Fonctions zêta des hauteurs des variétés toriques en caractéristique positive

David BOURQUI

Pour Pierry,
pour ses proches

Je voudrais remercier chaleureusement mon directeur de thèse pour la façon dont il a encadré mon travail durant ces quelques années. Sa disponibilité, ses conseils et ses encouragements ont sans nul doute constitué un ingrédient primordial de l'achèvement de cette thèse.

Je suis très reconnaissant envers les membres du jury pour leur participation. Un remerciement tout particulier s'adresse naturellement aux rapporteurs de ce travail. Plus généralement, je n'oublie pas tous ceux qui ont accepté de lire des versions plus ou moins achevées de cette thèse et de me faire part de leurs commentaires.

J'ai une pensée pour les nombreuses personnes qui m'ont "accompagné" pendant (voire avant) mon labeur : celles que j'ai côtoyées avec plaisir à l'Institut Fourier et plus généralement dans les "sphères mathématiques", ainsi que tou(te)s les ami(e)s, parfois (trop !) éloignés géographiquement, mais toujours "là". C'est d'ailleurs une grande joie de constater que l'intersection de ces deux catégories est loin d'être vide. La famille (au sens large !) était toujours présente et m'a apporté beaucoup de réconfort.

Et Florence, même pendant son escapade dyonisienne, était là bien sûr, voilà mon "deuxième ingrédient primordial", sachant qu'à mes yeux elle représente évidemment bien plus que ça !

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et préliminaires

1.1 Introduction

1.1.1 Position et origine du problème

Soit V une variété projective définie sur un corps global K, i.e. un corps de nombres ou le corps de fonctions d'une courbe projective, lisse et géométriquement intègre, définie sur un corps fini. On peut alors munir l'ensemble $V(K)$ des points rationnels de V de fonctions hauteurs, à valeurs dans l'ensemble des réels strictement positifs, et permettant de mesurer la «complexité» de ces points rationnels (nous reportons à la section 1.4 les rappels essentiels sur la notion de hauteur). Si la hauteur H est relative à un fibré en droites ample, pour tout réel B le nombre

$$n_{V,H}(B) = \#\left\{x \in V(K),\ H(x) \leqslant B\right\}$$

est fini. Si l'ensemble $V(K)$ est infini, la quantité $n_{V,H}(B)$ tend donc vers l'infini quand B tend vers l'infini. Une question naturelle est alors d'essayer de décrire le comportement asymptotique de la quantité $n_{V,H}(B)$, en d'autres termes le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée. On cherche notamment à relier cette description à la géométrie de la variété V. Pour avoir un espoir d'obtenir une telle interprétation géométrique, il est clair que l'ensemble $V(K)$ doit être Zariski dense. On pose plus généralement, pour A sous-ensemble localement fermé de V,

$$n_{A,H}(B) = \#\left\{x \in A(K),\ H(x) \leqslant B\right\}.$$

En effet, pour obtenir une interprétation pertinente, il va être souvent indispensable d'étudier non pas le comportement asymptotique de $n_{V,H}(B)$, mais celui de $n_{U,H}(B)$, où U est un ouvert de Zariski non vide de V «assez petit».

Le renouveau de l'intérêt pour l'étude du comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée trouve son origine dans deux articles ([FrMaTs] et [BaMa]) écrits par Manin et ses collaborateurs, où sont formulées plusieurs conjectures (ou plutôt, comme indiqué dans [BaMa], plusieurs questions) précises concernant la forme de ce comportement, en fonction d'invariants géométriques de la variété. On y trouve notamment la question suivante :

Question 1.1.1
Soit V une variété définie sur un corps de nombres K, projective, lisse et géométriquement intègre. On suppose V de Fano, c'est à dire de fibré anticanonique ample. On suppose en outre que l'ensemble $V(K)$ des points rationnels de V est Zariski dense. Soit H une hauteur relative au faisceau

anticanonique. Soit t le rang du groupe de Picard de V. Est-il vrai qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U vérifiant

$$n_{U,H}(B) \underset{B\to\infty}{\sim} C\,B\,\log(B)^{t-1} \tag{1.1.1.1}$$

où C est une constante strictement positive dépendant de H ?

La restriction à un ouvert U éventuellement strict de V est nécessaire en raison de la situtation suivante. Soit F un fermé de V, tel que la quantité $n_{V\setminus F,H}(B)$ est négligeable devant $n_{F,H}(B)$ quand B tend vers l'infini. L'exemple le plus simple d'un tel fermé est le diviseur exceptionnel du plan projectif éclaté en un point, avec H une hauteur relative au faisceau anticanonique. On dit qu'un tel fermé contient un fermé accumulateur pour la hauteur étudiée. Dans ce cas, le comportement asymptotique de $n_{V,H}(B)$ s'interprétera en termes de la restriction de H à F (voire à un fermé de F), et n'aura a priori aucune raison de refléter la géométrie de V. L'une des idées essentielles de Manin est que la géométrie de V devrait réapparaître si on se place sur le complémentaire des fermés accumulateurs. Dans cette optique, un raffinement de la question 1.1.1 serait :

Question 1.1.2
Soit V une variété de Fano telle que $V(K)$ est Zariski dense. Soit H une hauteur relative au faisceau anticanonique. Soit t le rang du groupe de Picard de V. Est-il vrai qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U_0 et une constante $C > 0$ vérifiant : pour tout ouvert non vide U contenu dans U_0, on a

$$n_{U,H}(B) \underset{B\to\infty}{\sim} C\,B\,\log(B)^{t-1} \quad ? \tag{1.1.1.2}$$

Ainsi la contribution de tout fermé strict d'un tel ouvert U_0 au comportement asymptotique de $n_{U_0,H}(B)$ sera négligeable : U_0 ne contient pas de fermés accumulateurs.

Les trois auteurs de l'article [FrMaTs] montrent que la formule (1.1.1.1) est vérifiée si V est une variété de drapeaux (avec $U = V$), compatible avec le produit de variétés et les prédictions de la méthode du cercle pour les intersections complètes. Si V est un espace projectif, la formule (1.1.1.1) avait par ailleurs été démontrée une vingtaine d'années auparavant par Schanuel dans [Sc], avec $U = V$. Dans [Pe1], Peyre montre que pour les variétés de drapeaux et certaines intersections complètes, la réponse à la question 1.1.2 est également positive, en prenant $U_0 = V$.

L'auteur de [Pe1] raffine également la formule conjecturale (1.1.1.1) en proposant une expression de la constante C, expression dépendant d'une part du choix de la hauteur H, d'autre part d'invariants géométriques et arithmétiques de la variété considérée. Il vérifie la validité de ses prédictions pour les variétés de drapeaux, certaines intersections complètes et certains cas particuliers de variétés toriques. On arrive donc à la question suivante :

Question 1.1.3
Soit V une variété de Fano définie sur K un corps de nombres telle que $V(K)$ est Zariski dense. Soit H une hauteur issue du faisceau anticanonique, et $C_{V,H}$ la constante associée définie par Peyre. Soit t le rang du groupe de Picard de V. Est-il vrai qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U vérifiant

$$n_{U,H}(B) \underset{B\to\infty}{\sim} C_{V,H}\, B\, \log(B)^{t-1} \quad ? \tag{1.1.1.3}$$

On peut bien sûr également considérer l'analogue correspondant de la question 1.1.2.

On peut également considérer une classe un peu plus large que les variétés de Fano. Une variété V projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres est dite presque de Fano si la classe du faisceau anticanonique est à l'intérieur du cône effectif, le groupe de Picard géométrique est sans torsion et les groupes de cohomologie $H^1(V, \mathcal{O}_V)$ et $H^2(V, \mathcal{O}_V)$ sont nuls. Une variété de Fano est presque de Fano. Le faisceau anticanonique d'une variété V presque de Fano n'est plus nécessairement ample, mais le fait que sa classe soit à l'intérieur du cône effectif assure l'existence d'un ouvert U non vide tel que, pour toute hauteur anticanonique H, l'ensemble $n_{U,H}(B)$ est fini pour tout B. On peut alors remplacer, dans les énoncés des questions ci-dessus, «variété de Fano» par «variété presque de Fano».

1.1.2 Quelques cas déjà traités

Le thème de l'étude du comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée s'est révélé extrêmement riche et ouvert car pour la vérification des prédictions de Manin pour des classes particulières de variétés, des techniques très diverses ont pu être employées. Les textes [Pe4] et [Pe5] en décrivent un certain nombre. On y trouvera les références de nombreux travaux sur le sujet.

La formule (1.1.1.3) est maintenant établie pour plusieurs classes de variétés de Fano ou presque de Fano : variétés de drapeaux ([FrMaTs], [Pe1]), certaines intersections complètes ([FrMaTs],[Pe1]), variétés toriques ([BaTs1], [BaTs3], [Sa]), compactifications équivariantes de groupes additifs ([CLTs1], [CLTs2], et [CLTs3])... Il faut toutefois signaler qu'un contre-exemple, exhibé par Batyrev et Tschinkel dans [BaTs2], a montré que la réponse à la question 1.1.1 était parfois négative.

Parmi les familles de variétés qui ont été traitées avec succès, le cas des variétés toriques est très intéressant car deux approches bien distinctes se sont révélées fructueuses, et toutes deux peuvent (ou du moins sont susceptibles de) se généraliser à des classes plus larges. Tout d'abord, Batyrev et Tschinkel ont démontré dans [BaTs1] et [BaTs3] la validité de la formule (1.1.1.3) pour les variétés toriques, l'ouvert U étant l'orbite ouverte du tore. Pour cela ils exploitent de manière essentielle l'action de groupe du tore sur la variété. Une application judicieuse de la formule de Poisson leur permet alors de trouver une représentation intégrale de la fonction zêta des hauteurs, qui peut s'évaluer par une utilisation répétée du théorème des résidus. Ces idées fournissent a priori une méthode générale d'attaque du problème pour toutes les variétés sur lesquelles agit un groupe algébrique avec une orbite ouverte. La conjecture de Manin a ainsi été ensuite démontrée pour les compactifications équivariantes de groupes additifs ([CLTs1], [CLTs2], et [CLTs3]).

Par la suite, Salberger a montré dans [Sa] comment l'usage de la notion de torseur universel permet de ramener le décompte des points de hauteur bornée sur une variété torique à un problème de dénombrement de points entiers dans un espace affine vérifiant certaines conditions de coprimalité, problème que l'on peut traiter par des techniques élémentaires. Sa méthode généralisait des démonstrations utilisées auparavant dans quelques cas particuliers ([Sc] pour les espaces projectifs et [Pe1] pour certains éclatements). Les asymptotiques obtenues ont été améliorées par de la Bretèche dans [dlBr1]. Comme toute variété de Fano admet des torseurs universels, cette méthode serait a priori susceptible d'être largement généralisée. Cependant son succès dans le cas des variétés toriques repose notamment sur la description particulièrement agréable qu'on a des torseurs universels au dessus d'une variété torique. En dehors des variétés toriques, la méthode a pu être utilisée pour traiter le cas du plan projectif éclaté en quatre points en position générale ([dlBr2]).

En restant dans le cadre des variétés toriques, et du strict point de vue des résultats obtenus, l'avantage reste pour le moment à la méthode de Batyrev et Tschinkel, qui permet de traiter les variétés toriques lisses non nécessairement déployées définies sur un corps de nombres quelconque. À la connaissance de l'auteur de ces lignes, la méthode de décompte dans les torseurs universels a jusque là permis, en caractéristique zéro, de traiter le cas des variétés toriques déployées définies sur le corps des rationnels, avec l'hypothèse supplémentaire que le faisceau anticanonique est globalement engendré ([Sa, Theorem 11.49]).

1.1.3 Le cas de la caractéristique non nulle

Les travaux évoqués jusqu'ici se placent dans le cadre où le corps de base est un corps de nombres. Le cas d'un corps global de caractéristique non nulle (évoqué dans [BaMa, §3.1.3]) reste apparemment très peu étudié. Tout d'abord, il est nécessaire dans ce contexte de modifier un peu la question 1.1.1. En effet, les hauteurs utilisées en caractéristique non nulle vont typiquement prendre leurs valeurs dans l'ensemble $q^{\mathbf{Z}}$ et à cause de l'augmentation exponentielle des «trous» entre les valeurs possibles de la hauteur, une formule telle que (1.1.1.1) ne sera certainement pas vérifiée.

Mais par ailleurs on sait que le comportement asymptotique du nombre $n_{V,H}(B)$ est intimement lié, par des théorèmes taubériens, aux propriétés de la série

$$\zeta_{V,H}(s) = \sum_{x \in V(K)} H(x)^{-s}$$

(où s désigne un nombre complexe), notamment à ses propriétés de convergence et de prolongement méromorphe.

Dans le cas où le corps de base K est de caractéristique non nulle, un analogue possible de la question 1.1.3 est alors le suivant :

Question 1.1.4
Soit V une variété presque de Fano définie sur un corps global K de caractéristique non nulle tel que l'ensemble $V(K)$ des points rationnels de V soit Zariski dense. Soit t le rang du groupe de Picard de V. Soit H une hauteur issue du faisceau anticanonique, et $C_{V,H}$ la constante associée définie par Peyre. Est-il vrai qu'il existe un ouvert non vide U tel que la série

$$\zeta_{U,H}(s) = \sum_{x \in U(K)} H(x)^{-s}$$

converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et, pour un certain $\varepsilon > 0$, se prolonge en une fonction méromorphe sur l'ouvert $\{\Re(s) > 1 - \varepsilon\}$ qui a un pôle en $s = 1$ d'ordre t, et telle que

$$\lim_{s \to 1} (s-1)^t \zeta_{U,H}(s) = C_{V,H} \quad ?$$

La constante $C_{V,H}$ de l'énoncé est définie par Peyre dans [Pe2] (cf. section 1.4.1 pour un rappel de cette définition), c'est un analogue en caractéristique non nulle de la constante qu'il avait introduite auparavant en caractéristique zéro. On peut évidemment à nouveau raffiner en demandant que la formule soit vérifiée pour tout ouvert non vide U contenu dans un certain ouvert U_0. Notons que, au vu notamment de la situation en caractéristique zéro, il est probablement peu raisonnable d'espérer une réponse positive à la question ci-dessus en toute généralité.

Dans ce cadre, le cas des espaces projectifs est traité par Wan dans [Wa], montrant ainsi une formule figurant déjà dans [Se2]. Le cas des variétés de drapeaux, qui englobe le précédent, a été traité indépendamment par Peyre dans [Pe2] et Lai et Yeung dans [LaYe] (sans interprétation de la constante dans ce dernier cas). Le but de cette thèse est d'étudier le cas des variétés toriques.

1.2 Résultats obtenus dans cette thèse

Dans le chapitre 2, nous considérons une surface de Hirzebruch V définie sur un corps global K de caractéristique non nulle. Nous y construisons une hauteur anticanonique H, et nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.2.1
Pour cette hauteur H, la réponse à la question 1.1.4 est positive, en prenant pour ouvert U le complémentaire de la courbe rationnelle de carré négatif. On obtient en outre que la série

$$\zeta_{U,H}(s) = \sum_{x \in U(K)} H(x)^{-s}$$

admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ qui est une fonction rationnelle en q^{-s}, où q est le cardinal du corps des constantes de K.

Dans le chapitre 3, nous étendons le résultat ainsi : nous considérons V une variété torique projective, lisse et déployée définie sur un corps global de caractéristique non nulle. Nous y construisons une hauteur anticanonique H (qui est simplement la translation en caractéristique non nulle de celle utilisée par Batyrev et Tschinkel dans le cas des corps de nombres). Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.2.2
Pour cette hauteur H, la réponse à la question 1.1.4 est positive, en prenant pour ouvert U l'orbite ouverte de V.

La méthode utilisée dans ces deux chapitres est différente de celle utilisée par Batyrev et Tschinkel dans [BaTs1] et [BaTs3], et plus élémentaire. Elle s'inspire fortement de celle que Salberger a utilisée dans [Sa] (voir aussi [Pe3] et [dlBr1]) pour redémontrer le résultat de Batyrev et Tschinkel dans le cas où la variété torique est déployée et le corps de base est le corps des rationnels. Comme dans le cas des corps de nombres, la généralisation de cette approche au cas non déployé semble poser de grandes difficultés, ne serait-ce que d'ordre technique.

Le but du chapitre 4 est d'établir un analogue motivique du résultat du chapitre 2 (théorème 4.3.2), et, sous une hypothèse non démontrée (hypothèse 4.2.1), d'étendre ce résultat à une variété torique déployée quelconque. La définition de la fonction d'inversion de Möbius motivique, et le lemme de paramétrisation 4.3.1, analogues motiviques respectivement de la formule d'inversion de Möbius de la proposition 3.4.3 et du lemme de paramétrisation 3.4.1 sont valables pour une variété torique déployée quelconque (ce qui nous permet quand même d'obtenir un résultat partiel dans ce cas là), mais l'hypothèse 4.2.1, concernant le comportement de la fonction d'inversion de Möbius motivique, n'a pu être démontrée que dans le cas des surfaces de Hirzerbruch et des espaces projectifs. Soulignons également que nous considérons uniquement le cas du corps de fonctions d'une courbe rationnelle (cf. le chapitre lui-même pour plus de détails).

Dans le chapitre 5, nous considérons une variété torique V projective et lisse définie sur un corps global de caractéristique non nulle, compactification d'un tore algébrique T non nécessairement déployé. Nous adaptons la méthode de Batyrev et Tschinkel au cas fonctionnel. La section 5.1 détaille les étapes de cette adaptation. Là encore, nous utilisons la même hauteur H que Batyrev et Tschinkel. Le résultat auquel nous aboutissons est le suivant.

Théorème 1.2.3
Soit $U = T$ l'orbite ouverte de V et t le rang du groupe de Picard de V. La série $\zeta_{U,H}(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et, pour un certain $\varepsilon > 0$, se prolonge en une fonction méromorphe sur l'ouvert $\{\Re(s) > 1 - \varepsilon\}$ qui a un pôle en $s = 1$ d'ordre t. On a

$$\lim_{s \to 1} (s-1)^t \zeta_{U,H}(s) = \varsigma(T)\, C_{V,H}.$$

Le terme $\varsigma(T)$ est un invariant du tore algébrique T, spécifique à la caractéristique non nulle, défini au début de la section 5.2.7. On voit donc que la réponse à la question 1.1.4 est positive si $\varsigma(T) = 1$. L'égalité $\varsigma(T) = 1$ n'a pu cependant être démontrée (proposition 5.2.16) que dans des cas particuliers (tore anisotrope, tore quasi-déployé, tore déployé par une extension ne contenant pas d'extension du corps des constantes, déployé par une extension du corps des constantes, et plus généralement par une extension métacyclique). On se reportera à la section 5.2.7 pour plus de détails. Pour ces cas particuliers, la réponse à la question 1.1.4 est donc positive, mais dans le cas général la question reste ouverte.

1.3 Rappels sur les corps globaux de caractéristique non nulle

Cette section contient des définitions et résultats extrêmement classiques concernant les corps globaux de caractéristique non nulle. Nous en profitons pour fixer quelques notations qui seront utilisées dans l'ensemble du texte de cette thèse. On désigne par k un corps fini de cardinal q. Dans toute la suite, *à l'exception du chapitre 4*, on appellera *corps de fonctions* le corps de fonctions d'une courbe $\mathcal{C}$ projective, lisse et géométriquement intègre définie sur un corps fini contenant k. Notons que l'introduction de ce sous-corps absolu ne sert qu'au chapitre 5, où entrent en jeu des extensions du corps de fonctions de base. Pour un tel corps de fonctions K on notera q_K le cardinal du corps des constantes, et d_K son degré absolu, de sorte que $q_K = q^{d_K}$. Le corps des constantes de K est donc le corps fini $\mathbf{F}_{q_K}$ à q_K éléments. Un tel corps de fonctions n'est rien d'autre qu'une extension finie séparable du corps des fractions rationnelles en une indéterminée $\mathbf{F}_{q_K}(T)$, avec $\mathbf{F}_{q_K}$ algébriquement clos dans K. On notera $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et K^{sep} la clôture séparable de K dans $\overline{K}$.

Soit $\mathcal{P}_K$ l'ensemble des places de K, de sorte que $\mathcal{P}_K$ s'identifie à l'ensemble des points fermés de la courbe $\mathcal{C}$. On identifiera un élément v de $\mathcal{P}_K$ à la valuation normalisée associée, i.e. l'élément de v dont le groupe de valeurs est $\mathbf{Z}$. Pour $v \in \mathcal{P}_K$, on note K_v le complété de K en v,

$$\mathcal{O}_v = \{x \in K_v,\ v(x) \geqslant 0\}$$

l'anneau de valuation de v,

$$\mathcal{M}_v = \{x \in K_v,\ v(x) > 0\}$$

l'idéal maximal de v, et

$$k_v = \mathcal{O}_v / \mathcal{M}_v$$

le corps résiduel de v. On notera aussi

$$f_v = [k_v : \mathbf{F}_{q_K}]$$

le degré résiduel. Le cardinal de k_v, égal à $q_K^{f_v}$, sera aussi noté q_v . Pour $x \in K$, on note

$$|x|_v = q_v^{-v(x)}.$$

Alors pour tout $x \in K^*$ on a $|x|_v = 1$ pour tout $v \in \mathcal{P}_K$ sauf un nombre fini et la *formule du produit*

$$\prod_{v \in \mathcal{P}_K} |x|_v = 1.$$

Soit $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$ le groupe des diviseurs de $\mathcal{C}$, en d'autres termes le groupe abélien libre de base $\mathcal{P}_K$. Si $D = \sum_{v\in\mathcal{P}_K} n_v\, v$ est un élément de $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$, on définit, pour $v \in \mathcal{P}_K$, $v(D) = n_v$. Le support de D est

$$\mathrm{Supp}(D) = \{v \in \mathcal{P}_K,\ v(D) \neq 0\}.$$

On note

$$\mathrm{Div}^+(\mathcal{C}) = \{\, D \in \mathrm{Div}(\mathcal{C}),\ \forall\, v \in \mathcal{P}_K,\ \ v(D) \geqslant 0\}$$

l'ensemble des diviseurs effectifs de $\mathcal{C}$. On écrira souvent $D \geqslant 0$ pour $D \in \mathrm{Div}^+(\mathcal{C})$. En fait, on a une relation d'ordre partiel sur $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$ définie par $D \leqslant D'$ si et seulement si on a $v(D) \leqslant v(D')$ pour tout v de $\mathcal{P}_K$. Si $D_1, \ldots, D_n$ sont des diviseurs on a donc

$$\mathrm{Sup}(D_1, \ldots, D_n) = \sum_{v\in\mathcal{P}_K} \mathrm{Sup}(v(D_1), \ldots, v(D_n))\ v$$

Si $x \in K^*$, le diviseur associé à x est $(x) = (x)_0 - (x)_\infty$ où

$$(x)_0 = \sum_{v\in\mathcal{P}_K,\, v(x)>0} v(x)\, v$$

$$(x)_\infty = -\sum_{v\in\mathcal{P}_K,\, v(x)<0} v(x)\, v$$

autrement dit $(x)_0$ est le diviseur des zéros de la fonction rationnelle x (avec multiplicités) et $(x)_\infty$ celui des pôles (avec multiplicités). Par commodité on posera aussi $(0) = (0)_0 = (0)_\infty = 0$.

Deux diviseurs D et D' sont dits *linéairement équivalents* s'il existe $x \in K^*$ vérifiant

$$D - D' = (x).$$

On notera $D \sim D'$ pour D et D' linéairement équivalents. Le groupe des classes de diviseurs est le quotient de $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$ par le sous-groupe des diviseurs de la forme (x), ou, ce qui revient au même, est le groupe $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$ modulo l'équivalence linéaire. On pose, pour $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{C})$,

$$\deg(D) = \sum_{v\in\mathcal{P}_K} f_v\, v(D)$$

ce qui définit un homomorphisme $\mathrm{Div}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Z}$ appelé degré. On a, pour tout $x \in K^*$, $\deg((x)) = 0$, de sorte que le morphisme ci-dessus se factorise à travers le groupe des classes de diviseurs. On note h le nombre de classes de diviseurs de degré zéro. Ce nombre est fini d'après [We1, IV§ 4,Thm 7].

Le genre de $\mathcal{C}$ sera noté $g_{\mathcal{C}}$ ou g_K, voire g si le corps de fonctions est clairement indiqué par le contexte.

Pour tout $D \in \operatorname{Div}(\mathcal{C})$ on note $\ell(D)$ la dimension (finie) du $\mathbf{F}_{q_K}$-espace vectoriel

$$H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) = \{x \in K^*,\, (x) + D \geqslant 0\} \cup \{0\}.$$

En particulier si $\deg(D) < 0$ on a $\ell(D) = 0$. On dispose alors du *théorème de Riemann-Roch* ([We1, VI, Thm 2]) : si on note $\mathcal{K}$ un diviseur canonique (de sorte que le degré de $\mathcal{K}$ est $2g-2$), alors pour tout diviseur D on a

$$\ell(D) - \ell(\mathcal{K} - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

On a donc $\ell(D) = \deg(D)+1-g$ si $\deg(D) > 2g-2$. Notons encore que si on a $D \geqslant 0$ alors $\{x \in K^*,\, (x)+D \geqslant 0\} \cup \{0\}$ n'est autre que $\{x \in K,\, (x)_\infty \leqslant D\}$.

Pour tout diviseur D nous notons $|D|$ le système linéaire complet associé, soit

$$|D| = \{E \geqslant 0,\, E \sim D\}$$

de sorte qu'on a

$$\#|D| = \frac{q_K^{\ell(D)} - 1}{q_K - 1}.$$

La fonction zêta de Dedekind de $\mathcal{C}$ (ou, ce qui revient au même, de K), notée $\zeta_{\mathcal{C}}$, est définie de la manière suivante. On pose

$$Z_{\mathcal{C}}(T) = \sum_{D \geqslant 0} T^{\deg(D)} = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} \left(1 - T^{f_v}\right)^{-1} \quad \in \mathbf{Z}[[T]]$$

et $\zeta_{\mathcal{C}}(s) = Z_{\mathcal{C}}(q_K^{-s})$. On dispose ([We1, VII,§ 6]) des résultats suivants sur le comportement analytique de $\zeta_{\mathcal{C}}$: la série définissant $\zeta_{\mathcal{C}}(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier, avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu $\frac{h\, q_K^{1-g}}{(q_K - 1)\ln(q_K)}$, et sans zéro pour $\Re(s) \neq \frac{1}{2}$. De plus $Z_{\mathcal{C}}(T)$ est une fraction rationnelle en T, plus précisément on a

$$\mathbf{Z}_{\mathcal{C}}(T) = \frac{P(T)}{(1-T)(1-q_K T)}$$

où P est un polynôme à coefficients entiers de degré $2\,g$ (cf. [We1, VII§ 6,Thm 4]).

1.4 Hauteurs d'Arakelov, mesure de Tamagawa et constante de Peyre

Dans cette section, nous rappelons d'abord la construction des hauteurs d'Arakelov sur une variété projective à partir de métriques adéliques sur les fibrés en droites, et leurs propriétés élémentaires. Une référence détaillée pour ce sujet est [Pe3, chapitre 2], auquel on pourra se référer pour plus de précisions. Suivant Peyre ([Pe2]), nous expliquons ensuite comment une métrique adélique sur le faisceau anticanonique d'une variété projective lisse V induit une mesure sur l'espace adélique associé à V, à partir de laquelle on peut définir la constante $C_{V,H}$ apparaissant dans la question 1.1.4. Nous nous bornerons au cas d'un corps global K de caractéristique positive, les constructions analogues existent bien sûr si K est un corps de nombres.

1.4.1 Hauteurs d'Arakelov

Sur l'ensemble $\mathbf{P}^n(K)$ des points K-rationnels de l'espace projectif de dimension n on définit une hauteur H_n par

$$H_n(x) = H_n(x_0 : \ldots : x_n) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} \operatorname{Sup}_i \left(|x_i|_v\right).$$

La formule du produit montre que cette définition ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes pour $x \in \mathbf{P}^n(K)$. Cette hauteur possède une interprétation géométrique simple. Tout élément x de $\mathbf{P}^n(K)$ correspond à un $\mathbf{F}_{q_K}$-morphisme

$$\tilde{x} \,:\, \mathcal{C} \to \mathbf{P}^n.$$

On a alors

$$H_n(x) = q_K^{\deg(\tilde{x})} = q_K^{\deg(\tilde{x}^*(\mathcal{O}(1)))}.$$

Pour démontrer cette formule, on peut supposer $x_0 \neq 0$. Soit H_0 l'hyperplan de $\mathbf{P}^n$ défini par l'annulation de la première coordonnée. Soit $v \in \mathcal{P}_K$ et π_v une uniformisante de v. En multipliant les coordonnées homogènes $(x_0 : \ldots : x_n)$ par $\pi_v^{-\operatorname{Inf}_{i,\, x_i \neq 0} v(x_i)}$ on obtient des coordonnées $(x_i^{'})$ telles que $|x_i^{'}|_v \leqslant 1$ pour tout i et $|x_i^{'}|_v = 1$ pour au moins un i, ce qui définit un morphisme de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v)$ vers un ouvert affine standard de $\mathbf{P}^n$, qui est aussi la restriction à $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v)$ de $\tilde{x}$. On en déduit $v\left(\tilde{x}^*(H_0)\right) = v(x_0^{'})$. Finalement

$$\deg\left(\tilde{x}^*(H_0)\right) = \sum_{v \in \mathcal{P}_K} f_v \left(v(x_0) - \operatorname*{Inf}_{i,\, x_i \neq 0} v(x_i) \right).$$

Par la formule du produit,

$$\sum_{v \in \mathcal{P}_K} f_v \, v(x_0) = 0,$$

d'où le résultat.

Soit alors V une variété projective définie sur K. Soit L un fibré en droites sans point-base sur V et $\phi_L : V \to \mathbf{P}^n_K$ un morphisme déduit de L (correspondant au choix d'un ensemble fini de sections globales de L engendrant L), on définit une hauteur H_L sur $V(K)$ comme étant la composée $H_n \circ \phi_L$. Naturellement, cette hauteur dépend du choix du morphisme ϕ_L.

Une construction plus générale des hauteurs, pour un fibré en droites L quelconque, et englobant la construction précédente, utilise la notion de métrique adélique, que nous rappelons maintenant. Soit V une variété projective, lisse et géométriquement intègre définie sur K, et soit L un fibré en droites sur V. Si v est une place de K, une *métrique v-adique* sur L est la donnée, pour tout point K_v-rationnel $x : \mathrm{Spec}(K_v) \to V$, d'une norme v-adique $||\,.\,||_{v,x}$ sur $L(x) = x^*L$, telle que pour tout ouvert de Zariski U de V et toute section s de L sur U, l'application

$$x \mapsto ||s(x)||_{v,x}$$

est continue sur $U(K_v)$ pour la topologie v-adique. La donnée d'un modèle projectif $\mathcal{V}$ de V sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ et d'un modèle $\mathcal{L}$ de L sur $\mathcal{V}$ définit de manière naturelle une telle métrique.

Une *métrique adélique* sur L est alors la donnée d'une famille $(||\,.\,||_v)_{v\in\mathcal{P}_K}$ de métriques v-adiques sur L vérifiant la condition suivante : il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{C}$, un modèle projectif $\mathcal{V}$ de V sur $\mathcal{U}$, et un modèle $\mathcal{L}$ de L sur $\mathcal{V}$, tels que pour presque tout v de $\mathcal{P}_K$ la métrique $||\,.\,||$ est définie par le couple $(\mathcal{V}\times_{\mathcal{U}}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v), \mathcal{L}\times_{\mathcal{U}}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v))$. Une *hauteur d'Arakelov* sur V est un couple $(L, (||\,.\,||_v))$ où L est un fibré en droites sur V et $(||\,.\,||_v)$ une métrique adélique sur L. Deux hauteurs d'Arakelov $(L_1, (||\,.\,||^1_v))$ et $(L_2, (||\,.\,||^2_v))$ sur V sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme ϕ de L_1 sur L_2 tel que pour tout v, $||\,.\,||^1_v$ est le pull-back de $||\,.\,||^2_v$ par ϕ. La *fonction hauteur* associée est l'application qui à $x \in V(K)$ associe

$$H_L(x) = \prod_{v\in\mathcal{P}_K} ||s(x)||^{-1}_{v,x}$$

où s est une section locale de L non nulle en x, la formule du produit montrant que cette définition ne dépend pas du choix d'une telle section s.

Les hauteurs d'Arakelov vérifient les propriétés suivantes.

Propriétés 1.4.1

(i) Si H_L et H'_L sont deux fonctions hauteurs issues de deux métriques adéliques différentes sur le même fibré L, il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telle que

$$\forall x \in V(K),\ C_1 < H_L(x)/H'_L(x) < C_2.$$

(ii) L'ensemble des classes d'isomorphisme de hauteurs d'Arakelov sur V forme un groupe pour le produit tensoriel.

(iii) La hauteur H_n définie ci-dessus sur $\mathbf{P}^n(K)$ est une fonction hauteur associée à une hauteur d'Arakelov sur $\mathbf{P}^n_K$. Le fibré correspondant est le fibré $\mathcal{O}(1)$ et la métrique adélique correspondante est issue des modèles canoniques de $\mathbf{P}^n$ et $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathcal{C}$.

(iv) Si L est un fibré en droites sans point-base et ϕ_L un morphisme de V vers $\mathbf{P}^n$ déduit de L, la fonction $H_n \circ \phi_L$ est une fonction hauteur associée à une hauteur d'Arakelov sur V.

(v) Plus généralement, si $(L, (||\,.\,||_v))$ est une hauteur d'Arakelov sur V et $f\,:\,W \to V$ est un morphisme de variétés algébriques, $(f^*L, (f^*||\,.\,||_v))$ est une hauteur d'Arakelov sur W et les fonctions hauteurs correspondantes vérifient $H_{f^*L} = H_L \circ f$.

(vi) Si $(L, (||\,.\,||_v))$ est une hauteur d'Arakelov sur V, avec L un fibré ample, l'ensemble

$$\{x \in V(K),\ H_L(x) \leqslant B\}$$

est fini pour tout B.

(vii) Si $(L, (||\,.\,||_v))$ est une hauteur d'Arakelov sur V, et que L a sa classe à l'intérieur du cône effectif de V, il existe un ouvert de Zariski non vide U de V tel que l'ensemble

$$\{x \in U(K),\ H_L(x) \leqslant B\}$$

est fini pour tout B.

1.4.2 Mesure de Tamagawa

Nous expliquons à présent comment une métrique adélique sur le faisceau anticanonique induit une mesure sur l'espace adélique associé à V. Nous renvoyons à [Pe2, section 2] pour plus de détails. Soit donc V une variété algébrique projective et lisse de dimension d définie sur K, et $(||.||_v)_{v \in \mathcal{P}_K}$ une métrique sur le faisceau anticanonique. Pour $v \in \mathcal{P}_K$, on définit localement une mesure sur $V(K_v)$ de la manière suivante : soient $x \in V(K_v)$ et U un ouvert de Zariski de V contenant x tel qu'il existe un K-morphisme étale

$$f\,:\,U \longrightarrow \mathbf{A}^d_K.$$

Ce morphisme induit pour un ouvert analytique W de $V(K_v)$ contenant x un isomorphisme analytique

$$f\,:\,W \xrightarrow{\sim} f(W) \subset K_v^d.$$

Sur K_v^d on dispose d'une mesure naturelle $dx_1 \dots dx_d$ (normalisée par les relations $\int_{\mathcal{O}_v} dx_i = 1$) et d'une d-dérivation naturelle $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_d}$. On pose alors

$$\omega_{W,v} = \left(f^{-1}\right)_* \left(\left|\left| f^* \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_d} \right) (f^{-1}(x)) \right|\right|_v dx_1 \dots dx_d \right).$$

La formule du changement de variables montre que les mesures locales $\omega_{W,v}$ se recollent en une mesure globale $\omega_{V,v}$ sur $V(K_v)$.

Supposons qu'il existe un modèle projectif et lisse $\mathcal{V}$ de V_{K_v} sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$, tel que la métrique $||\,.\,||_v$ soit issue du couple $\left(\mathcal{V}, \Omega^{-d}_{\mathcal{V}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)}\right)$. Dans ces conditions on a d'après [Sa, Cor 2.15]

$$\omega_{V,v}(V(K_v)) = \frac{\#\,\mathcal{V}(k_v)}{q_v^{\dim(V)}}. \qquad (1.4.2.1)$$

Nous supposons à présent que la variété V vérifie les hypothèses énoncées dans [Pe2, 2.1], que nous rappelons brièvement. On note

$$V^{\mathrm{sep}} = V \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(K^{\mathrm{sep}})$$

et

$$\overline{V} = V \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(\overline{K}).$$

On demande alors que V vérifie les conditions suivantes :

-la classe du faisceau anticanonique de V appartient à l'intérieur du cône effectif,

-le cône effectif est polyédral rationnel, i.e. engendré par un nombre fini de classes de diviseurs,

-les groupes de cohomologie $H^1(V, \mathcal{O}_V)$ et $H^2(V, \mathcal{O}_V)$ sont nuls,

-le groupe $\mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}})$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini et coïncide avec $\mathrm{Pic}(\overline{V})$,

plus une cinquième condition technique servant notamment à assurer la convergence du produit définissant la mesure de Tamagawa ci-dessous. Toutes ces hypothèses sont vérifiées en particulier pour les variétés toriques. Pour de telles variétés, on peut définir la mesure de Tamagawa de la façon suivante.

Soit $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de K^{sep}/K. Le groupe $\mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}})$ est un $\mathcal{G}$-module libre de rang fini, et l'action continue de $\mathcal{G}$ sur $\mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}})$ fournit une représentation

$$\rho \,:\, \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}})).$$

Soit v une place non ramifiée dans ρ (i.e. telle que les groupes d'inerties au-dessus de v s'envoient par ρ sur Id), soit Fr_v un frobenius local, on pose pour

s tel que $\Re(s) > 0$

$$L_v(s, \mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}})) = \frac{1}{\det(1 - \rho(\mathrm{Fr}_v)\, q_v^{-s})}.$$

ce qui est licite car pour tout autre choix $\mathrm{Fr}_v^{'}$ de Frobenius local, $\rho(\mathrm{Fr}_v)$ et $\rho(\mathrm{Fr}_v^{'})$ seront conjugués dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}}))$.

Soit S un sous-ensemble fini de $\mathcal{P}_K$ contenant toutes les places ramifiées. On définit alors la fonction

$$L_S(s, \mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}})) = \prod_{v \notin S} L_v(s, \mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}})).$$

Ce produit eulérien converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle d'ordre $t = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}}))$ en $s = 1$. On pose

$$l_S(V) = \lim_{s \to 1} (s-1)^t L_S(s, \mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}})).$$

La mesure de Tamagawa sur l'espace adélique $V(\mathbf{A}_K)$ est donnée par la formule

$$\omega_V = q_K^{(1-g_K)\,\dim(V)}\, l_S(V) \prod_{v \in S} \omega_{V,v} \prod_{v \notin S} \left(L_v(1, \mathrm{Pic}(V^{\mathrm{sep}}))^{-1}\, \omega_{V,v} \right),$$

il est aisé de voir qu'elle ne dépend pas du choix de S. Dans le cas d'une variété projective lisse quelconque (vérifiant les hypothèses de [Pe2, 2.1]), la convergence de cette mesure est assurée par les conjectures de Weil démontrées par Deligne. Dans le cas où V est une variété torique, qui est le cas qui nous intéresse dans cette thèse, on peut en fait, comme l'ont remarqué Batyrev et Tschinkel, utiliser un argument plus élémentaire. On dispose en effet d'une formule explicite du nombre de points dans les réductions modulo v de V ([BaTs1, Proposition 2.2.4]), ce qui permet de montrer directement la convergence.

1.4.3 La constante $C_{V,H}$

Nous sommes à présent en mesure de définir la constante $C_{V,H}$ apparaissant dans la question 1.1.4. Soit H une hauteur issue du faisceau anticanonique de V, définie à l'aide d'une métrique adélique. On définit alors, suivant Peyre, trois constantes à partir de ces données.

L'invariant $\alpha^*(V)$ est défini comme

$$\alpha^*(V) = \chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(\omega_V^{-1})$$

où $C_{\text{eff}}(V)$ est le cône effectif de V et $\chi_{C_{\text{eff}}(V)}$ est défini pour tout élément s de l'intérieur du cône effectif par

$$\chi_{C_{\text{eff}}(V)}(s) = \int_{C_{\text{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle s,y\rangle} dy$$

avec

$$C_{\text{eff}}(V)^\vee = \{\, y \in (\operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R})^\vee,\ \forall\, x \in C_{\text{eff}}(V),\ \langle y\,,\, x\rangle \geqslant 0 \,\},$$

la mesure de Lebesgue sur $(\operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R})^\vee$ étant normalisée de sorte que le réseau $\operatorname{Pic}(V)^\vee$ soit de covolume 1.

L'invariant $\beta(V)$ est défini comme

$$\beta(V) = \#\, H^1(K, \operatorname{Pic}(V^{\,\text{sep}})).$$

Notons que les constantes $\alpha^*(V)$ et $\beta(V)$ sont rationnelles (rappelons pour $\alpha^*(V)$ que le cône effectif est supposé polyédral rationnel) et indépendantes du choix de la hauteur anticanonique.

Il n'en est pas de même pour $\tau_H(V)$, qui vaut par définition

$$\tau_H\,(V) = \omega_V\left(\overline{V(K)}\right),$$

en d'autre termes $\tau_H\,(V)$ est le volume pour la mesure ω_V de l'adhérence des points rationnels de V dans l'espace adélique $V(\mathbf{A}_K)$.

La constante $C_{V,H}$ est alors égale par définition à

$$C_{V,H} = \alpha^*(V)\,\beta(V)\,\tau_H\,(V)\,.$$

La question 1.1.4 peut donc se reformuler de la façon suivante

Question 1.4.2
Est-il vrai qu'il existe un ouvert non vide U de V tel que la série définissant $\zeta_{H,U}(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et, pour un certain $\varepsilon > 0$, se prolonge sur un domaine du type $\Re(s) > 1-\varepsilon$ en une fonction méromorphe qui a un pôle d'ordre le rang de $\operatorname{Pic}(V)$ *en $s = 1$, et vérifie*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{\,\text{rg}(\operatorname{Pic}(V))}\zeta_{H,U}(s) \;=\; \alpha^*(V)\,\beta(V)\,\tau_H(V) \quad ?$$

Dans toute la suite de ce texte nous adopterons la définition suivante : si f est une fonction méromorphe au voisinage d'un point s_0 de $\mathbf{C}$, et possède un pôle d'ordre n en s_0, nous appellerons *terme principal* du pôle en question, ou *terme principal de f en s_0*, le nombre

$$\lim_{s\to s_0}(s-s_0)^n\, f(s).$$

Chapitre 2

Un cas particulier simple : les surfaces de Hirzebruch

Ce chapitre est une version légèrement modifiée de l'article [Bo1].

Dans tout ce chapitre, nous fixons un corps de fonctions K, et utilisons les notations associées telles que définies dans la section 1.3. Nous supposerons, ce qui n'est bien sûr nullement restrictif, que le corps des constantes de K est k, et est donc de cardinal q. Le but de ce chapitre est de montrer que la réponse à la question 1.4.2 est positive pour les surfaces de Hirzebruch définies sur K, pour un certain choix d'une hauteur anticanonique, et en prenant pour ouvert U le complémentaire de la courbe rationnelle de carré négatif. Les surfaces de Hirzebruch étant des cas particuliers de variétés toriques déployées, un tel résultat est englobé par celui du chapitre suivant. Il y a cependant plusieurs raisons pour lesquelles il nous a semblé intéressant de le faire figurer ici.

Tout d'abord, la démonstration utilisée est basée sur les mêmes idées que celle du cas général : paramétrisation des points rationnels à l'aide de diviseurs effectifs, utilisation d'une formule d'inversion à la Möbius et du théorème de Riemann-Roch. Cependant le degré technique de la démonstration pour les surfaces de Hirzebruch est considérablement moins élevé (même dans le cas où le genre de K est non nul) que celui de la démonstration pour une variété torique déployée quelconque. Ainsi ce chapitre nous semble un bon préliminaire à l'appréhension de la démonstration dans le cas général, où les aspects techniques tendent à masquer les idées somme toute relativement simples utilisées.

Ensuite, on obtient un résultat de prolongement méromorphe plus fort que pour une variété torique déployée quelconque. On obtient en fait que la fonction zêta des hauteurs est une fonction rationnelle en q^{-s}, chose non obtenue pour une variété torique déployée générale, et sans doute non vérifiée, déjà pour le cas du plan projectif éclaté en deux points.

Enfin, l'étude ne se limite pas ici aux points rationnels de l'orbite ouverte (on notera d'ailleurs qu'à aucun moment on n'utilise la structure de variété torique des surfaces de Hirzebruch). On peut d'ailleurs identifier la courbe rationnelle de carré négatif comme sous-variété accumulatrice pour la hauteur considérée. Dans le cas général, nous n'étudions pas le comportement des points rationnels du bord, en particulier nous n'avons pas de description des variétés accumulatrices.

Notons que dans le cas où le corps de base est $\mathbf{Q}$ et la hauteur est issue d'un fibré ample (en particulier non nécessairement issue du fibré anticanonique), le comportement des points de hauteur bornée sur les surfaces de Hirzebruch a été étudié par Billard dans [Bi].

2.1 Une hauteur anticanonique sur les surfaces de Hirzebruch

Dans cette section, nous rappelons quelques faits bien connus sur les surfaces de Hirzebruch. Nous décrivons notamment un plongement explicite dans un produits d'espaces projectifs, qui permet de définir une hauteur anticanonique. Muni de cette hauteur, nous pouvons définir notre objet d'étude, la fonction zêta des hauteurs («restreinte» à un ouvert «assez petit»), et annoncer le résultat obtenu.

2.1.1 Géométrie des surfaces de Hirzebruch

Bien que le corps de base sur lequel nous travaillons soit le corps de fonctions K, la construction des surfaces de Hirzebruch peut se faire sur un corps de base quelconque, voir même un schéma de base quelconque. On considère le produit d'espaces projectifs $\mathbf{P}^2_K \times \mathbf{P}^1_K$ qu'on munit de coordonnées homogènes notées $(x_0 : x_1 : x_2)(y_0 : y_1)$. Soit m un entier naturel. L'équation $y_1^m\, x_0 = y_0^m\, x_1$ définit alors une sous-variété fermée et lisse de $\mathbf{P}^2_K \times \mathbf{P}^1_K$ appelée *m-ème surface de Hirzebruch* et notée $\mathcal{H}_m$. On notera p_1 et p_2 les projections sur le premier et le deuxième facteur. Il est bien connu, et facile à vérifier, que $\mathcal{H}_0$ est isomorphe au produit $\mathbf{P}^1_K \times \mathbf{P}^1_K$ et que $\mathcal{H}_1$ est isomorphe au plan projectif éclaté en un point.

La variété $\mathcal{H}_m$ peut être également définie de manière intrinsèque comme étant le $\mathbf{P}^1$-fibré au-dessus de $\mathbf{P}^1$ donné par $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(m))$, la fibration correspondant au morphisme $p_{2|_{\mathcal{H}_m}} : \mathcal{H}_m \to \mathbf{P}^1$.

Comme dans [Bi], nous noterons h la classe dans le groupe de Picard du fibré $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_m}(1)$ et f la classe d'une fibre. On a alors $[\,p_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1))\,] = h$ et $[\,p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))\,] = f$, où $[\,.\,]$ représente la classe dans le groupe de Picard. Rappelons que le cône effectif de $\mathcal{H}_m$ est défini comme étant le cône de $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m) \otimes \mathbf{R}$ engendré par les classes de diviseurs effectifs. Les résultats suivants (voir [Bi, Proposition 2.3]) nous seront utiles.

Lemme 2.1.1
On a $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m) = \mathbf{Z}\, h \oplus \mathbf{Z}\, f$, *en particulier* $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m)$ *est libre de rang* 2. *La classe du faisceau anticanonique est* $-\omega_m = 2\,h + (2-m)\,f$. *Le cône effectif est donné par* $\{a\,h + b\,f,\ (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ a \geqslant 0, b \geqslant -m\,a\}$. *Les diviseurs amples sont ceux dont la classe est de la forme* $a\,h + b\,f$ *avec* $a > 0$ *et* $b > 0$.

Remarques :

(i) Le faisceau anticanonique n'est ample (i.e. $\mathcal{H}_m$ est une variété de Fano) que si $m = 0$ ou $m = 1$. En revanche sa classe dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m)$ est toujours à l'intérieur du cône effectif.

(ii) Comme les surfaces de Hirzebruch peuvent se définir sur n'importe quel schéma de base, on dispose en particulier d'un modèle naturel de $\mathcal{H}_m$ sur $\mathcal{C}$, noté $\mathfrak{H}_m$, dont les fibres sont isomorphes aux surfaces $\mathcal{H}_m$ définies sur les différents corps résiduels. $\square$

2.1.2 Construction d'une hauteur relative au faisceau anticanonique

Nous allons nous servir des propriétés des hauteur d'Arakelov (cf. section 1.4.1) pour construire une hauteur associée au fibré anticanonique de $\mathcal{H}_m$ qui possède des points-base si $m \geqslant 2$. En effet comme $[\,p_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1))\,] = h$ et $[\,p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))\,] = f$, les projections p_1 et p_2 définissent des hauteurs associées à h et l respectivement. Or $-\omega_m = 2\,h + (2-m)\,f$, d'où on déduit

Lemme 2.1.2
La hauteur H définie comme la restriction à $\mathcal{H}_m(K)$ de la hauteur définie sur $\mathbf{P}^2(K) \times \mathbf{P}^1(K)$ par $H(x,y) = H_2(x)^2\, H_1(y)^{2-m}$ est une hauteur d'Arakelov relative au fibré anticanonique de $\mathcal{H}_m$.

Remarque : La métrique dont est issue cette hauteur correspond au choix du modèle canonique $\mathfrak{H}_m$ de $\mathcal{H}_m$ sur $\mathcal{C}$, et du modèle canonique de $-\omega_m$ sur $\mathfrak{H}_m$. Ceci est dû au fait que tous les objets utilisés pour définir cette hauteur «proviennent» en fait du modèle initial sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ de $\mathcal{H}_m$. On retrouvera une telle situation dans le cas des variétés toriques déployées. $\square$

2.1.3 Fonction zêta des hauteurs et problèmes d'accumulation

On définit la fonction zêta associée à la hauteur H par

$$\zeta_{H,\mathcal{H}_m}(s) = \sum_{x \in \mathcal{H}_m(K)} H(x)^{-s}$$

où s désigne un nombre complexe pour lequel la série converge (voir les résultats de convergence ci-dessous). Comme déjà indiqué, les propriétés analytiques de cette fonction sont liées au comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée de $\mathcal{H}_m$ c'est-à-dire à l'étude de

$$n_{\mathcal{H}_m,H}(B) = \#\{x \in \mathcal{H}_m(K),\ H(x) \leqslant B\}$$

quand le réel positif B tend vers $+\infty$.

Ici nous voyons apparaître une illustration du problème des sous-variétés accumulatrices. Considérons en effet la courbe $C_m = (x_0 = x_1 = 0)$ (cette notation reprend celle de [Bi]) et U l'ouvert $\mathcal{H}_m \setminus C_m$. Si $m \geqslant 1$, cette courbe est accumulatrice pour la hauteur étudiée : il y a «trop» de points rationnels de hauteur donnée sur C_m. Si $m \geqslant 2$ le phénomène est flagrant car le nombre $n_{C_m,H}(B)$ n'est même pas fini (rappelons que cela n'arrive jamais si le fibré dont est issue la hauteur est ample), contrairement à $n_{U,H}(B)$.

Si $m = 1$ le phénomène d'accumulation est plus subtil. Dans ce cas, $n_{U,H}(B)$ est négligeable devant $n_{C_1,H}(B)$ et le comportement des points rationnels de C_1 va masquer le comportement général des points rationnels de $\mathcal{H}_1$. Ceci se voit notamment au niveau des abscisses de convergence des fonctions zêtas correspondantes (cf. les remarques de la fin de la dernière section de ce chapitre). Ici, nous retrouvons simplement le fait bien connu que le diviseur exceptionnel du plan projectif éclaté en un point est accumulateur pour la hauteur anticanonique.

Tout ceci fait que si $m \geqslant 1$, suivant l'idée de Manin, on restreint l'étude aux points de l'ouvert U et on considère donc

$$\zeta_{U,H}(s) = \sum_{x \in U(K)} H(x)^{-s}$$

où $s \in \mathbf{C}$ et $\Re(s) > 1$. Le théorème ci-dessous montre la convergence de cette série dans ce domaine.

En exprimant $\zeta_{U,H}(s)$ en fonction de $\zeta_{\mathcal{C}}(s)$ on va en fait montrer le résultat suivant

Théorème 2.1.3
La fonction $\zeta_{U,H}(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe avec un pôle double en $s = 1$, de terme principal égal à

$$\frac{1}{2\,(m+2)} \left[\lim_{s\to 1}(s-1)\,\zeta_{\mathcal{C}}(s)\right]^2 \frac{1}{q^{2\,(g-1)}} \prod_{v \in \mathcal{P}_K} (1-q_v^{-1})^2\,(1+2\,q_v^{-1}+q_v^{-2}).$$

De plus $\zeta_{U,H}(s)$ est une fraction rationnelle en q^{-s}.

On rappelle que $\lim_{s\to 1}(s-1)\,\zeta_{\mathcal{C}}(s) = \frac{h\,q^{1-g}}{(q-1)\,\ln(q)}$.

2.2 Démonstration du résultat

2.2.1 Formule d'inversion

Afin de mener à bien le calcul des fonctions zêta des hauteurs on a besoin de la formule d'inversion rappelée dans ce qui suit. On notera μ la fonction de Möbius $\mathrm{Div}^+(\mathcal{C}) \to \{0,1,-1\}$, définie par

$$\mu(D) = \begin{cases} 1 & \text{si } D = 0 \\ (-1)^{\sum_{v \in \mathcal{P}_K} v(D)} & \text{si } D \neq 0 \ \text{ et } \ \forall\, v \in \mathcal{P}_K,\ v(D) = 0 \ \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour f, g deux applications $\mathrm{Div}^+(\mathcal{C}) \to \mathbf{C}$ on considère leur produit de convolution $f \star g$ défini par

$$\forall\, D \geqslant 0,\ \ (f \star g)\,(D) = \sum_{0 \leqslant D' \leqslant D} f(D')\, g(D - D').$$

Le produit de convolution est associatif et admet pour élément unité δ défini par $\delta(D) = 1$ si $D = 0$ et 0 si $D \neq 0$. On vérifie de manière combinatoire élémentaire que $\mathbf{1} \star \mu = \mu \star \mathbf{1} = \delta$, où $\mathbf{1}$ est l'application constante égale à 1.

On en déduit la formule d'inversion suivante : pour tout couple (f, g) d'applications de $\mathrm{Div}^{\mathcal{C}}(K)$ dans $\mathbf{C}$, les deux conditions

$$\forall\, D \geqslant 0,\ \ f(D) = \sum_{0 \leqslant D' \leqslant D} g(D')$$

et

$$\forall\, D \geqslant 0,\ \ g(D) = \sum_{0 \leqslant D' \leqslant D} \mu(D - D')\, f(D')$$

sont équivalentes. On appellera μ-couple tout couple (f, g) d'applications vérifiant ces conditions.

On a en particulier l'identité suivante

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{C}}(T)} = \sum_{D \geqslant 0} \mu(D)\, T^{\deg(D)}.$$

En effet comme δ et $\mathbf{1}$ forment un μ-couple on a, pour $D \geqslant 0$,

$$\sum_{0 \leqslant D' \leqslant D} \mu(D') = \delta(D)$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{D \geqslant 0} \mu(D)\, T^{\deg(D)} \ \sum_{D \geqslant 0} T^{\deg(D)} &= \sum_{D \geqslant 0} \left(\sum_{\substack{D' \geqslant 0,\, D'' \geqslant 0, \\ D' + D'' = D}} \mu(D') \right) T^{\deg(D)} \\ &= \sum_{D \geqslant 0} \left(\sum_{0 \leqslant D' \leqslant D} \mu(D') \right) T^{\deg(D)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2.2.2 Calcul de la fonction zêta

On écrit d'abord $U(K) = U_1(K) \coprod F(K)$ avec

$$\begin{aligned}
&U_1(K) \\
&= \{ (x_0 : x_1 : x_2)\,(y_0 : y_1) \in \mathbf{P}^2(K) \times \mathbf{P}^1(K),\ x_0\, y_1^m \;=\; x_1\, y_0^m \quad \text{et} \quad x_0 \neq 0 \} \\
&= \{ (1 : x_1^m : x_2)\,(1 : x_1),\ (x_1, x_2) \in K^{\,2} \}
\end{aligned}$$

et

$$F(K) = U(K) \setminus U_1(K) = \{ (0 : 1 : x_2)\,(0 : 1),\ x_2 \in K \}.$$

On décompose

$$\zeta_{U,H}(s) = \sum_{x \in U_1(K)} H(x)^{-s} + \sum_{x \in F(K)} H(x)^{-s} = \zeta_{U_1,H}(s) + \zeta_{F,H}(s)$$

et on va traiter chacun des deux termes de la somme séparément. Le deuxième terme n'apporte d'ailleurs pas de contribution significative, en effet il ne fournit qu'un pôle d'ordre un en $s = 1$.

Pour le premier terme, on commence par poser

$$Z_{U_1,H}(T) = \sum_{(x,y) \in K^{\,2}} T^{\,\deg(\ 2\ \sup(m\,(x)_\infty, (y)_\infty) + (2-m)\,(x)_\infty\ )} \;\in\; \mathbf{Z}[[T]]$$

de sorte que

$$\zeta_{U_1,H}(s) = \sum_{(x,y) \in K^{\,2}} H(\,(1 : x^m : y)(1 : x)\,)^{-s} = Z_{U_1,H}(q^{-s}).$$

En effet si $(x, y) \in K^{\,2}$ on a

$$\begin{aligned}
&H((1 : x^m : y)(1 : x)) \\
&= \prod_{v \in \mathcal{P}_K} \sup\,(1, |x|_v^{2\,m}, |y|_v^2) \prod_{v \in \mathcal{P}_K} \sup\,(1, |x|_v)^{2-m} \\
&= \prod_{v \in \mathcal{P}_K,\, \inf(v(x), v(y)) < 0} \sup\,(|x|_v^{2\,m}, |y|_v^2) \prod_{v \in \mathcal{P}_K,\, v(x) < 0} |x|_v^{2-m} \\
&= \prod_{v \in \mathcal{P}_K,\, \inf(v(x), v(y)) < 0} q^{-\,f_v\ \inf(2\,m\,v(x), 2\,v(y))} \prod_{v \in \mathcal{P}_K,\, v(x) < 0} q^{-\,f_v\,(2-m)\,v(x)}
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
&\log_q(H((1:x^m:y)(1:x)))\\
&= -\sum_{v\in\mathcal{P}_K,\,\inf(v(x),v(y))<0} f_v\,\inf(2\,m\,v(x),2\,v(y))\\
&\quad -\sum_{v\in\mathcal{P}_K,\,v(x)<0}(2-m)\,f_v\,v(x)\\
&= \deg(\ 2\ \sup(m\,(x)_\infty,(y)_\infty)\ ) + \deg(\ (2-m)\,(x)_\infty\ ).
\end{aligned}$$

On écrit

$$Z_{U_1,H}(T)=\sum_{D\geqslant 0}\tilde{R}(D)\,T^{\deg(D)}$$

où l'on a posé pour $D\geqslant 0$

$$\tilde{R}(D)=\#\{(x,y)\in K^2,\ 2\ \sup(m\,(x)_\infty,(y)_\infty)+(2-m)(x)_\infty=D\}.$$

Si on note

$$R(D)=\#\{(x,y)\in K^2,\ 2\ \sup(m\,(x)_\infty,(y)_\infty)+(2-m)\,(x)_\infty\leqslant D\},$$

R et $\tilde{R}$ forment un μ-couple. Au passage on définit aussi le μ-couple $(N,\tilde{N})$: on pose pour tout $D\geqslant 0$

$$N(D)=\#\{x\in K,\ (x)_\infty\leqslant D\}$$

et

$$\tilde{N}(D)=\#\{x\in K,\ (x)_\infty=D\}.$$

On a donc en particulier $N(D)=q^{\ell(D)}$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
\sum_{D\geqslant 0}\tilde{R}(D)\,T^{\deg(D)} &= \sum_{D\geqslant 0}\ \sum_{0\leqslant D'\leqslant D}\mu(D-D')\,R(D')\,T^{\deg(D)}\\
&= \sum_{D\geqslant 0}\ \sum_{D'\geqslant 0}R(D)\,\mu(D')\,T^{\deg(D)+\deg(D')}\\
&= \left(\sum_{D\geqslant 0}R(D)\,T^{\deg(D)}\right)\ \left(\sum_{D'\geqslant 0}\mu(D')\,T^{\deg(D')}\right)\\
&= \left(\sum_{D\geqslant 0}R(D)\,T^{\deg\,(D)}\right)\ /\ Z_{\mathcal{C}}(T)\\
&\overset{\text{déf.}}{=} Z_1(T)/Z_{\mathcal{C}}(T).
\end{aligned}$$

On note $\mathrm{Div}_{m+1}(\mathcal{C})$ l'ensemble

$$\{D \geqslant 0,\, \forall v \in \mathcal{P}_K,\; v(D) \leqslant (m+1)\}.$$

Ainsi, tout $D \geqslant 0$ s'écrit de manière unique $(m+2)\,D_1 + D_2$ avec $D_1 \geqslant 0$ et $D_2 \in \mathrm{Div}_{m+1}(\mathcal{C})$. Alors pour tout $D' \geqslant 0$ la condition $(m+2)\,D' \leqslant D$ équivaut à $D' \leqslant D_1$.

Soit à présent $D \geqslant 0$ fixé, et (x,y) un élément de $R(D)$. Si on note $D' = (x)_\infty$ on a nécessairement $(m+2)\,D' \leqslant D$ et donc

$$R(D) = \sum_{0 \leqslant D' \leqslant D_1} \tilde{N}(D')\,\#\{y \in K,\; 2\,\sup((y)_\infty, m\,D') + (2-m)\,D' \leqslant D\}$$

en constatant de plus que si $(m+2)\,D' \leqslant D$, la condition

$$2\,\sup((y)_\infty, m\,D') + (2-m)\,D' \leqslant D$$

équivaut à

$$2\,(y)_\infty \leqslant D + (m-2)\,D'.$$

On a donc pour $Z_1(T)$ l'expression

$$\sum_{\substack{D_1 \geqslant 0 \\ D_2 \in \mathrm{Div}_{m+1}(\mathcal{C})}} \left(\sum_{0 \leqslant D' \leqslant D_1} \tilde{N}(D')\#\{y \in K,\; 2(y)_\infty \leqslant (m+2)D_1 + D_2 + (m-2)\,D'\} \right) \times T^{\deg((m+2)\,D_1 + D_2)}$$

En effectuant le changement de variables $(D_1, D') \rightsquigarrow (D_1 + D', D')$ on trouve donc que $Z_1(T)$ vaut

$$\sum_{\substack{D \geqslant 0,\, D' \geqslant 0 \\ D_2 \in \mathrm{Div}_{m+1}(\mathcal{C})}} \tilde{N}(D')\,\#\{y \in K,\; 2\,(y)_\infty \leqslant (m+2)\,D + D_2 + 2\,m\,D'\} \times T^{\deg((m+2)\,D + D_2 + (m+2)\,D')}$$

$$= \sum_{D \geqslant 0,\, D' \geqslant 0} \tilde{N}(D')\,\#\{y \in K,\; 2\,(y)_\infty \leqslant D + 2\,m\,D'\}\, T^{\deg(D + (m+2)\,D')}.$$

En notant $\mathrm{Div}_1(\mathcal{C}) = \{D \geqslant 0, \forall v \in \mathcal{P}_K,\; v(D) \leqslant 1\}$, de sorte que tout diviseur effectif D s'écrit de manière unique $2\,D_1 + D_2$ avec $D_1 \geqslant 0$ et $D_2 \in$

$\mathrm{Div}_1(\mathcal{C})$, il vient

$$Z_1(T) = \sum_{\substack{D\geqslant 0,\, D'\geqslant 0\\ D_1\in \mathrm{Div}_1(\mathcal{C})}} \tilde{N}(D')\, \#\{y \in K,\ 2\,(y)_\infty \leqslant 2\,D + 2\,m\,D' + D_1\} \times T^{\deg(2\,D+D_1+(m+2)\,D')}$$

$$= \sum_{\substack{D\geqslant 0,\, D'\geqslant 0\\ D_1\in \mathrm{Div}_1(\mathcal{C})}} \tilde{N}(D')\ N(D+m\,D')\ T^{\deg(2\,D+D_1+(m+2)\ D')}.$$

Si $m = 0$, cette dernière expression montre que $Z_1(T)$ se met sous forme d'un produit :

$$Z_1(T) = \left(\sum_{D'\geqslant 0} \tilde{N}(D')T^{2\deg(D')}\right)\left(\sum_{D\geqslant 0} N(D)T^{2\deg(D)}\right)\left(\sum_{D_1\in \mathrm{Div}_1(\mathcal{C})} T^{\deg(D_1)}\right).$$

On peut alors terminer le calcul comme indiqué ci-après[1].

Si $m \geqslant 1$, on a

$$Z_1(T) = \sum_{\substack{D\geqslant 0,\, D'\geqslant 0\\ D_1\in \mathrm{Div}_1(\mathcal{C})}} \tilde{N}(D')\, q^{1-g}\, q^{\deg(D)+\deg(m\,D')}\, T^{\deg(2\,D+D_1+(m+2)\,D')} + P_1(T) \sum_{D_1\in \mathrm{Div}_1(\mathcal{C})} T^{\deg(D_1)}$$

où P_1 est un polynôme. En effet, d'une part, comme déjà indiqué $N(D+m\,D')$ n'est autre que $q^{\ell(D+m\,D')}$, et d'après le théorème de Riemann-Roch on a

$$\ell(D+m\,D') = 1 - g + \deg(D+m\,D')$$

dès que $\deg(D) \geqslant 2g-2$ ou $\deg(D') \geqslant 2g-2$. D'autre part l'ensemble des couples (D, D') avec $D \geqslant 0$, $D' \geqslant 0$, $\deg(D) < 2g-2$ et $\deg(D') < 2g-2$ est un ensemble fini.

On posera $P_1(T) = 0$ si $m = 0$ et on peut reprendre le calcul pour $m = 0$ et $m \geqslant 1$ simultanément. En notant

$$Z_1'(T) = Z_1(T) - P_1(T) \sum_{D_1\in \mathrm{Div}_1(\mathcal{C})} T^{\deg(D_1)}$$

[1] Comme $\mathcal{H}_0$ est isomorphe au produit $\mathbf{P}^1_K \times \mathbf{P}^1_K$ il est en fait bien plus naturel dans le cas $m = 0$ de calculer la fonction zêta des hauteurs comme produit des deux fonctions zêta des hauteurs associées à chacun des facteurs du produit.

on a

$$Z_1'(T) = q^{1-g} \left(\sum_{D' \geqslant 0} \tilde{N}(D')\, q^{m \deg(D')}\, T^{(m+2)\deg(D')} \right) \left(\sum_{D \geqslant 0} (q\, T^2)^{\deg(D)} \right) \times \left(\sum_{D_1 \in \mathrm{Div}_1(\mathcal{C})} T^{\deg(D_1)} \right)$$

soit

$$Z_1'(T) = q^{1-g} \left(\sum_{D' \geqslant 0} \tilde{N}(D')\, q^{m\ \deg(D')}\, T^{(m+2)\ \deg(D')} \right) Z_{\mathcal{C}}\left(q\, T^2\right) \prod_{v \in \mathcal{P}_K} (1+T^{f_v}).$$

Il reste à calculer $\sum\limits_{D \geqslant 0} \tilde{N}(D)\, q^{m\ \deg(D)}\, T^{(m+2)\deg(D)}$. Pour cela on utilise le μ-couple $(N, \tilde{N})$ et on trouve

$$\sum_{D \geqslant 0} \tilde{N}(D)\, q^{m\ \deg(D)}\, T^{\deg(\,(m+2)\,D)} = (q^{1-g}\, Z_{\mathcal{C}}(q^{m+1}\, T^{m+2}) + P_2(T))/Z_{\mathcal{C}}(q^m\, T^{m+2})$$

où P_2 est un polynôme.

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \frac{\prod\limits_{v \in \mathcal{P}_K} (1+T^{f_v})}{Z_{\mathcal{C}}(T)} &= \prod_{v \in \mathcal{P}_K} (1+T^{f_v})\,(1-T^{f_v}) \\ &= \prod_{v \in \mathcal{P}_K} (1-T^{2\,f_v}) \\ &= \frac{1}{Z_{\mathcal{C}}(T^2)}. \end{aligned}$$

Calculons à présent $\zeta_{F,H}$. Si $x \in K$ on a

$$H((0:1:x)(0:1)) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} \sup(1, |x|_v)^2$$

de sorte que si on pose

$$Z_{F,H}(T) = \sum_{x \in K} T^{2\ \deg((x)_\infty)}$$

on a $\zeta_{F,H}(s) = Z_{F,H}(q^{-s})$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
Z_{F,H}(T) &= \sum_{D\geqslant 0} \tilde{N}(D)\, T^{2\,\deg(D)} \\
&= \sum_{D\geqslant 0,\, D'\geqslant 0} N(D)\, \mu(D')\, T^{2\,\deg(D+D')} \\
&= \left(\sum_{D\geqslant 0} N(D)\, T^{2\,\deg(D)}\right) / Z_{\mathcal{C}}(T^2) \\
&= (q^{1-g}\, Z_{\mathcal{C}}(q\,T^2) + P_3(T))/Z_{\mathcal{C}}(T^2)
\end{aligned}$$

où P_3 est un polynôme.

On a donc en recollant les morceaux l'expression suivante

$$\begin{aligned}
Z_{U,H}(T) &= \frac{q^{2-2\,g}\, Z_{\mathcal{C}}(q^{m+1}\, T^{m+2})\, Z_{\mathcal{C}}(q\,T^2)}{Z_{\mathcal{C}}(T^2)\, Z_{\mathcal{C}}(q^m\, T^{m+2})} \\
&\quad + \frac{q^{1-g}\, Z_{\mathcal{C}}(q\,T^2)\, P_2(T)}{Z_{\mathcal{C}}(T^2)\, Z_{\mathcal{C}}(q^m\, T^{m+2})} \\
&\quad + q^{1-g}\, \frac{Z_{\mathcal{C}}(q\,T^2)}{Z_{\mathcal{C}}(T^2)} + \frac{P_1(T)}{Z_{\mathcal{C}}(T^2)} + \frac{P_3(T)}{Z_{\mathcal{C}}(T^2)}
\end{aligned}$$

soit pour la fonction $\zeta_{U,H}$

$$\begin{aligned}
\zeta_{U,H}(s) &= \frac{q^{2-2\,g}\, \zeta_{\mathcal{C}}((m+2)\,s - (m+1))\, \zeta_{\mathcal{C}}(2\,s-1)}{\zeta_{\mathcal{C}}(2\,s)\, \zeta_{\mathcal{C}}((m+2)\,s - m)} \\
&\quad + \frac{q^{1-g}\, \zeta_{\mathcal{C}}(2\,s-1)\, P_2(q^{-s})}{\zeta_{\mathcal{C}}(2\,s)\, \zeta_{\mathcal{C}}((m+2)\,s - m)} \\
&\quad + q^{1-g}\, \frac{\zeta_{\mathcal{C}}(2\,s-1)}{\zeta_{\mathcal{C}}(2\,s)} + \frac{P_1(q^{-s})}{\zeta_{\mathcal{C}}(2\,s)} + \frac{P_3(q^{-s})}{\zeta_{\mathcal{C}}(2\,s)}
\end{aligned}$$

et des propriétés de la fonction $\zeta_{\mathcal{C}}$ (section 1.3) on déduit le théorème 2.1.3. Le pôle d'ordre 2 en $s = 1$ provient de la contribution du premier terme de la somme ci-dessus, et le terme principal vaut

$$q^{2-2\,g}\, \frac{1}{2\,(m+2)}\, \frac{(\mathrm{Res}_{s=1}\, \zeta_{\mathcal{C}}(s)\,)^2}{\zeta_{\mathcal{C}}(2)^2}$$

avec

$$\zeta_{\mathcal{C}}(2)^{-2} = \prod_{v\in\mathcal{P}_K} (1 - q^{-2\,f_v})^2 = \prod_{v\in\mathcal{P}_K} (1 - q^{-f_v})^2\, (1 + 2\,q^{-f_v} + q^{2\,f_v})$$

ce qui montre le résultat annoncé.

2.2.3 Compatibilité avec la conjecture de Manin fonctionnelle

Nous vérifions ici que le résultat démontré entraîne que la réponse à la question 1.4.2 est positive pour la variété $\mathcal{H}_m$, avec la hauteur H et l'ouvert U considérés. Le rang du groupe de Picard de $\mathcal{H}_m$ est égal à 2 (lemme 2.1.1), et on a donc montré que notre fonction zêta des hauteurs anticanonique converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle d'ordre le rang du groupe de Picard de $\mathcal{H}_m$ en $s = 1$. Il reste à vérifier que l'expression que nous avons obtenu pour le terme principal du pôle correspond bien à l'expression $\alpha^*(\mathcal{H}_m)\,\beta(\mathcal{H}_m)\,\tau_H(\mathcal{H}_m)$, ces constantes ayant été introduites à la section 1.4.1.

Rappelons que l'invariant $\alpha^*(\mathcal{H}_m)$ est défini comme $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(\mathcal{H}_m)}(\omega^{-1}_{\mathcal{H}_m})$ où $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(\mathcal{H}_m)}$ est défini pour tout élément s de l'intérieur du cône effectif par

$$\chi_{C_{\mathrm{eff}}(\mathcal{H}_m)}(s) = \int_{C_{\mathrm{eff}}(\mathcal{H}_m)^\vee} e^{-\langle s,y\rangle} dy$$

avec

$$C_{\mathrm{eff}}(\mathcal{H}_m)^\vee = \{\, y \in (\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m)\otimes \mathbf{R})^\vee,\ \forall x \in C_{\mathrm{eff}}(\mathcal{H}_m),\ \langle y\,,\,x\rangle \geqslant 0\,\}.$$

Ainsi en notant (h^*, f^*) la base duale de (h, f) dans $(\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m)\otimes \mathbf{R})^\vee$ et en utilisant la description du cône effectif donnée dans le lemme 2.1.1 on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha^*(\mathcal{H}_m) &= \int_{\{a\,h^*+b\,f^*,\,b\geqslant 0,\,a\geqslant m\,b\}} e^{-<2h+(2-m)f,y\rangle} dy \\
&= \int_{b\geqslant 0} e^{(m-2)\,b}\left(\int_{a\geqslant m\,b} e^{-2\,a} da\right) db \\
&= \frac{1}{2}\int_{b\geqslant 0} e^{-(m+2)\,b} db \\
&= \frac{1}{2\,(m+2)}.
\end{aligned}$$

La constante $\beta(\mathcal{H}_m)$ est égal à $\# H^1(K, \mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m^{\mathrm{sep}}))$, où

$$\mathcal{H}_m^{\mathrm{sep}} = \mathcal{H}_m \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(K^{\mathrm{sep}}).$$

On a donc $\beta(\mathcal{H}_m) = 1$ puisque $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m^{\mathrm{sep}})$ est un $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$-module trivial.

Par ailleurs, compte tenu toujours du fait que le groupe $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m^{\mathrm{sep}})$ est un $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$-module trivial, la constante $\tau_H(\mathcal{H}_m)$ est égale à

$$\tau_H(V) = (\lim_{s\to 1}(s-1)^2\,\zeta_{\mathcal{C}}(s)^2)\,q^{(1-g)\,\dim(\mathcal{H}_m)} \prod_{v\in\mathcal{P}_K}(1-q_v^{-1})^{-2}\,\omega_v(\mathcal{H}_m(K_v)),$$

$\omega_v(\mathcal{H}_m(K_v))$ désignant le volume de l'espace v-adique $\mathcal{H}_m(K_v)$ pour la mesure ω_v construite à partir de la métrisation du faisceau anticanonique dont est issue la hauteur H. Le choix de la métrique effectué ici correspond, comme déjà indiqué, au choix du modèle naturel de $\mathcal{H}_m$ sur $\mathcal{C}$ (voir la remarque suivant le lemme 2.1.2), et dans ces conditions pour tout v on a d'après la formule (1.4.2.1)

$$\omega_v(\mathcal{H}_m(K_v)) = \frac{\#\,\mathfrak{H}_m(k_v)}{q_v^{\dim(\mathcal{H}_m)}},$$

$\mathfrak{H}_m(k_v)$ désignant l'ensemble des points k_v-rationnels de la k_v-variété obtenue par réduction modulo v du modèle, autrement dit

$$\mathfrak{H}_m(k_v) = \{(x_0 : x_1 : x_2)\,(y_0 : y_1) \in \mathbf{P}^2(k_v) \times \mathbf{P}^1(k_v),\ x_0\, y_1^m = x_1\, y_0^m\}.$$

On vérifie facilement, en utilisant par exemple le fait que $\mathfrak{H}_m(k_v)$ est un $\mathbf{P}^1(k_v)$-fibré au-dessus de $\mathbf{P}^1(k_v)$, que $\#\,\mathfrak{H}_m(k_v) = 1 + 2\,q_v + q_v^2$. Enfin on a bien $\dim(\mathcal{H}_m) = 2$.

Remarquons enfin qu'il est assez aisé, avec la technique utilisée ici, de montrer que, dans le cas $m = 1$, $\zeta_{C_m,H}(s) = \sum_{x \in C_m(K)} H(x)^{-s}$ ne converge absolument que pour $\Re(s) > 2$ avec un pôle simple en $s = 2$ ce qui correspond au phénomène d'accumulation évoqué à la section 2.1.3. Dans le cas $m \geqslant 2$, $\zeta_{C_m,H}$ ne converge pour aucun s tel que $\Re(s) > 0$.

Chapitre 3

Le cas des variétés toriques déployées

Ce chapitre est une version légèrement modifiée de l'article [Bo2].

Ce chapitre, dans la continuité du précédent, est consacré à la démonstration du fait que la réponse à la question 1.4.2 est positive pour une variété torique déployée définie sur un corps de fonctions K, en prenant pour ouvert U l'orbite ouverte du tore. Le plan de la démonstration est similaire : réécriture de la fonction zêta des hauteurs en termes de sommation sur des familles de diviseurs effectifs, utilisation d'une inversion de Möbius, puis utilisation du théorème de Riemann-Roch pour l'évaluation finale de la fonction zêta des hauteurs en termes de séries géométriques. C'est de loin cette dernière étape qui se révèle la plus douloureuse sur le plan technique, notamment en comparaison avec le cas particulier des surfaces de Hirzebruch. L'idée qui sous-tend les calculs un peu pénibles de la section 3.5.3 reste cependant simple (cf. les remarques à la fin de la section 3.5.2).

Naturellement, la technique employée ici est fortement inspirée de celle employée par Salberger dans [Sa] pour démontrer la conjecture de Manin pour les variétés toriques déployées définie sur $\mathbf{Q}$. Notons cependant que nous obtenons un résultat plus général en caractéristique non nulle : nous nous plaçons sur un corps de fonctions quelconque, et nous n'avons pas besoin de supposer le faisceau anticanonique engendré par ses sections globales, contrairement aux hypothèses de [Sa, Thm 11.49].

3.1 Quelques notations

Dans tout ce chapitre, nous fixons un corps de fonctions K et reprenons les notations de la section 1.3. Sans perte de généralité, nous supposerons que le corps des constantes de K est k, et est donc de cardinal q. Le problème auquel nous serons confronté pour l'évaluation des fonctions zêtas des hauteurs est que, pour $g \geqslant 1$, $\ell(D) = \dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(D))$ n'est pas une fonction de $\deg(D)$ si $\deg(D)$ est petit. Dans le cas des surfaces de Hirzebruch, ce n'était pas gênant car la partie correspondante de la fonction zêta des hauteurs était un polynôme et ne contribuait donc pas à la partie polaire de la fonction zêta.

Cet argument ne sera plus valable pour une variété torique déployée quelconque. Nous sommes ainsi amené à introduire les notations suivantes. Rappelons que h représente le nombre de classes de diviseurs de degré 0 de $\mathcal{C}$. Nous fixons une fois pour toutes h représentants des classes de diviseur de degré 0, notés $\mathfrak{d}^0_1, \ldots, \mathfrak{d}^0_h$. Nous fixons également un diviseur de degré 1, noté $\mathfrak{d}^1$ (il en existe par [We1, VII§5,Cor 6]). Définissons alors des fonctions

$$f_i \,:\, \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

pour $i = 1, \ldots, h$ en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_i(n) \; = \; l\,(\,\mathfrak{d}_i^0 + n\,\mathfrak{d}^1).$$

On a donc $f_i(n) = n+1-g$ dès que $n > 2\,g-2$. Maintenant si on ne considère que les diviseurs D astreints à la condition

$$D - \deg(D)\,\mathfrak{d}^1 \sim \; \mathfrak{d}_i^0$$

pour i fixé nous avons $\ell(D) = f_i(\deg(D))$. Nous ne pouvons expliciter $f_i(n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 2\,g-2$ mais nous allons montrer pour tout n la majoration

$$f_i(n) \; \leqslant \; 1 + n$$

qui nous suffira pour le résultat que nous avons en vue. Nous étendrons f_i à $\mathbf{Z}$ en posant $f_i(n) = 1 + n$ pour $n < 0$. Il pourrait sembler logique de poser plutôt dans ce cas $f_i(n) = l\,(\,\mathfrak{d}_i^0 + n\,\mathfrak{d}^1) = 0$. La définition adoptée ici est juste un artifice de calcul, elle permettra par la suite d'écrire des majorations plus «propres».

Pour démontrer la majoration ci-dessus, on remarque qu'étant donné D un diviseur effectif l'application

$$E \mapsto E + D$$

définit une injection de $|\mathcal{K} - D|$ dans $|\mathcal{K}|$ d'où

$$\ell(\mathcal{K} - D) \leqslant \ell(\mathcal{K})$$

et comme $\ell(\mathcal{K}) = g$ le théorème de Riemann-Roch entraîne la majoration

$$\ell(D) \leqslant 1 + \deg(D)$$

valable pour tout diviseur effectif D.

3.2 Géométrie des variétés toriques

Nous nous contentons de rappeler les résultats qui nous seront utiles, et renvoyons aux références classiques sur les variétés toriques (par exemple [Od], [Fu], [Ew]) pour plus de détails. Les notations fixées ici seront par ailleurs reprises dans le chapitre 4. Les résultats énoncés dans cette section sont valables sur un corps quelconque.

Soit N un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini dont on notera r le rang, $M = N^\vee$ son dual, l'accouplement naturel entre N et M étant noté $\langle .\, , . \rangle$ (par la suite nous désignerons toujours ainsi l'accouplement naturel entre un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini et son dual, mais aucune confusion ne devrait en résulter).

Un cône σ de $N \otimes \mathbf{R}$ est dit polyédral rationnel s'il s'écrit

$$\sigma = \sum_{i \in I} \mathbf{R}_{\geqslant 0}\, m_i$$

où I est un ensemble fini et les (m_i) sont dans N. Un tel cône est dit strictement convexe si $\sigma \cap -\sigma = \{0\}$.

Un *éventail* de N est alors un ensemble fini Σ de cônes polyédraux rationnels strictement convexes de $N \otimes \mathbf{R}$, vérifiant les conditions suivantes :
- toute face d'un cône de Σ est un cône de Σ,
- l'intersection de deux cônes de Σ est une face de chacun des deux cônes.

Un éventail Σ est dit régulier si tout cône de Σ est engendré par une partie d'une $\mathbf{Z}$-base de N, et complet si les cônes de Σ recouvrent $N \otimes \mathbf{R}$.

À un éventail complet et régulier est associé pour tout corps L une variété torique déployée $X_{\Sigma,L}$, propre, lisse, de dimension r, définie sur L.

On considère désormais Σ un éventail de N supposé projectif et régulier, c'est-à-dire complet et régulier et tel que pour tout corps L la variété $X_{\Sigma,L}$ est projective. On notera X_Σ la variété $X_{\Sigma,K}$ et T son orbite ouverte (qui est donc isomorphe à $(\mathbf{G}_{m,K})^r$), M s'identifie alors au groupe des caractères de T et N à celui de ses cocaractères. Pour toute extension L de K, $T(L)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(M, L^*)$.

Nous notons $\Sigma(1)$ l'ensemble des rayons de Σ, c'est-à-dire les cônes de Σ de dimension 1, et pour σ cône de Σ, nous notons $\sigma(1)$ le sous-ensemble de $\Sigma(1)$ des éléments contenus dans σ. Pour $\alpha \in \Sigma(1)$ nous notons ρ_α le générateur de α, $\mathfrak{D}_\alpha$ le diviseur T-invariant associé et $\mathcal{D}_\alpha$ sa classe dans le groupe de Picard de X_Σ. Un diviseur anticanonique est alors donné par $\sum_{\alpha \in \Sigma(1)} \mathfrak{D}_\alpha$. Nous désignons par $\mathrm{PL}(\Sigma)$ le groupe des applications entières linéaires par morceaux sur Σ, qui est isomorphe au groupe des faisceaux inversibles T-linéarisés de X_Σ modulo isomorphisme, ainsi qu'au groupe abélien libre de base $(\mathfrak{D}_\alpha)_{\alpha \in \Sigma(1)}$ par l'application

$$\phi \longmapsto (\phi(\rho_\alpha))_{\alpha \in \Sigma(1)}.$$

Le groupe de Picard de X_Σ est le quotient du groupe abélien libre de base $(\mathfrak{D}_\alpha)_{\alpha \in \Sigma(1)}$ par les relations

$$\sum_{\alpha \in \Sigma(1)} \langle m, \rho_\alpha \rangle\, \mathfrak{D}_\alpha$$

où m parcourt M, en d'autres termes on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Sigma(1)} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_\Sigma) \longrightarrow 0.$$

Pour σ cône de Σ, nous abrégerons souvent les notations $\alpha \in \sigma(1)$ et $\alpha \notin \sigma(1)$ en $\alpha \in \sigma$ et $\alpha \notin \sigma$.

Nous fixons *pour toute la suite du chapitre* une base de N dont les éléments sont les générateurs des rayons d'un cône donné σ_0 de dimension r (ce qui est toujours possible car l'éventail est régulier). Notons $(\rho_\beta^*)_{\beta \in \sigma_0}$ la base duale, et posons pour $\beta \in \sigma_0$ et $\alpha \notin \sigma_0$

$$n_{\beta,\alpha} = -\langle \rho_\beta^*, \rho_\alpha \rangle.$$

Alors $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)$ est libre de base $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha \notin \sigma_0}$. On désigne par t son rang. On a pour $\beta \in \sigma_0$

$$\mathcal{D}_\beta = \sum_{\alpha \notin \sigma_0} n_{\beta,\alpha}\, \mathcal{D}_\alpha.$$

Les coordonnées de la classe du faisceau anticanonique (notée $-\omega_\Sigma$, voire en général $-\omega$ si l'éventail Σ est fixé par le contexte) sont donc dans cette base

$$\left(1 + \sum_{\beta \in \sigma_0} n_{\beta,\alpha}\right)_{\alpha \notin \sigma_0},$$

elles seront aussi notées $(-\omega_\alpha)_{\alpha \notin \sigma_0}$.

3.3 Fonction zêta des hauteurs

Dans cette section nous construisons, suivant Batyrev et Tschinkel, une certaine hauteur anticanonique sur X_Σ, et définissons notre objet d'étude : la fonction zêta associée. Enfin nous énonçons notre résultat, qui sera démontré dans les deux dernières sections de ce chapitre.

3.3.1 Construction de la hauteur

Nous utilisons la hauteur construite par Batyrev et Tschinkel dans [BaTs1, 2.2] (à ceci près que les auteurs de [BaTs1] travaillent sur un corps de nombres). Nous rappelons comment elle est définie. Pour tout $v \in \mathcal{P}_K$ le morphisme valuation

$$\begin{aligned} v \, : \, K_v^* &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ x &\longmapsto v(x) \end{aligned}$$

permet, en identifiant $T(K_v)$ à $\mathrm{Hom}(M, K_v^*)$, de définir par composition un morphisme

$$j_v \, : \, T(K_v) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z}) = N$$

puis pour tout $\phi \in \mathrm{PL}(\Sigma) \otimes \mathbf{C}$ une hauteur locale

$$\begin{array}{rcl} H_{\Sigma,v}(\phi) \,:\, T(K_v) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \exp\left[\, f_v \,\ln(q)\, \phi(j_v(x)) \,\right] \end{array}$$

et enfin un accouplement noté H_Σ

$$\begin{array}{rcl} T(K) \times (\mathrm{PL}(\Sigma) \otimes \mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x, \phi) & \longmapsto & \prod_{v \in \mathcal{P}_K} H_{\Sigma,v}(\phi)(x) \end{array}$$

qui vérifie entre autres propriétés

Lemme 3.3.1
[BaTs1, Thm. 2.1.6 + Rk. 2.1.8] La restriction de H_Σ à $T(K) \times \mathrm{PL}(\Sigma)$ est un système de hauteurs, i.e. pour tout $\phi \in \mathrm{PL}(\Sigma)$, la restriction de H_Σ à $T(K) \times \{\phi\}$ est la restriction à $T(K)$ d'une hauteur d'Arekelov associée au fibré correspondant à ϕ (notée $H_{\Sigma,\phi}$ par la suite).

Ce lemme est d'abord montré dans le cas où ϕ correspond à un fibré très ample, auquel cas il résulte des propriétés de convexité de ϕ, puis dans le cas général en écrivant tout diviseur comme différence de deux diviseurs très amples.
Remarques :
(i) La formule du produit montre que H_Σ se factorise à travers $T(K) \times (\mathrm{Pic}(X_\Sigma) \otimes \mathbf{C})$.
(ii) Les hauteurs ainsi construites sont à valeurs dans $q^{\mathbf{Z}}$.
(iii) Comme X_Σ est une variété torique déployée, nous disposons d'un modèle canonique $\mathfrak{X}_\Sigma$ de X_Σ défini sur $\mathcal{C}$ toute entière, et pour tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ d'un modèle canonique $\mathfrak{L}$ de $\mathcal{L}$ sur $\mathfrak{X}_\Sigma$. La hauteur définie ci-dessus correspond au choix de ces modèles, selon la construction définie dans la partie 1.4.1. $\square$

3.3.2 Fonction zêta des hauteurs, calcul de la constante et énoncé du résultat

Nous posons alors

$$\zeta_{T,\Sigma}(\phi) = \sum_{x \in T(K)} H_\Sigma(x, -\phi)$$

pour tout $\phi = (s_\alpha) \in \mathrm{PL}(\Sigma) \otimes \mathbf{C}$ tel que la série converge (voir les résultats de convergence ci-dessous). Dans la suite nous étudierons en fait la restriction de

ζ_Σ à la droite complexe $\mathbf{C}\,\phi_0$, où $\phi_0 = (1,\ldots,1)$ et correspond donc, d'après la section 3.2 au faisceau anticanonique. Nous noterons, pour $s \in \mathbf{C}$,

$$\zeta_{T,H_{\Sigma,\phi_0}}(s) = \zeta_{T,\Sigma}(s\,\phi_0).$$

Nous calculons à présent les constantes $\beta(X_\Sigma)$ et $\tau_{H_{\Sigma,\phi_0}}(X_\Sigma)$ définies à la section 1.4.3. Notons $X_\Sigma^{\text{sep}} = X_\Sigma \times_{\operatorname{Spec}(K)} \operatorname{Spec}(K^{\text{sep}})$. Comme X_Σ est une variété torique déployée, $\operatorname{Pic}(X_\Sigma^{\text{sep}})$ est un $\operatorname{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$-module trivial. La constante $\beta(X_\Sigma) = \# H^1(K, \operatorname{Pic}(X_\Sigma^{\text{sep}}))$ est donc égale à 1.

Comme remarqué précédemment, le choix de la métrique effectué ici pour construire la hauteur H_{Σ,ϕ_0} correspond au choix du modèle naturel $\mathfrak{X}_\Sigma$ de X_Σ sur $\mathcal{C}$. Si ω_v désigne la mesure induite sur $X_\Sigma(K_v)$ par cette métrique, on a alors pour tout v d'après la formule (1.4.2.1)

$$\omega_v(X_\Sigma(K_v)) = \frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{q_v^{\dim(X_\Sigma)}},$$

$\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)$ désignant l'ensemble des points k_v-rationnels de la k_v-variété obtenue par réduction modulo v de $\mathfrak{X}_\Sigma$ (qui n'est autre que X_{Σ,k_v}).

Par ailleurs, comme $\operatorname{Pic}(X_\Sigma^{\text{sep}})$ est un $\operatorname{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$-module trivial, pour tout $v \in \mathcal{P}_K$ on a

$$L_v(s, \operatorname{Pic}(X_\Sigma^{\text{sep}})) = (1 - q_v^{-s})^{-t}$$

et

$$L(s, \operatorname{Pic}(X_\Sigma^{\text{sep}})) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} L_v(s, \operatorname{Pic}(X_\Sigma^{\text{sep}})) = \zeta_{\mathcal{C}}(s)^t.$$

Finalement on obtient

$$\tau_{H_{\Sigma,\phi_0}}(X_\Sigma) = \left(\lim_{s\to 1}(s-1)\,\zeta_{\mathcal{C}}(s)\right)^t q^{(1-g)\dim(X_\Sigma)} \prod_{v \in \mathcal{P}_K} (1 - q_v^{-1})^{-t} \frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{q_v^{\dim(X_\Sigma)}}.$$

Nous montrons dans la suite de ce chapitre le résultat suivant

Théorème 3.3.2
Soit Σ un éventail projectif et régulier et X_Σ la variété projective et lisse définie sur K qui lui est associée. La série $\zeta_{T,H_{\Sigma,\phi_0}}(s)$ définie ci-dessus converge absolument dans le domaine $\Re(s) > 1$ et pour un certain $\varepsilon > 0$ se prolonge en une fonction méromorphe dans le domaine $\Re(s) > 1 - \varepsilon$ qui a un pôle d'ordre t, le rang du groupe de Picard de X_Σ, en $s = 1$, de terme principal

$$\alpha^*(X_\Sigma)\ \left(\lim_{s\to 1}(s-1)\,\zeta_{\mathcal{C}}(s)\right)^t q^{(1-g)\dim(X_\Sigma)} \prod_{v \in \mathcal{P}_K} (1 - q_v^{-1})^{-t} \frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{q_v^{\dim(X_\Sigma)}}.$$

Remarques :

(i) Nous obtenons ainsi une réponse positive à la question 1.4.2 pour toute variété torique lisse déployée définie sur K et munie de la hauteur H_{Σ,ϕ_0} définie ci-dessus, en prenant pour l'ouvert U l'orbite ouverte.

(ii) Contrairement au cas des surfaces de Hirzebruch, nous ne sommes pas en mesure d'assurer que la fonction zêta des hauteurs est une fonction rationnelle en q^{-s}. Nous soupçonnons d'ailleurs qu'elle n'admet même pas de prolongement méromorphe à tout le plan complexe, et ceci déjà pour le plan projectif éclaté en deux points (cf. à cet égard le commentaire qui suit la démonstration de la proposition 3.4.3). □

3.4 Préliminaires au calcul : paramétrage et formule d'inversion

3.4.1 Réécriture de la fonction zêta des hauteurs

Nous noterons $\mathcal{A}_\Sigma$ le sous-ensemble de $\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}$ composé des éléments $(D_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}$ vérifiant les deux conditions

$$\forall\, m \in M,\ \sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \langle m, \rho_\alpha\rangle\, D_\alpha \,\sim\, 0 \tag{$*$}$$

et

$$\bigcap_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Supp}\left(\sum_{\alpha\notin\sigma} D_\sigma\right) = \emptyset \tag{$**$}$$

la dernière condition étant équivalente à

$$\forall\, v \in \mathcal{P}_K,\ \operatorname*{Inf}_{\sigma\in\Sigma}\left(\sum_{\alpha\notin\sigma} v(D_\alpha)\right) = 0$$

ou encore à

$$\forall\, v \in \mathcal{P}_K,\ \exists\, \sigma \in \Sigma,\ \forall \alpha \notin \sigma,\ v(D_\alpha) = 0.$$

Nous noterons aussi $\mathcal{A}_\Sigma^{(*)}$ (respectivement $\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}$) l'ensemble des éléments de $\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}$ vérifiant la condition $(*)$ (respectivement $(**)$).

Dans [Sa, ch. 11], Salberger démontre la conjecture de Manin pour les variétés toriques déployées définies sur $\mathbf{Q}$ en ramenant, par le biais des torseurs universels, le comptage des points rationnels d'une telle variété torique au comptage des points entiers d'un espace affine, vérifiant certaines conditions de coprimalité. Ces conditions sont le strict analogue de la condition $(**)$. Ici nous montrons que l'on peut paramétrer les points de $T(K)$ par les éléments de $\mathcal{A}_\Sigma$.

Lemme 3.4.1
Il existe une bijection

$$h_\Sigma : T(K)/T(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_\Sigma$$

de sorte que pour $x \in T(K)$ *et* $\phi \in \mathrm{PL}(\Sigma)$, *si on note* $(D_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)} = h_\Sigma(x)$, *on a*

$$H_{\Sigma,\phi}(x) = q^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} \phi(\rho_\alpha)\deg(D_\alpha)}.$$

Démonstration : La démonstration donnée ici est combinatoire et ne fait (en apparence du moins) aucun usage des torseurs universels.

On a un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathrm{div} \,:\, K^* &\longrightarrow \mathrm{Div}(\mathcal{C}) \\ x &\longmapsto (x) \end{aligned}$$

de noyau k^* qui induit par composition un morphisme

$$\psi \,:\, T(K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Div}(\mathcal{C}))$$

de noyau $T(k) = \mathrm{Hom}(M, k^*)$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow T(K)/T(k) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Div}(\mathcal{C})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Pic}(\mathcal{C})) \longrightarrow 0.$$

Maintenant soit (D_α) un élément de $\mathcal{A}_\Sigma$. L'élément de $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Div}(\mathcal{C}))$

$$m \longmapsto \sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \langle m, \rho_\alpha\rangle\, D_\alpha$$

a par la condition **(∗)** une image triviale dans $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Pic}(\mathcal{C}))$ et il lui correspond donc un élément de $T(K)/T(k)$.

Réciproquement, soit x un élément de $T(K)/T(k)$, induisant un élément de $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Div}(\mathcal{C}))$ et par composition avec $v : \mathrm{Div}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Z}$ un élément $n_{x,v}$ de N pour tout v, nul pour presque tout v. Si $n_{x,v} = 0$ on pose $k_{\alpha,v}=0$ pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$. Sinon $n_{x,v}$ est dans l'intérieur relatif d'un unique cône σ de $\Sigma \setminus \{0\}$, et donc

$$n_{x,v} = \sum_{\alpha\in\sigma} k_{\alpha,v}\,\rho_\alpha$$

avec $k_{\alpha,v} > 0$. On pose $k_{\alpha,v} = 0$ pour $\alpha \notin \sigma$. Finalement on pose pour $\alpha \in \Sigma(1)$

$$D_\alpha = \sum_v k_{\alpha,v}\, v.$$

Par construction la famille (D_α) vérifie la condition $(**)$, et l'élément de $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Div}(\mathcal{C}))$

$$m \longmapsto \sum_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle \, D_\alpha$$

n'est autre que $\psi(x)$. Ainsi (D_α) vérifie la condition $(*)$ et les deux applications définies ci-dessus sont inverses l'une de l'autre. La formule pour la hauteur découle de la définition même, ce qui montre le lemme. $\square$

Géométriquement ceci peut se voir de la façon suivante. Tout $x \in T(K)$ définit de manière naturelle un k-morphisme

$$\tilde{x} \, : \, \mathcal{C} \longrightarrow X_{\Sigma,k}$$

dont l'image n'est pas incluse dans le complémentaire de l'orbite ouverte. On pose alors, pour $\alpha \in \Sigma(1)$, $D_\alpha = \tilde{x}^*(\mathfrak{D}_\alpha)$. Autrement dit D_α est le diviseur d'intersection de l'image de $\mathcal{C}$ par $\tilde{x}$ avec le diviseur $\mathfrak{D}_\alpha$, et les entiers $k_{\alpha,v}$ définit ci-dessus sont des multiplicités d'intersections. La famille (D_α) ainsi définie n'est autre que $h_\Sigma(x)$. La formule de la page 12 de [Se2] permet d'ailleurs de retrouver l'expression donnée pour $H_{\Sigma,\phi}(x)$.

Corollaire 3.4.2
Posons

$$Z\left((T_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}\right) = (q-1)^r \sum_{(D_\alpha)\in\mathcal{A}_\Sigma} \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} T_\alpha^{\deg(D_\alpha)} \, \in \, \mathbf{Z}\,[[T_\alpha, \ \alpha\in\Sigma(1)]].$$

Alors pour tout $\phi = (s_\alpha) \in \mathrm{PL}(\Sigma) \otimes \mathbf{C}$ *tel que* $Z((q^{-s_\alpha}))$ *converge on a* $Z((q^{-s_\alpha})) = \zeta_\Sigma(\phi)$.

Dans la suite, comme déjà indiqué, nous nous intéressons au cas où $\phi = s\,\phi_0$ avec $s \in \mathbf{C}$ et ϕ_0 est l'élément de $\mathrm{PL}(\Sigma)$ correspondant à $\sum_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$. Nous étudions donc

$$Z(T) = (q-1)^r \sum_{(D_\alpha)\in\mathcal{A}_\Sigma} T^{\sum_\alpha \deg(D_\alpha)} \, \in \, \mathbf{Z}\,[[T]].$$

3.4.2 La formule d'inversion de Möbius

Pour nous affranchir de la condition $(**)$, nous allons introduire une formule d'inversion totalement analogue à celle utilisée par Salberger dans [Sa] pour traiter les conditions de coprimalité évoquées ci-dessus (et qui apparaît déjà dans des cas particulier dans [Sc] et [Pe1]).

Proposition 3.4.3
Il existe une unique fonction $\mu_\Sigma\,:\,\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\to\mathbf{C}$ *vérifiant*

$$\forall\,(D_\alpha)\in\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)},\ \mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha))=\sum_{\substack{(E_\alpha)\in\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\\(E_\alpha)\leqslant(D_\alpha)}}\mu_\Sigma((E_\alpha)).$$

Cette fonction vérifie en outre les propriétés suivantes.

1) Elle est multiplicative, c'est-à-dire que si (E_α) *et* (D_α) *vérifient*

$$\mathrm{Supp}(D_\alpha)\cap\mathrm{Supp}(E_\alpha)=\emptyset$$

pour tout $\alpha\in\Sigma(1)$ *alors*

$$\mu_\Sigma((D_\alpha)+(E_\alpha))=\mu_\Sigma((D_\alpha))\,\mu_\Sigma((E_\alpha)).$$

2) Pour tout $v\in\mathcal{P}_K$ *et tout* $n=(n_\alpha)\in\mathbf{N}^{\,\Sigma(1)}$, $\mu_\Sigma(\,(n_\alpha\,v)\,)$ *ne dépend que de* n *(et pas de* v*), on note* $\mu^0_\Sigma(n)$ *cette valeur. On a* $\mu^0_\Sigma(n)=0$ *si* $\sum n_\alpha=1$ *ou s'il existe* α *tel que* $n_\alpha\geqslant 2$.

3) Considérons

$$Z_{\mu_\Sigma}\left((T_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}\right)=\sum_{(D_\alpha)\in\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}}\mu_\Sigma((D_\alpha))\prod_{\alpha\in\Sigma(1)}T_\alpha^{\deg(D_\alpha)}\ \in\ \mathbf{Z}\,[[(T_\alpha)]]$$

Alors pour tout $(s_\alpha)\in\mathbf{C}^{\,\Sigma(1)}$ *du domaine* $\Re(s_\alpha)>\frac{1}{2}$ *la série*

$$\zeta_{\mu_\Sigma}((s_\alpha))=Z_{\mu_\Sigma}(\,(q^{\,-s_\alpha})\,)$$

est absolument convergente et définit donc une fonction holomorphe dans ce domaine. On note pour tout $n\in\mathbf{N}^{\,\Sigma(1)}$, $|n|=\sum_\alpha n_\alpha$*. Alors* $\zeta_{\mu_\Sigma}(1,\ldots,1)$ *vaut*

$$\prod_{v\in\mathcal{P}_K}\ \sum_{n\in\mathbf{N}^{\,\Sigma(1)}}\mu^0_\Sigma(n)\,q_v^{-|n|}$$

et on a pour tout $v\in\mathcal{P}_K$ *la relation*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^{\,\Sigma(1)}}\mu^0_\Sigma(n)\,q_v^{-|n|}=\left(1-q_v^{-1}\right)^t\,\frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{q_v^r}$$

en particulier $\zeta_{\mu_\Sigma}(1,\ldots,1)$ *est non nul.*

Démonstration : La démonstration dans le cas des corps de nombres, que l'on trouve dans [Sa] ou [Pe3], se transpose quasiment mot à mot, en remplaçant le monoïde des idéaux entiers du corps de nombres considéré par le monoïde des diviseurs effectifs. Nous rappelons les arguments.

Une telle fonction μ_Σ doit vérifier pour tout $(D_\alpha) \in \mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}$

$$\mu_\Sigma((D_\alpha)) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha)) - \sum_{\substack{(E_\alpha)\leqslant(D_\alpha)\\(E_\alpha)\neq(D_\alpha)}} \mu_\Sigma((E_\alpha))$$

ce qui par récurrence sur $\sum_\alpha \deg(D_\alpha)$ montre l'existence et l'unicité de cette fonction.

Soient (E_α) et (D_α) vérifiant

$$\mathrm{Supp}(D_\alpha) \cap \mathrm{Supp}(E_\alpha) = \emptyset$$

pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$. Il est immédiat que $\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}$ est multiplicative et on a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha)+(E_\alpha)) &= \mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha))\,\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((E_\alpha))\\ &= \left(\sum_{(D'_\alpha)\leqslant(D_\alpha)} \mu_\Sigma((D'_\alpha))\right)\left(\sum_{(E'_\alpha)\leqslant(E_\alpha)} \mu_\Sigma((E'_\alpha))\right).\end{aligned}$$

Maintenant l'hypothèse sur (E_α) et (D_α) entraîne que l'application

$$((D'_\alpha),(E'_\alpha)) \to (D'_\alpha + E'_\alpha)$$

établit une bijection entre

$$\{(D'_\alpha),\ D'_\alpha \leqslant D_\alpha\} \times \{(E'_\alpha),\ E'_\alpha \leqslant E_\alpha\}$$

et

$$\{(F'_\alpha),\ (F'_\alpha) \leqslant (D_\alpha + E_\alpha)\}$$

et en raisonnant par récurrence sur $\sum_\alpha \deg(D_\alpha) + \deg(E_\alpha)$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha)+(E_\alpha)) &= \mu_\Sigma((D_\alpha))\,\mu_\Sigma((E_\alpha))\\ &\quad + \sum_{\substack{(F'_\alpha)\leqslant(D_\alpha+E_\alpha)\\(F'_\alpha)\neq(D_\alpha+E_\alpha)}} \mu_\Sigma((F'_\alpha))\end{aligned}$$

soit par définition de μ_Σ

$$\mu_\Sigma((D_\alpha))\,\mu_\Sigma((E_\alpha)) = \mu_\Sigma((D_\alpha)+(E_\alpha)).$$

ce qui démontre 1).

La première assertion de 2) est immédiate. Soient $v \in \mathcal{P}_K$ et $n = (n_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$. S'il existe α_0 tel que $n_{\alpha_0} \geqslant 2$, définissons $n' \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$ en posant $n'_{\alpha_0} = n_{\alpha_0} - 1$ et $n'_\alpha = n_\alpha$ si $\alpha \neq \alpha_0$. Il est alors immédiat que

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((n_\alpha\, v)) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((n'_\alpha\, v))$$

et donc par définition de μ_Σ que $\mu_\Sigma((n_\alpha\, v)) = 0$. Si maintenant (n_α) vérifie $n_{\alpha_0} = 1$ pour un certain α_0 et $n_\alpha = 0$ si $\alpha \neq \alpha_0$ alors

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((n_\alpha\, v)) = 1 = \mu_\Sigma((n_\alpha\, v)) + \mu_\Sigma((0)_\alpha) = \mu_\Sigma((n_\alpha\, v)) + 1$$

et 2) est démontré.

Par la propriété 1), Z_{μ_Σ} s'écrit comme un produit eulérien

$$Z_{\mu_\Sigma}((T_\alpha)) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} \sum_{n \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^0(n) \prod_\alpha T_\alpha^{f_v\, n_\alpha}.$$

Par la propriété 2), pour tout $v \in \mathcal{P}_K$ et tout $(s_\alpha) \in \mathbf{C}^{\Sigma(1)}$ du domaine $\Re(s_\alpha) > \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^0(n) \prod_\alpha q^{-f_v\, n_\alpha\, s_\alpha} = 1 + \underset{f_v \to \infty}{\mathcal{O}}\left(q^{-\eta\, f_v}\right)$$

avec $\eta > 1$ ce qui au vu du domaine de convergence de $\zeta_{\mathcal{C}}$ montre 3), exception faite de la dernière assertion.

Celle-ci se voit simplement à l'aide des torseurs universels. Nous renvoyons à [Sa] pour plus de détails sur cette notion, ainsi que pour la description des torseurs universels au-dessus d'une variété torique déployée (on pourra également se reporter à [Co] pour ce dernier point). Munissons l'espace affine $\mathbf{A}_{k_v}^{\Sigma(1)}$ de coordonnées $(X_\alpha)_{\alpha \in \Sigma(1)}$. Soit $\mathcal{T}_{\Sigma,k_v}$ l'ouvert de $\mathbf{A}_{k_v}^{\Sigma(1)}$ complémentaire de l'intersection des fermés d'équations

$$\prod_{\alpha \notin \sigma} X_\alpha = 0$$

pour σ décrivant Σ. Cet ouvert contient le tore U_{Σ,k_v} d'équation $\prod_{\alpha \in \Sigma(1)} X_\alpha \neq 0$, dont le groupe des caractères s'identifie naturellement à $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$. Rappelons que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Sigma(1)} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_\Sigma) \longrightarrow 0.$$

Le morphisme de $\mathbf{Z}$-modules

$$M \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$$

induit alors un morphisme de tores

$$U_{\Sigma,k_v} \to T_{k_v}$$

qui s'étend en un morphisme

$$\pi \,:\, \mathcal{T}_{\Sigma,k_v} \to X_{\Sigma,k_v}.$$

Le morphisme

$$\mathbf{Z}^{\Sigma(1)} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_\Sigma)$$

induit une action naturelle d'un tore isomorphe à $\mathbf{G}_{m,k_v}^t$ sur U_{Σ,k_v}, qui s'étend en une action sur $\mathcal{T}_{\Sigma,k_v}$ et fait de $\mathcal{T}_{\Sigma,k_v}$ un torseur universel au-dessus de X_{Σ,k_v} (cf. [Sa, Proposition 8.5 & Remark 8.6(b)]). On en déduit

$$\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v) = \#\,X_{\Sigma,k_v}(k_v) = \frac{\#\left\{\,(x_\alpha)\in k_v^{\Sigma(1)},\ \exists\sigma\in\Sigma,\ \prod_{\alpha\notin\sigma} x_\alpha \neq 0\right\}}{(q_v-1)^t}$$

(rappelons que $\mathfrak{X}_\Sigma$ est le modèle canoniques de X_Σ sur $\mathcal{C}$, cf. remarque (iii) après l'énoncé du lemme 3.3.1). Notons

$$A(\Sigma) = \{\, n\in\{0,1\}^{\,\Sigma(1)},\ \exists\,\sigma\in\Sigma,\ \forall\alpha\notin\sigma,\ n_\alpha = 0\}.$$

Par définition de μ_Σ^0 on a alors

$$\forall\, n\in\{0,1\}^{\,\Sigma(1)},\ \mathbf{1}_{A(\Sigma)}(n) = \sum_{n'\leqslant n}\mu_\Sigma^0(n').$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\#\left\{\,(x_\alpha)\in k_v^{\Sigma(1)},\ \exists\sigma\in\Sigma,\ \prod_{\alpha\notin\sigma} x_\alpha \neq 0\right\}\\
&= \sum_{n\in\{0,1\}^{\,\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^0(n)\,\#\,\{\,(x_\alpha)\in k_v^{\Sigma(1)},\ x_\alpha = 0 \text{ si } n_\alpha = 1\,\}\\
&= \sum_{n\in\{0,1\}^{\,\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^0(n)\, q_v^{\#\Sigma(1)-|n|}
\end{aligned}$$

ce qui montre la formule annoncée. □

On peut se demander si la fonction ζ_{μ_Σ} se prolonge méromorphiquement à $\mathbf{C}^{\Sigma(1)}$, voire s'exprime comme une fraction rationnelle en les q^{-s_α}. Ceci est vrai si X_Σ est un espace projectif ou une surface de Hirzebruch : dans ces deux cas la fonction μ_Σ s'exprime simplement en termes de la fonction μ

«élémentaire», celle qui a justement été utilisée au chapitre 2. Le calcul est aisé, et est d'ailleurs effectué au chapitre 4 dans un cadre motivique.

Cependant un cas particulier d'un théorème de Kurokawa ([Ku]) montre que déjà pour le plan projectif éclaté en deux points il n'existe même pas de prolongement méromorphe. En effet dans ce cas la restriction de ζ_μ à la droite $(s,\dots,s)$ s'exprime dans le domaine de convergence absolue comme le produit eulérien

$$\prod_{v\in\mathcal{P}_K}\left(1-q_v^{-s}\right)^3\left(1+3\,q_v^{-s}+q_v^{-2\,s}\right).$$

Comme le polynôme $(1-T)^3\,(1+3\,T+T^2)$ n'a pas toutes ses racines de module 1, un tel produit eulérien n'admet pas de prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$.

Comme les termes d'erreur de la fonction zêta des hauteurs font intervenir cette fonction ζ_{μ_Σ}, il est légitime de penser que la fonction zêta des hauteurs elle-même n'admet pas de prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ (un tel résultat ne découle cependant pas a priori du résultat du paragraphe précédent).

Dans la suite du chapitre, pour alléger les notations, nous noterons μ la fonction μ_Σ (étant entendu que l'éventail Σ est fixé une fois pour toutes dans ce chapitre).

3.5 Le calcul proprement dit

3.5.1 Encore une réécriture

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{Z(T)}{(q-1)^r}&=\sum_{(D_\alpha)\in\mathcal{A}_\Sigma}T^{\sum\limits_\alpha\deg(D_\alpha)}\\&=\sum_{(D_\alpha)\in\mathcal{A}_\Sigma^{(*)}}\left(\sum_{\substack{(E_\alpha)\in\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\\(E_\alpha)\leqslant(D_\alpha)}}\mu((E_\alpha))\right)T^{\sum\limits_\alpha\deg(D_\alpha)}\end{aligned}$$

par la proposition 3.4.3. Nous utilisons les notations introduites à la section 3.2. Rappelons en particulier que σ_0 désigne un cône de Σ de dimension maximale, que les $(n_{\beta,\alpha})_{\substack{\beta\in\sigma_0\\\alpha\notin\sigma_0}}$ sont les opposés des coordonnées des $(\rho_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$ dans la base $(\rho_\beta)_{\beta\in\sigma_0}$ de M et que $(-\omega_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$ désigne les coordonnées de la classe du faisceau anticanonique dans la base $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$ de $\operatorname{Pic}(X_\Sigma)$. Il vient alors, par définition de $\mathcal{A}_\Sigma^{(*)}$,

$$
\begin{aligned}
&(q-1)^{-r}\,Z(T)\\
&= \sum_{\substack{(D_\alpha)\in \operatorname{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\\ (E_\alpha)\in \operatorname{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\\ \forall\,\beta\in\sigma_0,\ D_\beta+E_\beta\sim \sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}\,(D_\alpha+E_\alpha)}} \mu((E_\alpha))\,T^{\sum\limits_\alpha \deg(D_\alpha+E_\alpha)}\\
&= \sum_{\substack{(D_\alpha)\in \operatorname{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\\ (E_\alpha)\in \operatorname{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\\ \forall\,\beta\in\sigma_0,\ D_\beta+E_\beta\sim \sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}\,(D_\alpha+E_\alpha)}} \mu((E_\alpha))\\
&\qquad\qquad \times T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0}\deg(D_\alpha+E_\alpha)+\sum\limits_{\beta\in\sigma_0}\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}\deg(D_\alpha+E_\alpha)}\\
&= \sum_{\substack{(E_\alpha)\in \operatorname{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\\ (D_\alpha)\in \operatorname{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)\setminus\sigma_0(1)}}} \mu((E_\alpha)) \prod_{\beta\in\sigma_0} \#\left|\sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}(D_\alpha+E_\alpha)-E_\beta\right|\\
&\qquad\qquad \times T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha\deg(D_\alpha+E_\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Nous considérons d'abord le cas où $\mathcal{C}=\mathbf{P}^1$. Ceci n'est pas essentiel pour le calcul mais permet de mieux comprendre son déroulement dans le cas général.

On a alors

$$
\#|D| = \#\{E\geqslant 0,\ \deg(E)=\deg(D)\} = \frac{q^{\,1+\deg(D)}-1}{q-1}
$$

si $\deg(D)\geqslant 0$ (et bien sûr $\#|D|=0$ si $\deg(D)<0$).

Considérons le terme de la fonction zêta dépendant d'un (E_α) fixé. Il vaut

$$
\sum_{(D_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}} \prod_{\beta\in\sigma_0} \#\left|\sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}(D_\alpha+E_\alpha)-E_\beta\right| T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha\deg(D_\alpha+E_\alpha)} \tag{3.5.1.1}
$$

Soit $(d_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$ une famille d'entiers positifs. La contribution à la somme ci-dessus des $(D_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$ tels que $\deg(D_\alpha)=d_\alpha$ pour $\alpha\notin\sigma_0$ est

$$\#\{D\geqslant 0,\deg(D)=d_\alpha\}\prod_{\beta\in\sigma_0}\frac{q^{1+\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0}n_{\beta,\alpha}(d_\alpha+\deg(E_\alpha))-\deg(E_\beta)}-1}{q-1}\\ \times\, T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0}-\omega_\alpha(d_\alpha+\deg(E_\alpha))}$$

$$=\frac{1}{(q-1)^{r+t}}\,q^{-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)}\prod_{\alpha\notin\sigma_0}\left(q^{1+d_\alpha}-q^{\deg(E_\alpha)}\right)\\ \times\prod_{\beta\in\sigma_0}\left(q^{1+\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0}n_{\beta,\alpha}\,d_\alpha}-q^{\deg(E_\beta)}\right)T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0}-\omega_\alpha\,d_\alpha}.$$

On en déduit que l'expression (3.5.1.1) vaut

$$\sum_{\substack{d_\alpha\geqslant\deg(E_\alpha),\quad\alpha\notin\sigma_0\\ \sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0}n_{\beta,\alpha}d_\alpha\geqslant\deg(E_\beta)}}\frac{1}{(q-1)^{r+t}}\,q^{-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)}\prod_{\alpha\notin\sigma_0}\left(q^{1+d_\alpha}-q^{\deg(E_\alpha)}\right)\\ \times\prod_{\beta\in\sigma_0}\left(q^{1+\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0}n_{\beta,\alpha}\,d_\alpha}-q^{\deg(E_\beta)}\right)T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0}-\omega_\alpha\,d_\alpha}.$$

Remarquons que les inéquations

$$d_\alpha\geqslant 0,\quad \alpha\notin\sigma_0$$

et

$$\sum_{\alpha\notin\sigma_0}n_{\beta,\alpha}\,d_\alpha\geqslant 0,\quad \beta\in\sigma_0$$

sont celles définissant, dans la base duale de la base $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$, le dual du cône effectif de X_Σ.

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est de genre $g\geqslant 1$, nous nous ramenons à une expression sensiblement de la même forme que ci-dessus en écrivant

$$Z(T)=\sum_{\substack{(i_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}\\ 1\leqslant i_\alpha\leqslant h}}Z_{(i_\alpha)}(T)$$

où $Z_{(i_\alpha)}(T)$ se définit comme $Z(T)$ mais en restreignant la sommation aux (D_α) vérifiant

$$D_\alpha-\deg(D_\alpha)\,\mathfrak{d}^1\sim\mathfrak{d}^0_{i_\alpha}.$$

pour tout $\alpha \notin \sigma_0$. Il se trouve que chacun des h^t termes $Z_{(i_\alpha)}(T)$ apporte une contribution identique au terme principal de la fonction zêta des hauteurs. On peut rapprocher ceci du résultat obtenu par Schanuel dans [Sc]. Schanuel étudie le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur $\mathbf{P}^n(L)$, où L est un corps de nombres. A chaque élément de $\mathbf{P}^n(L)$ est associé un élément de $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_L)$, d'où une partition de $\mathbf{P}^n(L)$ en classes, et le comportement asymptotique s'obtient en sommant les contributions (identiques) de chacune de ces classes. Une telle paramétrisation des points rationnels a été généralisée par Robbiani et Salberger au cas d'une variété torique déployée sur L, en utilisant la notion de torseur universel (cf. [Ro, § 2.1]). Ici de manière similaire nous pourrions obtenir une interprétation de la paramétrisation des points rationnels par des éléments de $\mathrm{Pic}(\mathcal{C})^t$ en terme de ces torseurs universels.

Désormais et jusqu'à la section 3.5.4 nous supposons fixé un (i_α) et nous écrivons f_α pour la fonction f_{i_α}. Par abus de notation, nous désignerons par $Z(T)$ la fonction $Z_{(i_\alpha)}$. Il faudra donc se souvenir que pour obtenir le bon terme principal de la fonction zêta des hauteurs en $s=1$, il faudra multiplier la valeur obtenue à la proposition 3.5.2 pour le terme principal de la fonction $Z(q^{-s})$ par un facteur h^t.

Là encore nous fixons (E_α) et regardons le terme correspondant de $\frac{Z(T)}{(q-1)^r}$. Il vaut

$$\sum_{\substack{(D_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}\\ D_\alpha - \deg(D_\alpha)\,\mathfrak{d}^1 \sim \mathfrak{d}^0_{i_\alpha}}} \prod_{\beta\in\sigma_0} \# \left| \sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}(D_\alpha+E_\alpha) - E_\beta \right| T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha \deg(D_\alpha+E_\alpha)}. \tag{3.5.1.2}$$

La contribution à la somme ci-dessus des $(D_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$ tels que pour $\alpha\notin\sigma_0$

$$D_\alpha - \deg(D_\alpha)\,\mathfrak{d}^1 \;\sim\; \mathfrak{d}^0_{i_\alpha}$$

et $\deg(D_\alpha) = d_\alpha$ est

$$\begin{aligned}
&\prod_{\alpha\notin\sigma_0} \#\{\, D \geqslant 0,\ D - d_\alpha\,\mathfrak{d}^1 \;\sim\; \mathfrak{d}^0_{i_\alpha} \} \prod_{\beta\in\sigma_0} \# \left| \sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}(\mathfrak{d}^0_{i_\alpha} + d_\alpha\,\mathfrak{d}^1 + E_\alpha) - E_\beta \right| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times\ T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha (d_\alpha + \deg(E_\alpha))} \\
&= \frac{1}{(q-1)^{r+t}} \prod_{\alpha\notin\sigma_0} \left(q^{f_\alpha(d_\alpha)} - 1\right) \prod_{\beta\in\sigma_0} \left(q^{f_\beta\left(\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}(d_\alpha + \deg(E_\alpha)) - \deg(E_\beta)\right)} - 1 \right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times\ T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha\, (d_\alpha + \deg(E_\alpha))}
\end{aligned}$$

(cf. ci-dessous pour la définition de f_β et des commentaires). Finalement l'expression (3.5.1.2) vaut

$$\frac{1}{(q-1)^{r+t}} \sum_{\substack{y\in \operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee \\ \forall \alpha\in\Sigma(1),\ \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle \geqslant \deg(E_\alpha)}} \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \left(q^{\,f_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle - \deg(E_\alpha))} - 1\right) T^{\langle y, -\omega\rangle}.$$

Pour $\beta\in\sigma_0$, f_β désigne l'application définie pour $n\geqslant 0$ par

$$f_\beta(n) \,=\, l\left(n\,\mathfrak{d}^1 + \sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}(\mathfrak{d}^0_{i_\alpha} + \mathfrak{d}^0_{j_\alpha}) - \mathfrak{d}^0_{j_\beta}\right),$$

j_α désignant, pour tout $\alpha\in\Sigma(1)$, l'unique élément de $\{1,\dots,h\}$ vérifiant

$$E_\alpha \,\sim\, \mathfrak{d}^0_{j_\alpha} + \deg(E_\alpha)\,\mathfrak{d}^1.$$

Nous poserons aussi $f_\beta(n) = 1+n$ pour $n<0$. Naturellement f_β dépend de (E_α) mais nous n'indiquons pas cette dépendance qui ne ferait qu'alourdir la notation, et qu'il n'est pas essentiel de retenir puisque pour mener à bien notre calcul nous nous servirons ensuite simplement du fait que $f_\beta(n) = 1-g+n$ pour tout $n > 2\,g-2$ et

$$f_\beta(n) \leqslant 1+n$$

pour $n\leqslant 2\,g-2$ (cf. l'énoncé des lemmes 3.5.3 et 3.5.5).

Dans le cas $g=0$ nous poserons $f_\alpha(n) = 1+n$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$ et tout $\alpha\in\Sigma(1)$ ce qui permet d'effectuer le calcul simultanément pour les cas $g=0$ et $g\geqslant 1$ (il ne nuirait sans doute pas à la compréhension du calcul de traiter le cas $g=0$ séparément, mais ceci allongerait un peu trop le présent texte).

3.5.2 Méthode utilisée

Nous aurons ainsi à estimer des séries du type suivant. Soit C un cône polyédral rationnel strictement convexe de $\mathcal{N}\otimes\mathbf{R}$ où $\mathcal{N}$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini. Soit n_0 un élément de l'intérieur de C. Nous posons

$$Z_{C,n_0}(T) = \sum_{y\in C^\vee\cap\mathcal{N}^\vee} T^{\langle y,n_0\rangle} \,\in\, \mathbf{Z}[[T]].$$

Dans [Pe2], Peyre utilise cette série pour une définition alternative de la constante α^* et remarque qu'elle apparaît comme facteur local des fonctions L définies par Draxl dans [Dr]. Ayant normalisé la mesure de Lebesgue sur

$\mathcal{N}^\vee \otimes \mathbf{R}$ par le réseau $\mathcal{N}^\vee$, nous notons χ_C la fonction caractéristique de C, c'est à dire

$$\chi_C(s) = \int_{C^\vee} e^{-\langle s,y\rangle} dy,$$

cette expression ayant un sens pour tout élément $s \in \mathcal{N} \otimes \mathbf{C}$ qui est dans l'intérieur de $C + i\mathcal{N} \otimes \mathbf{R}$. Nous avons alors ([Pe2, 3.1])

Proposition 3.5.1
La série $Z_{C,n_0}(q^{-s})$ converge absolument pour tout $s \in \mathbf{C}$ du domaine $\Re(s) > 0$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle d'ordre $\mathrm{rg}(\mathcal{N})$ en $s = 0$. Le terme principal en $s = 0$ est

$$\ln(q)^{-\mathrm{rg}(\mathcal{N})} \chi_C(n_0).$$

Démonstration : L'idée est d'écrire $C^\vee$ comme le support d'un éventail régulier Δ, ce qui est toujours possible et correspond au problème de la résolution équivariante des singularités pour les variétés toriques. Alors $C^\vee \cap \mathcal{N}^\vee$ est la réunion disjointe des $\mathrm{intrel}(\delta) \cap \mathcal{N}^\vee$ pour $\delta \in \Delta$ ($\mathrm{intrel}(\delta)$ désignant l'intérieur relatif de δ). Si δ est un cône de Δ, de générateurs $m_1, \ldots, m_k$, on a

$$\sum_{y \in \sum\limits_{i=1,\ldots,k} \mathbf{N}_{>0} m_i} T^{\langle y, n_0\rangle} = \prod_{i=1,\ldots,k} \left((1 - T^{\langle m_i, n_0\rangle})^{-1} - 1\right).$$

La contribution au pôle d'ordre $\mathrm{rg}(\mathcal{N})$ provient donc des cônes maximaux de Δ. Notons $\delta_1, \ldots, \delta_l$ ces cônes maximaux. Pour $j = 1, \ldots, l$, notons $m_{j,1}, \ldots, m_{j,k_j}$ les générateurs du cône δ_j. Le terme principal en $s = 0$ est alors

$$\ln(q)^{-\mathrm{rg}(\mathcal{N})} \sum_{j=1,\ldots,l} \prod_{i=1,\ldots,k_j} \langle m_{j,i}\,,\, n_0\rangle^{-1}$$

et en découpant l'intégrale sur $C^\vee$ en intégrales sur les δ_i, on obtient que

$$\chi_C(n_0) = \sum_{j=1}^{l} \prod_{i=1}^{k_j} \langle m_{j,i}\,,\, n_0\rangle^{-1}$$

d'où le résultat. $\square$

On obtient en particulier que

$$\alpha^*(X_\Sigma) = \log(q)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))} \lim_{s\to 0} \left[s^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))} Z_{C_{\mathrm{eff}}(X_\Sigma), -\omega_\Sigma}\left(q^{-s}\right)\right]. \quad (3.5.2.1)$$

Nous terminons cette section par quelques remarques heuristiques qui permettent de bien appréhender la calcul de la fonction zêta qui va suivre.

Ce qu'on peut retenir de la démonstration précédente est : «lorsqu'on somme une expression du type $q^{-s\langle y,n_0\rangle}$ sur des points y contenus dans un cône de dimension donnée, on obtient une fraction rationnelle en q^{-s} avec un pôle d'ordre au plus cette dimension en $s=0$». Ainsi les séries du type

$$Z_{C,n_0,(d_j),(k_j)}(q^{-s}) = \sum_{\substack{y\in C^\vee\cap\mathcal{N}^\vee \\ \forall j\in J,\,\langle y,d_j\rangle\geqslant k_j}} q^{-s\langle y,n_0\rangle}$$

où $(d_j)_{j\in J}$ est une famille finie d'éléments de C et $(k_j)_{j\in J}$ une famille d'entiers positifs, ont le même terme dominant que celui de $Z_{C,n_0}(q^{-s})$ en $s=0$, car une telle série est obtenue à partir de Z_{C,n_0} en retirant les termes correspondants aux y situés sur un nombre fini d'hyperplans, et ces termes ne fournissent donc en $s=0$ que des pôles d'ordre strictement inférieur à celui de Z_{C,n_0}. Notre fonction zêta des hauteurs s'obtient alors (du moins dans le cas $g=0$) en sommant de telles séries, et nous aurons besoin de quelques renseignements sur le terme d'erreur pour assurer la convergence de cette sommation.

Dans le cas $g\geqslant 1$ nous n'obtenons pas exactement des séries de ce type puisque nous n'avons pas d'expression explicite des $f_\alpha(n)$ pour n petit. Cependant «remplacer» $f_\alpha(n)$ par $1-g+n$ pour n petit ne modifie là encore la série que sur un nombre fini d'hyperplans et le terme dominant reste inchangé. Là encore il nous faudra un contrôle du terme d'erreur, rendu notamment possible par le fait que nous disposons d'une majoration explicite pour $f_\alpha(n)$.

3.5.3 Le calcul

Nous décomposons $Z(T)$ en une somme de plusieurs termes et nous estimons le comportement de chaque terme séparément. Nous écrivons d'abord

$$Z(T) = (q-1)^{-t}\sum_{A\subset\Sigma(1)}(-1)^{\#A}\,Z_A(T)$$

avec, pour $A\subset\Sigma(1)$,

$$Z_A(T) = \sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}}\mu((E_\alpha))\,Z_{A,(E_\alpha)}(T),$$

$Z_{A,(E_\alpha)}(T)$ désignant

$$\sum_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X_\Sigma)^\vee \\ \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant\deg(E_\alpha)}} q^{\sum\limits_{\alpha\notin A} f_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))}\,T^{\langle y,-\omega\rangle}$$

(c'est-à-dire que nous développons le produit $\prod_{\alpha\in\Sigma(1)} (q^{\cdots} - 1)$).

Nous écrivons alors $C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^\vee$ comme le support d'un éventail régulier Δ, dont l'ensemble des rayons est noté $\Delta(1)$. Pour $i \in \Delta(1)$ nous notons m_i le générateur du rayon i. Pour tout cône δ de Δ nous notons également

$$I_\delta = \{i \in \Delta(1),\, i \in \delta\}$$

l'ensemble de ses rayons (ainsi $I_{\{0\}} = \emptyset$). Pour toute partie I de $\Delta(1)$ nous noterons

$$C(I) = \sum_{i\in I} \mathbf{N}_{>0}\, m_i$$

(avec la convention $C(\emptyset) = \{0\}$) de sorte que $C(I_\delta)$ est l'ensemble des points du réseau $\operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee$ contenu dans l'intérieur relatif du cône δ. Par la suite, nous ne considérerons que des $C(I)$ avec I défini comme un sous-ensemble d'un I_δ, et donc un tel $C(I)$ est encore un $C(I_{\delta'})$ pour un certain cône δ'.

Nous allons traiter séparément la contribution de chacun des intérieurs relatifs des cônes de Δ. Nous écrivons

$$Z_A(T) = \sum_{\delta\in\Delta} Z_{A,\delta}(T)$$

avec

$$Z_{A,\delta}(T) = \sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}} \mu((E_\alpha))\, Z_{A,\delta,(E_\alpha)}(T),$$

$Z_{A,\delta,(E_\alpha)}(T)$ désignant

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\alpha\in\Sigma(1),\ \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant \deg(E_\alpha)}} q^{\sum\limits_{\alpha\notin A} f_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle - \deg(E_\alpha))}\, T^{\langle y,-\omega\rangle}.$$

Le cas $A = \emptyset$ Ce cas correspond au terme principal de notre fonction zêta (c'est-à-dire que les $Z_A(T)$ avec $A \neq \emptyset$ ne fourniront que des pôles d'ordre $< t$). En fait seules les $Z_{\emptyset,\delta}$ où δ est de dimension maximale donneront des pôles d'ordre t, ce qui correspond à la remarque heuristique formulée plus haut.

Soit $\delta \in \Delta$. Nous décomposons encore

$$Z_{\emptyset,\delta}(T) = \sum_{J\subset\Sigma(1)} (-1)^{\# J}\, Z_{\emptyset,\delta,J}(T)$$

avec

$$Z_{\emptyset,\delta,J}(T) = \sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}} \mu((E_\alpha))\, Z_{\emptyset,\delta,J,(E_\alpha)}(T),$$

$Z_{\emptyset,\delta,J,(E_\alpha)}(T)$ désignant

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\,\alpha\in J,\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\,<\,\deg(E_\alpha)}} q^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} f_\alpha(\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha)\,)}\,T^{\,\langle y,-\omega\rangle}.$$

Les termes $Z_{\emptyset,\sigma,J}(T)$ avec $J\neq\emptyset$ sont les «termes d'erreur» qui apparaissent quand on approxime la sommation

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\alpha\in\Sigma(1),\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant\deg(E_\alpha)}}$$

par la sommation

$$\sum_{y\in C(I_\delta)}$$

qui correspond au cas $J=\emptyset$. Le terme dominant de $Z_{\emptyset,\delta}(q^{-s})$ en $s=1$ sera le même que celui de $Z_{\emptyset,\delta,\emptyset}(q^{-s})$, cette dernière série admettant une expression explicite, modulo le fait qu'on approxime $f_\alpha(n)$ par $1-g+n$.

Plus précisément nous avons

Proposition 3.5.2
La série $Z_{\emptyset,\delta,J}(q^{-s})$ converge absolument pour $\Re(s)>1$ et pour un $\varepsilon>0$ se prolonge en une fonction méromorphe à $\Re(s)>1-\varepsilon$ qui a en $s=1$ un pôle d'ordre $\dim(\delta)$ si $J=\emptyset$, et d'ordre inférieur à $\dim(\delta)$ si $J\neq\emptyset$. Cet ordre est de plus strictement inférieur si $J\neq\emptyset$ et $\dim(\delta)=t$. La fonction méromorphe définie sur $\Re(s)>1$ par

$$f(s)=\sum_{\substack{\delta\in\Delta\\ \dim(\delta)=t}} Z_{\emptyset,\delta,\emptyset}(q^{-s})$$

a un pôle d'ordre t en $s=1$, de terme principal

$$\alpha^*(X_\Sigma)\,q^{\,\#\Sigma(1)\,(1-g)}\,\ln(q)^{-t}\prod_{v\in\mathcal{P}_K}\left(1-q_v^{-1}\right)^t\,\frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{q_v^r}.$$

Nous déduisons cette proposition du lemme suivant, qui montre en particulier comment contrôler le terme d'erreur apparaissant quand on approxime $f_\alpha(n)$ par $1-g+n$ pour n petit.

Lemme 3.5.3
Soit (E_α) *un élément de* $\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}$. *Soient* δ *un cône de* Δ, J *une partie (éventuellement vide) de* $\Sigma(1)$. *Nous supposons données pour tout* $\alpha \in \Sigma(1)$ *des fonctions*

$$\phi_\alpha \,:\, \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

vérifiant $\phi_\alpha(n) = 1 - g + n$ *si* $n > 2\,g$ *et* $\phi_\alpha(n) \leqslant 1 + n$ *si* $n \leqslant 2\,g$.

Nous supposons également donnés pour $\alpha \in J$ *des entiers* k_α *vérifiant*

$$0 \leqslant k_\alpha \leqslant 2\,g + \deg(E_\alpha).$$

Alors la série

$$\sum_{\substack{y \in C(I_\delta) \\ \forall \alpha \in J,\, \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \leqslant k_\alpha}} q^{\sum\limits_{\alpha \in \Sigma(1)} \phi_\alpha\left(\langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - \deg(E_\alpha)\right)} \, T^{\langle y, -\omega \rangle}$$

se décompose en une somme

$$\sum_{I' \subset I_\delta} \left(\prod_{i \in I'} \left[\left(1 - (q\,T)^{-\langle m_i, \omega \rangle} \right)^{-1} - 1 \right] \right) \times P_{I'}(T)$$

où $P_{I'}$ *est un polynôme à coefficients positifs. Il existe en outre un* $\varepsilon > 0$ *ne dépendant que de* Σ *et de* Δ, *tels que pour tout réel* $\theta > 1 - \varepsilon$ *on a la majoration*

$$P_{I'}\left(q^{-\theta}\right) \leqslant C \sup_{\alpha \in \Sigma(1)} \left[2\,g + \deg(E_\alpha) \right]^{\#\Sigma(1)} \, q^{-\frac{3}{4} \sum\limits_{\alpha \in \Sigma(1)} \deg(E_\alpha)}$$

où C *est une constante ne dépendant que de* $\#\Sigma(1)$ *et de* g *et qu'on pourrait rendre explicite. Par ailleurs si* δ *est de dimension maximale, alors si* J *est non vide on a* $P_{I_\delta} = 0$ *et si* J *est vide,* P_{I_δ} *est constant, égal à*

$$q^{\#\Sigma(1)\,(1-g) - \sum\limits_{\alpha \in \Sigma(1)} \deg(E_\alpha)}.$$

Démonstration : Afin d'alléger un peu l'écriture, nous adoptons les notations suivantes. Pour δ cône de Δ, $J \subset \Sigma(1)$ et $(k_\alpha) \in \mathbf{N}^J$, nous désignerons l'ensemble

$$\{ y \in C(I_\delta),\ \forall \alpha \in J,\, \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \leqslant k_\alpha \}$$

par $C(I_\delta)_{J,(k_\alpha)}$ et, pour $K \subset \Sigma(1) \setminus J$, l'ensemble

$$\left\{ y \in C(I_\delta)_{J,(k_\alpha)},\ \forall \alpha \in K,\, \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \leqslant 2\,g + \deg(E_\alpha) \right\}$$

par $C(I_\delta)_{J,(k_\alpha),K}$.

La série à évaluer est alors égale à

$$Z_1 + \sum_{\substack{K\subset\Sigma(1)\setminus J\\ K\neq\emptyset}} (-1)^{\# K} Z_{2,K} - \sum_{\substack{K\subset\Sigma(1)\setminus J\\ K\neq\emptyset}} (-1)^{\# K} Z_{3,K}$$

avec

$$Z_1 = \sum_{y\in C(I_\delta)_{J,(k_\alpha)}} q^{\sum\limits_{\alpha\notin J}(1-g+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))+\sum\limits_{\alpha\in J}\phi_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))} T^{\langle y,-\omega\rangle},$$

$$Z_{2,K} = \sum_{y\in C(I_\delta)_{J,(k_\alpha),K}} q^{\sum\limits_{\alpha\notin J}(1-g+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))+\sum\limits_{\alpha\in J}\phi_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))} T^{\langle y,-\omega\rangle}$$

et

$$Z_{3,K} = \sum_{y\in C(I_\delta)_{J,(k_\alpha),K}} q^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}\phi_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))} T^{\langle y,-\omega\rangle}.$$

Les termes $Z_{2,K}$ et $Z_{3,K}$ sont les termes d'erreur qu'on obtient en faisant l'approximation $\phi_\alpha(n) = 1-g+n$ pour $\alpha\notin J$. Dans l'application que nous faisons du lemme, si $g=0$ on a en fait $\phi_\alpha(n)=1+n$ et ces termes d'erreurs n'apparaissent pas. En effectuant une récurrence descendante sur $\# J$, on se ramène à traiter uniquement le terme Z_1.

Si $J=\emptyset$, ce terme s'évalue immédiatement, il vaut

$$q^{\#\Sigma(1)(1-g)-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)} \left(\prod_{i\in I_\delta}\left[\left(1-(qT)^{-\langle m_i,\omega\rangle}\right)^{-1}-1\right]\right).$$

Si $J\neq\emptyset$, nous posons

$$I_{J,1} = \{\, i\in I_\delta,\ \forall\,\alpha\in J,\ \langle m_i,\mathcal{D}_\alpha\rangle = 0\}$$

et $I_{J,2} = I_\delta\setminus I_{J,1}$. En particulier on a $C(I_{J,1})_{J,(k_\alpha)} = C(I_{J,1})$.

L'expression pour Z_1 se décompose alors en un produit

$$P(T)\times\sum_{y_1\in C(I_{J,1})} q^{\langle y_1,\sum\limits_{\alpha\notin J}\mathcal{D}_\alpha\rangle} T^{\langle y_1,-\omega\rangle}$$

où on désigne par $P(T)$ l'expression

$$\sum_{y_2\in C(I_{J,2})_{J,(k_\alpha)}} q^{\sum\limits_{\alpha\notin J}(1-g+\langle y_2,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))+\sum\limits_{\alpha\in J}\phi_\alpha(\langle y_2,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))} T^{\langle y_2,-\omega\rangle}.$$

Si $y_1 \in C(I_{J,1})$, on a

$$\langle y_1, \sum_{\alpha \notin J} \mathcal{D}_\alpha \rangle = \langle y_1, -\omega \rangle$$

et le deuxième facteur est égal à

$$\prod_{i \in I_{J,1}} \left[\left(1 - (q\,T)^{\,-\langle m_i, \omega \rangle} \right)^{-1} - 1 \right].$$

Passons au facteur $P(T)$. Soit y_2 un élément de $C(I_{J,2})_{J,(k_\alpha)}$, que l'on écrit

$$y_2 = \sum_{i \in I_{J,2}} \lambda_i\, m_i$$

avec les λ_i dans $\mathbf{N}_{>0}$.

Par définition de $I_{J,2}$, pour tout i de $I_{J,2}$, il existe α dans J vérifiant $\langle m_i, \mathcal{D}_\alpha \rangle \geqslant 1$. Comme y_2 vérifie

$$\forall \alpha \in J, \quad \langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle \leqslant k_\alpha$$

on a

$$\lambda_i \leqslant \operatorname*{Sup}_{\alpha \in J}(k_\alpha).$$

Ainsi $C(I_{J,2})_{J,(k_\alpha)}$ est fini (et $P(T)$ est un polynôme en T), en fait son cardinal est majoré par

$$\operatorname*{Sup}_{\alpha \in J}(\,k_\alpha)^{\,\# I_{J,2}}$$

ce nombre étant lui-même majoré par

$$\operatorname*{Sup}_{\alpha \in \Sigma(1)} \left[2\,g + \deg(E_\alpha)\right]^{\,\#\Sigma(1)}.$$

Par ailleurs un y_2 de $C(I_{J,2})_{J,(k_\alpha)}$ vérifie

$$0 \leqslant \langle y_2, -\omega \rangle \leqslant m \operatorname*{Sup}_{\alpha \in \Sigma(1)} (2\,g + \deg(E_\alpha))$$

où

$$m = \#\,\Sigma(1) \operatorname*{Sup}_{i \in \Delta(1)} (\langle m_i, -\omega \rangle).$$

On a donc pour tout réel θ

$$P\left(q^{-\theta}\right) \leqslant \sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J,\,(k_\alpha)}} q^{\sum\limits_{\alpha \notin J}(1-g+\langle y_2,\mathcal{D}_\alpha\rangle - \deg(E_\alpha)) + \sum\limits_{\alpha\in J} \phi_\alpha\,(\langle y_2,\mathcal{D}_\alpha\rangle - \deg(E_\alpha))} \times q^{-\theta\,\langle y_2,-\omega\rangle}$$

$$\leqslant \sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J,\,(k_\alpha)}} q^{\sum\limits_{\alpha \notin J}(1-g+\langle y_2,\mathcal{D}_\alpha\rangle - \deg(E_\alpha)) + \sum\limits_{\alpha\in J} 1+\langle y_2,\mathcal{D}_\alpha\rangle - \deg(E_\alpha)} \times q^{-\theta\,\langle y_2,-\omega\rangle}$$

$$\leqslant \sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J,\,(k_\alpha)}} q^{\#\,\Sigma(1)}\, q^{-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} \deg(E_\alpha)}\, q^{(1-\theta)\,\langle y_2,-\omega\rangle}$$

soit

$$P(q^{-\theta}) \leqslant \operatorname*{Sup}_{\alpha\in\Sigma(1)}\,[2\,g+\deg(E_\alpha)]^{\#\Sigma(1)}\, q^{\#\,\Sigma(1)}\, q^{-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)} \times \operatorname{Sup}\left(1, q^{m\,(1-\theta)\,(2\,g+\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha))}\right).$$

Il suffit donc de choisir $\varepsilon \leqslant \frac{1}{4\,m}$ pour avoir la majoration annoncée.

Notons enfin que si δ est un cône de dimension maximale, les $(m_i)_{i\in I_\delta}$ forment une $\mathbf{Z}$-base de $\operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee$, et si $J \neq \emptyset$ on ne peut avoir $I_{J,2} = \emptyset$. Ceci joint au calcul pour $J=\emptyset$ montre les deux dernières assertions du lemme. □

Comme il résulte immédiatement de la proposition 3.4.3 que la série

$$\sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}} |\mu((E_\alpha))|\,(2\,g+\operatorname{Sup}(\deg(E_\alpha)))^{\#\,\Sigma(1)}\, q^{-\eta\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)}$$

est convergente si $\eta > \frac{1}{2}$, le lemme 3.5.3 entraîne la proposition 3.5.2. Le terme principal du pôle d'ordre t en $s=1$ vaut d'après la démonstration de la dernière assertion du lemme 3.5.3, la formule (3.5.2.1) et les propositions 3.4.3 et 3.5.1

$$\begin{aligned}
&q^{\#\,\Sigma(1)\,(1-g)}\ \ln(q)^{-t}\ \chi_{C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^\vee}(-\omega) \sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}} \mu((E_\alpha))\, q^{-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)}\\
&= q^{\#\,\Sigma(1)\,(1-g)}\, Z_{\mu_\Sigma}(q^{-1},\dots,q^{-1})\ \ln(q)^{-t}\ \chi_{C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^\vee}(-\omega)\\
&= q^{\#\,\Sigma(1)\,(1-g)}\, \alpha^*(X_\Sigma)\ \ln(q)^{-t} \prod_{v\in\mathcal{P}_K} \left(1-q_v^{-1}\right)^t\, \frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{q_v^r}.
\end{aligned}$$

La proposition 3.5.2 est démontrée. □

Le cas $A \neq \emptyset$. Comme il a déjà été dit, dans ce cas $Z_A(T)$ ne fournit que des pôles d'ordre $< t$ et ne contribue pas au terme principal de la fonction zêta des hauteurs. Pour comprendre pourquoi, et se faire une idée des calculs qui vont suivre, considérons la série

$$\sum_{y \in C(I_\delta)} q^{\langle y, \mathcal{L}_2 \rangle} q^{-s \langle y, \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \rangle}$$

où $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont deux éléments du cône effectif, tels que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ est dans l'intérieur du cône effectif, et $\mathcal{L}_1$ est non nul. Soit

$$I_1 = \{i \in I_\delta,\ \langle m_i, \mathcal{L}_1 \rangle = 0\}$$

et

$$I_2 = I_\delta \setminus I_1.$$

Si δ est de dimension maximale, I_2 n'est pas vide. La série se réécrit comme un produit

$$\sum_{y \in C(I_1)} q^{(1-s) \langle y, \mathcal{L} \rangle} \times \sum_{y \in C(I_2)} q^{(1-s) \langle y, \mathcal{L}_2 \rangle - s \langle y, \mathcal{L}_1 \rangle}.$$

La deuxième série converge absolument pour $\Re(s) \geqslant 1$ et la première fournit un pôle d'ordre $\# I_1$ en $s = 1$ (en particulier si δ est de dimension maximale, donc égale à t, le pôle obtenu est d'ordre au plus $t - 1$). De plus nous retenons que «les m_i qui donnent des pôles en $s = 1$ sont les m_i tels que $\langle m_i, \mathcal{L}_1 \rangle = 0$». Dans le cas qui nous intéresse ce sont les m_i tels que

$$\langle m_i, \sum_{\alpha \in A} \mathcal{D}_\alpha \rangle = 0$$

soit

$$\forall \alpha \in A,\ \langle m_i, \mathcal{D}_\alpha \rangle = 0.$$

Ceci explique en particulier la définition des ensembles $I_{A,J,1}$ et $I_{A,J,2}$ introduits plus loin.

Nous utilisons une décomposition analogue à celle du cas $A = \emptyset$, mais légèrement différente.

$$Z_{A,\delta}(T) = \sum_{J \subset \Sigma(1) \setminus A} (-1)^{\# J} Z_{A,\delta,J}(T)$$

avec

$$Z_{A,\delta,J}(T) = \sum_{(E_\alpha)_{\alpha \in \Sigma(1)}} \mu((E_\alpha)) Z_{A,\delta,J,(E_\alpha)}(T)$$

où on désigne par $Z_{A,\delta,J,(E_\alpha)}(T)$ l'expression

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\,\alpha\in A,\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle \geqslant \deg(E_\alpha)\\ \forall\,\alpha\in J,\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle < \deg(E_\alpha)}} q^{\sum\limits_{\alpha\notin A} f_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))}\,T^{\langle y,-\omega\rangle}.$$

Notons que les m_i vérifiant $\forall\alpha\in A$, $\langle m_i,\mathcal{D}_\alpha\rangle = 0$ ne contribuent pas à la première condition sur y, cette condition peut donc être «oubliée» pour trouver l'ordre du pôle, cependant nous verrons ensuite que cette condition assure la convergence de la sommation sur les (E_α).

Nous montrons

Proposition 3.5.4
Pour $J\subset\Sigma(1)\setminus A$, la série $Z_{A,\delta,J}(q^{-s})$ converge absolument pour $\Re(s)>1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\Re(s)>1-\varepsilon$ qui a un pôle en $s=1$ d'ordre inférieur à $\dim(\delta)$. Cet ordre est de plus strictement inférieur si $\dim(\delta)=t$.

Nous déduisons cette proposition du lemme suivant, d'énoncé et de démonstration très similaires à ceux du lemme 3.5.3.

Lemme 3.5.5
Soit (E_α) un élément de $\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}$. Soient δ un cône de Δ et J une partie (éventuellement vide) de $\Sigma(1)\setminus A$. Nous supposons données pour tout α de $\Sigma(1)$ des fonctions

$$\phi_\alpha\,:\,\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$$

vérifiant $\phi_\alpha(n)=1-g+n$ si $n>2\,g$ et $\phi_\alpha(n)\leqslant 1+n$ si $n\leqslant 2\,g$.

Nous supposons également donnés pour $\alpha\in J$ des entiers k_α vérifiant

$$0\leqslant k_\alpha\leqslant 2\,g+\deg(E_\alpha).$$

Alors la série

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\,\alpha\in A,\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle \geqslant \deg(E_\alpha)\\ \forall\alpha\in J,\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle \leqslant k_\alpha}} q^{\sum\limits_{\alpha\notin A} \phi_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))}\,T^{\langle y,-\omega\rangle}$$

se décompose en une somme

$$\sum_{I'\subset I_\delta}\left(\prod_{i\in I'}\left[\left(1-(q\,T)^{-\langle m_i,\omega\rangle}\right)^{-1}-1\right]\right)\times R_{I'}(T)$$

où $R_{I'}$ est une série entière en T à coefficients positifs. Il existe en outre un $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de Σ et de Δ tels que pour tout réel $\theta > 1-\varepsilon$ on a la majoration

$$R_{I'}\left(q^{-\theta}\right) \leqslant C\left(1+\operatorname*{Sup}_{\alpha\in\Sigma(1)}(\deg(E_\alpha))\right)^{\#\Sigma(1)} q^{-\frac{3}{4}\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)}$$

où C est une constante ne dépendant que de g et $\#\Sigma(1)$ et que l'on pourrait rendre explicite. Par ailleurs si δ est un cône de dimension maximale, on a $R_{I_\delta} = 0$.

Démonstration : Pour δ cône de Δ, $J \subset \Sigma(1) \setminus A$ et $(k_\alpha) \in \mathbf{N}^J$, nous reprenons la notation $C(I_\delta)_{J,(k_\alpha)}$ introduite au début de la preuve du lemme 3.5.3. Par ailleurs nous désignerons l'ensemble

$$\left\{y \in C(I_\delta)_{J,(k_\alpha)},\, \forall\alpha\in A,\, \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle \geqslant \deg(E_\alpha)\right\}$$

par $C(I_\delta)^A_{J,(k_\alpha)}$ et, pour $K \subset \Sigma(1)\setminus(J\cup A)$, l'ensemble

$$\left\{y \in C(I_\delta)^A_{J,(k_\alpha)},\ \forall\alpha\in K,\, \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle \leqslant 2\,g+\deg(E_\alpha)\right\}$$

par $C(I_\delta)^A_{J,(k_\alpha),K}$.

La série à évaluer est alors égale à

$$Z_1 + \sum_{\substack{K\subset\Sigma(1)\setminus(J\cup A)\\ K\neq\emptyset}} (-1)^{\#K} Z_{2,K} - \sum_{\substack{K\subset\Sigma(1)\setminus(J\cup A)\\ K\neq\emptyset}} (-1)^{\#K} Z_{3,K}$$

avec

$$Z_1 = \sum_{y\in C(I_\delta)^A_{J,(k_\alpha)}} q^{\sum\limits_{\alpha\notin J\cup A}(1-g+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))+\sum\limits_{\alpha\in J}\phi_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))} T^{\langle y,-\omega\rangle},$$

$$Z_{2,K} = \sum_{y\in C(I_\delta)^A_{J,(k_\alpha),K}} q^{\sum\limits_{\alpha\notin J\cup A}(1-g+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))+\sum\limits_{\alpha\in J}\phi_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))} T^{\langle y,-\omega\rangle}$$

et

$$Z_{3,K} = \sum_{y\in C(I_\delta)^A_{J,(k_\alpha),K}} q^{\sum\limits_{\alpha\notin A}\phi_\alpha(\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-\deg(E_\alpha))} T^{\langle y,-\omega\rangle}.$$

Si $g=0$ seul le terme Z_1 apparaît. Si $g \geqslant 1$ on raisonne par récurrence sur $\#J$. Il suffit donc de traiter le terme Z_1. Pour cela nous posons

$$I_{A,J,1} = \{\, i \in I_\delta,\, \forall\,\alpha\in A\cup J,\, \langle m_i,\mathcal{D}_\alpha\rangle = 0\}$$

et $I_{A,J,2} = I_\delta \setminus I_{A,J,1}$. Ainsi tout élément de $C(I_\delta)^A_{J,(k_\alpha)}$ s'écrit de manière unique y_1+y_2 avec

$$y_1 \in C(I_{A,J,1})$$

et

$$y_2 \in \coprod_{\substack{h_\alpha \in \mathbf{N}^A \\ h_\alpha \geqslant \deg(E_\alpha)}} \left\{ y \in C(I_{A,J,2})_{J,(k_\alpha)}, \forall \alpha \in A,\ \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle = h_\alpha \right\}.$$

L'expression considérée se décompose donc en un produit

$$R(T) \times \sum_{y_1 \in C(I_{A,J,1})} q^{\langle y_1\,,\, \sum\limits_{\alpha \notin A \cup J} \mathcal{D}_\alpha \rangle}\, T^{\langle y_1, -\omega \rangle}$$

avec

$$R(T) = \sum_{\substack{h_\alpha \in \mathbf{N}^A \\ h_\alpha \geqslant \deg(E_\alpha)}} R_{(h_\alpha)}(T),$$

$R_{(h_\alpha)}(T)$ désignant l'expression

$$\sum_{\substack{y_2 \in C(I_{A,J,2})_{J,(k_\alpha)} \\ \forall\, \alpha \in A,\, \langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle = h_\alpha}} q^{\sum\limits_{\alpha \notin A \cup J} (1 - g + \langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle - \deg(E_\alpha)) + \sum\limits_{\alpha \in J} \phi_\alpha(\langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle - \deg(E_\alpha))}$$
$$\times\ T^{\langle y_2, -\omega \rangle}.$$

Le deuxième facteur est égal à

$$\prod_{i \in I_{A,J,1}} \left[\left(1 - (q\,T)^{-\langle m_i, \omega \rangle} \right)^{-1} - 1 \right].$$

De la même façon que dans la preuve du lemme 3.5.3, on voit facilement il n'y a qu'un nombre fini d'éléments y_2 de $C(I_{A,J,2})_{J,(k_\alpha)}$ vérifiant

$$\langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle = h_\alpha$$

pour tout $\alpha \in A$, et ce nombre est majoré par

$$\operatorname{Sup}\left(\operatorname{Sup}_{\alpha \in A}(h_\alpha),\ \operatorname{Sup}_{\alpha \notin A}(2\,g + \deg(E_\alpha)) \right)^{\#\Sigma(1)},$$

ou encore par

$$\left(2\,g + \sum_{\alpha \in A} h_\alpha + \sum_{\alpha \notin A} \deg(E_\alpha) \right)^{\#\Sigma(1)}$$

et un tel y_2 vérifie

$$0 \leqslant \langle y_2, -\omega\rangle \leqslant m \left(2\,g + \sum_{\alpha\in A} h_\alpha + \sum_{\alpha\notin A} \deg(E_\alpha)\right)$$

où l'on rappelle que

$$m = \#\,\Sigma(1) \operatorname*{Sup}_{i\in\Delta(1)} (\langle m_i, -\omega\rangle).$$

Le deuxième facteur est donc une série entière à coefficients positifs en T notée $R(T)$.

Pour tout réel θ, $R_{(h_\alpha)}(q^{-\theta})$ peut être majoré par l'expression

$$\begin{aligned}
&q^{\#\,\Sigma(1) - \sum\limits_{\alpha\notin A} \deg(E_\alpha)} \sum_{\substack{y_2\in C(I_{A,J,2})_{J,\,(k_\alpha)}\\ \forall\,\alpha\in A,\,\langle y_2,\mathcal{D}_\alpha\rangle = h_\alpha}} q^{-\theta \sum\limits_{\alpha\in A}\langle y_2,\mathcal{D}_\alpha\rangle}\, q^{(1-\theta)\sum\limits_{\alpha\notin A}\langle y_2,\mathcal{D}_\alpha\rangle}\\
&\leqslant q^{\#\,\Sigma(1) - \sum\limits_{\alpha\notin A} \deg(E_\alpha)} \sum_{\substack{y_2\in C(I_{A,J,2})_{J,\,(k_\alpha)}\\ \forall\,\alpha\in A,\,\langle y_2,\mathcal{D}_\alpha\rangle = h_\alpha}} q^{-\sum\limits_{\alpha\in A} h_\alpha}\, q^{(1-\theta)\,\langle y_2,-\omega\rangle}\\
&\leqslant q^{\#\,\Sigma(1) - \sum\limits_{\alpha\notin A} \deg(E_\alpha)} \left(2\,g + \sum_{\alpha\in A} h_\alpha + \sum_{\alpha\notin A}\deg(E_\alpha)\right)^{\#\,\Sigma(1)} q^{-\sum\limits_{\alpha\in A} h_\alpha}\\
&\qquad\qquad \times \operatorname{Sup}\left(1, q^{m\,(1-\theta)\left(2\,g + \sum\limits_{\alpha\in A} h_\alpha + \sum\limits_{\alpha\notin A}\deg(E_\alpha)\right)}\right)
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon < \frac{1}{4\,m}$. Pour tout réel $\theta > 1-\varepsilon$, $R(q^{-\theta})$ peut alors être majoré par

$$q^{\#\,\Sigma(1) - \sum\limits_{\alpha\notin A} \deg(E_\alpha)} \sum_{\substack{h_\alpha \in \mathbf{N}^A \\ \forall \alpha\in A,\, h_\alpha \geqslant \deg(E_\alpha)}} q^{-\sum h_\alpha} \left(2\,g + \sum_{\alpha\in A} h_\alpha + \sum_{\alpha\notin A} \deg(E_\alpha)\right)^{\#\,\Sigma(1)} \times q^{\frac{1}{4}\left(2\,g + \sum\limits_{\alpha\in A} h_\alpha + \sum\limits_{\alpha\notin A} \deg(E_\alpha)\right)}$$

$$\leqslant q^{\#\,\Sigma(1) - \frac{3}{4} \sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} \deg(E_\alpha)} \sum_{h_\alpha \in \mathbf{N}^A} q^{-\sum h_\alpha} \left(2\,g + \sum_{\alpha\in A} h_\alpha + \sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \deg(E_\alpha)\right)^{\#\,\Sigma(1)} \times q^{\frac{1}{4}\left(2\,g + \sum\limits_{\alpha\in A} h_\alpha + \sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} \deg(E_\alpha)\right)}$$

$$\leqslant q^{\#\,\Sigma(1) + \frac{g}{2} - \frac{3}{4} \sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} \deg(E_\alpha)} \sum_{h_\alpha \in \mathbf{N}^A} q^{-\frac{3}{4}\sum h_\alpha} \left(2\,g + \sum_{\alpha\in A} h_\alpha + \sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \deg(E_\alpha)\right)^{\#\,\Sigma(1)}$$

$$\leqslant C \left(1 + \operatorname*{Sup}_{\alpha\in\Sigma(1)} (\deg(E_\alpha))\right)^{\#\Sigma(1)} q^{-\frac{3}{4} \sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} \deg(E_\alpha)}$$

avec C une constante ne dépendant que de g, $\#\Sigma(1)$ et m.

Notons enfin que comme A est non vide, si $I = I_\delta$ pour un cône δ maximal $I_{A,J,2}$ ne peut être vide. Ceci montre la dernière assertion du lemme. $\square$

D'après la proposition 3.4.3, la série

$$\sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}} |\mu((E_\alpha))| \left(1 + \operatorname*{Sup}_{\alpha\in\Sigma(1)} (\deg(E_\alpha))\right)^{\#\Sigma(1)} q^{-\eta \sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} \deg(E_\alpha)}$$

converge si $\eta > \frac{1}{2}$ et du lemme 3.5.5 on déduit la proposition 3.5.4. $\square$

3.5.4 Conclusion

Des propositions 3.5.2 et 3.5.4 on déduit le théorème annoncé. Le terme principal du pôle vaut en effet (rappelons que $\dim(X_\Sigma) = r = \#\,\Sigma(1) - t$)

$$
\begin{aligned}
&\alpha^*(X_\Sigma)\, h^t\, q^{\,\#\Sigma(1)\,(1-g)}\ \ln(q)^{-t}\,(q-1)^{-t} \prod_{v\in\mathcal{P}_K} \left(1-q_v^{-1}\right)^t\ \frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{q_v^r} \\
&\quad = \alpha^*(X_\Sigma) \left(\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_{\mathcal{C}}(s)\right)^t\ q^{\,(1-g)\ \dim(X_\Sigma)} \prod_{v\in\mathcal{P}_K} \left(1-q_v^{-1}\right)^t\ \frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{q_v^r}
\end{aligned}
$$

le facteur h^t provenant du fait que le terme principal obtenu dans la proposition 3.5.2 était celui du pôle d'une seule fonction $Z_{(i_\alpha)}(q^{-s})$ (cf. la convention adoptée à la section 3.5.1). Ceci clôt la démonstration du théorème 3.3.2.

Chapitre 4

Extension possible au cadre motivique

Dans ce chapitre, nous considérons une nouvelle classe de fonctions zêta des hauteurs, à savoir les fonctions zêta des hauteurs de nature motivique sur des variétés toriques déployées. En particulier, nous pouvons travailler sur le corps de fonctions d'une courbe définie sur un corps quelconque. Nous donnons dans la section 4.1.2 la définition précise de ces fonctions zêta des hauteurs motiviques, et expliquons en quel sens les fonctions zêta étudiées au chapitre 3 en sont des spécialisations. Nous démontrons alors, en nous limitant au cas du corps de fonctions d'une courbe rationnelle, un analogue motivique de la conjecture de Manin dans le cas des surfaces de Hirzebruch (théorème 4.3.2).

Pour démontrer le théorème 4.3.2, nous utilisons le lemme de paramétrisation 4.3.1, version motivique du lemme 3.4.1, et qui est valable pour une variété torique générale quelconque, ce qui permet déjà de montrer un résultat de convergence pour la fonction zêta des hauteurs motivique. L'obstruction majeure au traitement de la fonction zêta des hauteurs d'une variété torique déployée générale au «point critique» (i.e. en $T = \mathbf{L}^{-1}$, cf. plus bas) vient de notre méconnaissance de la fonction de Möbius motivique (cf. section 4.2.1). Si on suppose vérifiée une hypothèse sur cette fonction de Möbius motivique (hypothèse 4.2.1) (laquelle hypothèse nous semble une version motivique raisonnable des propriétés de la fonction de Möbius utilisée au chapitre 3), on montre alors qu'une adaptation au cadre motivique des techniques utilisées au chapitre 3 permet d'obtenir un analogue motivique du théorème 3.3.2 (cf. question 4.2.2).

Nous insistons sur le fait que nous obtenons un résultat complet uniquement dans le cas des surfaces de Hirzebruch (nous aurions aussi pu traiter le cas déjà connu des espaces projectifs), et que l'hypothèse sur laquelle se base le calcul dans le cas général n'est pas démontrée. Nous rappelons également que dans tous les cas nous nous limitons au cas du corps de fonctions d'une courbe rationnelle.

4.1 Cadre de travail et définitions

Soit k un corps quelconque, et $(\mathrm{Sch}_{\mathrm{tf}}/k)$ la catégorie des schémas de type fini sur k. On définit comme suit l'anneau de Grothendieck $K_0\left(\mathrm{Sch}_{\mathrm{tf}}/k\right)$ (noté $\mathcal{M}_k$ par la suite) associé à cette catégorie. Le groupe sous-jacent à $\mathcal{M}_k$ est le groupe engendré par les symboles $[V]$ où V est un schéma de type fini sur k, modulo les relations

$$[V] = [F] + [V \setminus F]$$

pour tout sous-schéma fermé F de V (en particulier $[V]=[V_{\rm red}]$) et

$$[V]=[W]$$

si V et W sont k-isomorphes. Le produit est donné par

$$[V]\,[W]=[V\times_k W]\,.$$

Ainsi si $X\to Y$ est une fibration localement triviale pour la topologie de Zariski, de fibre Z, on a l'égalité

$$[X]=[Y][Z].$$

Lorsque k est de caractéristique zéro, il existe d'après [GiSo, Theorem 4] un morphisme

$$\mathcal{M}_k\longrightarrow K_0(\mathrm{Mot}_k)$$

où Mot_k est la catégorie des motifs de Chow sur k et $K_0(\mathrm{Mot}_k)$ est son anneau de Grothendieck, tel que la classe d'une variété X projective et lisse sur k s'envoie sur la classe du motif de Chow qui lui est associé. Par abus de langage nous apellerons également motifs les éléments de $\mathcal{M}_k$.

On note $\mathbf{L}=[\mathbf{A}^1_k]$ le motif de la droite affine, et

$$\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}=\mathcal{M}_k\left[\mathbf{L}^{-1}\right].$$

Si le corps k est fini, de cardinal q, on a une application

$$\begin{aligned}\#\,:\,\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}&\longrightarrow\mathbf{Z}\left[q^{-1}\right]\\ [V]\,\mathbf{L}^{-i}&\longmapsto\#V(k)\,q^{-i}.\end{aligned}$$

On munit $\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$ de la filtration décroissante suivante : pour $m\in\mathbf{Z}$, $\mathcal{F}^m\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$ est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $\mathbf{L}^{-i}[V]$, où V est un schéma de type fini sur k et i et $\dim(V)$ vérifient

$$i-\dim(V)\geqslant m.$$

On a en particulier, pour m et n dans $\mathbf{Z}$,

$$(\mathcal{F}^m\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}})\,(\mathcal{F}^n\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}})\subset\mathcal{F}^{m+n}\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$$

On définit

$$\widehat{\mathcal{M}}=\varprojlim\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}/\mathcal{F}^m\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}.$$

Ainsi $\widehat{\mathcal{M}}$ est un anneau topologique complet (pour la topologie définie par la filtration $\mathcal{F}^m$). Si $Z(T)=\sum_{n\geqslant 0}a_n\,T^n$ est une série formelle à coefficients dans

$\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$ (voire dans $\widehat{\mathcal{M}}$) et $\mathbf{M}$ un élément de $\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$, on dira que $Z(T)$ converge en $T = \mathbf{M}$ si la série $\sum a_n \mathbf{M}^n$ converge dans $\widehat{\mathcal{M}}$, ce qui est équivalent à la condition suivante : il existe une fonction $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ vérifiant

$$\lim_{n \to +\infty} \phi(n) = +\infty.$$

et

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad a_n\, \mathbf{M}^n \in \mathcal{F}^{\phi(n)} \mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}.$$

On notera alors $Z(\mathbf{M})$ l'élément de $\widehat{\mathcal{M}}$ défini par $\sum a_n \mathbf{M}^n$. Par exemple la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} T^n$ converge en $T = \mathbf{L}^{-\kappa}$ pour tout entier $\kappa \geqslant 1$. On a ainsi une notion de pôle pour de telles séries. Soit par exemple $Z(T)$ une série formelle à coefficients dans $\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$ telle que $Z(T)$ diverge en $T = \mathbf{L}^{-1}$. Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que la série $Z^{'}(T)$ définie par le produit

$$(1 - \mathbf{L}\, T)^n \, Z(T)$$

converge en $T = \mathbf{L}^{-1}$ vers un élément non nul de $\widehat{\mathcal{M}}$. On peut alors parler d'un «pôle d'ordre n en $T = \mathbf{L}^{-1}$, de terme principal $Z^{'}(\mathbf{L}^{-1})$» (nous rencontrerons dans la suite de ce chapitre des exemples de telles séries).

On note $\mathcal{M}_k[T]_{\mathrm{loc}}$ l'anneau engendré par $\mathcal{M}_k[T]$ et les éléments de la forme

$$\frac{1}{1 - \mathbf{L}^a\, T^b}$$

pour $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. L'anneau $\mathcal{M}_k[T]_{\mathrm{loc}}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}[[T]]$.

4.1.1 Fonction zêta de Dedekind motivique

Pour expliquer la motivation de l'étude des fonctions zêtas des hauteurs motiviques, on rappelle le cas déjà connu de la fonction zêta de Dedekind motivique d'une courbe $\mathcal{C}$ projective, lisse, géométriquement intègre définie sur k, de genre g. On définit une série formelle à coefficients dans $\mathcal{M}_k$ par la formule

$$Z_{\mathcal{C},\mathrm{mot}}(T) = \sum_{r \geqslant 0} \left[\mathcal{C}^{(r)}\right]\, T^r \quad \in \mathcal{M}_k[[T]]$$

où $\mathcal{C}^{(r)}$ désigne la puissance symétrique d'ordre r de la courbe $\mathcal{C}$. En particulier, $\mathcal{C}^{(r)}(k)$ s'identifie à l'ensemble des diviseurs effectifs de degré r sur $\mathcal{C}$.

Dans le cas $\mathcal{C} = \mathbf{P}^1$ (le seul que nous considérerons à partir de la section 4.2), on a, pour tout $r \geqslant 0$,

$$\left(\mathbf{P}^1\right)^{(r)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^r.$$

Ceci peut se voir soit par le théorème de Riemann-Roch, soit en utilisant des recouvrement par des espaces affines et le fait que par le théorème des fonctions symétriques

$$\left(\mathbf{A}^1\right)^{(r)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^r.$$

On a

$$Z_{\mathbf{P}^1,\mathrm{mot}}(T) = \frac{1}{(1-T)(1-\mathbf{L}\,T)}.$$

Si k est un corps fini de cardinal q, en applicant # aux coefficients de $Z_{\mathcal{C},\mathrm{mot}}$ on obtient donc la série $Z_{\mathcal{C}}(T)$ classique, en particulier $s \mapsto Z_{\mathcal{C}}(q^{-s})$ est la série définissant la fonction zêta de Dedekind usuelle de $\mathcal{C}$.

Pour un corps k quelconque et à condition que $\mathrm{Pic}^1(\mathcal{C})(k)$ soit non vide, Kapranov montre alors dans [Ka, Theorem 1.1.9] qu'il existe un polynôme P à coefficient dans $\mathcal{M}_k$, de degré $2\,g$, tel que

$$(1-T)(1-\mathbf{L}\,T)Z_{\mathcal{C},\mathrm{mot}}(T) = P(T), \tag{4.1.1.1}$$

en d'autre termes $Z_{\mathcal{C},\mathrm{mot}}(T)$ est dans $\mathcal{M}_k[T]_{\mathrm{loc}}$. Par ailleurs P vérifie l'équation fonctionnelle

$$T^{2\,g}\,\mathbf{L}^g\,P\left(\mathbf{L}^{-1}\,T^{-1}\right) = P(T)$$

et on a

$$P\left(\mathbf{L}^{-1}\right) = [\mathrm{Jac}(\mathcal{C})]\,\mathbf{L}^{-g}.$$

Si k est un corps fini, tous ces résultats se spécialisent via l'application # et permettent de retrouver des propriétés déjà connues de la fonction zêta de Dedekind classique.

La morale de l'histoire est que ces propriétés essentielles de $Z_{\mathcal{C}}(T)$, d'une part se «voient» déjà au niveau motivique, d'autre part que de telle propriétés sont vraiment de nature motivique dans la mesure où elles peuvent être démontrées, dans le cadre motivique, sans supposer nécessairement le corps k fini. Dans la section suivante on va considérer des fonctions zêta des hauteurs motiviques, se spécialisant quand k est fini sur les fonctions zêta des hauteurs déjà considérées. Il est alors naturel de se poser la question suivante : les propriétés de ces fonctions zêta des hauteurs classiques sont-elles en fait de nature motivique ?

4.1.2 Fonction zêta des hauteurs motivique

Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective, lisse, géométriquement intègre définie sur k, et soit K son corps de fonctions. Considérons une variété projective V définie sur k, et soit $\mathcal{L}$ un fibré ample sur V. Les éléments de $V(K)$ s'identifient aux k-morphismes $x : \mathcal{C} \to V$. Si k est fini, de sorte que K est un corps global de caractéristique positive, la formule

$$H(x) = \deg(x^*\mathcal{L})$$

définit une hauteur d'Arakelov (logarithmique) sur $V(K)$, relative au faisceau $\mathcal{L}$. Si k est quelconque, on peut toujours définir une fonction hauteur sur $V(K)$, par une formule identique.

Pour tout ouvert U de V, et tout $r \geqslant 0$, il existe d'après [Gr, 4.c] un schéma quasi-projectif U_r paramétrisant les morphismes

$$x : \mathcal{C} \to V$$

dont l'image rencontre U et tels que $\deg(x^*\mathcal{L}) = r$. On pose

$$Z_{\mathrm{mot},\mathcal{C},U,H} = \sum_{r \geqslant 0} [U_r]\ T^r \quad \in \mathcal{M}_k[[T]].$$

Ainsi, si k est fini,

$$\# U_r(k) = \# \{x \in U(K),\ H(x) = r\}$$

et la série définissant la fonction zêta des hauteurs

$$Z_{U,H}(T) = \sum_{x \in U(K)} T^{H(x)}$$

s'obtient en applicant la fonction # aux coefficients de la série motivique $Z_{\mathrm{mot},\mathcal{C},U,H}$.

Comme déjà indiqué ci-dessus, de manière similaire au cas de la fonction zêta de Dedekind motivique, on peut se demander s'il n'existe pas pour $Z_{\mathrm{mot},\mathcal{C},U,H}$, des analogues motiviques des résultats obtenus (ou espérés...) pour $Z_{U,H}(T)$, et si de tels résultats ne sont pas justement de nature purement motivique.

Pour préciser ce genre de question, nous allons considérer la situation où V est une variété torique déployée, $\mathcal{L}$ est le faisceau anticanonique et U est l'orbite ouverte T, en nous limitant au cas $\mathcal{C} = \mathbf{P}^1$. Naturellement, $\mathcal{L}$ n'est alors en général plus ample, mais même s'il n'existe plus de schéma quasi-projectif paramétrisant les morphismes de $\mathcal{C}$ vers V de degré anticanonique fixé, on verra à la section 4.3.1 qu'il existe par contre un schéma quasi-projectif paramétrisant les morphismes de $\mathcal{C}$ vers V de degré anticanonique fixé et dont l'image n'est pas incluse dans $V \setminus T$, ce qui permet de définir la série $Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}$. Cette situation correspond bien sûr au fait qu'une hauteur sur une variété projective relative à un faisceau dont la classe est à l'intérieur du cône effectif, mais non nécessairement ample, ne vérifie la propriété de Northcott qu'en restriction à un ouvert non vide de la variété.

4.2 Le cas d'une variété torique déployée

Nous considérons un éventail projectif et lisse Σ, et X_Σ la variété projective et lisse définie sur k qui lui est associée. Nous utiliserons les mêmes notations que dans le chapitre 3, en particulier celles introduites dans la section 3.2.

4.2.1 Fonction de Möbius motivique

Dans cette section, nous introduisons un analogue motivique de la fonction d'inversion de Möbius utilisée au chapitre 3.

Soit $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbf{N}^n$. La variété $\prod\limits_{1 \leqslant r \leqslant n} \mathbf{P}^{d_r}$ des n-uplets de diviseurs effectifs de $\mathbf{P}^1$ de degrés $(d_1, \ldots, d_n)$ contient un ouvert $U_{(d_1,\ldots,d_n)}$ défini par la condition $\bigcap\limits_{1 \leqslant r \leqslant n} \mathrm{Supp}(D_r) = \emptyset$.

Soit $(d_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$. On a un morphisme

$$\prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \mathbf{P}^{d_\alpha} \to \prod_{\sigma \in \Sigma} \mathbf{P}^{\sum\limits_{\alpha \in \sigma} d_\alpha}$$

qui envoie (D_α) sur

$$\left(\sum_{\alpha \in \sigma} D_\alpha \right)_{\sigma \in \Sigma}.$$

L'image réciproque de $U_{\left(\sum\limits_{\alpha \in \sigma} d_\alpha\right)}$ par ce morphisme est un ouvert $U_{\Sigma,(d_\alpha)}$ de $\prod\limits_{\alpha \in \Sigma(1)} \mathbf{P}^{d_\alpha}$ représentant les $\Sigma(1)$-uples de diviseurs effectifs vérifiant la condition

$$\bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{Supp} \left(\sum_{\alpha \notin \sigma} D_\sigma \right) = \emptyset. \tag{4.2.1.1}$$

On peut définir alors une *fonction de Möbius motivique*

$$\mu_{\Sigma,\mathrm{mot}} : \mathbf{N}^{\Sigma(1)} \to \mathcal{M}_k$$

par la relation

$$\forall\,(d_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)},\ \left[U_{\Sigma,(d_\alpha)}\right]=\sum_{0\leqslant e_\alpha\leqslant d_\alpha}\mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((e_\alpha))\prod_{\alpha\in\Sigma(1)}\left[\mathbf{P}^{d_\alpha-e_\alpha}\right]. \qquad (4.2.1.2)$$

Par récurrence sur $\sum\limits_\alpha d_\alpha$, cette fonction est bien définie.

Rappelons que dans le cas où le corps k est fini, nous avions défini une fonction

$$\mu_\Sigma\ :\ \mathrm{Div}^+(\mathbf{P}^1_k)^{\Sigma(1)}\to\mathbf{C}$$

vérifiant la relation (la caractérisant)

$$\forall\,(D_\alpha)\in\mathrm{Div}^+(\mathbf{P}^1_k)^{\Sigma(1)},\ \mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha))=\sum_{\substack{(E_\alpha)\in\mathrm{Div}^+(\mathbf{P}^1_k)^{\Sigma(1)}\\(E_\alpha)\leqslant(D_\alpha)}}\mu_\Sigma((E_\alpha)).$$

En sommant $\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha))$ sur tous les $\Sigma(1)$-uples de diviseurs effectifs (D_α) de degré (d_α) on obtient que

$$\#\mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((d_\alpha))=\sum_{\substack{(D_\alpha)\in\mathrm{Div}^+(\mathbf{P}^1_k)^{\Sigma(1)}\\\deg(D_\alpha)=d_\alpha}}\mu_\Sigma((D_\alpha)).$$

Revenons au cas général. La relation (4.2.1.2) et le fait que $U_{\Sigma,(d_\alpha)}$ est une sous-variété de $\prod\mathbf{P}^{d_\alpha}$, donc que $\left[U_{\Sigma,(d_\alpha)}\right]$ est dans $\mathcal{F}^{-\sum d_\alpha}\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$, montrent immédiatemment par récurrence que

$$\forall\,(d_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)},\quad \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((d_\alpha))\in\mathcal{F}^{-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}d_\alpha}\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}},$$

mais ce résultat est insuffisant pour l'étude du comportement de la fonction zêta des hauteurs en $T=\mathbf{L}^{-1}$. On a besoin pour cela de l'hypothèse suivante, qui pourrait être vérifiée au vu des résultats obtenus sur la fonction μ_Σ, mais que nous ne savons pas démontrer (sauf dans le cas des espaces projectifs et des surfaces de Hirzebruch).

Hypothèse 4.2.1
Soit

$$\left(V_{(d_\alpha)}\right)\in\widehat{\mathcal{M}}^{\mathbf{N}^{\Sigma(1)}}$$

une famille d'éléments de $\widehat{\mathcal{M}}$ vérifiant

$$\forall\ (d_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)},\quad V_{(d_\alpha)}\in\mathcal{F}^{\sum\limits_\alpha d_\alpha}\widehat{\mathcal{M}}$$

Alors la série

$$\sum_{(d_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}}\mu_{\Sigma,mot}((d_\alpha))\,V_{(d_\alpha)}$$

converge dans $\widehat{\mathcal{M}}$.

4.2.2 Calcul de $\mu_{\Sigma,\mathbf{mot}}$ dans le cas des espaces projectifs

Soit $n \geqslant 1$, et calculons $\mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}$ si X_Σ est l'espace projectif $\mathbf{P}^n$. On identifie alors $\Sigma(1)$ à $\{1,\dots,n+1\}$.

On définit une fonction d'inversion de Möbius par la relation[1]

$$\left(\sum_{d\geqslant 0}\mu_{\mathrm{mot}}(d)T^d\right) Z_{\mathbf{P}^1,\mathrm{mot}}(T) = 1.$$

On a donc pour tout $d \geqslant 0$

$$\sum_{0\leqslant r\leqslant d}\mu_{\mathrm{mot}}(r)\left[\mathbf{P}^{d-r}\right] = 0. \tag{4.2.2.1}$$

Vu l'expression de $Z_{\mathbf{P}^1,\mathrm{mot}}$, on voit immédiatemment que

$$\mu_{\mathrm{mot}}(0) = 1,$$

$$\mu_{\mathrm{mot}}(1) = -1 - \mathbf{L},$$

$$\mu_{\mathrm{mot}}(2) = \mathbf{L}$$

et

$$\mu_{\mathrm{mot}}(d) = 0$$

pour $d > 2$.

Définissons alors une fonction sur $\mathbf{N}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_k$ en posant

$$\mu_{n+1}(d_1,\dots,d_{n+1}) = \begin{cases} \mu_{\mathrm{mot}}(d) & \text{si} \quad d_1 = \dots = d_{n+1} = d, \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2.2.2}$$

Pour tout $(d_r) \in \mathbf{N}^{n+1}$, on a avec les notations de la section précédente

$$U_{\Sigma,(d_r)} = U_{(d_r)}.$$

On a une décomposition en sous-variétés localement fermées

$$\prod_{1\leqslant r\leqslant n+1}\mathbf{P}^{d_r} = \coprod_{0\leqslant d\leqslant \mathrm{Min}(d_1,\dots,d_n)} W_{(d_r)_{1\leqslant r\leqslant n}\,,\,d}$$

où

$$W_{(d_r)\,,\,d} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{\,d} \times U_{(d_r-d)}$$

[1] On pourrait de manière analogue définir une fonction d'inversion μ_{mot} relative à une courbe $\mathcal{C}$ de genre quelconque.

est la sous-variété de $\prod_{1 \leqslant r \leqslant n+1} \mathbf{P}^{d_r}$ des n-uples de diviseurs effectifs dont l'intersection est de degré d. Ainsi $W_{(d_r),0} = U_{(d_r)}$. On a donc

$$\prod_{1 \leqslant r \leqslant n+1} \left[\mathbf{P}^{d_r}\right] = \sum_{d=1}^{\mathrm{Min}(d_1,\ldots,d_r)} \left[\mathbf{P}^d\right] \left[U_{(d_r - d)}\right].$$

Ecrivons cette relation pour chaque n-uples $(d_1^{'}, \ldots, d_{n+1}^{'})$ avec $0 \leqslant d_r^{'} \leqslant d_r$, multiplions la relation obtenue par $\mu_{n+1}\left(d_1^{'}, \ldots, d_{n+1}^{'}\right)$, et faisons la somme de toutes les relations obtenues, on obtient finalement

$$\left[U_{(d_r)}\right] = \sum_{\substack{0 \leqslant d_1^{'} \leqslant d_1 \\ \vdots \\ 0 \leqslant d_{n+1}^{'} \leqslant d_{n+1}}} \mu_{n+1}\left(d_1^{'}, \ldots, d_{n+1}^{'}\right) \prod_{1 \leqslant r \leqslant n+1} \left[\mathbf{P}^{d_r - d_r^{'}}\right].$$

On a donc ici $\mu_{\Sigma,\mathrm{mot}} = \mu_{n+1}$. Vu l'expression de $\mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}$, on obtient que l'hypothèse 4.2.1 est vérifiée dans ce cas.

4.2.3 Calcul de $\mu_{\Sigma,\mathbf{mot}}$ dans le cas de la surface de Hirzebruch $\mathcal{H}_m$

Soit Σ l'éventail de $\mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{R}$ dont les rayons sont engendrés par $\rho_1 = (1,0)$, $\rho_2 = (-1, m)$, $\rho_3 = (0,1)$, $\rho_4 = -\rho_3$, et $X_\Sigma = \mathcal{H}_m$ la surface de Hirzebruch associée. $U_{(d_1,d_2,d_3,d_4)}$ représente la variété des quadruplets de diviseurs effectifs (D_1, D_2, D_3, D_4), de degrés (d_1, d_2, d_3, d_4), et tels que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ et $D_3 \cap D_4 = \emptyset$. Ainsi on a

$$U_{(d_1,d_2,d_3,d_4)} \xrightarrow{\sim} U_{(d_1,d_2)} \times U_{(d_3,d_4)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &U_{(d_1,d_2,d_3,d_4)} \\ &\quad = \sum_{\substack{0 \leqslant d_1^{'} \leqslant d_1 \\ 0 \leqslant d_2^{'} \leqslant d_2 \\ 0 \leqslant d_3^{'} \leqslant d_3 \\ 0 \leqslant d_4^{'} \leqslant d_4}} \mu_2(d_1,d_2)\, \mu_2(d_3,d_4) \left[\mathbf{P}^{d_1 - d_1^{'}}\right] \left[\mathbf{P}^{d_2 - d_2^{'}}\right] \left[\mathbf{P}^{d_3 - d_3^{'}}\right] \left[\mathbf{P}^{d_4 - d_4^{'}}\right] \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}(d_1, d_2, d_3, d_4) = \mu_2(d_1,d_2)\, \mu_2(d_3,d_4).$$

Dans ce cas, l'hypothèse 4.2.1 est encore vérifiée.

4.2.4 Un analogue motivique de la conjecture de Manin

Nous posons, suivant la section 3.5.2,

$$Z_{C_{\text{eff}}(X_\Sigma),-\omega}(T) = \sum_{y \in C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^\vee \cap \operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee} T^{\langle y,-\omega\rangle}.$$

où l'on rappelle que $-\omega$ désigne la classe du fibré anticanonique. Ecrivons $C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^\vee$ comme le support d'un éventail régulier Δ, et reprenons les notations introduites au début de la section 3.5.3. On obtient que

$$Z_{C_{\text{eff}}(X_\Sigma),-\omega_\Sigma}(T) = \sum_{\delta\in\Delta} \prod_{i\in I_\delta} \left(\frac{1}{1-T^{\langle m_i,-\omega\rangle}} - 1 \right)$$

et que

$$\alpha^*(X_\Sigma) = \sum_{\substack{\delta\in\Delta \\ \dim(\delta)=\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X_\Sigma))}} \prod_{i\in I_\delta} \frac{1}{\langle m_i,-\omega\rangle}$$

(la constante $\alpha^*(X_\Sigma)$ pouvant naturellement se définir quel que soit le corps de base). Soit $D_\Delta(T)$ le polynôme à coefficients entiers

$$D_\Delta(T) = \prod_{i\in\Delta(1)} \frac{1-T^{\langle m_i,-\omega\rangle}}{1-T}.$$

On peut en particulier écrire

$$Z_{C_{\text{eff}}(X_\Sigma),-\omega_\Sigma}(T) = \frac{N_\Delta(T)}{D_\Delta(T)} \frac{1}{(1-T)^{\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X_\Sigma))}}$$

où $N_\Delta(T)$ est un polynôme à coefficients entiers, avec

$$\alpha^*(X_\Sigma) = \frac{N_\Delta(1)}{D_\Delta(1)}. \tag{4.2.4.1}$$

Nous sommes maintenant en mesure de préciser un analogue motivique de la conjecture de Manin dans le cas des variétés toriques déployées. Le fait que $Z_{\text{mot},\mathbf{P}^1,T,H}(T)$ est bien définie si le faisceau anticanonique de X_Σ n'est pas ample est justifié au lemme 4.3.1. Soit $Z'(T)$ l'élément de $\mathcal{M}_k[[T]]$ défini par le produit

$$Z'(T) = D_\Delta(\mathbf{L}\,T)(1-\mathbf{L}\,T)^{\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X_\Sigma))}\, Z_{\text{mot},\mathbf{P}^1,T,H}(T). \tag{4.2.4.2}$$

Question 4.2.2
Est-il vrai que pour tout $\kappa \geqslant 2$, la série $Z_{mot,\mathbf{P}^1,T,H}(\mathbf{L}^{-\kappa})$ converge dans $\widehat{\mathcal{M}}$?
Est-il vrai que $Z'(\mathbf{L}^{-1})$ converge dans $\widehat{\mathcal{M}}$?
Si l'hypothèse 4.2.1 est vérifiée, est-il vrai que

$$Z'(\mathbf{L}^{-1}) = N_{\Delta}(1)\,\mathbf{L}^{\dim(X_\Sigma)}\,\left([(1-\mathbf{L}\,T)\,Z_{\mathbf{P}^1,mot}(T)]\,(\mathbf{L}^{-1})\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))} \times \sum_{(d_\alpha)} \mu_{\Sigma,mot}((d_\alpha))\,\mathbf{L}^{-\sum\limits_\alpha d_\alpha} \quad ?$$

Dans ce qui suit nous montrons les choses suivantes : la réponse à la première question est positive pour une variété torique déployée quelconque (cf. fin de la section 4.3.1), la réponse aux deux dernières questions est positive pour les surfaces de Hirzebruch (théorème 4.3.2, rappelons qu'on sait dans ce cas que l'hypothèse 4.2.1 est vérifiée), et, *si on suppose l'hypothèse 4.2.1 vérifiée*, le réponse aux deux dernières questions est également positive pour une variété torique déployée quelconque.

Faisons d'abord quelques remarques. Au vu de (4.2.4.1) et de (4.2.4.2), la valeur de $Z'(\mathbf{L}^{-1})$ peut s'interpréter de la façon formelle suivante : le terme principal du «pôle d'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))$ en $\mathbf{L}^{-1}$» de $Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}$ est égal à

$$\alpha^*(X_\Sigma)\,\mathbf{L}^{\dim(X_\Sigma)}\,\left([(1-\mathbf{L}\,T)\,Z_{\mathbf{P}^1,\mathrm{mot}}(T)]\,(\mathbf{L}^{-1})\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))} \times \sum_{(d_\alpha)} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((d_\alpha))\,\mathbf{L}^{-\sum\limits_\alpha d_\alpha},$$

mais il faut noter que la constante $\alpha^*(X_\Sigma)$ n'est pas dans $\widehat{\mathcal{M}}$, et qu'il était nécessaire pour avoir un résultat de convergence en $\mathbf{L}^{-1}$ de multiplier la série $Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}(T)$ par $D_\Delta(\mathbf{L}\,T)\,(1-\mathbf{L}\,T)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))}$ et non pas seulement par $(1-\mathbf{L}\,T)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))}$.

Si le corps k est fini, une réponse positive à la question 4.2.2 ne permet pas a priori d'obtenir par spécialisation via # des résultats sur la fonction zêta des hauteurs usuelle concernant par exemple le domaine de convergence ou l'expression du terme principal du pôle en $s = 1$. Le terme principal motivique proposé ici se spécialise «formellement» sur le terme principal de la fonction zêta des hauteurs usuelle, mais la fonction # n'est pas définie sur $\widehat{\mathcal{M}}$.

Si la série $\zeta_{\mathrm{mot},T,H}(T)$ se trouve appartenir à $\mathcal{M}_k[T]_{\mathrm{loc}}$, on peut effectivement déduire les résultats déjà obtenus sur la fonction zêta des hauteurs usuelle des résultats sur la fonction zêta des hauteurs motivique : on a dans ce cas une identité

$$Q(T)\,\zeta_{\mathrm{mot},T,H}(T) = P(T)$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients dans $\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$. Si on note $\#P$ et $\#Q$ les polynômes obtenus en appliquant le morphisme $\#$ aux coefficients de P et Q respectivement, on aura l'identité

$$(\#Q)(T)\, Z_{T,H}(T) = (\#P)(T).$$

Cette situation se produit pour les espaces projectifs et, comme nous le verrons ci-dessous, pour les surfaces de Hirzebruch. Naturellement, le fait que $\zeta_{\mathrm{mot},H,T}(T)$ appartienne à $\mathcal{M}_k[T]_{\mathrm{loc}}$ entraîne que $Z_{H,T}$ est une fraction rationnelle en T, chose que, comme déjà indiqué, nous suspectons être fausse pour une variété torique déployée générale.

4.3 Le calcul

4.3.1 Paramétrisation des morphismes

Si le faisceau anticanonique de X_Σ ample, on sait a priori qu'il existe un schéma quasi-projectif qui paramétrise les morphismes

$$x\ :\ \mathbf{P}^1 \to X_\Sigma$$

dont l'image rencontre T, et de degré anticanonique d. Nous allons voir que c'est le cas même si le faisceau anticanonique n'est plus ample. On rappelle qu'on désigne par r la dimension de X_Σ.

Lemme 4.3.1
Pour $d \geqslant 0$ il existe un schéma quasi-projectif V_d qui paramétrise les morphismes

$$x\ :\ \mathbf{P}^1 \to X_\Sigma$$

dont l'image rencontre T, et de degré anticanonique d.

On a

$$[V_d] = (\mathbf{L}-1)^r \sum_{\substack{(d_\alpha)\in \mathbf{N}^{\Sigma(1)},\\ \forall m\in M,\ \sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} \langle m,\rho_\alpha\rangle\, d_\alpha = 0,\\ \sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} d_\alpha = d}} \left[U_{\Sigma,(d_\alpha)}\right].$$

Démonstration : C'est en quelque sorte la version motivique du lemme 3.4.1. L'utilisation des torseurs universels est ici plus explicite.

Considérons l'espace affine $\mathbf{A}^{\Sigma(1)}$, et soit $\mathcal{T}_\Sigma$ le complémentaire du fermé

$$\bigcap_{\sigma\in\Sigma} \left\{ \prod_{\alpha\notin\sigma} x_\alpha = 0 \right\}.$$

La suite exacte (introduite à la section 3.2)

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Sigma(1)} \longrightarrow \operatorname{Pic}(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte de tores

$$0 \longrightarrow T_{\operatorname{Pic}(X_\Sigma)} \longrightarrow \mathbf{G}_m^{\Sigma(1)} \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 0 \tag{4.3.1.1}$$

et donc en particulier une action de $T_{\operatorname{Pic}(X_\Sigma)}$ sur $\mathcal{T}_\Sigma$, via l'action diagonale de $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$. On a alors d'après [Co] un morphisme $\mathcal{T}_\Sigma \longrightarrow X_\Sigma$ qui identifie X_Σ au quotient géométrique de $\mathcal{T}_\Sigma$ par l'action de $T_{\operatorname{Pic}(X_\Sigma)}$, et fait de $\mathcal{T}_\Sigma$ un torseur universel au-dessus de X_Σ. Ce morphisme est uniquement déterminé si on impose par exemple que $(1,\ldots,1)$ s'envoie sur l'élément neutre de T. Ce morphisme fournit en fait un système de coordonnées homogènes sur X_Σ, ceci généralisant le cas classique de l'espace projectif. Le terme homogène s'entend ici par homogène sous l'action de $T_{\operatorname{Pic}(X_\Sigma)}$.

Ceci va nous permettre de décrire explicitement les k-morphismes de $\mathbf{P}^1$ vers X_Σ dont l'image n'est pas incluse dans le bord, généralisant le cas bien connu où X_Σ est un espace projectif.

Soit $(d_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$ vérifiant

$$\forall m \in M, \sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \langle m, \rho_\alpha\rangle\, d_\alpha = 0. \tag{$*$}$$

et $(P_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}$ des polynômes homogènes en deux variables à coefficients dans k et de degrés (d_α). On identifie un tel $\Sigma(1)$-uplet (P_α) à un élément de $\prod\limits_\alpha \left(\mathbf{A}^{d_\alpha+1} \setminus \{0\}\right)$. Le tore $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$ agit diagonalement sur $\prod\limits_\alpha \left(\mathbf{A}^{d_\alpha+1} \setminus \{0\}\right)$, et on a un morphisme

$$\phi : \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \left(\mathbf{A}^{d_\alpha+1} \setminus \{0\}\right) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \mathbf{P}^{d_\alpha}.$$

Notons $\widetilde{U_{\Sigma,(d_\alpha)}}$ l'image réciproque par ϕ de $U_{\Sigma,(d_\alpha)}$. Les éléments (P_α) de $\widetilde{U_{\Sigma,(d_\alpha)}}$ sont donc les éléments de $\prod\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} \left(\mathbf{A}^{d_\alpha+1} \setminus \{0\}\right)$ vérifiant la condition suivante, notée $(**)$: les polynômes

$$\left(\prod_{\alpha\notin\sigma} P_\alpha\right)_{\sigma\in\Sigma}$$

n'ont pas de zéro commun non trivial dans une clôture algébrique de k.

Soit $(P_\alpha) \in \widetilde{U_{\Sigma,(d_\alpha)}}$. Le morphisme de $\mathbf{A}^2 \setminus \{0\}$ vers $\mathbf{A}^{\Sigma(1)}$ défini par

$$(u, v) \longmapsto (P_\alpha(u, v))_{\alpha \in \Sigma(1)}$$

a par la condition $(**)$ son image dans $\mathcal{T}_\Sigma$. Par la condition $(*)$ ce morphisme est compatible aux actions de $\mathbf{G}_m$ à gauche (action diagonale) et de $T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}$ à droite, et passe donc au quotient, d'où un morphisme

$$f_{(P_\alpha)} : \mathbf{P}^1 \longrightarrow X_\Sigma,$$

dont l'image rencontre T, et qui vérifie, pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$, $f^*_{(P_\alpha)}(D_\alpha) = \pi(P_\alpha)$. Son degré anticanonique est donc $\sum d_\alpha$.

Comme X_Σ est projective, l'ensemble des morphismes $f : \mathbf{P}^1 \to X_\Sigma$ dont l'image rencontre T s'identifie à $T(k(t))$. On a une suite exacte (déjà utilisée dans la preuve du lemme 3.4.1)

$$O \longrightarrow T(k(t))/T(k) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Div}(\mathbf{P}^1)) \xrightarrow{\deg} \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z}) \to 0.$$

Si f est un élément de $T(k(t))$, son image dans $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Div}(\mathbf{P}^1))$ est

$$m \longmapsto \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} \langle m, \rho_\alpha \rangle \, f^*(\mathfrak{D}_\alpha),$$

où $\mathfrak{D}_\alpha$ est le diviseur T-invariant de X_Σ associé à α. Soit $d_\alpha = \deg(f^*(\mathfrak{D}_\alpha)$, la suite exacte ci-dessus montre que (d_α) vérifie la condition $(*)$. Soit alors $(P_\alpha) \in \widetilde{U_{\Sigma,(d_\alpha)}}$ tel que $\phi(P_\alpha) = (f^*(\mathfrak{D}_\alpha))$. Alors la suite exacte ci-dessus montre que f et $f_{(P_\alpha)}$ diffèrent par l'action au but d'un élément t de $T(k)$. Ainsi si u est tel que $\pi(u) = t$ on a $f = f_{u.(P_\alpha)}$.

Soient (P_α) et (Q_α) deux éléments de $\widetilde{U_{\Sigma,(d_\alpha)}}$ tels que $f_{(P_\alpha)} = f_{(Q_\alpha)}$. Alors $\pi(P_\alpha) = \pi(Q_\alpha)$ et donc $(P_\alpha) = u.(Q_\alpha)$ où $u \in \mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$, avec de plus $\pi(u) = 1$, donc d'après (4.3.1.1) $u \in T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}$.

Ainsi tout morphisme $f : \mathbf{P}^1 \to X_\Sigma$ dont l'image rencontre T et tels que $\deg(f^*(D_\alpha)) = d_\alpha$ s'écrit $f_{(P_\alpha)}$ avec $(P_\alpha) \in \widetilde{U_{\Sigma,(d_\alpha)}}$, (P_α) étant uniquement déterminé modulo l'action de $T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}$.

On a donc

$$V_d = \coprod_{\substack{(d_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}, \\ \forall m \in M, \sum\limits_{\alpha \in \Sigma(1)} \langle m, \rho_\alpha \rangle d_\alpha = 0, \\ \sum\limits_{\alpha \in \Sigma(1)} d_\alpha = d}} \widetilde{U_{\Sigma,(d_\alpha)}} / T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}.$$

Par ailleurs l'application

$$\widetilde{U_{\Sigma,(d_\alpha)}}/T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)} \to \widetilde{U_{\Sigma,(d_\alpha)}}/\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)} = U_{\Sigma,(d_\alpha)}$$

est un torseur sous $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}/T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)} = T$, localement trivial pour la topologie de Zariski car T est déployé. Ainsi

$$\left[\widetilde{U_{\Sigma,(d_\alpha)}}/T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}\right] = \left[U_{\Sigma,(d_\alpha)}\right]\,[T],$$

d'où le résultat. $\square$

On déduit immédiatement de ce lemme qu'on a l'expression

$$Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}(T) = (\mathbf{L}-1)^r \sum_{\substack{(d_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)} \\ \forall m\in M,\ \sum_\alpha \langle m,\rho_\alpha\rangle\, d_\alpha = 0}} \left[U_{\Sigma,(d_\alpha)}\right]\, T^{\sum_\alpha d_\alpha}. \qquad (4.3.1.2)$$

La relation (4.3.1.2) et le fait déjà noté que $U_{\Sigma,(d_\alpha)}$ est dans $\mathcal{F}^{-\sum d_\alpha}\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$ montrent alors que pour tout entier $\kappa \geqslant 2$, la série $Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}(\mathbf{L}^{-\kappa})$ converge dans $\widehat{\mathcal{M}}$.

4.3.2 Le cas des surfaces de Hirzebruch

Nous traitons ce cas particulier séparément, car on obtient ici le fait que la serie $Z_{\mathrm{mot},H}$ est dans $\mathcal{M}_k[T]_{\mathrm{loc}}$, et de plus on sait que l'hypothèse 4.2.1 est vérifiée : notre résultat n'est ici dépendant d'aucune hypothèse, contrairement au cas général.

Soit donc Σ l'éventail de $\mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{R}$ dont les rayons sont engendrés par $\rho_1 = (1,0)$, $\rho_2 = (-1,m)$, $\rho_3 = (0,1)$, $\rho_4 = -\rho_3$ et $X_\Sigma = \mathcal{H}_m$ la surface de Hirzebruch associée.

Rappelons que $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma)) = 2$, et qu'on a

$$Z_{C_{\mathrm{eff}}(X_\Sigma),-\omega_\Sigma}(T) = \frac{N(T)}{D(T)\,(1-T)^2}$$

avec $N(T) = 1$ et $D(T) = (1+T)\,(1+T+T^2+\cdots+T^{m+1})$.

Pour mémoire, $Z^{'}(T)$ est alors l'élément de $\mathcal{M}_k[[T]]$ défini par le produit

$$Z^{'}(T) = D(\mathbf{L}\,T)\,(1-\mathbf{L}\,T)^2\, Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}(T).$$

Théorème 4.3.2
La série $Z^{'}(T)$ est un élément de $\mathcal{M}_k[T]$, et donc $Z_{mot,\mathbf{P}^1,T,H}(T)$ est un élément de $\mathcal{M}_k[T]_{loc}$. La valeur de $Z^{'}(T)$ en $\mathbf{L}^{-1}$ est

$$\mathbf{L}^2\,(1-\mathbf{L}^{-2})^2.$$

Notons que

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^{2}\,(1-\mathbf{L}^{-2})^2 &= \mathbf{L}^{2}\,\left(\frac{1}{1-\mathbf{L}^{-1}}\right)^2\,\left[(1-\mathbf{L}^{-2})(1-\mathbf{L}^{-1})\right]^2\\
&= \mathbf{L}^{2}\,\left(\frac{1}{1-\mathbf{L}^{-1}}\right)^2\,\left(\frac{1}{Z_{\mathbf{P}^1,\mathrm{mot}}(\mathbf{L}^{-2})}\right)^2\\
&= \mathbf{L}^{\dim(X_\Sigma)}\,\big([(1-\mathbf{L}\,T)\,Z_{\mathbf{P}^1,\mathrm{mot}}(T)]\,(\mathbf{L}^{-1})\big)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))}\\
&\qquad\qquad \times \sum_{(d_\alpha)} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((d_\alpha))\,\mathbf{L}^{-\sum\limits_{\alpha} d_\alpha},
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de l'expression de $\mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}$ obtenue à la section 4.2.3. Au vu de (4.2.4.1) et de (4.2.4.2), la valeur de $Z'\,(\mathbf{L}^{-1})$ peut alors s'interpréter de la façon informelle suivante : le terme principal du «pôle d'ordre 2 en $\mathbf{L}^{-1}$» de $Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}$ est égal à

$$\begin{aligned}
\alpha^*(X_\Sigma)\mathbf{L}^{\dim(X_\Sigma)}\,&\big([(1-\mathbf{L}\,T)\,Z_{\mathbf{P}^1,\mathrm{mot}}(T)]\,(\mathbf{L}^{-1})\big)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))}\\
&\times \sum_{(d_\alpha)} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((d_\alpha))\,\mathbf{L}^{-\sum\limits_{\alpha} d_\alpha}.
\end{aligned}$$

Dans le cas où k est un corps fini de cardinal q, on trouvait comme terme principal de la fonction zêta des hauteurs classique

$$\frac{1}{2\,(m+2)}\,q^2\,\left(\lim_{s\to 1}(s-1)\,\zeta_{\mathbf{P}^1}(s)\right)^2\,\left(\frac{1}{\zeta_{\mathbf{P}^1}(2)}\right)^2.$$

Nous obtenons donc bien une version motivique du résultat du chapitre 2. Comme la fonction zêta des hauteurs motivique est dans $\mathcal{M}_k[T]_{\mathrm{loc}}$, le résultat du chapitre 2 est même une conséquence du résultat ci-dessus, en spécialisant via le morphisme $\#$.

Démonstration : On a d'après le lemme 4.3.1, la formule (4.2.1.2) et la description de Σ

$$\begin{aligned}
&Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}(T)\\
&= (\mathbf{L}-1)^2 \sum_{\substack{(d_i)\in\mathbf{N}^4\\ d_1=d_2\\ d_3+m\,d_2=d_4}} \left[U_{(d_i)}\right]\,T^{\,d_1+d_2+d_3+d_4}\\
&= (\mathbf{L}-1)^2 \sum_{\substack{(d_i)\in\mathbf{N}^4,\,(e_i)\in\mathbf{N}^4\\ d_1+e_1=d_2+e_2\\ d_3+m\,d_2+e_3+m\,e_2=d_4+e_4}} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}(e_1,e_2,e_3,e_4)\,\left[\mathbf{P}^{\,d_1}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_2}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_3}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_4}\right]\\
&\qquad\qquad\times T^{\,d_1+d_2+d_3+d_4+e_1+e_2+e_3+e_4}
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de $\mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}$ obtenue à la section 4.2.3 et la relation (4.2.2.2), on voit qu'on peut restreindre la sommation aux entiers (e_i) vérifiant $e_1 = e_2$ et $e_3 = e_4$, et on obtient donc

$$\begin{aligned}
&Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}(T)\\
&= (\mathbf{L}-1)^2 \sum_{\substack{(d_i)\in\mathbf{N}^4\\(e_1,e_3)\in\mathbf{N}^2\\d_1+e_1=d_2+e_1\\d_3+m\,d_2+e_3+m\,e_1=d_4+e_3}} \mu_{\mathrm{mot}}(e_1)\,\mu_{\mathrm{mot}}(e_3)\,\left[\mathbf{P}^{\,d_1}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_2}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_3}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_4}\right]\\
&\qquad\qquad\times T^{\,d_1+d_2+d_3+d_4+2\,e_1+2\,e_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{L}-1)^2 \sum_{\substack{(d_1,d_3)\in\mathbf{N}^2\\(e_1,e_3)\in\mathbf{N}^2}} \mu_{\mathrm{mot}}(e_1)\,\mu_{\mathrm{mot}}(e_3)\,\left[\mathbf{P}^{\,d_1}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_1}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_3}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_3+m\,d_1+m\,e_1}\right]\\
&\qquad\qquad\times T^{\,(2+m)\,d_1+2\,d_3+(2+m)\,e_1+2\,e_3}
\end{aligned}$$

En utilisant la relation $(\mathbf{L}-1)\,\left[\mathbf{P}^d\right] = \mathbf{L}^{\,d+1}-1$ on trouve

$$\begin{aligned}
&Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}(T)\\
&= (\mathbf{L}-1) \sum_{\substack{(d_1,d_3)\in\mathbf{N}^2\\(e_1,e_3)\in\mathbf{N}^2}} \mu_{\mathrm{mot}}(e_1)\mu_{\mathrm{mot}}(e_3)\,\left[\mathbf{P}^{\,d_1}\right]\left[\mathbf{P}^{\,d_1}\right]\left[\mathbf{P}^{\,d_3}\right]\left(\mathbf{L}^{\,1+d_3+m\,d_1+m\,e_1}-1\right)\\
&\qquad\qquad\times T^{\,(2+m)\,d_1+2\,d_3+(2+m)\,e_1+2\,e_3}
\end{aligned}$$

$$= (\mathbf{L}-1)\,(Z_1(T)-Z_2(T))$$

avec

$$\begin{aligned}
Z_1(T) &= \sum_{\substack{(d_1,d_3)\in\mathbf{N}^2\\(e_1,e_3)\in\mathbf{N}^2}} \mu_{\mathrm{mot}}(e_1)\,\mu_{\mathrm{mot}}(e_3)\,\left[\mathbf{P}^{\,d_1}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_1}\right]\,\left[\mathbf{P}^{\,d_3}\right]\,\mathbf{L}^{\,1+d_3+m\,d_1+m\,e_1}\\
&\qquad\qquad\times T^{\,(2+m)\,d_1+2\,d_3+(2+m)\,e_1+2\,e_3}\\
&= \mathbf{L}\,\left(\sum_{e_3\in\mathbf{N}}\mu_{\mathrm{mot}}(e_3)\,T^{\,2\,e_3}\right)\,\left(\sum_{e_1\in\mathbf{N}}\mu_{\mathrm{mot}}(e_1)\,\mathbf{L}^{\,m\,e_1}\,T^{\,(2+m)\,e_1}\right)\\
&\quad\times\left(\sum_{d_1\in\mathbf{N}}\left[\mathbf{P}^{\,d_1}\right]^2\,\mathbf{L}^{\,m\,d_1}\,T^{\,(2+m)\,d_1}\right)\,\left(\sum_{d_3\in\mathbf{N}}\left[\mathbf{P}^{\,d_3}\right]\,\mathbf{L}^{\,d_3}\,T^{\,2\,d_3}\right)
\end{aligned}$$

et

$$Z_2(T) = \sum_{\substack{(d_1,d_3)\in\mathbf{N}^2\\(e_1,e_3)\in\mathbf{N}^2}} \mu_{\mathrm{mot}}(e_1)\,\mu_{\mathrm{mot}}(e_3)\,\left[\mathbf{P}^{d_1}\right]\,\left[\mathbf{P}^{d_1}\right]\,\left[\mathbf{P}^{d_3}\right] \times T^{(2+m)\,d_1+2\,d_3+(2+m)\,e_1+2\,e_3}$$

$$= \left(\sum_{e_3\in\mathbf{N}} \mu_{\mathrm{mot}}(e_3)\,T^{2\,e_3}\right)\left(\sum_{e_1\in\mathbf{N}} \mu_{\mathrm{mot}}(e_1)\,T^{(2+m)\,e_1}\right) \times \left(\sum_{d_1\in\mathbf{N}} \left[\mathbf{P}^{d_1}\right]^2\,T^{(2+m)\,d_1}\right)\left(\sum_{d_3\in\mathbf{N}} \left[\mathbf{P}^{d_3}\right]\,T^{2\,d_3}\right).$$

En utilisant les relations

$$\left[\mathbf{P}^d\right] = \frac{\mathbf{L}^{1+d}-1}{\mathbf{L}-1}$$

et

$$\left(\sum_{d\in\mathbf{N}} \mu_{\mathrm{mot}}(d)\,T^{d}\right) = (1-T)\,(1-\mathbf{L}\,T)$$

on trouve que

$$Z_1(T) = \mathbf{L}\,\frac{(1-T^2)\,(1+\mathbf{L}^{m+1}\,T^{m+2})}{(1-\mathbf{L}^2\,T^2)\,(1-\mathbf{L}^{2+m}\,T^{2+m})}$$

et

$$Z_2(T) = \frac{1+\mathbf{L}\,T^{2+m}}{1-\mathbf{L}^{2+m}\,T^{2+m}}.$$

Ainsi $Z^{'}(T)$ est un polynôme, égal à

$$\begin{aligned}&(1+\mathbf{L}\,T)(1+\mathbf{L}\,T+\cdots+(\mathbf{L}\,T)^{m+1})(1-\mathbf{L}\,T)^2\,(\mathbf{L}-1)(Z_1(T)-Z_2(T))\\ &= (\mathbf{L}-1)\,\mathbf{L}\,(1-T^2)\,(1+\mathbf{L}^{m+1}\,T^{m+2})+(\mathbf{L}-1)\,(1-\mathbf{L}\,T)\,(1+\mathbf{L}\,T)(1+\mathbf{L}\,T^{2+m})\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. □

4.3.3 Le cas général

On reprend les notations introduites à la section 3.2. Rappelons en particulier que σ_0 désigne un cône de Σ de dimension maximale, que les $(n_{\beta,\alpha})_{\substack{\beta\in\sigma_0\\ \alpha\notin\sigma_0}}$ sont les opposés des coordonnées des $(\rho_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$ dans la base $(\rho_\beta)_{\beta\in\sigma_0}$ de M et que $(-\omega_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$ désigne les coordonnées de la classe du faisceau anticanonique $-\omega$ dans la base $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$ de $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)$. Rappelons aussi que r est la dimension de X_Σ, t est le rang de $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)$ et on a $t+r=\#\Sigma(1)$. On a d'après le lemme 4.3.1et la formule (4.2.1.2)

$$Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}=(\mathbf{L}-1)^r \sum_{\substack{(d_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}\\ (e_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}\\ \forall\beta\in\sigma_0,\ d_\beta=\sum n_{\beta,\alpha}(d_\alpha+e_\alpha)-e_\beta}} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((e_\alpha)) \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \left[\mathbf{P}^{d_\alpha}\right] T^{\sum\limits_{\alpha} d_\alpha+e_\alpha}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
&Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}\\
&=(\mathbf{L}-1)^r \sum_{\substack{(d_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}\\ (e_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}\\ \sum n_{\beta,\alpha}(d_\alpha+e_\alpha)\geqslant e_\beta}} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((e_\alpha)) \prod_{\alpha\notin\sigma_0}\left[\mathbf{P}^{d_\alpha}\right] \prod_{\beta\in\sigma_0}\left[\mathbf{P}^{\sum n_{\beta,\alpha}(d_\alpha+e_\alpha)-e_\beta}\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha(d_\alpha+e_\alpha)}\\
&=(\mathbf{L}-1)^{-t} \sum_{\substack{d_\alpha\geqslant e_\alpha\\ \sum n_{\beta,\alpha}d_\alpha\geqslant e_\beta}} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((e_\alpha)) \prod_{\alpha\notin\sigma_0}\left(\mathbf{L}^{1+d_\alpha-e_\alpha}-1\right) \prod_{\beta\in\sigma_0}\left(\mathbf{L}^{1+\sum n_{\beta,\alpha}d_\alpha-e_\beta}-1\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times T^{\sum\limits_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha d_\alpha}.
\end{aligned}$$

Rappelons que les inéquations $d_\alpha \geqslant 0$ et $\sum n_{\beta,\alpha}\, d_\alpha \geqslant 0$ sont celles définissant, dans la base duale de la base $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$, le dual du cône effectif de X_Σ. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
&Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}\\
&\quad=(\mathbf{L}-1)^{-t} \sum_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X_\Sigma)^\vee\\ (e_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}\\ \forall\alpha\in\Sigma(1),\ \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha}} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((e_\alpha)) \prod_{\alpha\in\Sigma(1)}\left(\mathbf{L}^{1+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}-1\right) T^{\langle y,-\omega\rangle}.
\end{aligned}$$

De la même manière qu'au chapitre 3, nous utilisons le fait que $C_{\mathrm{eff}}(X_\Sigma)^\vee$ s'écrit comme le support d'un éventail régulier Δ pour en déduire une décomposition $Z(T)$ en une somme de plusieurs termes, et nous estimons le comportement de chaque terme séparément. Nous écrivons d'abord

$$Z_{\mathrm{mot},\mathbf{P}^1,T,H}=(q-1)^{-t}\sum_{A\subset\Sigma(1)}(-1)^{\#A}Z_A(T)$$

avec, pour $A\subset\Sigma(1)$,

$$Z_A(T)=\sum_{(e_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}}\mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((e_\alpha))\,Z_{A,(e_\alpha)}(T),$$

$Z_{A,(E_\alpha)}(T)$ désignant

$$\sum_{\substack{y\in \mathrm{Pic}(X_\Sigma)^\vee \\ \forall\,\alpha\in\Sigma(1),\ \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A} 1+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle - e_\alpha} T^{\langle y,-\omega\rangle}.$$

Puis nous écrivons

$$Z_A(T)=\sum_{\delta\in\Delta} Z_{A,\delta}(T)$$

avec

$$Z_{A,\delta}(T)=\sum_{(e_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}\big((e_\alpha)\big)\, Z_{A,\delta,(e_\alpha)}(T),$$

$Z_{A,\delta,(e_\alpha)}(T)$ désignant

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta) \\ \forall\alpha\in\Sigma(1),\ \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A} 1+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle - e_\alpha} T^{\langle y,-\omega\rangle}.$$

Dans toute la suite du chapitre, nous supposons l'hypothèse 4.2.1 vérifiée. Nous le rappelerons d'ailleurs dans l'énoncé des propositions 4.3.3 et 4.3.5, dont les preuves dépendent de cette hypothèse. De façon similaire au cas étudié dans le chapitre 3, une réponse positive aux deux dernières questions de 4 se déduit alors des propositions 4.3.3 et 4.3.5. Les preuves sont similaires à celles des propositions analogues du capitre 3, mais sont cependant rendues plus simples par le fait qu'on étudie ici des convergences pour une norme non-archimédienne.

Le cas $A=\emptyset$. Soit $\delta\in\Delta$. Nous décomposons encore

$$Z_{\emptyset,\delta}(T)=\sum_{J\subset\Sigma(1)} (-1)^{\# J}\, Z_{\emptyset,\delta,J}(T)$$

avec

$$Z_{\emptyset,\delta,J}(T)=\sum_{(e_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}\big((e_\alpha)\big)\, Z_{\emptyset,\delta,J,(e_\alpha)}(T),$$

$Z_{\emptyset,\delta,J,(e_\alpha)}(T)$ désignant

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta) \\ \forall\,\alpha\in J,\, \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle < e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} 1+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle - e_\alpha} T^{\langle y,-\omega\rangle}.$$

Nous démontrons alors la proposition suivante.

Proposition 4.3.3
On suppose l'hypothèse 4.2.1 vérifiée. La série

$$D_\Delta(\mathbf{L}\,T)\,(1-\mathbf{L}\,T)^{\dim(\delta)}\,Z_{\emptyset,\delta,J}(T)$$

converge pour $T=\mathbf{L}^{-1}$. *Si* $J\neq\emptyset$ *et* $\dim(\delta)=t$

$$\left[D_\Delta(\mathbf{L}\,T)(1-\mathbf{L}\,T)^{\dim(\delta)}\,Z_{\emptyset,\delta,J}\right](\mathbf{L}^{-1})=0.$$

La série

$$f(T)=D_\Delta(\mathbf{L}\,T)(1-\mathbf{L}\,T)^{t}\sum_{\substack{\delta\in\Delta\\ \dim(\delta)=t}} Z_{\emptyset,\delta,\emptyset}(T)$$

converge pour $T=\mathbf{L}^{-1}$ *et*

$$f\left(\mathbf{L}^{-1}\right)=N_\Delta(1)\,\mathbf{L}^{\#\Sigma(1)}\sum_{(e_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}}\mu_{\Sigma,mot}((e_\alpha))\mathbf{L}^{-\sum e_\alpha}.$$

Nous déduisons cette proposition du lemme suivant.

Lemme 4.3.4
Soit (e_α) *un élément de* $\mathbf{N}^{\Sigma(1)}$. *Soient* δ *un cône de* Δ *et* J *une partie (éventuellement vide) de* $\Sigma(1)$. *Alors la série*

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\alpha\in J,\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle<e_\alpha}}\mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}1+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}\,T^{\langle y,-\omega\rangle}$$

s'écrit

$$\left(\prod_{i\in I'}\left[\left(1-(\mathbf{L}\,T)^{-\langle m_i,\omega\rangle}\right)^{-1}-1\right]\right)\times P_{I'}(T)$$

où I' *est un sous-sensemble de* I_δ *et* $P_{I'}$ *est un polynôme tel que pour tout entier* $\kappa\geqslant 1$ *on a*

$$P_{I'}\left(\mathbf{L}^{-\kappa}\right)\in\mathcal{F}^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}e_\alpha-\#\Sigma(1)}\mathcal{M}_{k,loc}.$$

Par ailleurs supposons δ *de dimension maximale. Alors si* J *est non vide,* $I^{'}$ *est un sous-ensemble strict de* I_δ *et si* J *est vide, on a* $I^{'}=I_\delta$ *et* P_{I_δ} *est une constante, égale à*

$$\mathbf{L}^{\#\Sigma(1)-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}e_\alpha}.$$

Démonstration : Nous adoptons la même notation qu'au lemme 3.5.3 : pour δ cône de Δ, $J \subset \Sigma(1)$ et $(k_\alpha) \in \mathbf{N}^J$, nous désignerons l'ensemble

$$\{y \in C(I_\delta),\ \forall \alpha \in J,\ \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \leqslant e_\alpha\}$$

par $C(I_\delta)_{J,(e_\alpha)}$.

La série à évaluer est alors égale à

$$\sum_{y \in C(I_\delta)_{J,(e_\alpha)}} \mathbf{L}^{\sum\limits_\alpha 1 + \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} T^{\langle y, -\omega \rangle}.$$

Si $J = \emptyset$, ce terme s'évalue immédiatement, il vaut

$$\mathbf{L}^{\#\Sigma(1) - \sum\limits_{\alpha \in \Sigma(1)} e_\alpha} \left(\prod_{i \in I_\delta} \left[\left(1 - (\mathbf{L}\, T)^{-\langle m_i, \omega \rangle}\right)^{-1} - 1 \right] \right).$$

Si $J \neq \emptyset$, nous posons

$$I_{J,1} = \{\, i \in I_\delta,\ \forall\, \alpha \in J,\ \langle m_i, \mathcal{D}_\alpha \rangle = 0\}$$

et $I_{J,2} = I_\delta \setminus I_{J,1}$. En particulier on a $C(I_{J,1})_{J,(e_\alpha)} = C(I_{J,1})$.

L'expression pour Z_1 se décompose alors en un produit

$$P(T) \times \sum_{y_1 \in C(I_{J,1})} \mathbf{L}^{\langle y_1\,,\ \sum\limits_{\alpha \notin J} \mathcal{D}_\alpha \rangle} T^{\langle y_1, -\omega \rangle}$$

où on désigne par $P(T)$ l'expression

$$\sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J,(e_\alpha)}} \mathbf{L}^{\sum\limits_\alpha 1 + \langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} T^{\langle y_2, -\omega \rangle}.$$

Si $y_1 \in C(I_{J,1})$, on a

$$\langle y_1, \sum_{\alpha \notin J} \mathcal{D}_\alpha \rangle = \langle y_1, -\omega \rangle$$

et le deuxième facteur est égal à

$$\prod_{i \in I_{J,1}} \left[\left(1 - (\mathbf{L}\, T)^{-\langle m_i, \omega \rangle}\right)^{-1} - 1 \right].$$

Passons au facteur $P(T)$. Comme dans la preuve du lemme 3.5.3, on voit que $C(I_{J,2})_{J,(e_\alpha)}$ est fini. Pour tout entier κ on a

$$P\left(\mathbf{L}^{-\kappa}\right) = \mathbf{L}^{\#\Sigma(1) - \sum\limits_\alpha e_\alpha} \sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J,(e_\alpha)}} \mathbf{L}^{(1-\kappa)\langle y_2, -\omega \rangle}.$$

Comme $\langle y_2, -\omega\rangle \geqslant 0$, si $\kappa \geqslant 1$ on a

$$P\left(\mathbf{L}^{-\kappa}\right) \in \mathcal{F}^{\sum e_\alpha - \#\Sigma(1)}\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}.$$

Notons enfin que si δ est un cône de dimension maximale, les $(m_i)_{i\in I_\delta}$ forment une $\mathbf{Z}$-base de $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)^\vee$, et si $J \neq \emptyset$ on ne peut avoir $I_{J,2} = \emptyset$. Ceci joint au calcul pour $J = \emptyset$ montre les deux dernières assertions du lemme.□

Le cas $A \neq \emptyset$. On écrit

$$Z_{A,\delta}(T) = \sum_{J\,\subset\,\Sigma(1)\setminus A} (-1)^{\#\,J}\, Z_{A,\delta,J}(T)$$

avec

$$Z_{A,\delta,J}(T) = \sum_{(e_\alpha)\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_{\Sigma,\mathrm{mot}}((e_\alpha))\, Z_{A,\delta,J,(e_\alpha)}(T)$$

où on désigne par $Z_{A,\delta,J,(E_\alpha)}(T)$ l'expression

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\,\alpha\in A,\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha\\ \forall\,\alpha\in J,\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle<e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A} 1+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}\, T^{\langle y,-\omega\rangle}.$$

Nous montrons la proposition suivante.

Proposition 4.3.5
On suppose l'hypothèse 4.2.1 vérifiée. Pour $J \subset \Sigma(1)\setminus A$, la série

$$D_\Delta(\mathbf{L}\,T)\,(1-\mathbf{L}\,T)^{\dim(\delta)}\, Z_{A,\delta,J}(T)$$

converge pour $T = \mathbf{L}^{-1}$, et sa valeur en $\mathbf{L}^{-1}$ est nulle si $\dim(\delta) = t$.

Nous déduisons cette proposition du lemme suivant.

Lemme 4.3.6
Soient $(e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$, δ un cône de Δ, J une partie (éventuellement vide) de $\Sigma(1)\setminus A$. Alors la série

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\,\alpha\in A,\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha\\ \forall\alpha\in J,\,\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle<e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A} 1+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}\, T^{\langle y,-\omega\rangle}$$

s'écrit

$$\left(\prod_{i\in I'}\left[\left(1-(\mathbf{L}\,T)^{-\langle m_i,\omega\rangle}\right)^{-1}-1\right]\right)\times\ R_{I'}(T)$$

où $I^{'}$ est un sous-ensemble de I_δ, et $R_{I'}$ est un élément de $\mathcal{M}_{k,loc}[[T]]$ tel que, pour tout entier $\kappa\geqslant 1$,

$$R_{I'}\left(\mathbf{L}^{-\kappa}\right)$$

converge dans $\widehat{\mathcal{M}}$ vers un élément de $\mathcal{F}^{-\#\Sigma(1)+\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} e_\alpha}\widehat{\mathcal{M}}$. Par ailleurs si δ est un cône de dimension maximale, I' est un sous-sensemble strict de I_δ.

Démonstration : Nous reprenons la notation du lemme 3.5.5 : nous désignons l'ensemble

$$\left\{y\in C(I_\delta)_{J,(e_\alpha)},\ \forall\alpha\in A,\ \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha\right\}$$

par $C(I_\delta)^{A}_{J,(e_\alpha)}$.

La série à évaluer s'écrit donc

$$Z_1=\sum_{y\in C(I_\delta)^A_{J,(e_\alpha)}}\mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A}(1+\langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha\,)}\ T^{\,\langle y,-\omega\rangle}.$$

Nous posons

$$I_{A,J,1}=\{\,i\in I_\delta,\ \forall\,\alpha\in A\cup J,\ \langle m_i,\mathcal{D}_\alpha\rangle=0\}$$

et $I_{A,J,2}=I_\delta\setminus I_{A,J,1}$. Ainsi tout élément de $C(I_\delta)^A_{J,(e_\alpha)}$ s'écrit de manière unique y_1+y_2 avec

$$y_1\in C(I_{A,J,1})$$

et

$$y_2\in\coprod_{\substack{h_\alpha\in\mathbf{N}^A\\ h_\alpha\geqslant e_\alpha}}\left\{y\in C(I_{A,J,2})_{J,(e_\alpha)},\ \forall\,\alpha\in A,\ \langle y,\mathcal{D}_\alpha\rangle\ =\ h_\alpha\right\}.$$

L'expression considérée se décompose donc en un produit

$$R(T)\times\sum_{y_1\in C(I_{A,J,1})}\mathbf{L}^{\langle y_1\,,\sum\limits_{\alpha\notin A\cup J}\mathcal{D}_\alpha\rangle}\ T^{\,\langle y_1,-\omega\rangle}$$

avec

$$R(T)=\sum_{\substack{h_\alpha\in\mathbf{N}^A\\ h_\alpha\geqslant e_\alpha}}R_{(h_\alpha)}(T),$$

$R_{(h_\alpha)}(T)$ désignant l'expression

$$\sum_{\substack{y_2 \in C(I_{A,J,2})_{J,(e_\alpha)} \\ \forall\, \alpha \in A,\, \langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle = h_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha \notin A} (1+\langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha)} T^{\langle y_2, -\omega \rangle}.$$

Le deuxième facteur est égal à

$$\prod_{i \in I_{A,J,1}} \left[\left(1 - (\mathbf{L}\, T)^{-\langle m_i, \omega \rangle}\right)^{-1} - 1 \right].$$

De la même façon que dans la preuve du lemme 4.3.4, on voit facilement il n'y a qu'un nombre fini d'éléments y_2 de $C(I_{A,J,2})_{J,(e_\alpha)}$ vérifiant $\langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle = h_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$. Pour un tel y_2, on a pour tout entier κ

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha \notin A} (1+\langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha)} T^{\langle y_2, -\omega \rangle} &= \mathbf{L}^{\#\Sigma(1) - \#A - \sum\limits_{\alpha \notin A} e_a - \sum\limits_{\alpha \in A} h_\alpha} \mathbf{L}^{(1-\kappa)\langle y_2, -\omega \rangle} \\ &= \mathbf{L}^{\#\Sigma(1) - \#A - \sum\limits_{\alpha \in \Sigma(1)} e_a - \sum\limits_{\alpha \in A} (h_\alpha - e_\alpha)} \mathbf{L}^{(1-\kappa)\langle y_2, -\omega \rangle}. \end{aligned}$$

Comme $\langle y_2, -\omega \rangle \geqslant 0$, si $\kappa \geqslant 1$ on a donc d'après l'hypothèse 4.2.1

$$R_{(h_\alpha)}(\mathbf{L}^{-\kappa}) \in \mathcal{F}^{\sum\limits_{\alpha \in \Sigma(1)} e_\alpha - \#\Sigma(1) + \sum\limits_{\alpha \in A} (h_\alpha - e_\alpha)} \mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}.$$

Ainsi $R(\mathbf{L}^{-\kappa})$ converge dans $\widehat{\mathcal{M}}$ vers un élément de

$$\mathcal{F}^{\sum\limits_{\alpha \in \Sigma(1)} e_\alpha - \#\Sigma(1)} \widehat{\mathcal{M}}.$$

Notons enfin que comme A est non vide, si $I = I_\delta$ pour un cône δ maximal $I_{A,J,2}$ ne peut être vide. Ceci montre la dernière assertion du lemme. $\square$

Des propositions 4.3.3 et 4.3.5, on déduit que si l'hypothèse 4.2.1 est vérifiée la question 4.2.2 admet une réponse positive pour les variétés toriques déployées.

Chapitre 5

Le cas des variétés toriques non déployées

Dans ce chapitre, on étudie la question 1.4.2 pour une variété torique non déployée définie sur un corps de fonctions, en prenant pour U l'orbite ouverte. Nous adaptons pour cela au cas fonctionnel l'approche utilisée par Batyrev et Tschinkel dans [BaTs1] et [BaTs3]. La section suivante détaille cette adaptation. Le résultat auquel nous aboutissons (théorème 5.3.3) montre qu'on obtient bien le domaine de convergence et le prolongement espérés pour la fonction zêta des hauteurs, ainsi qu'un pôle de l'ordre annoncé en $s = 1$. Cependant la constante obtenue comme terme principal de la fonction zêta des hauteurs en $s = 1$ s'écrit

$$\varsigma(T)\,\alpha^*(X_\Sigma)\,\beta(X_\Sigma)\,\gamma_H\,(X_\Sigma)$$

où T est l'orbite ouverte de X_Σ et $\varsigma(T)$ un invariant spécifique à la caractéristique non nulle, défini à la fin de la section 5.2.7. Cette constante coïncide donc avec celle de la question 1.4.2 uniquement si $\varsigma(T) = 1$. Dans certains cas particuliers (cf. proposition 5.2.16), nous montrons que $\varsigma(T)$ est égal à 1, mais la question de savoir si cette égalité est vérifiée pour tout tore algébrique T reste ouverte.

5.1 L'adaptation de la méthode de Batyrev et Tschinkel en caractéristique positive

Dans cette section, nous résumons brièvement la méthode utilisée dans [BaTs3] et [BaTs1], en expliquant quelles parties de la preuve nécessitent une modification en caractéristique non nulle.

La première étape consiste à définir précisément un système de hauteurs puis à l'étendre à l'espace adélique associé au tore. La construction est strictement la même dans le cas fonctionnel. Elle est rappelée dans les sections 5.3.2 et 5.3.5.

A ce stade, il faut bien sûr déjà noter que la topologie de l'espace adélique associé au tore a des propriétés différentes dans chacun des deux cas. Moralement, en fait, la situation est plus agréable en caractéristique positive : beaucoup des groupes topologiques mis en jeu sont compacts (proposition 5.2.2 et section 5.4.6).

Pour pouvoir appliquer la formule de Poisson, il faut s'assurer de l'intégrabilité de la transformée de Fourier de la hauteur. Cette transformée se décompose en produit de transformées de Fourier locales. On utilise dans le cas arithmétique l'expression explicite de presque toutes les transformées de Fourier locales, et des majorations pour les transformées de Fourier restantes. La formule explicite est la même dans le cas fonctionnel, c'est le théorème

5.4.5. En ce qui concerne les transformées de Fourier locales aux places restantes, leur continuité suffit pour assurer la convergence, cependant nous avons besoin de quelques renseignements sur la forme des fonctions obtenues (lemme 5.4.7).

Le choix d'un scindage des caractères permet alors de constater que la fonction zêta des hauteurs s'obtient par intégration (sur un espace vectoriel réel dans le cas arithmétique, sur un produit de cercles dans le cas fonctionnel) d'une fonction qui possède une expression en terme de produit de fonctions L de Hecke([BaTs1, Theorem 3.1.3] et [BaTs3, page 46] pour le cas arithmétique, corollaire 5.4.9 pour le cas fonctionnel). Il faut «maîtriser» le comportement analytique de cette fonction, et dans le cas arithmétique, on a besoin pour cela d'un contrôle uniforme sur les bandes verticales des fonctions L, obtenu via le principe de Phragmen-Lindelöf ([BaTs1, Theorem 3.2.3]. Dans le cas fonctionnel, l'holomorphie de la fonction $L\,(.,\chi)$ quand le caractère χ est non trivial est suffisante.

Il s'agit maintenant, pour évaluer la fonction zêta des hauteurs, de comprendre comment les intégrations successives modifient le comportement analytique de la fonction sous l'intégrale (cet étape n'apparaît d'ailleurs pas dans le cas des tores anisotropes). C'est l'objet de la proposition technique de Batyrev et Tschinkel [BaTs3, Theorem 6.19], qui procèdent par applications successives du théorème des résidus. Un analogue direct de leur méthode en caractéristique non nulle s'avère difficile à mettre en œuvre, car bien que la compacité des espaces topologiques mis en jeu nous simplifie un peu les choses, nous dispensant des hypothèses du type contrôle uniforme sur les bandes verticales, indispensables en caractéristique zéro, les fonctions zêtas des hauteurs en caractéristique non nulle s'avèrent posséder plus de pôles sur la droite $\Re(s) = 1$ que ceux donnés par la $\frac{2\,i\,\pi}{\log q_K}$-périodicité. Ce phénomène est déjà visible dans le cas des variétés toriques déployées, par exemple $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$: la formule de la page 41 montrent que la fonction zêta des hauteurs de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 = \mathcal{H}_0$ s'écrit

$$\zeta_H(s) = f_1(q^{-s})\,\zeta_{\mathcal{C}}(2\,s-1)^2 + f_2(q^{-s})\,\zeta_{\mathcal{C}}(2\,s-1) + f_3(q^{-s}),$$

où, pour $i = 1,2,3$, $s \mapsto f_i(q^{-s})$ est holomorphe sur le domaine $\Re(s) > \frac{1}{2}$ et $s \mapsto f_1(q^{-s})$ ne s'annule pas sur ce domaine. Ainsi l'ensemble des pôles situés sur la droite $\Re(s) = 1$ est $\{1 + \frac{i\,k\,\pi}{\log q}\}_{k\in\mathbf{Z}}$. Rappelons que dans le cas de la caractéristique zéro, Batyrev et Tschinkel montrent que le seul pôle de la fonction zêta des hauteurs des variétés toriques sur la droite $\Re(s) = 1$ est $s = 1$. La gestion des pôles supplémentaires en caractéristique non nulle se révèle vite être très délicate (voire ingérable...), si on veut suivre «au plus près» la méthode de Batyrev et Tschinkel. C'est pourquoi, pour aboutir à une version fonctionnelle de leur résultat technique, nous exploitons la périodicité des fonctions mises en jeu pour obtenir une interprétation en terme de séries de type combinatoire de la fonction obtenue après intégration sur le produit de cercles. Les techniques utilisées pour évaluer ces séries sont alors similaires à celles employées dans le chapitre 3. Les lemmes 5.5.5 et 5.5.6 jouent le rôle en caractéristique positive de la proposition technique de Batyrev et Tschinkel citée ci-dessus.

La description du comportement analytique de la fonction obtenue après intégrations successives revient (dans un sens à préciser, cf. les lemmes 5.5.4 et 5.5.5 ainsi que l'énoncé du théorème 6.19 de [BaTs3]) à décrire le quotient d'un certain $\mathbf{Z}$-module. Dans le cas arithmétique, ce quotient est donnée par la résolution flasque du groupe des caractères du tore par le groupe de Picard de la variété torique. Ceci vient de l'isomorphisme entre la partie réelle de l'espace adélique associé au tore et le groupe des caractères du tore étendu aux réels (cf. [BaTs3, p. 46]. Dans le cas fonctionnel, on n'a pas une situation complètement similaire (voir en effet la proposition 5.2.3) et c'est une forme «tordue» de la résolution flasque qui est mise en jeu (ceci apparaît notamment dans le lemme 5.4.2). On revient ensuite à la «bonne» forme par le lemme 5.5.7, moyennant l'introduction d'une constante liée à des invariants du tore algébrique T, invariants spécifiques à la caractéristique non nulle.

La dernière étape consite à calculer explicitement le terme principal de la fonction zêta des hauteurs en $s = 1$, et vérifier qu'il coïncide avec la prédiction de Peyre. On a besoin d'un théorème d'Ono sur le nombre de Tamagawa d'un tore algébrique (théorème 5.2.5), lequel théorème a été démontré dans [On3] pour tout corps global, mais a cependant dû être corrigé par Oesterlé dans le cas de la caractéristique non nulle, en introduisant un facteur correctif dans la définition du nombre de Tamagawa. On a besoin également de résultats de Colliot-Thélène et Sansuc, démontrés pour tout corps global également, et permettant d'obtenir le lemme 5.2.13. On peut donc ici reprendre le calcul de Batyrev et Tschinkel (modulo bien sûr les modifications en caractéristique positive dans les définitions des constantes mises en jeu). Ceci est fait dans la partie 5.6. On obtient finalement la constante prédite par Peyre, multipliée par un facteur correspondant au quotient de la constante évoquée à la fin du paragraphe précédent par le facteur correctif d'Oesterlé. La question de savoir si ce quotient vaut 1, et donc si la constante obtenue est bien la constante annoncée, n'a pu encore une fois recevoir une réponse positive que dans des cas particuliers, le cas général restant ouvert.

Rappels et notations : Comme nous allons utiliser la cohomologie galoisienne, nous effectuons quelques rappels sur les propriétés des groupes de cohomologie à la Tate, renvoyant à [Se2, Chapitre VIII] pour plus de détails.

Soit G un groupe fini. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on peut définir sur la catégorie des G-modules un foncteur $\widehat{H}^n(G, .)$, à valeurs dans la catégorie des $\mathbf{Z}$-modules, vérifiant entre autres les propriétés suivantes :

- Pour $n \geqslant 1$, ce foncteur coïncide avec le foncteur classique $H^n(G, .)$, n-ème foncteur dérivé droit du foncteur «points fixes sous G».

- Si M est un G-module et

$$N_G : m \mapsto \sum_{g \in G} g.m$$

est la norme, on a $\widehat{H}^0(G, M) = M^G / N_G M$.

- Si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de G-modules, on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow \widehat{H}^{n-1}(G, M'') \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^n(G, M') \longrightarrow \widehat{H}^n(G, M) \\ \longrightarrow \widehat{H}^n(G, M'') \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^{n+1}(G, M') \longrightarrow \widehat{H}^{n+1}(G, M) \ldots \end{aligned}$$

- Si M et M' sont des G-modules et m et n sont dans $\mathbf{Z}$, on a un cup-produit

$$\widehat{H}^m(G, M) \otimes \widehat{H}^n(G, M') \longrightarrow \widehat{H}^{m+n}(G, M \otimes M')$$

qui permet en particulier, pour tout n de $\mathbf{Z}$, d'identifier $\widehat{H}^{-n}(G, M)$ au dual de $\widehat{H}^n(G, M^\vee)$.

- Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\widehat{H}^n(G, M)$ est tué par la multiplication par $\#G$. Si de plus M est de type fini, $\widehat{H}^n(G, M)$ est fini.

Dans toute la suite, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, nous noterons $H^n(G, M)$ le groupe $\widehat{H}^n(G, M)$, sauf dans le cas où n vaut explicitement 0, où nous conserverons la notation $\widehat{H}^0(G, M)$ pour éviter toute confusion.

5.2 Tores algébriques

5.2.1 Quelques rappels

Soit K un corps quelconque, et K^{sep} une clôture séparable de K. Rappelons qu'un groupe algébrique T défini sur K est un *tore algébrique* (de dimension d) s'il existe un isomorphisme de groupes algébriques

$$T_{K^{\text{sep}}} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{G}_{m, K^{\text{sep}}})^d.$$

On note $X(T)$ le groupe des caractères de T, i.e.

$$X(T) = \mathrm{Hom}_{gr.al.,K^{\mathrm{sep}}}(T, \mathbf{G}_{m,K^{\mathrm{sep}}}).$$

C'est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang d, sur lequel le groupe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ agit continûment.

Par [On2, Proposition 1.2.1] il existe une extension galoisienne finie L de K qui déploie T, en d'autres termes on a un isomorphisme de groupes algébriques

$$T_L \xrightarrow{\sim} (\mathbf{G}_{m,L})^d.$$

et l'action de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ sur $X(T)$ se factorise à travers $\mathrm{Gal}(L/K)$. En fait

$$T \longmapsto X(T)$$

définit une équivalence entre la catégorie des tores algébriques définis sur K et la catégorie des modules libres de rang fini muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$. Si L/K est finie galoisienne, l'équivalence ci-dessus induit une équivalence entre la catégorie des tores algébriques défini sur K et déployés par L et la catégorie des $\mathrm{Gal}(L/K)$-modules libres de rang fini.

Si T est un tore algébrique déployé par une extension finie galoisienne de groupe G, le groupe $T(K) = T(L)^G$ des points K-rationnels de T s'identifie canoniquement à

$$\mathrm{Hom}_G(X(T), L^*).$$

Exemples : Un exemple immédiat de tore algébrique est fourni par les tores déployés, c'est-à-dire les tores K-isomorphes à un produit de copies de $\mathbf{G}_{m,K}$.

Un autre exemple, important pour la suite, est donné par la situation suivante : soit K_0/K une extension finie séparable, et L/K une extension finie galoisienne de groupe G contenant K_0. Soit G_0 le groupe de Galois de L/K_0. Au G-module de permutation $\mathbf{Z}[G/G_0]$ correspond, par l'équivalence de catégories ci-dessus, la *restriction à la Weil* de K_0 à K de $\mathbf{G}_m$, notée $\mathrm{Res}_{K_0/K}\mathbf{G}_m$. En particulier on a la propriété

$$\left(\mathrm{Res}_{K_0/K}\mathbf{G}_m\right)(K) = (K_0)^*.$$

Un tore algébrique est dit *quasi-déployé* si c'est un produit de tels tores. Un tore algébrique sur K, déployé par L, est quasi-déployé si et seulement si son groupe des caractères est un G-module de permutation, c'est-à-dire possède une $\mathbf{Z}$-base stable sous l'action de G.

En fait dans la situation ci-dessus, pour tout tore algébrique T défini sur K_0, on peut définir la restriction à la Weil de K_0 à K de T (cf. [On2, §1.4]), qui est un tore algébrique défini sur K vérifiant en particulier

$$\left(\mathrm{Res}_{K_0/K}T\right)(K) = T(K_0).$$

Par la suite seul le cas $T = \mathbf{G}_m$ nous sera utile.

5.2.2 L'espace adélique associé à un tore algébrique

Soit K un corps de fonctions. On notera $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)$ le groupe des idèles de K, muni de la topologie adélique classique, qui en fait un groupe topologique localement compact. On a une injection diagonale $\mathbf{G}_m(K) \hookrightarrow \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)$ qui identifie $\mathbf{G}_m(K)$ à un sous-groupe discret de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)$.

Soit

$$\mathbf{K}(\mathbf{G}_m) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} \mathcal{O}_v^*,$$

c'est le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)$.

On a un morphisme degré

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ (x_v) & \longmapsto & \sum\limits_{v \in \mathcal{P}_K} f_v\, v(x) \end{array}$$

noté $\deg_K$. Par [We1, VII § 5, Cor 6], ce morphisme est surjectif. Son noyau sera noté $\mathbf{G}_m^1(\mathbf{A}_K)$, il contient $\mathbf{G}_m(K)$ (par la formule du produit) et $\mathbf{K}(\mathbf{G}_m)$.

Si L/K est une extension finie séparable, $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)$ s'injecte naturellement dans $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)$ et on a

$$d_L \deg_{L|_{\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)}} = d_K [L:K] \deg_K, \tag{5.2.2.1}$$

où l'on rappelle que q^{d_L} et q^{d_K} représentent le cardinal du corps des constantes de L et K respectivement.

Si L/K est galoisienne de groupe G, G agit sur $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)$ et on a

$$\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)^G = \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K).$$

On notera $C_K = \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)/\mathbf{G}_m(K)$ le groupe des classes d'idèles de K.

Nous décrivons maintenant la généralisation de ces notions à un tore algébrique T quelconque. Bien entendu pour $T = \mathbf{G}_m$ on retrouvera les définitions précédentes. La construction de l'espace adélique associé à un tore algébrique T est en fait un cas particulier de la construction générale de l'espace adélique associé à une variété algébrique définie sur K (cf. [We2, I.2] et [Oe, I.3]). Elle peut se faire de la façon suivante.

Pour toute place v de K, $T(K_v)$ est muni naturellement d'une structure de groupe topologique localement compact. On désigne alors par $T(\mathcal{O}_v)$ le sous-groupe compact maximal de $T(K_v)$. En fait, si S désigne l'ensemble des places de K ramifiées dans L et S_L l'ensemble des places de L divisant une place de S, le schéma en groupe

$$\mathcal{T} = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S_L} \otimes X(T))^G$$

est un modèle de T sur $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_S)$, et pour toutes les places v en dehors de S on a $T(\mathcal{O}_v) = \mathcal{T}(\mathcal{O}_v)$, d'où la notation abusive adoptée.

L'espace adélique associé à T peut alors être décrit ensemblistement par

$$T(\mathbf{A}_K) = \left\{ (x_v) \in \prod_v T(K_v),\ x_v \in T(\mathcal{O}_v) \text{ pour presque tout } v \right\}.$$

On le munit de la topologie dont une base d'ouverts est donnée par les sous-ensembles du type

$$\prod_{v \in S} U_v \times \prod_{v \notin S} T(\mathcal{O}_v)$$

où S est un ensemble fini de places de K et, pour $v \in S$, U_v est un ouvert de $T(K_v)$. Cette topologie, qui est plus fine que la topologie issue de la topologie produit sur $\prod T(K_v)$, fait de $T(\mathbf{A}_K)$ un groupe topologique localement compact. On peut alors identifier $T(K)$ à un sous-groupe discret de $T(\mathbf{A}_K)$. On notera

$$\mathbf{K}(T) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} T(\mathcal{O}_v),$$

c'est le sous-groupe compact maximal de $T(\mathbf{A}_K)$.

Si L est une extension finie galoisienne de K déployant T, de groupe de Galois G, on dispose également, comme pour $T(K)$, d'une description simple de tous ces groupes en terme du G-module $X(T)$, pratique pour manipuler des suites exactes. Pour toute place v de K, on a une identification naturelle

$$T(K_v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G\left(X(T), (L \otimes_K K_v)^*\right).$$

Rappelons que $(L \otimes_K K_v)^*$ s'identifie à $\prod_{\mathcal{V}|v} L_{\mathcal{V}}^*$. Le sous-groupe $T(\mathcal{O}_v)$ s'identifie alors à

$$\mathrm{Hom}_G\left(X(T), \prod_{\mathcal{V}|v} \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^* \right).$$

Si on choisit une place $\mathcal{V}$ divisant v et si on note G_v son groupe de décomposition on a les identifications

$$T(K_v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_v}\left(X(T), L_{\mathcal{V}}^*\right)$$

et

$$T(\mathcal{O}_v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_v}\left(X(T), \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^*\right).$$

On peut identifier $T(\mathbf{A}_K)$ au groupe

$$\mathrm{Hom}_G(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L))$$

muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)$, et $\mathbf{K}(T)$ au groupe

$$\mathrm{Hom}_G(X(T), \mathbf{K}(\mathbf{G}_{m,L})).$$

Exemple : Soit K_0 une extension finie séparable de K, et $T = \mathrm{Res}_{K_0/K}\mathbf{G}_m$. Alors $T(\mathbf{A}_K)$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{G}_m\left(\mathbf{A}_{K_0}\right)$.

5.2.3 Le degré

Soit T un tore algébrique défini sur K, déployé par une extension finie galoisienne L de groupe de Galois G. Soit $m \in X(T)^G$. L'évaluation en m induit un morphisme continu

$$m \,:\, T(\mathbf{A}_K) = \mathrm{Hom}_G(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)) \to \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)^G = \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K).$$

Plus généralement tout morphisme de K-tores algébriques induit un morphisme continu sur les espaces adéliques associés. Le morphisme défini ci-dessus correspond au morphisme $T \to \mathbf{G}_m$ dual du morphisme de G-modules $\mathbf{Z} \to X(T)$ qui envoie 1 sur m.

Par composition de m avec $\deg_K$ on obtient un morphisme continu

$$\tilde{m} \,:\, T(\mathbf{A}_K) \to \mathbf{Z}.$$

Le morphisme

$$\begin{array}{rl} T(\mathbf{A}_K) & \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(X(T)^G, \mathbf{Z}\right) \\ x & \longmapsto (m \mapsto \tilde{m}(x)) \end{array}$$

sera noté $\deg_T$. Ce morphisme est évidemment indépendant du choix de L. Ce morphisme n'est autre que le morphisme θ défini par Oesterlé dans [Oe, I.5.5], composé avec $\log_{q_K}$. Par ailleurs il est clair que le degré est fonctoriel dans le sens suivant : si

$$\tilde{f} \,:\, X(T_2) \longrightarrow X(T_1)$$

est un morphisme de G-modules, induisant un morphisme

$$f \,:\, T_1 \longrightarrow T_2$$

de tores algébriques, ainsi qu'un morphisme

$$\overline{f} \,:\, \left(X(T_1)^G\right)^\vee \longrightarrow \left(X(T_2)^G\right)^\vee,$$

on a $\deg_{T_2} \circ f = \overline{f} \circ \deg_{T_1}$.

Le noyau de $\deg_T$ sera noté $T^1(\mathbf{A}_K)$. Par la formule du produit, $T(K)$ est contenu dans $T^1(\mathbf{A}_K)$. Par ailleurs il est clair que $T^1(\mathbf{A}_K)$ contient $\mathbf{K}(T)$. En outre, $T^1(\mathbf{A}_K)$ s'identifie au groupe

$$T^1(\mathbf{A}_K) = \mathrm{Hom}_G(X(T), \mathbf{G}_m^1(\mathbf{A}_L)).$$

Lemme 5.2.1
Soit K_0 une extension finie séparable de K contenue dans L, T le tore $\mathrm{Res}_{K_0/K}\mathbf{G}_m$ et $G_0 = \mathrm{Gal}(K/K_0)$. Soit d_0 tel que $q_{K_0} = q_K^{d_0}$, de sorte que $d_0 = \frac{d_{K_0}}{d_K}$. Alors, via les identifications naturelles $T(\mathbf{A}_K) = \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_0})$ et $(X(T)^G)^\vee = \mathbf{Z}$, le morphisme $\deg_T$ n'est autre que le morphisme $d_0 \deg_{K_0}$. En particulier $\deg_T$ n'est pas nécessairement surjectif.

Démonstration : Soit $t \in \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_0})$. Via l'identification

$$T(\mathbf{A}_K) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_0}),$$

il lui correspond l'élément de

$$T(\mathbf{A}_K) = \mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z}[G/G_0], \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L))$$

qui envoie G_0 sur t. Le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}[G/G_0]^G$ est de rang 1 engendré par $\sum_{g\in G/G_0} g\,G_0$. Le morphisme $\deg_T(t)$ envoie alors $\sum_{g\in G/G_0} g\,G_0$ sur

$$\begin{aligned}
\deg_K\left(\prod_{g\in G/G_0} g\,t\right) &= \frac{d_L}{d_K\,[L:K]} \sum_{g\in G/G_0} \deg_L(g\,t)\\
&= \frac{d_L\,\#G}{d_K\,[L:K]\,\#\,G_0} \deg_L(t)\\
&= \frac{d_L}{d_K\,[L:K_0]} \deg_L(t)\\
&= d_0\,\frac{d_L}{d_{K_0}\,[L:K_0]} \deg_L(t)\\
&= d_0\,\deg_{K_0}(t).
\end{aligned}$$

la première et la dernière égalité venant de la formule 5.2.2.1. □

Considérons maintenant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_m^1(\mathbf{A}_L) \longrightarrow \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L) \xrightarrow{\deg_L} \mathbf{Z} \longrightarrow 0,$$

tensorisons par $X(T)^\vee$ et prenons les G-invariants, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow T^1(\mathbf{A}_K) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow (X(T)^\vee)^G$$

et donc un morphisme $T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow (X(T)^\vee)^G$, de noyau $T^1(\mathbf{A}_K)$, noté $\deg_{T,L}$. Si on note encore $\deg_{T,L}$ le morphisme obtenu par composition avec l'injection naturelle $(X(T)^\vee)^G \hookrightarrow \left(X(T)^G\right)^\vee$, on a la relation

$$d_L \deg_{T,L} = d_K\,[L:K]\deg_T\,.$$

Contrairement à $\deg_T$, $\deg_{T,L}$ dépend du choix de l'extension déployant T.

Proposition 5.2.2
Le quotient $T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)$ est compact. Le quotient $T^1(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K)$ est fini.

Démonstration : La première assertion est en fait valable pour tout corps global K. Dans [On1, Theorem 2], ceci est montré dans le cas où K est le corps des rationnels, et dans [On2, Theorem 3.1.1.], il est affirmé que la preuve s'étend à un corps global quelconque. Par ailleurs, ce résultat est un cas particulier de [Oe, IV.1.3.]. Nous donnons pour notre part une preuve de ce résultat pour un corps de fonctions à la section 5.2.6.

La compacité de $T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)$ entraîne celle de $T^1(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K)$, et donc la finitude de ce dernier groupe car il est également discret. Cependant cette finitude peut se retrouver directement, en remarquant qu'on a

$$T^1(\mathbf{A}_L)^G = T^1(\mathbf{A}_K),$$

d'où une injection

$$T^1(\mathbf{A}_K)/\left(\mathbf{K}(T_L).T(L)\right)^G \hookrightarrow \left(T^1(\mathbf{A}_L)/\mathbf{K}(T_L).T(L)\right)^G.$$

Or $T^1(\mathbf{A}_L)/\mathbf{K}(T_L).T(L)$ n'est autre que $\left(\mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})\right)^{\dim(T)}$, où $\mathcal{C}$ est la courbe projective et lisse telle que $\mathbf{F}_{q_L}(\mathcal{C}) = L$. On en déduit que le groupe

$$T^1(\mathbf{A}_K)/\left(\mathbf{K}(T_L).T(L)\right)^G$$

est fini. Maintenant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{K}(T).T(K) \longrightarrow \left(\mathbf{K}(T_L).T(L)\right)^G \longrightarrow H^1\left(G, \mathbf{K}(T_L) \cap T(L)\right)$$

et la finitude de $\mathbf{K}(T_L) \cap T(L)$, donc de $H^1\left(G, \mathbf{K}(T_L) \cap T(L)\right)$, montre la finitude de $T^1(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K)$. □

Proposition 5.2.3
Le conoyau de $\deg_T$ *est fini.*

Démonstration : C'est un cas particulier de [Oe, I.5.6.b]. Nous redémontrons ce résultat à la section 5.2.6. □

Nous posons

$$T(C_K) = \mathrm{Hom}_G(X(T), C_L) = T(C_L)^G.$$

Le groupe $T(\mathbf{A}_K)/T(K)$ s'injecte dans $T(C_K)$ mais ne lui est en général pas égal, le défaut est mesuré par le groupe de Tate-Shafarevich de T (voir la section 5.2.5).

Un cas important d'égalité se produit quand T est la restriction à la Weil de K_0 à K de $\mathbf{G}_m$, pour K_0 extension séparable de K. Dans ce cas, $T(C_K)$ s'identifie à C_{K_0}. En effet, par le théorème de Hilbert 90,

$$C_{K_0} = C_L^{\mathrm{Gal}(L/K_0)}.$$

Bien entendu l'isomorphisme

$$T(C_K) \xrightarrow{\sim} T(\mathbf{A}_K)/T(K)$$

est encore valable si T est quasi-déployé.

Notons que le morphisme $\deg_T$ s'étend de manière naturelle en un morphisme

$$\deg_T' : T(C_K) \longrightarrow \left(X(T)^G\right)^\vee .$$

Par ailleurs, pour toute extension finie galoisienne L de K de groupe G, déployant T, le morphisme $\deg_{T,L}$ s'étend de manière naturelle en un morphisme

$$\deg_{T,L}' : T(C_K) \longrightarrow (X(T)^\vee)^G ,$$

et on a a encore la relation

$$d_L \deg_{T,L}' = d_K [L:K] \deg_T' . \tag{5.2.3.1}$$

5.2.4 La dualité de Nakayama

La dualité de Nakayama donne un moyen simple de calculer la cohomologie du G-module $T(C_L)$. Le résultat suivant est une conséquence de [Na, Theorem 3]. Rappelons que les groupes de cohomologie considérés sont les groupes de cohomologie à la Tate (cf. rappels à la fin de la section 5.1). La théorie du corps de classe donne l'existence d'un élément distingué α de $H^2(G, C_L)$, engendrant $H^2(G, C_L)$, et appelé classe fondamentale.

Théorème 5.2.4 (Nakayama)
Le cup-produit par α induit pour tout $n \in \mathbf{Z}$ un isomorphisme

$$H^n(G, X(T)^\vee) \xrightarrow{\sim} H^{n+2}(G, T(C_L)).$$

En particulier les groupes de cohomologie $H^n(G, T(C_L))$ sont finis pour tout n.

Rappelons que pour tout n le groupe fini $H^n(G, X(T)^\vee)$ s'identifie canoniquement au dual du groupe fini $H^{-n}(G, X(T))$.

5.2.5 Mesure adélique et nombre de Tamagawa d'un tore algébrique

Nous avons rappelé dans l'introduction de cette thèse (section 1.4.2) comment, sur toute variété algébrique X définie sur un corps de fonctions K, une métrisation du faisceau anticanonique permet, pour tout $v \in \mathcal{P}_K$, de construire une mesure $\omega_{X,v}$ sur l'espace analytique $X(K_v)$. Rappelons que tout choix d'une section globale ω partout non nulle du faisceau anticanonique en fournit une métrisation par la formule

$$\forall\, x \in X(K_v), \quad \forall\, s \in \omega_X^{-1}(x), \quad ||s||_v = \frac{|s(x)|_v}{|\omega(x)|_v},$$

le choix de la valeur absolue $|\,.\,|_v$ sur $\omega_X^{-1}(x)$ étant arbitraire. Si $X = G$ est un groupe algébrique et que ω est de plus choisie G-invariante à gauche, les mesures locales obtenues sont des mesures de Haar à gauche.

Ono, dans l'article [On2], définit le nombre de Tamagawa d'un tore algébrique défini sur un corps global (de caractéristique quelconque). Dans [On3], il établit une relation simple entre ce nombre de Tamagawa et certains invariants de type cohomologique du tore (cf. le théorème 5.2.5 ci-dessous), montrant en particulier la rationalité du nombre de Tamagawa (chose nullement évidente sur la définiton initiale). Cette relation joue un rôle important dans l'interprétation du terme principal des fonctions zêta des hauteurs des variétés toriques, tant en caractéristique zéro qu'en caractéristique non nulle. Cependant, dans le cas des corps de fonctions il s'est avéré que la définition du nombre de Tamagawa d'un tore algébrique donnée dans [On2] était incompatible avec la relation du théorème 5.2.5. Par la suite Oesterlé a montré dans [Oe] qu'en introduisant dans la définition d'Ono un facteur correctif égal au cardinal du conoyau du degré, la relation du théorème 5.2.5 devenait correcte. Nous rappelons dans cette section la construction du nombre de Tamagawa d'un tore algébrique, et le résultat principal de [On3].

Soit T un tore algébrique de dimension d, défini sur un corps de fonctions K. Soit Ω_T une d-forme différentielle K-rationnelle T-invariante sur T (une telle forme est uniquement déterminée à multiplication par un élément de K^* près). Cette forme induit donc pour tout $v \in \mathcal{P}_K$ une mesure de Haar $\omega_{T,v}$ sur $T(K_v)$.

On suppose T déployé par une extension galoisienne L de groupe de Galois G. L'action de G sur $X(T)$ fournit une représentation

$$\rho\,:\, G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X(T) \otimes \mathbf{C}).$$

Si v est non ramifiée dans L/K, soit Fr_v un frobenius local (sa classe de conjugaison dans G ne dépend que de v), on pose pour tout complexe s tel

que $\Re(s) > 0$
$$L_v(s,T) = \frac{1}{\det(1-\rho(\mathrm{Fr}_v)\,q_v^{-s})}$$
Si v est ramifiée on pose
$$L_v(s,T) = \frac{1}{\det(1-\rho_v(\mathrm{Fr}_v)\,q_v^{-s})}$$
où Fr_v est un frobenius local et, si on note G_v un groupe de décomposition et I_v le groupe d'inertie correspondant, ρ_v est la représentation
$$\rho_v\,:\,G_v/I_v \to \mathrm{Aut}(X(T)^{I_v}\otimes \mathbf{C})$$
déduite de ρ. Les fonctions $L_v(s,T)$ ne dépendent pas du choix de l'extension L déployant T. On a alors pour presque tout v la relation
$$\int_{T(\mathcal{O}_v)} \omega_{T,v} = \frac{1}{L_v(1,T)}$$
Posons, pour tout v,
$$d\mu_v = \frac{1}{L_v(1,T)}\,\omega_{T,v}.$$
On aura alors
$$\int_{T(\mathcal{O}_v)} d\mu_v = 1$$
pour presque tout v.

On peut alors définir une mesure de Haar ω_T sur $T(\mathbf{A}_K)$ en posant
$$\omega_T = q_K^{(1-g)\,d}\prod_{v\in\mathcal{P}_K} d\mu_v.$$
Par la formule du produit ω_T ne dépend pas du choix de la forme Ω_T. Comme $T^1(\mathbf{A}_K)$ est ouvert dans $T(\mathbf{A}_K)$, la restriction de ω_T à $T^1(\mathbf{A}_K)$ fournit une mesure de Haar sur $T^1(\mathbf{A}_K)$. Soit ω_T^1 la mesure quotient sur $T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)$, $T(K)$ étant muni de la mesure discrète. Soit r le rang de $X(T)^G$. On pose
$$b(T) = \log(q_K)^{-r}\int_{T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)} \omega_T^1.$$
(rappelons que $T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)$ est compact). On définit aussi, si S est un ensemble fini de places de K,
$$\omega_{T,S} = q_K^{(1-g)\,d}\prod_{v\in S}\omega_{T,v}\prod_{v\notin S} d\mu_v$$

et
$$b_S(T) = \log(q_K)^{-r} \int_{T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)} \omega^1_{T,S}.$$
Notons qu'en particulier
$$\int_{\mathbf{K}(T)} \omega_{T,S} = q_K^{(1-g)\,d} \prod_{v\in S} \int_{T(\mathcal{O}_v)} \omega_{T,v} \prod_{v\notin S} \int_{T(\mathcal{O}_v)} d\mu_v$$
est non nul.

Soit à présent
$$L(s,T) = \prod_{v\in\mathcal{P}_K} L_v(s,T).$$
Ce produit eulérien converge absolument pour $\Re(s) > 0$ et se prolonge en une fonction méromorphe avec un pôle d'ordre r en $s=1$. On pose
$$l(T) = \lim_{s\to 1}(s-1)^r\, L(s,T).$$
Si S est un ensemble fini de places de K, on pose également
$$L_S(s,T) = \prod_{v\notin S} L_v(s,T)$$
et
$$l_S(T) = \lim_{s\to 1}(s-1)^r\, L_S(s,T).$$
On définit, suivant [Oe, I.5.9 et 5.12.],
$$\tau(T) = \frac{1}{\#\,\mathrm{Coker}(\deg_T)}\,\frac{b(T)}{l(T)}.$$
Ce nombre est appelé *nombre de Tamagawa* du tore algébrique T. Il est également égal à
$$\frac{1}{\#\,\mathrm{Coker}(\deg_T)}\,\frac{b_S(T)}{l_S(T)}$$
pour tout ensemble fini S de places de K.

Soit
$$h(T) = \#H^1(G, X(T)),$$
$$Ш(T) = \mathrm{Ker}\left(H^1(G,T(L)) \to H^1(G,T(\mathbf{A}_L))\right)$$
et
$$i(T) = \#Ш(T).$$

Ces définitions ne dépendent pas du choix de l'extension déployant T. Notons que la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte de G-modules

$$0 \longrightarrow X(T)^\vee \otimes \mathbf{G}_m(L) \longrightarrow X(T)^\vee \otimes \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L) \longrightarrow X(T)^\vee \otimes C_L \longrightarrow 0$$

fournit la suite exacte

$$0 \longrightarrow T(K) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow T(C_K) \longrightarrow H^1(G, T(L)) \longrightarrow H^1(G, T(\mathbf{A}_L))$$

et donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)/T(K) \longrightarrow T(C_K) \longrightarrow Ш(T) \longrightarrow 0.$$

L'objet de l'article [On3], corrigé par Oesterlé dans le cas des corps de fonctions, est la démonstration du

Théorème 5.2.5 (Ono, Oesterlé)
On a la relation

$$\tau(T) = \frac{h(T)}{i(T)}.$$

Ce résultat, comme déjà indiqué, nous sera utile lors de l'interprétation du terme principal de la fonction zêta des hauteurs.

5.2.6 Résolution flasque d'un tore algébrique et applications

La notion de résolution flasque d'un tore algébrique a été introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTSa] en vue de l'étude de la R-équivalence sur les tores.

Soit T un tore algébrique défini sur K, déployé par une extension L de groupe de Galois G. Rappelons qu'un G-module M libre de rang fini est dit *flasque* si pour tout sous-groupe H de G on a $H^{-1}(H, M) = 0$. Par [CTSa, lemme 3, page 181] il existe une suite exacte de G-modules de rang fini

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \qquad (5.2.6.1)$$

où P est de permutation et Q est flasque. Soit T_P le tore algébrique associé au G-module P. C'est un tore quasi-déployé. Soit T_Q le tore algébrique associé au G-module Q.

Nous avons d'abord des résultats n'utilisant pas le caractère flasque de Q. Rappelons que les lemmes 5.2.6 et 5.2.7 sont des cas particuliers de résultats d'Oesterlé.

Lemme 5.2.6
Le morphisme

$$\deg_{T,L} : T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow (X(T)^\vee)^G$$

est de conoyau fini, et il en est de même du morphisme

$$\deg_T : T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow \left(X(T)^G\right)^\vee.$$

Démonstration : Le conoyau de la flèche $(P^\vee)^G \to (X(T)^\vee)^G$ est le groupe $H^1(G, Q^\vee)$ qui est fini (en fait nul car Q est flasque, mais la finitude suffit). Comme T_P est quasi-déployé, le morphisme $\deg_{T_P,L}$ est de conoyau fini. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T_P(\mathbf{A}_K) \arrow[r] \arrow[d, "\deg_{T_P,L}"] & T(\mathbf{A}_K) \arrow[d, "\deg_{T,L}"] \\ (P^\vee)^G \arrow[r] & (X(T)^\vee)^G \end{tikzcd}$$

permet de conclure pour $\deg_{T,L}$. Or on a la formule

$$d_L \deg_{T,L} = d_K [L : K] \deg_T,$$

et $(X(T)^\vee)^G$ est un sous-module d'indice fini de $\left(X(T)^G\right)^\vee$. On en déduit le résultat pour $\deg_T$. □

Lemme 5.2.7
Le groupe $T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)$ est compact.

Démonstration : Nous notons $C_L^1 = \mathbf{G}_m^1(\mathbf{A}_L)/L^*$. C'est un groupe compact par [We1, IV§4, Theorem 6]. Soit

$$T^1(C_K) = \mathrm{Hom}_G(X(T), C_L^1).$$

Si T est quasi-déployé, on a

$$T^1(C_K) \xrightarrow{\sim} T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)$$

car, par le théorème de Hilbert 90, si L/K_0 est galoisienne, on a

$$\left(C_L^1\right)^{\mathrm{Gal}(K/K_0)} = C_{K_0}^1.$$

Ainsi $T^1(C_K)$ est encore un groupe compact. En général, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} T_P^1(\mathbf{A}_K)/T_P(K) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & T^1(\mathbf{A}_K)/T(K) \arrow[d, hook] \\ T_P^1(C_K) \arrow[r] & T^1(C_K) \end{tikzcd}$$

d'après lequel il suffit de montrer que la flèche $T^1_P(C_K) \to T^1(C_K)$ est de conoyau fini.

La suite exacte

$$0 \longrightarrow Q^\vee \longrightarrow P^\vee \longrightarrow X(T)^\vee \longrightarrow 0$$

fournit la suite exacte

$$T^1_P\left(C_K\right) \longrightarrow T^1\left(C_K\right) \longrightarrow H^1\left(G, T^1_Q(C_L)\right).$$

et il suffit donc montrer la finitude de $H^1\left(G, T^1_Q(C_L)\right)$.

Pour cela, on utilise la suite exacte

$$0 \longrightarrow Q^\vee \otimes C^1_L \longrightarrow Q^\vee \otimes C_L \stackrel{\mathrm{Id}\otimes\deg_L}{\longrightarrow} Q^\vee \longrightarrow 0.$$

La suite exacte de cohomologie sous G associée fournit la suite exacte

$$T_Q(C_K) \longrightarrow \left(Q^\vee\right)^G \longrightarrow H^1\left(G, T_Q(C^1_L)\right) \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L)).$$

Par dualité de Nakayama, $H^1\left(G, T_Q(C_L)\right)$ est fini et la flèche

$$T_Q(C_K) \longrightarrow \left(Q^\vee\right)^G$$

n'est autre que la factorisation de $\deg_{T_Q,L}$ par $T_Q(C_K)$, son conoyau est donc fini, d'où le résultat. □

Nous exploitons à présent le caractère flasque de Q. Soit v une place de K, $\mathcal{V}$ une place de L au-dessus de v, G_v son groupe de décomposition. Le résultat suivant est dû à Draxl ([Dr, page 449]).

Proposition 5.2.8 (Draxl)
Pour toute place v de K on a une injection de groupes

$$T(K_v)/T(\mathcal{O}_v) \hookrightarrow \left(X(T)^\vee\right)^{G_v}$$

de conoyau fini, et c'est un isomorphisme si v est non ramifiée dans L/K.

Corollaire 5.2.9
Si v est non ramifiée dans L/K, le morphisme

$$T_P(K_v)/T_P(\mathcal{O}_v) \longrightarrow T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$$

est surjectif.

Démonstration : En effet par l'isomorphisme donné par le lemme ci-dessus ce morphisme est la flèche

$$(P^{\vee})^{G_v} \longrightarrow (X(T)^{\vee})^{G_v}$$

induite en prenant les G_v-invariants dans le dual de la suite exacte 5.2.6.1. Son conoyau est donc le groupe $H^1(G_v, Q^{\vee})$. Ce dernier groupe est isomorphe à $H^{-1}(G_v, Q)$ qui est nul car Q est flasque. $\square$

Lemme 5.2.10 (Ono)
Si v est non ramifiée dans L/K le morphisme

$$T_P(\mathcal{O}_v) \longrightarrow T(\mathcal{O}_v)$$

est surjectif.

Démonstration : C'est un fait général pour tout morphisme surjectif de tores algébriques $T' \to T$. La preuve figure dans [On1, Lemma 4.2.1], nous la rappelons. On a

$$T(\mathcal{O}_v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_v}(X(T), \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^*),$$
$$T_P(\mathcal{O}_v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_v}(P, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^*)$$

et une suite exacte

$$T_P(\mathcal{O}_v) \longrightarrow T(\mathcal{O}_v) \longrightarrow H^1(G_v, Q^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^*).$$

Or, si v est non ramifiée, $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}^*$ est cohomologiquement trivial, donc, d'après [Se1, IX, § 5, Corollaire], $Q^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^*$ l'est aussi, d'où le résultat. $\square$

On déduit des deux résultats précédents :

Corollaire 5.2.11
Si v est non ramifiée dans L/K, le morphisme

$$T_P(K_v) \longrightarrow T(K_v)$$

est surjectif.

Pour tout ensemble fini S de places de K, nous notons

$$T(\mathbf{A}_K)_S = T(\mathbf{A}_K) \bigcap \prod_{v \notin S} T(K_v).$$

D'après ce qui précède, si S contient les places ramifiées, le morphisme

$$T_P(\mathbf{A}_K)_S \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)_S$$

est surjectif.

Soit $\overline{T(K)}$ l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v \in \mathcal{P}_K} T(K_v)$ muni de la topologie produit et soit

$$A(T) = \left(\prod_{v \in \mathcal{P}_K} T(K_v) \right) / \overline{T(K)}$$

le groupe d'obstruction à l'approximation faible. Comme T_P est quasi-déployé on a, par [Ha, p. 334], $A(T_P) = 0$.

Soit S un ensemble fini de places de K contenant les places ramifiées dans L/K. Le morphisme

$$T_P(\mathbf{A}_K)_S \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)_S$$

est continu pour la topologie produit, et surjectif. On en déduit que $\overline{T(K)}$ contient $T(\mathbf{A}_K)_S$. Si on désigne par $\overline{T(K)}^S$ l'adhérence de l'image de $T(K)$ dans $\prod_{v \in S} T(K_v)$, on a donc le résultat suivant.

Lemme 5.2.12
On a un scindage

$$\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K) = T(\mathbf{A}_K)_S \times \overline{T(K)}^S$$

et les égalités

$$A(T) = T(\mathbf{A}_K) / \left(\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K) \right) = \left(\prod_{v \in S} T(K_v) \right) / \overline{T(K)}^S.$$

On a en fait le résultat suivant

Lemme 5.2.13
Le conoyau du morphisme

$$T_P(\mathbf{A}_K)/T_P(K) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)/T(K)$$

est exactement $A(T)$.

Dans le cas des corps de nombres, ce résultat est indiqué dans [BaTs1, Theorem 3.1.1].

Démonstration : Notons γ le morphisme $T_P(\mathbf{A}_K) \to T(\mathbf{A}_K)$ (cette notation sera reprise à la section 5.4.2) et $\overline{\gamma}$ le morphisme $T_P(\mathbf{A}_K)/T_P(K) \to T(\mathbf{A}_K)/T(K)$. En tensorisant le dual de la suite exacte 5.2.6.1 avec C_L et en prenant les G-invariants, on obtient une suite exacte

$$T_P(C_K) \longrightarrow T(C_K) \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L)) \longrightarrow H^1(G, P^\vee \otimes C_L).$$

Par dualité de Nakayama

$$H^1(G, P^\vee \otimes C_L) \xrightarrow{\sim} H^1(G,P)^* = 0$$

car P est de permutation. On peut compléter la suite exacte obtenue en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T_P(C_K) \arrow[r] & T(C_K) \arrow[r] & H^1(G, T_Q(C_L)) \arrow[r] & 0 \\
T_P(\mathbf{A}_K)/T_P(K) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\overline{\gamma}"] & T(\mathbf{A}_K)/T(K) \arrow[u, hook] \arrow[r, "p"] & A(T) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Rappelons que la flèche verticale de gauche est un isomorphisme car T_P est quasi-déployé. Il faut montrer que la suite du bas est exacte. Evidemment p est surjectif. Comme $A(T_P) = 0$ et que γ est continu pour la topologie produit, on a les inclusions

$$\gamma\left(T_P(\mathbf{A}_K)\right) = \gamma\left(\overline{T_P(K)} \cap T_P(\mathbf{A}_K)\right) \subset \overline{\gamma(T_P(K))} \cap T(\mathbf{A}_K) \subset \overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)$$

donc $p \circ \overline{\gamma} = 0$. Par un argument de Colliot-Thélène et Sansuc ([CTSa, page 219]), il existe un morphisme

$$A(T) \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L))$$

tel que le diagramme obtenu en rajoutant cette flèche est encore commutatif (le lemme s'en déduit par une rapide chasse au diagramme). En effet on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & T(C_K) \arrow[r] & H^1(G, T_Q(C_L)) \\
T_P(\mathbf{A}_K) \arrow[r] & T(\mathbf{A}_K) \arrow[u] \arrow[r] & H^1(G, T_Q(\mathbf{A}_L)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où la ligne du bas est exacte. Comme $A(T_P) = 0$, l'image de $T_P(\mathbf{A}_K)$ est contenue dans $\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)$ (cf. ci-dessus) et le morphisme

$$T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L))$$

factorise à travers $A(T)$, d'où le morphisme recherché. □

L'argument ci-dessus permet en fait aux auteurs de [CTSa] de montrer que $A(T)$ s'identifie au conoyau du morphisme

$$H^1(G, T_Q(L)) \longrightarrow H^1(G, T_Q(\mathbf{A}_L))$$

et d'en déduire l'existence d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow A(T) \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L)) \longrightarrow Ш(T) \longrightarrow 0.$$

Par dualité de Nakayama

$$H^1(G, T_Q(C_L)) \xrightarrow{\sim} H^1(G, Q)^*$$

d'où

Lemme 5.2.14 (Colliot-Thélène, Sansuc)
On a l'égalité

$$\#A(T) = \frac{\#H^1(G, Q)}{\#Ш(T)}.$$

Ceci nous servira pour le calcul du terme principal de la fonction zêta des hauteurs dans la section 5.6.

5.2.7 Sur le calcul du cardinal du conoyau de $\deg_T$.

Soit T un tore algébrique défini sur un corps de fonctions K, de corps des constantes k. Soit $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de K^{sep}/K, il contient un sous-groupe distingué $\mathcal{H}$ tel que le quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ s'identifie à $\mathfrak{G}$ le groupe de Galois absolu de k. La représentation continue de $\mathcal{G}$ dans $\mathrm{Aut}(X(T))$ induit une représentation continue

$$\varrho\, :\, \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(X(T)^{\mathcal{H}}\right).$$

Soit $\mathfrak{g}_T = \mathfrak{G}/\operatorname{Ker}(\varrho)$ et $d_T = \#\,\mathfrak{g}_T$. Ainsi le corps fini à $q_K^{d_T}$ éléments est le corps des constantes minimal d'une extension galoisienne L/K déployant T.

Soit L/K une extension finie galoisienne de groupe G, déployant T. Soit H l'image de $\mathcal{H}$ dans G. On peut toujours choisir L de telle sorte que $G/H = \mathfrak{g}_T$, ce que nous ferons pour la suite de cette section. Considérons alors une résolution flasque $\mathcal{R}$ de $X(T)$

$$\mathcal{R}\, :\, 0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Prenons les invariants sous H, on obtient une suite exacte de $\mathfrak{g}_T$-modules

$$0 \longrightarrow X(T)^H \longrightarrow P^H \longrightarrow Q^H \xrightarrow{\delta_{\mathcal{R}}} H^1(H, X(T)) \longrightarrow 0.$$

Soit P_1 un G-module de permutation, on obtient une résolution flasque $\mathcal{R}_1$

$$\mathcal{R}_1\, :\, 0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P \oplus P_1 \longrightarrow Q \oplus P_1 \longrightarrow 0$$

et on a

$$\mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}_1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}}) \oplus P_1^H.$$

Si

$$\mathcal{R}_2 \,:\, 0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P_2 \longrightarrow Q_2 \longrightarrow 0$$

est une résolution flasque de $X(T)$ avec $Q_2 \xrightarrow{\sim} Q$, alors $P_2 \xrightarrow{\sim} P$ et

$$\mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}_2}).$$

Si

$$\mathcal{R}^{'} \,:\, 0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P^{'} \longrightarrow Q^{'} \longrightarrow 0.$$

est une résolution flasque de $X(T)$, par [CTSa, lemme 5], les G-modules Q et $Q^{'}$ sont isomorphes après addition de G-modules de permutation convenables. En particulier, d'après ce qui précède

$$H^1(\mathfrak{g}_T, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}})) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathfrak{g}_T, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}'})).$$

Nous nous proposons à présent de donner des indices en faveur d'une réponse positive à la question suivante.

Question 5.2.15
L'égalité

$$[\mathrm{Coker}(\mathrm{deg}_T)] = \frac{d_T^{\mathrm{rg}\left(X(T)^G\right)}\ [H^1(\mathfrak{g}_T, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}}))]}{\left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)\right]} \tag{5.2.7.1}$$

est-elle vérifiée pour tout tore algébrique T ?

Remarquons que le membre de droite dans la formule ci-dessus est bien un entier, car $\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)$ est un groupe abélien fini tué par $\#\mathfrak{g}_T = d_T$ et engendré par les images des éléments d'une base de $X(T)^G$, donc par $\mathrm{rg}\left(X(T)^G\right)$ éléments. Son cardinal divise donc $d_T^{\mathrm{rg}\left(X(T)^G\right)}$.

On notera $\varsigma(T)$ l'invariant

$$\frac{d_T^{\mathrm{rg}\left(X(T)^G\right)}\ [H^1(\mathfrak{g}_T, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}}))]}{[\mathrm{Coker}(\mathrm{deg}_T)]\ \left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)\right]}$$

de sorte que la question 5.2.15 se reformule en : est-il vrai que $\varsigma(T) = 1$ pour tout tore algébrique T ?

Proposition 5.2.16
L'invariant ς est multiplicatif dans le sens où si T et T' sont des tores algébriques on a

$$\varsigma(T \times T') = \varsigma(T)\,\varsigma(T').$$

On a $\varsigma(T) = 1$ dans les cas suivants : T anisotrope, T quasi-déployé, $\mathfrak{g}_T = 1$, $\mathfrak{g}_T = G$ et, comme généralisation de ce dernier cas, T déployé par une extension métacyclique.

Au vu de cette proposition, nous pouvons faire la remarque suivante : soit

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow T \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de tores algébriques. Si on pouvait montrer que dans une telle situation on a encore la multiplicativité de ς, i.e. la relation

$$\varsigma(T) = \varsigma(T')\,\varsigma(T''),$$

alors le fait que $\varsigma(T) = 1$ pour T quasi-déployé permettrait, par le raisonnement utilisé par Ono dans [On3, p. 68], d'en déduire que $\varsigma(T) = 1$ pour tout tore algébrique.

Démonstration : Montrons d'abord la multiplicativité pour les produits de tores. Soit T un tore algébrique. Notons, pour tout quotient fini $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{G}$ tel que $\mathfrak{g}_T$ est un quotient de $\mathfrak{g}$, $N_{\mathfrak{g}}$ la norme sur $X(T)^{\mathcal{H}}$

$$N_{\mathfrak{g}} \,:\, m \to \sum_{g \in \mathfrak{g}} g.m$$

de sorte que

$$\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}, X(T)^{\mathcal{H}}\right) = \left(X(T)^{\mathcal{H}}\right)^{\mathfrak{g}} / N_{\mathfrak{g}} X(T)^{\mathcal{H}} = X(T)^{\mathcal{G}} / N_{\mathfrak{g}} X(T)^{\mathcal{H}}$$

Soit $d = \#\,\mathfrak{g}$, on a alors pour $m \in X(T)^{\mathcal{H}}$

$$N_{\mathfrak{g}}(m) = \frac{d}{d_T}\; N_{\mathfrak{g}_T}(m)$$

donc $N_{\mathfrak{g}} X(T)^{\mathcal{H}}$ est un sous-module de $N_{\mathfrak{g}_T} X(T)^{\mathcal{H}}$ d'indice $\left(\frac{d}{d_T}\right)^{\mathrm{rg}\left(X(T)^{\mathcal{G}}\right)}$, soit

$$\left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}, X(T)^{\mathcal{H}}\right)\right] = \left(\frac{d}{d_T}\right)^{\mathrm{rg}\left(X(T)^{\mathcal{G}}\right)} \left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^{\mathcal{H}}\right)\right].$$

Par ailleurs, si M est un $\mathfrak{g}_T$-module on a

$$H^1(\mathfrak{g}_T, M) = H^1(\mathfrak{g}, M).$$

d'après la suite exacte d'inflation-restriction.

Soit à présent $T^{'}$ un autre tore algébrique, et choisissons pour $\mathfrak{g}$ le groupe de Galois d'une extension commune à k_T et $k_{T'}$. On a

$$X(T \times T^{'}) = X(T) \oplus X(T^{'}).$$

et il est clair que

$$\mathrm{Coker}(\deg_{T \times T'}) = \mathrm{Coker}(\deg_T)\,\mathrm{Coker}(\deg_{T'}).$$

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{'}$ sont des résolutions flasques de $X(T)$ et $X(T^{'})$ respectivement, $\mathcal{R}^{''} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}^{'}$ est une résolution flasque de $X(T \times T^{'})$, et on a

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}''})) &= H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}}) \oplus \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}'})) \\ &= H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}})) \oplus H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}'})) \end{aligned}$$

d'où

$$\left[H^1(\mathfrak{g}_{T \times T'}, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}''}))\right] = \left[H^1(\mathfrak{g}_T, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}}))\right] \left[H^1(\mathfrak{g}_{T'}, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}'}))\right].$$

Par ailleurs

$$\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}, \left(X(T) \oplus X(T^{'})\right)^{\mathcal{H}}\right) = \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}, X(T)^{\mathcal{H}}\right) \oplus \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}, X(T^{'})^{\mathcal{H}}\right)$$

et

$$\left(X(T) \oplus X(T^{'})\right)^{\mathcal{G}} = X(T)^{\mathcal{G}} \oplus X(T^{'})^{\mathcal{G}}$$

d'où

$$\left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}, \left(X(T) \oplus X(T^{'})\right)^{\mathcal{H}}\right)\right] = \left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}, X(T)^{\mathcal{H}}\right)\right] \left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}, X(T^{'})^{\mathcal{H}}\right)\right].$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d_{T \times T'}}\right)^{\mathrm{rg}\left(X(T)^{\mathcal{G}} \oplus X(T^{'})^{\mathcal{G}}\right)} & \left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_{T \times T'}, X(T \times T^{'})^{\mathcal{H}}\right)\right] \\ &= \left(\frac{d}{d_T}\right)^{\mathrm{rg}\left(X(T)^{\mathcal{G}}\right)} \left(\frac{d}{d_{T'}}\right)^{\mathrm{rg}\left(X(T^{'})^{\mathcal{G}}\right)} \\ &\qquad \times \left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^{\mathcal{H}}\right)\right] \left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_{T'}, X(T^{'})^{\mathcal{H}}\right)\right] \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Montrons à présent que $\varsigma(T) = 1$ si T est anisotrope, i.e. si $X(T)^G = \{0\}$. Dans ce cas tous les termes de l'égalité (5.2.7.1) sont égaux à 1, sauf peut-être $[H^1(\mathfrak{g}_T, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathfrak{R}}))]$. Nous allons voir que ce dernier terme vaut également 1. Rappelons ([Se1, p. 141]) que, comme $\mathfrak{g}_T$ est cyclique, si β est un générateur de $H^2(G, \mathbf{Z})$ le cup-produit par β défini pour tout G-module M et tout $n \in \mathbf{Z}$ un isomorphisme

$$H^n(G, M) \xrightarrow{\sim} H^{n+2}(G, M).$$

La suite exacte de $\mathfrak{g}_T$-modules

$$0 \longrightarrow X(T)^H \longrightarrow P^H \longrightarrow \mathrm{Ker}(\delta_{\mathfrak{R}})) \longrightarrow 0$$

fournit la suite exacte

$$H^{-1}(\mathfrak{g}_T, P^H) \longrightarrow H^{-1}(\mathfrak{g}_T, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathfrak{R}})) \longrightarrow \widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H).$$

Comme $X(T)^G = \{0\}$, on a $\widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H) = 0$. Comme P^H est de permutation, $(P^H)^\vee$ l'est aussi et on a

$$H^{-1}(\mathfrak{g}_T, P^H) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathfrak{g}_T, (P^H)^\vee) = 0.$$

Ainsi $H^{-1}(\mathfrak{g}_T, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathfrak{R}}))$ est nul, et comme $\mathfrak{g}_T$ est cyclique $H^1(\mathfrak{g}_T, \mathrm{Ker}(\delta_{\mathfrak{R}}))$ l'est également. On a donc bien $\varsigma(T) = 1$ si T est anisotrope.

Traitons à présent les cas restants. Pour tout G-module M on note N_G la norme qui à $m \in M$ associe l'élément de M^G

$$N_G(m) = \sum_{g \in G} g\, m.$$

Soit

$$\phi \in T(\mathbf{A}_L) = \mathrm{Hom}(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)).$$

Le morphisme $\deg_T(N_G\phi)$ envoie $m \in X(T)^G$ sur

$$\begin{aligned}
\deg_K\left(\prod_{g \in G} (g\,\phi)(m)\right) &= \deg_K\left(\prod_{g \in G} g.\left(\phi(g^{-1}\,m)\right)\right) \\
&= \deg_K\left(\prod_{g \in G} g.\left(\phi(m)\right)\right) \\
&= \frac{d_T}{[L:K]} \deg_L\left(\prod_{g \in G} g.\left(\phi(m)\right)\right) \\
&= d_T \deg_L(\phi(m)).
\end{aligned}$$

La troisième égalité provient de la formule 5.2.2.1. Ainsi l'image de $N_G T(\mathbf{A}_L)$ par $\deg_T$ est incluse dans $d_T\ \left(X(T)^{\,G}\right)^\vee$.

Soit à présent ψ un élément de $d_T\ \left(X(T)^{\,G}\right)^\vee$. Comme il existe des idèles de degré 1, on peut aisément construire un morphisme

$$\phi \in \mathrm{Hom}(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L))$$

tel que pour $m \in X(T)^G$ on ait

$$\deg_L(\phi(m)) = \frac{\psi(m)}{d_T},$$

et donc pour un tel ϕ, $\deg_T(N_G\,\phi) = \psi$. Ainsi la flèche

$$\deg_T\ :\ N_G T(\mathbf{A}_L) \longrightarrow d_T\ \left(X(T)^{\,G}\right)^\vee$$

est surjective. Déjà ceci montre que si $H = G$, soit $\mathfrak{g}_T$ trivial (i.e. s'il n'y a pas d'extension du corps des constantes dans L) le morphisme $\deg_T$ est surjectif (résultat qu'on retrouvera d'ailleurs à la section 5.4.2). Les autres termes intervenant dans la définition de ς sont eux aussi trivialement égaux à 1, et on a donc bien $\varsigma(T) = 1$ si $\mathfrak{g}_T$ est trivial.

En toute généralité on a un morphisme

$$\widetilde{\deg_T}\ :\ T(\mathbf{A}_K)/N_G T(\mathbf{A}_L) \longrightarrow \left(X(T)^{\,G}\right)^\vee / d_T\ \left(X(T)^{\,G}\right)^\vee$$

tel que

$$[\mathrm{Coker}(\deg_T)] = \left[\mathrm{Coker}(\widetilde{\deg_T})\right] = \frac{d_T^{\mathrm{rg}\left(X(T)^G\right)}\ \left[\mathrm{Ker}\left(\widetilde{\deg_T}\right)\right]}{\left[\widehat{H}^0(G, T(\mathbf{A}_L))\right]}.$$

Par un procédé similaire, il est facile de voir qu'on a un morphisme

$$\widetilde{\deg'_T}\ :\ T(C_K)/N_G T(C_L) \longrightarrow \left(X(T)^{\,G}\right)^\vee / d_T\ \left(X(T)^{\,G}\right)^\vee$$

et que

$$\left[\mathrm{Coker}(\deg'_T)\right] = \frac{d_T^{\mathrm{rg}\left(X(T)^G\right)}\ \left[\mathrm{Ker}\left(\widetilde{\deg'_T}\right)\right]}{\left[\widehat{H}^0(G, T(C_L))\right]}.$$

Par ailleurs le morphisme $\deg'_{T,L}$ et la relation (5.2.3.1) font qu'on a un morphisme

$$\widetilde{\deg'_{T,L}}\ :\ T(C_K)/N_G T(C_L) \longrightarrow \left(X(T)^{\,G}\right)^\vee / \#\, G\ \left(X(T)^{\,G}\right)^\vee$$

Cas où $G = \mathfrak{g}_T$. Rappelons encore une fois que, comme G est cyclique, si β est un générateur de $H^2(G, \mathbf{Z})$ le cup-produit par β défini pour tout G-module M et tout $n \in \mathbf{Z}$ un isomorphisme

$$H^n(G, M) \xrightarrow{\sim} H^{n+2}(G, M).$$

La résolution flasque ci-dessus induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T_P(\mathbf{A}_K)/T_P(K) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & T(\mathbf{A}_K)/T(K) \arrow[d, hook] & & \\
T_P(C_K) \arrow[r] & T(C_K) \arrow[r] & H^1(G, T_Q(C_L)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Par dualité de Nakayama, $H^1(G, T_Q(C_L))$ est isomorphe à $H^{-1}(G, Q^\vee)$. Mais G est cyclique, et donc $H^{-1}(G, Q^\vee)$ est isomorphe à $H^1(G, Q^\vee)$, qui est nul car Q est flasque. Ainsi $T_P(C_K) \to T(C_K)$ est surjectif, comme

$$T_P(C_K) \xrightarrow{\sim} T_P(\mathbf{A}_K)/T_P(K),$$

le morphisme

$$T(\mathbf{A}_K)/T(K) \longrightarrow T(C_K)$$

est un isomorphisme (en d'autres termes $Ш(T) = 0$). On a donc dans ce cas

$$[\mathrm{Coker}(\deg_T)] = \left[\mathrm{Coker}(\deg_T')\right].$$

Considérons la suite exacte de G-modules

$$0 \longrightarrow C_L^1 \longrightarrow C_L \xrightarrow{\deg_L} \mathbf{Z} \longrightarrow 0,$$

qui donne naissance aux suites exactes

$$C_K \xrightarrow{\deg_L|_{C_K}} \mathbf{Z} \longrightarrow H^1(G, C_L^1) \longrightarrow H^1(G, C_L)$$

et

$$H^2(G, C_L) \xrightarrow{\deg_L} H^2(G, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^3(G, C_L^1).$$

On a $H^1(G, C_L) = 0$ par la théorie du corps de classe. Par ailleurs comme $G = \mathfrak{g}_T$, on a $d_L = d_K\,[L : K]$ d'où $\deg_L|_{C_K} = \deg_K$. Comme

$$\deg_K : C_K \longrightarrow \mathbf{Z}$$

est surjectif, on obtient $H^1(G, C_L^1) = 0$ et comme G est cyclique, $H^3(G, C_L^1) = 0$. Ainsi le morphisme

$$H^2(G, C_L) \xrightarrow{\deg_L} H^2(G, \mathbf{Z})$$

est surjectif. Comme la classe fondamentale $\alpha_{L/K}$ de $H^2(G, C_L)$ engendre $H^2(G, C_L)$, son image $\beta_{L/K}$ par $\deg_L$ doit donc engendrer $H^2(G, \mathbf{Z})$.

Considérons la suite exacte de G-modules

$$0 \longrightarrow \left(X(T)/X(T)^G\right)^\vee \longrightarrow X(T)^\vee \xrightarrow{\psi} \left(X(T)^G\right)^\vee \longrightarrow 0. \qquad (5.2.7.2)$$

On a un morphisme

$$X(T)^\vee \otimes C_L \xrightarrow{\psi \otimes \deg_L} \left(X(T)^G\right)^\vee.$$

En prenant les G-invariants, on obtient le morphisme $\deg'_{T,L}$, qui est ici égal à $\deg'_T$ par la formule (5.2.3.1).

Si on note encore ψ le morphisme

$$H^{-2}\left(G, X(T)^\vee\right) \longrightarrow H^{-2}\left(G, \left(X(T)^G\right)^\vee\right)$$

induit par ψ, on a pour tout $x \in H^{-2}\left(G, X(T)^\vee\right)$ et par fonctorialité du cup-produit

$$\widetilde{\deg'_T}\left(x \cup \alpha_{L/K}\right) = \psi(x) \cup \deg_L\left(\alpha_{L/K}\right) = \psi(x) \cup \beta_{L/K}.$$

En d'autres termes on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widehat{H}^0(G, T(C_L)) \arrow[r, "\widetilde{\deg'_T}"] & \widehat{H}^0\left(G, \left(X(T)^G\right)^\vee\right) \\
H^{-2}\left(G, X(T)^\vee\right) \arrow[u, ". \cup \alpha_{L/K}", "\wr"'] \arrow[r, "\psi"] & H^{-2}\left(G, \left(X(T)^G\right)^\vee\right) \arrow[u, ". \cup \beta_{L/K}", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Comme $\left(\left(X(T)/X(T)^G\right)^\vee\right)^G = \{0\}$, on déduit de la suite exacte (5.2.7.2) que le morphisme

$$\widehat{H}^0\left(G, X(T)^\vee\right) \xrightarrow{\psi} \widehat{H}^0\left(G, \left(X(T)^G\right)^\vee\right)$$

est injectif. Comme G est cyclique, le morphisme

$$H^{-2}\left(G, X(T)^\vee\right) \xrightarrow{\psi} H^{-2}\left(G, \left(X(T)^G\right)^\vee\right)$$

est également injectif. On a donc

$$\left[\mathrm{Ker}\left(\widetilde{\deg'_T}\right)\right] = 0,$$

d'où

$$[\mathrm{Coker}(\deg_T)] = \frac{d_T^{\mathrm{rg}\left(X(T)^G\right)}}{\left[\widehat{H}^0(G, X(T))\right]}.$$

En particulier l'égalité $\varsigma(T) = 1$ est vérifiée dans ce cas. En effet ici H est trivial, d'où

$$\widehat{H}^0(G, X(T)) = \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)$$

et $\mathrm{Ker}\,(\delta_{\mathfrak{R}}) = Q$ d'où

$$H^1\left(\mathfrak{g}_T, \mathrm{Ker}\,(\delta_{\mathfrak{R}})\right) = H^1(G, Q) = H^{-1}(G, Q) = 0,$$

la deuxième égalité venant du fait que G est cyclique.

Cas général. Nous revenons pour l'instant au cas d'un tore algébrique quelconque. Nous généralisons les calculs faits dans le cas $G = \mathfrak{g}_T$, et en déduisons l'égalité $\varsigma(T) = 1$ dans les cas T quasi-déployé et T déployé par une extension métacyclique.

Notons $K_0 = L^H$. Les suites exactes

$$0 \longrightarrow C_L^1 \longrightarrow C_L \stackrel{\deg_L}{\longrightarrow} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow C_{K_0}^1 \longrightarrow C_{K_0} \stackrel{\deg_{K_0}}{\longrightarrow} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

induisent le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2\left(\mathfrak{g}_T, C_{K_0}\right) & \xrightarrow{\mathrm{inf}} & H^2\left(G, C_L\right) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \deg_{K_0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \deg_L} \\ H^2\left(\mathfrak{g}_T, \mathbf{Z}\right) & \xrightarrow{\mathrm{inf}} & H^2\left(G, \mathbf{Z}\right) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes d'inflation. On note

$$\beta_{L/K} = \deg_L(\alpha_{L/K})$$

et

$$\beta_{K_0/L} = \deg_{K_0}(\alpha_{K_0/K}).$$

De manière identique au cas $G = \mathfrak{g}_T$, on a que $\beta_{K_0/K}$ est un générateur de $H^2(\mathfrak{g}_T, \mathbf{Z})$. Par ailleurs on a d'après la relation (5.2.3.1)

$$\deg_L \circ \mathrm{inf} = (\#\, H)\ \mathrm{inf} \circ \deg_{K_0}.$$

et d'après [Se1, p. 176]

$$\inf(\alpha_{K_0/K}) = [L : K_0]\, \alpha_{L/K} = (\# H)\ \alpha_{L/K}.$$

On en déduit

$$\inf\left(\beta_{K_0/K}\right) = \beta_{L/K}.$$

De la même manière que dans le cas particulier $G = \mathfrak{g}_T$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widehat{H}^0(G, T(C_L)) \arrow[r, "\widetilde{\deg'_{T,L}}"] & \widehat{H}^0\left(G, \left(X(T)^G\right)^\vee\right) \\ H^{-2}\left(G, X(T)^\vee\right) \arrow[u, ".\cup\alpha_{L/K}", "\wr"'] \arrow[r, "\psi"] & H^{-2}\left(G, \left(X(T)^G\right)^\vee\right) \arrow[u, ".\cup\beta_{L/K}"'] \end{tikzcd}$$

à ceci près bien sûr que la flèche verticale de droite n'est plus nécessairement un isomorphisme. Maintenant la formule (5.2.3.1) montre que

$$\widetilde{\deg'_{T,L}} = (\# H)\ \widetilde{\deg'_T}$$

ce qui permet de définir un isomorphisme

$$\theta\ :\ (\# H)\ \widehat{H}^0\left(G, \left(X(T)^G\right)^\vee\right) \longrightarrow \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, \left(X(T)^G\right)^\vee\right)$$

tel que

$$\theta \circ \widetilde{\deg'_{T,L}} = \widetilde{\deg'_T}.$$

Notons $\inf^*$ le morphisme dual de l'inflation

$$H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^G\right) \to H^2\left(G, X(T)^G\right).$$

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} H^{-2}\left(G, (X(T)^G)^\vee\right) \arrow[d, "\inf^*"] & \times & \inf\left(H^2(\mathfrak{g}_T, \mathbf{Z})\right) \arrow[r, "\cup"] & (\# H)\ \widehat{H}^0\left(G, \left(X(T)^G\right)^\vee\right) \arrow[d, "\theta"] \\ H^{-2}\left(\mathfrak{g}_T, (X(T)^G)^\vee\right) & \times & H^2(\mathfrak{g}_T, \mathbf{Z}) \arrow[u, "\inf"] \arrow[r, "\cup"] & \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, \left(X(T)^G\right)^\vee\right) \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif dans le sens suivant : si x est un élément de $H^{-2}\left(G, (X(T)^G)^\vee\right)$ et β un élément de $H^2(\mathfrak{g}_T, \mathbf{Z})$, on a

$$\theta\left(x \cup \inf(\beta)\right) = \inf^*(x) \cup \beta. \tag{5.2.7.3}$$

Il suffit pour vérifier ceci de regarder au niveau du diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^{-2}(G,\mathbf{Z}) \arrow[d, "\inf^*"] & \times & \inf(H^2(\mathfrak{g}_T,\mathbf{Z})) \arrow[r, "\cup"] & (\# H)\ \widehat{H}^0(G,\mathbf{Z}) \arrow[d, "\theta"] \\
H^{-2}(\mathfrak{g}_T,\mathbf{Z}) & \times & H^2(\mathfrak{g}_T,\mathbf{Z}) \arrow[u, "\inf"'] \arrow[r, "\cup"] & \widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T,\mathbf{Z})
\end{tikzcd}$$

qui «provient» du diagramme naturel

$$\begin{tikzcd}
G^{\mathrm{ab}} \arrow[d] & \times & \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_T,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \arrow[r] & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\mathfrak{g}_T & \times & \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_T,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

(le groupe $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_T,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de la ligne du haut étant vu comme sous-groupe naturel de $\mathrm{Hom}(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$) dont la commutativité est évidente. On obtient en résumé, en utilisant la relation (5.2.7.3) avec $\beta = \beta_{K_0/K}$, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widehat{H}^0(G,T(C_L)) \arrow[r, "\widetilde{\deg'_T}"] & \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T,\left(X(T)^G\right)^\vee\right) \\
H^{-2}(G,X(T)^\vee) \arrow[u, ".\cup\alpha_{L/K}", "\wr"'] \arrow[d, "\psi"] & \\
H^{-2}(G,(X(T)^G)^\vee) \arrow[r, "\inf^*"] \arrow[uur, "\theta\circ(.\cup\beta_{L/K})"] & H^{-2}\left(\mathfrak{g}_T,\left(X(T)^G\right)^\vee\right) \arrow[uu, ".\cup\beta_{K_0/K}"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

On a donc

$$\left[\mathrm{Ker}(\widetilde{\deg'_T})\right] = [\mathrm{Ker}(\inf^*\circ\psi)]\,.$$

Le morphisme de G-module $X(T)^G \to X(T)$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right) \arrow[r, "\inf"] & H^2\left(G, X(T)\right) \\
H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^G\right) \arrow[u] \arrow[r, "\inf"] & H^2\left(G, X(T)^G\right) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\inf^*\circ\phi$ est donc dual du morphisme

$$H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^G\right) \longrightarrow H^2(G,X(T))$$

obtenu en composant le morphisme

$$H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^G\right) \longrightarrow H^2\left(G, X(T)^H\right)$$

déduit de la suite exacte de $\mathfrak{g}_T$-modules

$$0 \longrightarrow X(T)^G \longrightarrow X(T)^H \longrightarrow X(T)^G/X(T)^H \longrightarrow 0$$

avec l'inflation

$$H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right) \longrightarrow H^2(G, X(T)).$$

On a

$$\{0\} = \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H/X(T)^G\right) \xrightarrow{\sim} H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H/X(T)^G\right)$$

donc le morphisme

$$H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^G\right) \longrightarrow H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)$$

est surjectif et finalement

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{Ker}(\widetilde{\deg'_T})\right] &= \left[\mathrm{Coker}\left(H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^G\right) \longrightarrow H^2(G, X(T))\right)\right] \\ &= \left[\mathrm{Coker}\left(H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right) \longrightarrow H^2(G, X(T))\right)\right].\end{aligned}$$

La suite exacte

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow H^1\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right) &\longrightarrow H^1(G, X(T)) \longrightarrow H^1(H, X(T))^{\mathfrak{g}_T} \\ &\longrightarrow H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right) \longrightarrow H^2(G, X(T)) \\ &\longrightarrow \mathrm{Coker}\left(H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right) \longrightarrow H^2(G, X(T))\right) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

déduite de la suite spectrale de Hochschild-Serre montre que

$$\left[\mathrm{Ker}(\widetilde{\deg'_T})\right] = \frac{\left[H^1\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)\right]\left[H^1(H, X(T))^{\mathfrak{g}_T}\right]\left[H^2(G, X(T))\right]}{\left[H^1(G, X(T))\right]\left[H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)\right]}.$$

Reprenons à présent notre résolution flasque $\mathcal{R}$

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

et notons $Q_{\mathcal{R}} = \mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{R}})$. Cette résolution donne naissance aux suites exactes

$$0 \longrightarrow X(T)^G \longrightarrow P^G \longrightarrow Q^G \longrightarrow H^1(G, X(T)) \longrightarrow 0, \qquad (5.2.7.4)$$

$$0 \longrightarrow X(T)^H \longrightarrow P^H \longrightarrow Q_{\mathcal{R}} \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow Q_{\mathfrak{R}} \longrightarrow Q^H \longrightarrow H^1(H, X(T)) \longrightarrow 0.$$

En prenant les $\mathfrak{g}_T$-invariants dans les deux dernières suites exactes, on obtient les suites exactes

$$0 \longrightarrow X(T)^G \longrightarrow P^G \longrightarrow Q_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{g}_T} \longrightarrow H^1\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right) \longrightarrow 0 \qquad (5.2.7.5)$$

(car P^H est un $\mathfrak{g}_T$-module de permutation) et

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Q_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{g}_T} \longrightarrow Q^G \longrightarrow H^1(H, X(T))^{\mathfrak{g}_T} \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}}) \qquad (5.2.7.6) \\ \longrightarrow \operatorname{Ker}\left(H^1(\mathfrak{g}_T, Q^H) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}_T, H^1(H, X(T)))\right) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

De l'égalité

$$\left[Q^G : P^G/X(T)^G\right] = \left[Q^G : Q_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{g}_T}\right] \left[Q_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{g}_T} : P^G/X(T)^G\right],$$

et des suites exactes (5.2.7.4), (5.2.7.5) et (5.2.7.6) on tire

$$\begin{aligned} \left[H^1(G, X(T))\right] = \left[H^1\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)\right] \left[H^1(H, X(T))^{\mathfrak{g}_T}\right] \\ \times \frac{\left[\operatorname{Ker}\left(H^1(\mathfrak{g}_T, Q^H) \to H^1(\mathfrak{g}_T, H^1(H, X(T)))\right)\right]}{\left[H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}})\right]}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\left[\operatorname{Ker}(\widetilde{\deg'_T})\right] \\ &\quad = \frac{\left[H^2(G, X(T))\right]\left[H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}})\right]}{\left[H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)\right]\left[\operatorname{Ker}\left(H^1(\mathfrak{g}_T, Q^H) \to H^1(\mathfrak{g}_T, H^1(H, X(T)))\right)\right]}. \end{aligned}$$

Du fait que

$$H^2(G, X(T)) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^0(G, T(C_L))$$

par dualité de Nakayama, et que

$$H^2\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)$$

car $\mathfrak{g}_T$ est cyclique, on obtient

$$\begin{aligned} &\left[\operatorname{Coker}(\deg'_T)\right] \\ &\quad = \frac{d_T^{\operatorname{rg}\left(X(T)^G\right)}\left[H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}})\right]}{\left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)\right]\left[\operatorname{Ker}\left(H^1(\mathfrak{g}_T, Q^H) \to H^1(\mathfrak{g}_T, H^1(H, X(T)))\right)\right]}. \end{aligned} \qquad (5.2.7.7)$$

Pour obtenir une réponse positive en toute généralité à la question 5.2.15, il faudrait donc montrer que l'obstruction à ce qu'un élément de $\deg'_T(T(C_K))$ soit dans $\deg_T(T(\mathbf{A}_K))$ est exactement décrite par le groupe

$$\operatorname{Ker}\left(H^1(\mathfrak{g}_T, Q^H) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}_T, H^1(H, X(T)))\right).$$

Nous déduisons à présent de cette formule l'égalité $\varsigma(T) = 1$ dans les cas T quasi-déployé et T déployé par une extension métacyclique.

Cas où T est quasi-déployé. Si T est quasi-déployé, on a $\text{Ш}(T) = 0$ et donc

$$[\operatorname{Coker}(\deg_T)] = \left[\operatorname{Coker}(\deg'_T)\right].$$

Par ailleurs

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow X(T) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

est une résolution flasque de $X(T)$, et donc dans la formule (5.2.7.7), on peut prendre $Q = 0$. La réponse à la question 5.2.15 est donc positive dans le cas d'un tore quasi-déployé.

Cas où T est déployé par une extension métacyclique. Si G est métacyclique (i.e. a ses Sylow cycliques), tout G-module flasque est coflasque ([CTSa, corollaire 2]), et donc si Q est un G-module flasque,

$$H^1(G, T_Q(C_L)) = 0.$$

De la même manière que dans le cas $G = \mathfrak{g}_T$, on en déduit que $\text{Ш}(T) = 0$ et

$$[\operatorname{Coker}(\deg_T)] = \left[\operatorname{Coker}(\deg'_T)\right].$$

D'après la suite exacte de Hochschild-Serre, le groupe $H^1(\mathfrak{g}_T, Q^H)$ s'injecte dans $H^1(G, Q)$, et est donc nul. La réponse à la question 5.2.15 est donc positive dans le cas d'un tore déployé par une extension métacyclique, et ceci conclut la démonstration de la proposition 5.2.16. $\square$

5.3 Hauteurs sur une variété torique et fonction zêta associée

5.3.1 Variétés toriques non déployées

Soit M un $\mathbf{Z}$-module de type fini et $\Sigma \subset M \otimes \mathbf{R}$ un éventail projectif et lisse. Comme déjà expliqué à la section 3.2, à un tel objet combinatoire est associé, pour tout corps L, une compactification équivariante lisse et projective du tore déployé $\mathbf{G}_{m,L}$, autrement dit une variété torique projective, lisse et déployée sur L, notée $X_{\Sigma,L}$.

Soit K un corps de fonctions, qui restera fixé dans toute la suite de ce chapitre, avec $q_K = q$. Soit T un tore algébrique de dimension d défini sur K. On fixe également une extension galoisienne L/K de groupe G déployant T. Soit $\Sigma \subset X(T)^\vee \otimes \mathbf{R}$ un éventail projectif et lisse. On suppose de plus que Σ est un G-éventail, c'est-à-dire que G agit sur Σ en préservant les cônes. Alors G agit aussi sur la variété torique projective $X_{\Sigma,L}$, et on peut prendre le quotient de $X_{\Sigma,L}$ par G, ce qui donne une variété X_Σ définie sur K, qui est une compactification équivariante projective et lisse de T (cf. [Vo, §1]). Soit $\Sigma(1)$ l'ensemble des rayons de Σ, et P_Σ le G-module de permutation $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$. Le G-module $\mathrm{Pic}(X_{\Sigma,L})$ est libre de rang fini et on a une suite exacte de G-modules

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P_\Sigma \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_{\Sigma,L}) \longrightarrow 0. \tag{5.3.1.1}$$

De plus $\mathrm{Pic}(X_{\Sigma,L})$ est un G-module flasque. Ceci découle de la preuve de [CTSa, proposition 6, page 189]. Choisissons en effet un corps K' de caractéristique 0 tel qu'il existe une extension galoisienne L' de K' de groupe G. Il existe donc un tore algébrique T_P défini sur K' et déployé par L', et une compactification lisse et projective $X_{\Sigma,K'}$ de T_P, telle que les G-modules $\mathrm{Pic}(X_{\Sigma,L'})$ et $\mathrm{Pic}(X_{\Sigma,L})$ sont isomorphe, et d'après [CTSa] $\mathrm{Pic}(X_{\Sigma,L'})$ est flasque.

5.3.2 Fonction zêta des hauteurs

Soit $\phi \in PL(\Sigma)^G \otimes \mathbf{C}$. Pour $v \in \mathcal{P}_K$ on définit, suivant [BaTs1, Definition 2.1.5] une hauteur locale

$$H_{\phi,v} : T(K_v) \longrightarrow \mathbf{C}$$

invariante sous l'action de $T(\mathcal{O}_v)$, de la façon suivante. Soit $\mathcal{V}$ une place de L divisant v, et G_v le groupe de décomposition correspondant. Le morphisme valuation

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : L_{\mathcal{V}}^* &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ x &\longmapsto \mathcal{V}(x) \end{aligned}$$

est G_v-équivariant et permet, en identifiant $T(K_v)$ à $\mathrm{Hom}_{G_v}(X(T), L_{\mathcal{V}}^*)$, de définir par composition un morphisme

$$j_v : T(K_v) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_v}(X(T), \mathbf{Z}) = (X(T)^\vee)^{G_v}$$

puis pour tout $\phi \in \mathrm{PL}(\Sigma)^G \otimes \mathbf{C}$ la hauteur locale

$$\begin{aligned} H_{\Sigma,v}(\phi) \,:\, T(K_v) &\longrightarrow \mathbf{C} \\ x &\longmapsto \exp\left[\, f_v \, \ln(q)\, \phi(j_v(x))\,\right]. \end{aligned}$$

Pour $x \in T(K)$ on pose

$$H_\phi(x) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} H_{\phi,v}(x).$$

Si $\phi \in PL(\Sigma)^G$, $H_\phi(x)$ est la restriction à $T(K)$ d'une hauteur d'Arakelov associée au faisceau inversible représenté par ϕ. On pose alors

$$\zeta_{H_\phi}(s) = \sum_{x \in T(K)} H_\phi(x)^{-s}$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que la série converge, et plus généralement

$$\zeta_H(\phi) = \sum_{x \in T(K)} H_{-\phi}(x)$$

pour tout $\phi \in PL(\Sigma)^G \otimes \mathbf{C}$ tel que la série converge (cf. le résultat de convergence ci-dessous).

5.3.3 Mesure et nombre de Tamagawa d'une variété torique

Dans le cas où $\phi_0 \in PL(\Sigma)^G$ correspond au faisceau anticanonique de X_Σ, la métrisation dont provient la hauteur H_{ϕ_0} induit pour tout v une mesure $\omega_{X_\Sigma,v}$ sur $X_\Sigma(K_v)$.

Comme la forme Ω_T utilisée dans la section 5.2.5 pour la construction des mesures de Haar $\omega_{T,v}$ sur $T(K_v)$ est une section non nulle sur T du faisceau canonique de X_Σ, il existe, par définition de la fonction hauteur associée à une métrique adélique (section 1.4, page 24) une famille $(\alpha_v) \in (\mathbf{R}_{>0})^{\mathcal{P}_K}$ avec $\alpha_v = 1$ pour presque tout v et $\prod_{v \in \mathcal{P}_K} \alpha_v = 1$ telle que, pour tout $x \in T(K_v)$, on a

$$\left|\left|\Omega_T(x)^{-1}\right|\right|_v = \alpha_v \, H_{\phi_0,v}(x).$$

En vue du calcul du terme principal de la fonction zêta des hauteurs, nous voulons comparer les mesures $\omega_{X_\Sigma,v}$ et $H_{\Sigma,v}(x,\phi_0)\,\omega_{T,v}$ sur $T(K_v)$. C'est l'objet de la proposition 3.4.4. de [BaTs1], dont nous rappelons la preuve.

Soient $x \in T(k_v)$ et U un ouvert de Zariski de T contenant x tel qu'il existe un K-morphisme étale

$$f\,:\,U \longrightarrow \mathbf{A}^d_K,$$

vérifiant

$$f^*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_d}\right) = \beta\,\Omega_U^{-1}.$$

avec $\beta \in K^*$. Ce morphisme induit pour un ouvert analytique W de $T(K_v)$ contenant x un isomorphisme analytique

$$f\,:\,W \xrightarrow{\sim} f(W) \subset K_v^d.$$

Par définition de $\omega_{T,v}$ on a

$$\omega_{T,v} = |\beta|_v\,\left(f^{-1}\right)_*(dx_1\dots dx_d)$$

et par ailleurs

$$\omega_{X_\Sigma,v} = |\beta|_v\left(f^{-1}\right)_*\left(||\Omega_T(f^{-1}(x))^{-1}||_v dx_1\dots dx_d\right)$$

d'où

Lemme 5.3.1
Il existe une famille $(\alpha_v) \in (\mathbf{R}_{>0})^{\mathcal{P}_K}$ *avec* $\alpha_v = 1$ *pour presque tout* v *et*

$$\prod_{v\in\mathcal{P}_K}\alpha_v = 1$$

telle que

$$\forall\, v \in \mathcal{P}_K,\quad \omega_{X_\Sigma,v}|_{T(K_v)} = \alpha_v\,H_{\phi_0,v}(.)\,\omega_{T,v}.$$

Rappelons (cf. section 1.4.2) que le *nombre de Tamagawa* de X_Σ est alors par définition

$$\gamma_H\left(X_\Sigma\right) = \omega_{X_\Sigma}\left(\overline{X_\Sigma(K)}\right),$$

où

$$\omega_{X_\Sigma} = q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)}\,l_S(X_\Sigma)\prod_{v\in S}\omega_{X_\Sigma,v}\prod_{v\notin S}L_v(1,\mathrm{Pic}(X_\Sigma^{\mathrm{sep}})^{-1})\,\omega_{X_\Sigma,v}.$$

Lemme 5.3.2 (Batyrev, Tschinkel)
On a

$$\int_{\overline{T(K)\cap T(\mathbf{A}_K)}}\omega_{X_\Sigma} = \int_{\overline{X_\Sigma(K)}}\omega_{X_\Sigma}.$$

C'est la proposition 3.4.5 de [BaTs1]. Leur preuve ne fait visiblement pas usage de la caractéristique zéro.

5.3.4 Le résultat

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer notre résultat principal. La constante $\varsigma(T)$ a été définie au début de la section 5.2.7.

Théorème 5.3.3
Soit K un corps de fonctions, L/K une extension galoisienne de groupe G, Σ un G-éventail projectif et lisse. Soit X_Σ la variété torique projective et lisse, définie sur K, qui lui est associé. C'est une compactification d'un tore algébrique T.

Soit $\phi_0 \in \mathrm{PL}(\Sigma)^G$ un représentant du faisceau anticanonique de X_Σ. La série $\zeta_H(s\,\phi_0)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et pour un certain $\varepsilon > 0$ se prolonge en une fonction méromorphe sur un domaine du type $\Re(s) > 1-\varepsilon$. Cette fonction a un pôle d'ordre le rang du groupe de Picard de X_Σ en $s = 1$, et on a

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))}\,\zeta_H(s\,\phi_0) = \varsigma(T)\,\alpha^*(X_\Sigma)\,\#H^1\left(G, \mathrm{Pic}(X_{\Sigma,L})\right)\,\gamma_H(X_\Sigma).$$

Ce théorème est l'analogue dans le cas fonctionnel du résultat démontré dans [BaTs1] et [BaTs3], à ceci près que nous ne sommes pas en mesure d'assurer que l'égalité $\varsigma(T) = 1$ est vraie en toute généralité (cf. la section 5.2.7), et donc que la constante obtenue coïncide avec la constante espérée. Notre preuve consiste, comme déjà indiqué, à adapter les arguments de [BaTs1] et [BaTs3] en caractéristique positive.

5.3.5 Stratégie de Batyrev et Tschinkel

L'idée essentielle de Batyrev et Tschinkel pour étudier la fonction zêta des hauteurs est d'appliquer la formule de Poisson pour obtenir une représentation intégrale de $\zeta_H(\phi)$. Pour cela, on commence par étendre la hauteur en une fonction continue sur $T(\mathbf{A}_K)$ en posant pour $(x_v) \in T(\mathbf{A}_K)$

$$H_\phi((x_v)) = \prod_{v\in\mathcal{P}_K} H_{\phi,v}(x_v).$$

Ainsi H_ϕ est invariante sous l'action de $\mathbf{K}(T)$ (ceci sera utile pour annuler beaucoup de transformées de Fourier). On veut appliquer la formule de Poisson sous la forme suivante (cf. [Bki, Proposition 8, p. 127]) :

Théorème 5.3.4 (Formule de Poisson)
Soit $\mathcal{G}$ un groupe topologique abélien localement compact muni d'une mesure de Haar dg, $\mathcal{H}$ un sous-groupe fermé muni d'une mesure de Haar dh. Soit dx la mesure de Haar sur le quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, normalisée par la relation $dg = dx\,dh$.

Soit $\mathcal{H}^{\perp}$ le groupe des caractères de $\mathcal{G}$ triviaux sur $\mathcal{H}$, qu'on munit de la mesure de Haar $d\chi$ duale de la mesure dx. Soit $F : \mathcal{G} \to \mathbf{R}$ une fonction $\mathbf{L}^1$ et $\mathcal{F}F$ sa transformée de Fourier par rapport à dg. On suppose $\mathcal{F}F$ $\mathbf{L}^1$ sur $\mathcal{H}^{\perp}$.

Alors, pour presque tout g de $\mathcal{G}$, la fontion $g \mapsto F(g\,h)$ est $\mathbf{L}^1$ sur $\mathcal{H}$, et on a la formule

$$\int_{\mathcal{H}} F(g\,h)dh = \int_{\mathcal{H}^{\perp}} \chi(g)\,(\mathcal{F}F)(\chi)d\chi.$$

On veut appliquer ce résultat à $\mathcal{G} = T(\mathbf{A}_K)$ muni de la mesure de Haar $\omega_{T,S}$ définie à la section 5.2.5 (pour un certain ensemble fini S de places défini à la section 5.4.5), $\mathcal{H} = T(K)$, identifié à un sous-groupe discret de $T(\mathbf{A}_K)$ et muni de la mesure discrète, et $g \in \mathbf{K}(T)$ convenable (ceci est possible car $\int_{\mathbf{K}(T)} \omega_{T,S} \neq 0$, cf. section 5.2.5). On munit donc $(T(\mathbf{A}_K)/T(K))^*$ de la mesure de Haar duale de la mesure quotient sur $T(\mathbf{A}_K)/T(K)$, cette mesure duale sera notée $d\chi$. Soit maintenant $\phi \in \mathrm{PL}(\Sigma)^G$. Si $H_{-\phi}$ est $\mathbf{L}^1$ sur $T(\mathbf{A}_K)$, on note donc $\mathcal{F}H_{-\phi}$ la transformée de Fourier de $H_{-\phi}$ par rapport à la mesure $\omega_{T,S}$. Ainsi, si la restriction de $\mathcal{F}H_{-\phi}$ à $(T(\mathbf{A}_K)/T(K))^*$ est aussi $\mathbf{L}^1$, l'application de la formule de Poisson donne

$$\sum_{x\in T(K)} H_{-\phi}(g\,x) = \int_{(T(\mathbf{A}_K)/T(K))^*} \chi(g)(\mathcal{F}\,H_{-\phi})(\chi)\,d\chi.$$

Comme $H_{-\phi}$ est $\mathbf{K}(T)$-invariante, $(\mathcal{F}H_{-\phi})(\chi)$ est nulle si χ n'est pas trivial sur $\mathbf{K}(T)$, et il suffit en fait de montrer que la restriction de $\mathcal{F}H_{-\phi}$ à $(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$ est $\mathbf{L}^1$. Comme g a été choisi dans $\mathbf{K}(T)$, on aura que $H_{-\phi}$ est $\mathbf{L}^1$ sur $\mathcal{H}$ et la formule

$$\sum_{x\in T(K)} H_{-\phi}(x) = \int_{(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*} (\mathcal{F}H_{-\phi})(\chi)\,d\chi.$$

Comme $(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$ est compact, la condition d'intégrabilité de $\mathcal{F}H_{-\phi}$ est immédiatement vérifiée dès que $H_{-\phi}$ est intégrable. Pour les calculs ultérieurs, on a bien sûr besoin d'une expression relativement explicite de la transformée de Fourier. C'est le but de la partie suivante. La représentation intégrale est obtenue au corollaire 5.4.9.

5.4 Calcul des transformées de Fourier et expression intégrale de la fonction zêta des hauteurs

5.4.1 Caractères du groupe des idèles

Soit E un corps de fonctions. Si χ est un caractère de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_E)$, pour $v \in \mathcal{P}_E$ on notera χ_v le caractère induit sur $\mathbf{G}_m(E_v)$. Tout caractère de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_E)$ trivial sur $\mathbf{K}_{\mathbf{G}_m}.\mathbf{G}_m(E)$ est de la forme

$$\chi : (x_v) \longmapsto \prod_{v \in \mathcal{P}_E} z_v^{v(x_v)}$$

avec $(z_v) \in (\mathbf{S}^1)^{\mathcal{P}_E}$ (pour tout $v \in \mathcal{P}_E$ on a donc $z_v = \chi_v(\pi_v)$). On peut alors définir la fonction L associée

$$L_E(s,\chi) = \mathcal{L}_E(q_E^{-s},\chi) = \prod_{v \in \mathcal{P}_E} \frac{1}{1 - z_v\, q_v^{-s}}$$

Ce produit eulérien converge absolument pour $\Re(s) > 1$. Si χ est de plus trivial sur $\mathbf{G}_m^1(\mathbf{A}_E)$ il s'écrit

$$x \longmapsto z^{\deg_E(x)}$$

avec $z \in \mathbf{S}^1$.

Si S est un ensemble fini de $\mathcal{P}_K$ on définit aussi

$$L_{E,S}(s,\chi) = \mathcal{L}_{E,S}(q_E^{-s},\chi) = \prod_{v \notin S} \frac{1}{1 - z_v\, q_v^{-s}}.$$

Dans le cas où χ est trivial, on obtient une fonction zêta «tronquée» que l'on notera

$$\zeta_{E,S}(s) = Z_{E,S}(q_E^{-s}) = \prod_{v \notin S} \frac{1}{1 - q_v^{-s}}.$$

D'après [We1, VII, § 7, Thm 6], on a

Lemme 5.4.1
Si χ n'est pas trivial sur $\mathbf{G}_m^1(\mathbf{A}_E)$, $L_{E,S}(s,\chi)$ s'exprime comme un polynôme en q_E^{-s}, en particulier est holomorphe sur $\mathbf{C}$.

5.4.2 Caractères de $T(\mathbf{A}_K)$

Nous notons $\Sigma(1)_G$ l'ensemble des orbites de $\Sigma(1)$ sous l'action de G. Pour chaque $\alpha \in \Sigma(1)_G$ nous choisissons un élément de α, nous notons ρ_α le générateur de cet élément ainsi que G_α le stabilisateur de ρ_α. Soit $K_\alpha = L^{G_\alpha}$. Nous noterons d_α le degré absolu de K_α, i.e. on a $q_{K_\alpha} = q^{d_\alpha}$.

Le G-module de permutation $P_\Sigma = \mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ s'identifie alors à

$$\bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{Z}\,[G/G_\alpha]\,.$$

Rappelons (section 5.3.1) qu'on a une suite exacte de G-modules

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{Z}\,[G/G_\alpha] \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_{\Sigma,L}) \longrightarrow 0$$

et que $\mathrm{Pic}(X_{\Sigma,L})$ est un G-module flasque.

Notons $\widetilde{\gamma}$ le morphisme

$$X(T) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{Z}\,[G/G_\alpha]\,.$$

Pour $m \in X(T)$ on a

$$\widetilde{\gamma}(m) = \left(\langle m, g\,\rho_\alpha\rangle\right)_{\substack{\alpha\in\Sigma(1)_G\\ g\in G/G_\alpha}}.$$

Le morphisme $\widetilde{\gamma}$ induit par dualité un morphisme de tores algébriques

$$\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathrm{Res}_{K_\alpha/K}\mathbf{G}_m \longrightarrow T$$

et en passant aux espaces adéliques associés un morphisme continu

$$\gamma\ :\ \prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha}) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K).$$

Ce dernier morphisme n'est autre que le morphisme

$$\bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z}[G/G_\alpha], \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L))$$

induit par la composition avec $\widetilde{\gamma}$.

Le but de ce qui suit est d'expliciter le morphisme de caractères

$$\big(T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K)\big)^* \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \big(\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})/\mathbf{G}_m^1(\mathbf{A}_{K_\alpha})\big)^*$$

induit par γ.

Soit $\alpha \in \Sigma(1)_G$. En regardant G_α comme un élément de $\mathbf{Z}[G/G_\alpha]$, on a un morphisme (cf. lemme 5.2.1)

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z}[G/G_\alpha], \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ \phi & \longmapsto & d_\alpha \deg_{K_\alpha}(\phi(G_\alpha)) \end{array}$$

Par [We1, VII, § 5,Cor 6] (existence de diviseurs de degré 1) ce morphisme a pour image $d_\alpha \mathbf{Z}$. La composition par $\widetilde{\gamma}$ induit également un morphisme

$$\overline{\gamma} : \mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G} \longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T)^G, \mathbf{Z}),$$

surjectif car $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}/X(T)^G$ est sans torsion. En effet la suite exacte ci-dessus induit la suite exacte

$$0 \longrightarrow X(T)^G \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_\Sigma).$$

On obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z}[G/G_\alpha], \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\deg_{T_{P_\Sigma}}"] & \mathrm{Hom}_G(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)) \arrow[d, "\deg_T"] \\ \mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G} \arrow[r, "\overline{\gamma}"] & \mathrm{Hom}(X(T)^G, \mathbf{Z}) \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif, par fonctorialité du degré (section 5.2.3). En particulier, on retrouve le fait que le conoyau de $\deg_T$ est fini, comme conséquence de cette commutativité et de la surjectivité de $\overline{\gamma}$. On notera que si L a même corps des constantes que K, les d_α sont tous égaux à un, $\deg_{T_{P_\Sigma}}$ est surjectif et donc $\deg_T$ également. Ce résultat avait déjà été montré à la section 5.2.7.

Nous choisissons une fois pour toutes un scindage de $\deg_T$, ce qui fournit un scindage

$$\begin{array}{rcl} (T(\mathbf{A}_K)/T(K))^* & \longrightarrow & (T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K))^* \times (T^1(\mathbf{A}_K)/T(K))^* \\ \chi & \longmapsto & (\chi', \chi'') \end{array}$$

Si $\chi \in T(\mathbf{A}_K)^*$ nous noterons (χ_α) les composantes du caractère $\chi \circ \gamma$, de sorte que (χ_α) est un élément de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})^*$. Nous désignerons le groupe topologique $(T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K))^* = \mathrm{Hom}(\mathrm{Im}(\deg_T), \mathbf{S}^1)$ par $\mathbf{S}_T$. Pour $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_T$ et $n \in \mathrm{Im}(\deg_T)$, nous noterons $\mathbf{z}^n$ l'élément $\mathbf{z}(n) \in \mathbf{S}^1$.

Si $\chi'' \in (T^1(\mathbf{A}_K)/T(K))^*$ et $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_T$ on notera $\chi''_{\mathbf{z}}$ le caractère défini, via le scindage ci-dessus, par $(\mathbf{z}, \chi'')$.

Pour $\alpha \in \Sigma(1)_G$, on notera $\langle m, \rho_\alpha \rangle$ l'élément $m \mapsto \langle m, \rho_\alpha \rangle$ de $\left(X(T)^G\right)$. Le diagramme ci-dessus montre que $d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle$ est dans $\mathrm{Im}(\deg_T)$ et le

Lemme 5.4.2
Soit $\chi = \mathbf{z} \in \left(T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K)\right)^*$. *Soit* $\alpha \in \Sigma(1)_G$. *Alors pour* $x \in \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})$ *on a*

$$(\chi)_\alpha(x) = \left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle}\right)^{\deg_{K_\alpha}(x)}.$$

On peut choisir une base $(m_j)_{j=1,\ldots,r}$ de $X(T)^G$ ainsi qu'une base $(n_j)_{j=1,\ldots,r}$ de $\mathrm{Im}(\deg_T)$ de sorte que si $(m_j^\vee)$ représente la base duale de (m_j) on a pour tout $j = 1, \ldots, r$

$$n_j = e_j \, m_j^\vee$$

où les e_j sont des entiers strictement positifs. On détermine ainsi un isomorphisme de groupes topologiques $\mathbf{S}_T \xrightarrow{\sim} (\mathbf{S}^1)^r$.

Via cet isomorphisme la formule du lemme s'écrit

$$(\chi)_\alpha(x) = \left(\prod_{j=1}^{r} z_j^{\frac{d_\alpha \langle m_j, \rho_\alpha \rangle}{e_j}}\right)^{\deg_{K_\alpha}(x)}.$$

5.4.3 Préliminaires au calcul des transformées de Fourier

Soit v une place de K. Nous choisissons une place $\mathcal{V}$ de L au-dessus de v, nous notons G_v son groupe de décomposition. On a une identification

$$T(K_v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_v}(X(T), L_{\mathcal{V}}^*).$$

Par composition avec $\mathcal{V}$ on obtient une injection

$$T(K_v)/T(\mathcal{O}_v) \hookrightarrow \left(X(T)^\vee\right)^{G_v}.$$

Nous notons $\Sigma(1)_{G_v}$ l'ensemble des orbites de $\Sigma(1)$ sous l'action de G_v, et pour $\alpha \in \Sigma(1)_G$ nous notons $\Sigma(1)_{G_v}^\alpha$ le sous-ensemble de $\Sigma(1)_{G_v}$ des orbites incluses dans α. Soit Σ^{G_v} l'ensemble des cônes de Σ globalement invariants sous l'action de G_v, en d'autres termes les cônes σ dont l'ensemble des rayons $\sigma(1)$ est stable sous l'action de G_v. Pour un cône $\sigma \in \Sigma^{G_v}$, nous notons $\sigma(1)_{G_v}$ l'ensemble des orbites de $\sigma(1)$ sous l'action de G_v, et pour $\alpha \in \Sigma(1)_G$ nous notons $\sigma(1)_{G_v}^\alpha$ le sous-ensemble de $\sigma(1)_{G_v}$ des orbites incluses dans α.

Pour $\beta \in \Sigma(1)_{G_v}$ nous notons l_β le cardinal de β, ρ_β un générateur d'un élément quelconque de β et

$$\tau_\beta = \left(\sum_{\rho \in G_v \cdot \rho_\beta} \rho\right) \in \left(X(T)^\vee\right)^{G_v}.$$

On note $\mathrm{intrel}(\sigma)$ l'intérieur relatif d'un cône σ.

Lemme 5.4.3
$(X(T)^\vee)^{G_v}$ est recouvert par les ensembles intrel$(\sigma) \cap (X(T)^\vee)^{G_v}$ pour σ décrivant Σ^{G_v}. En particulier si $x \in (X(T)^\vee)^{G_v}$ est non nul, il existe un élément $\sigma \in \Sigma^{G_v}$ non nul tel que x s'écrit

$$x = \sum_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}} n_\beta \, \tau_\beta$$

où les n_β sont des entiers strictement positifs.

Démonstration : Soit $x \in (X(T)^\vee)^{G_v}$. Si x est non nul, x est dans l'intérieur relatif d'un unique cône σ de Σ. Alors, pour tout $g \in G_v$, $x = g\,x$ est dans l'intérieur relatif du cône $g\,\sigma$ de Σ, et donc $g\,\sigma = \sigma$. Ainsi $\sigma \in \Sigma^{G_v}$. Le reste du lemme en découle aisément. □

Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} G/G_\alpha & \longrightarrow & \{w \in \mathcal{P}_{K_\alpha},\, v|w\} \\ g & \longmapsto & g^{-1}.\mathcal{V}|_{K_\alpha} \end{array}$$

Ce n'est autre que le passage au quotient par l'action de G_v, d'où une correspondance entre $\Sigma(1)^\alpha_{G_v}$ et les places de K_α au-dessus de v. Soit $\beta \in \Sigma(1)^\alpha_{G_v}$ et w_β la place correspondante. On a alors

$$l_\beta = \frac{\# G_v}{\# \left(g_\beta \, G_\alpha \, g_\beta^{-1} \cap G_v \right)}$$

où $g_\beta \in G$ est tel que $\rho_\beta = g_\beta . \rho_\alpha$.

Si v est non ramifiée dans L, on a alors

$$[k_\mathcal{V} : k_v] = \# G_v$$

et

$$[k_\mathcal{V} : k_{w_\beta}] = \# \left(g_\beta \, G_\alpha \, g_\beta^{-1} \cap G_v \right)$$

d'où $l_\beta = [k_{w_\beta} : k_v]$ et $q_{w_\beta} = q_v^{l_\beta}$. Or $q_{w_\beta} = q_{K_\alpha}^{f_{w_\beta}} = q^{d_\alpha \, f_{w_\beta}}$ soit $f_v \, l_\beta = d_\alpha \, f_{w_\beta}$.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})/\mathbf{K}(\mathbf{G}_m).\mathbf{G}_m(K_\alpha) \arrow[r, "\gamma"] & T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K) & \\ \prod_{\beta \in \Sigma(1)^\alpha_{G_v}} \mathbf{G}_m(K_{w_\beta})/\mathbf{G}_m(\mathcal{O}_{w_\beta}) \arrow[u] \arrow[r, "\gamma_v"] & T(K_v)/T(\mathcal{O}_v) \arrow[u] \arrow[r, hook] & (X(T)^\vee)^{G_v} \end{tikzcd}$$

L'application γ_v envoie π_{w_β} sur $e_\beta\,\tau_\beta$, où e_β désigne l'indice de ramification de w_β dans L. Elle provient du morphisme de G_v-modules

$$X(T) \longrightarrow \bigoplus_{\beta\in\Sigma(1)^\alpha_{G_v}} \mathbf{Z}\left[G_v/g_\beta\,G_\alpha\,g_\beta^{-1}\cap G_v\right].$$

Ainsi si v n'est pas ramifiée dans E, $T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$ s'identifie à $(X(T)^\vee)^{G_v}$, car tout élément de $(X(T)^\vee)^{G_v}$ s'écrit comme une combinaison entière des τ_β pour $\beta\in\Sigma(1)^\alpha_{G_v}$ et $\alpha\in\Sigma(1)_G$. Ceci vient du fait que

$$H^1(G_v, Q^\vee) \xrightarrow{\sim} H^{-1}(G_v, Q) = 0$$

car Q est flasque. Ainsi la flèche $(P_\Sigma^\vee)^{G_v}\to (X(T)^\vee)^{G_v}$ est surjective. Nous retrouvons ainsi la proposition 5.2.8 et le corollaire 5.2.9. On peut dans ce cas définir

$$\chi_v(\tau_\beta) = (\chi_\alpha)_{w_\beta}\left(\pi_{w_\beta}\right).$$

5.4.4 Les transformées de Fourier locales aux places non ramifiées

Nous identifions $\mathrm{PL}(\Sigma)^G\otimes\mathbf{C}$ à $\mathbf{C}^{\Sigma(1)_G}$. Si $\phi=(s_\alpha)$, nous désignerons alors la fontion $H_\phi(.)$ par $H(.,(s_\alpha))$ et la fontion $H_{\phi,v}(.)$ par $H_v(.,(s_\alpha))$.

Désormais nous choisissons pour S un sous-ensemble fini de $\mathcal{P}_K$ contenant toutes les places ramifiées dans L/K (ainsi, même s'il s'agit d'un détail purement technique, que les places v telles que $\int_{T(\mathcal{O}_v)}\omega_{T,v}\neq L_v(1,T)$).

Soit $v\in\mathcal{P}_K\setminus S$. Les auteurs de [BaTs1] définissent alors un polynôme à coefficients entiers $Q_{\Sigma,v}$ en les $\#\Sigma(1)_{G_v}$ indéterminées $(X_\beta)_{\beta\in\Sigma(1)_{G_v}}$ par la formule

$$\sum_{\sigma\in\Sigma^{G_v}}\prod_{\beta\in\sigma(1)_{G_v}}\frac{X_\beta}{1-X_\beta} = \frac{Q_{\Sigma,v}(X_\beta)}{\prod\limits_{\beta\in\Sigma(1)_{G_v}}(1-X_\beta)}.$$

(la définition utilisée dans [BaTs1] est en fait légèrement différente car on y utilise le polynôme $Q_{\Sigma,v}\left(X_\beta^{l_\beta}\right)$, ceci étant on obtient bien la même formule pour la transformée de Fourier locale).

Un résultat facile mais important pour les résultats de convergence et de prolongement de la fonction zêta des hauteurs est ([BaTs1, Proposition 2.2.3])

Proposition 5.4.4 (Batyrev, Tschinkel)
Le polynôme $Q_{\Sigma,v}\left(X_\beta^{l_\beta}\right)-1$ ne contient que des monômes de degré total supérieur ou égal à 2.

Le résultat suivant ([BaTs1, Theorem 2.2.6]) donne une expression explicite des transformées de Fourier locales aux places $v \notin S$.

Théorème 5.4.5 (Batyrev, Tschinkel)
Soit $v \notin S$ une place de K. Soit $\chi \in (T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$ et $(s_\alpha) \in \mathbf{C}^{\Sigma(1)_G}$. On a

$$\int_{x\in T(K_v)} H_v(x, -(s_\alpha))\chi_v(x)d\mu_v$$
$$= \left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \prod_{\beta\in\Sigma(1)^\alpha_{G_v}} \frac{1}{1-\chi_v(\tau_\beta)\, q_v^{-l_\beta\, s_\alpha}}\right)$$
$$\times\; Q_{\Sigma,v}\left[\left(\chi_v(\tau_\beta)\, q_v^{-l_\beta\, s_\alpha}\right)_{\beta\in\Sigma(1)^\alpha_{G_v}}\right]_{\alpha\in\Sigma(1)_G}.$$

La preuve du théorème 5.4.5 est donnée dans [BaTs1] dans le cas des corps de nombres, mais est strictement identique pour le cas fonctionnel. Nous la rappelons brièvement. On utilise l'identification de $T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$ à $(X(T)^\vee)^{G_v}$ (proposition 5.2.8). Comme la fonction $H_v(\,.\,, -(s_\alpha))$ est $T(\mathcal{O}_v)$ invariante, elle induit une fonction sur $(X(T)^\vee)^{G_v}$, qui sera notée de façon identique. Le lemme 5.4.3 permet d'écrire

$$\begin{aligned}
&\int_{x\,\in T(K_v)} H_v(x, -(s_\alpha))\chi_v(x)d\mu_v \\
&= \left(\int_{T(\mathcal{O}_v)} d\mu_v\right) \sum_{x\in T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)} H_v(x, -(s_\alpha))\chi_v(x) \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma^{G_v}} \sum_{x\,\in\,\mathrm{intrel}(\sigma)\cap(X(T)^\vee)^{G_v}} H_v(x, -(s_\alpha))\chi_v(x) \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma^{G_v}} \sum_{n_\beta\in\mathbf{Z}_{>0}^{\sigma(1)_{G_v}}} H_v\left(\sum n_\beta\, \tau_\beta, -(s_\alpha)\right)\chi_v\left(\sum n_\beta\, \tau_\beta\right) \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma^{G_v}} \prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \prod_{\beta\in\sigma(1)^\alpha_{G_v}} \sum_{n_\beta\in\mathbf{Z}_{>0}} q_v^{-n_\beta\, l_\beta\, s_\alpha}\, \chi_v\,(\tau_\beta)^{n_\beta} \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma^{G_v}} \prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \prod_{\beta\in\sigma(1)^\alpha_{G_v}} \frac{\chi_v(\tau_\beta)\, q_v^{-l_\beta\, s_\alpha}}{1-\chi_v(\tau_\beta)\, q_v^{-l_\beta\, s_\alpha}}.
\end{aligned}$$

d'où le résultat par définition de $Q_{\Sigma,v}$. L'avant-dernière égalité vient du fait que si $\phi = (s_\alpha)$, on a par définition de la hauteur locale (cf. section 5.3.2)

$$H_v\left(\sum_{\beta\in\sigma(1)_{G_v}} n_\beta\,\tau_\beta, -(s_\alpha)\right) = q_v^{\sum\limits_{\beta\in\sigma(1)_{G_v}} n_\beta\,\phi(\tau_\beta)}$$

$$= q_v^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\ \sum\limits_{\beta\in\sigma(1)^\alpha_{G_v}} n_\beta\, l_\beta\, s_\alpha}.$$

Les résultats de la section 5.4.3 montrent immédiatemment le

Lemme 5.4.6
On a

$$\prod_{\beta\in\Sigma(1)^\alpha_{G_v}} \frac{1}{1-\chi_v(\tau_\beta)\,q_v^{-l_\beta\, s_\alpha}} = \prod_{\substack{w\in\mathcal{P}_{K_\alpha},\\ w|v}} \frac{1}{1-(\chi_\alpha)_w\,(\pi_w)\ q^{-f_w\, d_\alpha\, s_\alpha}}.$$

Rappelons que, d'après le lemme 5.4.2, si $\chi = \chi''_{\mathbf{z}}$, on a

$$(\chi_\alpha)_w\,(\pi_w) = \left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}\right)^{f_w}\ \left(\chi''_\alpha\right)_w(\pi_w)\,. \tag{5.4.4.1}$$

5.4.5 Le cas des places ramifiées

En ce qui concerne les transformées de Fourier locales aux places ramifiées, nous avons l'existence d'un entier strictement positif m tels que les deux résultats suivants sont vérifiés :

Lemme 5.4.7
Soit $v \in S$, et χ'' un caractère de $(T^1(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$. Il existe alors une fonction f holomorphe sur $\{(z_n)\in\mathbf{C}^m,\ |z_n|<1\}$, une famille $(\gamma_n)_{1\leqslant n\leqslant m}$ d'éléments de $\mathrm{Im}(\deg_T)$ ainsi qu'une famille d'entiers positifs $(\delta_{\alpha,n})_{\substack{n=1,\dots,m\\ \alpha\in\Sigma(1)_G}}$ telle que, pour tout n, l'un au moins des $\delta_{\alpha,n}$ est non nul, vérifiant

$$\forall\,\mathbf{z}\in\mathbf{S}_T,\quad \forall\,(s_\alpha)\in\mathbf{C}^{\,\Sigma(1)_G}\quad \textit{tel que}\quad \Re(s_\alpha)>0,$$
$$\int_{x\in T(K_v)} H_v(x,-(s_\alpha))\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)_v(x)\,\omega_{T,v} = f\left(\mathbf{z}^{\gamma_n}\,q^{-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\delta_{\alpha,n}\,s_\alpha}\right)_{n=1,\dots,m}$$

Démonstration : Rappelons que nous avons identifié $T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$ à un sous-module d'indice fini de $(X(T)^\vee)^{G_v}$, et que pour tout $\beta\in\Sigma(1)_{G_v}$ ce sous-module contient $e_\beta\,\tau_\beta$. On a, la hauteur locale étant $T(\mathcal{O}_v)$-invariante,

$$\int_{x\in T(K_v)} H_v(x,-(s_\alpha))\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)_v(x)\omega_{T,v}$$
$$=\left(\int_{T(\mathcal{O}_v)}\omega_{T,v}\right)\sum_{x\in T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)} H_v(x,-(s_\alpha))\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)_v(x)$$

Soit $\sigma\in\Sigma^{G_v}$ et $x\in(\sigma)\cap T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$. Alors x s'écrit

$$x=\sum_{\beta\in\sigma(1)_{G_v}} x_\beta\,e_\beta\,\tau_\beta+y$$

où les x_β sont des entiers positifs et y est un élément de l'ensemble fini

$$\left\{\sum_{\beta\in\sigma(1)_{G_v}} n_\beta\,\tau_\beta,\quad 0\leqslant n_\beta<e_\beta\right\}\bigcap\left(T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)\right).$$

On a alors

$$H_v(x,-(s_\alpha))\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)_v(x)$$
$$=\prod_{\beta\in\sigma(1)_{G_v}} H_v(e_\beta\,\tau_\beta,-(s_\alpha))^{x_\beta}\left(\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)_v(e_\beta\,\tau_\beta)\right)^{x_\beta}$$
$$\times\ H_v(y,-(s_\alpha))\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)(y)$$

On voit qu'il suffit donc de montrer que pour tout $x\in T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$ non nul la fonction

$$(\mathbf{z},(s_\alpha))\longmapsto H_v(x,-(s_\alpha))\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)_v(x)$$

est de la forme

$$(\mathbf{z},(s_\alpha))\longmapsto c\,\mathbf{z}^{\gamma}\,q^{-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\delta_\alpha\,s_\alpha},$$

où $\gamma\in\mathrm{Im}(\deg_T)$, les δ_α sont des entiers positifs non tous nuls, et c est un nombre complexe de module 1.

Soit x un tel élément, qui s'écrit d'après le lemme 5.4.3

$$x=\sum_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\ \sum_{\beta\in\sigma(1)^{\alpha}_{G_v}} n_\beta\,\tau_\beta$$

où les n_β sont des entiers strictement positifs. On a

$$H_v(x,-(s_\alpha))=\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\ \prod_{\beta\in\sigma(1)^{\alpha}_{G_v}} q^{-n_\beta\,l_\beta\,s_\alpha}.$$

Par ailleurs

$$\mathbf{z} \longmapsto \frac{\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)_v(x)}{(\chi'')_v(x)}$$

est un caractère de $\mathbf{S}_T$, d'où

$$\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)_v(x) = c\,\mathbf{z}^{\gamma}$$

où $\gamma \in \mathrm{Im}(\deg_T)$ et c est un nombre complexe de module 1. Ceci montre le lemme. $\square$

Lemme 5.4.8
Il existe une fonction f holomorphe sur $\{z \in \mathbf{C}^m,\ |z_n| < 1\}$, une famille d'entiers positifs $(k_{\alpha,n})_{\substack{n=1,\dots,m\\ \alpha\in\Sigma(1)_G}}$, et une famille d'entiers positifs $(\delta_{\alpha,n})_{\substack{n=1,\dots,m\\ \alpha\in\Sigma(1)_G}}$ telle que, pour tout n, l'un au moins des $\delta_{\alpha,n}$ est non nul, vérifiant

$$\forall\, \mathbf{z} \in \mathbf{S}_T, \quad \forall\, (s_\alpha) \in \mathbf{C}^{\Sigma(1)_G} \text{ tel que } \Re(s_\alpha) > 0,$$

$$\int_{x\in\overline{T(K)}^{\,S}} H(x, -(s_\alpha))\,(\mathbf{1}_{\mathbf{z}})\,(x) \prod_{v\in S} \omega_{T,v} = f\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{k_{\alpha,n}\, d_\alpha \langle m,\rho_\alpha\rangle} q^{-\delta_{\alpha,n}\, s_\alpha}\right)_{n=1,\dots,m}$$

Rappelons que l'on désigne par $\overline{T(K)}^{\,S}$ l'adhérence de l'image de $T(K)$ dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$.

Démonstration : Notons

$$\mathbf{K}^S = \prod_{v\in S} T(\mathcal{O}_v).$$

On a

$$\int_{x\in\overline{T(K)}^{\,S}} H_v(x, -(s_\alpha))\,(\mathbf{1}_{\mathbf{z}})_v\,(x) \prod_{v\in S} \omega_{T,v}$$

$$= \left(\int_{\overline{T(K)}^{\,S}\cap\mathbf{K}^S} \prod_{v\in S} \omega_{T,v}\right) \sum_{x\in\overline{T(K)}^{\,S}/\left(\overline{T(K)}^{\,S}\cap\mathbf{K}^S\right)} H(x, -(s_\alpha))\,(\mathbf{1}_{\mathbf{z}})\,(x).$$

Soit $(\sigma_v) \in \prod_{v\in S} \Sigma^{G_v}$. Tout élément (x_v) de $\overline{T(K)}^{\,S}/\left(\overline{T(K)}^{\,S} \cap \mathbf{K}^S\right) \cap (\sigma_v)_{v\in S}$ s'écrit

$$\left(\sum_{\beta\in(\sigma_v)_{G_v}(1)} x_\beta\, e_\beta\, \tau_\beta + y_v\right)_{v\in S}$$

où les x_β sont des entiers positifs et $y=(y_v)_{v\in S}$ est un élément de l'ensemble fini

$$\left(\left\{\sum_{\beta\in(\sigma_v)_{G_v}(1)} n_\beta\,\tau_\beta,\quad 0\leqslant n_\beta<e_\beta\right\}\right)\bigcap \overline{T(K)}^{\,S}/\left(\overline{T(K)}^{\,S}\cap \mathbf{K}^S\right).$$

On a alors

$$\begin{aligned}&H(x,-(s_\alpha))\,(\mathbf{1_z})\,(x)\\ &\qquad=(\mathbf{1_z})\,(y)\prod_{v\in S}H_v(y_v,-(s_\alpha))\,H_v(e_\beta\,\tau_\beta,-(s_\alpha))^{x_\beta}\,(\mathbf{1_z})_v\,(e_\beta\,\tau_\beta)^{x_\beta}.\end{aligned}$$

On voit qu'il suffit pour montrer le lemme de montrer que pour tout x élément non nul de $\overline{T(K)}^{\,S}/\left(\overline{T(K)}^{\,S}\cap\mathbf{K}^S\right)$, la fonction

$$(\mathbf{z},(s_\alpha))\longmapsto H(x,-(s_\alpha))\,(\mathbf{1_z}(x))$$

est de la forme

$$(\mathbf{z},(s_\alpha))\longmapsto \mathbf{z}^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)_G}k_\alpha\,d_\alpha<m,\rho_\alpha>}\,q^{-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\delta_\alpha\,s_\alpha},$$

où les k_α sont des entiers et les δ_α sont des entiers positifs non tous nuls. Pour cela il suffit de remarquer la chose suivante : d'après la proposition 5.2.13, il existe $t\in T(K)$ et $y\in T(\mathbf{A}_K)$ un élément de l'image de $\prod_\alpha \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})$ par γ tels que $x=y\,t$. Comme $\mathbf{1_z}$ est trivial sur $T(K)$, on obtient

$$\mathbf{1_z}(x)=\mathbf{1_z}(y)=\prod_\alpha\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}\right)^{k_\alpha}.$$

où les k_α sont des entiers, la dernière égalité provenant du lemme 5.4.2. Ceci montre le lemme. □

5.4.6 Propriétés analytiques de la transformée de Fourier globale

Soit $\alpha\in\Sigma(1)_G$. Nous notons S_α les places de K_α au-dessus des places de S. Rappelons que nous avons fixé un isomorphisme

$$(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}_T\times\left(T^1(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K)\right)^*.$$

On déduit de ce qui précède que pour tout $(s_\alpha) \in \mathbf{C}^{\Sigma(1)_G}$ tel que $\Re(s_\alpha) > 1$, la fonction $H(., -(s_\alpha))$ est $\mathbf{L}^1$ sur $T(\mathbf{A}_K)$. En effet, par la proposition 5.4.4, le produit eulérien

$$\prod_{v \notin S} Q_{\Sigma,v}\left[\left(q_v^{-l_\beta s_\alpha}\right)_{\beta\in\Sigma(1)^\alpha_{G_v}}\right]_{\alpha\in\Sigma(1)_G}$$

converge absolument pour $\Re(s_\alpha) > \frac{1}{2}$, et on a par le théorème 5.4.5 et le lemme 5.4.7

$$\begin{aligned}
&\int_{x\in T(\mathbf{A}_K)} |H(x, -(s_\alpha))|\, \omega_{T,S} \\
&= \int_{x\in T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(\Re(s_\alpha)))\, \omega_{T,S} \\
&= q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)} \prod_{v\in S} \int_{x\in T(K_v)} H_v(x, -(\Re(s_\alpha)))\omega_{T,v} \\
&\qquad \times \prod_{v\notin S} \int_{x\in T(K_v)} H_v(x, -(\Re(s_\alpha)))d\mu_v \\
&= \left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha,S_\alpha}\left(q^{-d_\alpha\,\Re(s_\alpha)}\right)\right) \times \prod_{v\notin S} Q_{\Sigma,v}\left[\left(q_v^{-l_\beta \Re(s_\alpha)}\right)_{\beta\in\Sigma(1)^\alpha_{G_v}}\right]_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \\
&\qquad \times f\left(q^{-\Re(s_\alpha)}\right)
\end{aligned}$$

(les fonctions Z_{K_α,S_α} ont été introduites à la section 5.4.1) où f est une fonction holomorphe sur $\{(z_\alpha) \in \mathbf{C}^{\Sigma(1)_G},\ |z_\alpha| < 1\}$.

Plus précisément, soit $\chi'' \in (T^1(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$. Par le théorème 5.4.5 et les lemmes 5.4.6 et 5.4.7, il existe une fonction $f_{\chi''}$ holomorphe sur

$$\left\{((s_\alpha),(s_n)) \in \mathbf{C}^{\Sigma(1)_G} \times \mathbf{C}^m,\ \Re(s_\alpha) > \frac{1}{2},\ \Re(s_n) > 0\right\}$$

et, pour tout $n = 1,\dots,m$, des éléments $\gamma_n \in \mathrm{Im}(\deg_T)$ et des entiers positifs $(\delta_{\alpha,n})_{\alpha\in\Sigma(1)_G}$ non tous nuls, tels qu'on ait :

$$\forall\, (s_\alpha) \in \mathbf{C}^{\Sigma(1)_G} \text{ tel que } \Re(s_\alpha) > 1, \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbf{S}_T,$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathcal{F}H(.,-(s_\alpha))\right)\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)\\
&= \int_{x\in T(\mathbf{A}_K)} H(x,-(s_\alpha))\,\chi''_{\mathbf{z}}(x)\,\omega_{T,S}\\
&= q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)} \prod_{v\in S} \int_{x\in T(K_v)} H_v(x,-(s_\alpha))\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)_v(x)\omega_{T,v}\\
&\qquad\qquad \times \prod_{v\notin S}\int_{x\in T(K_v)} H_v(x,-(s_\alpha))\left(\chi''_{\mathbf{z}}\right)_v(x)d\mu_v\\
&= \left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathcal{L}_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\, s_\alpha},\chi''_\alpha\right)\right)\\
&\qquad\qquad \times f_{\chi''}\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right)_{\alpha\in\Sigma(1)_G},\left(\mathbf{z}^{\gamma_n}\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} q^{-\delta_{\alpha,n}\, s_\alpha}\right)_{n=1,\dots,m}\right).
\end{aligned}
$$

Les fonctions $\mathcal{L}_{K_\alpha,S_\alpha}$ ont été introduites à la section 5.4.1. Remarquons que les γ_n et les $\delta_{\alpha,n}$ dépendent de χ'', mais pour alléger l'écriture nous n'indiquons pas cette dépendance qui ne joue aucun rôle par la suite. La notation $\delta_{\alpha,n}$ est encore utilisée ci-dessous pour désigner d'autres entiers, encore une fois ceci est sans importance pour la suite.

Nous obtenons également, par le théorème 5.4.5 et les lemmes 5.4.6 et 5.4.8, le résultat suivant : il existe une fonction f holomorphe sur

$$\left\{((s_\alpha),(s_n))\in \mathbf{C}^{\Sigma(1)_G}\times\mathbf{C}^m,\ \Re(s_\alpha)>\frac{1}{2},\ \Re(s_n)>0\right\}$$

et, pour tout $n=1,\dots,m$, des entiers $(k_{\alpha,n})$ et des entiers positifs $(\delta_{\alpha,n})$ non tous nuls, tels qu'on ait

$$\forall\,(s_\alpha)\in\mathbf{C}^{\Sigma(1)_G} \text{ tel que } \Re(s_\alpha)>1,\quad \forall\,\mathbf{z}\in\mathbf{S}_T,$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{x\in\overline{T(K)}\cap T(\mathbf{A}_K)} H(x,-(s_\alpha))\,\mathbf{1}_{\mathbf{z}}(x)\,\omega_{T,S}\\
&= q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)}\left(\prod_{v\notin S}\int_{x\in T(K_v)} H_v(x,-(s_\alpha))\,(\mathbf{1}_{\mathbf{z}})_v\,(x)d\mu_v\right)\\
&\qquad\qquad \times\int_{x\in\overline{T(K)}^{\,S}} H(x,-(s_\alpha))\,(\mathbf{1}_{\mathbf{z}})\,(x)\prod_{v\in S}\omega_{T,v}\\
&= q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)}\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\,s_\alpha}\right)\right)\\
&\quad\times f\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\,s_\alpha}\right)_{\alpha\in\Sigma(1)_G},\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\mathbf{z}^{k_{\alpha,n}d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}\,q^{-\delta_{\alpha,n}\,s_\alpha}\right)_{n=1,\dots,m}\right).
\end{aligned}
$$

5.4.7 L'expression intégrale de la fonction zêta des hauteurs

En vue d'obtenir une formule intégrale explicite, il nous faut déterminer la mesure de Haar sur $(T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K))^* = \mathbf{S}_T$ induite par $d\chi$. Rappelons que $(T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K))^*$ est un sous-groupe de $(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$ d'indice fini égal au cardinal de $T^1(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K)$. Notons $\mathrm{cl}(T)$ ce cardinal. En appliquant la formule de Poisson 5.3.4 avec $\mathcal{G} = T(\mathbf{A}_K)$, $dg = \omega_{T,S}$, $\mathcal{H} = T(K)$, dh la mesure discrète, et $g = 1$, et en prenant pour fonction F l'indicatrice de $\mathbf{K}(T)$, on obtient

$$
\int_{(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*} d\chi = \frac{\#\left(\mathbf{K}(T)\cap T(K)\right)}{\int_{\mathbf{K}(T)}\omega_{T,S}}
$$

(rappelons que $\int_{\mathbf{K}(T)}\omega_{T,S}\neq 0$, cf. section 5.2.5). Or

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{K}(T)}\omega_{T,S} &= \#\left(\mathbf{K}(T)\cap T(K)\right)\int_{\mathbf{K}(T).T(K)/T(K)}\omega^1_{T,S}\\
&= \frac{\#\left(\mathbf{K}(T)\cap T(K)\right)}{\mathrm{cl}(T)}\int_{T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)}\omega^1_{T,S}
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\int_{(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*} d\chi = \frac{\mathrm{cl}(T)}{\log(q)^r\,b_S(T)}.
$$

Le volume de $\mathbf{S}_T$ pour la mesure $d\chi$ est donc égal à

$$
\frac{1}{\log(q)^r\,b_S(T)}.
$$

Notons $d\mathbf{z}$ la mesure de Haar sur $\mathbf{S}_T$ telle que $\int_{\mathbf{S}_T} d\mathbf{z} = 1$, et γ^* le morphisme de caractère

$$\big(T^1(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K)\big)^* \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \big(\mathbf{G}_m^1(\mathbf{A}_{K_\alpha})/\mathbf{K}(\mathbf{G}_m)\,\mathbf{G}_m(K_\alpha)\big)^*$$

induit par le morphisme

$$\gamma\,:\,\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha}) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)$$

défini à la section 5.4.2.

Pour $\phi = (s_\alpha) \in \mathbf{C}^{\,\Sigma(1)_G}$ tel que $\Re(s_\alpha) > 1$, on obtient alors, par application de la formule de Poisson, l'expression

$$\begin{aligned}\sum_{x\in T(K)} H\left(x, -(s_\alpha)\right) = &\sum_{\chi^{''}\in\mathrm{Ker}(\gamma^*)} \int_{\chi^{'}\in(T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K))^*} \left(\mathcal{F}H(.,-(s_\alpha))\right)\left(\chi^{'}\,\chi^{''}\right)d\chi^{'}\\ &+ \sum_{\chi^{''}\notin\mathrm{Ker}(\gamma^*)} \frac{q^{\,(1-g)\ \dim(X_\Sigma)}}{\log(q)^r\, b_S(T)}\, I_{\chi^{''}}(s_\alpha),\end{aligned}$$

où, pour $\chi^{''} \notin \mathrm{Ker}\,(\gamma^*)$, $I_{\chi^{''}}(s_\alpha)$ est définie par l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_T} &\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathcal{L}_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle} q^{\,-d_\alpha\ s_\alpha}, \chi_\alpha^{''}\right)\right)\\ &\times f_{\chi^{''}}\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle} q^{\,-d_\alpha\ s_\alpha}\right), \left(\mathbf{z}^{\gamma_n} \prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} q^{\,-\delta_{\alpha,n}\ s_\alpha}\right)\right) d\mathbf{z}.\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi^{''}\in\mathrm{Ker}(\gamma^*)} \int_{\chi^{'}\in(T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K))^*} \left(\mathcal{F}H(.,-(s_\alpha))\right)\left(\chi^{'}\,\chi^{''}\right)d\chi^{'}\\ &= \int_{\chi^{'}\in(T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K))^*} \left(\sum_{\chi^{''}\in\mathrm{Ker}(\gamma^*)} \left(\mathcal{F}H(.,-(s_\alpha))\,\chi^{'}\right)\left(\chi^{''}\right)\right) d\chi^{'}\\ &= \int_{\chi^{'}\in(T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K))^*} \#\,A(T)\,\left(\int_{x\in\overline{T(K)}\cap T(\mathbf{A}_K)} H(x,-(s_\alpha))\,\chi^{'}(x)\,\omega_{T,S}\right) d\chi^{'}\\ &= \frac{q^{\,(1-g)\ \dim(X_\Sigma)}\,\#A(T)}{\log(q)^r\, b_S(T)}\, I_1(s_\alpha)\end{aligned}$$

où $I_1(s_\alpha)$ est la fonction donnée par l'intégrale

$$\int\limits_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_T} \left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right)\right) \times f\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right),\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\mathbf{z}^{k_{\alpha,n}d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}\,q^{-\delta_{\alpha,n}\, s_\alpha}\right)\right)d\mathbf{z}.$$

La deuxième égalité s'obtient par application de la formule de Poisson 5.3.4 avec $\mathcal{G}=T(\mathbf{A}_K)$, $\mathcal{H}=\overline{T(K)}\cap T(\mathbf{A}_K)$, $dh=dg=\omega_{T,S}$ et $F=H(.,-(s_\alpha))\,\chi^{'}$. Rappelons que par le lemme 5.2.13, $A(T)^*$ s'identifie à $\mathrm{Ker}\,(\gamma^*)$. On obtient finalement

Corollaire 5.4.9
Pour $(s_\alpha)\in\mathbf{C}^{\Sigma(1)_G}$ tel que $\Re(s_\alpha)>1$ on a la représentation intégrale suivante

$$\sum_{x\in T(K)} H\left(x,-(s_\alpha)\right)=\frac{q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)}}{\log(q)^r\, b_S(T)}\Big(\#A(T)\,I_1(s_\alpha)+\sum_{\chi''\notin\mathrm{Ker}(\gamma^*)} I_{\chi''}(s_\alpha)\Big)$$

où $I_1(s_\alpha)$ est la fonction donnée par l'intégrale

$$\int\limits_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_T} \left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right)\right) \times f\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right),\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\mathbf{z}^{k_{\alpha,n}d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}\,q^{-\delta_{\alpha,n}\, s_\alpha}\right)\right)d\mathbf{z}$$

et, pour $\chi^{''}\notin\mathrm{Ker}\,(\gamma^*)$, $I_{\chi''}(s_\alpha)$ est définie par l'intégrale

$$\int\limits_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_T}\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\mathcal{L}_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\, s_\alpha},\chi_\alpha^{''}\right)\right) \times f_{\chi''}\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right),\left(\mathbf{z}^{\gamma_n}\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G}q^{-\delta_{\alpha,n}\, s_\alpha}\right)\right)d\mathbf{z}.$$

La technique pour évaluer de telles intégrales est développée à la section suivante.

5.5 Evaluation de l'intégrale

Soit I un ensemble fini non vide. Si ε est un réel strictement positif et n un entier positif, une fonction de $\#I$ variables complexes sera appelée *fonction ε-admissible de multiplicité supérieure à $-n$* si elle est méromorphe sur le domaine

$$\{(s_i) \in \mathbf{C}^I, -\varepsilon < \Re(s_i) < \varepsilon\}.$$

et s'il existe une écriture

$$f(\mathbf{s}) = \frac{P(q^{-s_i})}{\prod_{j=1}^{n} \left(1 - q^{-l_j(s_i)}\right)}$$

où pour $j = 1, \dots, n$, l_j est une forme linéaire non nulle à coefficients entiers *positifs* et P une fonction holomorphe sur

$$\{(z_i) \in \mathbf{C}^I, q^{-\varepsilon} < |z_i| < q^{\varepsilon}\}$$

pour un $\varepsilon > 0$. Notons qu'une telle fonction f est holomorphe sur le domaine

$$\{(s_i) \in \mathbf{C}^I, 0 < \Re(s_i) < \varepsilon\}.$$

On appelera *fonction admissible de multiplicité supérieure à $-n$* une fonction holomorphe sur le domaine

$$\{(s_i) \in \mathbf{C}^I,\ \Re(s_i) > 0\},$$

et s'écrivant, pour un $\varepsilon > 0$, et pour tout $\mathbf{s}$ dans le domaine

$$\{(s_i) \in \mathbf{C}^I, 0 < \Re(s_i) < \varepsilon\},$$

comme somme finie de fonctions ε-admissibles de multiplicité supérieure à $-n$. Une telle fonction se prolonge donc en une fonction méromorphe sur le domaine

$$\{(s_i) \in \mathbf{C}^I,\ \Re(s_i) > -\varepsilon\}.$$

Une fonction admissible de multiplicité supérieure à $-n$ est dite *de multiplicité $-n$* si

$$\lim_{s \to 0} s^n f(s, \dots, s) \neq 0.$$

5.5.1 Fonction associée à un cône

Soit N un $\mathbf{Z}$-module de rang fini, $N^\vee$ son dual, Λ un cône polyédral rationnel d'intérieur non vide de $N_{\mathbf{R}} = N \otimes \mathbf{R}$, $\Lambda^\vee$ son dual. On ne suppose pas a priori que Λ est strictement convexe, i.e. qu'il ne contient pas de sous-espace linéaire de $N_{\mathbf{R}}$. Pour tout $\mathbf{s}$ de $N \otimes \mathbf{C}$ tel que $\Re(\mathbf{s})$ est dans l'intérieur de Λ on pose

$$L_{N,\Lambda}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}_\Lambda(q^{-s}) = \sum_{y \in \Lambda^\vee \cap N^\vee} q^{-\langle y, s\rangle}.$$

Soit dy la mesure de Lebesgue sur $N^\vee \otimes \mathbf{R}$, normalisée de sorte que le réseau $N^\vee$ soit de covolume 1. Au moyen d'une base, on identifie $N \otimes \mathbf{C}$ à $\mathbf{C}^{\mathrm{rg}(N)}$. De telles fonctions ont déjà été introduites à la section 3.5.2, où on rappelait la démonstration du résultat suivant.

Lemme 5.5.1
$L_{N,\Lambda}(\mathbf{s})$ est une fraction rationnelle en les $(q^{-s_i})_{i=1,\ldots,\mathrm{rg}(N)}$. Si Λ est strictement convexe et n_0 est un élément de l'intérieur de Λ, $L_{N,\Lambda}(s.n_0)$ a un pôle d'ordre $\mathrm{rg}(N)$ en $s = 0$ de terme principal

$$\log(q)^{-\mathrm{rg}(N)} \int_{y \in \Lambda^\vee} e^{-\langle y, m_0\rangle}\, dy.$$

Rappelons que l'on a en particulier

$$\alpha^*(X_\Sigma) = \log(q)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))} \lim_{s \to 0} \left[s^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))} L_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma), C_{\mathrm{eff}}(X_\Sigma)} \left(s\,[-\mathcal{K}_{X_\Sigma}]\right)\right]. \tag{5.5.1.1}$$

Remarquons en outre que si N est libre et $N^{'} \subset N$ est un sous réseau d'indice fini de N on a

$$\lim_{s \to 0} \left(s^{\mathrm{rg}(n)} L_{N^{'},\Lambda}(s)\right) = [N : N'] \lim_{s \to 0} \left(s^{\mathrm{rg}(N)} L_{N,\Lambda}(s)\right). \tag{5.5.1.2}$$

Rappelons encore une fois brièvement la démonstration du lemme ci-dessus, (ré)-introduisant ainsi des notations utilisées par la suite. On écrit $\Lambda^\vee$ comme le support d'un éventail régulier Δ, dont l'ensemble des rayons est noté $\Delta(1)$. Pour $l \in \Delta(1)$ nous notons m_l le générateur du rayon l. Pour tout cône δ de Δ nous notons également

$$I_\delta = \{l \in \Delta(1),\, l \in \delta\}$$

l'ensemble de ses rayons (ainsi $I_{\{0\}} = \emptyset$). Pour toute partie I de $\Delta(1)$ nous noterons

$$C(I) = \sum_{i \in I} \mathbf{N}_{>0}\, m_i$$

de sorte que $C(I_\delta)$ est l'ensemble des points du réseau $N^\vee$ contenu dans l'intérieur relatif du cône δ.

On a alors

$$L_{N,\Lambda}(\mathbf{s}) = \sum_{\delta\in\Delta} \prod_{l\in I_\delta} \left(\frac{1}{1-q^{-\langle m_l,\mathbf{s}\rangle}} - 1\right). \qquad (5.5.1.3)$$

Notons que le cardinal maximal des ensembles I_δ est la dimension de $\Lambda^\vee$, qui est égale au rang de N si et seulement si Λ est strictement convexe.

5.5.2 Une généralisation

Nous conservons les notations de la section précédente. Soit I un ensemble fini non vide et pour $i \in I$, soit n_i un élément de Λ, tel que $\sum\limits_i n_i$ est un élément de l'intérieur de Λ. Pour $(\nu_i) \in \mathbf{N}^I$, nous voulons étudier la série

$$Z_{(\nu_i)}(T_i) = \sum_{\substack{y\in\Lambda^\vee\cap N^\vee\\ \forall\, i\in I,\ \langle y,n_i\rangle\geqslant\nu_i}} \prod_{i\in I} T_i^{\langle y,n_i\rangle}$$

où les T_i sont des indéterminées. Nous utilisons la même technique que dans le chapitre 3 : nous écrivons

$$Z_{(\nu_i)}(T_i) = \sum_{\delta\in\Delta} Z_{\delta,(\nu_i)}(T_i)$$

avec

$$Z_{\delta,(\nu_i)}(T_i) = \sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\, i\in I,\ \langle y,n_i\rangle\geqslant\nu_i}} \prod_{i\in I} T_i^{\langle y,n_i\rangle}.$$

Pour $\delta \in \Delta$, nous décomposons encore

$$Z_{\delta,(\nu_i)}(T_i) = \sum_{K\subset I} (-1)^{\# K}\, Z_{\delta,K,(\nu_i)}(T_i)$$

avec

$$Z_{\delta,K,(\nu_i)}(T_i) = \sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\, i\in K,\ \langle y,n_i\rangle<\nu_i}} \prod_{i\in I} T_i^{\langle y,n_i\rangle}.$$

On a alors

Lemme 5.5.2
Soient δ un cône de Δ, et K une partie (éventuellement vide) de I. Alors il existe un sous-ensemble $I_{\delta,K}$ (éventuellement vide) de I_δ tel que la série $Z_{\delta,K,(\nu_i)}(T_i)$ se décompose en un produit

$$\prod_{l\in I_{\delta,K}}\left[\left(1-\prod_{i\in I}T_i^{\langle m_l,n_i\rangle}\right)^{-1}-1\right]\times P_{\delta,K,(\nu_i)}(T_i)$$

où $P_{\delta,K,(\nu_i)}$ est un polynôme à coefficients positifs. Pour tout $\eta>0$, il existe en outre un $\varepsilon'>0$, ne dépendant que de Δ et des (n_i), tel que pour tout $(\#I)$-uplet de réels $(\theta_i)\in\mathbf{R}^I_{>-\varepsilon'}$ on a la majoration

$$P_{\delta,K,(\nu_i)}\left(q^{-\theta_i}\right)\leqslant\operatorname*{Sup}_{i\in I}\,(\nu_i)^{\#I}\,q^{\eta\sum\limits_{i\in I}\nu_i}\tag{5.5.2.1}$$

Par ailleurs si K est vide, on a $I_{\delta,K}=I_\delta$ et $P_{\delta,K,(\nu_i)}=1$.

Enfin si δ est de dimension le rang de N, et si K est non vide, $I_{\delta,K}$ est un sous-ensemble strict de I_δ.

Démonstration : Cette démonstration est très similaire à la preuve du lemme 3.5.3. Si K est vide, $Z_{\delta,K,(\nu_i)}(T_i)$ s'évalue immédiatement en

$$\prod_{l\in I_\delta}\left[\left(1-\prod_{i\in I}T_i^{-\langle m_l,n_i\rangle}\right)^{-1}-1\right]$$

d'où l'avant-dernière assertion du lemme. Le fait que $\sum\limits_i n_i$ est dans l'intérieur de Λ assure que pour tout $l\in I_\delta$, on a $\langle m_l,\sum\limits_i n_i\rangle>0$ et donc l'un au moins des $\langle m_l,n_i\rangle$ est non nul.

Si K n'est pas vide, nous posons

$$I_{K,1}=\{\,l\in I_\delta,\ \forall\,i\in K,\quad\langle m_l,n_i\rangle=0\}$$

et $I_{K,2}=I_\delta\setminus I_{K,1}$. Soit alors $y\in C(I_\delta)$ vérifiant

$$\forall\,i\in K,\quad\langle y,n_i\rangle<\nu_i.$$

Un tel y s'écrit donc de manière unique y_1+y_2 avec $y_1\in C(I_{K,1})$ et $y_2\in C(I_{K,2})$. Pour tout $i\in K$ on a $\langle y,n_i\rangle=\langle y_2,n_i\rangle$ et donc y_2 vérifie

$$\forall\,i\in K,\quad\langle y_2,n_i\rangle<\nu_i.$$

Réciproquement tout y s'écrivant $y_1 + y_2$ avec $y_1 \in C(I_{K,1})$, $y_2 \in C(I_{K,2})$, et y_2 vérifiant

$$\forall\, i \in K, \quad \langle y_2, n_i \rangle < \nu_i,$$

est un élément de $C(I_\delta)$ vérifiant

$$\forall\, i \in K, \quad \langle y, n_i \rangle < \nu_i.$$

Notons

$$C(I_{K,2})_{(\nu_i)} = \{ y_2 \in C(I_{K,2}),\ \forall\, i \in I,\ \langle y, n_i \rangle < \nu_i \}.$$

La série $Z_{\delta,K,(\nu_i)}(T_i)$ se décompose alors en un produit

$$P_{\delta,K,(\nu_i)}(T_i) \times \sum_{y_1 \in C(I_{K,1})} \prod_i T_i^{\langle y_1, n_i \rangle}$$

où on désigne par $P_{\delta,K,(\nu_i)}(T_i)$ l'expression

$$\sum_{y_2 \in C(I_{K,2})_{(\nu_i)}} \prod_{i \in I} T_i^{\langle y_2, n_i \rangle}.$$

Le deuxième facteur est égal à

$$\prod_{l \in I_{K,1}} \left[\left(1 - \prod_{i \in I} T_i^{-\langle m_l, n_i \rangle} \right)^{-1} - 1 \right].$$

Encore une fois le fait que $\sum\limits_i n_i$ est dans l'intérieur de Λ assure que pour tout $l \in I_{K,1}$, l'un au moins des $\langle m_l, n_i \rangle$ est non nul.

Passons au facteur $P_{\delta,K,(\nu_i)}(T_i)$. Soit y_2 un élément de $C(I_{K,2})_{(\nu_i)}$, qu'on écrit

$$y_2 = \sum_{l \in I_{K,2}} \mu_l\, m_l$$

avec les μ_l dans $\mathbf{N}_{>0}$.

Par définition de $I_{K,2}$, pour tout l de $I_{K,2}$, il existe i dans K vérifiant $\langle m_l, n_i \rangle \geqslant 1$ (rappelons que pour tout i on a $\langle m_l, n_i \rangle \geqslant 0$). Comme y_2 vérifie

$$\forall i \in K, \quad \langle y_2, n_i \rangle < \nu_i$$

on a

$$\mu_l < \operatorname*{Sup}_{i \in K} \nu_i.$$

Ainsi $C(I_{K,2})_{(\nu_i)}$ est fini (et $P_{\delta,K,(\nu_i)}(T_i)$ est un polynôme en T_i), en fait son cardinal est majoré par

$$\left(\operatorname*{Sup}_{i\in K} \nu_i\right)^{\# I_{K,2}}$$

Par ailleurs un y_2 de $C(I_{K,2})_{(\nu_i)}$ vérifie

$$0 \leqslant \langle y_2, n_i\rangle \leqslant m \operatorname*{Sup}_{i\in K} \nu_i \leqslant m \sum_{i\in I} \nu_i$$

où on a posé

$$m = \# I \operatorname*{Sup}_{l\in\Delta(1)} \left(\langle m_l, \sum_i n_i\rangle\right).$$

On a donc pour tout $(\# I)$-uplet de réels $(\theta_i) \in R^I_{>-\varepsilon'}$

$$\begin{aligned}
P_{\delta,K,(\nu_i)}\left(q^{-\theta_i}\right) &= \sum_{y_2\in C(I_{K,2})_{(\nu_i)}} \prod_i q^{-\theta_i \langle y_2, n_i\rangle} \\
&\leqslant \operatorname*{Sup}_{i\in K}(\nu_i)^{\# I} \prod_i q^{\varepsilon' m \sum_{i\in I}\nu_i} \\
&\leqslant \operatorname*{Sup}_{i\in K}(\nu_i)^{\# I} q^{\varepsilon' m \# I \sum_{i\in I}\nu_i} \\
&\leqslant \operatorname*{Sup}_{i\in I}(\nu_i)^{\# I} q^{\varepsilon' m \# I \sum_{i\in I}\nu_i}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir $\varepsilon' < \frac{\eta}{m\,\# I}$ pour avoir la majoration annoncée.

Notons enfin que si δ est un cône de dimension maximale, les $(m_l)_{l\in I_\delta}$ forment une $\mathbf{Z}$-base de $N^\vee$, et donc si K n'est pas vide, $I_{K,2}$ ne peut être vide. Ceci montre la dernière assertion du lemme. □

5.5.3 Applications

Soit I un ensemble fini non vide. On note (e_i) la base canonique de $\mathbf{Z}^I$, $(e_i)^\vee$ sa base duale et pour $i \in I$, p_i la projection sur $\mathbf{Z}\, e_i$. Soit Γ un sous-module de rang r de $\mathbf{Z}^I$. On note $\Gamma_{\mathbf{R}} = \Gamma \otimes \mathbf{R}$, $\Gamma_{\mathbf{C}} = \Gamma \otimes \mathbf{C}$ et

$$\psi_\Gamma : \mathbf{C}^I \to \mathbf{C}^I/\Gamma_{\mathbf{C}}$$

l'application quotient. Nous noterons $\Lambda(\Gamma)$ le cône $\psi_\Gamma\left(\mathbf{R}^I_{\geqslant 0}\right)$.

Nous noterons $\mathbf{S}_{\Gamma^\vee}$ le groupe topologique $\operatorname{Hom}(\Gamma^\vee, \mathbf{S}^1)$, qui est isomorphe à $(\mathbf{S}^1)^r$. Si $\gamma^\vee$ est un élément de $\Gamma^\vee$ et $\mathbf{z}$ un élément de $\mathbf{S}_{\Gamma^\vee}$, nous noterons

$\mathbf{z}^{\gamma^\vee}$ l'élément $\mathbf{z}\,(\gamma^\vee) \in \mathbf{S}^1$. Nous munissons $\mathbf{S}_{\Gamma^\vee}$ de la mesure de Haar $d\mathbf{z}$ telle que $\int_{\mathbf{S}_{\Gamma^\vee}} d\mathbf{z} = 1$. On a

$$\int\limits_{\mathbf{z}\,\in\,\mathbf{S}_{\Gamma^\vee}} \mathbf{z}^{\gamma^\vee} d\mathbf{z} = 0$$

si $\gamma^\vee \neq 0$.

Pour $i \in I$, on notera $\gamma_i^\vee$ l'image de $e_i^\vee$ dans $\Gamma^\vee$. L'élément $\mathbf{z}^{\gamma_i^\vee}$ sera aussi noté $\mathbf{z}_i$.

Le dual de $\mathbf{Z}^I/\Gamma$ s'identifie alors à

$$\left\{ y \in \left(\mathbf{Z}^I\right)^\vee,\ \forall\,\gamma \in \Gamma, \quad \langle y, \gamma\rangle = 0 \right\}.$$

L'ensemble $\Lambda(\Gamma)^\vee \cap \left(\mathbf{Z}^I/\Gamma\right)^\vee$, égal par définition à

$$\left\{ y \in \left(\mathbf{Z}^I/\Gamma\right)^\vee,\ \forall\,m \in \Lambda(\Gamma), \quad \langle y, m\rangle \geqslant 0 \right\},$$

s'identifie donc à

$$\left\{ y \in \left(\mathbf{Z}^I\right)^\vee,\ \forall\,\gamma \in \Gamma, \quad \langle y, \gamma\rangle = 0, \quad \forall\, i \in I, \quad \langle y, e_i\rangle \geqslant 0 \right\}$$

soit encore à

$$\left\{ (n_i) \in \mathbf{N}^I, \quad \sum_{i \in I} n_i\, \gamma_i^\vee = 0 \right\}.$$

Si $\mathbf{s}$ est un élément de $\mathbf{C}^I$ et $y = (n_i)$ un élément de $\Lambda(\Gamma)^\vee \cap \left(\mathbf{Z}^I/\Gamma\right)^\vee$, on a

$$\langle y, \psi_\Gamma(\mathbf{s})\rangle = \sum_{i \in I} n_i\, s_i.$$

Nous aurons en particulier à considérer la situation où

$$\Gamma \cap \mathbf{Z}^I_{\geqslant 0} = \{0\}.$$

Cette hypothèse équivaut au fait que $\Lambda(\Gamma)$ est strictement convexe, ou encore que $\Lambda(\Gamma)^\vee$ est d'intérieur non vide. Elle est encore équivalente à l'existence d'un $(\#I)$-uplet d'entiers strictement positifs (n_i) vérifiant

$$\sum_i n_i\, \gamma_i^\vee = 0. \tag{5.5.3.1}$$

Notons qu'alors, par la formule (5.5.1.3), la fonction

$$L_{\mathbf{Z}^I/\Gamma, \Lambda(\Gamma)}(\psi_\Gamma(\mathbf{s}))$$

est une fonction admissible de multiplicité $-\operatorname{rg}\left(\mathbf{Z}^{I}/\Gamma\right) = r - \# I$.

Les lemmes 5.5.3 et 5.5.4 ne serviront pas par la suite, ils sont donnés car leur preuve permet de mieux appréhender la démonstration des lemmes 5.5.5 et 5.5.6, légèrement plus techniques.

Lemme 5.5.3
On a

$$\int_{\mathbf{z}\in \mathbf{S}_{\Gamma^\vee}} \prod_{i\in I} \frac{1}{1-\mathbf{z}_i\, q^{-s_i}} d\mathbf{z} = L_{\mathbf{Z}^I/\Gamma,\Lambda(\Gamma)}(\psi_\Gamma(\mathbf{s})).$$

Démonstration : Il suffit d'écrire

$$\prod_{i\in I} \frac{1}{1-\mathbf{z}_i\, q^{-s_i}} = \sum_{(n_i)\in \mathbf{N}^I} \mathbf{z}^{\sum\limits_i n_i\,\gamma_i^\vee}\, q^{-\sum\limits_i n_i\, s_i}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{z}\,\in\, \mathbf{S}_{\Gamma^\vee}} \prod_{i\in I} \frac{1}{1-\mathbf{z}_i\, q^{-s_i}} d\mathbf{z} &= \sum_{n_i\in \mathbf{N}^I} q^{-\sum\limits_i n_i\, s_i} \int_{\mathbf{z}\,\in\, \mathbf{S}_{\Gamma^\vee}} \mathbf{z}^{\sum\limits_i n_i\,\gamma_i^\vee} d\mathbf{z} \\
&= \sum_{\substack{(n_i)\in \mathbf{N}^I \\ \sum\limits_i n_i\,\gamma_i^\vee = 0}} q^{-\sum\limits_i n_i\, s_i} \\
&= \sum_{y\in \Lambda(\Gamma)^\vee\cap (\mathbf{Z}^I/\Gamma)^\vee} q^{\langle y, \psi_\Gamma(\mathbf{s})\rangle} \\
&= L_{\mathbf{Z}^I/\Gamma,\Lambda(\Gamma)}(\psi_\Gamma(\mathbf{s}))
\end{aligned}$$

d'où le lemme. □

Afin de calculer le terme principal de la fonction zêta des hauteurs, nous voulons généraliser ce résultat ainsi : soit P une fonction de $\# I$ variables complexes, holomorphe sur le domaine

$$\{(z_i) \in \mathbf{C}^I, |z_i| < q^\varepsilon\}$$

pour un $\varepsilon > 0$. L'intégrale

$$\int_{\mathbf{z}\,\in\, \mathbf{S}_{\Gamma^\vee}} \frac{P\left(\mathbf{z}_i\, q^{-s_i}\right)_{i\in I}}{\prod\limits_{i\in I}\left(1-\mathbf{z}_i\, q^{-s_i}\right)} d\mathbf{z}$$

définit de toute évidence une fonction holomorphe sur le domaine

$$\{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^I,\ \Re(s_i) > 0\},$$

notée $f_1(\mathbf{s})$.

Lemme 5.5.4
On fait l'hypothèse que $\Gamma \cap \mathbf{Z}^I_{\geqslant 0} = \{0\}$. *On a alors une écriture*

$$f_1(\mathbf{s}) = P(1,\ldots,1)\, L_{Z^I/\Gamma,\Lambda(\Gamma)}(\psi_\Gamma(\mathbf{s})) + g_1(\mathbf{s})$$

où $g_1(\mathbf{s})$ *est une fonction admissible de multiplicité supérieure à* $r+1-\#I$.

Démonstration : Soit

$$P(z_i) = \sum_{\nu_i \geqslant 0} a_{(\nu_i)} \prod_i z_i^{\nu_i}$$

le développement en série entière de P en zéro, valable pour $|z_i| < q^{\varepsilon}$. On a ainsi pour tout $\mathbf{s}$ vérifiant $\Re(\mathbf{s}) > 0$,

$$P\left(\mathbf{z}_i\, q^{-s_i}\right) = \sum_{\nu_i \geqslant 0} a_{(\nu_i)}\, q^{-\sum\limits_i \nu_i\, s_i}\, \mathbf{z}^{\sum\limits_i \nu_i \gamma_i^\vee}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbf{z}\,\in\,\mathbf{S}_{\Gamma^\vee}} \frac{P\left(\mathbf{z}_i\, q^{-s_i}\right)}{\prod\limits_{i\in I}\left(1-\mathbf{z}_i\, q^{-s_i}\right)} d\mathbf{z} &= \sum_{\nu_i\geqslant 0} a_{(\nu_i)}\, q^{-\sum\limits_i \nu_i\, s_i} \sum_{\mu_i \geqslant 0} q^{-\sum\limits_i \mu_i\, s_i} \int\limits_{\mathbf{z}\,\in\,\mathbf{S}_{\Gamma^\vee}} \mathbf{z}^{\sum\limits_i (\nu_i+\mu_i)\,\gamma_i^\vee} d\mathbf{z} \\
&= \sum_{\nu_i\geqslant 0} a_{(\nu_i)}\, q^{-\sum\limits_i \nu_i\, s_i} \sum_{\substack{\mu_i \geqslant 0 \\ \sum\limits_i (\mu_i+\nu_i)\,\gamma_i^\vee = 0}} q^{-\sum\limits_i \mu_i\, s_i} \\
&= \sum_{\nu_i\geqslant 0} a_{(\nu_i)} \sum_{\substack{\mu_i \geqslant \nu_i \\ \sum\limits_i \mu_i\,\gamma_i^\vee = 0}} q^{-\sum\limits_i \mu_i\, s_i} \\
&= \sum_{\nu_i\geqslant 0} a_{(\nu_i)} \sum_{\substack{y \in \left(\mathbf{Z}^I/\Gamma\right)^\vee \cap \Lambda(\Gamma)^\vee \\ \langle y, \psi_\Gamma(e_i)\rangle \geqslant \nu_i}} q^{-\sum\limits_i s_i\, \langle y, \psi_\Gamma(e_i)\rangle}.
\end{aligned}$$

On applique alors les résultat de la section 5.5.2, avec $N = \mathbf{Z}/\Gamma$, $C = \Lambda(\Gamma)$, $n_i = \psi_\Gamma(e_i)$ et $T_i = q^{-s_i}$. On obtient, avec les notations de la section 5.5.2,

$$\begin{aligned}
&f_1(\mathbf{s}) \\
&= \sum_{\delta\in\Delta} \sum_{K\subset I} (-1)^{\#K} \prod_{l\in I_{\delta,K}} \left(\frac{1}{1 - q^{-\sum\limits_{i\in I} \langle m_l, \psi_\Gamma(s_i)\rangle}} - 1 \right) \sum_{\nu_i\geqslant 0} a_{(\nu_i)} P_{\delta,K,(\nu_i)}(q^{-s_i}).
\end{aligned}$$

Notons que la majoration (5.5.2.1) assure que pour un $\varepsilon' > 0$ assez petit, la série

$$\sum_{\nu_i \geqslant 0} a_{(\nu_i)} P_{\delta,K,(\nu_i)}(q^{-s_i})$$

converge absolument pour tout (s_i) vérifiant $\Re(s_i) > -\varepsilon'$ et définit une fonction holomorphe sur ce domaine.

Comme par hypothèse $\Lambda(\Gamma)^\vee$ est d'intérieur non vide, par le lemme 5.5.2 la contribution des termes correspondant à $K = \emptyset$ est

$$\left(\sum_{\nu_i \geqslant 0} a_{(\nu_i)}\right) \times \left(\sum_{\delta \in \Delta} \prod_{l \in I_\delta} \left(\frac{1}{1 - q^{-\sum\limits_{i \in I} \langle m_l, \psi_\Gamma(s_i)\rangle}} - 1\right)\right)$$
$$= P(1, \dots, 1) \times L_{\mathbf{Z}^I/\Gamma, \Lambda(\Gamma)}(\psi_\Gamma(\mathbf{s}))$$

et les autres termes forment, pour un certain $\varepsilon' > 0$, une somme de fonctions ε'-admissibles de multiplicité supérieure à $r + 1 - \# I$, donc une fonction admissible de multiplicité supérieure à $r + 1 - \# I$. □

Généralisons encore un peu : soit $m \geqslant 1$ un entier et P une fonction de $\# I\,(m+1)$ variables complexe, holomorphe sur

$$\{(z_{i,n}) \in \left(\mathbf{C}^I\right)^{m+1}, |z_{i,n}| < q^\varepsilon\}$$

pour un $\varepsilon > 0$. Pour $1 \leqslant n \leqslant m$ et $i \in I$ soit $k_{i,n} \geqslant 0$ et $\delta_{i,n} \geqslant 0$ des entiers. On posera $k_{i,0} = \delta_{i,0} = 1$. L'intégrale

$$\int\limits_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\Gamma^\vee}} \frac{P\left(\mathbf{z}_i^{k_{i,n}}\, q^{-\delta_{i,n}\, s_i}\right)_{i \in I,\ 0 \leqslant n \leqslant m}}{\prod\limits_{i \in I} (1 - \mathbf{z}_i\, q^{-s_i})}\, d\mathbf{z}$$

définit de toute évidence une fonction holomorphe sur

$$\{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^I, \Re(s_i) > 0\},$$

notée $f_2(\mathbf{s})$.

Lemme 5.5.5
Il existe un $\varepsilon' > 0$ tel qu'on a une écriture

$$f_2(\mathbf{s}) = h_2(\mathbf{s})\, L_{\mathbf{Z}^I/\Gamma, \Lambda(\Gamma)}(\psi_\Gamma(\mathbf{s})) + g_2(\mathbf{s})$$

où $g_2(\mathbf{s})$ est une somme de fonctions ε'-admissibles de multiplicité supérieure à $r + 1 - \# I$, et $h_2(\mathbf{s})$ est ε'-admissible de multiplicité supérieure à zéro et vérifie $h_2(0, \dots, 0) = P(1, \dots, 1)$. En particulier si $P(1, \dots, 1) \neq 0$, $f_2(\mathbf{s})$ est une fonction admissible de multiplicité $r - \# I$, et

$$\lim_{s \to 0} s^{\# I - r} f(s \dots, s) = P(1, \dots, 1) \lim_{s \to 0} s^{\# I - r} L_{\mathbf{Z}^I/\Gamma, \Lambda(\Gamma)}(\psi_\Gamma(s, \dots, s)).$$

Démonstration : Soit

$$P(z_{i,n}) = \sum_{(\nu_{i,n})\,\in\,\mathbf{N}^{(m+1)\#I}} a_{(\nu_{i,n})} \prod_{\substack{i\in I\\ 0\leqslant n\leqslant m}} z_{i,n}^{\nu_{i,n}}$$

le développement en série entière de P en zéro, valable pour $|z_{i,n}| < q^{\varepsilon}$. On a ainsi pour tout $\mathbf{s}$ vérifiant $\Re(s_i) > 0$,

$$P\left(\mathbf{z}_i^{k_{i,n}}\, q^{-\delta_{i,n}\, s_i}\right) = \sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}\, q^{-\sum\limits_i \nu_{i,0}\, s_i - \sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m}\sum\limits_i \nu_{i,n}\,\delta_{i,n}\, s_i}\, \mathbf{z}^{\sum\limits_i \sum\limits_{0\leqslant n\leqslant m} k_{i,n}\,\nu_{i,n}\gamma_i^{\vee}}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbf{z}\,\in\,\mathbf{S}_{\Gamma^{\vee}}} \frac{P\left(\mathbf{z}_i^{k_{i,n}}\, q^{-\delta_{i,n}\, s_i}\right)}{\prod\limits_{i\in I}(1-\mathbf{z}_i\, q^{-s_i})} d\mathbf{z}\\
&\qquad = \sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}\, q^{-\sum\limits_i \nu_{i,0}\, s_i - \sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m}\sum\limits_i \delta_{i,n}\,\nu_{i,n}\, s_i}\\
&\qquad\qquad \times \sum_{\mu_i\geqslant 0} q^{-\sum\limits_i \mu_i\, s_i} \int\limits_{\mathbf{z}\,\in\,\mathbf{S}_{\Gamma^{\vee}}} \mathbf{z}^{\sum\limits_i(\mu_i + \sum\limits_{0\leqslant n\leqslant m} k_{i,n}\,\nu_{i,n})\gamma_i^{\vee}} d\mathbf{z}
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est égale à

$$\sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}\, q^{-\sum\limits_i \nu_{i,0}\, s_i - \sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m}\sum\limits_i \delta_{i,n}\,\nu_{i,n}\, s_i} \sum_{\substack{\mu_i\geqslant 0\\ \sum\limits_i(\mu_i + \sum\limits_{0\leqslant n\leqslant m} k_{i,n}\,\nu_{i,n})\gamma_i^{\vee}=0}} q^{-\sum\limits_i \mu_i\, s_i}$$

elle même égale à

$$\sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}\, q^{\sum\limits_i\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m} \nu_{i,n}\,(k_{i,n}-\delta_{i,n}) s_i} \sum_{\substack{\mu_i\geqslant \sum\limits_{0\leqslant n\leqslant m} k_{i,n}\,\nu_{i,n}\\ \sum\limits_i \mu_i\,\gamma_i^{\vee}=0}} q^{-\sum\limits_i \mu_i\, s_i}$$

$$= \sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}\, q^{\sum\limits_i\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m} \nu_{i,n}\,(k_{i,n}-\delta_{i,n}) s_i} \sum_{\substack{y\in\left(\mathbf{Z}^{I}/\Gamma\right)^{\vee}\cap\Lambda(\Gamma)^{\vee}\\ \langle y,\psi_{\Gamma}(e_i)\rangle\geqslant \sum\limits_{0\leqslant n\leqslant m} k_{i,n}\,\nu_{i,n}}} q^{-\sum\limits_i s_i\,\langle y,\psi_{\Gamma}(e_i)\rangle}.$$

En appliquant le lemme 5.5.2, on obtient

$$f_2(\mathbf{s}) = \sum_{\delta\in\Delta}\sum_{K\subset I}(-1)^{\#K}\prod_{l\in I_{\delta,K}}\left(\frac{1}{1-q^{-\sum\limits_{i\in I}\langle m_l,s_i\rangle}}-1\right)$$
$$\times \sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}P_{\delta,K,(\sum\limits_n k_{i,n}\,\nu_{i,n})}(q^{-s_i})$$
$$\times\; q^{\sum\limits_i\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m}\nu_{i,n}\,(k_{i,n}-\delta_{i,n})s_i}.$$

Choisissons $\varepsilon'>0$ tel que :
- la majoration (5.5.2.1) soit vérifiée avec $\eta>0$ vérifiant

$$\eta\ \mathrm{Sup}(k_{i,n})\leqslant\frac{1}{2}$$

- pour (s_i) vérifiant $-\varepsilon'<\Re(s_i)<\varepsilon'$, on a pour tout $n=1,\ldots,m$

$$(k_{i,n}-\delta_{i,n})\,\Re(s_i)\leqslant\frac{1}{2}.$$

Alors, par la majoration (5.5.2.1), la série

$$\sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}P_{\delta,K,(\sum\limits_n k_{i,n}\,\nu_{i,n})}(q^{-s_i})\times\; q^{\sum\limits_i\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m}\nu_{i,n}\,(k_{i,n}-\delta_{i,n})s_i}$$

définit une fonction holomorphe sur le domaine

$$-\varepsilon'<\Re(s_i)<\varepsilon',\quad i\in I,$$

d'où le résultat. Le fait de devoir se limiter à une bande verticale pour la convergence vient de ce que certains entiers $k_{i,n}-\delta_{i,n}$ peuvent être strictement positifs.

La contribution des termes correspondant à $K=\emptyset$ est

$$\left(\sum_{\delta\in\Delta}\prod_{l\in I_\delta}\left(\frac{1}{1-q^{-\sum\langle m_l,\psi_\Gamma(s_i)\rangle}}-1\right)\right)$$
$$\times\left(\sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}q^{\sum\limits_i\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m}\nu_{i,n}\,(k_{i,n}-\delta_{i,n})s_i}\right)$$
$$= h_2(\mathbf{s})\times L_{\mathbf{Z}^I/\Gamma,\Lambda(\Gamma)}(\psi_\Gamma(\mathbf{s}))$$

où $h_2(\mathbf{s})$ est une fonction holomorphe sur $-\varepsilon' < \Re(s_i) < \varepsilon'$ pour un certain $\varepsilon' > 0$, et telle que $h_2(0,\dots,0) = P(1,\dots,1)$. $\square$

Considérons à présent la situation suivante. Pour tout $i \in I$ soit d_i un entier strictement positif. Soit

$$\phi_{(d_i)} \,:\, \mathbf{Z}^I \longrightarrow \mathbf{Z}^I$$

le morphisme qui envoie $(m_i)_{i\in I}$ sur $(d_i\, m_i)_{i\in I}$.

Soient $i_0 \in I$ et $\widetilde{I} = I \setminus \{i_0\}$. Soit $\tilde{p}$ la projection $\mathbf{Z}^I \to \mathbf{Z}^{\widetilde{I}}$.

Soient $\overline{\Gamma} = \phi_{(d_i)}(\Gamma)$ et $\widetilde{\Gamma} = \tilde{p}\,(\overline{\Gamma})$. L'ensemble $\Lambda(\overline{\Gamma})^\vee \cap \left(\mathbf{Z}^I/\overline{\Gamma}\right)^\vee$ s'identifie donc à

$$\left\{ y \in \left(\mathbf{Z}^I\right)^\vee,\ \forall\, \gamma \in \Gamma, \quad \langle y, \phi_{(d_i)}(\gamma)\rangle = 0, \quad \forall\, i \in I, \quad \langle y, e_i\rangle \geqslant 0 \right\}$$

soit encore à

$$\left\{ (n_i) \in \mathbf{N}^I, \quad \sum_{i\in I} n_i\, d_i\, \gamma_i^\vee = 0 \right\}.$$

De même, $\Lambda(\widetilde{\Gamma})^\vee \cap \left(\mathbf{Z}^{\widetilde{I}}/\widetilde{\Gamma}\right)^\vee$ s'identifie à

$$\left\{ (n_i) \in \mathbf{N}^{\widetilde{I}}, \quad \sum_{i\in \widetilde{I}} n_i\, d_i\, \gamma_i^\vee = 0 \right\}.$$

Si on suppose que Γ vérifie

$$\Gamma \cap \mathbf{Z}^I_{\geqslant 0} = \{0\},$$

il en est de même pour $\overline{\Gamma}$. Soit $(\gamma^j)_{1\leqslant j\leqslant r}$ une base de Γ. Alors les $\widetilde{\gamma}^j = \tilde{p}\left(\phi_{(d_i)}(\gamma^j)\right)$ sont linéairement indépendants, en particulier $\widetilde{\Gamma}$ est de rang r. En effet si on avait une relation $\sum\limits_j k_j\, \widetilde{\gamma}^j = 0$, le vecteur $\sum\limits_j k_j\, \phi_{(d_i)}(\gamma^j)$ serait un multiple non nul de e_{i_0} d'où une contradiction avec le fait que $\overline{\Gamma} \cap \mathbf{Z}^I_{\geqslant 0} = \{0\}$,

Soit $m \geqslant 1$ un entier et P une fonction de $\#I\,(m+1)$ variables complexes, holomorphe sur le domaine

$$\{(z_{i,n}) \in \left(\mathbf{C}^I\right)^{m+1}, |z_{i,n}| < q^{\varepsilon}\}$$

pour un $\varepsilon > 0$. Pour $1 \leqslant n \leqslant m$ et $i \in I$ soit $k_{i,n} \geqslant 0$ et $\delta_{i,n} \geqslant 0$ des entiers. Pour $i \in I$ soit d_i un entier. On posera $k_{i,0} = \delta_{i,0} = d_i$. L'intégrale

$$\int\limits_{\mathbf{z}\,\in\,\mathbf{S}_{\Gamma^\vee}} \frac{P\left(\mathbf{z}_i^{k_{i,n}}\, q^{-\delta_{i,n}\, s_i}\right)}{\prod\limits_{i\in\widetilde{I}} \left(1 - \mathbf{z}_i^{d_i}\, q^{-d_i\, s_i}\right)}\, d\mathbf{z}$$

définit de toute évidence une fonction holomorphe sur

$$\{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^I, \forall\, i \in I, \Re(s_i) > 0\},$$

notée $f_3(\mathbf{s})$.

Lemme 5.5.6
On suppose que Γ vérifie $\Gamma \cap \mathbf{Z}^I_{\geqslant 0} = \{0\}$. Alors la fonction $f_3(\mathbf{s})$ est une fonction admissible de multiplicité supérieure à $r + 1 - \# I$.

Démonstration : Soit

$$P(z_{i,n}) = \sum_{\nu_{i,n} \geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})} \prod z_{i,n}^{\nu_{i,n}}$$

le développement en série entière de P en zéro, valable pour $|z_{i,n}| < q^{\varepsilon}$. On a ainsi pour tout $\mathbf{s}$ vérifiant $\Re(s_i) > 0$,

$$P\Big(\mathbf{z}_i^{k_{i,n}} q^{-\delta_{i,n}\, s_i}\Big) = \sum_{\nu_{i,n} \geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}\, q^{-\sum\limits_{i \in I} \nu_{i,0}\, d_i\, s_i - \sum\limits_{i \in I} (\sum\limits_{1 \leqslant n \leqslant m} \nu_{i,n}\, \delta_{i,n}) s_i}\, \mathbf{z}^{\sum\limits_{i \in I} (\sum\limits_{0 \leqslant n \leqslant m} k_{i,n}\, \nu_{i,n}) \gamma_i^{\vee}}.$$

L'intégrale

$$\int\limits_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\Gamma^{\vee}}} \frac{P\left(\mathbf{z}_i^{k_{i,n}}\, q^{-\delta_{i,n}\, s_i}\right)}{\prod\limits_{i \in \widetilde{I}} 1 - \mathbf{z}_i^{d_i}\, q^{-d_i\, s_i}} d\mathbf{z}$$

est alors égale à

$$\sum_{\nu_{i,n} \geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})} q^{-\sum\limits_{i \in I} \nu_{i,0} d_i\, s_i - \sum\limits_{1 \leqslant n \leqslant m} \sum\limits_{i \in I} \nu_{i,n}\, \delta_{i,n}\, s_i}$$

$$\times \sum_{\mu_i \in \mathbf{N}^{\widetilde{I}}} q^{-\sum\limits_{i \in \widetilde{I}} \mu_i\, d_i\, s_i} \int\limits_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\Gamma^{\vee}}} \mathbf{z}^{\sum\limits_{i \in \widetilde{I}} (\mu_i\, d_i + \sum\limits_{0 \leqslant n \leqslant m} k_{i,n}\, \nu_{i,n}) \gamma_i^{\vee}} d\mathbf{z}$$

Cette dernière expression est égale à

$$\sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}\, q^{-\sum\limits_{i\in I}\nu_{i,0}\,d_i\,s_i-\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m}\sum\limits_{i\in I}\nu_{i,n}\,\delta_{i,n}\,s_i} \sum_{\substack{\mu_i\in\mathbf{N}^{\widetilde{I}}\\ \sum\limits_{i\in\widetilde{I}}(\mu_i\,d_i+\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant m}k_{i,n}\,\nu_{i,n})\,\gamma_i^\vee=0}} q^{-\sum\limits_{i\in\widetilde{I}}\mu_i\,d_i s_i}$$

$$= \sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}\, q^{\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m}\nu_{i,n}\,(k_{i,n}-\delta_{i,n})s_i} \sum_{\substack{\mu_i\in\mathbf{N}^{\widetilde{I}}\\ d_i\,\mu_i\geqslant\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant m}k_{i,n}\,\nu_{i,n}\\ \sum\limits_{i\in\widetilde{I}}\mu_i\,d_i\gamma_i^\vee=0}} q^{-\sum\limits_{i\in\widetilde{I}}\mu_i\,d_i\,s_i}$$

$$= \sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}\, q^{\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m}\nu_{i,n}\,(k_{i,n}-\delta_{i,n})s_i} \sum_{\substack{y\in\left(\mathbf{Z}^{\widetilde{I}}/\widetilde{\Gamma}\right)^\vee\cap\Lambda(\widetilde{\Gamma})^\vee\\ d_i\,\langle y,\psi_{\widetilde{\Gamma}}(e_i)\rangle\geqslant\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant m}k_{i,n}\,\nu_{i,n}}} q^{-\sum\limits_{i\in\widetilde{I}}d_i\,s_i\,\langle y,\psi_{\widetilde{\Gamma}}(ei)\rangle}.$$

Nous appliquons alors les résultats de 5.5.2, avec $N=\mathbf{Z}^{\widetilde{I}}/\widetilde{\Gamma}$ (rappelons que N est de rang $\#\widetilde{I}-r=\#I-1-r$) et $C=\Lambda(\widetilde{\Gamma})$. Nous obtenons

$$f_3(\mathbf{s})=\sum_{\delta\in\Delta}\sum_{K\subset I}(-1)^{\#K}\prod_{l\in I_{\delta,K}}\left(\frac{1}{1-q^{-\sum\langle m_l,s_i\rangle}}-1\right)$$
$$\times\sum_{\nu_{i,n}\geqslant 0} a_{(\nu_{i,n})}P_{\delta,K,\ulcorner\frac{1}{d_i}(\sum\limits_n k_{i,n}\,\nu_{i,n})\urcorner}(q^{-d_i\,s_i})$$
$$\times\ q^{\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m}\nu_{i,n}\,(k_{i,n}-\delta_{i,n})s_i}$$

d'où le résultat. □

Toujours avec les mêmes notations que précédemment, soit d un multiple commun des d_i. Soit

$$N(d,d_i,\Gamma)=\left\{\delta_i\in\mathbf{Z}^I,\ 0\leqslant\delta_i<\frac{d}{d_i},\ \forall\,\gamma\in\Gamma,\ d\,\Big|\,\sum_i d_i\,\delta_i\,e_i^\vee(\gamma)\right\}$$
$$=\left\{\delta_i\in\mathbf{Z}^I,\ 0\leqslant\delta_i<\frac{d}{d_i},\ \sum_i d_i\,\delta_i\,\gamma_i^\vee\in d\,\Gamma^\vee\right\}$$

et $n(d,d_i,\Gamma)=\#N(d,d_i,\Gamma)$.

Lemme 5.5.7
On suppose $\mathbf{Z}^I/\Gamma$ *sans torsion et* $\Gamma\cap\mathbf{Z}^I_{\geqslant 0}=\{0\}$. *On a alors*

$$L_{\mathbf{Z}^I/\overline{\Gamma},\Lambda(\overline{\Gamma})}\left(\psi_{\overline{\Gamma}}(d_i\,s_i)\right)=\sum_{(\delta_i)\in N(d,d_i,\Gamma)} q^{-\sum\limits_i d_i\,\delta_i\,s_i}\,L_{\mathbf{Z}^I/\Gamma,\Lambda(\Gamma)}\left(\psi_\Gamma(d\,s_i)\right)+g(\mathbf{s})$$

où g *est une fonction admissible de multiplicité supérieure à* $1+r-\#I$. *En particulier*

$$\lim_{s\to 0} s^{\#I-r}\,L_{\mathbf{Z}^I/\overline{\Gamma},\Lambda(\overline{\Gamma})}\left(\psi_{\overline{\Gamma}}(d_i\,s)\right) = \frac{n(d,d_i,\Gamma)}{d^{\#I-r}}\lim_{s\to 0} s^{\#I-r}\,L_{\mathbf{Z}^I/\Gamma,\Lambda(\Gamma)}\left(\psi_\Gamma(s,\ldots,s)\right).$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{Z}^I/\overline{\Gamma},\Lambda(\overline{\Gamma})}\left(\psi_{\overline{\Gamma}}(d_i\,s_i)\right) &= \sum_{\substack{(n_i)\in\mathbf{N}^I\\ \sum\limits_i n_i\,d_i\,\gamma_i^\vee=0}} q^{-\sum\limits_i n_i\,d_i\,s_i}\\
&= \sum_{\substack{\delta_i\in\mathbf{N}^I\\ \forall\, i\in I,\ 0\leqslant\delta_i<\frac{d}{d_i}}}\ \sum_{\substack{n_i\in\mathbf{N}^I\\ \forall\, i\in I,\ n_i\equiv\delta_i\left(\frac{d}{d_i}\right)\\ \sum\limits_i n_i\,d_i\,\gamma_i^\vee=0}} q^{-\sum\limits_i n_i\,d_i\,s_i}\\
&= \sum_{\substack{\delta_i\in\mathbf{Z}^I\\ 0\leqslant\delta_i<\frac{d}{d_i}}} q^{-\sum\limits_i d_i\,\delta_i\,s_i} \sum_{\substack{n_i\in\mathbf{N}^I\\ \sum\limits_i n_i\,\gamma_i^\vee=-\sum\limits_i d_i\,\delta_i\,\gamma_i^\vee}} q^{-d\,\sum\limits_i n_i\,s_i}.
\end{aligned}$$

Soit $\delta_i\in\mathbf{Z}^I$ tel que $0\leqslant\delta_i<\frac{d}{d_i}$. Comme $\mathbf{Z}^I/\Gamma$ est sans torsion, la flèche $(\mathbf{Z}^I)^\vee\to\Gamma^\vee$ est surjective, en d'autres termes pour tout élément $\gamma^\vee$ de $\Gamma^\vee$, il existe un $(\#I)$-uplet d'entiers (n_i) vérifiant

$$\sum_i n_i\,\gamma_i^\vee=\gamma^\vee.$$

Ainsi l'équation (d'inconnue (n_i))

$$d\sum_i n_i\,\gamma_i^\vee = -\sum_i d_i\,\delta_i\,\gamma_i^\vee$$

admet au moins une solution $(n_i)\in\mathbf{Z}^I$ si et seulement si $\sum\limits_i d_i\,\delta_i\,\gamma_i^\vee\in d\,\Gamma^\vee$, i.e. si et seulement si (δ_i) est dans $N(d,d_i,\Gamma)$. Dans ce cas, grâce à la relation

(5.5.3.1), on peut trouver une solution dans $\mathbf{Z}^I_{\leqslant 0}$. Notons $(-\nu_{i,(\delta_i)})$ une telle solution. La condition

$$d\sum_i n_i\,\gamma_i^\vee = -\sum_i d_i\,\delta_i\,\gamma_i^\vee$$

s'écrit alors

$$\sum_i (n_i + \nu_{i,(\delta_i)})\,\gamma_i^\vee = 0.$$

On a alors

$$L_{\mathbf{Z}^I/\overline{\Gamma},\Lambda(\overline{\Gamma})}\left(\psi_{\overline{\Gamma}}(d_i\,s_i)\right) = \sum_{(\delta_i)\in N(d,d_i,\Gamma)} q^{-\sum\limits_i d_i\,\delta_i\,s_i + d\sum\limits_i \nu_{i,(\delta_i)}\,s_i} \sum_{\substack{n_i \geqslant \nu_{i,(\delta_i)} \\ \sum\limits_i n_i\,\gamma_i^\vee = 0}} q^{-d\,\sum\limits_i n_i\,s_i}$$

et des applications du lemme 5.5.2 permettent de conclure. □

5.6 Application aux fonctions zêta des hauteurs

5.6.1 Préliminaires

Rappelons (corollaire 5.4.9) que pour

$$(s_\alpha) \in \left\{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^{\Sigma(1)_G},\ \Re(\mathbf{s}) \in \mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)_G}\right\}$$

on a la représentation intégrale

$$\zeta_H\,(s_\alpha) = \frac{q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)}}{\log(q)^r\,b_S(T)}\left(\#A(T)\,I_1(s_\alpha) + \sum_{\chi''\notin \mathrm{Ker}(\gamma^*)} I_{\chi''}(s_\alpha)\right)$$

où $I_1(s_\alpha)$ est donnée par la formule

$$\int\limits_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_T} \left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle} q^{-d_\alpha\,s_\alpha}\right)\right) \times f\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle} q^{-d_\alpha\,s_\alpha}\right),\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{k_{\alpha,n} d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}\,q^{-\delta_{\alpha,n}\,s_\alpha}\right)\right) d\mathbf{z}$$

et $I_{\chi''}(s_\alpha)$ par la formule

$$\int\limits_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_T}\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\mathcal{L}_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\, s_\alpha},\chi''_\alpha\right)\right)$$
$$\times f_{\chi''}\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right),\left(\mathbf{z}^{\gamma_n}\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G}q^{-\delta_{\alpha,n}\, s_\alpha}\right)\right)d\mathbf{z}.$$

Lemme 5.6.1
Soient M un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini et N un sous-module de M d'indice fini. On munit les groupes topologiques compacts $\mathbf{S}_M=\mathrm{Hom}(M,\mathbf{S}^1)$ et $\mathbf{S}_N=\mathrm{Hom}(N,\mathbf{S}^1)$ respectivement des mesures de Haar $d\mathbf{z}_M$ et $d\mathbf{z}_N$ de volume total 1. Soit $(n_j)_{j\in J}$ une famille finie d'éléments de N, et ϕ une fonction en $\#J$ variables continue sur $\mathbf{S}^1$. On a alors

$$\int\limits_{\mathbf{S}_N}\phi(\mathbf{z}^{n_j})d\mathbf{z}_N=\int\limits_{\mathbf{S}_M}\phi(\mathbf{z}^{n_j})d\mathbf{z}_M.$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser une base de M adaptée à N, et de remarquer que si k est un entier non nul on a pour toute fonction ψ continue sur $\mathbf{S}^1$

$$\int_{\mathbf{S}^1}\psi(z^k)\,dz=\int_{\mathbf{S}^1}\psi(z)\,dz,$$

où dz désigne la mesure uniforme sur le cercle. $\square$

Ce lemme permet de remplacer dans la formule ci-dessus l'intégration sur $\mathbf{S}_T$ par l'intégration sur $\mathbf{S}_{(X(T)^G)^\vee}$ (en notant dorénavant $d\mathbf{z}$ la mesure de Haar de volume total 1 sur $\mathbf{S}_{(X(T)^G)^\vee}$).

Rappelons que $X(T)^G$ s'identifie à un sous-réseau de $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}$ via la suite exacte

$$0\longrightarrow X(T)^G\longrightarrow\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}\longrightarrow\mathrm{Pic}(X_\Sigma)\longrightarrow H^1(G,X(T))\longrightarrow 0,\quad(5.6.1.1)$$

qui montre également que $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}/X(T)^G$ est sans torsion.

Rappelons que nous désignons par r le rang de $X(T)^G$. Si $r=0$ on se trouve dans le cas anisotrope, il n'y a pas d'intégrale à évaluer, on a uniquement besoin du calcul de la constante, effectué à la section 5.6.4.

Soit $m\in X(T)^G$ vérifiant

$$\forall\,\alpha\in\Sigma(1)_G,\quad\langle m,\rho_\alpha\rangle\geqslant 0.$$

Alors on a

$$\forall\,\alpha\in\Sigma(1),\quad\forall\,\rho\in\alpha,\quad\langle m,\rho\rangle\geqslant 0.$$

L'éventail Σ étant complet, ses rayons engendrent $X(T)^\vee$, ce qui entraîne $m=0$. Nous avons donc bien

$$X(T)^G \cap \mathbf{Z}_{\geqslant 0}^{\Sigma(1)_G} = \{0\}$$

(on aurait pu aussi directement utiliser le fait général que $C_{\mathrm{eff}}(X_\Sigma)$ est strictement convexe).

Comme $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}/X(T)^G$ est sans torsion, le morphisme

$$\left(\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}\right)^\vee \longrightarrow \left(X(T)^G\right)^\vee$$

est surjectif, et on peut remplacer les éléments γ_n dans la formule donnant $I_{\chi''}$ par

$$\sum_{\alpha\in\Sigma(1)_G} h_{\alpha,n}\langle m,\rho_\alpha\rangle$$

où les $h_{\alpha,n}$ sont des entiers. On obtient donc

$$I_{\chi''}(s_\alpha) = \int\limits_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_{(X(T)^G)^\vee}} \left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathcal{L}_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle} q^{-d_\alpha\, s_\alpha}, \chi''_\alpha\right)\right)$$
$$\times f_{\chi''}\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle} q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right), \left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{h_{\alpha,n}\langle m,\rho_\alpha\rangle} q^{-\delta_{\alpha,n}\, s_\alpha}\right)\right) d\mathbf{z}.$$

D'après (5.6.1) et (5.5.3.1), on peut trouver des entiers $(\nu_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)_G}$ strictement positifs vérifiant

$$\sum_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \nu_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle = 0. \tag{5.6.1.2}$$

Pour $(h_{\alpha,n}) \in \mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}$ donné on peut alors trouver des entiers $(\nu_{\alpha,n})_{\alpha\in\Sigma(1)_G}$ positifs vérifiant la condition (5.6.1.2) et

$$\forall \alpha \in \Sigma(1)_G,\ \nu_{\alpha,n} + h_{\alpha,n} \geqslant 0.$$

Comme on a

$$\mathbf{z}^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)_G} h_{\alpha,n}\langle m,\rho_\alpha\rangle} = \mathbf{z}^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)_G} (h_{\alpha,n}+\nu_{\alpha,n})\langle m,\rho_\alpha\rangle},$$

on peut supposer dans l'écriture de $I_{\chi''}$ les entiers $h_{\alpha,n}$ positifs.

De même, pour $(k_{\alpha,n}) \in \mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}$ donné on peut alors trouver des entiers $(\nu_{\alpha,n})_{\alpha\in\Sigma(1)_G}$ positifs vérifiant la condition (5.6.1.2) et

$$\forall \alpha \in \Sigma(1)_G,\ \Big(\prod_{\beta\in\Sigma(1)_G} d_\beta\Big)\,\nu_{\alpha,n} + d_\alpha\, k_{\alpha,n} \geqslant 0.$$

et on peut supposer dans l'écriture de I_1 les entiers $k_{\alpha,n}$ positifs.

5.6.2 Calcul de $n\left(d_T, d_\alpha, X(T)^G\right)$

Rappelons que $n\left(d_T, d_\alpha, X(T)^G\right)$ désigne le cardinal de l'ensemble

$$\left\{\delta_\alpha \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)_G},\ 0 \leqslant \delta_\alpha < \frac{d_T}{d_\alpha},\ \forall\, m \in X(T)^G,\ \ d_T \Big| \sum_\alpha d_\alpha\, \delta_\alpha \, \langle m, \rho_\alpha\rangle \right\}.$$

Nous choisissons L de telle sorte que $G/H = \mathfrak{g}_T$. Pour $\alpha \in \Sigma(1)_G$, soit $\mathfrak{g}_\alpha$ l'image de G_α dans $\mathfrak{g}_T$. Rappelons que nous avons une résolution flasque $\mathcal{R}$ du G-module $X(T)$

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P_\Sigma \longrightarrow \operatorname{Pic}(X_{\Sigma,L}) \longrightarrow 0$$

où le G-module de permutation $P_\Sigma = \mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ est isomorphe à $\bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{Z}[G/G_\alpha]$. On notera Q le G-module flasque $\operatorname{Pic}(X_{\Sigma,L})$.

Prenons les H-invariants dans la suite exacte ci-dessus. Comme P_Σ, étant un G-module de permutation, est aussi un H-module de permutation, on obtient une suite exacte de $\mathfrak{g}_T$-modules

$$0 \longrightarrow X(T)^H \longrightarrow P_\Sigma^H \longrightarrow Q^H \xrightarrow{\delta_R} H^1(H, X(T)) \longrightarrow 0.$$

Soit $Q_{\mathcal{R}}$ le $\mathfrak{g}_T$-module $\operatorname{Ker}(\delta_R)$. On obtient finalement une suite exacte

$$H^{-1}\left(\mathfrak{g}_T, P_\Sigma^H\right) \longrightarrow H^{-1}\left(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathcal{R}}\right) \longrightarrow \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right) \longrightarrow \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, P_\Sigma^H\right).$$

Comme P_Σ^H est un $\mathfrak{g}_T$-module de permutation (en particulier isomorphe à son dual), on a

$$H^{-1}\left(\mathfrak{g}_T, P_\Sigma^H\right) = 0$$

et finalement on obtient la suite exacte

$$\begin{array}{rcl} 0 \longrightarrow H^{-1}\left(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathcal{R}}\right) \longrightarrow \widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right) & \longrightarrow & \bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{Z}/\frac{d_T}{d_\alpha}\mathbf{Z} \\ m & \longmapsto & \left(\langle m, \rho_\alpha\rangle\right). \end{array}$$

Soit M le quotient de $\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)$ par $H^{-1}\left(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathcal{R}}\right)$. On obtient donc une injection

$$\begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & \bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{Z}/\frac{d_T}{d_\alpha}\mathbf{Z} \\ m & \longmapsto & \left(\langle m, \rho_\alpha\rangle\right) \end{array}$$

d'où une surjection

$$\operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{Z}/\frac{d_T}{d_\alpha}\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/d_T\mathbf{Z}\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(M\,,\, \mathbf{Z}/d_T\mathbf{Z}\right).$$

En identifiant $\operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\mathbf{Z}/\frac{d_T}{d_\alpha}\mathbf{Z}\,,\,\mathbf{Z}/d_T\mathbf{Z}\right)$ à $\bigoplus_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\mathbf{Z}/\frac{d_T}{d_\alpha}\mathbf{Z}$, le morphisme ci-dessus devient

$$(\delta_\alpha)\longmapsto\left(m\longmapsto\sum_\alpha d_\alpha\,\delta_\alpha\,\langle m,\rho_\alpha\rangle\right),$$

et $n\left(d_T,d_\alpha,X(T)^G\right)$ n'est autre que le cardinal du noyau de ce morphisme, soit

$$\begin{aligned}n\left(d_T,d_\alpha,X(T)^G\right)&=\frac{\prod_\alpha\frac{d_T}{d_\alpha}}{[\operatorname{Hom}(M\,,\,\mathbf{Z}/d_T\mathbf{Z})]}\\&=\frac{(d_T)^{\#\Sigma(1)_G}}{\#M\prod_\alpha d_\alpha}\end{aligned}$$

d'où (rappelons que comme $\mathfrak{g}_T$ est cyclique, $H^{-1}(\mathfrak{g}_T,Q_{\mathfrak{R}})\xrightarrow{\sim}H^1(\mathfrak{g}_T,Q_{\mathfrak{R}})$)

$$n\left(d_T,d_\alpha,X(T)^G\right)=\frac{(d_T)^{\#\,\Sigma(1)_G}\,\left[H^1(\mathfrak{g}_T,Q_{\mathfrak{R}})\right]}{\left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T,X(T)^H\right)\right]\prod_\alpha d_\alpha}.\qquad(5.6.2.1)$$

5.6.3 Application des lemmes techniques

Soit tout d'abord $\chi''\notin\operatorname{Ker}(\gamma^*)$ et étudions

$$\begin{aligned}I_{\chi''}(s_\alpha)=\int_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_{(X(T)^G)^\vee}}&\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\mathcal{L}_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\,s_\alpha},\chi''_\alpha\right)\right)\\&\times f_{\chi''}\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-d_\alpha\,s_\alpha}\right),\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G}\mathbf{z}^{h_{\alpha,n}\langle m,\rho_\alpha\rangle}q^{-\delta_{\alpha,n}\,s_\alpha}\right)\right)d\mathbf{z}.\end{aligned}$$

L'ensemble des $\alpha\in\Sigma(1)_G$ tel que χ''_α est non trivial est donc non vide, et, par le lemme 5.4.1, pour de tels α la fonction $\mathcal{L}_{K_\alpha,S_\alpha}\left(.,\chi''_\alpha\right)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$. Pour les autres α la fonction L correspondante est une fonction zêta, et finalement on a une écriture (posant $k_{\alpha,0}=\delta_{\alpha,0}=d_\alpha$)

$$I_{\chi''}((s_\alpha)+(1,\ldots,1))=\int_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_{(X(T)^G)^\vee}}\frac{P_{\chi''}\left(\mathbf{z}^{h_{\alpha,n}\,\langle m,\rho_\alpha\rangle}\,q^{-\delta_{\alpha,n}s_\alpha}\right)_{\substack{\alpha\in\Sigma(1)_G\\n=0,\ldots,m}}}{\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G\setminus\{\alpha_0\}}\left(1-\mathbf{z}^{d_\alpha\,\langle m,\rho_\alpha\rangle}\,q^{-d_\alpha\,s_\alpha}\right)}\,d\mathbf{z}$$

où $P_{\chi''}$ est une fonction en $(m+1)\#\Sigma(1)_G$ variables, holomorphe sur

$$\left\{(z_{\alpha,n}) \in \mathbf{C}^{(m+1)\,\#\Sigma(1)_G}, \quad |z_{\alpha,n}| \leqslant q^{\frac{1}{2}}\right\},$$

et α_0 est un élément de $\Sigma(1)_G$. En appliquant le lemme 5.5.6 ($I = \Sigma(1)_G$, $\Gamma = X(T)^G$, $d_i = d_\alpha$ et $i_0 = \alpha_0$), on obtient que $I_{\chi''}(s_\alpha)$ est une fonction admissible, de multiplicité supérieure à

$$1 + r - \#\Sigma(1)_G.$$

Etudions à présent $I_1(s_\alpha)$, qui pour mémoire est donnée par l'intégrale

$$\int_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_{(X(T)^G)^\vee}} \left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha,S_\alpha}\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle} q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right)\right)$$
$$\times f\left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle} q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right), \left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{k_{\alpha,n} d_\alpha\langle m,\rho_\alpha\rangle}\, q^{-\delta_{\alpha,n}\, s_\alpha}\right)\right) d\mathbf{z}.$$

Posant $k_{\alpha,0} = 1$ et $\delta_{\alpha,0} = d_\alpha$, on voit qu'on a une écriture

$$I_1((s_\alpha) + (1,\dots,1)) = \int_{\mathbf{z}\in\mathbf{S}_{(X(T)^G)^\vee}} \frac{P\left(\mathbf{z}^{k_{\alpha,n}\, d_\alpha\,\langle m,\rho_\alpha\rangle}\, q^{-\delta_{\alpha,n}\, s_\alpha}\right)_{\substack{\alpha\in\Sigma(1)_G\\ n=0,\dots,m}}}{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma(1)_G} \left(1 - \mathbf{z}^{d_\alpha\,\langle m,\rho_\alpha\rangle}\, q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right)} d\mathbf{z}$$

où P est une fonction en $(m+1)\#\Sigma(1)_G$ variables, holomorphe sur

$$\left\{(z_{\alpha,n}) \in \mathbf{C}^{(m+1)\,\#\Sigma(1)_G}, \quad |z_{\alpha,n}| \leqslant q^{\frac{1}{2}}\right\},$$

Soit

$$\Theta\left(s_{\alpha,n}\right) = \frac{P(q^{-s_{\alpha,n}})}{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma(1)_G} (1 - q^{-s_{\alpha,0}})}$$

et $\theta(s_\alpha) = \Theta(\delta_{\alpha,n}\, s_\alpha)$. Nous montrons ci-dessous que la constante

$$C_0 = \frac{q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)}\,\#A(T)}{\log(q)^r\, b_S(T)} \lim_{s\to 0} s^{\#\Sigma(1)_G}\,\theta(s,\dots,s)$$

est non nulle. Nous avons donc

$$P(1,\dots,1) = \log q^{\#\Sigma(1)_G} \left(\prod_\alpha d_\alpha\right) \frac{\log(q)^r\, b_S(T)}{q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)}\,\#A(T)} C_0 \neq 0.$$

Nous notons $\phi_{(d_\alpha)}$ le morphisme $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G} \to \mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}$ envoyant (m_α) sur $(d_\alpha\, m_\alpha)$ et $\overline{X(T)^G} = \phi_{(d_\alpha)}\left(X(T)^G\right)$. Nous appliquons alors le lemme 5.5.5 ($I = \Sigma(1)_G$, $\Gamma = \overline{X(T)^G}$) et obtenons que

$$\begin{aligned} &\zeta_H((s_\alpha) + (1,\dots,1)) \\ &= \frac{q^{(1-g)\dim(X_\Sigma)}\,\#A(T)}{\log(q)^r\, b_S(T)} \Big(I_1((s_\alpha)+(1,\dots,1)) + \sum_{\chi'' \notin \operatorname{Ker}(\gamma^*)} I_{\chi''}((s_\alpha)+(1,\dots,1)) \Big) \end{aligned}$$

est une fonction admissible de multiplicité $r - \#\Sigma(1)_G = -t$, et

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} s^t\, \zeta_H(1+s,\dots,1+s) \\ &= \log(q)^{\#\Sigma(1)_G} \left(\prod_\alpha d_\alpha\right) C_0 \lim_{s\to 0} s^t\, L_{\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}/\overline{X(T)^G},\Lambda\left(\overline{X(T)^G}\right)} \left(\psi_{\overline{X(T)^G}}(d_\alpha\, s)\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $\zeta_0(s) = \zeta_H((1+s,\dots,1+s))$ se prolonge en une fonction méromorphe sur un ouvert du type $\{\Re(s) > 1-\varepsilon\}$ avec un pôle d'ordre t en $s = 0$, de terme principal

$$\log(q)^{\#\Sigma(1)_G} \left(\prod_\alpha d_\alpha\right) C_0 \lim_{s\to 0} s^t\, L_{\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}/\overline{X(T)^G},\Lambda\left(\overline{X(T)^G}\right)} \left(\psi_{\overline{X(T)^G}}(d_\alpha\, s)\right).$$

D'après le lemme 5.5.7 ($I = \Sigma(1)_G$, $\Gamma = X(T)^G$, $\gamma^j = m_j$ et $d_i = d_\alpha$) et l'égalité (5.6.2.1), cette dernière expression est égale à

$$\begin{aligned} &\log(q)^{\#\Sigma(1)_G} \left(\prod_\alpha d_\alpha\right) C_0 \\ &\quad\times \frac{(d_T)^r\ [H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}})]}{\left[\widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H)\right] \prod_\alpha d_\alpha} \lim_{s\to 0} s^t\, L_{\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}/X(T)^G,\Lambda(X(T)^G)}(\pi(s,\dots,s)), \end{aligned}$$

elle-même égale, par la relation (5.5.1.2) et la suite exacte (5.6.1.1), à

$$\begin{aligned} &\frac{(d_T)^r\ [H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}})]}{\left[\widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H)\right]} \log(q)^{\#\Sigma(1)_G}\ C_0\ h(T) \\ &\qquad\qquad\times \lim_{s\to 0} s^t\, L_{\operatorname{Pic}(X_\Sigma),C_{\text{eff}}(X_\Sigma)}(\pi(s,\dots,s)) \end{aligned}$$

où l'on rappelle que $h(T)$ est le cardinal de $H^1(G, X(T))$. Finalement la formule (5.5.1.1) montre que le terme principal vaut

$$\frac{(d_T)^r\ [H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}})]}{\left[\widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H)\right]} \log(q)^r\ C_0\ h(T)\ \alpha^*(X_\Sigma).$$

5.6.4 Calcul de la constante

Nous calculons à présent la constante C_0 (et montrons en particulier qu'elle est non nulle). Le calcul est formellement le même qu'en caractéristique zéro, car toutes les propriétés utilisées pour le calcul dans [BaTs3] ont leur pendant dans le cas fonctionnel.

On a

$$\theta(s_\alpha - 1) = \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha, S_\alpha}\left(q^{-d_\alpha\, s_\alpha}\right) \right) f\left((q^{-d_\alpha\, s_\alpha}), (q^{-\delta_{\alpha,n} s_\alpha}) \right)$$

On en déduit, d'après la dernière formule de la section 5.4.6,

$$\theta(s_\alpha - 1) = q^{(g-1)\dim(X_\Sigma)} \int_{\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(s_\alpha))\omega_{T,S}.$$

On utilise alors le scindage

$$\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K) = \overline{T(K)}^{\,S} \times T(\mathbf{A}_K)_S$$

(lemme 5.2.12) et les calculs explicites des transformées de Fourier aux places non ramifiées pour trouver que

$$\begin{aligned}
\lim_{s \to 1} \quad & (s-1)^{\#\Sigma(1)_G} \int_{\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(s, \dots, s))\omega_{T,S} \\
& = l_S(T)\, l_S(X_\Sigma)\, q^{(1-g)\dim(X_\Sigma)} \int_{\overline{T(K)}^{\,S}} \prod_{v \in S} H_v(x, -(1, \dots, 1))\omega_{T,v} \\
& \qquad \times \prod_{v \notin S} Q_{\Sigma,v}(q_v^{-1}, \dots, q_v^{-1})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{T(K)}^{\,S}} \prod_{v \in S} H_v(x, -(1, \dots, 1))\omega_{T,v} \times \prod_{v \notin S} Q_{\Sigma,v}(q_v^{-1}, \dots, q_v^{-1}) \\
= \int_{\overline{T(K)}^{\,S}} \prod_{v \in S} \omega_{X_\Sigma, v} \times \prod_{v \notin S} \int_{T(K_v)} \omega_{X_\Sigma, v}.
\end{aligned}$$

En utilisant encore une fois le scindage $\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K) = \overline{T(K)}^{\,S} \times T(\mathbf{A}_K)_S$, cette dernière expression vaut

$$q^{(g-1)\dim(X_\Sigma)} \int_{\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)} \omega_{X_\Sigma} = q^{(g-1)\dim(X_\Sigma)} \int_{\overline{X_\Sigma(K)}} \omega_{X_\Sigma},$$

la dernière égalité étant conséquence du lemme 5.3.2. On en déduit

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{\#A(T)}{\log(q)^r\, b_S(T)}\, l_S(T)\, l_S(X_\Sigma) \int_{\overline{X_\Sigma(K)}} \omega_{X_\Sigma}. \\
&= \frac{\#A(T)}{\log(q)^r\, b_S(T)}\, l_S(T)\, l_S(X_\Sigma) \int_{\overline{X_\Sigma(K)}} \omega_{X_\Sigma}.
\end{aligned}$$

Or par le lemme 5.2.14

$$\#A(T) = \frac{\#H^1(G, \operatorname{Pic}(X_{\Sigma,L}))}{i(T)}$$

et par le théorème d'Ono et Oesterlé (théorème 5.2.5)

$$\frac{l_S(T)}{b_S(T)} = \frac{1}{\tau(T)\,\#\operatorname{Coker}(\deg_T)} = \frac{i(T)}{\#\operatorname{Coker}(\deg_T)\, h(T)}$$

soit

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{\#\operatorname{Coker}(\deg_T)}\, \log(q)^{-r}\, \frac{1}{h(T)}\, \#H^1(G, \operatorname{Pic}(X_{\Sigma,L}))\, l_S(X_\Sigma) \int_{\overline{X_\Sigma(K)}} \omega_{X_\Sigma} \\
&= \frac{1}{\#\operatorname{Coker}(\deg_T)}\, \log(q)^{-r}\, \frac{1}{h(T)}\, \beta(X_\Sigma)\, \gamma_H(X_\Sigma).
\end{aligned}$$

Le terme principal de la fonction zêta des hauteurs en $s = 1$ est donc

$$\begin{aligned}
&\frac{(d_T)^r\, \left[H^1\left(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}}\right)\right]}{\left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)\right]\, \#\operatorname{Coker}(\deg_T)}\, \log(q)^r\, h(T)\, \alpha^*(X_\Sigma)\, C_0 \\
&= \frac{(d_T)^r\, \left[H^1\left(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}}\right)\right]}{\left[\widehat{H}^0\left(\mathfrak{g}_T, X(T)^H\right)\right]\, \#\operatorname{Coker}(\deg_T)}\, \alpha^*(X_\Sigma)\, \beta(X_\Sigma)\, \gamma_H(X_\Sigma) \\
&= \varsigma(T)\, \alpha^*(X_\Sigma)\, \beta(X_\Sigma)\, \gamma_H(X_\Sigma).
\end{aligned}$$

Le théorème 5.3.3 est donc démontré.

Bibliographie

[BaMa] V. Batyrev, Y. Manin. Sur le nombre de points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques. *Math. Ann.*, **286**, 1990. p. 27-43.

[BaTs1] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel. Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori. *Int. Math. Res. Notices*, **12**, 1995. p. 591-635.

[BaTs2] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel. Rational points on some Fano cubic bundles. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **323**, 1996. p. 41-46.

[BaTs3] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel. Manin's conjecture for toric varieties. *J. of Algebraic Geometry*, **7**, 1998. p. 15-53.

[BaTs4] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel. Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties. *Astérisque*, **251**, 1998. p. 299-340.

[Bi] H. Billard. Répartition des points rationnels des surfaces géométriquement réglées rationnelles. *Astérisque*, **251**, 1998. p. 79-89.

[Bki] N. Bourbaki. *Éléments de mathématiques XXXII : Théories spectrales. Chapitres 1 et 2.* Actualités scientifiques et industrielles **1332**, Hermann, Paris, 1967.

[Bo1] D. Bourqui. Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel. *J. of Number Theory*, **94**, 2002. p. 343-358.

[Bo2] D. Bourqui. Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques déployées dans le cas fonctionnel. *J. reine angew. Math.*, **562**, 2003. p. 171-199.

[CLTs1] A. Chambert-Loir, Y. Tschinkel. Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, I. *Compositio Math.*, **124**, 2000. p. 65-93.

[CLTs2] A. Chambert-Loir, Y. Tschinkel. Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, II. *J. of Number Theory*, **85**, 2000. p. 172-188.

[CLTs3] A. Chambert-Loir, Y. Tschinkel. On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups. *Invent. Math*, **148**, n° 2, 2002. p. 421-452.

[CTSa] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc. La R-équivalence sur les tores. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, **10**, 1977. p. 175-230.

[Co] D.A. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. of Algebraic Geometry* **4**, 1995. p. 17-50.

[dlBr1] R. De la Bretèche. Compter des points d'une variété torique. *J. of Number Theory* **87**, 2001. p. 315-331.

[dlBr2] R. De la Bretèche. Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5. *Duke Math. Journal*, **113**, n° 3, 2002. p. 421-464.

[Dr] P.K.J. Draxl. L-Funktionen K-algebraischer Tori. *J. of Number Theory*, **3**, 1971. p. 444-467.

[Ew] G. Ewald. *Combinatorial convexity and algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics **168**, Springer (1996).

[FrMaTs] J. Franke, Y. Manin, Y. Tschinkel. Rational points of bounded height on Fano varieties. *Invent. Math.*, **95**, 1989. p. 421-435.

[Fu] W. Fulton. *Introduction to toric varieties.* Annals of Mathematics Studies **31**, Princeton University Press (1993).

[GiSo] H. Gillet, C. Soulé. Descent, motives and K-theory. *J. reine angew. Math.*, **478**, 1996. p. 127-176.

[Gr] A. Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert. Séminaire Bourbaki **221** 1960/61.

[Ha] H. Hasse. *Number theory.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **229**, Springer, 1980.

[Ka] M. Kapranov. The elliptic curve in the S-duality theory, and Eisenstein series for Kac-Moody groups. Prépublication, math.AG/0001005.

[Ku] N. Kurokawa. On the meromorphy of Euler products I. *Proc. London Math. Soc.*, **53**, 1986. 1-47.

[LaYe] K.F. Lai, K.M. Yeung. Rational points in flag varieties over function fields. *J. of Number Theory*, **95**, 2002. p. 142-149.

[La] S. Lang. *Fundamentals of diophantine geometry.* Springer-Verlag, 1983.

[Na] T. Nakayama. Cohomology of class field theory and tensor product modules I. *Ann. of Math.*, **65**, 1957. p. 265-267.

[Od] T. ODA. *Convex bodies and algebraic geometry.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **15**, Springer-Verlag (1988).

[Oe] J. OESTERLÉ. Nombre de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique *p*. *Invent. Math.*, **78**, 1984. p. 13-88.

[On1] T. ONO. On some arithmetic properties of linear algebraic groups. *Ann. of Math.*, **70**, 1959. p. 266-290.

[On2] T. ONO. Arithmetic of algebraic tori. *Ann. of Math.*, **74**, 1961. p. 101-139.

[On3] T. ONO. On the Tamagawa number of algebraic tori. *Ann. of. Math.*, **78**, 1963. p. 47-73.

[Pe1] E. PEYRE. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. Journal*, **79**, 1995. p. 101-218.

[Pe2] E. PEYRE. Points de hauteur bornée sur les variétés de drapeaux en caractéristique finie. Prépublication, math.NT/0303067.

[Pe3] E. PEYRE. Etude asymptotique des points de hauteur bornée. Notes de l'école d'été sur les variétés toriques, Grenoble, juin 2000.

[Pe4] E. PEYRE. Points de hauteur bornée et géométrie des variétés, d'après Y. Manin et al. Séminaire Bourbaki **891**, juin 2001.

[Pe5] E. PEYRE. Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesure de Tamagawa. *J. Th. Nombres de Bordeaux*, **15**, 2003. p. 319-349.

[Ro] M. ROBBIANI. On the arithmetic of isotropic Del Pezzo surfaces of degree six. *J. reine angew. Math.*, **503**, 1998. p. 1-45.

[Sa] P. SALBERGER. Tamagawa measure on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Astérisque*, **251**, 1998. p. 91-258.

[Sc] S.H. SCHANUEL. Heights in number fields. *Bull. Soc. Math. France*, **107**, 1979. p. 433-449.

[Se1] J.-P. SERRE. *Corps locaux.* Hermann, 1962.

[Se2] J.-P. SERRE. *Lectures on the Mordell-Weil theorem,* translated and edited by M. Brown. Aspect of Mathematics, Vieweg, (1989).

[Si] J.H. SILVERMAN. The theory of height functions *in Arithmetic Geometry,* G. Cornell & J.H. Silverman, eds. Springer-Verlag, 1986. p. 151-166

[Vo] V.E. VOSKRESENSKII. Projective invariant Demazure models. *Math. USSR Izv.*, **20(2)**, 1983. p. 189-202.

[Wa] D. WAN. Heights and zeta functions in function fields *in The arithmetic of function fields,* D. Goss, D.R. Hayes & M.I. Rosen, eds. Mathematical Research Institute Publications, Ohio State University, de Gruyter (1992). p. 455-463.

[We1] A. Weil. *Basic number theory.* Springer Verlag, 1967.

[We2] A. Weil. *Adeles and algebraic groups.* Progress in mathematics **23**, Birkhaüser, 1982.