,b,m} e^{-ct}$$

où $B'_{a,b,m} = B_{a,b,m} 2^{-\frac{m}{2}} \exp\left(\frac{(m-1)^2(b-a)^2}{2}\right) = \frac{m^{\frac{m}{2}}}{A_{a,b,m}^m} \exp\left(\frac{(m-1)^2(b-a)^2}{2}\right)$, et où $c = \frac{(m-1)^2(b-a)^2}{4}$. ■

Comme conséquence de ces deux majorations, on a le contrôle suivant :

COROLLAIRE 2.2.3.- *Pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $C_{\alpha,a,b,m}$ telle que*

$$K(t, x, x) \leq C_{\alpha,a,b,m} t^{-\frac{m}{2}-\alpha}$$

pour tout $t \in]0, +\infty[$

Preuve.- Soit $C'_{\alpha,a,b,m}$ définie par

$$C'_{\alpha,a,b,m} = \max\left(1, \sup_{[1, +\infty[} (t^{\frac{m}{2}+\alpha} e^{-ct})\right)$$

Pour tout $t \in]0, 1]$, on a $t^{-\frac{m}{2}} \leq t^{-\frac{m}{2}-\alpha}$, et comme $C'_{\alpha,a,b,m} \geq 1$, on a $t^{-\frac{m}{2}} \leq C'_{\alpha,a,b,m} t^{-\frac{m}{2}-\alpha}$. D'autre part, on a $e^{-ct} \leq C'_{\alpha,a,b,m} t^{-\frac{m}{2}-\alpha}$ pour tout $t \in [1, +\infty[$. En utilisant les deux estimées de la proposition précédente, on obtient

$$K(t, x, x) \leq C_{\alpha,a,b,m} t^{-\frac{m}{2}-\alpha}$$

pour tout $t \in]0, +\infty[$, où $C_{\alpha,a,b,m} = C'_{\alpha,a,b,m} \max(B_{a,b,m}, B'_{a,b,m})$. ■

2.3. Majoration de l'indice

On suppose dans cette section que la variété N est l'espace hyperbolique à courbure -1 de dimension $m + 1$, et que l'immersion est à courbure moyenne constante strictement inférieure à 1 ; cette immersion satisfait les hypothèses $(*)$, et on a donc sur l'hypersurface M les contrôles du noyau de la chaleur donnés par la proposition 2.2.2 et le corollaire 2.2.3.

L'opérateur de stabilité de M s'écrit

$$S = \Delta + m(1 - h^2) - |\phi|^2.$$

Comme on va chercher à majorer l'indice de M , on va considérer l'opérateur S agissant sur $C_0^\infty(M)$, c'est à dire qu'on va s'intéresser à $\text{Ind}'(M)$ (cf. chapitre 1 section 2).

On va chercher à majorer $\text{Ind}'(M)$ sous une hypothèse de courbure totale finie (ie. $\int_M |\phi|^m dv < \infty$). Cette hypothèse implique que la fonction $|\phi|$ tend vers 0 à l'infini (cf [B-C-S2] théorème principal); elle est donc bornée. On en déduit que S est essentiellement auto-adjoint (cf. [B-C-S1] proposition 2).

L'indice de Morse de M est défini comme la borne supérieure des indices des ouverts relativement compacts de M , mais dans notre cas, on pourrait le définir directement comme le nombre de valeurs propres négatives de l'extension auto-adjointe de S .

Plus généralement, pour un opérateur R essentiellement auto-adjoint, on notera $\mathcal{N}_e(R)$ le nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicités) de l'extension auto-adjointe de R qui sont inférieures à e . Si, comme dans notre cas, R est de la forme $\Delta + V$ avec V un potentiel continu, on a pour R une notion "d'indice" : $\mathcal{I}(R) = \sup\{\mathcal{N}_0(R_\Omega) | \Omega \text{ ouvert relativement compact de } M\}$, où R_Ω désigne l'extension auto-adjointe de $\Delta + V$ agissant sur $C_0^\infty(\Omega)$.

On a entre $\mathcal{I}(R)$ et $\mathcal{N}_0(R)$ la relation suivante (cf. [B-C-S1] proposition 3) :

PROPOSITION 2.3.1.- *Soit M une variété riemannienne complète, et soit R l'opérateur $\Delta + V$ agissant sur $C_0^\infty(M)$, où V est une fonction continue, on a alors :*

- i. si $\mathcal{I}(R) < \infty$ alors R est essentiellement auto-adjoint et $\mathcal{N}_0(R) < \infty$;*
- ii. si R est essentiellement auto-adjoint et $\mathcal{N}_0(R) < \infty$, alors $\mathcal{I}(R) < \infty$, et $\mathcal{I}(R) = \mathcal{N}_0(R)$*

Dans notre cas, on pourra utiliser indifféremment l'une ou l'autre des deux approches.

Le cas de la dimension supérieure ou égale à 3

On suppose d'abord que la dimension de M est supérieure à 3; compte tenu de la proposition 2.2.2, on peut utiliser le résultat de E. Lieb (cf. [Li]) et P. Bérard -

G. Besson (cf. [B-B] théorème 37) ; on reprend ici la preuve donnée dans [R-S] (cf. [R-S] vol. IV, théorème XIII.12).

On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME A.- Soit $i : M^m \hookrightarrow \mathbb{H}^{m+1}$, $m \geq 3$, une immersion à courbure moyenne constante $h < 1$. Si $\int_M |\phi|^m dv < \infty$ alors le nombre de valeurs propres de l'opérateur de stabilité qui sont inférieures à $m(1 - h^2)$ est fini ; il existe une constante $D_{h,m}$ telle que

$$\mathcal{N}_{m(1-h^2)}(S) \leq D_{h,m} \int_M |\phi|^m dv$$

Preuve.- Soit T l'opérateur $\Delta - |\phi|^2$ agissant sur $C_0^\infty(M)$. Cet opérateur est essentiellement auto-adjoint ; on note encore T son extension auto-adjointe.

Pour un ouvert Ω relativement compact dans M , on note T_Ω l'extension auto-adjointe de l'opérateur $\Delta - |\phi|^2$ agissant sur $C_0^\infty(\Omega)$. On cherche à majorer $\mathcal{N}_0(T)$; compte tenu de la proposition 2.3.1, il suffit de majorer $\mathcal{N}_0(T_\Omega)$ pour tout Ω .

Dans la suite de la preuve, on notera $W = |\phi|^2$. La première étape de la preuve consiste à majorer $\mathcal{N}_{-\varepsilon}(T_\Omega)$ par la trace d'un opérateur.

On remarque d'abord que $\mathcal{N}_{-\varepsilon}(T_\Omega)$ est égal au cardinal de l'ensemble

$$I = \{\lambda \in]0, 1[\mid -\varepsilon \text{ est valeur propre de } \Delta - \lambda W\}.$$

Cette égalité vient du fait que les valeurs propres de $\Delta - \lambda W$, en tant que fonctions de λ , sont continues, décroissantes (car W est une fonction positive), et positives pour $\lambda = 0$ (cf. [R-S] vol. IV, lemme p.98).

Pour $p \in \mathbb{N}$ on introduit l'opérateur R_p défini par

$$R_p = W^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k (\Delta + kW + \varepsilon)^{-1} \right) W^{\frac{1}{2}}.$$

Soit F_p la fonction définie par

$$F_p(u) = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k \frac{1}{1 + ku},$$

on a également

$$F_p(u) = \frac{p! u^p}{(1+u)(1+2u)\dots(1+ku)}.$$

On montre l'égalité en remarquant que la différence de ces deux expressions est une fonction entière qui tend vers 0 à l'infini. On en déduit que l'opérateur R_p s'écrit aussi

$$R_p = p! W^{\frac{1}{2}} (\Delta + \varepsilon)^{-1} \left(\prod_{k=1}^p W(\Delta + kW + \varepsilon)^{-1} \right) W^{\frac{1}{2}}.$$

On remarque notamment sur cette expression que l'opérateur R_p est positif.

On voit facilement que si φ est vecteur propre de $\Delta - \lambda W$ de valeur propre $-\varepsilon$, alors $W^{\frac{1}{2}}\varphi$ est vecteur propre de R_p de valeur propre $\mu = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k \frac{1}{\lambda+k} = \frac{1}{\lambda} F_p(\frac{1}{\lambda})$. De plus, en utilisant la seconde expression pour F_p , on remarque que $\mu \geq \frac{1}{p+1}$.

On en déduit que $\mathcal{N}_{-\varepsilon}(T_\Omega)$ est inférieur ou égal au cardinal de l'ensemble

$$J_p = \left\{ \mu \geq \frac{1}{p+1} \mid \mu \text{ est valeur propre de } R_p \right\}.$$

Comme d'autre part l'opérateur R_p est positif, on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{-\varepsilon}(T_\Omega) &\leq \sum_{\mu \in J_p} 1 \\ &\leq (p+1) \sum_{\mu \in J_p} \mu \\ &\leq (p+1) \text{Tr}(R_p) \\ &\leq (p+1) \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k \text{Tr}(W(\Delta + kW + \varepsilon)^{-1}) \end{aligned}$$

Comme l'opérateur $\Delta + kW$ est autoadjoint positif, et $\varepsilon > 0$, on a $(\Delta + kW + \varepsilon)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t(\Delta + kW)} e^{-\varepsilon t} dt$, d'où

$$\mathcal{N}_{-\varepsilon}(T_\Omega) \leq (p+1) \int_0^\infty \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k \text{Tr}(W e^{-t(\Delta + kW)}) e^{-\varepsilon t} dt$$

où on a utilisé la positivité de l'intégrand pour intervertir la trace et l'intégration. Par le théorème de convergence monotone, on peut faire tendre ε vers 0, et on obtient

$$\mathcal{N}_0(T_\Omega) \leq (p+1) \int_0^\infty \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k \text{Tr}(W e^{-t(\Delta + kW)}) dt.$$

La seconde étape consiste à évaluer la trace des opérateurs $W e^{-t(\Delta + kW)}$ en se ramenant à des opérateurs à noyaux. On utilise pour cela la formule de Feynman-Kac (cf. [R-S] vol. II, p.279) : l'opérateur $e^{-t(\Delta + kW)}$ a un noyau donné par

$$e^{-t(\Delta + kW)}(x, y) = \int_\Gamma \exp\left(-k \int_0^t W(\gamma(u)) du\right) d\mu_{x,y,t}(\gamma)$$

où Γ est l'espace des chemins dans Ω et $d\mu_{x,y,t}$ est la mesure de Wiener conditionnée sur Γ (pour les constructions des mesure de Wiener et mesure de Wiener conditionnée, cf. [R-S] vol. II, p.277 et [R-S] vol. IV, p.102).

L'opérateur $W e^{-t(\Delta + kW)}$ n'a, à priori, pas de noyau ; cependant, on montre par une preuve analogue à celle de la formule de Feynman-Kac que l'opérateur $e^{-s(\Delta + kW)} W e^{-(t-s)(\Delta + kW)}$ a un noyau donné par

$$e^{-s(\Delta + kW)} W e^{-(t-s)(\Delta + kW)}(x, y) = \int_\Gamma W(\gamma(s)) \exp\left(-k \int_0^t W(\gamma(u)) du\right) d\mu_{x,y,t}(\gamma).$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(W e^{-t(\Delta+kW)}) &= \int_{\Omega} \int_{\Gamma} W(\gamma(s)) \exp\left(-k \int_0^t W(\gamma(u)) du\right) d\mu_{x,x,t}(\gamma) dv(x) \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\Gamma} W(\gamma(s)) \exp\left(-k \int_0^t W(\gamma(u)) du\right) d\mu_{x,x,t}(\gamma) dv(x) ds \\
&= \frac{1}{t} \int_{\Omega} \int_{\Gamma} \left(\int_0^t W(\gamma(s)) ds\right) \exp\left(-k \int_0^t W(\gamma(u)) du\right) d\mu_{x,x,t}(\gamma) dv(x)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la partie droite de l'égalité ne dépend pas de s , et le fait que l'intégrand est positif.

Revenons à la majoration de $\mathcal{N}_0(T_{\Omega})$. On note g_p la fonction définie par

$$g_p(u) = u \sum_{k=0}^p C_p^k (-1)^k e^{-ku} = u(1 - e^{-u})^p,$$

on a alors

$$\mathcal{N}_0(T_{\Omega}) \leq (p+1) \int_0^{\infty} \int_{\Omega} \int_{\Gamma} g_p\left(\int_0^t W(\gamma(s)) ds\right) d\mu_{x,x,t}(\gamma) dv(x) \frac{dt}{t}.$$

D'autre part, il existe $u_p > 0$ tel que la fonction g_p est convexe sur l'intervalle $[0, u_p]$ et concave sur $]u_p, +\infty[$. On majore alors la fonction g_p par la fonction f_p définie par

$$f_p(u) = \begin{cases} g_p(u) & \text{si } 0 \leq u \leq u_p \\ g_p(u_p) + (u - u_p)g'_p(u_p) & \text{si } u > u_p \end{cases}$$

La fonction f_p est convexe et supérieure à g_p . En utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned}
g_p\left(\int_0^t W(\gamma(s)) ds\right) &\leq f_p\left(\int_0^t W(\gamma(s)) ds\right) \\
&\leq \frac{1}{t} \int_0^t f_p(tW(\gamma(s))) ds
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{N}_0(T_{\Omega}) \leq (p+1) \int_0^{\infty} \int_{\Omega} \int_0^t \int_{\Gamma} f_p(tW(\gamma(s))) d\mu_{x,x,t}(\gamma) ds dv(x) \frac{dt}{t^2}.$$

Par construction de la mesure de Wiener, on a

$$\int_{\Gamma} f_p(W(\gamma(s))) d\mu_{x,x,t}(\gamma) = \int_{\Omega} f_p(tW(y)) K_{\Omega}(s, x, y) K_{\Omega}(t-s, y, x) dv(y)$$

où K_{Ω} est le noyau de la chaleur sur Ω pour le problème de Dirichlet. En reportant cette égalité dans l'inégalité précédente, en intervertissant les sommations en x et y ,

et en majorant K_Ω par le noyau minimal de la chaleur sur M , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_0(T_\Omega) &\leq (p+1) \int_0^\infty \int_0^t \int_\Omega f_p(tW(y))K(t, y, y)dv(y)ds \frac{dt}{t^2} \\
&\leq (p+1) \int_\Omega \int_0^\infty f_p(tW(y))K(t, y, y)dv(y) \frac{dt}{t} \\
&\leq (p+1)B_{h,1,m} \int_\Omega \int_0^\infty f_p(tW(y))t^{-\frac{m}{2}} dv(y) \frac{dt}{t} \tag{2.3.1}
\end{aligned}$$

où on a utilisé le contrôle sur le noyau de la chaleur de M donné par la proposition 2.2.2. Par changement de variable (on pose $s = tW(y)$), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_0(T_\Omega) &\leq (p+1)B_{h,1,m} \int_\Omega \int_0^\infty f_p(s)s^{-1-\frac{m}{2}} W(y)^{\frac{m}{2}} ds dv(y) \\
&\leq (p+1)B_{h,1,m} \left(\int_0^\infty f_p(s)s^{-1-\frac{m}{2}} ds \right) \left(\int_M W(y)^{\frac{m}{2}} dv(y) \right)
\end{aligned}$$

Comme $f_p(s) \sim_{+\infty} cs$ et $m \geq 3$ d'une part, et $f_p(s) \sim_0 s^{p+1}$ d'autre part, en prenant $p > \frac{m}{2} - 1$ l'intégrale $\int_0^\infty f_p(s)s^{-1-\frac{m}{2}} ds$ est finie, et on a donc

$$\mathcal{N}_0(T_\Omega) \leq D_{h,m} \int_M W(y)^{\frac{m}{2}} dv(y)$$

avec $D_{h,m} = (p+1)B_{h,1,m} \int_0^\infty f_p(s)s^{-1-\frac{m}{2}} ds$, où $p = E(\frac{m}{2})$

Finalement, en prenant la borne supérieure sur tous les ouverts relativement compacts de M , on obtient la majoration voulue:

$$\mathcal{N}_0(T) \leq D_{h,m} \int_M |\phi|^m dv$$

■

On remarque sur l'expression de la constante $D_{h,m}$ que l'hypothèse $m \geq 3$ est nécessaire dans la preuve du théorème A.

Le cas de la dimension 2

On suppose maintenant que la dimension de M est égale à 2. Dans ce cas, la preuve du théorème précédent ne donne rien, et on n'a pas en général de majoration analogue: si on considère un opérateur de la forme $\Delta - W$ sur une variété M , où W est une fonction positive, on peut montrer, en utilisant l'invariance conforme de l'intégrale de Dirichlet, que si M est conforme à une surface de Riemann privée d'un nombre fini de points, alors $\mathcal{I}(\Delta - W) \geq 1$ (cf. [B-B] appendice 1).

Dans notre cas, compte tenu du corollaire 2.2.3, on a une majoration du noyau de la chaleur qui nous permet de reprendre la méthode de la preuve. On obtient le résultat suivant:

THÉORÈME B.- Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbb{H}^3$, une immersion à courbure moyenne constante $h < 1$. Si $\int_M |\phi|^2 dv < \infty$ alors le nombre de valeurs propres de l'opérateur de stabilité qui sont inférieures à $2(1 - h^2)$ est fini; pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $D_{h,\alpha}$ telle que

$$\mathcal{N}_{2(1-h^2)}(S) \leq D_{h,\alpha} \int_M |\phi|^{2+2\alpha} dv$$

Preuve.- Comme précédemment, l'hypothèse $\int_M |\phi|^2 < \infty$ implique que $|\phi|$ tend vers 0 à l'infini; donc $|\phi|$ est bornée et $\int_M |\phi|^{2+2\alpha}$ est finie.

En suivant la même démarche que dans la preuve du théorème A, l'inégalité (2.3.1) devient

$$\mathcal{N}_0(T_\Omega) \leq (p+1)C_{\alpha,h,1,2} \int_\Omega \int_0^\infty f_p(tW(y))t^{-1-\alpha} dv(y) \frac{dt}{t}$$

où on a utilisé la majoration donnée par le corollaire 2.2.3.

Avec le même changement de variable on obtient

$$\mathcal{N}_0(T_\Omega) \leq (p+1)C_{\alpha,h,1,2} \left(\int_0^\infty f_p(s)s^{-2-\alpha} ds \right) \left(\int_M W(y)^{1+\alpha} dv(y) \right)$$

Comme $\alpha > 0$, pour $p > \alpha$ l'intégrale $\int_0^\infty f_p(s)s^{-2-\alpha} ds$ est finie, et il existe donc une constante $D_{h,\alpha}$ telle que

$$\mathcal{N}_0(T_\Omega) \leq D_{h,\alpha} \int_M W(y)^{1+\alpha} dv(y)$$

En prenant la borne supérieure sur les ouverts Ω relativement compacts dans M on a finalement

$$\mathcal{N}_0(T) \leq D_{h,\alpha} \int_M |\phi|^{2+2\alpha} dv$$

■

Chapitre 3
COMPACTIFICATION

Introduction

On montre dans ce chapitre un résultat de compactification analogue à celui obtenu par G. de Oliveira pour les sous-variétés minimales de l'espace hyperbolique (cf. [dO] théorème A); on étend ce résultat au cas où la courbure moyenne est constante et strictement inférieure à 1 (cf. théorème C). La preuve de G. de Oliveira est en deux parties: une partie analytique qui consiste à montrer que la norme du tenseur ϕ tend vers 0 à l'infini, et une partie géométrique qui consiste à en déduire le résultat final en étudiant la fonction distance extrinsèque.

P. Bérard, M. do Carmo et W. Santos ont généralisé la première partie au cas des sous-variétés à courbure moyenne constante (cf. [B-C-S2] théorème principal); on généralise ici la seconde partie au cas des immersions qui satisfont les hypothèses (*) (cf. théorème 3.2.1).

On rappelle qu'on désigne par (*) les hypothèses suivantes:

- HYPOTHÈSES (*).- *La variété N est simplement connexe, et il existe deux constantes positives a et b telles que*
- $\tilde{K}(\pi) \leq -b^2$ pour tout 2-plan π tangent à N
 - $|H(x)| \leq a < b$ pour tout $x \in M$

3.1. La distance extrinsèque

On étudie dans cette section la fonction distance extrinsèque sur M à l'aide des résultats obtenus à la section 1.3. On s'intéresse plus particulièrement à ses points critiques.

LEMME 3.1.1.- *La hessienne de r_o .*

Soit $o \in N$, pour tout champ de vecteurs X sur M , on a

$$(\text{Hess}r_o)(X, X) \geq (|X|^2 - \langle X, \nabla r_o \rangle^2) b \coth(br_o) + \langle \tilde{\nabla} r_o, \mathcal{A}(X, X) \rangle + \langle \nabla r_o, \nabla_X X \rangle. \quad (3.1.1)$$

Preuve.- Soit X un champ de vecteurs sur M , on a

$$\begin{aligned} (\text{Hess}r_o)(X, X) &= X \cdot \langle \nabla r_o, X \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla r_o, X \rangle + \langle \nabla r_o, \nabla_X X \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X \nabla r_o, X \rangle + \langle \nabla r_o, \nabla_X X \rangle. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $\nabla r_o = \tilde{\nabla} \tilde{r}_o - (\tilde{\nabla} \tilde{r}_o)^N$, donc

$$\langle \tilde{\nabla}_X \nabla r_o, X \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, X \rangle - \langle \tilde{\nabla}_X (\tilde{\nabla} \tilde{r}_o)^N, X \rangle.$$

D'après le corollaire 1.3.2, le premier terme de cette différence se minore :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, X \rangle &\geq |X^n|^2 b \coth(br_o) \\ &\geq (|X|^2 - \langle X, \nabla r_o \rangle^2) b \coth(br_o). \end{aligned}$$

D'autre part, le second terme donne

$$\begin{aligned} -\langle \tilde{\nabla}_X (\tilde{\nabla} \tilde{r}_o)^N, X \rangle &= \langle (\tilde{\nabla} \tilde{r}_o)^N, \tilde{\nabla}_X X \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \mathcal{A}(X, X) \rangle. \end{aligned}$$

En sommant ces deux résultats, on obtient l'inégalité voulue. \blacksquare

Soit $\gamma(s)$ une courbe de N paramétrée par la longueur d'arc, et soit $f(s) = \tilde{r}_o(\gamma(s))$. En appliquant le lemme 3.1.1 à la sous-variété γ , on obtient :

$$f''(s) \geq (1 - f'(s)^2) b \coth(bf(s)) + \langle \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle(\gamma(s)) \quad (3.1.2)$$

LEMME 3.1.2.- Soit $o \in N$. Si $x \in M$ est un point critique de r_o , et si la partie ϕ de trace nulle de la seconde forme fondamentale vérifie $|\phi|(x) \leq \frac{b-a}{2}$, alors x est un minimum local strict.

Preuve.- Soit $\xi \in TxM$, on a $\mathcal{A}(\xi, \xi) = \phi(\xi, \xi) + H|\xi|^2$. Comme $(\nabla r_o)(x) = 0$, la relation (3.1.1) devient

$$\begin{aligned} (\text{Hess} r_o)(X, X) &\geq |\xi|^2 b \coth(br_o) + \langle \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \phi(\xi, \xi) \rangle + \langle \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, H \rangle |\xi|^2 \\ &\geq b|\xi|^2 - \frac{b-a}{2} |\xi|^2 - a|\xi|^2 \\ &\geq \frac{b-a}{2} |\xi|^2 \end{aligned}$$

\blacksquare

De la même façon, on montre le lemme suivant :

LEMME 3.1.3.- Soit $o \in N$, et soit $\gamma :]t_1, t_2[\rightarrow N$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc telle que $|\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}| \leq b$. Soit $f(s) = \tilde{r}_o(\gamma(s))$. Si f a un point critique $s_0 \in]t_1, t_2[$, alors s_0 est un minimum local strict.

Preuve.- Comme $f'(s_0) = 0$, l'inégalité (3.1.2) donne

$$f''(s_0) \geq b \coth(bf(s_0)) - b > 0.$$

\blacksquare

Enfin, on a pour les courbes de N le résultat suivant :

LEMME 3.1.4.- Soit $\gamma : [0, t[\rightarrow N$ ($t \leq \infty$) une courbe paramétrée par la longueur d'arc, telle que $|\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}| \leq \delta < b$. Alors

i. γ est plongée ;

ii. $\tilde{d}(\gamma(0), \gamma(s)) \geq s\sqrt{1 - \frac{\delta}{b}}$.

Preuve.- i. γ est plongée

Supposons qu'il existe s_1 et s_2 tels que $s_1 < s_2$ et $\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$. Soit $o = \gamma(s_1)$ et $f(s) = \tilde{r}_o(\gamma(s))$. Comme $f(s_1) = f(s_2) = 0$ et $f'(s_1) = 1$, la fonction f possède un maximum local dans $]s_1, s_2[$, ce qui contredit le lemme 3.1.3.

ii. $\tilde{d}(\gamma(0), \gamma(s)) \geq s\sqrt{1 - \frac{\delta}{b}}$

Soit $o = \gamma(0)$, et $f(s) = \tilde{r}_o(s)$; on a $f'(0) = 1$.

Remarquons d'abord que f est croissante. Supposons qu'il existe $s_0 \in [0, t[$ tel que $f'(s_0) = 0$. Par le lemme 3.1.3, s_0 est un minimum local strict. Soit s_1 tel que $f(s_1) = \sup\{f(s) | s \in [0, s_0]\}$, s_1 est un point critique qui est un maximum, ce qui est impossible par le lemme 3.1.3. Donc la dérivée de f ne s'annule pas et est strictement positive.

Supposons maintenant qu'il existe s_2 tel que $f'(s_2) < \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}}$. Comme $f'(0) = 1$, on a $s_2 > 0$, et il existe $s_3 \in]0, s_2[$ tel que $f''(s_3) \leq 0$ et $f'(s_3) \leq \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}}$. Or d'après l'inégalité (3.1.2), et comme $f'(s_3)$ est positive, on a

$$\begin{aligned} f''(s_3) &\geq (1 - f'(s_3)^2)b \coth(bf(s_3)) - \delta \\ &\geq (1 - 1 + \frac{\delta}{b})b \coth(bf(s_3)) - \delta \\ &> 0. \end{aligned}$$

On obtient une contradiction, donc pour tout $s \in [0, t[$ on a $f'(s) \geq \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}}$. Comme $f(0) = 0$, on obtient le résultat voulu par intégration. ■

3.2. Un résultat de compactification

On généralise ici la partie géométrique de la preuve du théorème de G. de Oliveira (cf [dO] théorème 2.1). La méthode utilisée est similaire à celle adoptée dans [dO].

THÉORÈME 3.2.1.- Soit $i : M \hookrightarrow N$ une immersion qui satisfait les hypothèses (*). On suppose de plus que $|\phi|$ tend vers 0 à l'infini, on a alors :

i. L'immersion i est propre ;

ii. L'immersion i est transverse aux sphères géodésiques de N de rayon suffisamment grands ;

iii. la variété M est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord \overline{M} , et l'immersion se prolonge continûment en une application

$$\bar{i} : \overline{M} \rightarrow \overline{N}.$$

Preuve.- Soit $o \in N$, et soit $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Par hypothèse, il existe un compact $K \subset M$ tel que que sur $M \setminus K$ on ait $|\phi| \leq \varepsilon$.

Dans la suite, on notera $\bar{r} = \max\{r_o(x) | x \in K\}$. On a également $|\phi| \leq \varepsilon$ sur $M \setminus B_{\bar{r}}$, où, pour tout $\rho \geq 0$, B_ρ désigne le boule extrinsèque de centre o et de rayon ρ , c'est à dire $B_\rho = \{x \in M | r_o(x) < \rho\}$. De même, on notera $S_\rho = \{x \in M | r_o(x) = \rho\}$ la sphère extrinsèque de rayon ρ et de centre o

Remarquons d'abord que si $\gamma = I \rightarrow M$ est une géodésique telle que pour tout $s \in I$, $\gamma(s) \in M \setminus K$ alors on a une borne sur la courbure de γ en tant que courbe de N . Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{\nabla}_\gamma \dot{\gamma}| &= |\mathcal{A}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})| \\ &= |\phi(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + H| \\ &\leq \frac{a+b}{2} \\ &< b. \end{aligned}$$

En particulier, γ satisfait les hypothèses des lemmes 3.1.3 et 3.1.4

i. L'immersion est propre

On va montrer que l'image réciproque par i d'une boule de N est bornée dans M ; pour ce faire, on va majorer la distance de x à K en fonction de $r_o(x)$, pour tout $x \in M \setminus K$.

Soit $x \in M \setminus K$, soit $l = d(x, K)$, et soit γ une géodésique de M paramétrée par la longueur d'arc qui réalise la distance entre K et x , telle que $\gamma(0) \in K$ et $\gamma(l) = x$.

Pour tout $s \in]0, l[$ on a $\gamma(s) \in M \setminus K$; compte tenu de ce qui précède, et par le lemme 3.1.4 on a

$$\tilde{d}(\gamma(0), \gamma(s)) \geq s \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}},$$

et par l'inégalité triangulaire on obtient

$$d(x, K) \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}} \leq r_o(x) + \bar{r}$$

ce qui prouve l'assertion *i*.

ii. L'immersion est transverse aux sphères géodésiques de N

Montrons que r_o n'a pas de point critique sur $M \setminus B_{\bar{r}}$.

Supposons que ce ne soit pas le cas; soit $x \in M \setminus B_{\bar{r}}$ un point critique de r_o , et soit $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow M$ une géodésique de M paramétrée par la longueur d'arc qui réalise la distance entre $B_{\bar{r}}$ et x , telle que $\gamma(0) \in B_{\bar{r}}$, et $\gamma(l) = x$ (où $l = d(B_{\bar{r}}, x)$).

Soit $f(s) = r_o(\gamma(s))$, comme x est point critique de r_o , l est point critique de f .

Comme précédemment, on a $\gamma(s) \in M \setminus K$ pour tout $s \in]0, +\infty[$, donc $|\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}| < b$, et il suit par le lemme 3.1.3 que l est un minimum local strict de f .

Soit $s_0 \in]0, l[$ tel que $f(s_0) = \max\{f(s) | s \in]0, l[\}$, s_0 est un maximum local de f , ce qui contredit le lemme 3.1.3 et prouve l'assertion *ii*.

iii. Compactification de M

On définit sur $M \setminus B_{\bar{r}}$ le champ de vecteurs $X = \frac{\nabla r_o}{|\nabla r_o|^2}$. Comme r_o n'a pas de point critique dans $M \setminus B_{\bar{r}}$, le champ X est bien défini. Soit ψ_t le flot de X , pour tout $t \geq 0$, ψ_t induit un difféomorphisme de $S_{\bar{r}}$ sur $S_{\bar{r}+t}$. Dans la suite, pour tout $y \in S_{\bar{r}}$, on notera $y_t = \psi_t(y)$.

LEMME 3.2.2.- *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $y \in S_{\bar{r}}$ et tout $t > 0$ on ait $|\nabla r_o|(y_t) \geq c$.*

Preuve.- Soit $y \in S_{\bar{r}}$, et soit $\varphi_y(t) = |\nabla r_o|^2(y_t)$. On a

$$\begin{aligned} \varphi'_y(t) &= 2\langle \nabla_X \nabla r_o, \nabla r_o \rangle \\ &= 2\langle \tilde{\nabla}_X \nabla r_o, \nabla r_o \rangle \\ &= 2|\nabla r_o|^2 \langle \tilde{\nabla}_X \nabla r_o, X \rangle. \end{aligned}$$

Par un calcul similaire à celui de la preuve du lemme 3.1.1, on obtient

$$\langle \tilde{\nabla}_X \nabla r_o, X \rangle \geq (|X|^2 - \langle X, \nabla r_o \rangle^2) b \coth(br_o) + \langle \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \mathcal{A}(X, X) \rangle$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi'_y(t) &\geq (1 - |\nabla r_o|^2) b \coth(br_o) + \langle \tilde{\nabla} \tilde{r}_o, \mathcal{A}\left(\frac{\nabla r_o}{|\nabla r_o|}, \frac{\nabla r_o}{|\nabla r_o|}\right) \rangle \\ &\geq (1 - |\nabla r_o|^2) b - \varepsilon - a \\ &\geq -b\varphi_y(t) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $A = \inf\{|\nabla r_o|^2(y) | y \in S_{\bar{r}}\}$, comme r_o n'a pas de point critique sur $M \setminus B_{\bar{r}}$, on a $A > 0$.

Soit $\alpha(t) = \frac{\varepsilon}{b}(1 - e^{-2bt}) + Ae^{-2bt}$ la solution de l'équation différentielle $\frac{1}{2}\alpha'(t) + b\alpha(t) = \varepsilon$ telle que $\alpha(0) = A$.

Soit $\beta(t) = \varphi_y(t) - \alpha(t)$, on a $\frac{1}{2}\beta'(t) + b\beta(t) \geq 0$ et $\beta(0) \geq 0$, on en déduit que β est une fonction positive. On a donc

$$\varphi_y(t) \geq \frac{\varepsilon}{b}(1 - e^{-2bt}) + Ae^{-2bt}$$

ce qui prouve le lemme. ■

Pour tout $t \geq 0$, soit χ_t l'application définie par

$$\chi_t : \begin{cases} S_{\bar{r}} & \rightarrow U_o N \\ y & \mapsto \Pi_o(y_t) \end{cases}$$

Pour tout $t \geq 0$, χ_t est une immersion, de plus on a le résultat suivant :

LEMME 3.2.3.- *La famille d'immersions $(\chi_t)_{t \geq 0}$ converge uniformément quand t tend vers l'infini, vers une application χ_∞*

Preuve.- On va majorer $|\frac{\partial \chi_t}{\partial t}(y)|$ uniformément en y . On a

$$\frac{\partial \chi_t}{\partial t}(y) = (T_{y_t} \Pi_o)(X(y_t))$$

Donc, d'après le lemme 1.3.3 on a

$$|\frac{\partial \chi_t}{\partial t}(y)| \leq \frac{b|X^n|}{\sinh(b\tilde{r}(y_t))}$$

où X^n est la composante de X normale à $\tilde{\nabla} \tilde{r}_o$. On a $X = \tilde{\nabla} \tilde{r}_o + X^n$, d'où $|X^n|^2 = \frac{1}{|\tilde{\nabla} \tilde{r}_o|^2} - 1$. Par le lemme 3.2.2 il vient que $|X^n| \leq \frac{1}{c}$, on obtient donc

$$|\frac{\partial \chi_t}{\partial t}(y)| \leq \frac{b}{c \sinh(b(\bar{r} + t))}.$$

Cette majoration implique la convergence uniforme de $(\chi_t)_{t \geq 0}$ vers une application χ_∞ continue de $S_{\bar{r}}$ dans $U_o N$. En effet, on a

$$\begin{aligned} d_{U_o N}(\chi_{t_0}(y), \chi_{t_0+s}(y)) &\leq \int_{t_0}^{t_0+s} |\frac{\partial \chi_t}{\partial t}(y)| dt \\ &\leq \int_{t_0}^{\infty} \frac{b dt}{c \sinh(b(\bar{r} + t))} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand t_0 tend vers $+\infty$. ■

Soit $\Psi : S_{\bar{r}} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M \setminus B_{\bar{r}}$ l'application définie par $\Psi(y, t) = \psi_t(y)$; cette application est un difféomorphisme.

On note $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ le compactifié de \mathbb{R}_+ , et on définit le compactifié de M par $\overline{M} = B_{\bar{r}} \cup (S_{\bar{r}} \times \overline{\mathbb{R}}_+) = M \cup \partial_\infty M$, où $\partial_\infty M = S_{\bar{r}} \times \{+\infty\}$.

Enfin, on définit \bar{i} par

$$\bar{i}(x) = \begin{cases} i(x) & \text{Êsi } x \in M, \\ \Pi_\infty(\chi_\infty(y)) & \text{si } x = (y, \infty) \in \partial_\infty M. \end{cases}$$

Montrons que \bar{i} est continue. Soit $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de points de \overline{M} qui converge vers $x = (y, +\infty) \in \partial_\infty M$. On peut supposer que pour tout j , $x_j \in \overline{M} \setminus B_{\bar{r}}$, et on écrit $x_j = \Psi(y_j, t_j)$. On a en particulier que $\lim_{+\infty} t_j = +\infty$ et $\lim_{+\infty} y_j = y$. De plus, on a $\Pi_o(x_j) = \chi_{t_j}(y_j)$ et $\Pi_o(x) = \chi_\infty(y)$.

Compte tenu de la topologie de \overline{M} (cf. chapitre 1 section 3), on veut montrer que pour tout $R > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ on a, à partir d'un certain rang $r_o(x_j) \geq R$ et $d_{U_o N}(\Pi_o(x_j), \Pi_o(x)) < \varepsilon$.

Or on a $r_o(x_j) = t_j$ qui tend vers l'infini et

$$d_{U_oN}(\Pi_o(x_j), \Pi_o(x)) = d_{U_oN}(\chi_{t_j}(y_j), \chi_\infty(y))$$

On conclut alors grâce à l'uniforme convergence de χ_{t_j} vers χ_∞ et à la continuité de χ_∞ .

Ceci termine la preuve du théorème 3.2.1. ■

Si on suppose maintenant que l'espace ambiant est l'espace hyperbolique à courbure -1 , et que la courbure moyenne de l'immersion est constante et inférieure strictement à 1, les hypothèses (*) sont satisfaites; d'autre part P. Bérard, M. do Carmo et W. Santos ont montré que sous l'hypothèse $\int_M |\phi|^m dv < \infty$, la norme du tenseur ϕ tend vers 0 à l'infini (cf. [B-C-S2] théorème principal). On obtient donc un théorème analogue à celui obtenu par G. de Oliveira pour les sous-variétés minimales de l'espace hyperbolique:

THÉORÈME C.- *Soit $i : M^m \hookrightarrow \mathbb{H}^n$ une immersion à courbure moyenne constante $h < 1$. Si $\int_M |\phi|^m dv < \infty$ alors*

- i. l'immersion i est propre ;*
- ii. l'immersion i est transverse aux sphères géodésiques de N de rayon suffisamment grands ;*
- iii. la variété M est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord \overline{M} , et l'immersion se prolonge continûment en une application*

$$\bar{i} : \overline{M} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}.$$

Chapitre 4
SURFACES DE DELAUNAY

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans \mathbb{H}^3 . On commence par en étudier la géométrie en suivant la méthode utilisée par J. Gomes (cf. [Go]).

On montre ensuite qu'on a une interprétation cinématique analogue à celle donnée par C. Delaunay dans l'espace euclidien : les méridiennes de ces surfaces sont les trajectoires du foyer d'une conique qui roule sans glissement sur l'axe de révolution. Pour ce faire, on procède en trois étapes : on commence par définir le roulement sans glissement dans l'espace hyperbolique (cf. définition 4.2.9) ; on cherche ensuite une équation des courbes à faire rouler (cf. proposition 4.3.1), et on montre que ces courbes ont des propriétés focales analogues à celles des coniques euclidiennes (cf. proposition 4.3.2) ; on montre enfin, à l'aide de ces propriétés focales, que ces courbes engendrent les méridiennes des surfaces de révolution à courbure moyenne constante (cf. théorème D).

4.1. Géométrie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante

Soit G le sous-groupe des isométries de \mathbb{H}^3 laissant une géodésique Γ point par point invariante. Plaçons-nous dans le modèle de la boule, soit $B^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 < 1\}$ munie de sa métrique hyperbolique. Prenons pour Γ la géodésique $v = w = 0$. Les éléments de G sont alors les rotations euclidiennes d'axe $v = w = 0$ restreintes à B^3 . Dans la suite, on notera $B^2 = \{(u, v, w) \in B^3 \mid w = 0\}$ et $B_+^2 = \{(u, v, 0) \in B^2 \mid v \geq 0\}$. Chaque orbite de G coupe B_+^2 orthogonalement en un point unique, et l'espace B^3 est engendré par l'action de G sur B_+^2 .

Soit s l'abscisse curviligne de Γ telle que $\Gamma(0) = 0$. Prenons sur B_+^2 les coordonnées de Fermi : soient $m \in B_+^2$ et p sa projection hyperbolique sur Γ , la première coordonnée x de m est l'abscisse de p sur Γ et la deuxième coordonnée y de m est $d(m, p)$ où d est la distance hyperbolique. Dans ces coordonnées, la métrique hyperbolique sur B_+^2 s'écrit (cf. [Bu] p. 4) :

$$g_{B_+^2} = \cosh^2 y \, dx^2 + dy^2.$$

Soit $\mathcal{C}(s)$ une courbe de B_+^2 paramétrée par l'abscisse curviligne, et soit M la surface de B^3 engendrée par l'action de G sur \mathcal{C} . Notons $x(s)$ et $y(s)$ les coordonnées de $\mathcal{C}(s)$, et $\alpha(s)$ l'angle entre $\dot{\mathcal{C}}(s) = \frac{d\mathcal{C}}{ds}(s)$ et $\frac{\partial}{\partial y}$. On a $\dot{\mathcal{C}} = \frac{\sin \alpha}{\cosh y} \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y}$. Soit

$\eta = \frac{\cos\alpha}{\cosh y} \frac{\partial}{\partial x} - \sin\alpha \frac{\partial}{\partial y}$ un vecteur unitaire normal à M , et soit ν le champ de vecteurs tangents aux orbites de G .

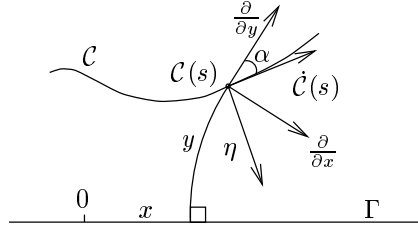


figure 4.1.1

Pour des raisons de symétrie, \dot{C} et ν sont les directions principales de courbure de M . Soit D la connexion riemannienne de \mathbb{H}^3 , notons $k_1 = \langle D_{\dot{C}}\dot{C}, \eta \rangle$ et $k_2 = \langle D_{\nu}\nu, \eta \rangle$ les courbures principales de M , et $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ la courbure moyenne de M , un calcul donne la

PROPOSITION 4.1.1.- *Les courbures principales de M sont*

$$k_1 = \frac{d\alpha}{ds} + \sin\alpha \tanh y$$

$$k_2 = \sin\alpha \coth y$$

La courbure moyenne H de M vérifie

$$2H = \frac{d\alpha}{ds} + \sin\alpha(\tanh y + \coth y).$$

Supposons dorénavant que la courbure moyenne de M est constante. Pour étudier ces surfaces, suivant ainsi la méthode utilisée par J. Gomes (cf. [Go]), on va étudier le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{ds} = 2H - \sin\alpha(\tanh y + \coth y) \\ \frac{dy}{ds} = \cos\alpha \end{cases} \quad (4.1.1)$$

On supposera dans la suite qu'on a $H \geq 0$. Si tel n'est pas le cas, on considère la courbe \mathcal{B} définie par $\mathcal{B}(s) = \mathcal{C}(-s)$. Cela revient à changer l'orientation de M , et donc le signe de H .

Le premier point important est que ce système possède une intégrale première :

PROPOSITION 4.1.2.- *Soit $F(y, \alpha) = -H \sinh^2 y + \sinh y \cosh y \sin\alpha$, F est une intégrale première du système (4.1.1).*

De plus, on a $F(y, \alpha) = \sinh^2 y \frac{k_2 - k_1}{2}$, et si on note K la valeur de F , la méridienne de M vérifie l'équation

$$-H \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = K$$

Preuve.- On montre facilement par le calcul que $\frac{d(F(y,\alpha))}{ds} = 0$.

La seconde expression de F se déduit des expressions de H , k_1 et k_2 .

L'équation se déduit du fait que $\sin\alpha = \cosh y \frac{dx}{ds}$. ■

REMARQUE 4.1.3.- La seconde expression de F nous dit que cette intégrale première est un invariant géométrique qui "mesure" le défaut d'ombilicité: si F s'annule, alors M est totalement ombilicale.

En particulier, si M possède un point ombilic, tous ses points sont ombilics; de même, si la méridienne coupe l'axe de révolution, M est totalement ombilicale.

Faisons une étude qualitative du système (4.1.1); le champ de vecteurs de ce système vit sur le demi-cylindre $y > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour l'étudier, multiplions le champ de vecteurs de ce système par $\sinh y \cosh y$, ce qui ne change pas le portrait de phase. On se ramène donc au système

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{ds} = H \sinh 2y - \sin\alpha \cosh 2y \\ \frac{dy}{ds} = \cos\alpha \sinh y \cosh y \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Le portrait de phase est symétrique par rapport aux droites $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. On a deux cas à envisager.

1^{er} CAS: si $0 \leq H \leq 1$. On a deux points fixes, $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$. Compte tenu de la symétrie, il suffit d'étudier $(0, 0)$. On voit facilement que c'est un point col, et on peut utiliser l'intégrale première pour trouver les séparatrices: comme $F(0, 0) = 0$, F doit être nulle le long des séparatrices, et on trouve les courbes d'équation $y = 0$ et $y = \arg \tanh(\frac{\sin\alpha}{H})$.

De plus, on a le résultat suivant:

LEMME 4.1.4.- Si $(\alpha(s), y(s))$ est une solution de (4.1.1) qui n'est pas une séparatrice, on a

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} y(s) = +\infty \text{ et } \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \alpha(s) = \alpha_0$$

où $\alpha_0 = \arcsin(H)$.

Preuve.- Remarquons d'abord que dans la région $\alpha < \frac{3\pi}{2}$ et $\alpha > \frac{\pi}{2}$ on a $\frac{dy}{ds} < 0$. Si une ligne de champ autre qu'une séparatrice reste dans cette région, on a alors $\lim_{+\infty} y = y_0 > 0$, et on en déduit grâce à l'intégrale première que α a aussi une limite finie. Ceci est impossible car on aurait alors un autre point fixe que $(\pi, 0)$. On en conclut que toutes les lignes de champ pénètrent dans la région $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Remarquons ensuite que la région $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ est une région piège: en $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, on a $\frac{dy}{ds} = 0$, et $\frac{d\alpha}{ds} > 0$ en $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\alpha}{ds} < 0$ en $\alpha = \frac{\pi}{2}$. De plus, on a $\frac{dy}{ds} \geq 0$ dans cette région.

Si y a une limite finie non nulle, alors grâce à l'intégrale première on en déduit que α a aussi une limite finie, et par le même argument que ci-dessus, on arrive à une contradiction.

On a donc $\lim_{+\infty} y = +\infty$, et toujours en utilisant l'intégrale première, on en déduit que $\lim_{+\infty} \alpha = \alpha_0$, où $\alpha_0 = \arcsin H$. ■

Finalement, les portraits de phase sont les suivant :

figure 4.1.2 : Portrait de phase pour $H < 1$.

figure 4.1.3 : Portrait de phase pour $H = 1$.

REMARQUE 4.1.5.- Le portrait de phase étant symétrique par rapport aux droites $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, on en déduit qu'il existe s_0 tel que pour tout s on ait $y(s_0 + s) = y(s_0 - s)$ et $\alpha(s_0 + s) = \pi - \alpha(s_0 - s)$ (s_0 est la valeur du paramètre pour laquelle $\frac{dy}{ds}$ s'annule). Comme de plus on a $\frac{dx}{ds} = \frac{\sin \alpha}{\cosh y}$, on a également $x(s_0 + s) - x(s_0) = x(s_0) - x(s_0 - s)$. Le plan hyperbolique $x = x(s_0)$ est donc un plan de symétrie pour M .

2^{ème} CAS : si $H > 1$. Dans ce cas, on a toujours les deux points fixes $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$ qui sont des points cols, et les séparatrices sont toujours les courbes d'équation $y = 0$ et $y = \arg \tanh(\frac{\sin \alpha}{H})$.

On a en plus un autre point fixe de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4} \log(\frac{H+1}{H-1}))$. En ce point, les valeurs propres de la jacobienne du champ de vecteur sont imaginaires pures, et comme la droite $\alpha = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie, on en déduit que ce point fixe est un centre.

La séparatrice $y = \arg \tanh(\frac{\sin \alpha}{H})$ sépare l'espace des phases en deux composantes connexes. Dans la composante bornée, les lignes de champ sont périodiques car on a un point fixe qui est un centre. Dans la partie non bornée, on voit facilement que α est croissante, et y est croissante dans la région $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ et décroissante ailleurs.

De plus, le système étant symétrique par rapport aux droites $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, les lignes de champ de la composante non bornée sont nécessairement périodiques sur le cylindre.

Finalement, le portrait de phase est le suivant :

figure 4.1.4: Portrait de phase pour $H > 1$.

REMARQUE 4.1.6.- Comme dans le cas où $H \leq 1$, on a des plans de symétrie pour M . Cependant, comme on a sur chaque ligne de champ deux points qui rencontrent les axes de symétrie, on a deux plans de symétrie pour M . En composant les symétries, on montre que M est périodique et possède une infinité d'axes de symétrie.

REMARQUE 4.1.7.- Dans le cas où $H > 1$, le point fixe de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4} \log(\frac{H+1}{H-1}))$ correspond à un point critique de F . Il est facile de voir que ce point critique est un maximum global de F , et que la valeur de F en ce point est $\frac{H - \sqrt{H^2 - 1}}{2}$.

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, la finitude de la courbure totale intervient souvent dans les hypothèses des résultats obtenus. Dans le cas où $H > 1$, M est périodique, et sa courbure totale est donc infinie; dans le cas où $H \leq 1$, on montre que la courbure totale est finie.

Soit ϕ le tenseur à trace nulle de M (cf. chapitre 1, section 1.1). Comme \dot{C} et ν sont les directions principales de courbure de M , on a

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= |\phi(\dot{C}, \dot{C})|^2 + |\phi(\nu, \nu)|^2 \\ &= |k_1 - H|^2 + |k_2 - H|^2 \\ &= 2\left(\frac{k_2 - k_1}{2}\right)^2 \\ &= 2\frac{K^2}{\sinh^4 y}. \end{aligned}$$

On note dv la forme volume de M , et on a la

PROPOSITION 4.1.8.- *Si $H \leq 1$ alors $\int_M |\phi|^2 dv < \infty$*

Preuve.- Sur M , la métrique s'écrit

$$g_M = ds^2 + \sinh^2 y d\theta^2,$$

on a donc $dv = \sinh y ds d\theta$, et

$$\int_M |\phi|^2 dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2K^2}{\sinh^3 y} ds d\theta = 4\pi K^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sinh^3 y}$$

Comme M est symétrique, il suffit de montrer que $\int_{s_0}^{+\infty} \frac{ds}{\sinh^3 y} < \infty$ pour un $s_0 \in \mathbb{R}$.

On a $\frac{dy}{ds} = \cos \alpha$; de l'étude qualitative du système (4.1.1) on déduit que pour s_0 suffisamment grand, $\frac{dy}{ds}$ est positif sur $[s_0, +\infty[$. On peut passer en variable y , et il suffit de montrer la finitude de $\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{\cos \alpha \sinh^3 y}$.

Si $H < 1$, on a $\lim_{+\infty} \alpha = \alpha_0$, et $\cos \alpha_0 \neq 0$; cette intégrale est donc finie, et M est à courbure totale finie.

Si $H = 1$, il faut contrôler $\frac{1}{\cos \alpha}$. Pour ce faire, considérons dans l'espace des phases la courbe d'équation $y = \frac{1}{2} \arg \tanh(\sin \alpha)$, avec $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Le long de cette courbe, on a $\frac{d\alpha}{ds} = 0$; elle délimite donc avec la droite $\alpha = 0$ une région piège de l'espace des phases. De plus, il est facile de voir que toutes les lignes de champ pénètrent dans cette région.

figure 4.1.5

En prenant y_0 suffisamment grand, on a donc

$$\arg \tanh(\sin \alpha) \leq 2y.$$

Comme $\sin \alpha \geq 0$, on a alors $\sin^2 \alpha \leq \tanh^2 2y$, d'où

$$\cos^2 \alpha \geq \frac{1}{\cosh^2 2y}$$

et comme $\cos \alpha \geq 0$, on a

$$\frac{1}{\cos \alpha \sinh^3 y} \leq \frac{\cosh 2y}{\sinh^3 y}.$$

On en conclut que $\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{\cos \alpha \sinh^3 y} < +\infty$, et M est à courbure totale finie. ■

Les surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique ont également été étudiées par W. Y. Hsiang qui s'est intéressé aux relations entre la constante K et la géométrie de M , et notamment à la question de savoir si M est plongée ou non (cf. [Hs] théorème 2).

D'autre part, J. Ordóñez a étudié les surfaces hélicoïdales à courbure moyenne constante dans les espaces formes ; il en obtient un paramétrage explicite qui permet de montrer la finitude de la courbure totale (cf. [Or]).

4.2. Le mouvement plan sur plan hyperbolique

On définit dans cette section ce qu'est le roulement sans glissement d'une courbe sur une autre. On commence par définir le mouvement plan sur plan hyperbolique en procédant par analogie avec le cas euclidien. On étudie ensuite le cas particulier du roulement sans glissement et on prouve les principales propriétés qui nous serviront par la suite.

Théorie générale

DÉFINITION 4.2.1.- Soit N une variété isométrique à \mathbb{H}^2 , I un intervalle de \mathbb{R} . Un mouvement plan sur plan hyperbolique de N sur \mathbb{H}^2 est la donnée d'une application φ de classe C^2 ,

$$\varphi : \begin{cases} I \times N & \rightarrow \mathbb{H}^2 \\ (t, n) & \mapsto \varphi(t, n) \end{cases}$$

telle que pour tout $t \in I$, $\varphi(t, \cdot)$ soit une isométrie.

Par la suite, on notera aussi $\Phi_t = \varphi(t, \cdot)$.

DÉFINITION 4.2.2.- Soient $x \in \mathbb{H}^2$ et $n_t = \Phi_t^{-1}(x) \in N$. Le point n_t est appelé le t -coïncidant de x . Le champ des vitesses à l'instant t , V_t , est défini par

$$V_t(x) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \varphi(s, n_t).$$

Deux mouvements plan sur plan hyperboliques sont dits tangents à l'instant t si leurs champs des vitesses à l'instant t sont égaux.

Un mouvement plan sur plan est dit stationnaire si son champ des vitesses est indépendant de t .

Dans ce qui suit, φ désigne un mouvement plan sur plan hyperbolique, et V_t désigne son champ des vitesses à l'instant t . Le champ V_t a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 4.2.3.- *Pour tout $t \in I$, V_t est équijectif au sens suivant: pour toute géodésique c de \mathbb{H}^2 , l'application $s \mapsto \langle V_t(c(s)), \dot{c}(s) \rangle$ est constante le long de c .*

Preuve.- Soit c une géodésique de \mathbb{H}^2 paramétrée par la longueur d'arc. Soient $s, s' \in \mathbb{R}$ et $x = c(s)$, $x' = c(s')$. On note $n = \Phi_t^{-1}(x) \in N$ et $n' = \Phi_t^{-1}(x') \in N$. Soient c_u la géodésique joignant $\Phi_u(n)$ à $\Phi_u(n')$, et $\mathcal{L}(u) = d_{\mathbb{H}^2}(\Phi_u(n), \Phi_u(n'))$.

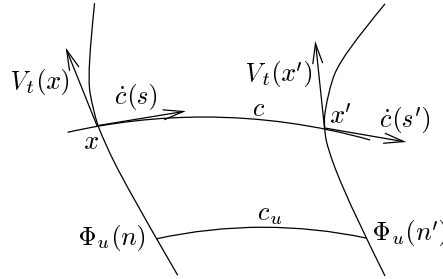


figure 4.2.1

Comme les Φ_u sont des isométries, $\mathcal{L}(u)$ est constante, et en appliquant la formule de la variation première, on obtient :

$$0 = \frac{d}{du} \mathcal{L}(u)|_{u=t} = \langle V_t(x'), \dot{c}(s') \rangle - \langle V_t(x), \dot{c}(s) \rangle.$$

■

Cette proposition implique notamment que la projection de $V_t(c(s))$ sur c est un champ de vecteurs parallèle le long de c . D'autre part, elle permet de définir un champ d'endomorphisme antisymétriques :

PROPOSITION 4.2.4.- *Pour tout $t \in I$, et tout $x \in \mathbb{H}^2$, l'endomorphisme*

$$A_t(x) : \begin{cases} T_x \mathbb{H}^2 & \rightarrow T_x \mathbb{H}^2 \\ X & \mapsto (D_X V_t)(x) \end{cases}$$

est antisymétrique.

De plus, $A_t(x)$ a la propriété suivante : soient $X \in T_x \mathbb{H}^2$, $\gamma(s) = \Phi_s \circ \Phi_t^{-1}(x)$ et $X(s) = (\Phi_s \circ \Phi_t^{-1})_(X)$, $X(s)$ est un champ de vecteurs le long de γ qui vérifie $(D_{\dot{\gamma}} X)(x) = A_t X$.*

Preuve.- Soit $X \in T_x \mathbb{H}^2$ et $c(s) = \exp_x(sX)$, d'après la proposition 4.2.3, on a

$$0 = \frac{d}{ds} \langle V_t(c(s)), \dot{c}(s) \rangle |_{s=0} = \langle D_{\dot{c}(0)} V_t, \dot{c}(0) \rangle = \langle A_t(x)X, X \rangle,$$

donc $A_t(x)$ est antisymétrique.

D'autre part, soit $c(u) = \exp_x(uX)$, et $\Gamma : \begin{cases} I \times]-\varepsilon, \varepsilon[& \rightarrow \mathbb{H}^2 \\ (s, u) & \mapsto \Phi_s \circ \Phi_t^{-1}(c(u)) \end{cases}$.

On a $D \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Gamma}{\partial u} |_{u=0, s=t} = D \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \Gamma}{\partial s} |_{u=0, s=t}$.

Or $\frac{\partial \Gamma}{\partial u} |_{u=0} = X(s)$, et $\frac{\partial \Gamma}{\partial s} |_{s=t} = V_t(c(u))$, on a donc

$$D \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Gamma}{\partial u} |_{u=0, s=t} = (D_{\dot{\gamma}} X)(x)$$

et

$$D \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \Gamma}{\partial s} |_{u=0, s=t} = (D_X V_t)(x) = A_t(x)X$$

■

Dans le cadre euclidien, on écrit souvent les endomorphismes A_t sous la forme d'un produit vectoriel par un vecteur orthogonal au plan du mouvement (le vecteur "rotation instantanée"). Si ce vecteur est nul, le champ des vitesses est constant, ses lignes de champ sont des droites parallèles et les difféomorphismes de son flot sont des translations; si ce vecteur est non nul, les lignes de champ du champ des vitesses sont des cercles concentriques, et les difféomorphismes de son flot sont des rotations.

Faisons dans le cas hyperbolique une étude analogue. Les endomorphismes A_t étant antisymétriques, on en déduit que le champ V_t est de Killing (cf. [K-N] p.237) : les difféomorphismes de son flot sont des isométries. Après avoir démontré ce résultat classique, on utilise la classification des isométries pour classifier les champs de Killing sur \mathbb{H}^2 .

PROPOSITION 4.2.5.- *Soit V un champ de vecteur sur \mathbb{H}^2 , et pour tout $x \in \mathbb{H}^2$, soit $A(x) : \begin{cases} T_x \mathbb{H}^2 & \rightarrow T_x \mathbb{H}^2 \\ X & \mapsto (D_X V)(x) \end{cases}$*

Si pour tout $x \in \mathbb{H}^2$ l'endomorphisme $A(x)$ est antisymétrique, alors les difféomorphismes du flot de V sont des isométries.

Preuve.- Soit $(f_t)_t$ le flot de V .

Soient $x \in \mathbb{H}^2$, $X \in T_x \mathbb{H}^2$ et $Y \in T_x \mathbb{H}^2$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, soient $\gamma(t) = f_t(x)$, $X(t) = f_{t*}(X)$ et $Y(t) = f_{t*}(Y)$.

Par un raisonnement analogue à celui de la preuve de la proposition 4.2.4, on a $A(x)X = (D_{\dot{\gamma}} X)(x)$ et $A(x)Y = (D_{\dot{\gamma}} Y)(x)$. On en déduit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t) \rangle &= \langle D_{\dot{\gamma}}X, Y \rangle + \langle X, D_{\dot{\gamma}}Y \rangle \\
&= \langle AX, Y \rangle + \langle X, AY \rangle \\
&= \langle A(X+Y), X+Y \rangle \text{ car } A \text{ est antisymétrique} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\langle X(t), Y(t) \rangle$ est constant le long de γ , on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\langle X, Y \rangle = \langle f_{t*}(X), f_{t*}(Y) \rangle$. ■

Soit V un champ de Killing sur \mathbb{H}^2 , et soit $(f_t)_t$ son flot. Pour tout t , l'isométrie f_t s'étend en un difféomorphisme \bar{f}_t sur $\overline{\mathbb{H}^2}$ qui laisse $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ globalement invariant. La famille $(\bar{f}_t)_t$ restreinte à $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ est encore un groupe à un paramètre de difféomorphismes, on note V_{∞} son champ de vecteur dérivé. On a la proposition suivante:

PROPOSITION 4.2.6.- *Soit V un champ de Killing sur \mathbb{H}^2 . Une et une seule des assertions suivantes est vérifiée.*

- i. *il existe $x \in \mathbb{H}^2$ tel que $V(x) = 0$;*
- ii. *V ne s'annule pas sur \mathbb{H}^2 et il existe un unique point $x \in \partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ tel que $V_{\infty}(x) = 0$;*
- iii. *V ne s'annule pas sur \mathbb{H}^2 et V_{∞} s'annule en exactement deux points sur $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$.*

Preuve.- Un champ de vecteur V s'annule en un point x si et seulement si x est un point fixe de tous les difféomorphismes du flot de V .

Soit $(f_t)_t$ le flot de V , on s'intéresse aux points fixes des \bar{f}_t . Si pour tout t on a $f_t = Id_{\mathbb{H}^2}$, le champ V est identiquement nul, et on est dans le premier cas.

Sinon, soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $f_t \neq Id_{\mathbb{H}^2}$, et soit $x \in \overline{\mathbb{H}^2}$ tel que $\bar{f}_t(x) = x$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $\bar{f}_s(x) = \bar{f}_s(\bar{f}_t(x)) = \bar{f}_t(\bar{f}_s(x))$.

Donc $\bar{f}_s(x)$ est un point fixe de \bar{f}_t . Or, l'ensemble des points fixes de \bar{f}_t est discret, et l'application $s \mapsto \bar{f}_s(x)$ est continue, on a donc pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\bar{f}_s(x) = \bar{f}_t(x) = x$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, le point x est un point fixe de \bar{f}_s .

On déduit de ce résultat que les isométries f_t sont toutes de même nature, et que leurs extensions à $\overline{\mathbb{H}^2}$ partagent les mêmes points fixes.

Si les f_t sont elliptiques, elles ont toutes un même point fixe $x \in \mathbb{H}^2$, et on est dans le premier cas.

Si les f_t sont paraboliques, les \bar{f}_t ont toutes un unique et même point fixe $x \in \partial_{\infty}\mathbb{H}^2$, on est dans le deuxième cas.

Si les f_t sont hyperboliques, les \bar{f}_t ont toutes les deux mêmes points fixes dans $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$, on est dans le troisième cas. ■

On déduit de cette proposition que les champs de Killing de \mathbb{H}^2 ont les allures suivantes:

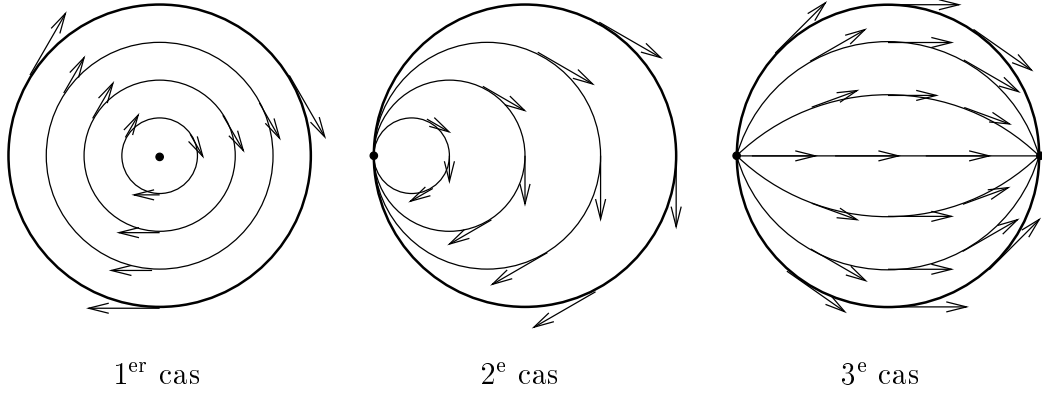


figure 4.2.2: les champs de Killing sur \mathbb{H}^2

Si V est un champ de Killing sur \mathbb{H}^2 , les difféomorphismes de son flot définissent un mouvement plan sur plan hyperbolique (car ce sont des isométries). Ce mouvement plan sur plan a la particularité d'être stationnaire : en tout instant, son champ des vitesses est égal à V .

D'autre part, si φ est un mouvement plan sur plan hyperbolique quelconque, pour tout $t \in I$, son champ des vitesses V_t est de Killing. Il définit donc un mouvement plan sur plan stationnaire tangent à φ . On a ici une notion de mouvement stationnaire instantané qui généralise la notion de rotation ou de translation instantanée des mouvements plan sur plan euclidiens.

Dans le cas euclidien, l'équiprojectivité du champ des vitesses permet d'exprimer sa valeur en un point y en fonction de sa valeur en un point x et du vecteur \overrightarrow{xy} . On a ici un propriété analogue qui s'exprime de la façon suivante :

PROPOSITION 4.2.7.- Soit $x \in \mathbb{H}^2$, $X \in T_x\mathbb{H}^2$, et $y = \exp_x(X)$. Pour tout $t \in I$, on a la relation

$$P|_y^x(V_t(y)) = V_t^T(x) + \cosh\|X\|V_t^N(x) + \frac{\sinh\|X\|}{\|X\|}A_tX$$

où $P|_y^x$ désigne le transport parallèle le long de la géodésique joignant y à x , et T et N désignent les composantes tangente et normale à X .

Pour démontrer cette proposition, on commence par prouver le lemme suivant :

LEMME 4.2.8.- Soit $a(u)$ une courbe de \mathbb{H}^2 , X un champ de vecteurs le long de a , et $b(u) = \exp_{a(u)}(X_u)$. On a alors

$$\dot{b}(u) = P|_{a(u)}^{b(u)}\left(\dot{a}(u)^T + \cosh\|X_u\|\dot{a}(u)^N + (D_{\dot{a}}X)(u)^T + \frac{\sinh\|X_u\|}{\|X_u\|}(D_{\dot{a}}X)(u)^N\right).$$

où $P|_{a(u)}^{b(u)}$ désigne le transport parallèle le long de la géodésique joignant $a(u)$ à $b(u)$, et T et N désignent les composantes tangente et normale à $X(u)$

Preuve.- Soient $G(s, u) = \exp_{a(u)}(sX_u)$, et $J_u(s) = \frac{\partial G}{\partial u}(u, s)$. Alors J_u est un champ de Jacobi qui vérifie $J_u(0) = \dot{a}(u)$ et $\frac{dJ_u}{ds}(0) = (D_{\dot{a}}X)(u)$. D'autre part, on a $\dot{b}(u) = J_u(1)$. Le résultat s'obtient en intégrant l'équation des champs de Jacobi dans \mathbb{H}^2 . ■

Preuve de la proposition 4.2.7.- Soit $a(u) = \Phi_u \circ \Phi_t^{-1}(x)$, $b(u) = \Phi_u \circ \Phi_t^{-1}(y)$, et $X(u) = \exp_{a(u)}^{-1}(b(u))$. Par définition, on a $\dot{a}(t) = V_t(x)$, $\dot{b}(t) = V_t(y)$, et $(D_{\dot{a}}X)(t) = A_t X$. La proposition se déduit alors du lemme et du fait que A_t est antisymétrique. ■

Le roulement sans glissement

On suppose dans ce qui suit que les variétés N et \mathbb{H}^2 sont orientées. On peut maintenant définir le roulement sans glissement:

DÉFINITION 4.2.9.- Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $\mathcal{R} : I \rightarrow N$, $\mathcal{B} : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ deux courbes C^1 telles que pour tout $t \in I$, $\dot{\mathcal{R}}(t) \neq 0$, $\dot{\mathcal{B}}(t) \neq 0$ et $\|\dot{\mathcal{R}}(t)\| = \|\dot{\mathcal{B}}(t)\|$.

Soit Φ_t l'isométrie positive définie par $\Phi_t(\mathcal{R}(t)) = \mathcal{B}(t)$ et $\Phi_{t*}(\dot{\mathcal{R}}(t)) = \dot{\mathcal{B}}(t)$.

Le roulement sans glissement de \mathcal{R} sur \mathcal{B} est le mouvement plan sur plan hyperbolique défini par $\varphi(t, n) = \Phi_t(n)$.

La courbe \mathcal{R} est appelée la roulante et \mathcal{B} la base.

Dans la suite, φ désigne le mouvement plan sur plan défini par le roulement sans glissement d'une roulante \mathcal{R} sur une base \mathcal{B} , et V_t est son champ des vitesses.

LEMME 4.2.10.- On a $V_t(\mathcal{B}(t)) = 0$, et pour tout $x \in \mathbb{H}^2$ on a

$$V_t(x) = P|_{\mathcal{B}(t)}^x \left(\frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} A_t X \right)$$

où $X = \exp_{\mathcal{B}(t)}^{-1}(x)$

Preuve.- On a $\mathcal{B}(t) = \varphi(t, \mathcal{R}(t))$, donc

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{B}}(t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathcal{R}(t)) + \frac{\partial \varphi}{\partial n}(t, \mathcal{R}(t)) \cdot \dot{\mathcal{R}}(t) \\ &= V_t(\mathcal{B}(t)) + \Phi_{t*}(\dot{\mathcal{R}}(t)) \end{aligned}$$

Par définition des isométries Φ_t , on a $\Phi_{t*}(\dot{\mathcal{R}}(t)) = \dot{\mathcal{B}}(t)$ et donc $V_t(\mathcal{B}(t)) = 0$. Le résultat du lemme est alors une conséquence de la proposition 4.2.7. ■

Le roulement sans glissement a la propriété suivante (qui est un résultat classique dans le cadre euclidien):

PROPOSITION 4.2.11.- Soit $\mathcal{C}(t) = \varphi(t, n)$ la trajectoire d'un point $n \in N$, le vecteur $\dot{\mathcal{C}}(t)$ est orthogonal à la géodésique joignant $\mathcal{B}(t)$ à $\mathcal{C}(t)$.

Preuve. - Soit $X = \exp_{\mathcal{B}(t)}^{-1}(\dot{\mathcal{C}}(t))$ et soit $g(s) = \exp_{\mathcal{B}(t)}(sX)$ la géodésique joignant $\mathcal{B}(t)$ à $\mathcal{C}(t)$.

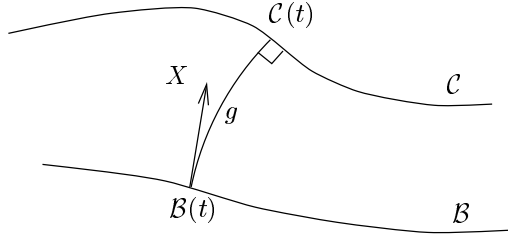


figure 4.2.3

Par le lemme 4.2.10, on a $\dot{\mathcal{C}}(t) = P|_{\mathcal{B}(t)}^{\mathcal{C}(t)} \left(\frac{\sinh\|X\|}{\|X\|} A_t X \right)$. Comme $A_t X$ est orthogonal à $\dot{g}(0) = X$, par transport parallèle, $\dot{\mathcal{C}}(t)$ est orthogonal à $\dot{g}(1)$. ■

En considérant \mathbb{H}^2 comme un hyperplan hyperbolique de \mathbb{H}^3 , on peut écrire l'endomorphisme $A_t(\mathcal{B}(t))$ sous la forme $A_t(\mathcal{B}(t))X = \rho(t) \frac{\partial}{\partial z} \wedge X$, où $\frac{\partial}{\partial z}$ est un champ de vecteurs unitaire normal à \mathbb{H}^2 . La valeur de $\rho(t)$ dépend des courbures de la base et de la roulante.

PROPOSITION 4.2.12.- On a

$$\rho(t) = \langle D_{\dot{\mathcal{B}}} \dot{\mathcal{B}}, \nu \rangle - \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} \dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle$$

où $\nu(t) = \frac{\partial}{\partial z} \wedge \dot{\mathcal{B}}(t)$ et $\eta(t) = \Phi_{t*}^{-1}(\nu(t))$

Preuve. - On peut supposer sans perte de généralité que \mathcal{R} et \mathcal{B} sont paramétrées par l'abscisse curviligne. On se fixe $t \in I$ et on cherche à calculer $\rho(t)$.

Pour tout $s \in I$, soit $\nu(s) = \frac{\partial}{\partial z} \wedge \dot{\mathcal{B}}(s)$; la champ ν est unitaire et normal à \mathcal{B} . Soit $x = \exp_{\mathcal{B}(t)}(\dot{\mathcal{B}}(t))$. On a

$$V_t(x) = P|_{\mathcal{B}(t)}^x \left(\sinh 1 \rho(t) \nu \right). \quad (4.2.1)$$

Pour calculer $\rho(t)$, on va calculer $V_t(x)$ "à la main".

Soient $n = \Phi_t^{-1}(x) \in N$, $U(s) = \exp_{\mathcal{R}(s)}^{-1}(n)$ et $\eta(s) = \Phi_{s*}^{-1}(\nu(s))$. On a notamment $U(t) = \dot{\mathcal{R}}(t)$ et $n = \exp_{\mathcal{R}(t)}(\dot{\mathcal{R}}(t))$.

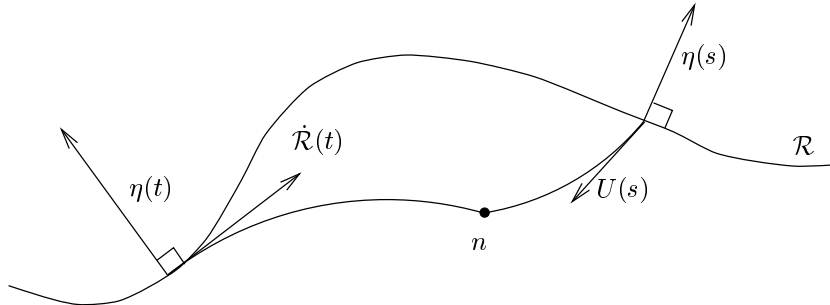


figure 4.2.4

En dérivant l'égalité $n = \exp_{\mathcal{R}(s)}(U(s))$ à l'aide du lemme 4.2.8, et en se plaçant en $s = t$, on obtient

$$0 = \dot{\mathcal{R}}(t) + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{\mathcal{R}}(t) + \sinh 1 \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}U, \eta \rangle \eta(t),$$

et en prenant l'image par Φ_{t*} on trouve

$$0 = \dot{\mathcal{B}}(t) + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{\mathcal{B}}(t) + \sinh 1 \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}U, \eta \rangle \nu(t). \quad (4.2.2)$$

Cette égalité nous servira par la suite. Considérons maintenant la trajectoire du point n . On a $\Phi_s(n) = \exp_{\mathcal{B}(s)}(X(s))$ avec $X(s) = \Phi_{s*}(U(s))$. Comme $U = \langle U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{\mathcal{R}} + \langle U, \eta \rangle \eta$, on a

$$X = \langle U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{\mathcal{B}} + \langle U, \eta \rangle \nu$$

et

$$D_{\dot{\mathcal{B}}}X = \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{\mathcal{B}} + \langle U, D_{\dot{\mathcal{R}}}\dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{\mathcal{B}} + \langle U, \dot{\mathcal{R}} \rangle D_{\dot{\mathcal{B}}}\dot{\mathcal{B}} + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}U, \eta \rangle \nu + \langle U, D_{\dot{\mathcal{R}}}\eta \rangle \nu + \langle U, \eta \rangle D_{\dot{\mathcal{B}}}\nu.$$

En se plaçant en $s = t$, certains termes s'annulent: $\langle U, D_{\dot{\mathcal{R}}}\dot{\mathcal{R}} \rangle = 0$ car $U(t) = \dot{\mathcal{R}}(t)$ et $\dot{\mathcal{R}}$ est de norme constante, et $\langle U, \eta \rangle = 0$ car $U(t) = \dot{\mathcal{R}}(t)$ est orthogonal à $\eta(t)$. D'autre part, on a $D_{\dot{\mathcal{B}}}\dot{\mathcal{B}} = \langle D_{\dot{\mathcal{B}}}\dot{\mathcal{B}}, \nu \rangle \nu$ car $\dot{\mathcal{B}}$ est de norme constante, et $\langle U, D_{\dot{\mathcal{R}}}\eta \rangle = -\langle D_{\dot{\mathcal{R}}}\dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle$ car $U(t) = \dot{\mathcal{R}}(t)$ et $\langle \dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle$ est constant.

On obtient finalement

$$(D_{\dot{\mathcal{B}}}X)(t) = \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{\mathcal{B}}(t) + (\langle D_{\dot{\mathcal{B}}}\dot{\mathcal{B}}, \nu \rangle - \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}\dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}U, \eta \rangle) \nu(t).$$

En utilisant le lemme 4.2.8 et l'égalité ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Phi_s(n)|_{s=t} &= P|_{\mathcal{B}(t)}^x \left(\dot{\mathcal{B}}(t) + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{\mathcal{B}}(t) + \sinh 1 \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}U, \eta \rangle \nu(t) \right. \\ &\quad \left. + \sinh 1 (\langle D_{\dot{\mathcal{B}}}\dot{\mathcal{B}}, \nu \rangle - \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}\dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle) \nu(t) \right), \end{aligned}$$

et en utilisant (4.2.2) on trouve finalement

$$V_t(x) = \frac{d}{ds} \Phi_s(n)|_{s=t} = P|_{\mathcal{B}(t)}^x \left(\sinh 1 (\langle D_{\dot{\mathcal{B}}}\dot{\mathcal{B}}, \nu \rangle - \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}\dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle) \nu \right),$$

d'où

$$\rho(t) = \langle D_{\dot{\mathcal{B}}}\dot{\mathcal{B}}, \nu \rangle - \langle D_{\dot{\mathcal{R}}}\dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle. \quad \blacksquare$$

REMARQUE 4.2.13.- Soit $\mathcal{C}(t) = \varphi(t, n)$ la trajectoire d'un point $n \in N$, on a

$$\dot{\mathcal{C}}(t) = V_t(\mathcal{C}(t)) = P|_{\mathcal{B}(t)}^{\mathcal{C}(t)} \left(\frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} A_t X \right)$$

où $X = \exp_{\mathcal{B}(t)}^{-1}(\mathcal{C}(t))$. Si $n \notin \mathcal{R}$ on a $X \neq 0$, et si de plus \mathcal{B} est une géodésique et la courbure de \mathcal{R} ne s'annule pas, on a $\dot{\mathcal{C}}(t) \neq 0$. On peut en particulier reparamétriser le mouvement plan sur plan en prenant l'abscisse curviligne de \mathcal{C} comme nouveau paramètre.

4.3. Les roulanges

D'après la proposition 4.1.2, les méridiennes des surfaces de révolution à courbure moyenne constante satisfont l'équation suivante:

$$-H \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = K \quad (4.3.1)$$

Une équation pour la roulante

On montre dans cette section que si une courbe satisfait l'équation (4.3.1), alors elle peut être vue comme la trajectoire d'un point lié à une courbe qui roule sans glissement sur une géodésique; on va chercher pour ce faire une équation de la roulante à partir de l'équation différentielle (4.3.1), en adoptant la méthode utilisée par J. Sturm (cf. [De] pp. 319-320).

Soit Γ la géobésique de B^2 d'équation $v = 0$, et soit $\mathcal{C}(s) = (x(s), y(s))$ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne qui satisfait l'équation (4.3.1), où $x(s)$ et $y(s)$ sont les coordonnées de Fermi relatives à Γ de $\mathcal{C}(s)$.

Soit N une variété isométrique à \mathbb{H}^2 , et $F \in N$. Supposons que $\mathcal{C}(s) = \Phi_s(F)$, où Φ_s est le mouvement plan sur plan hyperbolique engendré par le roulement sans glissement d'une courbe γ de N sur Γ .

Considérons sur N les coordonnées polaires centrées en F , l'angle étant pris par rapport à une géodésique de référence k . Dans ces coordonnées, la métrique de N s'écrit (cf. [Bu] p. 3):

$$g_N = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2.$$

Soient $(r(s), \theta(s))$ les coordonnées de polaires $\gamma(s)$.

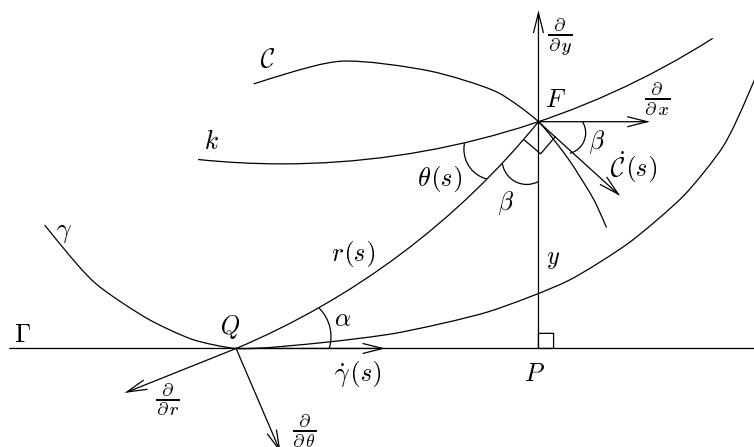


figure 4.3.1

Sur la figure 4.3.1, on a représenté dans B^2 l'image par Φ_s de γ et k , et l'image par Φ_{s*} de $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\dot{\gamma}(s)$.

Soit β l'angle de $\frac{\partial}{\partial x}$ à $\dot{C}(s)$, et α l'angle entre Γ et la géodésique joignant Q à F . Le roulement étant sans glissement, on a $QFC = \frac{\pi}{2}$ donc $\widehat{QFP} = \beta$ (cf. proposition 4.2.11).

Supposons que $\mathcal{C}(s)$ vérifie l'équation (4.3.1), on veut en déduire une équation vérifiée par $r(s)$ et $\theta(s)$. Comme $\frac{dx}{ds} = \frac{\cos\beta}{\cosh y}$, on déduit des relations dans le triangle hyperbolique (QFP) (cf. [Bu] p. 33) que

$$\cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \cosh r \sin \alpha. \quad (4.3.2)$$

De plus, on a

$$\sinh y = \sinh r \sin \alpha. \quad (4.3.3)$$

D'autre part, on a $\dot{\gamma}(s) = \|\dot{\gamma}(s)\|(-\cos\alpha \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial \theta})$, d'où

$$\sin \alpha = \frac{\dot{\theta} \sinh r}{\sqrt{r^2 + \sinh^2 r \dot{\theta}^2}}. \quad (4.3.4)$$

En reportant les relations (4.3.2), (4.3.3) et (4.3.4) dans l'équation (4.3.1), on obtient

$$-H + \coth r = K \left(\frac{d \coth r}{d\theta} \right)^2 + \frac{K}{\sinh^2 r}.$$

En posant $u = \coth r$, on obtient

$$d\theta = \frac{\pm du}{\sqrt{\frac{K-H}{K} + \frac{u}{K} - u^2}},$$

et en intégrant, on trouve

$$\tanh r = \frac{2K}{1 + \sqrt{4K^2 - 4HK + 1} \cos(\theta - \theta_0)}.$$

D'après la remarque 4.1.7, on a $K \leq \frac{H - \sqrt{H^2 - 1}}{2}$, ce qui implique entre autres que $4K^2 - 4HK + 1$ est positif ou nul. Finalement, on a la

PROPOSITION 4.3.1.- *Soit N une variété isométrique à \mathbb{H}^2 , $F \in N$ et (r, θ) les coordonnées polaires centrées en F . Soit Γ un géodésique de \mathbb{H}^2 , et soit \mathcal{C} la méridienne d'une surface de révolution d'axe Γ et à courbure moyenne constante. Alors il existe dans N une courbe $\gamma_{e,p}$ d'équation polaire $\tanh r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, $e \geq 0$, $p \in \mathbb{R}$, telle que \mathcal{C} soit la courbe décrite par F lorsque $\gamma_{e,p}$ roule sans glissement sur Γ .*

Ivan Sterling a étudié un problème similaire dans le cadre plus général des hypersurfaces de révolution de type σ_l dans \mathbb{H}^{n+1} et S^{n+1} ; il obtient une équation intégrale de la roulante (cf. [St] théorème 1). D'autre part, il remarque que dans le cas des surfaces à courbure moyenne constante cette équation s'intègre, et il obtient le résultat de la proposition 4.3.1 (cf [St] p. 196).

Les courbes d'équation $\tanh r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$

Soient r et θ les coordonnées polaires de \mathbb{H}^2 centrées en un point F , et prises par rapport à une géodésique de référence k ($r \in \mathbb{R}_+$, et $\theta \in U_F \mathbb{H}^2$, le cercle unité tangent en F à \mathbb{H}^2). On identifiera dans la suite $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ et $U_F \mathbb{H}^2$. On adoptera les notations suivantes :

- Si $E \in \mathbb{H}^2$, on notera d_E la fonction définie par $d_E(x) = d(E, x)$ où d est la distance hyperbolique;
- Si $\nu \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, on notera b_ν la fonction de Buseman centrée en ν qui s'annule en F ;
- Si g est une géodésique orientée par le champ normal η , on notera d_g la fonction définie par $d_g(x) = \begin{cases} d(g(u), x) & \text{si } x = \exp_{g(u)}(r\eta(u)), \text{ avec } r \geq 0 \\ -d(g(u), x) & \text{si } x = \exp_{g(u)}(r\eta(u)), \text{ avec } r < 0 \end{cases}$

On appellera *fonction de type distance* les fonctions $\pm d_E$ avec $E \in \mathbb{H}^2$, $\pm b_\nu$ avec $\nu \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, et d_g avec g géodésique orientée de \mathbb{H}^2 .

Soit $\gamma_{e,p}$, $e \geq 0$, $p \geq 0$ la courbe d'équation polaire $\tanh r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$. Dans ce qui suit, on supposera $p < 1 + e$ (sinon on a $\frac{p}{1+e \cos \theta} \geq 1$ et $\gamma_{e,p}$ est vide). Faisons d'abord une étude rapide de ces courbes, et traçons en quelques unes.

1^{er} CAS : si $p < 1 - e$.

La fonction $r(\theta)$ est définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et est 2π -périodique. La courbe $\gamma_{e,p}$ est fermée.

figure 4.3.2 : $e = 0,5$; $p = 0,48$

2^{ème} CAS : si $p < e - 1$.

Soient $\theta_1 = \arccos(\frac{p-1}{e})$, et $\theta_2 = \arccos(\frac{-p-1}{e})$. La fonction $r(\theta)$ est définie sur $] -\theta_1, \theta_1[\cup] \theta_2, 2\pi - \theta_2[$; on a $\lim_{\pm \theta_1} r(\theta) = +\infty$, et $\lim_{\theta_2} r(\theta) = \lim_{2\pi - \theta_2} r(\theta) = -\infty$.

figure 4.3.3

3^{ème} CAS : si $p \geq 1 - e$ et $p \geq e - 1$.

Soient $\theta_1 = \arccos(\frac{p-1}{e})$, la fonction $r(\theta)$ est définie sur $] - \theta_1, \theta_1[$; on a $\lim_{\pm\theta_1} r(\theta) = +\infty$.

figure 4.3.4

Ce 3^{ème} cas inclut les cas limites où $p = 1 - e$ et $p = e - 1$.

figure 4.3.5

L'équation de $\gamma_{e,p}$ nous fait songer aux coniques de \mathbb{R}^2 , montrons que les courbes $\gamma_{e,p}$ ont des propriétés analogues.

Pour tout θ , soit $u_\theta \in T_{\gamma_{e,p}(\theta)}\mathbb{H}^2$ le symétrique de $-\frac{\partial}{\partial r}(\theta, r(\theta))$ par rapport au vecteur $\dot{\gamma}_{e,p}(\theta)$, et soit $g_\theta(s) = \exp_{\gamma_{e,p}(\theta)}(su_\theta)$. La géodésique g_θ est obtenue par réflexion par rapport à la normale à $\gamma_{e,p}$ en $\gamma_{e,p}(\theta)$ de la géodésique issue de F .

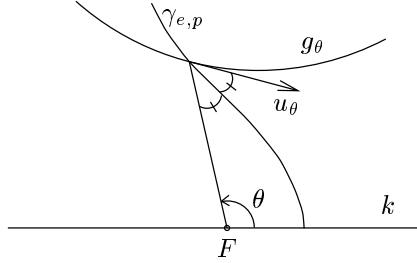


figure 4.3.6

Dans le cas euclidien, les droites construites de façon analogue à partir d'une conique sont concourantes (cas des ellipses et des hyperboles) ou parallèles (cas des paraboles).

Dans le cas hyperbolique, cette famille de géodésique associée à $\gamma_{e,p}$ a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 4.3.2.-

- Si $p < 1 - e$, toutes les géodésiques g_θ sont concourantes au point $\tilde{F} = (\arg \tanh(\frac{2ep}{1-e^2-p^2}), \pi)$, et $\dot{g}_\theta(s) = \nabla d_{\tilde{F}}(g_\theta(s))$.
- Si $p < e - 1$, toutes les géodésiques g_θ sont concourantes au point $\tilde{F} = (\arg \tanh(\frac{2ep}{e^2+p^2-1}), 0)$, et $\dot{g}_\theta(s) = \nabla(-d_{\tilde{F}})(g_\theta(s))$.
- Si $p = 1 - e$, pour tout θ , g_θ a un point à l'infini dans la direction π (on a $\lim_{s \rightarrow -\infty} g_\theta(s) = \pi$), et $\dot{g}_\theta(s) = \nabla b_\pi(g_\theta(s))$.
- Si $p = e - 1$, pour tout θ , g_θ a un point à l'infini dans la direction 0 (on a $\lim_{s \rightarrow +\infty} g_\theta(s) = 0$), et $\dot{g}_\theta(s) = \nabla(-b_0)(g_\theta(s))$.
- Si $p > 1 - e$ et $p > e - 1$, pour tout θ , g_θ est orthogonale à la géodésique g d'équation polaire $\tanh \rho(\alpha) = \frac{A}{\cos \alpha}$ où $A = \frac{e^2+p^2-1}{2ep}$, et $\dot{g}_\theta(s) = \nabla d_g(g_\theta(s))$ pour un orientation adéquate de g

Preuve.- La démonstration est uniquement calculatoire; je donne ici les grandes lignes de calcul.

En coordonnées polaires, les géodésiques de \mathbb{H}^2 ont une equation de la forme $\tanh r = \frac{q}{\cos(\theta - \theta_0)}$; les points à l'infini étant donnés par les direction $\theta_0 + \arccos(\pm q)$. En particulier, on a le lemme suivant :

LEMME 4.3.3.- Soit $(r, \theta) \in \mathbb{H}^2$, et $X = a \frac{\partial}{\partial r} + b \frac{\partial}{\partial \theta} \in T_{(r, \theta)} \mathbb{H}^2$ avec $b \neq 0$. Soient $(\rho(\alpha), \alpha)$ les coordonnées de la géodésique passant par (r, θ) dans la direction X , on a $\tanh \rho = \frac{q}{\cos(\alpha - \alpha_0)}$ où

$$q = \frac{\tanh^2 r}{\sqrt{\tanh^2 r + \frac{a^2}{b^2} (1 - \tanh^2 r)^2}}$$

et

$$\alpha_0 = \theta - \arctan\left(\frac{a(1 - \tanh^2 r)}{b \tanh r}\right)$$

Ce lemme permet de montrer que les géodésiques g_θ ont pour équation $\tanh \rho_\theta = \frac{q_\theta}{\cos(\alpha - \alpha_\theta)}$ avec

$$q_\theta = \frac{2pv}{\sqrt{4u^2v^2 + (v^2 - u^2 + p^2)^2}}$$

et

$$\alpha_\theta = \theta - \arctan\left(\frac{v^2 - u^2 + p^2}{2uv}\right)$$

où $u = 1 + e \cos \theta$ et $v = e \sin \theta$.

Une fois qu'on a les équations des géodésiques g_θ , il suffit de vérifier qu'elles ont bien les propriétés voulues. ■

Comme conséquence, on a le

COROLLAIRE 4.3.4.- La valeur de la fonction $d_F + \delta$ est constante le long de chaque composante connexe de $\gamma_{e,p}$, où δ est la fonction suivante :

- Si $p < 1 - e$, $\delta = d_{\tilde{F}}$;
- Si $p < e - 1$, $\delta = -d_{\tilde{F}}$;
- Si $p = 1 - e$, $\delta = b_\pi$;
- Si $p = e - 1$, $\delta = -b_0$;
- Si $p > 1 - e$ et $p < e - 1$, $\delta = d_g$.

Preuve.- D'après la proposition 4.3.2, les géodésiques g_θ sont des lignes de gradient de la fonction δ : on a $\nabla \delta(\gamma_{e,p}(\theta)) = \dot{g}_\theta(0) = u_\theta$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(d_F(\gamma_{e,p}(\theta)) + \delta(\gamma_{e,p}(\theta))) &= \langle \dot{\gamma}_{e,p}(\theta), \nabla d_F(\gamma_{e,p}(\theta)) + \nabla \delta(\gamma_{e,p}(\theta)) \rangle \\ &= \langle \dot{\gamma}_{e,p}(\theta), \frac{\partial}{\partial r}(\gamma_{e,p}(\theta)) + u_\theta \rangle \\ &= 0 \quad \text{par construction de } u_\theta. \end{aligned}$$

■

Les courbes $\gamma_{e,p}$ ont donc des propriétés focales analogues à celles des coniques euclidiennes. De plus, ces propriétés focales caractérisent les courbes $\gamma_{e,p}$; en effet, on obtient à l'aide du calcul trigonométrique dans le plan hyperbolique la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3.5.- Soit $F \in \mathbb{H}^2$, et soit γ une courbe connexe vérifiant $d_F + \delta = a$ le long de γ , où δ est une fonction de type distance. Il existe $p > 0$ et $e > 0$ tels que pour tout $m \in \gamma$ les coordonnées polaires de m centrées en F soient de la forme $(r(\theta), \theta)$ avec $\tanh r(\theta) = \frac{p}{1+e \cos(\theta-\theta_0)}$.

REMARQUE 4.3.6.- Comme la dérivée de $d_F + \delta$ est nulle le long de γ , un calcul analogue à celui de la preuve du corollaire 4.3.4 montre que la ligne de gradient de δ passant par $\gamma(\theta)$ s'obtient par réflexion sur la tangente à γ en $\gamma(\theta)$ de la géodésique issue de F .

De part leurs propriétés focales, les courbes $\gamma_{e,p}$ sont les analogues hyperboliques des coniques euclidiennes :

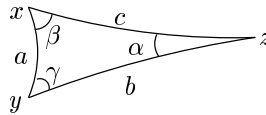
- pour $p < 1 - e$ on a les ellipses ;
- pour $p < e - 1$ on a les hyperboles ;
- pour $p = 1 - e$ ou $p = e - 1$ les $\gamma_{e,p}$ ont une propriété analogue à celle des paraboles euclidiennes ;
- pour $p > 1 - e$ et $p > e - 1$, on a une nouvelle famille de "paraboles".

4.4. Résolution de l'équation par les roulettes

On montre dans cette section que les propriétés focales des courbes $\gamma_{e,p}$ permettent de montrer que la trajectoire du foyer vérifie l'équation 4.3.1. La preuve est une adaptation au cas hyperbolique de celle de Sturm (cf. [De] pp. 319-320). Elle utilise notamment les résultats de trigonométrie hyperbolique suivants :

PROPOSITION 4.4.1.-

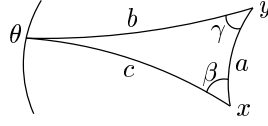
- i. Soient x, y et z des points de \mathbb{H}^2 , et soient $a = d(x, y)$, $b = d(y, z)$ et $c = d(z, x)$. On a alors



$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

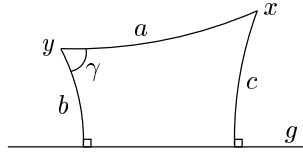
ii. Soient x et y des points de \mathbb{H}^2 , θ un point du bord, et soient $a = d(x, y)$, $b = b_\theta(y)$ et $c = b_\theta(x)$. On a alors



$$e^c = e^b \cosh a - e^b \sinh a \cos \gamma$$

$$\frac{e^b}{\sin \beta} = \frac{e^c}{\sin \gamma}$$

iii. Soient x et y des points de \mathbb{H}^2 , g une géodésique orientée, et soient $a = d(x, y)$, $b = d_g(y)$ et $c = d_g(x)$. On a alors



$$\sinh c = \cosh a \sinh b - \sinh a \cosh b \cos \gamma$$

Preuve.- Pour les points $i.$, cf [Bu] p. 33.

Le point $ii.$ se déduit du $i.$ par passage à la limite. Soit $z(t)$ la géodésique joignant y à θ telle que $b_\theta(z(0)) = 0$ et $\lim_{+\infty} z(t) = \theta$. On note $c(t) = d(x, z(t))$ et $\beta(t)$ l'angle de sommet x dans le triangle $(xyz(t))$.

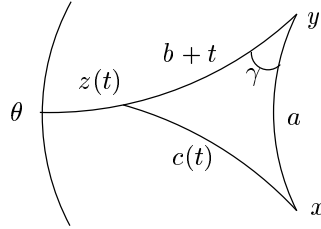


figure 4.4.1

On a $d(y, z(t)) = b + t$, $\lim_{+\infty} (c(t) - t) = c$, et $\lim_{+\infty} \beta(t) = \beta$. Des relations dans le triangle $(xyz(t))$ on déduit

$$\cosh c(t) = \cosh(b + t) \cosh a - \sinh(b + t) \sinh a \cos \gamma$$

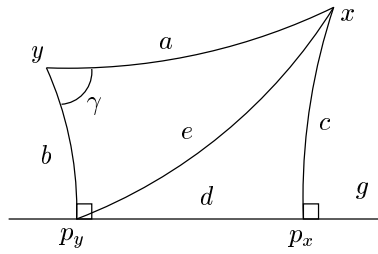
En multipliant par e^{-t} et en passant à la limite, on obtient le résultat voulu.

D'autre part, on a

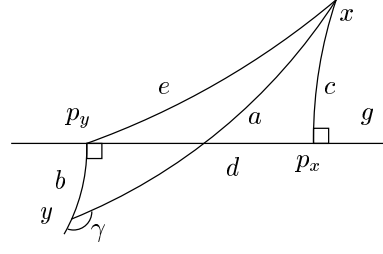
$$\frac{\sinh(b + t)}{\sin \beta(t)} = \frac{\sinh c(t)}{\sin \gamma}$$

En multipliant par e^{-t} et en passant à la limite, on obtient le résultat voulu.

Pour le point $iii.$, γ est défini comme étant l'angle entre $-\nabla d_g(y)$ et $\exp_y^{-1}(x)$. Notons p_x et p_y les projections de x et y sur g , $d = d(p_x, p_y)$ et $e = d(p_y, x)$.



cas où $b > 0$



cas où $b < 0$

figure 4.4.2

Si $b = 0$, l'identité se déduit des relations dans le triangle (yxp_x) .

Supposons $b \neq 0$. Des relations dans le triangle $(xp_x p_y)$ on déduit que $\cosh e = \cosh d \cosh c$, et des relations dans le triangle (xyp_y) , on déduit $\cosh a = \cosh b \cosh e - \sinh a \sinh b \cos \gamma$ (cette égalité reste vraie pour $b < 0$ compte tenu de la définition de γ). On a donc

$$\cosh d \cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma \quad (4.4.1)$$

D'autre part, on a (cf. [Bu] p. 38)

$$\cosh a = \cosh b \cosh c \cosh d - \sinh b \sinh c \quad (4.4.2)$$

En reportant (4.4.1) dans (4.4.2) et en divisant par $\sinh b$ qui est non nul, on obtient le résultat voulu. ■

Dans ce qui suit, on notera $mn = d(m, n)$ où m et n sont des points de \mathbb{H}^2 et où d est la distance hyperbolique.

THÉORÈME D.- Soit N une variété isométrique à \mathbb{H}^2 , soit $F \in N$, et soit γ une courbe connexe de N vérifiant $d_F + \delta = a$ le long de γ , où δ est une fonction de type distance. Soit C la trajectoire de F lorsque γ roule sans glissement sur une géodésique Γ de \mathbb{H}^2 . La courbe C vérifie l'équation

$$-H \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = K$$

où s est l'abscisse curviligne de C , et $x(s)$ et $y(s)$ sont les coordonnées de Fermi de $C(s)$ relatives à Γ . En particulier, elle engendre une surface de révolution à courbure moyenne constante d'axe Γ . De plus, la valeur H de la courbure moyenne vérifie

- si $\delta = \pm d_{\tilde{F}}$, $\tilde{F} \in N$ (γ est une ellipse ou une hyperbole), alors $H = \coth |a| > 1$;
- si $\delta = \pm b_\nu$, $\nu \in \partial_\infty N$ (γ est une parabole), alors $H = 1$;
- si $\delta = d_g$, g une géodésique orientée de N (γ est une parabole généralisée), alors $H = \tanh |a| < 1$.

Preuve.- Par la proposition 4.3.5, on sait que γ a une équation polaire du type $\tanh r = \frac{\rho}{1+e \cos \theta}$. On vérifie alors par le calcul que la courbure de γ ne s'annule pas, compte tenu de la remarque 4.2.13, on peut supposer que \mathcal{C} est paramétrée par l'abscisse curviligne. On fait la preuve dans trois cas :

- 1^{ier} CAS : $\delta = d_{\tilde{F}}$ avec $\tilde{F} \in N$;
- 2^e CAS : $\delta = b_\nu$ avec $\nu \in \partial_\infty N$, quitte à modifier la valeur de a , on supposera de plus que $\delta(F) = 0$;
- 3^e CAS : $\delta = d_g$ où g est une géodésique orientée de N , et $d_g > 0$ le long de γ .

Dans les autres cas, la preuve est analogue à l'un de ces trois cas.

Soit γ une courbe de N vérifiant $d_F + \delta = a$, on note $c = \delta(F)$ (c est la distance interfocale). Dans le deuxième cas, on a $c = 0$.

Soit $\varphi(s, m) : I \times N \rightarrow \mathbb{H}^2$ le roulement sans glissement de γ sur Γ , où s est l'abscisse curviligne de \mathcal{C} (cf. définition 4.2.9).

Sur les figures, on a représenté dans \mathbb{H}^2 l'image de γ par l'isométrie Φ_s du mouvement plan sur plan hyperbolique. Le point P est la projection de F sur Γ , Q est le point de contact, et la géodésique h est la ligne de gradient de δ qui passe par Q .

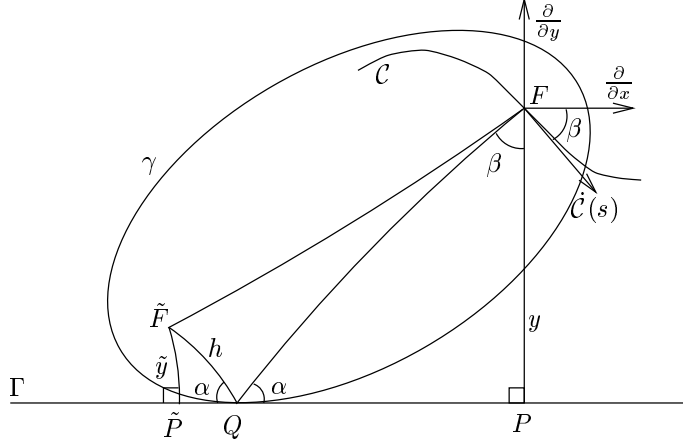


figure 4.4.3 : $\delta = d_{\tilde{F}}$

1^{ier} CAS : \tilde{P} est la projection de \tilde{F} sur Γ . On note $\tilde{y} = \tilde{F}\tilde{P}$

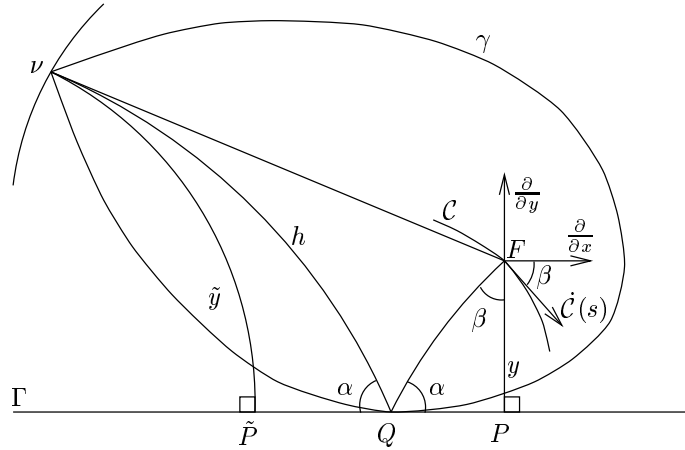


figure 4.4.4: $\delta = b_\nu$

2^e CAS: \tilde{P} est le point de Γ qui minimise δ le long de Γ . On note $\tilde{y} = b_\nu(\tilde{P})$

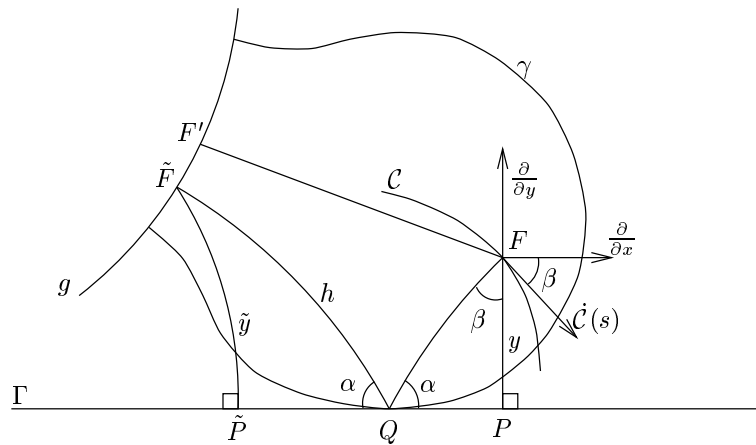


figure 4.4.5: $\delta = d_g$

3^e CAS: F' est la projection de F sur g , \tilde{F} est la projection de Q sur g , et \tilde{P} est la projection \tilde{F} sur Γ . On note $\tilde{y} = \tilde{F}\tilde{P}$

Dans les trois cas, on note β l'angle de $\frac{\partial}{\partial x}$ à $\dot{C}(s)$; le roulement étant sans glissement, on a $QF\dot{C} = \frac{\pi}{2}$ donc $\widehat{QFP} = \beta$. D'autre part, d'après la remarque 4.3.6, la géodésique h fait avec Γ le même angle que la géodésique (QF) ; on note α cet angle. Des relations dans le triangle (QFP) on déduit dans les trois cas:

ÉTAPE 1.-: $\sinh y = \sinh QF \sin \alpha$

De même, des relations dans le triangle $(Q\tilde{F}\tilde{P})$ ou $(Q\theta\tilde{P})$ on déduit:

ÉTAPE 2.-

$$1^{\text{ier}} \text{ CAS : } \sinh \tilde{y} = \sinh Q \tilde{F} \sin \alpha$$

$$2^{\text{e}} \text{ CAS : } e^{\tilde{y}} = e^{b_{\theta}(Q)} \sin \alpha$$

$$3^{\text{e}} \text{ CAS : } \sinh \tilde{y} = \sinh Q \tilde{F} \sin \alpha$$

Dans les trois cas, on a $\frac{dx}{ds} = \frac{\cos \beta}{\cosh y}$, on déduit donc des relations dans le triangle hyperbolique (QFP) que

$$\text{ÉTAPE 3.-: } \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \cosh QF \sin \alpha$$

En prenant les cosinus et sinus hyperboliques de l'expression $d_F + \delta = a$, on obtient les identités suivantes :

ÉTAPE 4.-

$$1^{\text{ier}} \text{ CAS : } \cosh a = \cosh QF \cosh Q \tilde{F} + \sinh QF \sinh Q \tilde{F}$$

$$2^{\text{e}} \text{ CAS : } e^a = e^{b_{\theta}(Q)} \cosh QF + e^{b_{\theta}(Q)} \sinh QF$$

$$3^{\text{e}} \text{ CAS : } \sinh a = \cosh QF \sinh Q \tilde{F} + \sinh QF \cosh Q \tilde{F}$$

et

ÉTAPE 5.-

$$1^{\text{ier}} \text{ CAS : } \sinh a = \cosh QF \sinh Q \tilde{F} + \sinh QF \cosh Q \tilde{F}$$

$$2^{\text{e}} \text{ CAS : } e^a = e^{b_{\theta}(Q)} \cosh QF + e^{b_{\theta}(Q)} \sinh QF$$

$$3^{\text{e}} \text{ CAS : } \cosh a = \cosh QF \cosh Q \tilde{F} + \sinh QF \sinh Q \tilde{F}$$

En appliquant la proposition 4.4.1 au polygône hyperbolique $(QF\tilde{F})$, $(QF\theta)$ ou $(QF'F')$, on obtient :

ÉTAPE 6.-

$$1^{\text{ier}} \text{ CAS : } \cosh c = \cosh QF \cosh Q \tilde{F} - \sinh QF \sinh Q \tilde{F} \cos(\pi - 2\alpha)$$

$$2^{\text{e}} \text{ CAS : } 1 = e^{b_{\theta}(Q)} \cosh QF - e^{b_{\theta}(Q)} \sinh QF \cos(\pi - 2\alpha)$$

$$3^{\text{e}} \text{ CAS : } \sinh c = \cosh QF \sinh Q \tilde{F} - \sinh QF \cosh Q \tilde{F} \cos(\pi - 2\alpha)$$

En faisant la demi-différence des identités 4 et 6, et en utilisant l'identité 1 on obtient :

ÉTAPE 7.-

$$1^{\text{ier}} \text{ CAS: } \frac{\cosh a - \cosh c}{2} = \sinh y \sinh \tilde{y}$$

$$2^{\text{e}} \text{ CAS: } \frac{e^a - 1}{2} = e^{\tilde{y}} \sinh y$$

$$3^{\text{e}} \text{ CAS: } \frac{\sinh a - \sinh c}{2} = \sinh y \cosh Q \tilde{F} \sin \alpha$$

En faisant la demi-somme des identités 4 et 6, et en utilisant l'identité 7 on obtient :

ÉTAPE 8.-

$$1^{\text{ier}} \text{ CAS: } \cosh Q F \cosh Q \tilde{F} = \frac{\cosh a + \cosh c}{2} - \frac{\cosh a - \cosh c}{2 \sin^2 \alpha} \cos^2 \alpha$$

$$2^{\text{e}} \text{ CAS: } e^{b_\theta(Q)} \cosh Q F = \frac{e^a + 1}{2} - \frac{e^a - 1}{2 \sin^2 \alpha} \cos^2 \alpha$$

$$3^{\text{e}} \text{ CAS: } \cosh Q F \sinh Q \tilde{F} = \frac{\sinh a + \sinh c}{2} - \frac{\sinh a - \sinh c}{2 \sin^2 \alpha} \cos^2 \alpha$$

En multipliant les identités 5 et 3 membre à membre, et en utilisant les identités 1, 2 et 7, on obtient :

ÉTAPE 9.-

$$1^{\text{ier}} \text{ CAS: } \sinh a \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \sinh^2 y \left(\frac{\cosh a - \cosh c}{2 \sin^2 \alpha} + \cosh Q F \cosh Q \tilde{F} \right) + \frac{\cosh a - \cosh c}{2}$$

$$2^{\text{e}} \text{ CAS: } e^a \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \sinh^2 y \left(\frac{e^a - 1}{2 \sin^2 \alpha} + e^{b_\theta(Q)} \cosh Q F \right) + \frac{e^a - 1}{2}$$

$$3^{\text{e}} \text{ CAS: } \cosh a \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \sinh^2 y \left(\frac{\sinh a - \sinh c}{2 \sin^2 \alpha} + \cosh Q F \sinh Q \tilde{F} \right) + \frac{\sinh a - \sinh c}{2}$$

Finalement, on obtient le résultat voulu en reportant l'identité 8 dans l'identité 9 :

ÉTAPE 10.-

$$1^{\text{ier}} \text{ CAS: } -\coth a \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\cosh a - \cosh c}{2 \sinh a}$$

$$2^{\text{e}} \text{ CAS: } -\sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{e^a - 1}{2e^a}$$

$$3^{\text{e}} \text{ CAS: } -\tanh a \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\sinh a - \sinh c}{2 \cosh a}$$

Ceci termine la preuve pour les trois cas envisagés. Les autres cas sont

- 4^e CAS: $\delta = -d_{\tilde{F}}$ avec $\tilde{F} \in N$;
- 5^e CAS: $\delta = -b_\nu$ avec $\nu \in \partial_\infty N$, quitte à modifier la valeur de a , on suppose de plus que $\delta(F) = 0$;
- 6^e CAS: $\delta = d_g$ où g est une géodésique orientée de N , et $d_g < 0$ le long de γ .

En suivant des étapes similaires à celles qui précèdent, on trouve

ÉTAPE 10'.-

$$4^{\text{e}} \text{ CAS : } -\coth a \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\cosh a - \cosh c}{2 \sinh a}$$

$$5^{\text{e}} \text{ CAS : } -\sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{e^{-a} - 1}{2e^{-a}}$$

$$6^{\text{e}} \text{ CAS : } -\tanh a \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\sinh a - \sinh c}{2 \cosh a}$$

La valeur de la courbure moyenne de la surface engendrée par la trajectoire de F se lit sur l'équation qu'on obtient. ■

On retrouve dans ce résultat la classique séparation des trois types de sous-variétés à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique.

Bibliographie

- [An] M.T. ANDERSON – *The compactification of a minimal submanifold in Euclidean space by the Gauss map*, Prépublication de l'I.H.E.S.
- [Ba] W. BALLMANN – *On spaces of nonpositive curvature*, Birkhäuser, 1995
- [B-C] J.L. BARBOSA, M. DO CARMO – *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Z. **185** (1984), 339-353.
- [B-C-E] J.L. BARBOSA, M. DO CARMO, J. ESCHENBURG – *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Math. Z. **197** (1988), 123-138.
- [B-B] P. BÉRARD, G. BESSON – *Number of bound states and estimates on some geometric invariants*, J. Funct. Analysis **94(2)** (1990), 375-396.
- [B-C-S1] P. BÉRARD, M. DO CARMO, W. SANTOS – *The index of constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space*, à paraître dans Math. Z.
- [B-C-S2] P. BÉRARD, M. DO CARMO, W. SANTOS – *Complete hypersurfaces with constant mean curvature and finite total curvature*, Prépublication.
- [Bu] P. BUSER – *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [dC] M. DO CARMO – *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1991
- [C-P] M. DO CARMO, C.K. PENG – *Stable complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 are planes*, Bull. A.M.S. **1** (1979), 685-709.
- [C-O] S. CHERN, R. OSSERMAN – *Complete minimal surfaces in Euclidean n -spaces*, J. Anal. Math. **19** (1967), 15-34.
- [C-S] M. DO CARMO, A.M. DA SILVEIRA – *Index and total curvature of surfaces with constant mean curvature*, Proc. Amer.Math. Soc. **110** (1990), 1009-1015.
- [De] C. DELAUNAY – *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math Pure et Appl. Série **1 6** (1841), 309-320.
- [FC] D. FISCHER-COLBRIE – *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifold*, Invent. Math. **82** (1985), 121-132.
- [FC-S] D. FISCHER-COLBRIE, R. SCHOEN – *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 199-211.

- [Go] J.M. GOMES – *Spherical surfaces with constant mean curvature in hyperbolic space*, Bol. Soc. Bras. Mat. **18(2)** (1987), 49-73.
- [H-S] D. HOFFMAN, J. SPRUCK – *Sobolev and isoperimetric inequalities for riemannian submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math **27** (1975), 715-727; erratum, Comm. Pure Appl. Math **28** (1975), 765-766.
- [Hs] W. Y. HSIANG – *On generalization of theorems of A.D. Alexandrov and C. Delaunay on hypersurfaces of constant mean curvature*, Duke Math. J. **49(3)** (1982), 485-496.
- [H-Y] W. Y. HSIANG, W. C. YU – *On generalization of theorem of Delaunay*, J. Diff. Geom. **16** (1981), 161-177.
- [K-N] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU – *Foundation of differential geometry I*, Interscience, New-York, 1963.
- [Li] E. LIEB – *The number of bound states of one-body Schrödinger operators and the Weyl problem*, Proc. Symp. Pure Math., vol 36, pp. 241-252, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980.
- [dO] G. DE OLIVEIRA FILHO – *Compactification of minimal submanifolds of hyperbolic space*, Comm. Analysis and Geom., **1** (1993), 1-29
- [Or] J. ORDÓÑEZ – *Superfícies helicoidais com curvatura constante no espaço de formas tridimensional*, Prépublication, PUC-Rio, (1995).
- [Os1] R. OSSERMAN – *The isoperimetric inequality*, Bulletin of the American Math. Soc. **84(6)** (1978), 1182-1238.
- [Os2] R. OSSERMAN – *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n* , Ann. Math. **80** (1964), 340-364.
- [R-E] H. ROSENBERG, R. SÁ EARP – *The geometry of properly embedded surfaces in \mathbb{R}^3 ; e.g. surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive*, Duke Math. J. **73(2)** (1994), 291-306.
- [R-S] M. REED, B. SIMON – *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, 1979 (vol. I à IV)
- [dS] A.M. DA SILVEIRA – *Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature*, Math. Annalen **277** (1987), 629-638.
- [St] I. STERLING – *A Generalization of a theorem of Delaunay to rotational W -hypersurfaces of σ_1 -type in H^{n+1} and S^{n+1}* , Pacific J. Math. **127(1)** (1987), 187-197.
- [Va] N. VAROPOULOS – *Isoperimetric inequalities and markov chains*, J. Funct. Analysis **63** (1985), 215-239.