

*Je suis reconnaissant envers toutes les personnes qui m'ont permis de venir à Grenoble pour y préparer une thèse. Parmi celles-ci, j'ai une pensée particulière pour Peter Greenberg.*

*Je remercie tout d'abord Lucien Guillou qui a dirigé cette thèse. Il m'a fait bénéficier durant ces trois années et demies de son expérience et de ses conseils.*

*Je remercie vivement Jean-Marc Gambaudo et Patrice Le Calvez pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, ainsi que pour leur participation au jury.*

*Albert Fathi et Alexis Marin me font un grand plaisir en prenant part au jury. Je les en remercie sincèrement. J'ai aussi beaucoup apprécié l'intérêt que ce dernier a porté à mon travail.*

*Je souhaite également remercier Myriam Charles et Arlette Guttin-Lombard pour leur gentillesse et pour la patience avec laquelle elles ont saisi ce texte.*

*Mes remerciements vont enfin à mes parents et à Laurence pour leur présence et leur soutien, ainsi qu'à tous mes camarades de travail, parmi lesquels Lahcène Haddak et Eric Labeye-Voisin.*



# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b> . . . . .	7
<b>Chapitre I.</b> PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS . . . . .	9
1. Degré d'une application continue de $S^1$ dans $S^1$ . . . . .	11
2. Topologie plane . . . . .	11
3. Espaces d'homéomorphismes . . . . .	14
4. Homéomorphismes de Brouwer . . . . .	15
<b>Chapitre II.</b> CONNEXITÉ PAR ARCS . . . . .	19
1. Connexité par arcs . . . . .	21
2. Homéomorphismes de Brouwer coïncidant hors d'un compact et changements de dynamique . . . . .	25
<b>Chapitre III.</b> PROPRIÉTÉS LOCALES DE $\mathcal{H}$ . . . . .	31
1. Contractibilité locale . . . . .	33
2. Approximation par des conjugués à la translation . . . . .	54
3. Homéomorphismes possédant la «propriété radiale» . . . . .	54
Appendice A1. Le théorème de Schmitt . . . . .	59
Appendice A2. Version locale de la mise en position canonique . . . . .	60
<b>Chapitre IV.</b> INTRODUCTION AU TYPE D'HOMOTOPIE DE $\mathcal{H}$ . . . . .	63
<b>Bibliographie</b> . . . . .	69



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'objet de ce travail est l'étude des homéomorphismes de Brouwer, *i.e.* des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation et sans point fixe. Si les translations (et leurs conjugués) sont les plus simples de ces transformations, Brouwer remarquait déjà que ce ne sont pas les seules en donnant un exemple équivalent au classique «homéomorphisme de Reeb» ([Br2], page 220). Depuis, plusieurs auteurs ont mis en évidence que ces homéomorphismes peuvent être (très) compliqués : citons d'abord Kerékjártó ([Ke2]) qui montre que ces homéomorphismes n'admettent pas tous une racine carrée, puis, dans les années 80, M. Brown qui s'appuie sur la notion de région fondamentale (introduite par Andréa dans [An1]) pour construire des exemples ne possédant aucune droite topologique proprement plongée invariante (cf. [Bn1] ou [BST]) et enfin E.W. Daw qui présente en 1991 un cas avec une «pathologie maximale», au sens où il n'agit proprement discontinûment sur aucun ensemble connexe fermé non vide et invariant.

La dynamique des homéomorphismes de Brouwer restant donc mal comprise, il est alors naturel de s'intéresser globalement à l'espace de tous ces homéomorphismes (que l'on désignera par  $\mathcal{H}$  et qui sera muni de sa topologie naturelle de convergence uniforme sur les compacts) et d'étudier s'il possède de bonnes propriétés topologiques, en particulier celles de connexité (par arcs) globale et locale, autrement dit d'essayer de déformer deux éléments de  $\mathcal{H}$  (éventuellement voisins) l'un en l'autre sans introduire de point fixe.

Répondant à des questions posées par M. Brown ([Bn3]), nous démontrons dans cet esprit que  $\mathcal{H}$  est connexe par arcs (théorème II.1.1) et localement contractible (théorème III.1.1.1). On notera que les considérations dynamiques ne sont pas absentes de ces preuves, par l'intermédiaire de la propriété d'errance des points de  $\mathbb{R}^2$  sous l'action de  $h \in \mathcal{H}$ .

Le chapitre II aborde aussi la question du changement de classe de conjugaison lorsqu'on ne modifie un homéomorphisme de Brouwer que sur un compact, et en particulier sur un disque disjoint de son image. En ce sens, le lemme II.1.7 et la propriété II.2.8 sont des résultats de stabilité.

Le chapitre III a pour premier objectif la preuve du théorème de contractibilité locale. Ceci impose d'écrire et de démontrer clairement la possibilité de «mise en position canonique» pour un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sans point fixe sur un cercle, suivant une méthode envisagée par Slaminka (cf. [PS] et [Sl]). Nous en profitons pour redémontrer sans ambiguïté le théorème de Schmitt (cf. [Sc2]) lorsque l'indice du point fixe est différent de un (chapitre III, appendice A1) et nous voyons comment adapter ces arguments pour une

preuve locale (chapitre III, appendice A2).

D'autre part, en réunissant ces méthodes et le lemme II.1.7, nous prouvons qu'un homéomorphisme de Brouwer est toujours «non singulier» lorsqu'on ne le regarde que sur un compact (propriété III.2.1), ce qui donne par ailleurs une autre preuve de la connexité de  $\mathcal{H}$  par l'intermédiaire d'un résultat de densité (corollaires III.2.2 et III.2.3).

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous mettons l'accent sur l'absence de structure de groupe sur  $\mathcal{H}$  (qui est l'une des principales difficultés pour obtenir de bonnes propriétés locales) et nous voyons comment la contourner partiellement.

Enfin, le chapitre IV est une introduction à l'étude du type d'homotopie de  $\mathcal{H}$ . Nous y démontrons que l'inclusion de  $\mathcal{H}$  dans l'espace  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation induit l'application nulle sur les groupes fondamentaux et nous annonçons (ce qui ne sera pas démontré dans le cadre de ce travail) que  $\mathcal{H}$  se déforme dans lui-même sur l'ensemble des translations différentes de l'identité.

## ***Chapitre I***

### PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS





Ce chapitre est consacré aux notions, notations et théorèmes utilisés tout au long de la thèse.

## 1. Degré d'une application continue de $S^1$ dans $S^1$

On considère le revêtement universel  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  du cercle  $S^1$ .  
$$x \mapsto e^{2i\pi x}$$

PROPOSITION ET DÉFINITION 1.1. — *Si  $u$  est une application continue de  $S^1$  dans  $S^1$  et  $\tilde{u}$  un relèvement de  $u$ , il existe un entier  $d \in \mathbb{Z}$  tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{u}(x + 1) = \tilde{u}(x) + d.$$

*Cet entier  $d$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $u$  dans l'ensemble  $\mathcal{C}(S^1, S^1)$  des applications continues de  $S^1$  dans  $S^1$  (muni de la topologie de la convergence uniforme). On notera  $d = \text{degré}(u)$ .*

On pourra trouver une preuve de ce résultat très classique dans [BG].

## 2. Topologie plane

Sauf mention du contraire,  $\mathbb{R}^2$  est muni de la distance  $d(x, y) = \|x - y\|$  où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.

On convient des notations suivantes :

Pour  $a \in \mathbb{R}^2$  et  $r \geq 0$ ,  $B(a, r) = \{m \in \mathbb{R}^2 \mid d(a, m) \leq r\}$  et plus simplement  $B = B((0, 0), 1)$ ,  $rB = B((0, 0), r)$ .

Pour  $X \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\partial X$  désignera la frontière de  $X$  sauf dans le cas suivant : si  $X$  est un arc simple dans  $\mathbb{R}^2$  (i.e. l'image d'une application continue injective de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^2$ ) alors on notera par  $\partial X$  l'ensemble constitué des deux extrémités de  $X$ .

L'identification  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  permettra d'écrire  $aE$  pour tout  $a \in \mathbb{R}^2$  et toute partie  $E$  de  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.1. Le théorème de point fixe de Brouwer.

THÉORÈME 2.1.1. — *Toute application continue de  $B$  dans  $B$  possède un point fixe.*

Ce théorème est bien sûr très connu. On pourra trouver une généralisation en toute dimension dans [Du] par exemple.

## 2.2. Le théorème de Jordan.

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS 2.2.1.

- *Un cercle topologique (dans  $\mathbb{R}^2$ ), ou bien une courbe simple fermée (ou encore une courbe de Jordan) est l'image d'un plongement (i.e. d'une application continue injective) de  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^2$ .*
- Si  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un plongement de  $S^1$  et  $x \notin C = \alpha(S^1)$  l'indice de  $x$  par rapport à  $C$  est le degré de l'application

$$S^1 \longrightarrow S^1$$
$$t \longmapsto \frac{\alpha(t) - x}{\|\alpha(t) - x\|}.$$

Il sera noté  $\text{ind}(x, C)$ . Au signe près, il ne dépend pas de la paramétrisation  $\alpha$  choisie pour  $C$ . De plus, si  $(\alpha_s)_{0 \leq s \leq 1}$  est une homotopie entre deux plongements  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  de  $S^1$  et  $x \notin \alpha_s(S^1)$  pour tout  $s \in [0, 1]$ , on a  $\text{ind}(x, \alpha_0(S^1)) = \text{ind}(x, \alpha_1(S^1))$ .

THÉORÈME 2.2.2. — *Pour toute courbe de Jordan  $C$ ,  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  a exactement deux composantes connexes dont  $C$  est la frontière commune. L'une d'elles, appelée intérieur de  $C$  et notée  $\text{int}(C)$ , est bornée, l'autre, appelée extérieur de  $C$  et notée  $\text{ext}(C)$ , est non bornée.*

Pour  $x \notin C$ , on a de plus :

$$x \in \text{int}(C) \iff \text{ind}(x, C) = \pm 1$$
$$x \in \text{ext}(C) \iff \text{ind}(x, C) = 0.$$

Ce résultat classique de topologie est, par exemple, démontré dans [Ne]. Il se généralise au cas d'un plongement de  $S^n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

DÉFINITION 2.2.3. — Une courbe de Jordan  $C$  est *positivement orientée*, ou *parcourue dans le sens positif*, si l'on a fixé une paramétrisation  $\alpha$  de  $C$  telle que, pour tout  $x \in \text{int}(C)$ ,  $\text{ind}(x, C) = +1$ .

**Dans la suite, toute courbe de Jordan dont on ne précise pas une paramétrisation sera supposée positivement orientée.**

### 2.3. Le théorème de Schoënfliès.

THÉORÈME 2.3.1. — Soient  $C$  et  $C'$  deux cercles topologiques dans  $\mathbb{R}^2$ . Tout homéomorphisme  $\varphi : C \rightarrow C'$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\text{int}(C) \cup C$  sur  $\text{int}(C') \cup C'$  (et donc se prolonge en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ ).

On trouvera, par exemple, une preuve dans [Ne].

Complément (bien connu). — Soit  $\alpha$  une paramétrisation de  $C$ . Si l'on suppose de plus que

$\forall x \in \text{int}(C), \forall x' \in \text{int}(C'), \text{ind}(x, C) = \text{ind}(x', C')$  (où  $C'$  est paramétrée par  $\varphi \circ \alpha$ ), et si  $D$  est un disque fermé tel que  $C \cup C' \subset \overset{\circ}{D}$  (resp.  $D \subset \text{int}(C) \cap \text{int}(C')$ ), il existe un homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  prolongeant  $\varphi$  de telle façon que  $h|_{D^c} = \text{Id}_{D^c}$  (resp.  $h|_D = \text{Id}_D$ ).

### 2.4. Indice d'un point fixe isolé.

Pour toute application  $f$ ,  $\text{Fix}(f)$  désigne l'ensemble des points fixes de  $f$ .

#### PROPRIÉTÉS ET DÉFINITIONS 2.4.1.

(1) Soient  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  et  $C$  un cercle topologique dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\text{Fix}(h) \cap C = \emptyset$ . On appelle *degré de  $h$  le long de  $C$* , et on note  $d(h, C)$  le degré (au sens du paragraphe 1) de l'application

$$S^1 \longrightarrow S^1$$

$$t \longmapsto \frac{h(\alpha(t)) - \alpha(t)}{\|h(\alpha(t)) - \alpha(t)\|}$$

où  $\alpha$  est une paramétrisation positive de  $C$ . Ce nombre ne dépend pas du choix de  $\alpha$ .

On a la propriété suivante qui se déduit de la proposition 1.1 :

Si  $(\alpha_s)_{0 \leq s \leq 1}$  est une homotopie de plongements de  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\text{Fix}(h) \cap \alpha_s(S^1) = \emptyset$  pour tout  $s \in [0, 1]$ , alors  $d(h, \alpha_0(S^1)) = d(h, \alpha_1(S^1))$ .

(2) Si  $m \in \mathbb{R}^2$  est un point fixe isolé d'un homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^2$ , on appelle *indice de  $m$* , et on note  $\text{ind}(h, m)$  le degré  $d(h, C)$ , où  $C$  est une courbe de Jordan telle que  $m \in \text{int}(C)$  et  $C \subset B(m, \rho)$ , avec  $\rho > 0$  assez petit pour que  $B(m, \rho) \cap \text{Fix}(h) = \{m\}$ .

Ce nombre ne dépend ni du choix de  $\rho$ , ni du choix de  $C$ .

Remarque 2.4.2. — Ces définitions et propriétés s'adaptent sans difficulté au cas où  $h$  est un homéomorphisme entre deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ , ce qui permet de définir l'indice d'un point fixe isolé d'un homéomorphisme de surface.

## 2.5. Homéomorphismes préservant l'orientation.

Soient  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une paramétrisation d'une courbe de Jordan  $C = \alpha(S^1)$  telle que  $x \in \text{int}(C)$ .

Pour un homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^2$ , considérons la courbe de Jordan  $h(C)$  paramétrée par  $h \circ \alpha$ . Comme  $h(x) \in h(\text{int}(C)) = \text{int}(h(C))$ , il existe d'après le théorème de Jordan un entier  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  tel que

$$\text{ind}(x, C) = \varepsilon \text{ind}(h(x), h(C)).$$

Cet entier  $\varepsilon$  ne dépend pas de la courbe de Jordan  $C$  telle que  $x \in \text{int}(C)$ , d'après la propriété d'invariance du degré par homotopie (cf. propriétés 2.2.1).

On a de plus  $\text{ind}(x', C) = \text{ind}(x, C)$  pour tout  $x' \in \text{int}(C)$ . La fonction  $x \mapsto \varepsilon$  est ainsi localement constante donc constante sur  $\mathbb{R}^2$ .

On dira que  $h$  *préserve l'orientation* si la fonction  $x \mapsto \varepsilon$  est constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}^2$  et que  $h$  *renverse l'orientation* dans le cas contraire.

On adapte facilement cette définition au cas d'un homéomorphisme entre deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ . Pour  $x \in U$ , on choisit  $\rho > 0$  assez petit pour que  $B(x, \rho) \subset U$  et on procède comme ci-dessus en considérant les courbes de Jordan  $C$  telles que  $x \in \text{int}(C) \subset B(x, \rho)$ .

On peut ainsi donner la définition d'une surface (connexe) orientable puis celle d'un homéomorphisme préservant l'orientation entre deux telles variétés.

## 3. Espaces d'homéomorphismes

On note  $\text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$  l'ensemble des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, et

$$\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2) = \{h \in \text{Homéo}(\mathbb{R}^2) \mid h \text{ préserve l'orientation}\},$$

avec la topologie induite.

On rappelle (cf. [Fo]) qu'un chemin  $t \mapsto h_t \in \text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , s'identifie alors à l'homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  défini par  $H(x, t) = (h_t(x), t)$  et appelé *isotopie*. L'ensemble  $\text{Homéo}(\mathbb{R}^2 \times I)$  des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2 \times I$  étant aussi muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts, une homotopie  $s \mapsto (h_{s,t})_{0 \leq t \leq 1}$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , de  $(h_{0,t})_{0 \leq t \leq 1}$  à  $(h_{1,t})_{0 \leq t \leq 1}$  est identifiée à un chemin dans  $\text{Homéo}(\mathbb{R}^2 \times I)$ .

De plus,  $\text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$  et  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  ont une structure de groupe topologique (cf. [Ar]).

PROPOSITION 3.1. (L'isotopie d'Alexander). — Si  $h \in \text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$  est tel que  $h|_C = \text{Id}_C$  pour un cercle topologique  $C$ , alors il existe une isotopie  $H = (h_t)_{0 \leq t \leq 1}$  de  $h_0 = h$  à  $h_1 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ .

Vérification. — Avec le théorème de Schoënfliès, on peut supposer que  $C = S^1$ . On pose alors, pour  $0 \leq t < 1$

$$h_t(m) = \begin{cases} m & \text{si } 1-t \leq \|m\| \leq \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{1-t} h((1-t)m) & \text{si } \|m\| \geq \frac{1}{1-t} \\ (1-t)h\left(\frac{1}{1-t}m\right) & \text{si } \|m\| \leq 1-t \end{cases}$$

et  $h_1 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ .

Cette «astuce» est d'un usage fréquent dans toute la thèse.

THÉORÈME 3.2. —  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  est connexe par arcs.

Ce résultat est bien connu. On en donne une preuve rapide :

Soit  $h \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$ . Avec le théorème de Schoënfliès et son complément, on sait qu'il existe  $g \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  tel que :

$$g|_{S^1} = h|_{S^1} \quad \text{et} \quad g|_{D^c} = \text{Id}_{D^c}$$

où  $D$  est un disque assez grand pour que  $S^1 \cup h(S^1) \subset \overset{\circ}{D}$ .

La proposition 3.1 donne une isotopie  $(g_t)_{0 \leq t \leq 1}$  de  $g_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  à  $g_1 = g$  et  $(g_t^{-1} \circ h)_{0 \leq t \leq 1}$  est alors une isotopie de  $h$  à  $h_1 = g^{-1} \circ h$ , avec  $h_1|_{S^1} = \text{Id}_{S^1}$ . On conclut avec une nouvelle utilisation de la proposition 3.1.

Terminons ce paragraphe par le résultat suivant, qui s'obtient facilement avec la proposition 1.1 et qui sera implicitement utilisé dans les appendices du chapitre III :

PROPRIÉTÉ 3.3. — Si  $(h_s)_{0 \leq s \leq 1}$  est un chemin dans  $\text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$  et  $C$  un cercle topologique dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\text{Fix}(h_s) \cap C = \emptyset$  pour tout  $s \in [0, 1]$ , alors le degré  $d(h_0, C)$  de  $h_0$  le long de  $C$  est égal au degré  $d(h_1, C)$  de  $h_1$  le long de  $C$ .

## 4. Homéomorphismes de Brouwer

Un homéomorphisme de Brouwer est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation et sans point fixe. L'ensemble de ces homéomorphismes est noté  $\mathcal{H}$ , avec la topologie induite par celle de  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$ .

#### 4.1. Arcs de translation et trajectoires.

DÉFINITIONS 4.1.1.

- Si  $h \in \text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$ , un arc de translation (pour  $h$ ) est un arc simple  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\partial\alpha = \{m, h(m)\}$  (où  $m \in \mathbb{R}^2$ ) et  $\alpha \cap h(\alpha) \subset \{m, h(m)\}$ .
- La trajectoire (pour  $h$ ) engendrée par  $\alpha$  est l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^{-n}(\alpha)$ .

On a le résultat suivant (cf. [Bn1] ou [Gu], lemme 3.2 et théorème 3.3).

THÉORÈME 4.1.2. — Soit  $h \in \mathcal{H}$ . Alors :

- (1) Par tout point  $m$  de  $\mathbb{R}^2$  passe un arc de translation (et donc une trajectoire).
- (2) Les trajectoires sont sans point double (et donc  $h$  n'a pas de point périodique).

On peut de plus démontrer que les trajectoires sont des sous-variétés de  $\mathbb{R}^2$  (cf. [Gu], proposition 3.6). Nous donnons seulement la méthode permettant de vérifier la première affirmation du théorème :

Puisque  $m \neq h(m)$ , il existe  $\rho > 0$  assez petit pour que  $B(m, \rho) \cap h(B(m, \rho)) = \emptyset$ . On considère  $R = \sup\{\rho > 0 \mid B(m, \rho) \cap h(B(m, \rho)) = \emptyset\}$  et  $D = B(m, R)$ .

Ainsi  $\overset{\circ}{D} \cap h(\overset{\circ}{D}) = \emptyset$  et  $\partial D \cap h(\partial D) \neq \emptyset$ . On choisit  $z \in \partial D \cap h(\partial D)$ , et tout arc simple vérifiant  $\partial\alpha = \{z, h^{-1}(z)\}$  et  $m \in \alpha \setminus \partial\alpha \subset \overset{\circ}{D}$  répond à la question.

Remarquons aussi que, si  $h$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$  soit connexe, on peut faire passer de même un arc de translation par tout point  $m \notin \text{Fix}(h)$  : il suffit de remplacer le disque  $D = B(m, R)$  ci-dessus par un disque topologique fermé inclus dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ , vérifiant  $m \in \overset{\circ}{D}$ ,  $\overset{\circ}{D} \cap h(\overset{\circ}{D}) = \emptyset$  et  $\partial D \cap h(\partial D) \neq \emptyset$ . Ceci sera utilisé dans les appendices du chapitre III.

#### 4.2. Errance des points sous l'action de $h \in \mathcal{H}$ .

La propriété suivante est au cœur de la dynamique des homéomorphismes de Brouwer. Elle s'obtient rapidement à partir du théorème 4.1.2. On verra qu'elle joue un rôle essentiel dans la preuve de nos deux théorèmes principaux (cf. lemme II. 7 et sous-lemme III. 1.3.7).

PROPOSITION 4.2.1. (cf. [Fa] ou [Gu], proposition 3.5). — Si  $h \in \mathcal{H}$  et  $D$  est un disque fermé tel que  $D \cap h(D) = \emptyset$ , alors  $D \cap h^n(D) = \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  (autrement dit, les points du plan errent sous l'action de  $h \in \mathcal{H}$ ). Par conséquent, l'orbite  $\{h^n(m) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  de tout point  $m \in \mathbb{R}^2$  est sans point d'accumulation.

On notera dorénavant  $\text{orb}_h(m) = \{h^n(m) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

### 4.3. Le théorème de translation plane de Brouwer.

On peut l'écrire sous les deux formes (équivalentes) suivantes :

THÉORÈME 4.3.1. — Soient  $h \in \mathcal{H}$  et  $m \in \mathbb{R}^2$ .

**1<sup>er</sup> énoncé :** *il existe une application  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continue injective telle que*

- (1)  $\varphi(0) = m$ .
- (2)  $h \circ \varphi = \varphi \circ \tau$ , où  $\tau$  désigne la translation de vecteur  $(1, 0)$ .
- (3)  $\varphi(\{x\} \times \mathbb{R})$  est fermé dans  $\mathbb{R}^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

*On dit que  $\varphi$  est une conjugaison semi-locale entre  $h$  et  $\tau$  ;  $h$  est bien sûr conjugué à  $\tau$  si, et seulement si, on peut avoir  $\varphi$  surjective.*

**2<sup>e</sup> énoncé :** *il existe une droite topologique  $L$  (i.e. un ensemble homéomorphe à  $\mathbb{R}$ ) fermée dans  $\mathbb{R}^2$  (qui sépare donc  $\mathbb{R}^2$  en deux composantes connexes d'après le théorème de Jordan) telle que :*

- (1)  $m \in L$ .
- (2)  $L \cap h(L) = \emptyset$ .
- (3)  $h^{-1}(L)$  et  $h(L)$  ne sont pas dans la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus L$ .

La preuve d'origine, donnée par Brouwer (cf. [Br1] ou [Br2]) est en fait contestable, et plusieurs auteurs ont discuté ses imperfections (en particulier celles qui concernent le résultat intermédiaire correspondant ici au théorème 4.1.2). On trouvera dans [Gu] une démonstration complète. Nous utiliserons ce résultat pour obtenir une preuve plus rapide du théorème II.1.1 (cf. remarque II. 1.5).





## ***Chapitre II***

### CONNEXITÉ PAR ARCS



Nous commençons ce chapitre en démontrant la connexité par arcs de  $\mathcal{H}$ . La preuve donnée ici est celle écrite dans [Bo], avec quelques précisions supplémentaires. Elle n'utilise que l'errance de tout point du plan sous l'action d'un homéomorphisme de Brouwer, mais nous signalons comment la simplifier en utilisant le théorème de translation plane. Dans une seconde partie, nous collectons quelques remarques (à comparer avec le lemme 1.7 ci-dessous) sur les différences dynamiques entre deux éléments de  $\mathcal{H}$  qui ne diffèrent que sur un compact.

## 1. Connexité par arcs

THÉORÈME 1.1. —  *$\mathcal{H}$  est connexe par arcs.*

La première étape consiste à modifier, sans introduire de point fixe, un homéomorphisme  $h \in \mathcal{H}$  de telle façon qu'il soit en «position canonique» sur un cercle  $C$ , c'est-à-dire qu'il déplace  $C$  comme le fait la translation  $\tau$  de vecteur  $(1, 0)$  avec le cercle  $2S^1$ . Nous pourrons alors utiliser une version «sans point fixe» de l'isotopie d'Alexander et nous ramener au cas où  $h$  coïncide avec (un conjugué à) la translation  $\tau$  hors du disque  $D = \overline{\text{int}(C)}$ . Un lemme dynamique montrera qu'un tel homéomorphisme  $h \in \mathcal{H}$  est en fait conjugué à  $\tau$  et permettra de conclure.

LEMME 1.2. — *Si  $h \in \mathcal{H}$  et  $\varphi \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$ , il existe une isotopie  $(\varphi_t^{-1} \circ h \circ \varphi_t)_{0 \leq t \leq 1}$  de  $h$  à son conjugué  $\varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$ , dans la classe de conjugaison de  $h$ .*

*Preuve.* — Elle est évidente puisque  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  est connexe par arcs (cf. théorème I.3.2).

LEMME 1.3. — *Si  $g \in \mathcal{H}$  est tel que  $\text{int}(g(S^1)) \cap \text{int}(S^1) = \emptyset$  et  $g(S^1) \cap S^1 \neq \emptyset$ , alors il existe une isotopie sans point fixe de  $g$  à un  $g_1 \in \mathcal{H}$  vérifiant  $\text{int}(g_1(S^1)) \cap \text{int}(S^1) = \emptyset$  et  $\text{Card}(g_1(S^1) \cap S^1) = 1$ .*

*Preuve.* — On choisit  $z \in S^1 \cap g(S^1)$  et un disque topologique fermé  $D$  vérifiant  $\overset{\circ}{D} \subset \text{int}(S^1)$  et  $\partial D \cap S^1 = \{g^{-1}(z), z\}$  (cf. fig II.1).

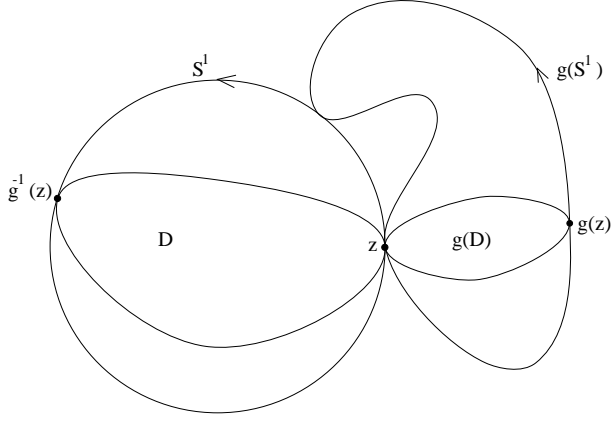


Fig. II.1

On a alors  $\overset{\circ}{D} \cap g(\overset{\circ}{D}) = \emptyset$  et, comme  $g^{-1}(z) \neq g(z)$  (cf. théorème I.4.1.2),  $\partial D \cap g(\partial D) = \{z\}$ . Soit  $\varphi_1$  un homéomorphisme du plan préservant l'orientation tel que  $\varphi_1(\overline{\text{int}(S^1)}) = D$ . Le lemme 1.2 donne une isotopie sans point fixe de  $g$  à  $g_1 = \varphi_1^{-1} \circ g \circ \varphi_1$ , et  $\text{Card}(g_1(S^1) \cap S^1) = 1$ .

LEMME 1.4. — On définit un homéomorphisme  $\tilde{h} \in \mathcal{H}$  de la façon suivante:

$$\tilde{h}(m) = \begin{cases} m + (1/2, 0) & \text{si } m \in \overline{\text{int}(S^1)} \\ m + (\|m\|/2, 0) & \text{si } m \in \text{ext}(S^1) \end{cases}$$

Si  $g_1$  vérifie la conclusion du lemme 1.3, il existe une isotopie sans point fixe de  $g_1$  à un  $g_2 \in \mathcal{H}$  tel que  $g_2|_{S^1} = \tilde{h}|_{S^1}$ .

*Preuve.* — En se plaçant dans  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ , on montre à l'aide du théorème de Schoënfliés qu'il existe un homéomorphisme  $\varphi_1$  à support dans  $\overline{\text{ext}(S^1)}$  tel que  $\varphi_1(g_1(S^1))$  soit un cercle  $C$  vérifiant  $S^1 \cap C = S^1 \cap g_1(S^1)$ . Le lemme 1.2 donne une isotopie sans point fixe de  $g_1$  à  $f_1 = \varphi_1 \circ g_1 \circ \varphi_1^{-1}$ , et  $f_1(S^1) = C$ . Soit  $D$  un disque fermé centré sur l'unique point de  $S^1 \cap f_1(S^1)$ , assez petit pour que  $D \cap f_1(D) = \emptyset$ . Il existe une isotopie  $(\psi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ , à support dans  $D$ , de  $\psi_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  à un homéomorphisme  $\psi_1$  tel que  $\psi_1(D \cap f_1(S^1)) = \alpha$ , où  $\alpha$  est un arc simple tel que  $\alpha \subset D$ ,  $\alpha \cap \partial D = \partial \alpha = \partial(D \cap f_1(S^1))$ ,  $\alpha \cap \text{int}(S^1) \neq \emptyset$ , et  $\text{Card}(\alpha \cap S^1) = 2$  (fig. II.2).

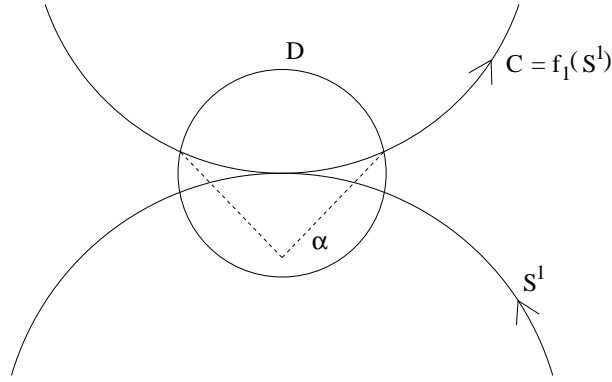


Fig. II.2

L'isotopie  $(\psi_t \circ f_1)_{0 \leq t \leq 1}$  est une isotopie sans point fixe (car  $D \cap f_1(D) = \emptyset$ ) de  $f_1$  à  $f_2 = \psi_1 \circ f_1$ , et  $\text{int}(f_2(S^1)) \cap \text{int}(S^1) \neq \emptyset$ ,  $\text{Card}(f_2(S^1) \cap S^1) = 2$ .

On note  $a_1$  (resp.  $a_2$ ) le point de  $S^1 \cap f_2(S^1)$  où  $f_2(S^1)$  parcouru dans le sens positif entre dans (resp. sort de)  $\text{int}(S^1)$ ,  $a_k' = f_2(a_k)$ ,  $a_k^{-1} = f_2^{-1}(a_k)$ , pour  $k = 1, 2$ . Soit  $o$  un point de  $S^1$  tel que  $o' = f_2(o) \in D$ ; comme  $D \cap f_2(D) = D \cap f_1(D) = \emptyset$ , les points  $o, a_2, a_1$  sont dans cet ordre sur  $S^1$  orienté dans le sens direct, donc  $o', a_2', a_1'$  sont dans cet ordre sur  $f_2(S^1)$ . De même,  $a_k' \in f_2(S^1) \setminus D$  pour  $k = 1, 2$ , ce qui donne l'ordre  $a_2, a_2', a_1', a_1$  sur  $f_2(S^1)$  et donc aussi l'ordre  $a_2^{-1}, a_2, a_1, a_1^{-1}$  sur  $S^1$  (fig. II.3a).

Comparons cette situation à celle de  $S^1 \cap \tilde{h}(S^1)$ : on note  $b_1$  (resp.  $b_2$ ) le point de  $S^1 \cap \tilde{h}(S^1)$  où  $\tilde{h}(S^1)$  parcouru dans le sens positif entre dans (resp. sort de)  $\text{int}(S^1)$ ,  $b_k' = \tilde{h}(b_k)$ ,  $b_k^{-1} = \tilde{h}^{-1}(b_k)$ , pour  $k = 1, 2$  (fig. II.3b).

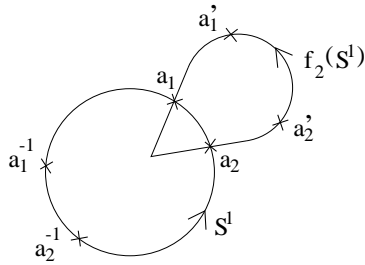


Fig II.3a

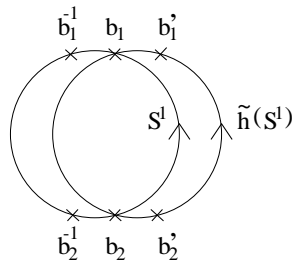


Fig II.3b

Il est clair qu'il existe un homéomorphisme direct  $\phi$  de  $S^1$  sur  $S^1$  vérifiant  $\phi(b_k) = a_k$  et  $\phi(b_k^{-1}) = a_k^{-1}$  pour  $k=1$  et  $2$ . On prolonge  $\phi$  en un homéomorphisme de  $S^1 \cup \tilde{h}(S^1)$  sur  $S^1 \cup f_2(S^1)$  en posant  $\phi|_{\tilde{h}(S^1)} = f_2 \circ \phi|_{S^1} \circ \tilde{h}^{-1}|_{\tilde{h}(S^1)}$ . Alors  $\phi$  est bien défini sur  $S^1 \cap$

$\tilde{h}(S^1)$  car  $f_2 \circ \phi|_{S^1} \circ \tilde{h}^{-1}(b_k) = a_k = \phi|_{S^1}(b_k)$  pour  $k = 1, 2$ . Enfin, on prolonge  $\phi$  en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation à l'aide du théorème de Schoënfliès. Le lemme 1.2 donne une isotopie sans point fixe de  $f_2$  à  $g_2 = \phi^{-1} \circ f_2 \circ \phi$ , et  $g_2|_{S^1} = \tilde{h}|_{S^1}$ .

REMARQUE 1.5. — Le lecteur qui accepte le théorème de translation plane remarquera que la conclusion de ce lemme est vraie pour tout homéomorphisme  $g \in \mathcal{H}$  s'il note que  $\tilde{h}$  est conjugué à  $\tau$ . En effet, une conjugaison semi-locale  $\varphi$  telle que  $\varphi \circ \tilde{h} = g \circ \varphi$  donne immédiatement  $\phi = \varphi|_{S^1 \cup \tilde{h}(S^1)}$  qui conjugue  $\tilde{h}|_{S^1}$  à  $g|_{\varphi(S^1)}$ . La fin de la preuve reste inchangée.

LEMME 1.6. — Si  $g_2$  vérifie la conclusion du lemme 1.4, il existe une isotopie sans point fixe de  $g_2$  à un  $g_3 \in \mathcal{H}$  tel que  $g_3|_{\text{ext}(S^1)} = \tilde{h}|_{\text{ext}(S^1)}$ .

Preuve. — Comme  $\tilde{h}(m) = \|m\| \tilde{h}(\frac{m}{\|m\|})$  pour  $\|m\| \geq 1$ , il suffit de poser pour  $0 \leq t < 1$ ,

$$f_t(m) = \begin{cases} g_2(m) & \text{si } m \in \overline{\text{int } S^1} \\ \tilde{h}(m) & \text{si } 1 \leq \|m\| \leq 1/(1-t) \\ \frac{1}{1-t} g_2((1-t)m) & \text{si } \|m\| \geq 1/(1-t) \end{cases}$$

et

$$g_3(m) = f_1(m) = \begin{cases} g_2(m) & \text{si } m \in \overline{\text{int}(S^1)} \\ \tilde{h}(m) & \text{si } m \in \text{ext}(S^1). \end{cases}$$

LEMME 1.7. — Si  $f_*$  est un homéomorphisme du plan conjugué à la translation  $\tau$  de vecteur  $(1, 0)$  et si  $f \in \mathcal{H}$  coïncide avec  $f_*$  hors d'un compact  $K$ , alors  $f$  est aussi conjugué à  $\tau$ .

Preuve. — Il suffit de faire la démonstration pour  $f_* = \tau$ . On peut supposer que  $K$  est un carré,  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a \text{ et } |y| \leq a\}$ . Si  $L$  est la droite  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -a\}$ , vérifions qu'il existe un entier  $N \geq 0$  tel que  $K$  soit à gauche de  $f^N(L)$ : si ce n'est pas vrai, il existe un point  $p \in K$  qui est à droite de  $f^n(L)$  pour tout  $n \geq 0$ , et donc  $f^{-n}(p)$  à droite de  $L$  pour tout  $n \geq 0$ . Comme le domaine  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a \text{ ou } |y| > a\}$  vérifie  $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$  (car  $f = \tau$  sur  $K^c$ ), on a aussi  $f^{-n}(p) \notin \mathcal{R}$  pour tout  $n \geq 0$ , et donc  $f^{-n}(p) \in K$  pour tout  $n \geq 0$ , ce qui est impossible puisque l'orbite de  $p$  est sans point d'accumulation.

En notant  $\mathcal{U}$  la région du plan entre la droite  $L$  et son image  $f(L)$ , on déduit de ce qui précède que  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{\mathcal{U}}) = \mathbb{R}^2$ . D'après le théorème de Schoënfliès, il existe un homéomorphisme  $\varphi$  de  $\overline{\mathcal{U}}$  sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  tel que  $\varphi|_{f(L)} = \tau \circ \varphi \circ f^{-1}|_{f(L)}$ . On prolonge  $\varphi$

en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  de la façon suivante : pour tout  $m \in \mathbb{R}^2$ , il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $m \in f^n(\overline{\mathcal{U}})$  et on pose  $\varphi(m) = \tau^n \circ \varphi \circ f^{-n}(m)$ . Par construction, on a bien  $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi = f$ .

*Démonstration du théorème.*

Soit  $m_0 \in \mathbb{R}^2$  et  $h \in \mathcal{H}$ . On note  $C_\rho$  le cercle de centre  $m_0$  et de rayon  $\rho > 0$ . Puisque  $h$  est sans point fixe, il existe  $\rho > 0$  tel que  $\text{int}(h(C_\rho)) \subset \text{ext}(C_\rho)$ .

On note  $R = \sup\{\rho > 0 \mid \overline{\text{int}(h(C_\rho))} \subset \text{ext}(C_\rho)\} > 0$ ; ainsi  $C_R \cap h(C_R) \neq \emptyset$  et  $\text{int}(C_R) \cap h(\text{int}(C_R)) = \emptyset$ . On peut supposer que  $C_R = S^1$ . Grâce aux lemmes 1.2 à 1.5, on peut aussi supposer que  $h|_{\text{ext}(S^1)} = \tilde{h}|_{\text{ext}(S^1)}$ ; on vérifie que  $\tilde{h}$  est conjugué à  $\tau$  [par exemple, en considérant la région  $\mathcal{U}$  comprise entre une droite verticale  $L$  et son image  $\tilde{h}(L)$ , en s'assurant que  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}^n(\overline{\mathcal{U}}) = \mathbb{R}^2$ , puis en procédant comme à la fin du lemme 1.7], donc, d'après le lemme 1.7,  $h$  est aussi conjugué à  $\tau$ :  $h = \varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$  pour un homéomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^2$ , que l'on peut choisir préservant l'orientation. Une nouvelle utilisation du lemme 1.2 termine la preuve. ■

## 2. Homéomorphismes de Brouwer coïncidant hors d'un compact et changements de dynamique

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.1. — Soit  $h \in \mathcal{H}$ .

On définit une relation d'équivalence  $\sim$  sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $m \sim m' \Leftrightarrow m' \in \text{orb}_h(m)$ . L'ensemble quotient  $\mathbb{R}^2 / \sim$ , muni de la topologie quotient, est appelé l'espace des orbites de  $h$  et se note  $\mathbb{R}^2 / (h)$ .

- (1) La projection canonique  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / (h)$  est un revêtement ;
- (2)  $\mathbb{R}^2 / (h)$  est muni d'une structure de 2-variété (séparable et connexe) sans bord, orientable, non compacte (et non séparée en général) ;
- (3) un homéomorphisme  $g \in \mathcal{H}$  est conjugué à  $h$  ou à  $h^{-1}$  si, et seulement si,  $\mathbb{R}^2 / (g)$  et  $\mathbb{R}^2 / (h)$  sont homéomorphes.

En particulier  $\mathbb{R}^2 / (h)$  est séparée (et alors homéomorphe à l'anneau ouvert  $S^1 \times \mathbb{R}$ ) si, et seulement si,  $h$  est conjugué à  $\tau$ .

*Preuve.* — Ces résultats sont classiques. On donne rapidement les éléments de la démonstration.

Puisque tous les points errent sous l'action de  $h$ ,  $p$  est un revêtement et donc  $\mathbb{R}^2/(h)$  une surface sans bord (connexe et séparable). Elle est orientable car  $h$  préserve l'orientation. Un résultat non trivial d'Andréa ([An2]) dit que l'orbite  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(K)$  d'un compact  $K$  ne peut être  $\mathbb{R}^2$  tout entier, donc  $\mathbb{R}^2/(h)$  n'est pas compacte.

La première affirmation dans (3) est une conséquence du théorème de relèvement des applications ; enfin, la théorie des revêtements permet d'affirmer que le groupe  $\pi_1(\mathbb{R}^2/(h))$  est isomorphe au groupe  $\{h^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , donc à  $\mathbb{Z}$ . La fin de (3) s'en déduit puisque  $S^1 \times \mathbb{R}$  est l'unique 2-variété séparée (connexe, séparable) sans bord orientable, de groupe fondamental  $\mathbb{Z}$ .

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.2. — Soient  $h \in \mathcal{H}$  et  $m \in \mathbb{R}^2$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes. Si elles sont réalisées, on dit que  $m$  est un point singulier de  $h$  et on note  $m \in S(h)$ .

(1) Il existe un point  $X \in \mathbb{R}^2/(h)$ ,  $X \neq p(m)$ , tel que  $p(m)$  et  $X$  ne soient pas séparés.

(2) Il existe  $m' \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{orb}_h(m)$  tel que : pour tout voisinage  $U$  de  $m$ , pour tout voisinage  $V$  de  $m'$ , il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $h^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

La vérification est laissée au lecteur. Nous le renvoyons aussi à [Na] où est démontré que  $S(h)$  est d'intérieur vide et que  $S(h) \cup \{\infty\}$  est connexe dans  $S^2$ .

REMARQUE 2.3. — On peut vérifier que ces propriétés sont aussi équivalentes à la suivante : la suite  $\{h^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  n'est pas équicontinue en  $m$  pour  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance induite par la métrique usuelle de  $S^2$  (cf. [Ke1]).

On a sans difficulté le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 2.4. — Si  $h \in \mathcal{H}$  et  $g = \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$  où  $\varphi \in \text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$ , alors  $S(g) = \varphi^{-1}(S(h))$ .

DÉFINITIONS 2.5 (extraites de [H-T]). — Soient  $h \in \mathcal{H}$  et  $m \in \mathbb{R}^2$ .

- $m$  est un point (+)-singulier de  $h$  s'il existe  $m' \notin \text{orb}_h(m)$  tel que : pour tout voisinage  $U$  de  $m$ , pour tout voisinage  $V$  de  $m'$ , il existe  $n \geq 0$  tel que  $h^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .
- $m$  est un point (-)-singulier de  $h$  si c'est un point (+)-singulier de  $h^{-1}$ .
- L'ensemble des points (+)-singuliers (resp (-)-singuliers) de  $h$  est noté  $S^+(h)$  (resp.  $S^-(h)$ ) et on a clairement  $S(h) = S^-(h) \cup S^+(h)$ .

On considère un homéomorphisme de Brouwer  $h_1$  et  $D$  un disque fermé vérifiant  $h_1(D) \cap D = \emptyset$ , comme indiqués sur la figure II.4. Explicitement, on peut par exemple



définir

$$h_1(x, y) = \begin{cases} (x+1, y) & \text{si } y \leq 0 \text{ ou } y \geq 2 \\ (x+1-2y, \sqrt{y}) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ (x-3+2y, 1+\sqrt{y-1}) & \text{si } 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

EXEMPLE 2.6. Deux homéomorphismes de Brouwer non conjugués et coïncidant hors d'un voisinage arbitraire d'un point.

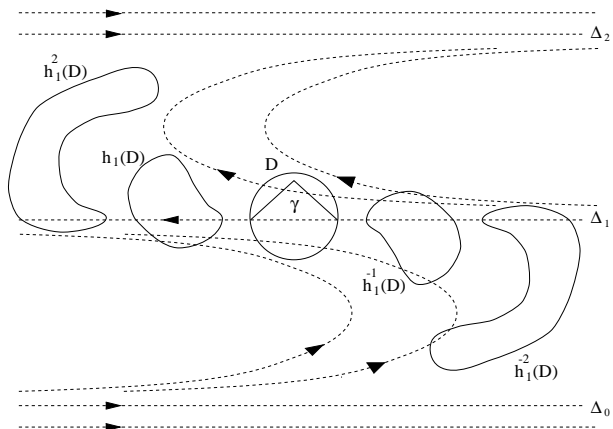


Fig. II.4

Alors  $S(h_1)$  est constitué de trois droites  $\Delta_i = \{(x, y) \mid y = i\}$  pour  $i = 0, 1, 2$ , avec  $\Delta_0 \subset S^+(h_1)$ ,  $\Delta_1 \subset S^+(h_1) \cap S^-(h_1)$ , et  $\Delta_2 \subset S^-(h_1)$ . Choisissons  $\varphi \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$ , à support dans  $D$  tel que  $\varphi(D \cap \Delta_1) = \gamma$ , où  $\gamma$  est un arc simple dans  $D$  comme sur la figure II.4, et posons  $h_2 = \varphi \circ h_1$ . Comme  $h_1(D) \cap D = \emptyset$ , on a bien  $h_2 \in \mathcal{H}$ , et  $h_2$  coïncide avec  $h_1$  hors de  $h_1^{-1}(D)$ . On remarquera que la construction peut être réalisée avec  $D$  arbitrairement petit, pourvu que  $\overset{\circ}{D} \cap \Delta_1 \neq \emptyset$  (cf. aussi la propriété 2.8). On a alors  $D \cap \Delta_1 \subset S^+(h_2)$  (prendre  $m' \in \Delta_2$ ) et  $\gamma \subset S^-(h_2)$  (prendre  $m' \in \Delta_0$ ) donc le cercle topologique  $(D \cap \Delta_1) \cup \gamma$  est inclus dans  $S(h_2)$  et  $h_2$  ne peut être conjugué à  $h_1$  d'après la propriété 2.4.

REMARQUE 2.7. — L'homéomorphisme  $h_2$  construit à partir de  $h_1$  comme ci-dessus est classiquement appelé *une modification libre de  $h_1$*  (cf. définitions III.1.3.1).

PROPRIÉTÉ 2.8. — Soient

$h \in \mathcal{H}$ ,

$D$  un disque (topologique) fermé tel que  $D \cap h(D) = \emptyset$  et vérifiant de plus

$$D \cap S^+(h) = \emptyset \text{ ou } D \cap S^-(h) = \emptyset.$$

Alors tout  $g \in \mathcal{H}$  de la forme  $g = \varphi \circ h$ , avec  $\varphi \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  à support dans  $D$ , est conjugué à  $h$ .

*Preuve.* — Si  $m' \in \overline{\bigcup_{n \geq 0} h^n(D)} \setminus \bigcup_{n \geq 0} h^n(D) \neq \emptyset$ , il existe une suite  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{N}$  et une suite  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dans  $D$  telles que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} h^{n_i}(m_i) = m'$ .

Par compacité de  $D$ , on peut supposer que la suite  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers  $m \in D$ . Si  $U$  (resp.  $V$ ) est un voisinage de  $m$  (resp. de  $m'$ ) on a pour  $i$  assez grand,  $h^{n_i}(m_i) \in h^{n_i}(U) \cap V \neq \emptyset$ . Vérifions alors que  $m' \notin \text{orb}_h(m)$ . Il est clair que  $m' \notin \{h^n(m) \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Choisissons un disque  $D' \supset D$  qui soit un voisinage de  $m$  et qui vérifie  $h(D') \cap D' = \emptyset$ . Avec la proposition I.4.2.1, on obtient  $h^{-n}(D') \cap \left( \bigcup_{k \geq 0} h^k(D') \right) = \emptyset$  pour tout  $n \geq 1$ , et ainsi  $h^{-n}(m) \notin \overline{\bigcup_{k \geq 0} h^k(D)}$ .

On a donc aussi  $m' \notin \{h^{-n}(m) \mid n \geq 1\}$ , ce qui donne bien  $m \in D \cap S^+(h) \neq \emptyset$ .

De même, s'il existe  $m' \in \overline{\bigcup_{n \geq 0} h^{-n}(D)} \setminus \bigcup_{n \geq 0} h^{-n}(D)$  on obtient  $m \in D \cap S^-(h) \neq \emptyset$ .

L'un des ensembles  $\bigcup_{n \geq 0} h^n(D)$  ou  $\bigcup_{n \geq 0} h^{-n}(D)$  est donc fermé.

Posons alors

$$f_1(m) = \begin{cases} m & \text{si } m \notin \bigcup_{n \geq 0} h^n(D) \\ h^n \circ \varphi^{-1} \circ h^{-n}(m) & \text{si } m \in h^n(D) \text{ avec } n \geq 0 \end{cases}$$

et

$$f_2(m) = \begin{cases} m & \text{si } m \notin \bigcup_{n \leq -1} h^n(D) \\ h^n \circ \varphi \circ h^{-n}(m) & \text{si } m \in h^n(D) \text{ avec } n \leq -1. \end{cases}$$

Ces fonctions sont bien définies (car  $D \cap h(D) = \emptyset$ , donc  $h^p(D) \cap h^q(D) = \emptyset$  pour  $p \neq q$ , cf. proposition I.4.2.1) et on vérifie que ce sont des bijections de  $\mathbb{R}^2$  telles que  $g = f_1^{-1} \circ h \circ f_1 = f_2^{-1} \circ h \circ f_2$ .

Si  $\bigcup_{n \geq 0} h^n(D)$  (resp.  $\bigcup_{n \geq 0} h^{-n}(D)$ ) est fermé, alors  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) est continue, ainsi que son inverse, ce qui démontre la propriété.

*Remarque 2.9.* — Si  $h$  est «l'homéomorphisme de Reeb» (que l'on définit précisément dans la preuve de la proposition III.3.2), tout disque (topologique) fermé vérifiant  $D \cap h(D) = \emptyset$  est nécessairement disjoint de  $S^-(h)$  ou de  $S^+(h)$ . La propriété 2.8 montre donc que l'on ne sort pas de la classe de conjugaison de l'homéomorphisme de Reeb par modification libre (au sens de la remarque 2.7).

L'exemple suivant montre que la propriété 2.8 peut être mise en défaut avec seulement  $D \cap S^+(h) \neq \emptyset$  et  $D \cap S^-(h) \neq \emptyset$ , sans avoir (contrairement à l'exemple 2.6)  $S^+(h) \cap S^-(h) \neq \emptyset$ .

EXEMPLE 2.10. — On considère  $h_3 \in \mathcal{H}$  et  $D$  un disque (topologique) fermé vérifiant  $h_3(D) \cap D = \emptyset$ , comme indiqués sur la figure II.5. Explicitement, on a par exemple

$$h_3(x, y) = \begin{cases} (x+1, y) & \text{si } y \leq 0 \text{ ou } y \geq 3 \\ (x+1-2y, \sqrt{y}) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ (x-1, y) & \text{si } 1 \leq y \leq 2 \\ (x-5+2y, 2+\sqrt{y-2}) & \text{si } 2 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

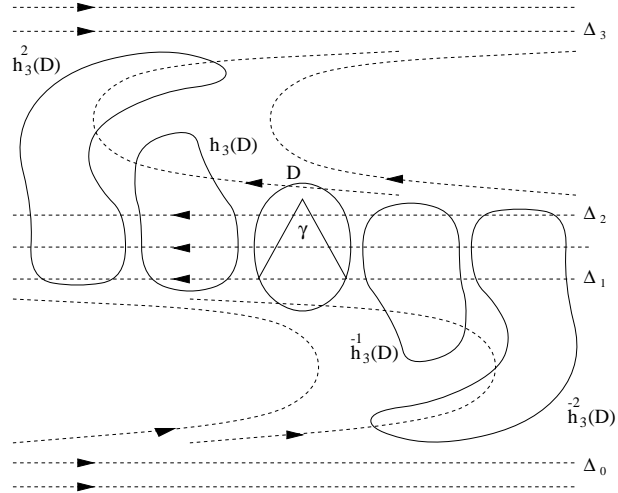


Fig. II.5

$S(h_3)$  est constitué de quatre droites  $\Delta_i = \{(x, y) \mid y = i\}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , avec  $S^-(h_3) = \Delta_3 \cup \Delta_1$  et  $S^+(h_3) = \Delta_0 \cup \Delta_2$ .

Choisissons  $\varphi \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  à support dans  $D$  tel que  $\varphi(D \cap \Delta_1)$  soit un arc  $\gamma$  comme sur la figure II.5 et notons  $a$  un point de  $\gamma \cap \Delta_2$ . En définissant  $h_4 = \varphi \circ h_3$  on a  $a \in S^+(h_4) \cap S^-(h_4) \neq \emptyset$  donc  $h_4$  et  $h_3$  ne sont pas conjugués.



### ***Chapitre III***

#### PROPRIÉTÉS LOCALES DE $\mathcal{H}$



Ce chapitre est principalement consacré aux propriétés locales de  $\mathcal{H}$ . Nous commençons par démontrer la contractibilité locale : la preuve s'appuie d'une part sur une proposition («Handle straightening lemma») d'Edwards et Kirby et d'autre part sur la notion de «position canonique» d'un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sans point fixe le long d'un cercle. Nous utilisons aussi cette dernière technique pour démontrer que la connaissance d'un homéomorphisme de Brouwer sur un ensemble compact ne permet pas de savoir s'il est conjugué ou non à une simple translation. Au passage, ceci donne la densité des conjugués à la translation dans  $\mathcal{H}$ , et donc une autre preuve de la connexité de  $\mathcal{H}$ .

Enfin, nous contournons l'absence de structure de groupe pour obtenir une propriété locale plus forte que la contractibilité locale : il existe un sous-ensemble dense dans  $\mathcal{H}$  dont chaque point  $h$  admet un voisinage  $V$  qui se déforme sur  $\{h\}$  en laissant  $h$  fixe.

## 1. Contractibilité locale

### 1.1. Énoncé du résultat.

THÉORÈME 1.1.1. —  $\mathcal{H}$  est localement contractible.

Précisément, pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , pour tout voisinage  $\Omega$  de  $h$  dans  $\mathcal{H}$ , il existe un voisinage  $\Omega'$  de  $h$  dans  $\mathcal{H}$  et il existe une application  $\xi : \Omega' \times [0,1] \rightarrow \Omega$  continue telle que :

$$(g, t) \mapsto \xi(g, t) = \xi_t(g)$$

$$\forall g \in \Omega', \quad \xi_0(g) = g, \quad \xi_1(g) = h_0 \in \Omega \text{ où } h_0 \text{ est indépendant de } g.$$

COROLLAIRE 1.1.2. — L'ensemble  $\mathcal{H}_1 = \{h \in \mathcal{H} \mid h(0,0) = (1,0)\}$  est localement contractible.

Preuve du corollaire 1.1.2. — Soient  $h \in \mathcal{H}_1$  et  $V$  un voisinage de  $h$  dans  $\mathcal{H}_1$ . Dans ce qui suit, on identifie  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ . En particulier  $(0,0) = 0$  et  $(1,0) = 1$ . D'autre part, pour  $K$  compact de  $\mathbb{R}^2$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(K, U)$  désigne l'ensemble  $\{g \in \mathcal{H} \mid g(K) \subset U\}$ .

On peut supposer  $V$  de la forme  $V = \left( \bigcap_{i=1}^n (K_i, U_i) \right) \cap \mathcal{H}_1$ . Pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , on sait construire deux compacts  $K'_i$  et  $K''_i$  tels que  $K_i \subset \overset{\circ}{K}'_i$  et  $h(K'_i) \subset \overset{\circ}{K}''_i \subset K''_i \subset U_i$ . Ainsi  $h \in (K'_i, \overset{\circ}{K}''_i) \subset (K_i, U_i)$ .

En utilisant la compacité des  $K_i$  et  $K_i''$ , on vérifie qu'il existe  $\varepsilon \in ]0,1[$  tel que :

$$a \in B(1, \varepsilon) \Rightarrow aK_i \subset \overset{\circ}{K}_i' \text{ et } \frac{1}{a}K_i'' \subset U_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Ainsi pour tout  $g \in (K_i', \overset{\circ}{K}_i')$  et pour tout  $a \in B(1, \varepsilon)$  on a  $\frac{1}{a}g(aK_i) \subset U_i$ .

Notons  $\Omega = \bigcap_{i=1}^n (K_i', \overset{\circ}{K}_i') \cap (\{0\}, \overset{\circ}{B}(1, \varepsilon))$ , qui est un voisinage de  $h$  dans  $\mathcal{H}$ . Choisissons alors une application  $\xi$  et un voisinage  $\Omega'$  de  $h$  dans  $\mathcal{H}$  donnés par le théorème 1.1.1.

On considère

$$\begin{aligned} \phi : (\Omega' \cap \mathcal{H}_1) \times [0,1] &\rightarrow \mathcal{H}_1 \\ (g,t) &\mapsto \phi(g,t) = \phi_t(g) \end{aligned}$$

avec  $\phi_t(g) = S\left(\frac{1}{\xi_t(g)(0)}\right) \circ \xi_t(g) \circ S(\xi_t(g)(0))$  où, pour  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $S(a)$  désigne la similitude  $z \mapsto az$ .

Pour tout  $g \in \Omega' \cap \mathcal{H}_1$  et pour tout  $t \in [0,1]$  on a clairement  $\phi_t(g) \in \mathcal{H}_1$  et  $\phi_1(g)$  indépendant de  $g$ . De plus  $\phi_t(g) \in \bigcap_{i=1}^n (K_i, U_i)$  par choix de  $\Omega$ .

*Remarque 1.1.3.*

(1) Ce corollaire peut s'obtenir directement à partir de la preuve du théorème 1.1.1 en utilisant une version relative du lemme d'Edwards et Kirby.

(2) L'intérêt de ce résultat est dans la décomposition en produit donnée par la proposition IV.8.

## 1.2. Le lemme d'Edwards et Kirby.

On convient des notations suivantes :

$$P\ell(4B; \mathbb{R}^2) = \{\varphi : 4B \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \varphi \text{ continue injective}\},$$

muni de la topologie de convergence uniforme

$$P\ell(4B; B; \mathbb{R}^2) = \{\varphi \in P\ell(4B; \mathbb{R}^2) \mid \varphi|_B = \text{Id}_B\}$$

$\eta$  désigne l'inclusion  $4B \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ .

PROPOSITION 1.2.1. «HANDLE STRAIGHTENING LEMMA». — *Il existe un voisinage  $V$  de  $\eta$  dans  $P\ell(4B; \mathbb{R}^2)$  et il existe une application  $\Psi : V \times [0,1] \rightarrow P\ell(4B; \mathbb{R}^2)$  continue*

$$(\varphi, t) \mapsto \Psi(\varphi, t) = \Psi_t(\varphi)$$

*vérifiant*

$$(1) \quad \Psi_0(\varphi) = \varphi \text{ et } \Psi_1(\varphi) \in P\ell(4B; B; \mathbb{R}^2) \quad \forall \varphi \in V.$$

$$(2) \quad \Psi_t(\varphi)|_{4S^1} = \varphi|_{4S^1} \quad \forall \varphi \in V, \quad \forall t \in [0,1].$$



$$(3) \quad \Psi_t(\eta) = \eta \quad \forall t \in [0,1].$$

C'est un cas particulier du lemme 4.1 de [EK] qui est en fait déjà contenu dans [K]. La propriété (3) et la compacité de  $[0,1]$  donnent facilement le

**COROLLAIRE 1.2.2.** — *Pour tout voisinage  $W$  de  $\eta$  dans  $\mathcal{P}\ell(4B; \mathbb{R}^2)$ , on peut choisir  $V$  dans la proposition précédente pour que  $\Psi(V \times [0,1]) \subset W$ .*

### 1.3. Position canonique d'un homéomorphisme de Brouwer sur un grand cercle.

Nous avons déjà évoqué l'idée de position canonique sur un cercle pour un homéomorphisme de Brouwer. De façon générale, si  $h \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  et  $C = \partial D$  est un cercle tel que  $\text{Fix}(h) \cap C = \emptyset$  (en particulier si  $C$  entoure un point fixe isolé de  $h$ , ou, comme dans notre cas, si  $\text{Fix}(h) = \emptyset$ ), l'idée est de perturber  $h$ , par isotopie, sans modifier l'ensemble des points fixes, pour avoir  $h(D) \cap D$  le plus simple possible, c'est-à-dire connexe et avec  $h(C) \cap C$  contenant un nombre (fini !) minimal de points.

Ce programme est déjà présent chez Schmitt (cf. [Sc2]) mais la réduction au cas où  $h(D) \cap D$  est connexe reste obscure. Slaminka semble contourner la difficulté en modifiant à la fois  $h$  et  $C$  (et en imposant que le degré de  $h$  le long de  $C$  soit différent de 1) mais la difficulté traitée dans le sous-lemme 1.3.7 ci-dessous n'est même pas mentionnée dans [PS] et une solution est seulement ébauchée dans [SI], pages 436 et 437. Après quelques définitions, nous reprenons ces idées pour obtenir un résultat adapté à notre situation.

#### DÉFINITIONS 1.3.1.

- Pour  $h \in \text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^2$  est dit  *$h$ -libre* si  $h(A) \cap A = \emptyset$ .
- Pour  $h \in \text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$ , on dit que  $h' \in \text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$  est une *modification libre de  $h$*  (ou simplement, *une modification de  $h$* ) s'il existe une suite  $h_1, \dots, h_n$  dans  $\text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$  telle que

$$h_1 = h, \quad h_n = h'$$

$$\forall i = 1, \dots, n-1 \quad h_{i+1} = \varphi_i \circ h_i \quad \text{où} \quad \varphi_i \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$$

a son support contenu dans une réunion  $\bigsqcup_j D_{i,j}$  (finie ou dénombrable) de disques topologiques fermés  $D_{i,j}$  deux à deux disjoints,  $h_i$ -libres, vérifiant  $\varphi_i(D_{i,j}) = D_{i,j}$ .

- De plus, on dit que  $h'$  est une modification de  $h$  *loin de  $F \subset \mathbb{R}^2$*  si  $h_i^{-1}(D_{i,j}) \cap F = \emptyset$ , pour tout couple  $(i, j)$ .
- Pour  $C$  cercle topologique dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\alpha$  un autre cercle topologique dans  $\mathbb{R}^2$  (resp. un arc simple vérifiant  $\partial\alpha \cap C = \emptyset$ ) on dit que *l'intersection  $C \cap \alpha$  est propre* si elle est de cardinal fini et si elle est transverse (i.e. pour tout  $x \in C \cap \alpha$ , il existe  $U_x$

voisinage de  $x$  dans  $\alpha$  tel que  $U_x \setminus \{x\}$  ait exactement deux composantes connexes, l'une incluse dans  $\text{int}(C)$ , l'autre dans  $\text{ext}(C)$ .

PROPRIÉTÉ 1.3.2.

- $h'$  modification de  $h \Rightarrow \text{Fix}(h') = \text{Fix}(h)$  (en particulier  $h \in \mathcal{H} \Rightarrow h' \in \mathcal{H}$ ). Si de plus  $C$  est un cercle (topologique) disjoint de  $\text{Fix}(h)$ , alors  $d(h, C) = d(h', C)$ .
- $h'$  modification de  $h$  loin de  $F \Rightarrow h'|_F = h|_F$ .

*Preuve.* — La seule affirmation qui n'est pas tout à fait immédiate est celle d'invariance du degré le long de  $C$  : elle s'obtient en choisissant une isotopie d'Alexander dans chaque disque  $D_{i,j}$  et en utilisant la propriété 1.3.3.

PROPOSITION 1.3.3. — Soient  $h \in \mathcal{H}$  et  $0 < r < R$  tels que

$$\begin{cases} h(0) \in rB \\ rB \subset h^{-1}(R \overset{\circ}{B}) \cap R \overset{\circ}{B} \cap h(R \overset{\circ}{B}) \cap h^2(RB). \end{cases}$$

Alors il existe  $C'$  cercle topologique bordant  $D' = \overline{\text{int}(C')} \subset RB$  et il existe  $h'$  modification de  $h$  loin de  $rB$  tels que

- (1)  $rB \subset \overset{\circ}{D}' \cap h'(\overset{\circ}{D}')$ .
- (2)  $C' \cap h'(C)$  est propre et  $D' \cap h'(D')$  est connexe.
- (3)  $\text{Card}(C' \cap h'(C')) = 2$ ; en notant  $a_1$  (resp.  $a_2$ ) le point de  $C' \cap h'(C')$  où  $h'(C')$  parcouru dans le sens positif entre dans (resp. sort de)  $D'$  on a de plus  $h'^{-1}(a_2), a_2, a_1, h'^{-1}(a_1)$  dans cet ordre sur  $C'$  et  $a_2, h'(a_2), h'(a_1), a_1$  dans cet ordre sur  $h'(C')$ .

LEMME 1.3.4. — Soient  $h \in \mathcal{H}$ ,  $C = \lambda S^1$  (où  $\lambda > 0$ ),  $\alpha$  un cercle topologique dans  $\mathbb{R}^2$  et  $W$  un voisinage de  $h(\alpha)$ . Alors il existe  $h'$  modification de  $h$  loin de  $h^{-1}(W^c)$  telle que :

- (1)  $h'(\alpha)$  est linéaire par morceaux.
- (2)  $h'(\alpha) \subset W$ .
- (3)  $h'(\alpha) \cap C$  est propre.

*Preuve.* — L'existence de  $h'$  modification de  $h$  loin de  $h^{-1}(W^c)$  vérifiant (1) et (2) s'obtient avec la technique utilisée par Epstein pour démontrer son théorème A1 (cf. [Ep], appendice). Alors  $h'(\alpha) \cap C$  est de cardinal fini et les éventuels points d'intersection non transverse s'éliminent facilement avec des modifications de  $h$  loin de  $h^{-1}(W^c)$ .

Le lemme suivant, techniquement délicat, voit sa preuve finir page 50. (En particulier, il nous a semblé plus clair de choisir *a priori* les arcs  $\alpha_i$  ci-dessous puis de les considérer simultanément, plutôt que l'un après l'autre.) Les idées essentielles se trouvent dans le sous-lemme 1.3.6 et au début de la preuve du sous-lemme 1.3.7.

LEMME 1.3.5. — Soient  $h, d = rB, D = RB$  comme dans la proposition 1.3.3. On suppose de plus que  $\partial D \cap h(\partial D)$  est propre et que  $D \cap h(D)$  a  $N + 1 \geq 2$  composantes connexes.

Alors il existe  $h'$  modification de  $h$  loin de  $d \cup \partial D$  et il existe  $C'$  cercle topologique bordant  $D' = \overline{\text{int}(C')} \subset D$  tels que

- (1)  $h'(C') \cap C'$  est propre.
- (2)  $d \subset \overset{\circ}{D}' \cap h'(\overset{\circ}{D}')$ .
- (3)  $h'(D') \cap D'$  est connexe.

*Preuve.*

On note  $C = \partial D$  et  $K_0, K_1, \dots, K_N$  les composantes connexes de  $D \cap h(D)$ , en convenant que  $d \subset K_0$ , puis on choisit  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  ( $1 \leq m \leq N$ ) des arcs simples dans  $D \setminus h(D)$ , deux à deux disjoints et vérifiant

- pour tout  $i = 1, \dots, m$   $\partial \alpha_i = \alpha_i \cap C = \{a_i, b_i\}, a_i \neq b_i$
- pour toute composante connexe  $K \in \{K_1, \dots, K_N\}$ , il existe  $i = i(K) \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\alpha_i$  sépare, dans  $D$ ,  $K$  de  $K_0$ .

Quitte à supprimer certains des arcs  $\alpha_i$ , on peut supposer  $i(K)$  unique pour chaque composante  $K = K_1, \dots, K_N$ . Il sera alors commode de renuméroter ces composantes de telle façon que, pour une suite  $N_0 = 0 < 1 \leq N_1 < \dots < N_m = N$ , on ait :

$$\forall k = 1, \dots, m \quad \forall j = N_{k-1} + 1, \dots, N_k \quad i(K_j) = k$$

(cf. fig. III.1)

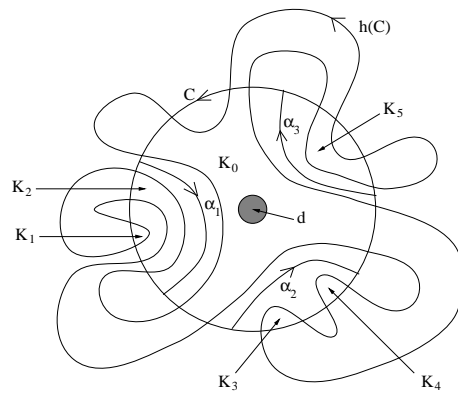


Fig. III.1

Pour  $i = 1, \dots, m$  on note  $\beta_i$  l'arc dans  $C$  de  $a_i$  à  $b_i$  tel que le cercle topologique  $C_i = \alpha_i \cup \beta_i$  borde  $D_i = \overset{\circ}{\text{int}}(C_i)$  avec  $d \subset \overset{\circ}{D}_i$ . Les cercles  $C_i$  sont positivement orientés, ce qui donne une orientation sur chaque arc  $\alpha_i$ .

Comme l'intersection  $C \cap h(C)$  est propre, on peut supposer (quitte à modifier  $\alpha_i$  près de  $C$ ) que  $h(\partial\alpha_i) \cap C = \emptyset$  pour tout  $i$  et l'on remarquera que  $d \subset h(\overset{\circ}{D}_i)$  : en effet  $d \cap h(\alpha_i) \subset d \setminus h^2(D) = \emptyset$ , donc  $d \cap h(C_i) = \emptyset$ , et  $h(0) \in d \cap h(D_i)$ .

– Si  $(\bigcup_{i=1}^m h(\alpha_i)) \cap (\bigcap_{j=1}^m \beta_j) = \emptyset$ , la preuve est terminée en choisissant simplement  $h' = h$ ,  $D' = \bigcap_{i=1}^m D_i$  et  $C' = \partial D' (*)$ .

– S'il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $h(\alpha_i) \cap (\bigcap_{j=1}^m \beta_j) \neq \emptyset$ , la même technique que celle utilisée pour le lemme 1.3.4 donne une modification  $h_1$  de  $h$ , loin de  $d \cup C$ , telle que  $h_1(\alpha_i) \cap C$  soit propre et  $d \subset h_1(\overset{\circ}{D}_i)$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ .

Le lemme est démontré si  $(\bigcup_{i=1}^m h_1(\alpha_i)) \cap (\bigcap_{j=1}^m \beta_j) = \emptyset$ , en choisissant  $h' = h_1$ ,  $D' = \bigcap_{i=1}^m D_i$  et  $C' = \partial D' (*)$ .

Sinon, établissons quelques conventions et notations avant de donner les deux lemmes de base :

- Si  $\alpha$  est un cercle topologique (positivement) orienté et si  $a, b$  sont deux points de  $\alpha$ , on désignera par  $[a, b]_\alpha$  (resp.  $(a, b)_\alpha$ ) l'arc fermé de  $\alpha$  (resp. l'arc ouvert) issu de  $a$  et aboutissant à  $b$  pour l'orientation de  $\alpha$ . On utilisera ces mêmes notations lorsque  $\alpha$  est un arc orienté et  $a, b$  deux points rencontrés dans cet ordre sur  $\alpha$ .
- Si  $f$  est une modification de  $h$  loin de  $C$  (donc  $f(C) = h(C)$  et  $C \cap f(C) = C \cap h(C) \neq \emptyset$ ) telle que, pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $f(\alpha_i) \cap C$  est propre et  $f(\alpha_i) \cap d = \emptyset$ , on distingue dans l'ensemble des composantes connexes de  $\bigcup_{i=1}^m f(\alpha_i) \setminus C$  les deux sous-ensembles  $\mathcal{A}_1(f)$  et  $\mathcal{A}_2(f)$  suivants :

(#) Un arc  $\gamma$  appartient à  $\mathcal{A}_1(f)$  s'il vérifie les conditions suivantes :

(a)  $\gamma = (x, y)_{f(\alpha_i)}$  où  $i \in \{1, \dots, m\}$  et où  $x, y$  sont consécutifs dans la suite  $x_1^i, \dots, x_{n(i)}^i$  des points de  $f(\alpha_i) \cap C$  rencontrés dans cet ordre sur  $f(\alpha_i)$ .

(b) L'un des arcs  $[x, y]_C$  ou  $[y, x]_C$  est contenu dans  $f(\overset{\circ}{D})$ . **S'il existe**, cet arc est

---

(\*) Le lecteur qui souhaite vérifier cette affirmation pourra, par exemple, constater que les ensembles  $\mathcal{A}_1(f)$  et  $\mathcal{A}_2(f)$  définis quelques lignes plus bas sont clairement vides dans ce cas, et lire la « suite de la preuve du lemme 1.3.5 » à partir de la page 46.

unique (car  $C \cap f(C) \neq \emptyset$ ) et sera noté  $\mu(\gamma)$ .

(c)  $\gamma \subset D^c$ .

(#) Un arc  $\gamma$  appartient à  $\mathcal{A}_2(f)$  s'il vérifie (a) et (b) ci-dessus ainsi que

(d)  $\gamma \subset \overset{\circ}{D}$ .

et

(e) Le disque topologique  $\overline{\text{int}(\gamma \cup \mu(\gamma))}$  ne contient pas  $d$ .

**Sous-lemme 1.3.6** (simplification de  $\mathcal{A}_1$ ). — Soit  $g$  une modification de  $h$ , loin de  $d \cup C$ , telle que

–  $\forall i = 1, \dots, m \quad g(\alpha_i) \cap C$  est propre et  $g(\alpha_i) \cap d = \emptyset$  ;

–  $\mathcal{A}_1(g) \neq \emptyset$ .

Alors il existe une modification  $g'$  de  $h$ , loin de  $d \cup C$ , telle que

–  $\forall i = 1, \dots, m \quad g'(\alpha_i) \cap C$  est propre et  $g'(\alpha_i) \cap d = \emptyset$  ;

–  $\text{Card}(\mathcal{A}_1(g')) \leq \text{Card}(\mathcal{A}_1(g)) - 1$  et  $\text{Card}(\mathcal{A}_2(g')) \leq \text{Card}(\mathcal{A}_2(g))$ .

*Preuve du sous-lemme 1.3.6.* — Soit  $\gamma \in \mathcal{A}_1(g)$ . On désigne par  $F$  le disque topologique fermé bordé par  $\gamma \cup \mu(\gamma)$  et par  $i_0$  l'entier dans  $\{1, \dots, m\}$  tel que  $\gamma \subset g(\alpha_{i_0})$ . De  $\mu(\gamma) \subset g(\overset{\circ}{D}) = h(\overset{\circ}{D})$  on déduit que  $g^{-1}(\partial F) \subset \overset{\circ}{D}$  et  $F$  est donc  $g$ -libre. De plus  $g^{-1}(\mu(\gamma)) \cap d \subset g^{-1}(C) \cap d = \emptyset$  (car  $g(d) = h(d) \subset \overset{\circ}{D}$ ) d'où  $d \cap g^{-1}(\partial F) = \emptyset$  puis  $d \cap g^{-1}(F) = \emptyset$  (car  $g(0) = h(0) \in d \cap g(d)$  alors que  $d \cap F = \emptyset$ , ce qui exclu la situation  $g(d) \subset F$ ). On peut alors choisir un disque topologique fermé  $E$  tel que :

(i)  $F \subset \overset{\circ}{E}$  ;

(ii)  $E$  est  $g$ -libre ;

(iii)  $g^{-1}(E)$  est disjoint de  $d \cup C$  ;

(iv)  $E \cap d = \emptyset$  ;

(v)  $E \cap g(\alpha_{i_0})$  est un arc qui ne rencontre  $\partial E$  qu'en ses extrémités ;

(vi)  $E \cap \left( \bigcup_{j=1}^m g(\alpha_j) \right)$  est inclus dans l'adhérence de la composante connexe de  $E \setminus g(\alpha_{i_0})$  qui contient  $\mu(\gamma) \setminus \partial \mu(\gamma)$  ;

puis un arc simple  $\eta \subset E$  vérifiant

(vii)  $\partial \eta = \eta \cap \partial E = \partial E \cap g(\alpha_{i_0})$  ;

(viii)  $\eta \subset \overset{\circ}{D}$ .

(cf. fig. III.2)

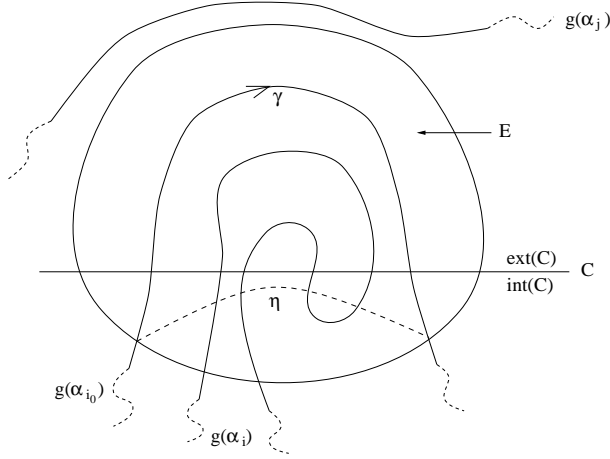


Fig. III.2

Il suffit alors de choisir  $g' = \varphi \circ g$  où  $\varphi \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  est à support dans  $E$  et vérifie  $\varphi(E \cap g(\alpha_{i_0})) = \eta$ .

**Sous-LEMME 1.3.7 (simplification de  $\mathcal{A}_2$ ).** — *Soit  $g$  une modification de  $h$ , loin de  $d \cup C$ , telle que*

- $\forall i = 1, \dots, m \quad g(\alpha_i) \cap C$  est propre et  $g(\alpha_i) \cap d = \emptyset$  ;
- $\mathcal{A}_2(g) \neq \emptyset$ .

*Alors il existe une modification  $g'$  de  $h$ , loin de  $d \cup C$ , telle que*

- $\forall i = 1, \dots, m \quad g'(\alpha_i) \cap C$  est propre et  $g'(\alpha_i) \cap d = \emptyset$  ;
- $\text{Card}(\mathcal{A}_1(g')) \leq \text{Card}(\mathcal{A}_1(g))$  et  $\text{Card}(\mathcal{A}_2(g')) \leq \text{Card}(\mathcal{A}_2(g)) - 1$ .

*Preuve du sous-lemme 1.3.7.* — Soit  $\gamma \in \mathcal{A}_2(g)$ . On note plus simplement  $\mu = \mu(\gamma)$ ,  $F = \overline{\text{int}(\gamma \cup \mu(\gamma))}$  et  $i_0$  l'entier dans  $\{1, \dots, m\}$  tel que  $\gamma \subset g(\alpha_{i_0})$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  posons :

$$F_n = \bigcap_{k=0}^n g^{-k}(F) \quad (\text{ainsi } F_0 = F, F_{n+1} = g^{-1}(F_n) \cap F_n = g^{-1}(F_n) \cap F_0).$$

Comme dans la preuve du sous-lemme 1.3.6, on vérifie que  $g^{-1}(F) \cap d = \emptyset$  et que  $g^{-1}(F) \subset \overset{\circ}{D}$  (en particulier  $g^{-1}(\mu) \cap \mu = \emptyset$  et donc  $g^{-n-1}(\mu) \cap g^n(\mu) = \emptyset$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ).

Tout point du plan erre sous l'action de  $g \in \mathcal{H}$ , donc il existe un plus petit entier  $p + 1 \geq 1$  tel que  $F_{p+1} = \emptyset$ .

- Si  $p + 1 = 1$ , alors  $F$  est  $g$ -libre et on procède comme au sous-lemme 1.3.6;

- Si  $p + 1 \geq 2$ , remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \partial F_n \subset \gamma \cup g^{-n}(\mu)$$

en effet c'est vrai pour  $n = 0$ , et si l'on suppose que c'est vrai pour  $n$ , on obtient :

$$\partial F_{n+1} \subset g^{-1}(\partial F_n) \cup \partial F_n \subset g^{-1}(\gamma) \cup g^{-(n+1)}(\mu) \cup \gamma \cup g^{-n}(\mu).$$

Mais  $\partial F_{n+1} \cap g^{-n}(\mu) \subset F_{n+1} \cap g^{-n}(\mu) \subset g^{-n}(g^{-1}(F) \cap \mu) = \emptyset$  (car  $g^{-1}(F) \subset \overset{\circ}{D}$ ) et  $\partial F_{n+1} \cap g^{-1}(\gamma) \subset F \cap \alpha_{i_0} = \emptyset$ , ce qui donne  $\partial F_{n+1} \subset \gamma \cup g^{-(n+1)}(\mu)$ .

Notons  $\partial F_n \setminus \gamma = \coprod_{j \in \mathbb{N}} \mu_{n,j}$  où les  $\mu_{n,j}$  sont des arcs ouverts deux à deux disjoints (en quantité au plus dénombrable) inclus dans  $g^{-n}(\mu)$  et tels que  $\partial \mu_{n,j} \subset \gamma$ . Chacun de ces arcs définit un autre arc fermé  $\gamma_{n,j} \subset \gamma$  qui joint les deux points de  $\partial \mu_{n,j}$ . Le cercle topologique  $\gamma_{n,j} \cup \mu_{n,j}$  borde le disque  $\delta_{n,j} = \overline{\text{int}(\gamma_{n,j} \cup \mu_{n,j})}$  et on dira que l'arc  $\mu_{n,j}$  est  $n$ -maximal si  $\delta_{n,j} \not\subset \delta_{n,j'}$  pour tout  $j' \neq j$  (cf. fig. III.3)

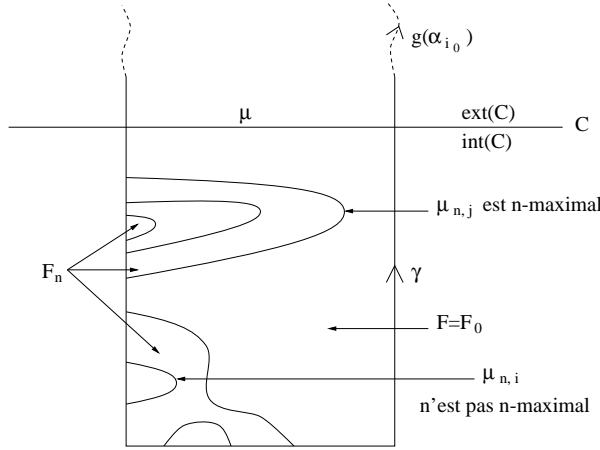


Fig. III.3

On notera que l'on peut avoir  $F_n \not\subset \bigcup_j \delta_{n,j}$ , mais que  $F_n \setminus \bigcup_j \delta_{n,j} \subset \gamma$ . Cependant, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$F_{n+1} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \delta_{n,j} = \bigcup_{\{j/\mu_{n,j} \text{ n-maximal}\}} \delta_{n,j}$$

$$F_{n+1} \setminus \gamma \subset \bigcup_j \overset{\circ}{\delta}_{n,j}$$

cette dernière inclusion venant de  $\partial F_{n+1} \setminus \gamma \subset g^{-(n+1)}(\mu)$  et de  $g^{-(n+1)}(\mu) \cap g^{-n}(\mu) = \emptyset$ .

Remarquons alors que  $\gamma \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \delta_{p,j}$  est  $g$ -libre ; en effet

$$\begin{aligned} \gamma \cap g^{-1}(\gamma) &\subset g(\alpha_{i_0}) \cap \alpha_{i_0} = \emptyset \\ \forall j \in \mathbb{N} \quad \delta_{p,j} \cap g^{-1}(\gamma) &\subset F \cap \alpha_{i_0} = \emptyset \end{aligned}$$

et

$$\partial \delta_{p,j} = \gamma_{p,j} \cup \mu_{p,j} \subset \gamma \cup F_p.$$

Comme de plus

$$\begin{aligned} \gamma \cap g^{-1}(F_p) &\subset F \cap g^{-1}(F_p) = F_{p+1} = \emptyset \\ F_p \cap g^{-1}(\gamma) &\subset F \cap \alpha_{i_0} = \emptyset \\ F_p \cap g^{-1}(F_p) &= F_{p+1} = \emptyset \end{aligned}$$

on a aussi

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \quad \gamma \cap g^{-1}(\partial \delta_{p,k}) = \emptyset \quad \text{et} \quad \partial \delta_{p,j} \cap g^{-1}(\partial \delta_{p,k}) = \emptyset$$

donc

$$\gamma \cap g^{-1}(\delta_{p,k}) = \emptyset \quad \text{car} \quad g^{-1}(\delta_{p,k}) \subset g^{-1}(F) \subset \overset{\circ}{D} \quad \text{puis} \quad \delta_{p,j} \cap g^{-1}(\delta_{p,k}) = \emptyset$$

et finalement

$$\left( \gamma \cup \bigcup_j \delta_{p,j} \right) \cap g^{-1} \left( \gamma \cup \bigcup_j \delta_{p,j} \right) = \emptyset.$$

Démontrons aussi la propriété suivante (qui n'est cependant pas essentielle pour la suite de la preuve) :

$$\text{l'ensemble } J_{p-1} = \left\{ j \in \mathbb{N} \mid \delta_{p-1,j} \cap F_p \neq \emptyset \right\} \text{ est fini.}$$

Sinon, il existe une suite  $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  strictement croissante dans  $\mathbb{N}$  et une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de points deux à deux distincts dans  $F_p$  telles que  $x_k \in \delta_{p-1,j_k}$ . Par compacité de  $F_p$ , on peut supposer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_\infty \in F_p$ . D'autre part, les arcs  $\mu_{p-1,j_k}$  sont deux à deux disjoints et inclus dans  $g^{-p+1}(\mu)$ , donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{diam}(\mu_{p-1,j_k}) = 0$  puis  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{diam}(\delta_{p-1,j_k}) = 0$ , ce qui donne  $x_\infty \in \gamma \cap g^{-p+1}(\mu)$ . On obtient ainsi

$$x_\infty \in g^{-p+1}(\mu) \cap F_p \subset g^{-p+1}(\mu \cap g^{-1}(F)) = \emptyset,$$

ce qui est absurde.

Pour chaque  $j \in J_{p-1}$  tel que  $\mu_{p-1,j}$  soit  $(p-1)$ -maximal, on peut choisir un disque topologique fermé  $\Delta_{1,j}$  tel que :

$$(i) \quad \left( F_p \cup \bigcup_k \delta_{p,k} \right) \cap \delta_{p-1,j} \subset \overset{\circ}{\Delta}_{1,j};$$

(ii)  $\Delta_{1,j}$  est  $g$ -libre ;

(iii)  $F \cap \Delta_{1,j} \subset \delta_{p-1,j}$  ;



(iv)  $g^{-1}(\Delta_{1,j})$  est disjoint de  $d \cup C$ ;

(v)  $\Delta_{1,j} \cap (d \cup C) = \emptyset$ ;

(vi)  $\Delta_{1,j} \cap \gamma$  est connexe;

puis un homéomorphisme  $\varphi_{1,j}$  vérifiant

(vii)  $\text{supp}(\varphi_{1,j}) \subset \Delta_{1,j}$ ;

(viii)  $\varphi_{1,j}(\delta_{p-1,j}) \subset F \setminus \left( F_p \cup \bigcup_k \delta_{p,k} \right)$ .

(cf. fig. III.4).

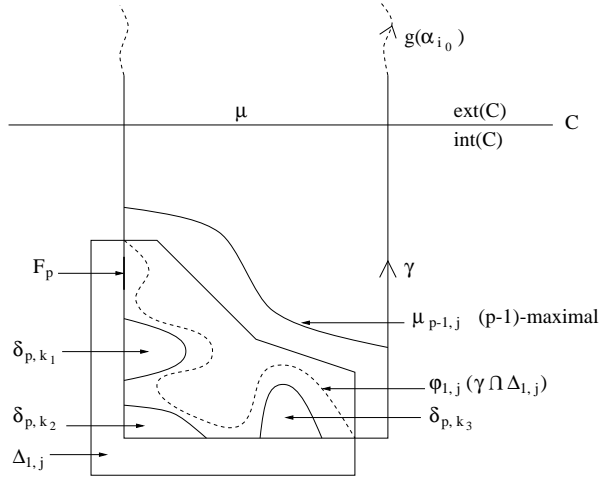


Fig. III.4

On peut de plus choisir les  $\Delta_{1,j}$ ,  $j \in J_{p-1}$ , tels que  $\Delta_{1,j} \cap \Delta_{1,j'} = \emptyset$  lorsque  $j \neq j'$ .

On définit un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  par

$$\varphi_1(z) = \begin{cases} \varphi_{1,j}(z) & \text{s'il existe } j \in J_{p-1} \text{ tel que } z \in \Delta_{1,j} \\ z & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose

$$g_1 = \varphi_1 \circ g.$$

Par construction (cf. (i) et (iii)) on a

$$F \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \delta_{p-1,j} \subset F \setminus \bigcup_{j \in J_{p-1}} \delta_{p-1,j} \subset F \setminus \bigcup_{j \in J_{p-1}} \Delta_{1,j} \subset F \setminus \left( F_p \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \delta_{p,k} \right)$$

donc  $\varphi_1(z) = z$  si  $z \in F \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \delta_{p-1,j}$  et d'autre part (en utilisant la condition (viii))

$$\varphi_1(F) \subset F \setminus F_p.$$

Il est clair que  $g_1$  est une modification de  $g$  loin de  $d \cup C$  (cf. (ii), (iv) et (vii)). Les conditions (v) et (viii) montrent que :  $\gamma_1 = \varphi_1(\gamma) \in \mathcal{A}_2(g_1)$ ,  $\overline{\text{int}(\gamma_1 \cup \mu(\gamma_1))} = \varphi_1(F)$ ,  $\text{Card}(\mathcal{A}_i(g_1)) = \text{Card}(\mathcal{A}_i(g))$  pour  $i = 1, 2$  et  $g_1(\alpha_i) \cap d = \emptyset$  pour  $i = 1, \dots, m$ .

Enfin, on vérifie que

$$g_1^{-1}(\varphi_1(F_{p-1})) \cap \varphi_1(F_{p-1}) = \emptyset.$$

En effet

$$\begin{aligned} g_1^{-1}(\varphi_1(F_{p-1})) \cap \varphi_1(F_{p-1}) &= g^{-1}(F_{p-1}) \cap \varphi_1(F_{p-1}) \\ &\subset g^{-1}(F_{p-1}) \cap \varphi_1(F) \subset g^{-1}(F_{p-1}) \cap F = F_{p-1}. \end{aligned}$$

Or  $\varphi_1(F) \cap F_p = \emptyset$ , ce qui donne le résultat.

Supposons que l'on ait construit  $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq p-1$ , des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  tels que

- $g_\ell = \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1 \circ g$  est une modification de  $g$  loin de  $d \cup C$
- $\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell})$  est  $g_\ell$ -libre
- les supports de  $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$  sont disjoints de  $d \cup C$
- $\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F) \subset F \setminus F_{p-\ell+1}$
- $z \in F \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \delta_{p-\ell, j} \implies \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(z) = z$ .

Remarquons alors que  $\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \delta_{p-\ell, j})$  est  $g_\ell$ -libre. En effet

$$\begin{aligned} \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma \cup \bigcup_j \delta_{p-\ell, j}) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma)) \\ = \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma \cup \bigcup_j \delta_{p-\ell, j}) \cap g^{-1}(\gamma) \subset F \cap \alpha_{i_0} = \emptyset \end{aligned}$$

et

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \partial \delta_{p-\ell, j} = \gamma_{p-\ell, j} \cup \mu_{p-\ell, j} \subset \gamma \cup F_{p-\ell}.$$

Comme de plus

$$\begin{aligned} \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell})) \\ = \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \cap g^{-1}(F_{p-\ell}) \subset F \cap g^{-1}(F_{p-\ell}) \\ = F_{p-\ell+1} \quad \text{et} \quad F_{p-\ell+1} \cap \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma)) &= \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \cap g^{-1}(\gamma) \subset F \cap \alpha_{i_0} = \emptyset \\ \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell}) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell})) &= \emptyset \end{aligned}$$

on a aussi

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \quad \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\partial \delta_{p-\ell, k})) = \emptyset$$

et

$$\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\partial \delta_{p-\ell,j}) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\partial \delta_{p-\ell,k})) = \emptyset$$

donc

$$\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\gamma) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\delta_{p-\ell,k})) = \emptyset$$

car

$$g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\delta_{p-\ell,k})) = g^{-1}(\delta_{p-\ell,k}) \subset g^{-1}(F) \subset \overset{\circ}{D}$$

puis

$$\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\delta_{p-\ell,j}) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\delta_{p-\ell,k})) = \emptyset$$

et finalement  $\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1\left(F_{p-\ell} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \delta_{p-\ell,j}\right)$  est bien  $g_\ell$ -libre.

Comme pour  $J_{p-1}$ , on vérifie que  $J_{p-\ell-1} = \{j \in \mathbb{N} \mid F_{p-\ell} \cap \delta_{p-\ell-1,j} \neq \emptyset\}$  est un ensemble fini.

Pour chaque  $j \in J_{p-\ell-1}$  tel que  $\mu_{p-\ell-1}$  soit  $(p-\ell-1)$ -maximal, on peut choisir un disque topologique fermé  $\Delta_{\ell+1,j}$  de telle façon que :

- (i)  $\left(F_{p-\ell} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \delta_{p-\ell,k}\right) \cap \delta_{p-\ell-1,j} \subset \overset{\circ}{\Delta}_{\ell+1,j}$ ;
- (ii)  $\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\Delta_{\ell+1,j})$  est  $g_\ell$ -libre;
- (iii)  $F \cap \Delta_{\ell+1,j} \subset \delta_{p-\ell-1,j}$ ;
- (iv)  $g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\Delta_{\ell+1,j})) = g^{-1}(\Delta_{\ell+1,j})$  est disjoint de  $d \cup C$ ;
- (v)  $\Delta_{\ell+1,j} \cap (d \cup C) = \emptyset$  (donc  $\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\Delta_{\ell+1,j}) \cap (d \cup C) = \emptyset$ );
- (vi)  $\Delta_{\ell+1,j} \cap \gamma$  est connexe;

puis un homéomorphisme  $\varphi_{\ell+1,j}$  vérifiant

- (vii)  $\text{supp}(\varphi_{\ell+1,j}) \subset \varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\Delta_{\ell+1,j})$
- (viii)  $\varphi_{\ell+1,j}(\varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\delta_{p-\ell-1,j})) \subset \varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1\left(F \setminus \left(F_{p-\ell} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \delta_{p-\ell,k}\right)\right)$   
 $= F \setminus \left(F_{p-\ell} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \delta_{p-\ell,k}\right)$ .

On peut de plus choisir les  $\Delta_{\ell+1,j}$ ,  $j \in J_{p-\ell-1}$ , deux à deux disjoints. On définit alors un homéomorphisme  $\varphi_{\ell+1}$  par

$$\varphi_{\ell+1}(z) = \begin{cases} \varphi_{\ell+1,j}(z) & \text{s'il existe } j \in J_{p-\ell-1} \text{ tel que } z \in \varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_1(\Delta_{\ell+1,j}) \\ z & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose

$$g_{\ell+1} = \varphi_{\ell+1} \circ g_\ell.$$

Par construction (cf. (i) et (iii))

$$F \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \delta_{p-\ell-1,j} \subset F \setminus \bigcup_{j \in J_{p-\ell-1}} \delta_{p-\ell-1,j} \subset F \setminus \bigcup_{j \in J_{p-\ell-1}} \Delta_{\ell+1,j} \\ \subset F \setminus \left( F_{p-\ell} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \delta_{p-\ell,j} \right),$$

donc  $\varphi_{\ell+1} \circ \varphi_{\ell} \circ \dots \circ \varphi_1(z) = z$  pour tout  $z \in F \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \delta_{p-\ell-1,j}$  et d'autre part, en utilisant la condition (viii) ci-dessus, on obtient aussi  $\varphi_{\ell+1} \circ \varphi_{\ell} \circ \dots \circ \varphi_1(F) \subset F \setminus F_{p-\ell}$ .

L'homéomorphisme  $g_{\ell+1}$  est une modification de  $g_{\ell}$  loin de  $d \cup C$  (cf. (ii), (iv) et (vii) ci-dessus) donc une modification de  $g$  loin de  $d \cup C$ . On obtient avec les conditions (v) et (vii) que  $\gamma_{\ell+1} = \varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \in \mathcal{A}_2(g_{\ell+1})$ ,  $\text{int}(\gamma_{\ell+1} \cup \mu(\gamma_{\ell+1})) = \varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F)$ ,  $\text{Card}(\mathcal{A}_i(g_{\ell+1})) = \text{Card}(\mathcal{A}_i(g))$  pour  $i = 1, 2$  et  $g_{\ell+1}(\alpha_i) \cap d = \emptyset$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Enfin, vérifions que

$$g_{\ell+1}^{-1}(\varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell-1})) \cap \varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell-1}) = \emptyset.$$

Il suffit d'écrire :

$$g^{-1}(F_{p-\ell-1}) \cap \varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell-1}) \subset g^{-1}(F_{p-\ell-1}) \cap F = F_{p-\ell}.$$

Or  $\varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell-1}) \cap F_{p-\ell} = \emptyset$ , ce qui montre que  $\varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell-1})$  est bien  $g_{\ell+1}$ -libre.

On obtient ainsi une modification  $g_p = \varphi_p \circ \dots \circ \varphi_1 \circ g$  de  $g$ , loin de  $d \cup C$ , telle que  $\gamma_p = \varphi_p \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \in \mathcal{A}_2(g_p)$ ,  $\text{int}(\gamma_p \cup \mu(\gamma_p)) = \varphi_p \circ \dots \circ \varphi_1(F)$  est  $g_p$ -libre,  $\text{Card}(\mathcal{A}_i(g_p)) = \text{Card}(\mathcal{A}_i(g))$  pour  $i = 1, 2$  et  $g_p(\alpha_i) \cap d = \emptyset$  pour  $i = 1, \dots, m$ . On termine alors la preuve du sous-lemme 1.3.7 comme au sous-lemme 1.3.6.

*Suite de la preuve du lemme 1.3.5.* — Une utilisation répétée des sous-lemmes 1.3.6 et 1.3.7 conduit à une modification  $h'$  de  $h$ , loin de  $D \cup C$ , telle que  $h'(\alpha_i) \cap C$  soit propre et  $d \subset h'(\overset{\circ}{D}_i)$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ , et  $\mathcal{A}_1(h') = \mathcal{A}_2(h') = \emptyset$ . Un dessin permet de se convaincre qu'il suffit de choisir  $D' = \bigcap_{i=1}^m D_i$  pour prouver le lemme. Plus précisément, on montre le résultat suivant, indépendant des considérations de point fixe :

SOUS-LEMME 1.3.8. — Soient

$$h_* \in \text{Homéo}(\mathbb{R}^2);$$

$C_*$  un cercle topologique bordant  $D_* = \overline{\text{int}(C_*)}$ , avec  $d \subset \overset{\circ}{D}_* \cap h_*(\overset{\circ}{D}_*)$  et tel que l'intersection  $C_* \cap h_*(C_*)$  soit propre et non vide ;

$$\alpha_* \subset D_* \setminus h_*(D_*) \text{ un arc simple tel que } \partial \alpha_* = \alpha_* \cap C_* = \{a_*, b_*\}, a_* \neq b_* ;$$

$$\beta_* \text{ l'arc dans } C \text{ de } a_* \text{ à } b_* \text{ tel que le disque } D_{**} = \overline{\text{int}(\alpha_* \cup \beta_*)} \text{ vérifie } d \subset \overset{\circ}{D}_{**}.$$

$(\alpha_*$  est naturellement orienté par le choix d'une orientation positive de  $\partial D_{**}$ ).

On suppose que  $f \in \text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$  vérifie les conditions (i) à (iv) ci-dessous :

(i)  $f(0) \in d \subset f(\overset{\circ}{D}_*)$  ;

(ii) Toute composante connexe de  $D_* \cap f(D_*)$  coïncide avec une composante connexe de  $D_* \cap h_*(D_*)$  ;

(iii) L'intersection  $f(\alpha_*) \cap C_*$  est propre ;

(iv) Si elle est non vide, la suite  $x_1, \dots, x_p$  des points de  $f(\alpha_*) \cap C_*$ , rencontrés dans cet ordre sur  $f(\alpha_*)$ , satisfait aux deux conditions suivantes :

c1 : Si  $(x_k, x_{k+1})_{f(\alpha_*)} \subset D_*^c$  alors  $[x_k, x_{k+1}]_{C_*} \cap f(C_*) \neq \emptyset$  et  $[x_{k+1}, x_k]_{C_*} \cap f(C_*) \neq \emptyset$   
(i.e.  $x_k, x_{k+1}$  ne sont pas dans une même composante connexe de  $D_* \cap f(D_*)$ ).

c2 : Si  $(x_k, x_{k+1})_{f(\alpha_*)} \subset D_*$  alors  $(x_k, x_{k+1})$  sont nécessairement dans la même composante de  $D_* \cap f(D_*)$  et)

c2.1 :  $[x_k, x_{k+1}]_{C_*} \cap f(C_*) \neq \emptyset$  et  $[x_{k+1}, x_k]_{C_*} \cap f(C_*) \neq \emptyset$

ou bien

c2.2 : L'un des deux arcs  $[x_k, x_{k+1}]_{C_*}$  ou  $[x_{k+1}, x_k]_{C_*}$  est contenu dans  $f(\overset{\circ}{D}_*)$ . De plus, cet arc (qui est nécessairement unique s'il existe, car  $C_* \cap f(C_*) \neq \emptyset$ ) sera noté  $\mu(x_k, x_{k+1})$  et le disque bordé par  $(x_k, x_{k+1})_{f(\alpha_*)} \cup \mu(x_k, x_{k+1})$  contient  $d$ .

Alors toute composante connexe de  $D_* \cap h_*(D_*)$  contient au plus une composante connexe de  $D_{**} \cap f(D_{**})$ .

*Preuve du sous-lemme 1.3.8.* (Par récurrence sur le nombre  $q$  de composantes connexes de  $f(D_*) \cap D_*$ ). — Si  $q = 1$ , la preuve résulte de l'étude de quelques cas élémentaires, suivant l'emplacement des points de  $f(\partial \alpha_*)$ .

Supposons le lemme démontré pour  $q \geq 1$  composantes connexes, et donnons nous  $f'$  vérifiant (i) à (iv), tel que  $f'(D_*) \cap D_*$  ait  $q + 1$  composantes.

On reprend le vocabulaire introduit par Schmitt (cf. [Sc2]) : si  $y_1, \dots, y_r$  désignent les points de  $f'(C_*) \cap C_*$  rencontrés dans cet ordre sur  $f'(C_*)$  et  $K$  une composante connexe de  $D_* \cap f'(D_*)$  on dit que  $y_i \in K$  est un *point initial* (resp. *point terminal*) pour  $K$  si  $y_{i-1} \notin K$  (resp.  $y_{i+1} \notin K$ ) (en convenant que  $y_0 = y_r, y_1 = y_{r+1}$ ) ;  $K$  sera de plus qualifiée *d'extrême* si elle admet un unique point initial (donc aussi un unique point terminal). On vérifie qu'il existe au moins deux composantes extrêmes (cf. [Sc2] p. 237).

Soit  $K_e$  une composante extrême de  $f'(D_*) \cap D_*$  ne contenant pas  $d$ .

1<sup>er</sup> CAS :  $K_e \cap f'(\alpha_*)$  EST CONNEXE.

Alors  $K_e$ , regardée comme composante de  $D_* \cap h(D_*)$  (cf. (ii)), contient au plus une composante de  $f'(D_{**}) \cap D_{**}$ .

D'autre part, il existe  $f$  vérifiant (i) à (iv) (obtenu à partir de  $f'$  par isotopie) tel que  $f(D_*) \cap D_*$  possède exactement les composantes de  $f'(D_*) \cap D_*$  sauf  $K_e$  et tel que  $f(\alpha_*)$  coïncide avec  $f'(\alpha_*)$  dans toutes les composantes de  $f(D_*) \cap D_*$  (cf. fig. III.5).

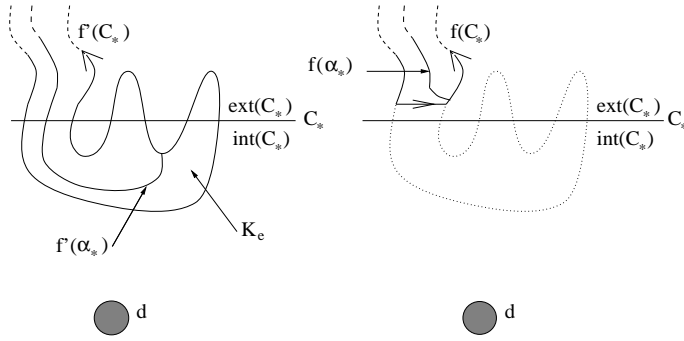


Fig. III.5

L'hypothèse de récurrence appliquée à  $f$  et le fait que

$$(D_{**} \cap f(D_{**})) \setminus K_e = (D_{**} \cap f'(D_{**})) \setminus K_e$$

donne le résultat pour  $f'$ .

2<sup>e</sup> CAS :  $K_e \cap f'(\alpha_*)$  N'EST PAS CONNEXE.

Comme  $K_e$  est une composante extrême de  $D_* \cap f'(D_*)$  ne contenant pas  $d$ , les conditions  $c1$  et  $c2$  imposent que  $K_e \cap f'(\alpha_*)$  admet exactement deux composantes connexes  $A$  et  $B$  avec, par exemple :

et

$$A \cap C = \{x_1, x_2\} \text{ ou } A \cap C = \{x_1\}$$

$$B \cap C = \{x_{p-1}, x_p\} \text{ ou } B \cap C = \{x_p\}.$$

Si  $A \cap C = \{x_1, x_2\}$  (resp.  $\{x_1\}$ ) on posera  $a = 2$  (resp.  $a = 1$ ).

Si  $B \cap C = \{x_{p-1}, x_p\}$  (resp.  $\{x_p\}$ ) on posera  $b = p - 1$  (resp.  $b = p$ ) (cf. fig. III.6).

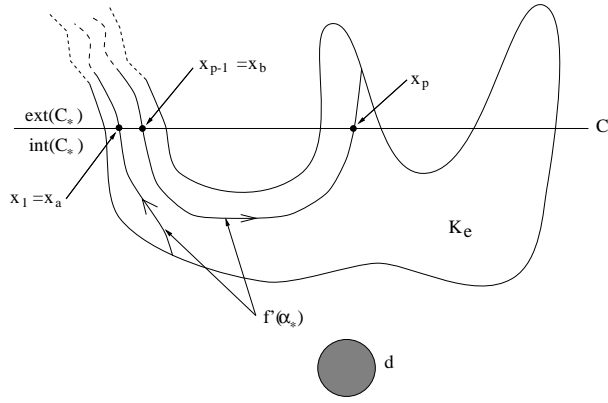


Fig. III.6

Remarquons que l'un des deux arcs  $f'(\beta_*)$  ou  $f'(C_* \setminus \beta_*)$  est contenu dans l'arc sur  $f'(C_*)$  du point initial de  $K_e$  au point terminal de  $K_e$ .

On en déduit que, pour  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $a + i + 1 < b - i$ , les points  $x_{a+i}$  et  $x_{b-i}$  sont dans une même composante connexe  $K_{*,i}$  de  $f'(D_*) \cap D_*$  (en particulier  $K_{*,0} = K_e$ ) et plus précisément dans la même composante connexe de  $K_{*,i} \cap C_*$  (le cas contraire donnant la possibilité de joindre  $f'(\beta_*)$  à  $f'(C_* \setminus \beta_*)$  dans  $f'(D_*)$  sans rencontrer  $f'(\alpha_*)$ , (cf. fig. III.7)).

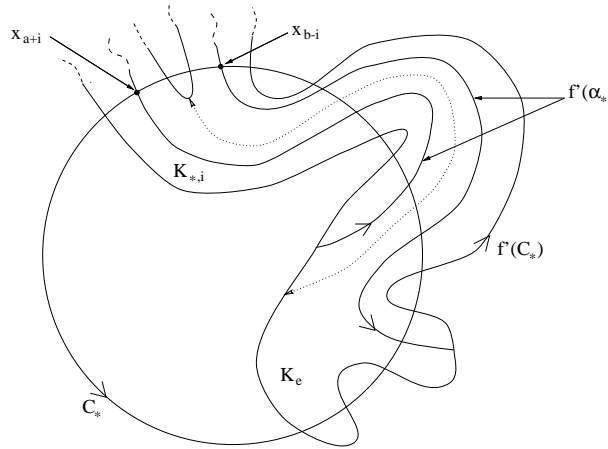


Fig. III.7

Pour  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $a + i + 1 = b - i$  (i.e. pour  $i = i_0 = \frac{b-a-1}{2}$ ) les conditions  $c1$  et  $c2$  montrent que  $c2.2$  est réalisée avec  $k = a + i_0$ . On vérifie, en utilisant à nouveau les conditions  $c1$  et  $c2$ , qu'aucun cas  $(x_\ell, x_{\ell+1})_{f'(\alpha_*)}$ ,  $\ell \neq k$ , n'est contenu dans le disque

bordé par  $\mu(x_k, x_{k+1}) \cup (x_k, x_{k+1})_{f'(\alpha_*)}$ . Comme de plus  $f'(0) \in d \cap f'(\overset{\circ}{D}_{**})$ , ce disque est contenu dans  $f'(D_{**})$ . Une nouvelle récurrence montre alors que, pour tout  $i = 0, \dots, i_0$ , l'arc dans  $K_{*, i_0-i} \cap C$  qui joint  $x_{a+i_0-i}$  et  $x_{b-i_0+i}$  est aussi contenu dans  $f'(D_{**})$ , et en particulier que l'arc dans  $K_e \cap C_*$  qui joint  $A$  et  $B$  est inclus dans  $f'(D_{**})$ . On a donc  $K_e \cap f'(D_{**})$  connexe et on termine la preuve par récurrence comme au 1<sup>er</sup> cas.

*Fin de la preuve du lemme 1.3.5.* — Comme  $\mathcal{A}_1(h') = \emptyset = \mathcal{A}_2(h')$ , il est clair que le sous-lemme 1.3.8 s'applique avec  $h_* = h$ ,  $C_* = C$ ,  $\alpha_* = \alpha_1$  et  $f = h'$ , ce qui montre que  $h'(D_1) \cap D_1$  admet au plus  $(N+1) - N_1$  composantes connexes.

Comme on a de plus  $h'(\alpha_i) \cap \alpha_j = \emptyset$  pour  $i, j = 1, \dots, m$ , on vérifie que le sous-lemme 1.3.8 s'applique aussi avec  $h_* = f = h'$ ,  $C_* = \partial(D_1 \cap \dots \cap D_k)$ ,  $\alpha_* = \alpha_{k+1}$ , pour tout  $k = 1, \dots, m-1$ . On obtient alors que  $h'(\bigcap_{i=1}^k D_i) \cap (\bigcap_{i=1}^k D_i)$  contient au plus  $(N+1) - N_1 - \dots - N_k$  composantes connexes, et donc que  $h'(\bigcap_{i=1}^m D_i) \cap (\bigcap_{i=1}^m D_i)$  est connexe. Le lemme 1.3.5 est donc démontré en choisissant  $D' = \bigcap_{i=1}^m D_i$ ,  $C' = \partial D'$ .

*Preuve de la proposition 1.3.3.* — Grâce au lemme 1.3.4, on peut supposer que  $h(RS^1) \cap RS^1$  est propre. Les situations  $h(RB) \subset RB$  et  $RB \subset h(RB)$  sont clairement exclues par le théorème de point fixe de Brouwer. (Plus précisément, dans la perspective des appendices A1 et A2, elles sont impossibles car le degré de  $h$  le long du cercle  $RS^1$  est différent de 1.) Le lemme 1.3.5 permet d'obtenir  $h'$  et  $C'$  satisfaisant aux conditions (1) et (2) de la proposition. La condition (3) s'obtient en reprenant les arguments contenus dans [Sl], pages 437 à 441, ou bien dans [Sc2], pages 236 et 237.

#### 1.4. Preuve du théorème 1.1.1.

Soient  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\Omega = V_{K,\varepsilon}(h)$  un voisinage fondamental de  $h$  dans  $\mathcal{H}$ ,

*i. e.*  $\Omega = \{g \in \mathcal{H} \mid d(g(m), h(m)) < \varepsilon, \quad \forall m \in K\}$  où  $K$  compact,  $\varepsilon > 0$ .

La démarche est la suivante : la proposition 1.3.3 permet de déformer, en restant dans  $\Omega$ ,  $h$  sur  $h'$  qui est en position canonique sur un cercle (topologique)  $C'$ . À la différence de ce qui est fait dans la preuve de la connexité par arcs,  $C'$  peut être construit avec  $K$  contenu dans son intérieur. Une remarque simple mais essentielle est que, par construction, la restriction de  $h'$  à  $D' = \overline{\text{int}(C')}$  ne dépend que de la restriction de  $h$  à un certain voisinage de  $D'$ . Nous choisissons donc, grâce à la proposition 1.2.1, un voisinage de  $h$  dont on peut déformer les éléments, en restant dans  $\Omega$ , de telle façon qu'ils coïncident avec  $h$  sur un tel voisinage de  $D'$ . On terminera alors la preuve comme pour le théorème II.1.1.



On choisit  $0 < r < R \leq \text{Max}\{R, 2r\} < \tilde{R}$  tels que :

$$\{h(0)\} \cup K \cup h(K) \subset rB \subset h^{-1}(R \overset{\circ}{B}) \cap R \overset{\circ}{B} \cap h(R \overset{\circ}{B}) \cap h^2(RB) \subset RB \cup h(RB) \subset \tilde{R} \overset{\circ}{B}.$$

Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que  $\tilde{R} = 1$  (i.e.  $\tilde{R}B = B$ ). Par continuité uniforme de  $h$  sur  $4B$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$(m, m' \text{ dans } 4B, \quad d(m, m') < \alpha) \Rightarrow d(h(m), h(m')) < \varepsilon.$$

On note  $A = \text{Min}\{3, \alpha, \inf_{m \in 4B} d(m, h^{-1}(m))\} > 0$  et on définit  $W$  voisinage de  $\eta : 4B \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  dans  $P\mathcal{L}(4B; \mathbb{R}^2)$  par

$$W = \{\varphi \in P\mathcal{L}(4B; \mathbb{R}^2) \mid d(m, \varphi(m)) < A \quad \forall m \in 4B\}.$$

On considère alors  $\Psi$  et  $V$  donnés par la proposition 1.2.1 et son corollaire, puis  $\Omega'$  voisinage de  $h$  dans  $\mathcal{H}$  tel que  $g \in \Omega' \Rightarrow h^{-1} \circ g|_{4B} \in V$ .

Définissons alors :

$$\Phi' : \Omega' \times [0, 1] \longrightarrow \Omega$$

$$(g, t) \longmapsto \Phi'(g, t) = \Phi'_t(g) = \begin{cases} g & \text{hors de } 4B \\ h \circ \Psi_t(h^{-1} \circ g|_{4B}) & \text{sur } 4B. \end{cases}$$

(i)  $\Phi'$  est bien définie puisque  $\Psi_t(\varphi)|_{4S^1} = \varphi|_{4S^1}$  pour tout  $\varphi \in V$ .

(ii)  $\Phi'(g, t)$  est sans point fixe : pour  $m \in 4B$ ,

$$\begin{aligned} \Phi'_t(g)(m) = m &\iff \Psi_t(h^{-1} \circ g|_{4B})(m) = h^{-1}(m) \\ &\Rightarrow A \leq \inf_{z \in 4B} d(z, h^{-1}(z)) \leq d(m, h^{-1}(m)) = d(m, \Psi_t(h^{-1} \circ g|_{4B})(m)) < A \end{aligned}$$

(car  $\Psi$  est à valeurs dans  $W$ ) ce qui est absurde.

(iii)  $\Phi'$  est à valeurs dans  $\Omega$  : comme  $K \subset B$  et  $\Psi(V \times [0, 1]) \subset W$  on a d'abord

$$\forall m \in K \quad \forall g \in \Omega' \quad \forall t \in [0, 1] \quad d(m, \Psi_t(h^{-1} \circ g|_{4B})(m)) < A \leq 3$$

donc  $\Psi_t(h^{-1} \circ g|_{4B})(m) \in 4B$  et ensuite  $d(m, \Psi_t(h^{-1} \circ g|_{4B})(m)) < A \leq \alpha$ , ce qui donne  $d(h(m), h \circ \Psi_t(h^{-1} \circ g|_{4B})(m)) < \varepsilon$  par choix de  $\alpha$ , autrement dit  $\Phi'_t(g) \in \Omega$ .

(iv) Enfin  $\Psi_1(\varphi) \in P\mathcal{L}(4B; B; \mathbb{R}^2)$  pour tout  $\varphi \in V$  permet d'avoir

$$\Phi'_1(g)|_B = h|_B \text{ pour tout } g \in \Omega'.$$

On choisit alors une modification  $h'$  de  $h$ , loin de  $d = rB$ , et un cercle topologique,  $C'$  bordant  $D' = \overline{\text{int}(C')} \subset D = RB$ , donnés par la proposition 1.3.3.

En particulier, on a une suite  $h_1, \dots, h_n$  dans  $\mathcal{H}$  telle que

- $h_1 = h, h_n = h'$
- $\forall i = 1, \dots, n-1, h_{i+1} = \varphi_i \circ h_i$  où  $\varphi_i \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$ ,  $\text{supp}(\varphi_i) \subset \coprod_j D_{i,j}$  une réunion disjointe (et finie, comme nous l'avons remarqué dans la preuve du sous-lemme 1.3.7) de disques topologiques fermés  $h_i$ -libres vérifiant  $\varphi_i(D_{i,j}) = D_{i,j}$  et  $h_i^{-1}(D_{i,j}) \cap d = \emptyset$ .

Pour chaque  $i = 1, \dots, n-1$  on choisit une isotopie  $(\varphi_{i,t})_{0 \leq t \leq 1}$  de  $\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  à  $\varphi_i$  avec  $\text{supp}(\varphi_{i,t}) \subset \coprod_j D_{i,j}$ ,  $\varphi_{i,t}(D_{i,j}) = D_{i,j}$ , pour tout  $j$  et pour tout  $t \in [0,1]$  (il suffit de choisir une isotopie d'Alexander dans chaque  $D_{i,j}$ ).

Comme de plus  $RB \cup h(RB) \subset \tilde{R} \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B}$ , il est facile de voir, en reprenant la preuve de la proposition 1.3.3, que l'on peut choisir les disques  $D_{i,j}$  inclus dans  $B$ .

On définit alors une déformation

$$\begin{aligned} \phi'' : \{g \in \mathcal{H} \mid g|_B = h|_B\} \times [0, 1] &\rightarrow \Omega \\ (g, t) &\mapsto \phi''(g, t) = \phi_t''(g) = \begin{cases} g & \text{hors de } B \\ \varphi_{i, (n-1)t+1-i} \circ h_i & \text{sur } B \end{cases} \end{aligned}$$

pour  $\frac{i-1}{n-1} \leq t \leq \frac{i}{n-1}$  et  $1 \leq i \leq n-1$ .

(v)  $\phi_t''(g)$  est bien sans point fixe car, pour tout couple  $(i, j)$ ,  $D_{i,j}$  est  $h_i$ -libre et  $\varphi_{i,t}(D_{i,j}) = D_{i,j}$ .

(vi)  $\phi_t''(g) \in \Omega$  pour tout  $g \in \{g \in \mathcal{H} \mid g|_B = h|_B\}$  car  $\phi_t''(g)|_K = g|_K = h|_K$ .

(vii) Pour  $g$  tel que  $g|_B = h|_B$ , on a  $\phi_1''(g)|_{D'} = h'|_{D'}$ .

Comme dans la preuve de la connexité par arcs, on construit, à l'aide de la propriété (3) de la proposition 1.3.3, un homéomorphisme  $\varphi \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\varphi(S^1) = C'$  et

$$\varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi|_{S^1} = \tilde{h}|_{S^1} \text{ où } \tilde{h}(m) = \begin{cases} m + (\frac{1}{2}, 0) & \text{si } m \in B \\ m + (\frac{\|m\|}{2}, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme de plus  $1 = \tilde{R} > 2r$ , on a  $d \subset \tilde{h}(\overset{\circ}{B})$  et le complément au théorème de Schoënfliès permet de choisir  $\varphi$  tel que  $\varphi|_d = \text{Id}_d$  (cf. fig. III.8).

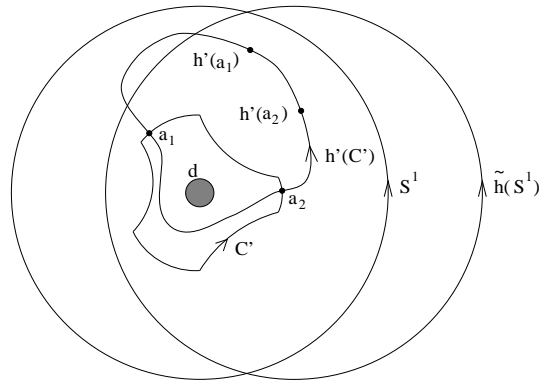


Fig. III.8

On fixe alors une isotopie  $(\varphi_t)_{0 \leq t \leq 1}$  de  $\varphi_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  à  $\varphi_1 = \varphi$ , à support dans  $d^c$  pour définir une déformation

$$\begin{aligned} \phi''' : \{g \in \mathcal{H} \mid g|_{D'} = h'|_{D'}\} \times [0,1] &\rightarrow \Omega \\ (g,t) &\mapsto \phi'''(g,t) = \phi_t'''(g) = \varphi_t^{-1} \circ g \circ \varphi_t. \end{aligned}$$

(viii)  $\phi'''$  prend bien ses valeurs dans  $\Omega$  car

$$\begin{aligned} g|_{D'} = h'|_{D'} &\implies g|_K = h'|_K = h|_K \\ &\implies \forall t \in [0,1], \varphi_t^{-1} \circ g \circ \varphi_t|_K = h|_K \end{aligned}$$

car  $K \cup h(K) \subset d$  et  $\text{supp}(\varphi_t) \cap d = \emptyset$ .

(ix) Pour  $g$  tel que  $g|_{D'} = h'|_{D'}$  on a  $\phi_1'''(g)|_B = \varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi|_B$  et en particulier  $\phi_1'''(g)|_{S^1} = \tilde{h}|_{S^1}$ .

Enfin, on définit

$$\begin{aligned} \phi^{iv} : \{g \in \mathcal{H} \mid g|_B = \varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi|_B\} \times [0,1] &\rightarrow \Omega \\ (g,t) &\mapsto \phi^{iv}(g,t) = \phi_t^{iv}(g) \end{aligned}$$

par :

$$\phi_t^{iv}(g)(m) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi(m) & \text{si } m \in B \\ \tilde{h}(m) & \text{si } 1 \leq \|m\| \leq \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{1-t} \varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi((1-t)m) & \text{si } \|m\| \geq \frac{1}{1-t} \end{cases}$$

si  $0 \leq t < 1$  et

$$h_0(m) = \phi_1^{iv}(g)(m) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi(m) & \text{si } m \in B \\ \tilde{h}(m) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La succession de ces quatre déformations prouve le théorème 1.1.1.

## 2. Approximation par des conjugués à la translation

On a la

PROPRIÉTÉ 2.1. — Pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^2$ ,

il existe  $h_0 \in \mathcal{H}$ ,  $h_0$  conjugué à  $\tau$ , tel que  $h_0|_K = h|_K$ .

*Démonstration.* — La preuve du théorème 1.1.1 donne en particulier un homéomorphisme  $h_0 \in \mathcal{H}$  tel que

- $h_0|_K = h|_K$
- $h_0$  coïncide avec un conjugué à  $\tilde{h}$  hors d'un disque.

On a déjà vu que  $\tilde{h}$  est conjugué à  $\tau$  et le lemme II.1.7 de la preuve de la connexité par arcs montre que  $h_0$  est alors conjugué à  $\tau$ .

COROLLAIRE 2.2. — L'ensemble  $\{g \in \mathcal{H} \mid g \text{ conjugué à } \tau\}$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .

En effet, les  $V_{K,\varepsilon}(h) = \left\{g \in \mathcal{H} \mid \sup_{m \in K} d(g(m), h(m)) < \varepsilon\right\}$  où  $K$  compact,  $\varepsilon > 0$ , constituent une base de voisinages de  $h$ .

Et on obtient alors (ce qu'on savait déjà...) le

COROLLAIRE 2.3. —  $\mathcal{H}$  est connexe, et même connexe par arcs.

*Preuve.* — Puisque l'adhérence d'une partie connexe (par arcs) est connexe,  $\mathcal{H}$  est tout d'abord connexe. Comme  $\mathcal{H}$  est de plus localement connexe par arcs d'après le théorème 1.1.1, il est aussi connexe par arcs.

## 3. Homéomorphismes possédant la « propriété radiale »

Remarquons que la déformation  $\xi$  donnée par le théorème de contractibilité locale ne vérifie pas en général  $\xi_t(h) = h$ , lorsque  $t$  varie de 0 à 1, et l'absence de structure de groupe sur  $\mathcal{H}$  ne permet pas de la remplacer par  $\xi'$  où  $\xi'_t(g) = h \circ \xi_t^{-1}(h) \circ \xi_t(g)$ ,  $g$  dans un voisinage de  $h$ .

On met ici en évidence une «grande» famille d'homéomorphismes de Brouwer pour lesquels on peut remédier à cet inconvénient.

DÉFINITION ET NOTATION 3.1. — On dit que  $h \in \mathcal{H}$  possède la *propriété radiale* s'il existe  $h_1$  conjugué à  $h$  tel que  $h_1(m) = \|m\|h_1\left(\frac{m}{\|m\|}\right)$  pour  $\|m\| \geq 1$ . On note

$$\mathcal{R} = \{h \in \mathcal{H} \mid h \text{ possède la propriété radiale}\}.$$

PROPOSITION 3.2.

- (1) Si  $h \in \mathcal{R}$ , il existe  $\Omega$  un voisinage de  $h$  dans  $\mathcal{H}$  et  $\xi : \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathcal{H}$   
 $(g,t) \mapsto \xi(g,t) = \xi_t(g)$   
continue telle que
- $$\xi_0(g) = g, \quad \xi_1(g) = h, \quad \forall g \in \Omega$$
- $$\xi_t(h) = h, \quad \forall 0 \leq t \leq 1;$$
- (2) Si  $h \in \mathcal{R}$  et  $\Omega'$  est un voisinage de  $h$  dans  $\mathcal{H}$ , on peut choisir  $\Omega$  et  $\xi$  dans (1) pour que  $\xi(\Omega \times [0,1]) \subset \Omega'$ ;
- (3)  $\mathcal{R}$  contient strictement l'ensemble des conjugués à  $\tau$  (en particulier  $\mathcal{R}$  est dense dans  $\mathcal{H}$ );
- (4) Si  $h \in \mathcal{R}$  alors  $h$  admet une demi-trajectoire propre (donc  $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{H}$ ).

*Preuve.*

(1) Soit  $h \in \mathcal{R}$ . Il existe  $h_1$  conjugué à  $h$  vérifiant  $h_1(m) = \|m\|h_1\left(\frac{m}{\|m\|}\right)$  pour  $\|m\| \geq 1$ . On pose  $A = \inf_{m \in 4B} d(m, h_1^{-1}(m)) > 0$  et on définit  $W$  un voisinage de  $\eta : 4B \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  par  $W = \{\varphi \in \text{Pl}(4B; \mathbb{R}^2) \mid d(m, \varphi(m)) < A\}$ .

On considère alors  $\psi$  et  $V$  donnés par la proposition 1.2.1 et son corollaire, puis  $\Omega_1$  un voisinage de  $h_1$  dans  $\mathcal{H}$  tel que :  $g \in \Omega_1 \Rightarrow h_1^{-1} \circ g|_{4B} \in V$ .

Posons

$$\phi' : \Omega_1 \times [0,1] \rightarrow \mathcal{H}$$

$$(g,t) \mapsto \phi'(g,t) = \phi'_t(g) = \begin{cases} g & \text{hors de } 4B \\ h_1 \circ \psi_t(h_1^{-1} \circ g|_{4B}) & \text{sur } 4B. \end{cases}$$

Comme au paragraphe 1.4, on vérifie que  $\phi'_t(g) \in \mathcal{H}$  et  $\phi'_1(g)|_B = h_1|_B$ . De plus, on remarque que  $\phi'_t(h_1) = h_1$ , pour tout  $t \in [0,1]$ . On définit alors

$$\phi'' : \{g \in \mathcal{H} \mid g|_B = h_1|_B\} \times [0,1] \rightarrow \mathcal{H}$$

$$(g,t) \mapsto \phi''(g,t) = \phi''_t(g)$$

par

$$\phi''_t(g)(m) = \begin{cases} h_1(m) & \text{si } \|m\| \leq \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{1-t}g((1-t)m) & \text{si } \|m\| \geq \frac{1}{1-t} \end{cases}$$

si  $0 \leq t < 1$  et

$$\phi''_1(g) = h_1.$$

On obtient une déformation  $\phi$  de  $\Omega_1$  sur  $\{h_1\}$ , laissant  $h_1$  invariant, en posant

$$\begin{aligned}\phi_t(g) &= \phi'_{2t}(g) \text{ pour } 0 \leq t \leq 1/2 \\ &= \phi''_{2t-1}(\phi'_1(g)) \text{ pour } 1/2 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Enfin, si  $\varphi \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  est tel que  $h = \varphi^{-1} \circ h_1 \circ \varphi$ , il est clair que l'application  $H_\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est un homéomorphisme qui envoie  $h_1$  sur  $h$ .

$$g \mapsto \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$$

On prendra alors  $\Omega = H_\varphi(\Omega_1)$  et  $\xi_t(g) = H_\varphi(\phi_t(H_\varphi^{-1}(g)))$ .

La propriété (2) s'obtient facilement à partir de (1) en utilisant la compacité de  $[0,1]$ .

(3) Le modèle  $\tilde{h}$  montre que les conjugués à  $\tau$  ont la propriété radiale. On construit maintenant un homéomorphisme dans  $\mathcal{R}$  qui n'est pas conjugué à  $\tau$ . Pour cela on considère «l'homéomorphisme de Reeb» pour lequel on peut donner une formule explicite ; par exemple, suivant Kerékjártó ([Ke2]):

$$h(x, y) = \begin{cases} (x + 1, y) & \text{si } y \leq 0 \\ (x - 1, y) & \text{si } y \geq 1 \\ (x + 1 - 2y, \sqrt{y}) & \text{si } 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

On choisit  $C_1$  (resp.  $C$ ) un cercle topologique comme indiqué sur la figure III.9.a (resp. figure III.9.b).

À l'aide du théorème de Schoenflies, on sait construire  $\varphi \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\varphi(C_1) = S^1$ ,  $\varphi(h(C_1)) = C$ ,  $\varphi([a_i, h(a_i)]) = [b_i, b'_i]$  pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\varphi([h(a_i), a_{i+1}]) \cap ]b'_i, b'_3[ = \emptyset$  pour  $i \in \{1, 3\}$ , où  $[z, z']$  (resp.  $]z, z'[$ ) désigne le segment fermé (resp. ouvert) de  $z$  à  $z'$ . On définit alors  $h_1$  par :

$$h_1(m) = \begin{cases} \varphi h \varphi^{-1}(m) & \text{si } m \in B \\ \|m\| \varphi h \varphi^{-1}(\frac{m}{\|m\|}) & \text{si } m \notin B. \end{cases}$$

Le fait que chaque rayon  $\mathbb{R}^+ e^{i\theta}$  coupe exactement une fois le cercle  $C$  assure que  $h_1$  est bijective.

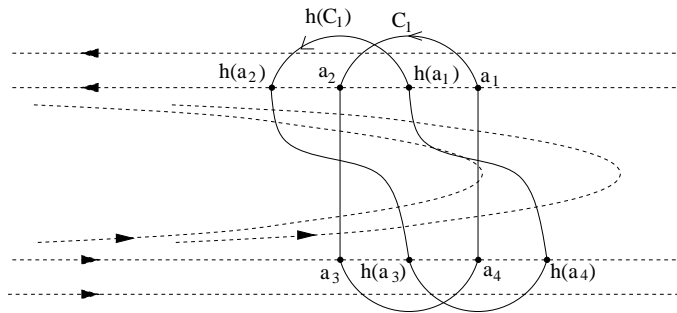


Fig. III.9.a

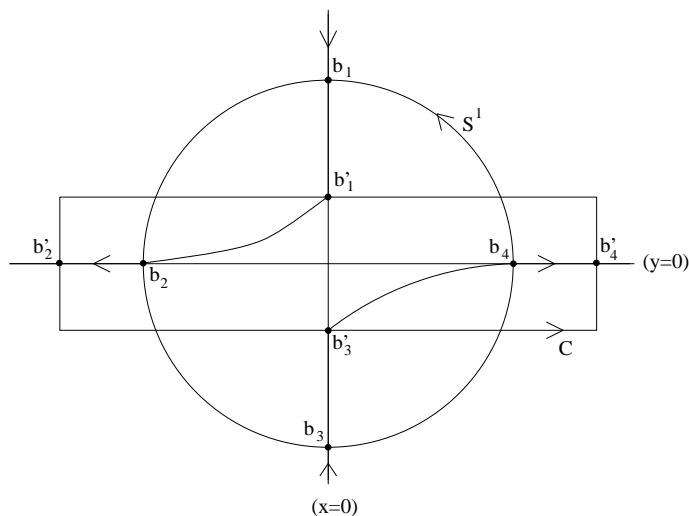


Fig. III.9.b

Par construction, les droites topologiques propres

$$\Delta_1 = \{(0, y) \mid y \geq 1\} \cup \varphi([a_1, h(a_2)]) \cup \{(x, 0) \mid x \leq -1\}$$

$$\Delta_2 = \{(0, y) \mid y \leq -1\} \cup \varphi([a_3, h(a_4)]) \cup \{(x, 0) \mid x \geq 1\}$$

sont invariantes par  $h_1$  et délimitent alors trois domaines invariants par  $h_1$ . Si  $\mathcal{D}$  désigne le domaine intermédiaire (i.e. celui tel que  $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subset \overline{\mathcal{D}}$ ) alors  $\overline{\mathcal{D}} \setminus [b'_1, b'_3]$  n'est pas connexe. Pour  $n$  assez grand,  $h_1^n(b'_1)$  et  $h_1^n(b'_3)$  ne sont pas dans la même composante connexe de  $\overline{\mathcal{D}} \setminus [b'_1, b'_3]$  donc  $h_1^n([b'_1, b'_3]) \cap [b'_1, b'_3] \neq \emptyset$ , ce qui montre que  $h_1$  n'est pas conjugué à  $\tau$ .

(4) Il suffit de vérifier cette propriété pour  $h_1 \in \mathcal{H}$  tel que

$$h_1(m) = \|m\| h_1\left(\frac{m}{\|m\|}\right) \text{ si } \|m\| \geq 1.$$

On définit  $f : B \rightarrow B$  continue par

$$f(m) = \begin{cases} h_1(m) & \text{si } h_1(m) \in B \\ \frac{h_1(m)}{\|h_1(m)\|} & \text{si } h_1(m) \notin B. \end{cases}$$

Le théorème de point fixe de Brouwer donne  $m_0 \in B$  tel que  $f(m_0) = m_0$ .

Par définition de  $f$ , on a nécessairement  $m_0 \in S^1$  et  $\|h_1(m_0)\| > 1$ . L'ensemble  $L = \{rm_0 \mid r \geq 1\}$  est alors la demi-trajectoire (positive) engendrée par le segment de translation  $[m_0, h_1(m_0)]$  et vérifie  $h_1(L) \subset L$ .

Or, il existe des homéomorphismes de Brouwer n'admettant aucune droite proprement plongée invariante (cf. [Bn2], exemple 4, ou [BST]) et l'étude de ces exemples montre qu'ils n'admettent pas non plus de demi-droite proprement plongée contenant son image.

COROLLAIRE 3.3. — Notons  $\mathcal{T} = \{h \in \mathcal{H} \mid h \text{ conjugué à } \tau\}$

$\forall h \in \mathcal{T}, \exists \Omega$  voisinage de  $h$  dans  $\mathcal{T}$

$\exists \xi : \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathcal{T}$  continue et telle que

$$(g,t) \mapsto \xi(g,t) = \xi_t(g)$$

$$\xi_0(g) = g, \xi_1(g) = h, \quad \forall g \in \Omega$$

$$\xi_t(h) = h, \quad \forall 0 \leq t \leq 1$$

(en particulier,  $\mathcal{T}$  est localement contractible).

*Vérification.* — Il suffit de montrer que, dans l'affirmation (1) de la proposition précédente, si  $g \in \mathcal{T}$  alors  $\xi_t(g) \in \mathcal{T}$  pour tout  $t \in [0,1]$ . Or ceci est vrai d'après les relations qui définissent  $\xi$  et d'après le lemme II.1.7 de la preuve de la connexité par arcs.



## Appendice A1 – Le théorème de Schmitt (cf. [Sc2])

**THÉORÈME.** — *L'espace  $\mathcal{H}(0; n) = \{h \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2) \mid \text{Fix}(h) = \{0\} \text{ et } \text{ind}(h, 0) = n\}$  (muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts) est connexe par arcs pour  $n \neq 1$ .*

*Preuve.* — Soit  $h \in \mathcal{H}(0; n)$ . Il suffit de vérifier que les techniques utilisées dans la preuve de la proposition 1.3.3 permettent aussi d'obtenir  $h' \in \mathcal{H}(0; n)$  modification de  $h$  telle que  $h'(D') \cap D'$  soit connexe et  $h'(\partial D') \cap \partial D'$  propre, où  $D'$  est un disque topologique tel que  $0 \in \overset{\circ}{D}'$ . (Il est bien sûr sans intérêt d'exiger ici que  $h'|_d = h|_d$  sur un disque  $d$  voisinage de 0). Le reste de la démonstration est exactement le même que dans [Sc2].

Pour cela, remarquons que l'errance de tout point de  $\mathbb{R}^2$  sous l'action d'un élément de  $\mathcal{H}$  (invoquée au début de la preuve du sous-lemme 1.3.7 pour affirmer qu'il existe  $p+1 \geq 1$  tel que  $F_{p+1} = \emptyset$ ) peut être remplacée par la propriété suivante :

tout point  $m \in \mathbb{R}^2$  vérifie  $\overline{\text{orb}_h(m)} \setminus \text{orb}_h(m) \subset \{0\}$ .

Supposons en effet  $m \neq 0$  et  $a \neq 0$  tels que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} h^{ni}(m) = a$ , où  $(h^{ni})_{i \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $(h^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou bien de  $(h^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ . On choisit un disque fermé  $U$  tel que  $a \in \overset{\circ}{U}$  et  $U \cap h(U) = \emptyset$ . Il existe deux entiers  $p > q$  tels que  $h^p(m) \in U$  et  $h^q(m) \in U$ , donc  $h^p(m) = h^{p-q}(h^q(m)) \in U \cap h^{p-q}(U) \neq \emptyset$ . En reprenant la preuve de la proposition 3.5 de [Gu], on construit alors une trajectoire pour  $h$  qui se recoupe, et une telle situation conduit à une courbe simple fermée le long de laquelle  $h$  est de degré 1 (cf. [Gu], Appendice ou bien [Bn1]) ce qui contredit l'hypothèse sur l'indice du point fixe 0. En reprenant les notations du sous-lemme 1.3.7, on a donc à nouveau  $F_{p+1} = \emptyset$  pour un plus petit entier  $p + 1$ . Les mêmes arguments que ceux de la preuve de la proposition 1.3.3 donnent alors  $h'$  et  $D'$  comme indiqués ci-dessus.

*Remarque.* — La preuve de Schmitt, si elle se révélait correcte, n'imposerait pas de condition sur l'indice du point fixe et ne ferait pas intervenir la dynamique des homéomorphismes.

## Appendice A2 – Version locale de la mise en position canonique

PROPOSITION. — Soient  $U, V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $0$ ,  
 $\varphi : U \rightarrow V$  un homéomorphisme tel que  $\text{Fix}(\varphi) = \{0\}$ ,  $\text{ind}(\varphi, 0) = n \neq 1$ , et préservant l'orientation.

Alors il existe un homéomorphisme  $\varphi'$  défini et coïncidant avec  $\varphi$  au voisinage de  $0$  tel que :

- (1)  $\varphi'$  est une modification (en un sens généralisant de façon évidente la définition donnée pour les homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ ) d'une restriction de  $\varphi$ .
- (2) Il existe un cercle topologique  $C$  vérifiant  $0 \in \text{int}(C)$  et
  - $\varphi'(C) \cap C$  est propre.
  - $\varphi'(\overline{\text{int}(C)} \cap \overline{\text{int}(C)})$  est connexe.
  - $\text{Card}(\varphi'(C) \cap C) = 2|n-1|$ .

*Preuve.* — Comme dans l'appendice A1, il s'agit essentiellement de reprendre la démonstration de la proposition 1.3.3 sans utiliser l'errance de tous les points de  $\mathbb{R}^2$  sous l'action d'un homéomorphisme de Brouwer.

Soit  $D_*$  un disque de centre  $0$ , assez petit pour que  $D_* \subset U$ . On prolonge, avec le théorème de Schoënfliès,  $\varphi|_{D_*}$  en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ . On continue de noter  $\varphi$  ce prolongement (qui peut avoir beaucoup de points fixes). Soit  $U$  la composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus (\text{Fix}(\varphi) \setminus \{0\})$  qui contient  $D_*$ ;  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (car  $0$  est un point fixe isolé de  $\varphi$ ) et  $\varphi(U) = U$  (car  $\varphi(0) = 0$ ). Si  $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$  désigne le revêtement universel de  $U$ , on a alors  $\tilde{U}$  homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$  et on peut considérer les relèvements de  $\varphi$ , c'est-à-dire les homéomorphismes  $h$  de  $\tilde{U}$  tels que  $\pi \circ h = \varphi \circ \pi$ .

Soit  $m_0 \in \pi^{-1}(0)$ . On peut choisir  $h$  relèvement de  $\varphi$  tel que  $h(m_0) = m_0$  puis deux disques  $d$  et  $D$ , de centre  $m_0$ , tels que :

- $D \cup h(D)$  est inclus dans un voisinage ouvert  $W$  de  $m_0$  tel que  $\pi|_W : W \rightarrow \pi(W)$  soit un homéomorphisme et  $\pi(W) \subset D_*$ .
- $d$  est assez petit pour que  $d \subset h^{-1}(\overset{\circ}{D}) \cap \overset{\circ}{D} \cap h(\overset{\circ}{D}) \cap h^2(D)$ .

Remarquons que  $\text{Fix}(h) \subset \pi^{-1}(0)$ , donc (puisque  $\pi$  conjugue localement  $h$  et  $\varphi$ ) les points fixes de  $h$  sont tous d'indice  $n$  et le degré de  $h$  le long de toute courbe simple fermée est de la forme  $kn$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

En reprenant la même preuve et les mêmes notations que pour la proposition 1.3.3 (à l'exception de 0 qui est remplacé ici par  $m_0$ ) on est amené à justifier l'existence d'un entier  $p$  tel que  $F_{p+1} = \emptyset$ .

Si un tel  $p$  n'existe pas, on obtient une sous-suite  $(h^{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  de  $(h^n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} h^{n_i}(m) = m_1$  où  $m$  et  $m_1$  sont dans  $F_0$ , et en particulier  $m_1 \notin \text{Fix}(h)$ .

Comme dans l'appendice A1, ceci conduit à une courbe simple fermée le long de laquelle  $h$  est de degré 1, ce qui est absurde. On peut reprendre alors exactement la preuve de la proposition 1.3.3 et obtenir une suite  $h_1 = h, \dots, h_n = h'$  d'homéomorphismes de  $\tilde{U}$  telle que

- $h_{i+1} = \psi_i \circ h_i$  où  $\text{supp}(\psi_i)$  est inclus dans une réunion disjointe (et finie)  $\coprod_j D_{i,j}$  de disques topologiques fermés vérifiant, pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\psi_i(D_{i,j}) = D_{i,j}$ ,  $h_i(D_{i,j}) \cap D_{i,j} = \emptyset$  et  $h_i^{-1}(D_{i,j}) \cap d = \emptyset$ .
- Il existe un cercle topologique  $C'$  bordant  $D' = \overline{\text{int}(C')} \subset D$ ,  $m_0 \in \overset{\circ}{D}'$ , pour lequel  $h'(C') \cap C'$  est propre et  $h'(D') \cap D'$  connexe.

Les arguments de Schmitt (cf. [Sc2], p. 236 et 237) ou de Slaminka (cf. [Sl], p. 437 à 441) permettent d'obtenir de plus  $\text{Card}(h'(C') \cap C') = 2|n - 1|$ . Comme  $h(D) \subset W$ , on peut aussi choisir les disques  $D_{i,j}$  assez petits pour que  $D_{i,j} \subset W$  pour tout couple  $(i, j)$ .

On obtient alors le résultat en conjuguant par  $\pi|_W$ .



## ***Chapitre IV***

### INTRODUCTION AU TYPE D'HOMOTOPIE DE $\mathcal{H}$



Nous démontrons dans ce chapitre le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *L'inclusion, entre espaces pointés,  $i : (\mathcal{H}, \tau) \hookrightarrow (\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  induit l'application nulle sur les groupes fondamentaux.*

L'outil principal est un théorème de Kneser :

THÉORÈME 2. — *Le groupe des rotations  $SO(2)$  est un rétract par déformation fort de l'espace  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$ .*

Autrement dit, il existe une application continue

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2) \times [0, 1] &\longrightarrow \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2) \\ (h, t) &\longmapsto \Psi(h, t) = \Psi_t(h) \end{aligned}$$

telle que

- (1)  $\Psi_0(h) = h$ ,  $\Psi_1(h) \in SO(2)$ ,  $\forall h \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$
- (2)  $\Psi_t(h) = h$ ,  $\forall h \in SO(2)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

La preuve de Kneser utilise la théorie des fonctions d'une variable complexe (cf. [Kn]). On pourra trouver dans [F] une démonstration purement topologique.

On notera par la suite  $H = (h_t)_{t \in S^1}$  un lacet dans  $(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ , où  $S^1 = [0, 1]/0 = 1$  et  $h_0 = h_1 = \tau$ . L'ensemble  $\Omega(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  de ces lacets est identifié à un sous-ensemble de  $\text{Homéo}(\mathbb{R}^2 \times [0, 1])$ , qui est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (cf. chapitre I). Il en est de même de l'ensemble  $\Omega(\mathcal{H}, \tau)$  des lacets de  $(\mathcal{H}, \tau)$ .

Dans ce qui suit, on identifie  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ . En particulier  $(0, 0) = 0$  et  $(1, 0) = 1$ . On rappelle que  $\mathcal{H}_1 = \{h \in \mathcal{H} \mid h(0) = 1\}$ , et que, pour  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $S(a)$  désigne la similitude  $z \mapsto az$ .

La propriété suivante, remarquée par Schmitt dans [Sc1], permet de caractériser chaque élément de  $\pi_1(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ .

PROPRIÉTÉS ET NOTATIONS 3.

(a) *Pour tout  $H = (h_t)_{t \in S^1} \in \Omega(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ , le degré de l'application  $t \mapsto \frac{h_t(b) - h_t(a)}{\|h_t(b) - h_t(a)\|}$ , où  $a$  et  $b$  sont des points distincts de  $\mathbb{R}^2$ , ne dépend que de la classe d'homotopie  $[H]$  de  $H$  dans  $\pi_1(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ . On le note  $\theta(H)$  ou  $\theta(H; a, b)$  si l'on souhaite préciser le couple  $(a, b)$ .*

(b) L'application  $\pi_1(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau) \longrightarrow \mathbb{Z}$  est un isomorphisme de groupes.  
 $[H] \longmapsto \theta(H)$

*Preuve.*

(a) L'application  $\Omega(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau) \times ((\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \setminus \Delta) \longrightarrow \mathbb{Z}$  (où  $\Delta$  est la diagonale de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ) est continue donc constante sur les composantes connexes par arcs de  $\Omega(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau) \times ((\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \setminus \Delta)$ . Le résultat s'en déduit puisque  $\Delta$  ne disconnecte pas  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  et puisque  $\pi_1(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  s'identifie aux composantes connexes par arcs de  $\Omega(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ .

(b) L'application considérée est clairement un homomorphisme de groupes. Le lacet  $t \mapsto \tau \circ (z \mapsto e^{2i\pi t} z)$  montre qu'elle est surjective. Pour l'injectivité, notons que quelque soit  $H \in \Omega(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ , le théorème 2 donne un lacet  $H' = (h'_t)_{t \in S^1}$  tel que  $[H] = [H']$ ,  $h'_t = \tau \circ r_t$  avec  $r_t \in SO(2)$  pour tout  $t \in S^1$ .

Si  $0 = \theta(H) = \theta(H')$ , on a :

$$0 = \text{degré} \left( t \mapsto \frac{h'_t(1) - h'_t(0)}{\|h'_t(1) - h'_t(0)\|} \right) = \text{degré} \left( t \mapsto \frac{r_t(1) - r_t(0)}{\|r_t(1) - r_t(0)\|} \right) = \text{degré}(t \mapsto r_t(1))$$

donc le lacet  $(r_t)_{t \in S^1}$  est homotope dans  $(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$  au lacet constant  $(\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$  et  $[H'] = [(\tau)]$ .

**PROPRIÉTÉ ET NOTATIONS 4.** — Pour tout  $H \in \Omega(\mathcal{H}, \tau)$ , le degré de l'application  $t \mapsto \frac{h_t(a) - a}{\|h_t(a) - a\|}$ , où  $a \in \mathbb{R}^2$ , ne dépend que de la classe d'homotopie  $[[H]]$  de  $H$  dans  $\pi_1(\mathcal{H}, \tau)$ .

Il sera noté  $\tilde{\theta}(H)$  ou  $\tilde{\theta}(H; a)$  si l'on souhaite préciser le point  $a$ .

*Preuve.* — Elle est voisine de celle de la propriété 3.(a).

**LEMME 5.** — L'inclusion  $i_1 : (\mathcal{H}_1, \tau) \hookrightarrow (\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  induit l'application nulle sur les groupes fondamentaux.

*Preuve.* — Pour tout lacet  $H$  dans  $(\mathcal{H}_1, \tau)$ , on obtient grâce aux propriétés 3.(a) et 4 les égalités suivantes :

$$\theta(H) = \theta(H; 0, 1) = \tilde{\theta}(H; 1) = \tilde{\theta}(H) = \tilde{\theta}(H; 0) = 0.$$

La propriété 3.(b) permet de conclure.



REMARQUE 6. — La proposition 8 ci-dessous est un ingrédient de la preuve du théorème suivant, qui sera donnée dans [Le] et qui consiste à démontrer que  $\mathcal{H}_1$  est contractible.

THÉORÈME 7. — *L'ensemble des translations différentes de l'identité est un rétract par déformation de  $\mathcal{H}$ . En particulier, l'application  $[[H]] \mapsto \tilde{\theta}(H)$  est un isomorphisme de groupes.*

PROPOSITION 8. — *L'espace  $\mathcal{H}$  est homéomorphe au produit  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathcal{H}_1$ .*

*Preuve.* — L'application  $\mathcal{H} \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathcal{H}_1$   

$$h \mapsto \left( h(0), S\left(\frac{1}{h(0)}\right) \circ h \circ S(h(0)) \right)$$

est un homéomorphisme.

*Démonstration de la proposition 1.* — Soit  $\mathcal{H} = (h_t)_{t \in S^1}$  un lacet dans  $(\mathcal{H}, \tau)$ .

On définit  $H' \in \Omega(\mathcal{H}_1, \tau)$  par  $H' = (h'_t)_{t \in S^1}$ ,  $h'_t = S\left(\frac{1}{h_t(0)}\right) \circ h_t \circ S(h_t(0))$ . D'après le lemme 5, il existe une homotopie  $(g_{t,s})_{\substack{t \in S^1 \\ 0 \leq s \leq 1}}$  dans  $\Omega(\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  telle que  $g_{t,0} = h'_t$  et  $g_{t,1} = \tau$  pour tout  $t \in S^1$ . On pose alors  $h_{t,s} = S(h_t(0)) \circ g_{t,s} \circ S\left(\frac{1}{h_t(0)}\right)$ .

Ainsi pour tout  $t \in S^1$ , pour tout  $s \in [0, 1]$ ,

$$h_{t,0} = h'_t$$

$$h_{t,1} = S(h_t(0)) \circ \tau \circ S\left(\frac{1}{h_t(0)}\right) \text{ est la translation de vecteur } h_t(0)$$

$$h_{0,s} = \tau.$$

Le lacet de translations  $(h_{t,1})_{t \in S^1}$  est homotope au lacet constant  $(\tau)$  par  $(h_{t,u})_{\substack{t \in S^1 \\ 0 \leq u \leq 1}}$  où  $h_{t,u}$  est la translation de vecteur  $(1 - u)h_t(0) + u$ , ce qui démontre la proposition.



## Bibliographie

- [An1] S.A. ANDREA. — *On homeomorphisms of the plane which have no fixed points*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **30** (1967), 61–74.
- [An2] S.A. ANDREA. — *The plane is not compactly generated by a free mapping*, Trans. AMS **151** (1970), 481–498.
- [Ar] R. ARENS. — *Topologies for homeomorphism groups*, Amer. J. Math **68** (1946), 593–610.
- [BG] M. BERGER et B. GOSTIAUX. — *Géométrie différentielle*, Presses universitaires de France, 1987.
- [Bo] M. BONINO. — *L'espace des homéomorphismes de Brouwer est connexe par arcs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 1359–1361.
- [Bn1] M. BROWN. — *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston J. of Math. **10** (1984), 35–41.
- [Bn2] M. BROWN. — *Fundamental regions of planar homeomorphisms*, Contemporary Math., **117**, (1991).
- [Bn3] M. BROWN. — *Problem 3.11, page 179, in continuum theory and dynamical systems*, Contemporary Math., **117**, (1991).
- [Br1] L.E.J. BROUWER. — *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann. **72** (1912), 37–54.
- [Br2] L.E.J. BROUWER. — *Collected works*, vol. 2 (H. Freudenthal ed.), North-Holland, 1976.
- [BST] M. BROWN, E. SLAMINKA, W. TRANSUE. — *An orientation preserving fixed point free homeomorphism of the plane which admits no closed invariant line*, Topology and applications **29** (1988), 213–217.
- [Da] E.W. DAW. — *A maximally pathological Brouwer homeomorphism*, Trans. Amer. Math. Soc. **343** (1994), 559–573.
- [Du] J. DUGUNDJI. — *Topology*, Wm. C. Brown publishers, 1966.
- [EK] R.E. EDWARDS and R.C. KIRBY. — *Deformations of spaces of imbeddings*, Ann. of Math. **93** (1971), 63–88.
- [Ep] D.B.A. EPSTEIN. — *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), 83–107.
- [Fa] A. FATHI. — *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, L'enseignement Mathématique **33** (1987), 315–322.
- [Fo] R.H. FOX. — *On topologies for function spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 429–432.
- [F] B. FRIBERG. — *A topological proof of a theorem of Kneser*, Proc. AMS **39** (1973), 421–426.
- [Gu] L. GUILLOU. — *Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff*, Topology **33** (1994), 331–351.
- [HT] T. HOMMA and H. TERESAKA. — *On the structure of the plane translation theorem of Brouwer*, Osaka Math. J. **5** (1953), 233–266.
- [Ke1] B. DE KERÉKJÁRTÓ. — *On a geometrical theory of continuous groups*, Ann. of Math. **26** (1925), 105–117.
- [Ke2] B. DE KERÉKJÁRTÓ. — *Sur le groupe des transformations topologiques du plan*, Ann. Scuola Norm. sup. Pisa, (1934), 393–400.
- [Ki] R. C. KIRBY. — *Stable homeomorphisms and the annulus conjecture*, Ann. of Math. **89** (1969), 575–582.
- [Kn] H. KNESER. — *Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen*, Math. Z. **25** (1926), 362–372.
- [Le] F. LEROUX. — *Sur la topologie de l'espace des homéomorphismes de Brouwer*, Thèse, Université Grenoble I (en préparation).

- [Na] H. NAKAYAMA. — *On dimensions of non-Hausdorff set for plane homeomorphisms*, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 789–793.
- [Ne] M.H.A. NEWMAN. — *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge University Press, 1954.
- [PS] S. PELIKAN et E. SLAMINKA. — *A bound for the fixed point index of area-preserving homeomorphisms of two-manifolds*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **7** (1987), 463–479.
- [Sc1] B. SCHMITT. — *Index de Seifert et systèmes différentiels à coefficients périodiques*, Thèse, Université de Strasbourg, (1973).
- [Sc2] B. SCHMITT. — *L'espace des homéomorphismes du plan qui admettent un seul point fixe d'indice donné est connexe par arcs*, Topology **18** (1979), 235–240.
- [Sl] E. SLAMINKA. — *Removing index 0 fixed points for area preserving maps of two-manifolds*, Trans. AMS **340** (1993), 429–445.

—  $\diamond$  —

(6 juin 1997)