Le présent travail, comme toute entreprise humaine, n'aurait certainement pas pu être mené à son terme sans la contribution – directe ou indirecte – d'autres personnes auxquelles je dois beaucoup.

Pour commencer, je tiens à remercier mes parents ainsi que mon frère pour le soutien constant qu'ils ont su m'apporter tout au long de mon périple.

Je voudrais également exprimer ma gratitude à tous mes amis qui, par leur présence, m'ont permis de garder la force nécessaire pour surmonter les difficiles périodes de doute qui ont jonché cette thèse. Parmi eux, je réserve une place particulière à mes compagnons de route : Ludovic Pillons, Youssef Barkatou, Alvaro Rittatore, Ariane Mézard et Pierre-Louis Montagard, dont je garde un agréable souvenir pour les nombreux moments passés ensemble, que ce soit au bureau ou ailleurs...

Mon entière reconnaissance va en outre à Gérard Besson pour ses précieux conseils et la confiance qu'il m'a accordée, sans oublier le plus important à mes yeux, à savoir ses qualités humaines.

Yves Colin de Verdière me fait l'honneur et le plaisir de participer au jury, je lui en suis gré.

Je remercie beaucoup Patrick Foulon et Mark Pollicott pour le travail qu'ils ont fourni en acceptant d'être les rapporteurs de cette thèse.

D'autre part, je suis heureux que Pierre Bérard et Sylvestre Gallot aient bien voulu faire partie du jury : la générosité du premier m'a conduit vers la recherche mathématique, et le second a toujours su lier intérêt et bonne humeur dans une discussion.

Enfin, mes remerciements vont aux membres de l'équipe administrative de l'Institut Fourier pour leur amabilité, et tout spécialement à Arlette Guttin-Lombard qui n'a pas ménagé ses efforts dans la saisie de ce texte, et ce, sans manquer de conserver sa légendaire gentillesse.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

L'objet de cette thèse est l'étude des entropies volumique et topologique pour les métriques de Finsler. Au début des années 80, A. Katok et M. Gromov ont conjecturé que sur une variété compacte M munie d'une métrique riemannienne g_0 localement symétrique de courbure sectionnelle strictement négative (par exemple une variété hyperbolique réelle), celle-ci minimise l'entropie volumique (et donc aussi l'entropie topologique d'après [Man]) parmi *toutes* les métriques de Riemann g sur M normalisées par la condition naturelle $\mathrm{vol}_g(M) = \mathrm{vol}_{g_0}(M)$ ([Kat], [Gro 1], [Gro 2]). La première réponse à ce problème a été donnée par A. Katok lui-même en 1982 lorsqu'il montre que la conjecture est vraie en dimension 2 avec l'entropie topologique ([Kat]). Par la suite, il a été prouvé par A. Katok, G. Knieper, H. Weiss ([K-K-W]) et aussi, de manière différente, par M. Pollicott ([Po]) que toute métrique hyperbolique g_0 sur une variété compacte est un point critique de l'entropie topologique pour n'importe quelle perturbation riemannienne $(g_\lambda)_{\lambda\in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ de g_0 préservant le volume de la variété. Finalement, c'est en 1994 que G. Besson, G. Courtois et S. Gallot résolvent complètement la question par l'affirmative et donnent, en outre, un important résultat de rigidité (de type Mostow) aux conséquences multiples :

Théorème ([B-C-G 2]). — *Soit M une variété différentiable compacte, munie d'une métrique riemannienne g_0 localement symétrique de courbure sectionnelle strictement négative.*

Alors, pour toute métrique de Riemann g sur M telle que $\mathrm{vol}_g(M) = \mathrm{vol}_{g_0}(M)$*, on a ($h_V$ désignant l'entropie volumique) :*

$$h_V(g) \geq h_V(g_0)\,.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si :

i) g est à courbure sectionnelle constante strictement négative lorsque dim $M = 2$,

ii) g est isométrique à g_0 lorsque dim $M \geq 3$.

Dès lors, l'intérêt s'est porté vers l'équivalent de la conjecture de A. Katok et M. Gromov en rang supérieur à 1, pour lequel la réponse suivante a été obtenue en 1995, également par les trois auteurs précédents :

Théorème ([B-C-G 3]). — *Si (M,g_0) est le produit d'espaces riemanniens symétriques de courbures sectionnelles strictement négatives et différents de $\mathbb{H}^2$, alors pour* *tout sous-groupe discret* Γ *de* $\mathrm{Isom}_0(M,g_0)$*, co-compact et sans points fixes, et pour toute métrique riemannienne* Γ*-invariante* g *sur* M*, on a :*

$$\mathrm{vol}_g(M/\Gamma) = \mathrm{vol}_{g_0}(M/\Gamma) \Longrightarrow h_V(g) \geq h_V(g_0)\,.$$

Ce théorème, malgré le cas irréductible et celui de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ qui restent encore ouverts, laisse penser avec espoir que la solution au problème de l'entropie minimale en rang ≥ 2 devrait être semblable à celle en rang 1, du moins pour les métriques de Riemann. Aussi, c'est cette dernière précision qui est à l'origine du présent travail. En effet, notre but est ici de regarder si ce qui a été fait précédemment dans le cadre riemannien est encore valable pour les métriques de Finsler, qui sont la “généralisation minimale” des métriques de Riemann. Plus exactement, il s'agit pour nous de répondre à la conjecture suivante :

(CF) Conjecture finslérienne de l'entropie volumique minimale. — *Soit* (M,g_0) *un espace riemannien symétrique de type non-compact, dont on note* G *la composante connexe du neutre dans* $\mathrm{Isom}(M,g_0)$*. Alors pour tout sous-groupe discret* Γ *de* G*, co-compact et sans points fixes, et pour toute métrique de Finsler* Γ*-invariante* F *sur* M *:*

$$\mathrm{vol}_F(M/\Gamma) = \mathrm{vol}_{g_0}(M/\Gamma) \Longrightarrow h_V(F) \geq h_V(g_0)\,.$$

Les trois premiers chapitres sont entièrement consacrés à cette conjecture en rang différent de 1. Nous y prouvons que, contrairement à la situation riemannienne avec [B-C-G 3], (CF) est *fausse*, et ce, *quel que soit* (M,g_0) de rang ≥ 2 ; c'est le *théorème III.3.2*. De plus, le contre-exemple général que nous exhibons est l'unique minimum de l'entropie volumique dans l'ensemble des métriques de Finsler G-invariantes sur M, normalisées par le volume du quotient M/Γ (*théorème III.2.4* et *proposition III.3.1*).

Dans une deuxième partie regroupant les chapitres IV et V, on s'intéresse au cas du rang 1 pour lequel (CF) est malheureusement beaucoup plus difficile à trancher. Néanmoins, nous y suivons le chemin (cité plus haut) qu'avaient emprunté A. Katok, G. Knieper, H. Weiss et M. Pollicott dans le cadre riemannien à propos de l'entropie topologique. En ce qui nous concerne, le lien entre les deux entropies est fourni par la proposition suivante, qui généralise [Man] :

Proposition ([Eg]). — *Soit* F *une métrique de Finsler strictement convexe sur une variété compacte. Alors*

$$h_V(F) \leq h_T(\text{flot géodésique de } F)$$

(h_T *désignant l'entropie topologique), avec égalité si* F *est à courbure négative au sens de P. Foulon ([Fou 1]).*

On obtient alors une extension de [K-K-W] :

Théorème V.3.4. — *Soit* (M,g_0) *une variété hyperbolique réelle, compacte. Alors pour toute perturbation de* g_0 *à travers des métriques de Finsler strictement convexes*

$(F_\lambda)_{\lambda \in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ *telles que* $\mathrm{vol}_{F_\lambda}(M) = \mathrm{vol}_{g_0}(M)$*, on a :*

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} h_T\,(\textit{flot géodésique de } F_\lambda) = 0\,.$$

Enfin, après avoir établi au chapitre IV une formule *exploitable* de la mesure de Liouville $|\omega_F|$ associée à une métrique de Finsler F strictement convexe (*corollaire IV.2.5*), nous l'utilisons pour prouver le :

THÉORÈME V.3.6. — *Soit* (M, g_0) *une* surface *hyperbolique réelle, compacte. Alors pour toute perturbation de* g_0 *à travers des métriques de Finsler strictement convexes* $(F_\lambda)_{\lambda \in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ *telles que* $|\omega_{F_\lambda}|(S^{F_\lambda}(M)) = |\omega_{g_0}|(S^{g_0}(M))$*, on a :*

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} h_T\,(\textit{flot géodésique de } F_\lambda) = 0\,.$$

L'intérêt nouveau de ce résultat par rapport au contexte riemannien réside dans le fait que la normalisation par le volume de Liouville des fibrés sphériques *ne coïncide pas* avec celle par le volume finslérien de la variété comme on le montre en IV.2 (*proposition IV.2.6*).

Pour terminer, indiquons que dans tout ce qui suit, le mot “différentiable” seul signifie “de classe C^∞” et que toutes les variétés considérées sont de classe C^∞, connexes, et de dimension ≥ 2.

Chapitre I

PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et propriétés de base concernant les trois principaux ingrédients de cette thèse, à savoir les espaces riemanniens symétriques, les métriques de Finsler et l'entropie volumique.

I.1. Espaces riemanniens symétriques

Pour ce paragraphe, on pourra se référer à [Hel].

DÉFINITION I.1.1. — *Un espace riemannien symétrique est une variété riemannienne (M,ρ) vérifiant : pour tout point $x \in M$, il existe une isométrie s_x de (M,ρ) telle que $s_x(x) = x$ et $T_x s_x = -\operatorname{Id}$.*

Remarque. — On montre qu'une telle symétrie s_x est unique pour chaque $x \in M$, involutive, et que (M,ρ) est nécessairement complète.

Le groupe $\mathcal{J}$ des isométries d'un espace riemannien symétrique (M,ρ) peut être muni d'une unique structure de groupe de Lie compatible avec la topologie compacte-ouverte, et si l'on note G la composante connexe de l'élément neutre $e = \mathrm{id}_M$ dans $\mathcal{J}$, alors G est un sous-groupe de Lie de $\mathcal{J}$ qui agit transitivement et de manière C^∞ sur M.

Soient $x_0 \in M$ un point-base fixé et $\begin{array}{rl} \pi : G & \longrightarrow M \\ g & \longmapsto g\cdot x_0 \end{array}$ la projection naturelle de G sur M. Par passage au quotient, π induit un C^∞-difféomorphisme $\begin{array}{rl} G/K & \longrightarrow M \\ gK & \longmapsto g\cdot x_0 \end{array}$, où $K \subset G$ est le stabilisateur de x_0. Ce dernier est un sous-groupe de Lie compact de G et, si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ désignent les algèbres de Lie de G et K respectivement, on a :

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \tau\cdot X = X\}\ ,$$

où $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est la différentielle en $e \in \mathfrak{g}$ de $\sigma \in \operatorname{Aut}(G)$ défini par

$$\sigma(g) \overset{\text{déf}}{=} s_{x_0} g s_{x_0} \ \text{ pour } \ g \in G\,.$$

En posant alors $\mathfrak{p} \overset{\text{déf}}{=} \{X \in \mathfrak{g} \mid \tau\cdot X = -X\}$, on obtient :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \ \text{ (somme directe)}$$

et

$$T_e\pi(\mathfrak{k}) = \{0\}\,.$$

En outre, $T_e\pi_{\restriction\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \to T_{x_0}(M)$ est un isomorphisme linéaire et, si l'on note $\exp_{x_0}$ l'exponentielle riemannienne en x_0 pour ρ, on a :

$$\exp_{x_0} \circ T_e\pi_{\restriction\mathfrak{p}} = \mathrm{Exp}_{x_0}$$

avec $\begin{array}{rl}\mathrm{Exp}_{x_0} : \mathfrak{p} & \longrightarrow M \\ X & \longmapsto (\exp X)\cdot x_0\end{array}$, où $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est l'exponentielle du groupe de Lie G.

Enfin, notons $\begin{array}{rl}\mathfrak{B} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y))\end{array}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

De la compacité de K, on déduit que la restriction de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$ est définie négative, et les relations de crochets $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ et $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ entraînent d'autre part que $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$ sont orthogonaux relativement à $\mathfrak{B}$.

Le type non-compact et la notion de rang.

DÉFINITION I.1.2. — *Un espace riemannien symétrique (M,ρ) est de type non-compact si, et seulement si, la restriction de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ est définie positive.*

Remarque. — Cette définition est indépendante du point-base $x_0 \in M$ choisi.

Pour *toute la suite* de ce paragraphe, donnons-nous un tel espace et $x_0 \in M$. Avec les notations précédentes, l'involution $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est de Cartan, c'est-à-dire qu'en définissant $\langle X \mid Y\rangle \overset{\text{déf}}{=} -\mathfrak{B}(X,\tau\cdot Y)$, on obtient un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$. Celui-ci permet de munir G d'une unique métrique de Riemann ζ_G invariante par multiplication à gauche et telle que $\zeta_G(e) = \langle\cdot\mid\cdot\rangle$ (on notera ζ_K la métrique induite par ζ_G sur K). De plus, $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ est $\mathrm{Ad}(K)$-invariant, d'où il existe un unique réel $\gamma > 0$ tel que $\pi : G \to M$ soit une submersion riemannienne pour ζ_G et $\gamma\rho$ (voir [Ch-Eb], p. 61) ; l'application $T_e\pi_{\restriction\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \to T_{x_0}(M)$ est alors une isométrie linéaire pour $(\cdot|\cdot)$ et $\gamma\rho(x_0)$, où $(\cdot|\cdot)$ est la restriction de $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ à $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$.

Il est clair que $\mathfrak{g}$ est semi-simple et que la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan. Aussi, le centre $Z(G)$ de G est trivial (car inclus dans K) et la finitude de $Z(G)$ entraîne que K est un sous-groupe compact maximal de G. En outre, on a :

PROPOSITION I.1.3 (voir [Hel], p. 241–253).

a) L'application $\mathrm{Exp}_{x_0} : \mathfrak{p} \to M$ est un difféomorphisme. En particulier, M est simplement connexe.

b) En identifiant $\mathfrak{p}$ et $T_{x_0}(M)$ à l'aide de $T_e\pi_{\restriction\mathfrak{p}}$, soient $P \subset \mathfrak{p}$ un 2-plan tangent à M en x_0 et $\kappa(P) \leq 0$ la courbure sectionnelle de P. Alors $\kappa(P) = 0$ si, et seulement si, P est contenu dans une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$.

DÉFINITION I.1.4. — *Un* plat *de (M,ρ) est une sous-variété riemannienne, totalement géodésique, isométrique à un espace euclidien et maximale pour ces propriétés.*

Les plats ont la caractérisation algébrique suivante :

PROPOSITION I.1.5 (voir [Hel], p. 245–247). — *Soit $S \subset M$ une sous-variété contenant x_0. En identifiant $\mathfrak{p}$ et $T_{x_0}(M)$ par $T_e\pi_{\restriction\mathfrak{p}}$, on a : S est un plat de (M,ρ) si, et seulement si, $T_{x_0}(S)$ est une sous-algèbre abélienne (de $\mathfrak{g}$) maximale dans $\mathfrak{p}$. Dans ce cas :*

- $*$ *Pour toute sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, il existe $k \in K$ tel que $T_{x_0}(S) = \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$, et par suite $\mathfrak{p} = \mathrm{Ad}(K)\mathfrak{a}$.*
- $*$ *Pour tout plat S' de (M,ρ) contenant x_0, il existe $k \in K$ tel que $S = k\cdot S'$, et par suite $M = K\cdot S'$.*

On pose alors :

DÉFINITION I.1.6. — *La dimension commune des plats de (M,ρ) est appelée le* rang *de (M,ρ).*

Remarque. — Lorsque $\mathrm{rang}(M,\rho) = 1$, les plats sont les géodésiques et il existe une constante $c > 0$ telle que la courbure sectionnelle de $c\rho$ soit comprise entre -1 et $\frac{-1}{4}$.

Système de racines.

Considérons une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$.

Pour tout $H \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}(H)$ est un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ qui est symétrique par rapport à $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$. Comme $\mathfrak{a}$ est abélienne (*i.e.* $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = \{0\}$), il en résulte qu'on peut diagonaliser simultanément les éléments $\mathrm{ad}(H) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ $(H \in \mathfrak{a})$, ce qui conduit à poser pour chaque $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ (dual de $\mathfrak{a}$) :

$$\mathfrak{g}_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \{Y \in \mathfrak{g} \mid [H,Y] = \alpha(H)Y,\ \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

L'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relatives à $\mathfrak{a}$ est alors défini par :

$$\Lambda_\mathfrak{a} \overset{\text{déf}}{=} \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \mid \alpha \neq 0 \text{ et } \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\} \ ;$$

il est fini et on a la décomposition en somme directe :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Lambda_\mathfrak{a}} \mathfrak{g}_\alpha \,.$$

Pour chaque $\alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}}$, l'entier $m_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \dim \mathfrak{g}_\alpha$ est appelé la *multiplicité* de α et le sous-espace $\mathcal{H}_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha(H) = 0\}$ définit *l'hyperplan singulier* associé à α. On appelle alors *chambre de Weyl* de $\mathfrak{a}$ toute composante connexe de $\mathfrak{a} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}}} \mathcal{H}_\alpha$. Si $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ est une telle chambre de Weyl, on définit l'ensemble des racines positives par rapport à $\mathfrak{a}^+$:

$$\Lambda_{\mathfrak{a}^+} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{\alpha \in \Lambda_\alpha \mid \alpha(H) > 0,\ \forall H \in \mathfrak{a}^+\right\},$$

et l'on a :

Proposition I.1.7 (voir [Hel], p. 458). — *Il existe $B \subset \Lambda_{\mathfrak{a}^+}$ vérifiant :*

i) B est une base de $\mathfrak{a}^*$.

ii) Tout $\beta \in \Lambda_{\mathfrak{a}}$ peut s'écrire : $\beta = \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha$, où les n_α $(\alpha \in B)$ sont des éléments de $\mathbb{Z}$ ayant même signe.

On dit que B est une base *de $\Lambda_{\mathfrak{a}}$.*

Enfin, en définissant respectivement les centralisateur et normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans K par :

$$K_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)H = H,\ \forall H \in \mathfrak{a}\},$$

et

$$K_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}\},$$

on obtient un isomorphisme de groupes :

$$\begin{aligned} K_1/K_0 &\longrightarrow W_{\mathfrak{a}} \\ kK_0 &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \\ H \mapsto \mathrm{Ad}(k)H \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $W_{\mathfrak{a}}$ est le *groupe de Weyl de* $\mathfrak{a}$. Ce dernier désigne le groupe de toutes les réflexions de $\mathfrak{a}$ par rapport aux hyperplans singuliers $\mathcal{H}_\alpha$ $(\alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}})$ et pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

I.2. Métriques de Finsler G-invariantes

Brièvement parlant, une métrique de Finsler sur une variété différentiable est la donnée d'une norme sur chaque espace tangent avec des conditions de régularité sur la variation de cette norme. C'est en quelque sorte la plus faible généralisation d'une métrique riemannienne, les ellipsoïdes étant remplacés sur les espaces tangents par des boules convexes *a priori* quelconques. La première véritable étude de ces métriques a été faite en 1918 par P. Finsler dans sa thèse, mais c'est B. Riemann qui, dès 1854, y fit allusion (on pourra trouver un aperçu dans [Spi], Ch. IV) avant de se concentrer sur le cas particulier qui porte son nom depuis.

Définition I.2.1. — *Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie et B une partie de V. On dit que B est une* boule convexe *si, et seulement si, B est un voisinage ouvert de l'origine, borné, convexe et symétrique ($B = -B$).*

Proposition I.2.2 (voir [Bou], Ch. II, § 2, n° 11). — *Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie et φ l'application qui à une norme sur V associe sa boule unité ouverte. Alors φ est une bijection de l'ensemble des normes sur V vers l'ensemble des boules convexes de V dont la réciproque φ^{-1} est donnée par : $\varphi^{-1}(B) = \|\cdot\|_B$, où $\|v\|_B \overset{\text{déf}}{=} \inf\{\lambda > 0 \mid v \in \lambda B\}$ pour $v \in V$.*

Ces rappels étant faits, passons à la définition d'une métrique de Finsler :

Définition I.2.3. — *Soient M une variété différentiable et $\ell \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Notons $\mathring{T}(M)$ le fibré tangent $T(M)$ de M privé de la section nulle.*

On appelle métrique de Finsler de classe C^ℓ *sur M toute fonction continue*

$$\begin{aligned} F : T(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,v) &\longmapsto F(x,v) \end{aligned}$$

telle que :

i) F est de classe C^ℓ sur $\mathring{T}(M)$,

ii) $F(x,\cdot\,)$ est une norme sur l'espace tangent $T_x(M)$ pour tout $x \in M$.

Étant donné une courbe continue $\sigma : [0,1] \to M$ de classe C^1 par morceaux, on définit la longueur de σ relativement à la métrique de Finsler F par :

$$\ell_F(\sigma) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^1 F(\sigma(t),\dot\sigma(t))\, dt\,.$$

Si l'on pose alors pour $x,y \in M$:

$$d_F(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \inf\left\{ \ell_F(\sigma) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma : [0,1] \to M \text{ chemin de classe } C^1 \\ \text{par morceaux joignant } x \text{ à } y \end{array} \right\},$$

l'application $d_F : M \times M \to \mathbb{R}$ est une distance sur M, dite associée à F, induisant sur M la même topologie que celle sous-jacente à la structure différentiable de M.

Définition I.2.4. — *Soit H un sous-groupe du groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes C^∞ de M sur M. On dit qu'une métrique de Finsler F sur M est H-invariante si, et seulement si, $F\left(f(x),T_xf\cdot v\right) = F(x,v)$ pour tout $(x,v) \in T(M)$ et tout $f \in H$; on notera $\mathcal{F}_H$ l'ensemble des métriques de Finsler (continues) H-invariantes sur M.*

Exemples.

a) Soient $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ de classe C^ℓ $(\ell \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^ℓ vérifiant $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Alors la fonction $\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,v) &\longmapsto f(x)\|v\| \end{aligned}$ est une métrique de Finsler de classe C^ℓ sur $\mathbb{R}^n$.

b) Soit ρ une métrique riemannienne de classe C^ℓ $(\ell \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ sur une variété différentiable M.

Alors $\begin{aligned} F_\rho : T(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,v) &\longmapsto (\rho(x)\cdot(v,v))^{1/2} \end{aligned}$ est une métrique de Finsler de classe C^ℓ sur M, dite associée à ρ.

c) Soit M une variété différentiable sur laquelle agit transitivement et de manière C^∞ un groupe de Lie G (*i.e.* M est un espace homogène). Soient $x_0 \in M$ et $C \subset T_{x_0}(M)$ une boule convexe, invariante par le stabilisateur de x_0 dans G.

Alors il existe une unique métrique de Finsler G-invariante F sur M, dont C est la boule unité ouverte pour la norme $F(x_0, \cdot\,)$.

Remarque. — Les métriques de Finsler présentent des analogies certaines avec celles de Riemann, mais il faudrait se garder de croire qu'il suffit de "paraphraser" les concepts riemanniens pour obtenir leurs équivalents en géométrie finslérienne. Dans cette dernière, en effet, il n'y a plus, par exemple, de notion canonique d'orthogonalité, de mesure (voir [Run]), de connexion de Levi-Civita et de courbure (voir [Ab-Pa], [Run] et [Fou 2]), de laplacien, etc. , et de ce fait de nombreux objets classiques du cadre riemannien demandent à être redéfinis après avoir été repensés.

Structures finslériennes G-invariantes.

On se donne ici un espace riemannien symétrique (M,ρ) de type non-compact et $x_0 \in M$. Rappelons qu'on note :

G la composante connexe du neutre dans le groupe des isométries de (M,ρ) ,

K le stabilisateur de x_0 dans G ,

$\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G ,

$\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de K ,

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée à x_0,

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ une sous-algèbre abélienne maximale ,

$W_{\mathfrak{a}}$ le groupe de Weyl de $\mathfrak{a}$.

Nous avons alors la caractérisation suivante :

THÉORÈME I.2.5 ([Pla], p. 23). — *Il y a bijection entre :*

∗ *les boules convexes B de $\mathfrak{a}$, $W_{\mathfrak{a}}$-invariantes,*

∗ *les boules convexes C de $\mathfrak{p}$, $\mathrm{Ad}(K)$-invariantes,*

∗ *les métriques de Finsler F sur M, G-invariantes.*

Preuve.

• Soient F une métrique de Finsler sur M, $B_{F(x_0,\cdot)}$ la boule unité ouverte de la norme $F(x_0,\cdot\,)$ sur $T_{x_0}(M)$ et $C \overset{\text{déf}}{=} (T_e\pi_{\restriction\mathfrak{p}})^{-1}\left(B_{F(x_0,\cdot)}\right)$.

Supposons que F soit G-invariante. Alors $B_{F(x_0,\cdot)}$ est K-invariante, ce qui entraîne $T_e\pi\,(\mathrm{Ad}(k)C) = T_e\pi(C)$ pour tout $k \in K$, c'est-à-dire $\mathrm{Ad}(k)C = C$ ($\mathrm{Ad}(k)C$ et C étant dans $\mathfrak{p}$).

Réciproquement, si $B_{F(x_0,\cdot)}$ est K-invariante, on a vu dans l'exemple **c)** précédent que F est alors G-invariante.

• Soit à présent B une boule convexe de $\mathfrak{a}$, $W_{\mathfrak{a}}$-invariante. Alors $C \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ad}(K)B$ est une boule convexe de $\mathfrak{p}$ ([Pla], p. 19) qui est évidemment $\mathrm{Ad}(K)$-invariante.

Inversement, si C est une boule convexe de $\mathfrak{p}$, $\mathrm{Ad}(K)$-invariante, alors $B \overset{\text{déf}}{=} C \cap \mathfrak{a}$ est une boule convexe de $\mathfrak{a}$, $W_{\mathfrak{a}}$-invariante ([Pla], p. 19). ■

Pour $F \in \mathcal{F}_G$, on notera B_F (resp. C_F) la boule convexe de $\mathfrak{a}$ (resp. de $\mathfrak{p}$) qui lui correspond par le théorème précédent.

Remarque. — On a toujours $F_\rho \in \mathcal{F}_G$. En outre, on déduit de ce théorème que lorsque $\mathrm{rang}(M,\rho) = \dim\mathfrak{a} = 1$, il existe pour $F \in \mathcal{F}_G$ un réel $\lambda > 0$ tel que $B_{F_\rho} = \lambda B_F$, d'où $F = \lambda F_\rho$; par suite F est associée à une métrique riemannienne proportionnelle à ρ. Il n'y a par conséquent aucun intérêt à étudier les métriques de Finsler G-invariantes en rang 1.

PROPOSITION I.2.6 ([Pla], p. 25). — *Soit F une métrique de Finsler G-invariante sur M.*

Pour $x,y \in M$, $g \in G$ et $H \in \mathfrak{a}$ tels que $g\cdot x = x_0$ et $g\cdot y = \exp(H)\cdot x_0$, on a :

$$d_F(x,y) = \|H\|_{B_F} .$$

Exemple. — Pour $n \geq 3$, on considère la variété différentiable

$$M = \left\{ S \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^tS = S,\ S \text{ définie positive, } \det(S) = 1 \right\}$$

(ellipsoïdes dans $\mathbb{R}^n$, de volume canonique unité). Le groupe de Lie connexe $G = SL(n,\mathbb{R})$ agit transitivement et de manière C^∞ sur M par :

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \longrightarrow & M \\ (g,S) & \longmapsto & gS\,{}^tg \end{array} .$$

Le stabilisateur de $x_0 = I \in M$ dans G est égal à $K = SO(n)$ qui est un sous-groupe compact maximal de G. La projection naturelle de G sur M induit alors un difféomorphisme de $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ sur M. On a ici :

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) =$ matrices réelles $n \times n$ de trace nulle,

$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n) =$ matrices $n \times n$ antisymétriques,

$\mathfrak{p} =$ matrices $n \times n$ symétriques de trace nulle.

Prenons pour sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a} =$ matrices $n \times n$ diagonales de trace nulle $\subset \mathfrak{p}$, et soit :

$$B = \left\{ \operatorname{diag}(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathfrak{a} \mid |\eta_j - \eta_i| < 1,\ \forall i,j = 1, \ldots, n \right\}.$$

C'est une boule convexe de $\mathfrak{a}$ qui est invariante par le groupe de Weyl $W_\mathfrak{a}$, ce groupe étant constitué par les permutations des coefficients diagonaux des éléments de $\mathfrak{a}$ ($W_\mathfrak{a} \cong \mathfrak{S}_n$). Soit maintenant F la métrique de Finsler G-invariante sur M, définie par B selon le théorème II.2.5.

Pour $g_1, g_2 \in G$, on a alors d'après la proposition précédente ([Pla], p. 27) :

$$d_F(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) = \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_+({}^tg_1^{-1} g_1^{-1} g_2\, {}^tg_2)}{\sigma_-({}^tg_1^{-1} g_1^{-1} g_2\, {}^tg_2)}$$

(log désignant le logarithme népérien), où, pour $A \in M(n,\mathbb{R})$ de spectre réel $\mathcal{S} \neq \emptyset$, on note $\sigma_+ = \max \mathcal{S}$ et $\sigma_- = \min \mathcal{S}$.

Par ailleurs, soit ζ_G la métrique riemannienne sur G, invariante par multiplication à gauche, définie par : $\zeta_G(g) \cdot (gX, gY) = \operatorname{tr}(X\,{}^tY)$ pour $g \in G$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Si ρ est alors l'unique métrique de Riemann sur M telle que la projection naturelle $\pi : G \to M$ soit une submersion riemannienne relativement à ζ_G et ρ, on vérifie que (M,ρ) est un espace riemannien symétrique de type non-compact et de rang $n - 1$. De plus, la composante connexe du neutre dans le groupe des isométries de (M,ρ) est isomorphe à $PSL(n,\mathbb{R})$ (de même algèbre de Lie que G) et l'involution de Cartan $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ associée à $x_0 = I$ s'écrit $\tau \cdot X = -{}^tX$ ($X \in \mathfrak{g}$). Enfin, à titre de comparaison avec F, on a pour $g_1, g_2 \in G$:

$$d_\rho = d_{F_\rho} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} (\log \lambda_i)^2 \right)^{1/2} ,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de ${}^tg_1^{-1} g_1^{-1} g_2\, {}^tg_2$.

I.3. Entropie volumique

Dans ce paragraphe, M désigne une variété différentiable, connexe et simplement connexe, telle que $\mathrm{Diff}(M)$ admette un sous-groupe discret, co-compact et sans points fixes.

DÉFINITION I.3.1. — *Soient Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Diff}(M)$, co-compact et sans points fixes, et $F \in \mathcal{F}_\Gamma$ (i.e. F est une métrique de Finsler Γ-invariante sur M).*

Soient $x_0 \in M$ et μ une mesure borélienne Γ-invariante sur M. Pour $t > 0$, notons $B^F(x_0,t)$ la boule ouverte dans M relative à d_F, de centre x_0 et de rayon t. Alors la limite :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log\left[\mu(B^F(x_0,t))\right]$$

est finie positive et indépendante des choix de x_0, μ et Γ.

Elle est appelée entropie volumique *de F et se note $h_V(F)$.*

Preuve.

• L'indépendance de la limite par rapport à x_0 et le fait qu'elle soit finie positive sont prouvés dans [Man] et [Ro].

• L'indépendance par rapport à μ est démontrée dans [Ro].

• Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets de $\mathrm{Diff}(M)$, co-compacts et sans points fixes, et supposons que $F \in \mathcal{F}_{\Gamma_1} \cap \mathcal{F}_{\Gamma_2}$.

Le sous-groupe $\langle \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \rangle$ de $\mathrm{Diff}(M)$ engendré par $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est également discret, co-compact et sans points fixes, ce qui conduit au diagramme commutatif suivant dans lequel tous les quotients sont des variétés différentiables compactes :

$$\begin{tikzcd}
 & M/\Gamma_1 \arrow[dr] & \\
M \arrow[ur] \arrow[rr, "p"] \arrow[dr] & & M/\langle \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \rangle \\
 & M/\Gamma_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(les flèches désignent les surjections canoniques).

En fixant alors une métrique de Riemann arbitraire ρ sur $M/\langle \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \rangle$, la mesure riemannienne μ sur M associée à $p^*(\rho)$ est à la fois Γ_1-invariante et Γ_2-invariante. ■

Remarques.

a) Si ρ est une métrique de Riemann Γ-invariante sur M, on note $h_V(F_\rho) = h_V(\rho)$.

b) On peut généraliser cette définition de l'entropie volumique aux espaces métriques, mais dans ce cas il y a dépendance par rapport à Γ. Pour ces questions on pourra consulter [Ro].

Nous allons rappeler deux propriétés essentielles de l'entropie volumique pour $F \in \mathcal{F}_\Gamma$ (Γ sous-groupe discret de $\mathrm{Diff}(M)$, co-compact et sans points fixes) :

PROPOSITION I.3.2. — *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda F \in \mathcal{F}_\Gamma$ *et*

$$h_V(\lambda F) = \frac{1}{\lambda} h_V(F)\,.$$

Preuve. — Soient $x_0 \in M$ et μ une mesure borélienne Γ-invariante sur M.

Pour $t > 0$, on a $B^{\lambda F}(x_0,t) = B^F(x_0,\frac{t}{\lambda})$, d'où

$$\frac{1}{t}\log\left[\mu(B^{\lambda F}(x_0,t))\right] = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{(t/\lambda)}\log\left[\mu(B^F(x_0,\frac{t}{\lambda}))\right]\ ,$$

ce qui permet de conclure en faisant $t \to +\infty$. ■

PROPOSITION I.3.3. — *Soient* (N,f) *un espace de Finsler et* $\Phi : M \to N$ *une isométrie pour* F *et* f*, i.e.* Φ *est un difféomorphisme et*

$$f(\Phi(x),T_x\Phi\cdot v) = F(x,v) \ \textit{pour tout}\ (x,v) \in T(M)\,.$$

Alors :

$$h_V(f) = h_V(F)\,.$$

Preuve. — Immédiate. Remarquons au passage que f est invariante par le sous-groupe $\left\{\Phi \circ \gamma \circ \Phi^{-1} \mid \gamma \in \Gamma\right\}$ de $\mathrm{Diff}(N)$. ■

Cette dernière proposition affirme que l'entropie volumique est un invariant géométrique des espaces de Finsler. La question se pose dès lors de savoir jusqu'à quel point. En d'autres termes, la réciproque de cette proposition est-elle vraie ? Sans hypothèses sur F et f la réponse est clairement négative (il suffit d'utiliser la proposition I.3.2).

Néanmoins, avec deux métriques de Riemann, dont l'une vérifie certaines conditions, la réponse est positive comme le montre le résultat suivant dû à G. Besson, G. Courtois et S. Gallot :

THÉORÈME I.3.4 ([B-C-G 2]). — *Soit* (M,ρ) *un espace riemannien symétrique de type non-compact et de rang 1, avec* $\dim M \geq 3$.

Soit Γ un sous-groupe discret de G, co-compact et sans points fixes.

Alors toute métrique de Riemann Γ-invariante m sur M, satisfaisant à :

$$h_V(m) = h_V(\rho)$$

et

$$\mathrm{vol}_m(M/\Gamma) = \mathrm{vol}_\rho(M/\Gamma) \ \textit{(volumes riemanniens),}$$

est isométrique à ρ.

Lorsqu'on remplace dans ce théorème de rigidité la métrique m par une métrique de Finsler C^∞, la question reste entièrement ouverte. En revanche, si l'on passe en rang ≥ 2 et qu'on s'intéresse aux métriques de Finsler G-invariantes, nous verrons ce qu'il en est au chapitre III.

Chapitre II

UNE FORMULE POUR L'ENTROPIE VOLUMIQUE

Nous établissons dans ce chapitre une formule simple et générale pour l'entropie volumique des métriques de Finsler G-invariantes sur les espaces riemanniens symétriques de type non-compact. Cette formule aura l'avantage, contrairement à la définition de base donnée au chapitre précédent, d'être utilisable en pratique dans les calculs, et notamment dans ceux que nous serons amenés à faire au chapitre III.

Soient (M,ρ) un espace riemannien symétrique de type non-compact et $x_0 \in M$. Désignons par (voir I.1) :

G la composante connexe du neutre dans le groupe des isométries de (M,ρ),

K le stabilisateur de x_0 dans G,

$\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G,

$\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de K,

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée à x_0,

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ une sous-algèbre abélienne maximale,

$\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$,

$\Lambda_{\mathfrak{a}^+}$ l'ensemble des racines positives par rapport à $\mathfrak{a}^+$.

Avec ces notations, nous avons le théorème suivant :

Théorème II.1. — *Soit F une métrique de Finsler G-invariante sur M. Alors :*

$$h_V(F) = \max_{H \in \overline{\mathfrak{a}^+} \cap B_F} \Big(\sum_{\alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha \alpha(H) \Big) \ \text{(adhérence dans } \mathfrak{a}\text{)},$$

indépendamment des choix de $x_0 \in M$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$.

Preuve. — On utilise l'application exponentielle riemannienne en x_0,

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}_{x_0} : \mathfrak{p} &\longrightarrow M \\ X &\longmapsto \exp(X)\cdot x_0 \end{aligned} \quad ,$$

qui est ici un difféomorphisme.

Sachant que $C_F = \mathrm{Ad}(K)B_F$, on a d'après la proposition I.2.6 :

$$\forall X \in \mathfrak{p},\ d_F(x_0, \mathrm{Exp}_{x_0}(X)) = \|X\|_{C_F} ,$$

où $\|\cdot\|_{C_F}$ est la norme sur $\mathfrak{p}$ associée à la boule convexe $C_F \subset \mathfrak{p}$.

Il en résulte que pour tout $t > 0$, $(\mathrm{Exp}_{x_0})^{-1}\left(B^F(x_0,t)\right) = tC_F$, où $B^F(x_0,t)$ désigne la boule ouverte pour d_F dans M, de centre x_0 et de rayon t.

Par ailleurs, en notant $(\cdot|\cdot)$ la restriction à $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ du produit scalaire $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ sur $\mathfrak{g}$, on a ([B-C-G 1], p. 443), (la constante $\gamma > 0$ étant définie en I.1) :

$$\forall X\in\mathfrak{p},\ \left[\det_{(\cdot|\cdot)}\left((\mathrm{Exp}_{x_0})^*\rho\right)\right]^{1/2}(X) = \gamma^{-n/2}\cdot\exp\Big(\sum_{\nu\in\Lambda_{\mathfrak{b}^+}} m_\nu\nu(X)\Big),$$

où $n = \dim M = \dim\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre abélienne maximale telle que $X\in\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}^+$ est une chambre de Weyl de $\mathfrak{b}$ telle que $X\in\bar{\mathfrak{b}}^+$ (adhérence dans $\mathfrak{b}$).

Enfin, K_0 étant le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K, l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathfrak{a}^+\times(K/K_0) &\longrightarrow \mathrm{Ad}(K)\mathfrak{a}^+\subset\mathfrak{p}\\ (H,kK_0)&\longmapsto \mathrm{Ad}(k)H\end{aligned}$$

est un difféomorphisme ([Hel], p. 402). En notant alors μ la mesure sur $\mathfrak{a}^+\times(K/K_0)$ associée à la métrique riemannienne image réciproque par φ de l'induction à $\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{a}^+$ du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathfrak{p}$, nous obtenons :

$$\mathrm{vol}_\rho(B^F(x_0,t)) = t^n\cdot\gamma^{-n/2}\cdot\int_{(\mathfrak{a}^+\cap B_F)\times(K/K_0)}\exp\Big(t\cdot\sum_{\nu\in\Lambda_{\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}^+}} m_\nu\nu(\mathrm{Ad}(k)H)\Big)d\mu(H,kK_0).$$

En effet, d'une part, pour tout $k\in K$, $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre abélienne maximale dont $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}^+$ est une chambre de Weyl, et d'autre part,

$$\mathfrak{p}\setminus\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{a}^+ = \bigcup_{\alpha\in\Lambda_\mathfrak{a}}\mathrm{Ad}(K)\left(\{H\in\mathfrak{a}\mid\alpha(H)=0\}\right),$$

réunion finie de sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{p}$, distincts de $\mathfrak{p}$, est de volume nul pour la mesure de Haar sur $\mathfrak{p}$ associée à $(\cdot|\cdot)$.

À présent, pour $k\in K$ et $\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}$, la forme linéaire $\begin{aligned}\nu_\alpha : \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ H&\longmapsto\alpha(\mathrm{Ad}(k^{-1})H)\end{aligned}$ appartient à $\Lambda_{\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}^+}$ (car $\forall g\in G$, $\forall X,Y\in\mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad}(g)[X,Y] = [\mathrm{Ad}(g)X,\mathrm{Ad}(g)Y]$ ([Hel], p. 126)) et vérifie $m_{\nu_\alpha} = m_\alpha$ (car $\mathrm{Ad}(k)\in GL(\mathfrak{g})$).

En outre, l'application $\begin{aligned}\Lambda_{\mathfrak{a}^+}&\longrightarrow\Lambda_{\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}^+}\\ \alpha&\longmapsto\nu_\alpha\end{aligned}$ étant bijective, il s'ensuit que :

$$\sum_{\nu\in\Lambda_{\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}^+}} m_\nu\nu\left(\mathrm{Ad}(k)H\right) = \sum_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha\alpha(H)$$

pour tout $H\in\mathfrak{a}$.

Par conséquent,

$$\mathrm{vol}_\rho(B^F(x_0,t)) = t^n\cdot\gamma^{-n/2}\cdot\int_{(\mathfrak{a}^+\cap B_F)\times(K/K_0)}\exp\Big(t\cdot\sum_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha\alpha(H)\Big)d\mu(H,kK_0),$$

ce qui entraîne

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log\left[\mathrm{vol}_\rho(B^F(x_0,t))\right] = \lim_{t\to+\infty}\log\left[\left(\int_{(\mathfrak{a}^+\cap B_F)\times(K/K_0)} f^t\,d\mu\right)^{1/t}\right],$$

où $f : \begin{array}{rcl}(\mathfrak{a}^+\cap B_F)\times(K/K_0) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (H,kK_0) & \longmapsto & \exp\Big(\sum\limits_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha\alpha(H)\Big)\end{array}$.

Puisque f est continue, majorée (toute forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ étant majorée sur B_F bornée), et que $(\mathfrak{a}^+\cap B_F)\times(K/K_0)$ est connexe, de μ-mesure finie >0 ($\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{a}^+\cap C_F$ étant de volume fini >0 pour $(\cdot|\cdot)$), on a :

$$\left(\int_{(\mathfrak{a}^+\cap B_F)\times(K/K_0)} f^t\,d\mu\right)^{1/t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \sup_{(\mathfrak{a}^+\cap B_F)\times(K/K_0)} f\,.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log\left[\mathrm{vol}_\rho(B^F(x_0,t))\right] &= \sup_{H\in\mathfrak{a}^+\cap B_F}\Big[\sum_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha\alpha(H)\Big]\\ &= \max_{H\in\overline{\mathfrak{a}^+\cap B_F}}\Big[\sum_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha\alpha(H)\Big]\end{aligned}$$

(la fonction définie par la somme étant continue sur $\mathfrak{a}$). ■

Remarque II.2. — Lorsque la métrique riemannienne symétrique ρ sur M est normalisée (quitte à la multiplier par un scalaire >0) de telle sorte que $\pi : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & M \\ g & \longmapsto & g\cdot x_0\end{array}$ soit une submersion riemannienne pour ζ_G et ρ, nous avons par la formule précédente appliquée à F_ρ :

$$h_V(\rho) = h_V(F_\rho) = \max_{H\in\overline{\mathfrak{a}^+\cap B_{F_\rho}}}\langle H_0 \mid H\rangle$$

avec $B_{F_\rho} = \{H\in\mathfrak{a} \mid \langle H\mid H\rangle<1\}$ et $H_0 \overset{\text{déf}}{=} \sum\limits_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha e_\alpha$, où $\forall\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}$, $\forall H\in\mathfrak{a}$, $\alpha(H) = \langle e_\alpha \mid H\rangle$. Le vecteur H_0 étant dans $\mathfrak{a}^+$, le maximum des $\langle H_0\mid H\rangle$ pour $H\in\overline{\mathfrak{a}^+\cap B_{F_\rho}}$ est obtenu d'après Cauchy-Schwarz pour $H=\frac{H_0}{\|H_0\|_{\langle\cdot|\cdot\rangle}}$. Par conséquent, $h_V(\rho) = \|H_0\|_{\langle\cdot|\cdot\rangle}$ et nous retrouvons ainsi l'expression de $h_V(\rho)$ utilisée dans [B-C-G 1], p. 443, appendice C.

Remarque II.3. — Comme $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha\alpha$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{a}$, le maximum dans la formule de $h_V(F)$ peut être pris sur $\overline{\mathfrak{a}^+}\cap\partial\overline{B}_F$, où $\partial\overline{B}_F$ est la sphère unité dans $\mathfrak{a}$ pour la norme $\|\cdot\|_{B_F}$.

Exemples.

a) (Cas irréductible). — Reprenons l'exemple vu en I.2 avec $n = 3$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} M &= \left\{ S \in GL(3,\mathbb{R}) \mid {}^tS = S,\ S \text{ définie positive, } \det(S) = 1 \right\} \\ &\cong SL(3,\mathbb{R})/SO(3)\,, \end{aligned}$$

et calculons $h_V(F)$ ainsi que $h_V(\rho)$.

En identifiant $\mathfrak{a}$ = matrices réelles 3×3 diagonales de trace nulle avec l'espace vectoriel réel $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0 \right\}$ grâce à $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathrm{diag}(x,y,z) \in \mathfrak{p}$, l'espace riemannien symétrique (M,ρ) admet, relativement à la chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+ = \left\{ (x,y,z) \in V \mid x < y < z \right\}$, les racines positives (voir par exemple [B-G-S], appendice 5) :

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \quad & V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\text{multiplicité } = 1)\,, \\ & (x,y,z) \longmapsto y - x \\ \alpha_2 : \quad & V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\text{multiplicité } = 1)\,, \\ & (x,y,z) \longmapsto z - x \\ \alpha_3 : \quad & V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\text{multiplicité } = 1)\,. \\ & (x,y,z) \longmapsto z - y \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} h_V(F) &= \max_{(x,y,z) \in \overline{\mathfrak{a}^+ \cap B}} \left[(z-x) + (z-y) + (y-x) \right] \\ &= \max_{\substack{x,z \in \mathbb{R} \\ 0 \leq z-x \leq 1}} \left[2(z-x) \right] \end{aligned}$$

(puisque $\overline{\mathfrak{a}^+ \cap B} = \left\{ (x,y,z) \in V \mid x \leq y \leq z \text{ et } z - x \leq 1 \right\}$), soit $h_V(F) = 2$.

D'autre part, l'isomorphisme linéaire précédent qui identifie $\mathfrak{a}$ et V fait correspondre la restriction à $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ du produit scalaire $\langle X \mid Y \rangle = \mathrm{tr}(X\,{}^tY)$ sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ avec la restriction à $V \times V$ du produit scalaire canonique $\mathrm{can}_{\mathbb{R}^3}$ sur $\mathbb{R}^3$. Sachant que les racines α_1, α_2 et α_3 sont représentées respectivement par les vecteurs $\varepsilon_1 = (-1,1,0)$, $\varepsilon_2 = (-1,0,1)$ et $\varepsilon_3 = (0,-1,1)$ via la restriction de $\mathrm{can}_{\mathbb{R}^3}$ à $V \times V$, on a donc (remarque II.2 ci-dessus) :

$$h_V(\rho) = \text{ la norme de } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \text{ pour } \mathrm{can}_{\mathbb{R}^3} \ \textit{i.e. } h_V(\rho) = 2\sqrt{2}\,.$$

b) (Cas réductible). — Étant donné des entiers $q \geq 2$ et $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_q \geq 2$, on considère la variété différentiable

$$M = \mathbb{H}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{H}^{n_q} \ \text{ avec, pour } n \geq 2\,,$$

$$\mathbb{H}^n = \left\{ (x_0,x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \text{ et } x_0 > 0 \right\} \ (\text{hyperboloïde})\,.$$

Le groupe de Lie connexe $G = SO_0(1,n_1) \times \cdots \times SO_0(1,n_q)$ agit transitivement et de manière C^∞ sur M par isométries pour la métrique riemannienne $\rho = P_1 \times \cdots \times P_q$, où P_j est la métrique de Poincaré (de courbure sectionnelle constante égale à -1) sur $\mathbb{H}^{n_j}$ ($j = 1,\ldots,q$). En outre, pour $j \in \{1,\ldots,q\}$, soient :

- $v_j = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{H}^{n_j}$,
- $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{so}(1,n_j) = \left\{X \in M(n_j+1,\mathbb{R}) \mid X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x \\ \hline {}^t x & Y \end{array}\right),\ x \in \mathbb{R}^{n_j},\ Y \in \mathfrak{so}(n_j)\right\}$,
- $K_j = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \mid A \in SO(n_j)\right\} \cong SO(n_j)$,
- $\mathfrak{h}_j = \mathrm{Lie}\,(K_j) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) \mid Y \in \mathfrak{so}(n_j)\right\} \cong \mathfrak{so}(n_j)$,
- $\mathfrak{p}_j = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & x \\ \hline {}^t x & 0 \end{array}\right) \mid x \in \mathbb{R}^{n_j}\right\}$,
- $\langle X \mid Y\rangle_j = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(X I_{1,n_j} Y I_{1,n_j})$ pour $X,Y \in \mathfrak{g}_j$, où $I_{1,n} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -I_n \end{array}\right) \in M(n+1,\mathbb{R})$ pour tout entier $n \geq 2$,
- $E_j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ & & 0 & \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M(n_j+1,\mathbb{R})$.

Le stabilisateur de $(v_1,\ldots,v_q) \in M$ dans G est égal à $K = K_1 \times \cdots \times K_q$ (sous-groupe compact maximal de G) et on a ici :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_q\,,$$
$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \times \cdots \times \mathfrak{h}_q\,,$$
$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \times \cdots \times \mathfrak{p}_q\,.$$

Prenons pour sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a} = \mathbb{R}E_1 \times \cdots \times \mathbb{R}E_q \subset \mathfrak{p}$, et définissons :

$$B = \left\{(\eta_1 E_1,\ldots,\eta_q E_q) \in \mathfrak{a} \mid |\eta_1| + \cdots + |\eta_q| < 1\right\}.$$

C'est une boule convexe de $\mathfrak{a}$ qui est invariante par le groupe de Weyl $W_{\mathfrak{a}}$, celui-ci étant engendré par les éléments

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a} & \longrightarrow & \mathfrak{a} \\ (X_1,\ldots,X_j,\ldots,X_q) & \longmapsto & (X_1,\ldots,-X_j,\ldots,X_q) \end{array} \qquad (j = 1,\ldots,q)\,.$$

En identifiant $\mathfrak{a}$ avec $\mathbb{R}^q$ par $(\eta_1,\ldots,\eta_q) \in \mathbb{R}^q \longmapsto (\eta_1 E_1,\ldots,\eta_q E_q)$, l'espace riemannien symétrique (M,ρ) admet, relativement à la chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+ = (\mathbb{R}_+^*)^q$, les racines positives :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : \mathbb{R}^q &\longrightarrow \mathbb{R} \ \ (\text{multiplicité } = n_j - 1) \ \ (j = 1, \ldots, q)\,. \\ (\eta_1, \ldots, \eta_j, \ldots, \eta_q) &\longmapsto \eta_j \end{aligned}$$

Si maintenant F est la métrique de Finsler G-invariante sur M définie par B selon le théorème II.2.5, on a alors (remarque II.3) :

$$h_V(F) = \max_{\substack{\sum_{j=1}^{q} \eta_j = 1 \\ \forall j \in \{1,\ldots,q\},\ \eta_j \geq 0}} \left[\sum_{j=1}^{q} (n_j - 1)\eta_j \right] \qquad i.e.\ h_V(F) = n_1 - 1$$

(en effet $h_V(F) \leq n_1 - 1$, ce majorant étant atteint pour $(\eta_1, \ldots, \eta_q) = (1, 0, \ldots, 0)$).

Par ailleurs, en désignant par $(\mathfrak{g}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ l'espace euclidien produit $(\mathfrak{g}_1, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_1) \times \cdots \times (\mathfrak{g}_q, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_q)$ et par ξ_G la métrique de Riemann sur G, invariante par multiplication à gauche, définie à l'aide de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, la projection naturelle $\pi : G \to M$ est une submersion riemannienne relativement à ξ_G et ρ. De plus, l'identification linéaire de $\mathfrak{a}$ avec $\mathbb{R}^q$ fait correspondre la restriction à $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{g}$ avec le produit scalaire canonique $\mathrm{can}_{\mathbb{R}^q}$ sur $\mathbb{R}^q$. Sachant que les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sont représentées respectivement par les vecteurs $\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_q = (0, \ldots, 0, 1)$ via $\mathrm{can}_{\mathbb{R}^q}$, on a donc (remarque II.2) :

$$h_V(\rho) = \text{ la norme de } \sum_{j=1}^{q} (n_j - 1)\varepsilon_j \text{ pour } \mathrm{can}_{\mathbb{R}^q} \ \ i.e.\ h_V(\rho) = \sqrt{\sum_{j=1}^{q} (n_j - 1)^2}\,.$$

Chapitre III

CONTRE-EXEMPLE FINSLÉRIEN EN RANG ≥ 2

Cette partie est consacrée à la construction explicite, sur tout espace riemannien symétrique (M,ρ) de type non-compact et de rang supérieur ou égal à 2, d'une métrique de Finsler G-invariante F_1 dont l'entropie volumique est *strictement inférieure* à celle de ρ et qui vérifie $\mathrm{vol}_{F_1}(M/\Gamma) = \mathrm{vol}_\rho(M/\Gamma)$ pour tout sous-groupe discret Γ de G, co-compact et sans points fixes.

En outre, nous montrons que F_1 est l'unique minimum de l'entropie volumique parmi toutes les métriques de Finsler sur M qui sont G-invariantes et normalisées par le volume finslérien de M. Aussi, c'est ce dernier que nous allons maintenant définir.

III.1. Mesure sur un espace de Finsler

Commençons par un lemme élémentaire. Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire fixé sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. À chaque produit scalaire Φ sur $\mathbb{R}^n$ est associé un unique endomorphisme A de $\mathbb{R}^n$, symétrique et positif par rapport à $(\cdot|\cdot)$, tel que :

$$\forall v,w \in \mathbb{R}^n,\ \Phi(v,w) = (Av \mid w).$$

En désignant par $\mathrm{vol}_{(\cdot|\cdot)}$ la mesure de Haar sur $\mathbb{R}^n$ correspondant à $(\cdot|\cdot)$, on a :

Lemme III.1.1.

$$\sqrt{\det_{(\cdot|\cdot)}(\Phi)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\det(A)} = \frac{\mathrm{vol}_{(\cdot|\cdot)}(B_{(\cdot|\cdot)})}{\mathrm{vol}_{(\cdot|\cdot)}(B_\Phi)},$$

où $B_{(\cdot|\cdot)}$ et B_Φ sont les boules unité ouvertes pour $(\cdot|\cdot)$ et Φ respectivement.

Preuve. — Appliquer la formule du changement de variable dans une intégrale. ■

Ceci conduit à *définir* pour toute *norme* N sur $\mathbb{R}^n$:

$$\sqrt{\det_{(\cdot|\cdot)}(N)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{vol}_{(\cdot|\cdot)}(B_{(\cdot|\cdot)})}{\mathrm{vol}_{(\cdot|\cdot)}(B_N)},$$

où B_N est la boule unité ouverte pour N.

On peut ainsi associer à N une mesure sur $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{vol}_N \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\det_{(\cdot|\cdot)}(N)}\,\mathrm{vol}_{(\cdot|\cdot)}$, qui vérifie de manière évidente $\mathrm{vol}_N = \sqrt{\det_\Phi(N)}\,\mathrm{vol}_\Phi$ pour *tout* produit scalaire Φ sur $\mathbb{R}^n$ (vol_Φ étant la mesure de Haar sur $\mathbb{R}^n$ correspondant à Φ et $\sqrt{\det_\Phi(N)}$ se définissant comme avec

$(\cdot|\cdot)$). Ainsi vol_N est intrinsèque à N et étend la notion de mesure de Haar pour les produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ avec, entre autres, $\mathrm{vol}_N(B_N) = \mathrm{vol}_\Phi(B_\Phi) =$ constante ne dépendant que de n pour tout produit scalaire Φ sur $\mathbb{R}^n$.

Posons alors la :

Définition III.1.2. — *Soit M une variété différentiable munie d'une métrique de Finsler F. On appelle* mesure finslérienne *associée à F la mesure* vol_F *sur M définie par :*

$$\mathrm{dvol}_F(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\det_{\rho(x)}(F(x,\cdot))}\,\mathrm{dvol}_\rho(x) \ \ (x \in M)\,,$$

où ρ est une métrique riemannienne C^0 arbitraire sur M.

Cette définition est une généralisation naturelle de la classique mesure riemannienne sur un espace de Riemann, et c'est elle que nous utiliserons dans toute la suite du présent chapitre. Pour compléter ce paragraphe, explicitons $\sqrt{\det_{\rho(x)}(F(x,\cdot))}$ $(x \in M)$.

Lemme III.1.3. — *Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.*

L'application $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \\ v \mapsto \frac{N_1(v)}{N_2(v)}v\end{array}$ est un C^1-difféomorphisme dont le jacobien en $v \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ vaut :

$$(\mathrm{Jac}\, f)(v) = \left(\frac{N_1(v)}{N_2(v)}\right)^n \,.$$

Preuve.

- f est clairement de classe C^1, bijective, avec $f^{-1} : \begin{array}{l}\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \\ w \mapsto \frac{N_2(w)}{N_1(w)}w\end{array}$ de classe C^1.

- On a $\forall v \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $N_2(v)f(v) = N_1(v)v$, d'où en différentiant :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ N_2(v)\,[f'(v)\cdot h] = N_1(v)h + [L(v)\cdot h]\,v\,,$$

où $L(v) = N_1'(v) - \left(\frac{N_1(v)}{N_2(v)}\right) N_2'(v)$ (forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$).

Soient $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En notant $a = N_1(v)$, $\lambda_i = L(v)\cdot e_i$ et $\alpha_i = \langle v \mid e_i\rangle$ pour $i \in \{1,\dots,n\}$, la matrice de $N_2(v)f'(v)$ par rapport à $(e_1,\dots,e_n)$ est égale à

$$B + aI$$

avec $B = (\alpha_i\lambda_j)_{i,j=1,\dots,n}$ et I la matrice unité de $M(n,\mathbb{R})$.

Il en résulte que $\det\left[N_2(v)f'(v)\right] = C_B(-a)$, où $C_B(X) = \det(B - XI) \in \mathbb{R}[X]$ est le polynôme caractéristique de B.

Or, un rapide calcul montre que $B^2 = sB$ avec

$$\begin{aligned} s &= \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n \\ &= L(v)\cdot v\,. \end{aligned}$$

Comme N_1 et N_2 sont positivement homogènes de degré 1, le théorème d'Euler entraîne $N_1'(v)\cdot v = N_1(v)$ et $N_2'(v)\cdot v = N_2(v)$; par suite $s = 0$, d'où $C_B(X) = (-X)^n$ puisque B est nilpotente ($B^2 = 0$). On en déduit donc que $\det\left[N_2(v)f'(v)\right] = a^n$, c'est-à-dire $\det(f'(v)) = \left(\frac{N_1(v)}{N_2(v)}\right)^n$. ■

Ce résultat nous conduit à la :

Proposition III.1.4. — *Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Si $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire quelconque sur $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$\int_{B_{N_2}} \varphi(w)\,\mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(w) = \int_{B_{N_1}\setminus\{0\}} \varphi\Big(\frac{N_1(v)}{N_2(v)}v\Big)\Big(\frac{N_1(v)}{N_2(v)}\Big)^n\,\mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(v)\,.$$

Preuve.

• Supposons tout d'abord que N_1 soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. D'après [Bo-Fe], p. 36, il existe une suite $(\nu_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ de normes sur $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 (et même analytiques) sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, qui converge simplement sur $\mathbb{R}^n$ vers N_2 et telle que $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $N_2 \leq \nu_\ell$. On a alors :

$$\int_{B_{\nu_\ell}} \varphi(w)\,\mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(w) \underset{\ell\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{B_{N_2}} \varphi(w)\,\mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(w)$$

avec $\forall \ell \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_{B_{\nu_\ell}} \varphi(w)\,\mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(w) &= \int_{B_{\nu_\ell}\setminus\{0\}} \varphi(w)\,\mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(w) \\ &= \int_{B_{N_1}\setminus\{0\}} \varphi\Big(\frac{N_1(v)}{\nu_\ell(v)}v\Big)\Big(\frac{N_1(v)}{\nu_\ell(v)}\Big)^n\,\mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(v) \end{aligned}$$

en appliquant le lemme précédent au changement de variable

$$\begin{aligned} f\,:\,\mathbb{R}^n\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \\ v &\longmapsto \frac{N_1(v)}{\nu_\ell(v)}v = w \end{aligned}$$

qui est un C^1-difféomorphisme envoyant $B_{N_1}\setminus\{0\}$ sur $B_{\nu_\ell}\setminus\{0\}$.

Comme φ est bornée sur $\mathbb{R}^n$ et que $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\left|\frac{1}{\nu_\ell(v)}\right| \leq \frac{1}{N_2(v)}$, nous avons par le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\begin{aligned} &\int_{B_{N_1}\setminus\{0\}} \varphi\Big(\frac{N_1(v)}{\nu_\ell(v)}v\Big)\Big(\frac{N_1(v)}{\nu_\ell(v)}\Big)^n\,\mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(v) \\ &\qquad\underset{\ell\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{B_{N_1}\setminus\{0\}} \varphi\Big(\frac{N_1(v)}{N_2(v)}v\Big)\Big(\frac{N_1(v)}{N_2(v)}\Big)^n\,\mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(v)\,, \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit par unicité de la limite que :

$$\int_{B_{N_2}} \varphi(w)\, \mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(w) = \int_{B_{N_1}\setminus\{0\}} \varphi\Big(\frac{N_1(v)}{N_2(v)}v\Big)\Big(\frac{N_1(v)}{N_2(v)}\Big)^n \mathrm{dvol}_{(\cdot|\cdot)}(v)\,.$$

• Si maintenant N_1 est quelconque, il suffit d'utiliser l'égalité ci-dessus pour une suite $(\delta_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ de normes sur $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, qui converge simplement sur $\mathbb{R}^n$ vers N_1 avec $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\delta_\ell \le N_1$, puis de faire un passage à la limite. ■

Proposition III.1.5. — *Soient M une variété différentiable de dimension $n \ge 2$ et F (resp. ρ) une métrique de Finsler (resp. de Riemann) sur M. Alors :*

$$\forall x \in M,\ \sqrt{\det_{\rho(x)}(F(x,\cdot))} = \frac{nC_n}{\int_{S^\rho_x(M)} F^{-n}(x,u)\, d\sigma^\rho_x(u)}\,,$$

où $S^\rho_x(M) \subset T_x(M)$ est la sphère unité pour $\rho(x)$, σ^ρ_x est la mesure canonique sur $S^\rho_x(M)$ relative à $\rho(x)$ et C_n est le volume euclidien canonique de la boule unité canonique dans $\mathbb{R}^n$.

Preuve. — Pour $x \in M$ fixé, nous avons dans $T_x(M)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\rho(x)}\left(B_{F(x,\cdot)}\right) &= \int_{B_{F(x,\cdot)}\setminus\{0_x\}} \mathrm{dvol}_{\rho(x)}(w)\\ &= \int_{B_{\rho(x)}\setminus\{0_x\}} \left(\frac{\sqrt{\rho(x)\cdot(v,v)}}{F(x,v)}\right)^n \mathrm{dvol}_{\rho(x)}(v)\end{aligned}$$

d'après la proposition III.1.4.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\rho(x)}\left(B_{F(x,\cdot)}\right) &= \int_0^1 t^{n-1}\left[\int_{S^\rho_x(M)}\left(\frac{1}{F(x,u)}\right)^n d\sigma^\rho_x(u)\right] dt\\ &= \frac{1}{n}\int_{S^\rho_x(M)} F^{-n}(x,u)\, d\sigma^\rho_x(u)\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathrm{vol}_{\rho(x)}\left(B_{\rho(x)}\right) = C_n$, ce qui achève la preuve. ■

III.2. Minimum de l'entropie volumique

Position du problème.

En reprenant les notations de I.3, soient M une variété différentiable de dimension $n \geq 2$, connexe et simplement connexe, et Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Diff}(M)$, co-compact et sans points fixes.

Le problème du minimum de l'entropie volumique avec normalisation par le volume finslérien de M consiste à rechercher, s'ils existent, les points qui minimisent la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\Gamma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ F &\longmapsto [h_V(F)]^n \cdot \mathrm{vol}_F(M/\Gamma) \end{aligned},$$

le volume étant calculé avec la mesure finslérienne vol_F sur M/Γ introduite au paragraphe précédent (on note encore F la métrique de Finsler quotient sur M/Γ) et $\mathcal{F}_\Gamma$ étant défini en I.3.

Comme on a vu que pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $F \in \mathcal{F}_\Gamma$, $h_V(\lambda F) = \frac{1}{\lambda} h_V(F)$, la fonctionnelle ci-dessus n'est pas affectée par les homothéties de rapport > 0 en raison de la présence du facteur $\mathrm{vol}_F(M/\Gamma)$, ce qui donne un sens à l'étude de son minimum éventuel.

Remarquons qu'on pourrait très bien considérer toute autre fonctionnelle sur $\mathcal{F}_\Gamma$, positivement homogène de degré nul, faisant intervenir l'entropie volumique. En particulier, il est intéressant d'utiliser une autre notion de volume finslérien que celle introduite au III.1 ; c'est ce que nous ferons dans le prochain chapitre.

Plaçons-nous dorénavant dans le cas où M est munie d'une métrique riemannienne symétrique ρ de type non-compact. Alors, pour toute métrique de Finsler G-invariante F sur M (*i.e.* $F \in \mathcal{F}_G$, où G est comme toujours la composante connexe de l'identité dans le groupe des isométries de (M,ρ)), on a :

$$\mathrm{vol}_F = \frac{v_\rho}{v_F} \mathrm{vol}_\rho \ ,$$

où v_F (resp. v_ρ) est la *valeur commune* (par G-invariance de F et ρ) des volumes $\mathrm{vol}_{\rho(x)}\left(B_{F(x,\cdot)}\right)$ (resp. $\mathrm{vol}_{\rho(x)}\left(B_{\rho(x)}\right) = C_n$) dans $T_x(M)$ pour $x \in M$.

Si Γ est un sous-groupe discret de G, co-compact et sans points fixes, il résulte que pour $F \in \mathcal{F}_G$ (donc Γ-invariante) nous avons :

$$[h_V(F)]^n \cdot \mathrm{vol}_F(M/\Gamma) = \frac{[h_V(F)]^n}{v_F} \cdot \left(v_\rho \, \mathrm{vol}_\rho(M/\Gamma)\right).$$

Ainsi, $v_\rho \operatorname{vol}_\rho(M/\Gamma)$ étant une constante par rapport à $F \in \mathcal{F}_G$, le problème du minimum de l'entropie volumique revient *ici* à déterminer les points de $\mathcal{F}_G$ qui minimisent la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{F}_G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ F &\longmapsto \frac{[h_V(F)]^n}{v_F} \end{aligned} ,$$

et ceci indépendamment de Γ.

Pour cette détermination, nous allons établir la

PROPOSITION III.2.1. — *Soit (M,ρ) un espace riemannien symétrique de type non-compact. Avec les notations de I.1 (rappelées au début du chapitre II), l'application*

$$\begin{aligned} N_0 : \mathfrak{a} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ H &\longmapsto \sum_{\alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha |\alpha(H)| \end{aligned}$$

est une norme sur $\mathfrak{a}$ qui est $W_{\mathfrak{a}}$-invariante pour tout choix de x_0, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$.

Preuve.

• La valeur absolue d'une forme linéaire étant une semi-norme et toute combinaison linéaire à coefficients ≥ 0 de semi-normes étant une semi-norme, N_0 est une semi-norme sur $\mathfrak{a}$.

• Soit $H \in \mathfrak{a}$ tel que $N_0(H) = 0$; alors $\forall \alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}^+}$, $\alpha(H) = 0$.

En désignant par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ une base de $\Lambda_{\mathfrak{a}}$ telle que $\alpha_i \in \Lambda_{\mathfrak{a}^+}, \forall i = 1, \ldots, q$ avec $q \stackrel{\text{déf}}{=} \dim \mathfrak{a} = \operatorname{rang}(M,\rho)$ (voir [Hel], p. 458), on obtient :

$$\alpha_i(H) = 0, \ \forall i = 1, \ldots, q ,$$

d'où $H = 0$ puisque $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ est une base du dual de $\mathfrak{a}$.

N_0 est donc une norme sur $\mathfrak{a}$.

• Pour montrer la $W_{\mathfrak{a}}$-invariance de N_0, prouvons le lemme suivant :

LEMME III.2.2. — *Pour $\sigma \in W_{\mathfrak{a}}$ fixé, posons pour chaque $\alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}}$:*

$$S(\alpha,\sigma) = \begin{cases} +1 & si \ \ \alpha > 0 \ \ sur \ \ \sigma \cdot \mathfrak{a}^+ \\ -1 & si \ \ \alpha < 0 \ \ sur \ \ \sigma \cdot \mathfrak{a}^+ \end{cases}$$

($\sigma \cdot \mathfrak{a}^+$ est une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$). Alors $\forall \alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}}$, $S(\alpha,\sigma)\alpha \in \Lambda_{\sigma \cdot \mathfrak{a}^+}$, et l'application $\begin{aligned} \Lambda_{\mathfrak{a}^+} &\longrightarrow \Lambda_{\sigma \cdot \mathfrak{a}^+} \\ \alpha &\longmapsto S(\alpha,\sigma)\alpha \end{aligned}$ *est bijective.*

Preuve du lemme III.2.2.

$*$ Pour $\alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}}$, il existe $Y \in \mathfrak{g}$, $Y \neq 0$, tel que $\alpha(H)Y = [H,Y]$, $\forall H \in \mathfrak{a}$; d'où en appliquant l'involution de Cartan τ défini en I.1,

$$\alpha(H)\tau\cdot Y = \tau\cdot[H,Y] = [\tau\cdot H,\tau\cdot Y] = [-H,\tau\cdot Y],$$

c'est-à-dire

$$[H,\tau\cdot Y] = -\alpha(H)\tau\cdot Y \text{ pour tout } H \in \mathfrak{a}.$$

Comme $\tau\cdot Y \neq 0$, il en résulte que $-\alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}}$ et par suite $S(\alpha,\sigma)\alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}}$. En outre, $S(\alpha,\sigma)\alpha > 0$ sur $\sigma\cdot\mathfrak{a}^+$, donc $S(\alpha,\sigma)\alpha \in \Lambda_{\sigma\cdot\mathfrak{a}^+}$.

$*$ Pour $\alpha,\beta \in \Lambda_{\mathfrak{a}^+}$ telles que $S(\alpha,\sigma)\alpha = S(\beta,\sigma)\beta$, on ne peut pas avoir α et β de signes différents sur $\sigma\cdot\mathfrak{a}^+$; sinon $\beta(H) = -\alpha(H)$, $\forall H \in \sigma\cdot\mathfrak{a}^+$, d'où $\beta = -\alpha$ (puisque $\sigma\cdot\mathfrak{a}^+$ est un ouvert non vide de $\mathfrak{a}$ et α,β sont des formes linéaires sur $\mathfrak{a}$), ce qui est impossible compte tenu du fait que α et β sont de même signe (> 0) sur $\mathfrak{a}^+$. Donc $S(\alpha,\sigma) = S(\alpha,\beta)$ et par suite $\alpha = \beta$, ce qui prouve l'injectivité.

$*$ Enfin, l'application $\begin{array}{c}\Lambda_{\mathfrak{a}^+} \longrightarrow \Lambda_{\sigma\cdot\mathfrak{a}^+}\\ \alpha \longmapsto \alpha\circ\sigma^{-1}\end{array}$ étant bijective, on a $\#\Lambda_{\sigma\cdot\mathfrak{a}^+} = \#\Lambda_{\mathfrak{a}^+}$, ce qui achève la preuve du lemme. ∎

De retour à la démonstration de la proposition III.2.1, nous avons pour $\sigma \in W_{\mathfrak{a}}$ et $H \in \mathfrak{a}$:

$$\begin{aligned}
N_0(\sigma\cdot H) &= \sum_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha|\alpha(\sigma\cdot H)| \\
&= \sum_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha|S(\alpha,\sigma)\alpha(\sigma\cdot H)| \\
&= \sum_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_{S(\alpha,\sigma)\alpha}|S(\alpha,\sigma)\alpha(\sigma\cdot H)|
\end{aligned}$$

(α et $S(\alpha,\sigma)\alpha$ ayant évidemment les mêmes multiplicités)

$$= \sum_{\nu\in\Lambda_{\sigma\cdot\mathfrak{a}^+}} m_\nu|\nu(\sigma\cdot H)|$$

car, d'après le lemme précédent, $\Lambda_{\sigma\cdot\mathfrak{a}^+} = \{S(\alpha,\sigma)\alpha \mid \alpha \in \Lambda_{\mathfrak{a}^+}\}$.

Finalement, la bijectivité de $\begin{array}{c}\Lambda_{\sigma\cdot\mathfrak{a}^+} \longrightarrow \Lambda_{\mathfrak{a}^+}\\ \nu \longmapsto \nu\circ\sigma\end{array}$ et le fait que $m_\nu = m_{\nu\circ\sigma}$ pour tout $\nu \in \Lambda_{\sigma\cdot\mathfrak{a}^+}$ conduisent à $N_0(\sigma\cdot H) = N_0(H)$, ce qui prouve la $W_{\mathfrak{a}}$-invariance de N_0. ∎

Remarque III.2.3. — Pour $F \in \mathcal{F}_G$, la formule de l'entropie volumique établie au chapitre II peut aussi s'écrire à présent $h_V(F) = \max_{H\in\overline{B_F\cap\mathfrak{a}^+}}[N_0(H)]$, soit encore par $W_{\mathfrak{a}}$-invariance de N_0 :

$$h_V(F) = \max_{H\in\overline{B_F}}[N_0(H)]. \tag{1}$$

Comme $\max_{H\in\overline{B}_F}\left[\sum_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha\alpha(H)\right]$ est compris entre $\max_{H\in\overline{B_F\cap\mathfrak{a}^+}}\left[\sum_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha\alpha(H)\right] = h_V(F)$ et $\max_{H\in\overline{B}_F}\left[N_0(H)\right] = h_V(F)$ (ci-dessus), on a également :

$$h_V(F) = \max_{H\in\overline{B}_F}\left[\sum_{\alpha\in\Lambda_{\mathfrak{a}^+}} m_\alpha\alpha(H)\right]. \tag{2}$$

Nous pouvons énoncer enfin :

THÉORÈME III.2.4. — *Soit (M,ρ) un espace riemannien symétrique de type non-compact. Avec les notations de la proposition précédente, la métrique de Finsler G-invariante F_0 sur M, associée à la boule unité de N_0, minimise la fonctionnelle*

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{F}_G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ F &\longmapsto \frac{[h_V(F)]^n}{v_F}\end{aligned},$$

avec $\Phi(F_0) = \frac{1}{v_{F_0}}$.

Preuve. — Pour $F\in\mathcal{F}_G$, on a :

$$\begin{aligned} v_F &= \mathrm{vol}_{\rho(x_0)}\left(B_{F(x_0,\cdot)}\right) \\ &= \mathrm{vol}_{\rho(x_0)}\left(T_e\pi\cdot \mathrm{Ad}(K)B_F\right)\end{aligned}$$

par définition même de B_F et où $\pi : \begin{aligned} G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g\cdot x_0\end{aligned}$ est la projection naturelle (voir I.1 et I.2).

Or, $B_F \subset \delta B_{F_0}$ avec $\delta = \sup_{H\in B_F}[N_0(H)] > 0$, donc en appliquant les $T_e\pi\circ\mathrm{Ad}(k)$ $(k\in K)$ qui sont linéaires de $\mathfrak{g}$ dans $T_{x_0}(M)$,

$$T_e\pi\cdot\mathrm{Ad}(K)B_F \subset \delta T_e\pi\cdot\mathrm{Ad}(K)B_{F_0}.$$

Il en résulte que $v_F \le \delta^n v_{F_0}$, *i.e.* $\Phi(F_0) = \frac{1}{v_{F_0}} \le \frac{[h_V(F)]^n}{v_F} = \Phi(F)$ puisque la formule (1) de la remarque III.2.3 entraîne que $\delta = h_V(F)$ et $h_V(F_0) = 1$. ∎

III.3. Cas d'égalité et contre-exemple général

La fonctionnelle Φ sur $\mathcal{F}_G$ étant positivement homogène de degré nul, toutes les métriques de Finsler λF_0 $(\lambda\in\mathbb{R}_+^*)$ la minimisent. Ce sont en fait les seules, comme nous allons le voir :

Proposition III.3.1. — *Seules les métriques de Finsler* λF_0 $(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$ *minimisent la fonctionnelle* $\Phi : \mathcal{F}_G \to \mathbb{R}$ *du théorème III.2.4.*

Preuve. — Soit $F \in \mathcal{F}_G$ telle que $\Phi(F) = \Phi(F_0)$, c'est-à-dire $v_F = \delta^n v_{F_0}$ avec $\delta = h_V(F)$, et montrons que $B_F = \delta B_{F_0}$ d'où l'on tirera $F = \frac{1}{\delta} F_0$.

Comme on a toujours $B_F \subset \delta B_{F_0}$, supposons que $B_F \subsetneqq \delta B_{F_0}$.

Alors $\mathrm{Ad}(K) B_F \subsetneqq \delta\, \mathrm{Ad}(K) B_{F_0}$, l'inclusion étant stricte, car pour toute boule convexe $B \subset \mathfrak{a}$, on a $\mathrm{Ad}(K) B \cap \mathfrak{a} = B$ (voir [Pla], p. 19) ; par suite (s'agissant d'ouverts de $\mathfrak{p}$), $v_F < \delta^n v_{F_0}$. Or, ceci est absurde. ∎

Contre-exemple finslérien général en rang ≥ 2.

Nous sommes maintenant en mesure de répondre *négativement* à la conjecture finslérienne de l'entropie volumique minimale sur *tout* espace riemannien symétrique de type non-compact et de rang ≥ 2.

Théorème III.3.2. — *Soit* (M,ρ) *un espace riemannien symétrique de type non-compact et de rang* ≥ 2*. Avec les notations du théorème III.2.4, on a*

$$h_V(F_1) < h_V(\rho) \ \ \textit{et} \ \ \mathrm{vol}_{F_1}(M/\Gamma) = \mathrm{vol}_\rho(M/\Gamma)$$

pour tout sous-groupe discret Γ *de* G*, co-compact et sans points fixes, où la métrique de Finsler* F_1 *sur* M *est définie par :*

$$F_1 \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{v_{F_0}}{v_\rho}\right)^{1/n} F_0 \, .$$

Preuve.

$*$ On a $B_{F_1} = \left(\frac{v_\rho}{v_{F_0}}\right)^{1/n} B_{F_0}$, d'où $v_{F_1} = \left(\frac{v_\rho}{v_{F_0}}\right) v_{F_0} = v_\rho$ et par conséquent $\mathrm{vol}_{F_1} = \mathrm{vol}_\rho$; donc $\mathrm{vol}_{F_1}(M/\Gamma) = \mathrm{vol}_\rho(M/\Gamma)$ pour tout sous-groupe discret Γ de G, co-compact et sans points fixes.

$*$ D'autre part, $[h_V(F_1)]^n = \left(\frac{v_\rho}{v_{F_0}}\right) [h_V(F_0)]^n$ par définition de F_1, d'où $[h_V(F_1)]^n \leq [h_V(\rho)]^n$ puisque $\Phi(F_0) \leq \Phi(\rho)$ d'après le théorème III.2.4.

Supposons que $h_V(F_1) = h_V(\rho)$; alors, comme $v_{F_1} = v_\rho$, on aurait $\Phi(F_1) = \Phi(\rho)$, ce qui entraînerait $F_1 = \lambda\rho$ $(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$ d'après la proposition III.3.1. Ainsi F_1, donc F_0, serait riemannienne, ce qui n'est pas possible car la boule $B_{F_0} \subset \mathfrak{a}$ n'est pas euclidienne du fait que $\mathrm{rang}(M,\rho) = \dim \mathfrak{a} \geq 2$. ∎

Remarques.

a) La condition rang$(M,\rho) \geq 2$ est essentielle pour la construction du contre-exemple général précédent. Le cas du rang 1 est beaucoup plus délicat et nous verrons ce qu'on peut en dire au chapitre V.

b) Comme nous l'avions annoncé dans l'introduction, il y a en rang ≥ 2 une nette distinction entre les métriques de Riemann (voir [B-C-G 3]) et celles de Finsler pour le problème du minimum de l'entropie volumique avec normalisation par le volume finslérien (généralisation naturelle du volume riemannien). Cette différence sera radicale s'il s'avère — la question reste encore ouverte — que la conjecture de l'entropie volumique minimale est soluble par l'affirmative pour les métriques de Riemann sur *tout* espace riemannien symétrique de type non-compact et de rang ≥ 2 à l'instar du rang 1 (voir [B-C-G 2]).

Chapitre IV

MESURE DE LIOUVILLE
POUR UN ESPACE DE FINSLER

Utiliser le volume finslérien comme normalisation dans le problème du minimum de l'entropie volumique est une démarche héritée du cadre riemannien s'imposant presque d'elle-même. Mais, nous l'avons dit, cette manière de procéder n'est pas la seule possible. En vue du prochain chapitre, nous allons considérer ici, en effet, une autre notion de volume attachée à une métrique de Finsler : *le volume de Liouville*. Après avoir décrit explicitement ce dernier, nous montrerons qu'il est de nature différente de celle du volume finslérien en ce qui concerne la normalisation de l'entropie. Ainsi, cette situation sera à mettre en contraste avec le cas des métriques de Riemann.

DÉFINITION IV.1. — *Soit M une variété différentiable de dimension $n \geq 2$, munie d'une métrique de Finsler F de classe C^∞. On dit que F est* strictement convexe *si, et seulement si, le lagrangien $L_F \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}F^2$ est strictement convexe, i.e. la différentielle seconde $(L_F(x,\cdot))''(v)$ par rapport à v est un produit scalaire sur T_xM pour tout $(x,v) \in \overset{\circ}{T}M$.*

Dans *tout* ce chapitre, nous nous donnons un tel espace finslérien (M,F).

Après avoir fait quelques rappels, nous allons établir certaines propriétés relatives à L_F qui nous servirons pour donner une expression de la mesure de Liouville sur le fibré sphérique $S^F(M)$ de F.

IV.1. Structure riemannienne induite par F

On note $p : \overset{\circ}{T}M \longrightarrow M$ la projection canonique, $\mathcal{V} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(Tp)$ le fibré vertical au-dessus de $\overset{\circ}{T}M$, $Tp : T(\overset{\circ}{T}M) \longrightarrow TM$ étant l'application tangente de p, et

$$\begin{aligned} D : \Gamma(T(\overset{\circ}{T}M)) \times \Gamma(\mathcal{V}) &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{V}) \\ (X,Y) &\longmapsto D_X Y \end{aligned}$$

la connexion verticale de Cartan associée à F (voir [Ab-Pa], p. 26) (pour un fibré vectoriel $E \to B$ de base B, $\Gamma(E)$ est l'ensemble de ses sections C^∞). De plus, soient $\begin{aligned} \iota_{(x,v)} : T_xM &\longrightarrow \mathcal{V}_{(x,v)} \\ u &\longmapsto T_v j_x \cdot u \end{aligned}$ l'isomorphisme vertical en $(x,v) \in \overset{\circ}{T}M$, où $\begin{aligned} j_x : \overset{\circ}{T}_xM &\longrightarrow \overset{\circ}{T}M \\ w &\longmapsto (x,w) \end{aligned}$ est l'inclusion canonique, et $\mathcal{J} \in \Gamma(\mathcal{V})$ le champ de Liouville défini par :

$$\mathcal{J}(x,v) = \iota_{(x,v)}(v),\ \forall (x,v) \in \overset{\circ}{T}M\,.$$

La fibration vectorielle $\Lambda : T(\overset{\circ}{T}M) \longrightarrow \mathcal{V}$ donnée par $\Lambda(X) \overset{\text{déf}}{=} D_X\mathcal{J}$ pour X appartenant à $\Gamma(T(\overset{\circ}{T}M))$ est alors telle que $\mathcal{H} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(\Lambda)$ est un fibré horizontal au-dessus de $\overset{\circ}{T}M$, c'est-à-dire $T(\overset{\circ}{T}M) = \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{V}$ (somme directe). Il existe donc un isomorphisme horizontal $\Theta : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ associé à $\mathcal{H}$ (voir [Ab-Pa], p. 9) qui permet de poser :

Définition IV.1.1. — *On appelle métrique de Riemann sur $\overset{\circ}{T}M$ induite par F, la métrique $\mathfrak{S}_F$ définie par :* $\forall (x,v) \in \overset{\circ}{T}M, \forall V,W \in \mathcal{V}_{(x,v)}, \forall H,K \in \mathcal{H}_{(x,v)}$,

i) $\mathfrak{S}_F(x,v)\cdot(V,W) = (L_F(x,\cdot))''(v)\cdot\left(\iota^{-1}_{(x,v)}(V),\iota^{-1}_{(x,v)}(W)\right)$,

ii) $\mathfrak{S}_F(x,v)\cdot(H,K) = \mathfrak{S}_F(x,v)\cdot\left(\Theta^{-1}_{(x,v)}(H),\Theta^{-1}_{(x,v)}(K)\right)$,

iii) $\mathfrak{S}_F(x,v)\cdot(H,V) = 0$.

Remarque. — Pour $(x,v) \in \overset{\circ}{T}M$, l'isomorphisme vertical $\iota_{(x,v)} : T_xM \to \mathcal{V}_{(x,v)}$ est une isométrie linéaire pour les produits scalaires $(L_F(x,\cdot))''(v)$ et $\mathfrak{S}_F(x,v)$ par construction même de $\mathfrak{S}_F$. Le fait que $\mathfrak{S}_F$ doive "vivre" sur $\overset{\circ}{T}M$ provient de la dépendance de $(L_F(x,\cdot))''(v)$ par rapport à v, celle-ci n'existant pas pour une métrique riemannienne sur M. Signalons aussi que la connexion verticale de Cartan D n'est pas la connexion de Levi-Civita associée à $\mathfrak{S}_F$, car on montre que la torsion de D n'est pas identiquement nulle ([Ab-Pa], p. 29).

Parallèlement à cette définition, la stricte convexité du lagrangien L_F entraîne sa régularité, c'est-à-dire que la transformation de Legendre

$$\begin{aligned} \mathcal{T}L_F : \overset{\circ}{T}M &\longrightarrow \overset{\circ}{T}{}^*M \\ (x,v) &\longmapsto (x,(L_F(x,\cdot))'(v)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme local ($\overset{\circ}{T}{}^*M$ est le fibré cotangent privé de la section nulle).

Par suite, on peut considérer la 1-forme de Liouville α_F sur $\overset{\circ}{T}M$ associée à L_F, image réciproque par $\mathcal{T}L_F$ de la restriction à $\overset{\circ}{T}{}^*M$ de la 1-forme canonique α_0 sur T^*M.

Déterminons alors le lien entre $\mathfrak{S}_F$ et α_F :

Proposition IV.1.2. — *Pour $(x,v) \in \overset{\circ}{T}M$, $Y \in T_{(x,v)}(\overset{\circ}{T}M)$ et $V \in \mathcal{V}_{(x,v)}$, on a :*

$$\alpha_F(x,v)\cdot Y = \mathfrak{S}_F(x,v)\cdot\left(\mathcal{J}(x,v),\iota_{(x,v)}(T_{(x,v)}p\cdot Y)\right) ,$$

et

$$d\alpha_F(x,v)\cdot(V,Y) = \mathfrak{S}_F(x,v)\cdot\left(V,\iota_{(x,v)}(T_{(x,v)}p\cdot Y)\right) .$$

Preuve.

• Par définition, pour $q \in T_x^* M$ et $Z \in T_{(x,q)}(T^* M)$, $\alpha_0(x,q)\cdot Z = q(T_{(x,q)} p^* \cdot Z)$, où $p^* : T^* M \to M$ est la projection canonique.

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\alpha_F(x,v)\cdot Y &= \alpha_0\,(x,(L_F(x,\cdot\,))'(v)) \cdot T_{(x,v)}(\mathcal{T} L_F)\cdot Y\\ &= (L_F(x,\cdot\,))'(v)\cdot T_{\mathcal{T} L_F(x,v)} p^* \cdot T_{(x,v)}(\mathcal{T} L_F)\cdot Y\\ &= (L_F(x,\cdot\,))'(v)\cdot T_{(x,v)} p\cdot Y\end{aligned}$$

(car $p^*_{\restriction \overset{\circ}{T^* M}} \circ \mathcal{T} L_F = p$)

$$= (L_F(x,\cdot\,))''(v)\cdot (v, T_{(x,v)} p\cdot Y)\,,$$

d'après le théorème d'Euler et le fait que $(L_F(x,\cdot\,))'(v)$ est positivement homogène de degré 1.

• Soient $(\Omega,(x_1,\dots,x_n))$ une carte locale sur M, centrée en x, et $(\overset{\circ}{T}\Omega,(x_1,\dots,x_n, v_1,\dots,v_n))$ la carte locale correspondante sur $\overset{\circ}{T}M$, centrée en (x,v). Avec les conventions d'Einstein,

$$Y = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x,v) + b_i \frac{\partial}{\partial v_i}(x,v)$$

et

$$V = c_i \frac{\partial}{\partial v_i}(x,v),\ \text{où } a_i,\, b_i,\, c_i \in \mathbb{R}\ \ (i = 1,\dots,n).$$

Si $\overline{Y} \in \Gamma(T(\overset{\circ}{T}M))$ et $\overline{V} \in \Gamma(\mathcal{V})$ sont des champs de vecteurs tels que :

$$\overline{Y}_{\restriction \overset{\circ}{T}\Omega} = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial v_i}\ \text{ et }\ \overline{V}_{\restriction \overset{\circ}{T}\Omega} = c_i \frac{\partial}{\partial v_i}\,,$$

on a $\overline{Y}(x,v) = Y$, $\overline{V}(x,v) = V$ et $[\overline{V},\overline{Y}]_{\restriction \overset{\circ}{T}\Omega} \equiv 0$.

Sachant, d'après le précédent point, que $\alpha_F(\Gamma(\mathcal{V})) = \{0\}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}d\alpha_F(x,v)\cdot (V,Y) &= (\overline{V}\cdot \alpha_F(\overline{Y}))(x,v)\\ &= a_i c_j \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\cdot \alpha_{F\,\restriction \overset{\circ}{T}\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)(x,v)\,.\end{aligned}$$

Or, toujours d'après le premier point, $\forall (y,w) \in \overset{\circ}{T}\Omega$, $\forall i = 1,\dots,n$,

$$\begin{aligned}\alpha_F(y,w)\cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(y,w) &= (L_F(y,\cdot\,))'(w)\cdot T_{(y,w)} p\cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(y,w)\\ &= (L_F(y,\cdot\,))'(w)\cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(y)\,,\end{aligned}$$

d'où il résulte que : $\forall j = 1,\ldots,n$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_j}\cdot \alpha_{F}{}_{\restriction \overset{\circ}{T}\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)(x,v) = (L_F(x,\cdot\,))''(v)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x),\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right)$$

puisque $\iota_{(x,v)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right) = \frac{\partial}{\partial v_j}(x,v)$. Donc, finalement :

$$d\alpha_F(x,v)\cdot(V,Y) = \mathfrak{S}_F(x,v)\cdot\left(V,\iota_{(x,v)}(T_{(x,v)}p\cdot Y)\right). \qquad \blacksquare$$

Fixons-nous maintenant $(x,v) \in S^F(M)$ (le fibré sphérique de F) et complétons le vecteur $P_1 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{J}(x,v) \in \mathcal{V}_{(x,v)}$ en une base orthonormée $(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ de $\mathcal{V}_{(x,v)}$ pour $\mathfrak{S}_F(x,v)$. En posons $Z_i \overset{\text{déf}}{=} \Theta_{(x,v)}(P_i) \in \mathcal{H}_{(x,v)}$ ($i = 1,\ldots,n$), nous avons le :

Lemme IV.1.3. — *$(P_2,\ldots,P_n,Z_1,\ldots,Z_n)$ est une base orthonormée de $T_{(x,v)}(S^F(M))$ pour $\mathfrak{S}_F(x,v)$.*

Preuve. — La famille $(P_2,\ldots,P_n,Z_1,\ldots,Z_n)$ étant orthonormée pour $\mathfrak{S}_F(x,v)$ par construction ($\Theta_{(x,v)}$ est une isométrie linéaire pour $\mathfrak{S}_F(x,v)$), il suffit de montrer qu'elle est tangente à $S^F(M)$ en (x,v), puisque $\dim S^F(M) = 2n-1$. Comme la 2-forme $d\alpha_0$ sur T^*M est symplectique (elle s'écrit $\sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dx_i$ en coordonnées locales naturelles sur T^*M),il en est de même pour $d\alpha_F$ sur $\overset{\circ}{T}M$, ce qui permet de définir le gradient symplectique X_F de L_F par rapport à $d\alpha_F$:

$$i_{X_F}d\alpha_F = -dL_F\,.$$

Pour $i \in \{2,\ldots,n\}$, on a alors :

$$\begin{aligned} T_{(x,v)}L_F\cdot P_i &= d\alpha_F(x,v)\cdot(P_i,X_F(x,v)) \\ &= \mathfrak{S}_F(x,v)\cdot\left(P_i,\iota_{(x,v)}(T_{(x,v)}p\cdot X_F(x,v))\right) \end{aligned}$$

d'après la proposition précédente.

Or, $T_{(x,v)}p\cdot X_F(x,v) = v$, car X_F est une équation différentielle du second ordre sur $\overset{\circ}{T}M$ ([Be], p. 26), ce qui conduit à

$$T_{(x,v)}L_F\cdot P_i = \mathfrak{S}_F(x,v)\cdot(P_i,P_1) = 0\,.$$

Sachant que $S^F(M) = L_F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, on a donc $P_i \in T_{(x,v)}(S^F(M))$, $\forall i = 2,\ldots,n$.

D'autre part, le fait d'avoir $T_{(x,v)}L_F\cdot H = 0$, $\forall H \in \mathcal{H}_{(x,v)}$ ([Ab-Pa], p. 30) entraîne que $Z_i \in T_{(x,v)}(S^F(M))$ pour $i = 1,\ldots,n$. $\blacksquare$

En notant de la même manière $\mathfrak{S}_F$ et la métrique qu'elle induit sur $S^F(M)$, ainsi que α_F et sa restriction à $S^F(M)$, nous obtenons alors :

PROPOSITION IV.1.4. — *La $(2n-1)$-forme de Liouville $\omega_F \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{(n-1)!}\alpha_F \wedge (d\alpha_F)^{n-1}$ associée à L_F est une forme volume sur $S^F(M)$ dont la mesure correspondante $|\omega_F|$ vérifie :*

$$|\omega_F| = \mathrm{vol}_{\mathfrak{S}_F}\ .$$

Preuve. — Soient $(x,v) \in S^F(M)$ et $(P_1,\ldots,P_n,Z_1,\ldots,Z_n)$ comme dans le lemme précédent. En vertu de la proposition IV.1.2, on a pour $i,j = 1,\ldots,n$: $d\alpha_F(x,v)\cdot(P_i,P_j) = 0$ (car $P_j \in \mathcal{V}_{(x,v)}$) et $d\alpha_F(x,v)\cdot(P_i,Z_j) = \delta_{ij}$. En effet, $\Theta : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ étant horizontale, on a $T_{(x,v)}p \circ \Theta_{(x,v)} = \iota^{-1}_{(x,v)}$ ([Ab-Pa], p. 6).

En outre, $\alpha_F(x,v)\cdot P_i = 0$ (car $P_i \in \mathcal{V}_{(x,v)}$) et

$$\begin{aligned}\alpha_F(x,v)\cdot Z_1 &= (L_F(x,\cdot\,))'(v)\cdot \iota^{-1}_{(x,v)}(P_1)\\ &= (L_F(x,\cdot\,))'(v)\cdot v\\ &= 2L_F(x,v)\end{aligned}$$

($L_F(x,\cdot\,)$ est positivement homogène de degré 2), *i.e.* $\alpha_F(x,v)\cdot Z_1 = 1$.

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}&\alpha_F \wedge (d\alpha_F)^{n-1}(x,v)\cdot(P_2,\ldots,P_n,Z_1,\ldots,Z_n)\\ &\qquad = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(\{2,\ldots,n\})} \alpha_F(x,v)\cdot Z_1 \prod_{i=2}^{n} d\alpha_F(x,v)\cdot(P_{\sigma(i)},Z_{\sigma(i)})\\ &\qquad = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)! \neq 0\,,\ \text{où}\ \mathcal{P}(\{2,\ldots,n\})\end{aligned}$$

désigne l'ensemble des permutations de $\{2,\ldots,n\}$. Ceci achève la preuve. ∎

IV.2. Expression de la mesure de Liouville associée à F

Afin de pouvoir utiliser $|\omega_F|$, nous allons en donner une formule ne faisant plus intervenir ni α_F, ni $\mathfrak{S}_F$ (qui n'aura donc été qu'un intermédiaire de calcul). Pour cela, nous aurons besoin d'un lemme préliminaire.

Sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), on se donne une norme N, C^∞ sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ et strictement convexe, c'est-à-dire telle que $\forall v \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $\varphi(v) \overset{\text{déf}}{=} (\frac{1}{2}N^2)''(v)$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

On obtient ainsi une métrique riemannienne φ sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ pour laquelle on notera $\gamma \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ la forme volume associée à vol_φ et à l'orientation $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ (forme volume canonique sur $\mathbb{R}^n$). On a donc $\forall v \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $\gamma(v) = \sqrt{\det_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(\varphi(v))}\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, où $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Enfin, désignons la boule unité ouverte et la sphère unité pour N respectivement par B_N et S_N (sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$), et considérons $\theta \in \Lambda^{n-1}(S_N)$ définie par : $\forall v \in S_N, \forall u_2,\dots,u_n \in T_v(S_N)$,

$$\theta(v)\cdot(u_2,\dots,u_n) \overset{\text{déf}}{=} \gamma(v)\cdot(v,u_2,\dots,u_n)\,.$$

Alors :

Lemme IV.2.1.

a) *θ est une forme volume sur S_N,*

b) *$|\theta|$ est la mesure riemannienne de la métrique sur S_N induite par φ,*

c) *Pour $R > 0$ et $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \mathbb{R})$:*

$$\int_{RB_N\backslash\{0\}} f\,d|\gamma| = \int_0^R \Big(\int_{S_N} f(tv)d|\theta|(v)\Big)t^{n-1}\,dt\,.$$

Preuve.

a) et *b)* : soient $v \in S_N$ et $(u_2,\dots,u_n)$ une base orthonormée de T_vS_N pour $\varphi(v)$. Comme $(N^2)'$ est positivement homogène de degré 1 et que $T_v(S_N) = \operatorname{Ker}\big[(N^2)'(v)\big]$, on a : $\forall i \in \{2,\dots,n\}$,

$$\begin{aligned}\varphi(v)\cdot(v,u_i) &= \frac{1}{2}(N^2)''(v)\cdot(v,u_i)\\ &= \frac{1}{2}(N^2)'(v)\cdot u_i = 0\,.\end{aligned}$$

Par suite, $(v,u_2,\dots,u_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour $\varphi(v)$ (sachant que $\varphi(v)\cdot(v,v) = N^2(v) = 1$), d'où :

$$\theta(v)\cdot(u_2,\dots,u_n) = \gamma(v)\cdot(v,u_2,\dots,u_n)) = \pm 1\,.$$

c) : soient $\Psi : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \times S_N \longrightarrow \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\\ (t,v) \longmapsto tv\end{array}$ et $dt\times\theta$ la forme volume sur $\mathbb{R}_+^* \times S_N$ définie en $(t,v) \in \mathbb{R}_+^* \times S_N$ par :

$$(dt\times\theta)(t,v)\cdot((1,0);(0,u_2);\cdots;(0,u_n)) = 1$$

pour tous $u_2,\dots,u_n \in T_vS_N$ tels que $\theta(v)\cdot(u_2,\dots,u_n) = 1$. On a alors

$$\begin{aligned}&\Psi^*(\gamma)(t,v)\cdot((1,0);(0,u_2);\cdots;(0,u_n))\\ &\quad= \gamma(tv)\cdot\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,v);\frac{\partial\Psi}{\partial v}(t,v)\cdot u_2;\cdots;\frac{\partial\Psi}{\partial v}(t,v)\cdot u_n\Big)\\ &\quad= \gamma(tv)\cdot(v;tu_2;\cdots;tu_n)\\ &\quad= t^{n-1}\gamma(tv)\cdot(v,u_2,\dots,u_n)\,.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\gamma(tv) &= \sqrt{\det_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(\varphi(tv))}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \gamma(v)\end{aligned}$$

(car $(N^2)''$ est positivement homogène de degré nul), donc :

$$\Psi^*(\gamma)(t,v)\cdot((1,0);(0,u_2);\cdots;(0,u_n)) = t^{n-1},$$

et par conséquent $\Psi^*(\gamma)(t,v) = t^{n-1}(dt \times \theta)(t,v)$. Ceci entraîne le résultat puisque, par ailleurs, $|dt \times \theta| = dt \otimes |\theta|$. ■

Revenons à présent à la variété finslérienne (M,F) et introduisons les notations suivantes en supposant, pour le lemme suivant, M *orientée* par une forme volume $\lambda \in \Lambda^n(M)$:

- $\lambda^F \in \Lambda^n(M)$ est la forme volume sur M associée à la mesure finslérienne vol_F (définie en III.1) et à λ. On a donc, pour $x \in M$ et $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de T_xM pour un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ quelconque sur T_xM :

$$\lambda^F(x)\cdot(e_1,\ldots,e_n) = \pm\frac{C_n}{\mathrm{vol}_{(\cdot|\cdot)}(B_{F(x,\cdot)})},$$

  selon que $(e_1,\ldots,e_n)$ est directe $(+)$ ou indirecte $(-)$ par rapport à $\lambda(x)$.

- φ_x^F $(x \in M)$ est la métrique de Riemann sur $\overset{\circ}{T}_xM$ définie par : $\forall v \in \overset{\circ}{T}_xM$, $\forall u,w \in T_xM$,

$$\varphi_x^F(v)\cdot(u,w) = (L_F(x,\cdot))''(v)\cdot(u,w).$$

- $\nu^F \in \Lambda^{n-1}(S^F(M))$ est définie en $(x,v) \in S^F(M)$ par

$$\nu^F(x,v) \overset{\text{déf}}{=} \pm\frac{1}{C_n}\,\mathrm{vol}_{\varphi_x^F(v)}(B_{F(x,\cdot)})P_2^* \wedge \cdots \wedge P_n^*,$$

  où $(P_2^*,\ldots,P_n^*)$ est la base duale d'une quelconque base orthonormée $(P_2,\ldots,P_n)$ de $\mathcal{V}_{(x,v)} \cap T_{(x,v)}S^F(M)$ pour $\mathfrak{S}_F(x,v)$. On a, en effet, $\dim(\mathcal{V}_{(x,v)} \cap T_{(x,v)}S^F(M)) = n-1$, car $\mathcal{V}_{(x,v)} \cap T_{(x,v)}S^F(M)$ est l'orthogonal dans $\mathcal{V}_{(x,v)}$ pour $\mathfrak{S}_F(x,v)$ de $P_1 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{J}(x,v)$ (d'après la proposition IV.1.2 et l'égalité $i_{X_F}d\alpha_F = -dL_F$). Le signe dans la définition de $\nu^F(x,v)$ est positif si $(\iota_{(x,v)}^{-1}(P_1),\ldots,\iota_{(x,v)}^{-1}(P_n))$ est une base directe de T_xM pour $\lambda(x)$, et négatif sinon.

- $p_S : S^F(M) \to M$ est la projection canonique.

  Nous avons alors :

Lemme IV.2.2.

$$\nu^F \wedge p_S^*(\lambda^F) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\omega_F.$$

Preuve. — Soient $(x,v) \in S^F(M)$ et $(P_1,P_2,\ldots,P_n,Z_1,\ldots,Z_n)$ comme dans la proposition IV.1.4.

Par choix de ν^F et puisque $T_{(x,v)}p_S\cdot P_i = T_{(x,v)}p\cdot P_i = 0$ $(i=2,\ldots,n)$, on a :

$$\begin{aligned}
&(\nu^F \wedge p_S^*(\lambda^F))(x,v)\cdot(P_2,\ldots,P_n,Z_1,\ldots,Z_n)\\
&\quad = \frac{1}{(n-1)!}\times\frac{1}{n!}\left[\sum_{\tau\in\mathcal{P}(\{2,\ldots,n\})}\varepsilon(\tau)\nu^F(x,v)\cdot(P_{\tau(2)},\ldots,P_{\tau(n)})\right]\\
&\qquad\times\left[\sum_{\delta\in\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})}\varepsilon(\delta)\lambda^F(x)\cdot(T_{(x,v)}p\cdot Z_{\delta(1)},\ldots,T_{(x,v)}p\cdot Z_{\delta(n)})\right]
\end{aligned}$$

(ε désigne la signature).

Mais $\nu^F(x,v)$ et $\lambda^F(x)$ sont alternées et $Z_i = \Theta_{(x,v)}(P_i)$ $(i=2,\ldots,n)$; donc il reste :

$$\begin{aligned}
&(\nu^F \wedge p_S^*(\lambda^F))(x,v)\cdot(P_2,\ldots,P_n,Z_1,\ldots,Z_n)\\
&\qquad = \nu^F(x,v)\cdot(P_2,\ldots,P_n)\times\lambda^F(x)\cdot\left(\iota^{-1}_{(x,v)}(P_1),\ldots,\iota^{-1}_{(x,v)}(P_n)\right)\\
&\qquad = 1\,.
\end{aligned}$$

En effet, la dernière égalité provient d'une part du fait que les deux facteurs ci-dessus ont le même signe qui dépend de la base $\left(\iota^{-1}_{(x,v)}(P_1),\ldots,\iota^{-1}_{(x,v)}(P_n)\right)$ de T_xM. De plus, cette base est orthonormée pour $\varphi_x^F(v)$, d'où

$$\begin{aligned}
\lambda^F(x)\cdot\left(\iota^{-1}_{(x,v)}(P_1),\ldots,\iota^{-1}_{(x,v)}(P_n)\right) &= \pm\frac{C_n}{\mathrm{vol}_{\varphi_x^F(v)}(B_{F(x,\cdot)})}\\
&= \frac{1}{\nu^F(x,v)\cdot(P_1,\ldots,P_n)}\,.
\end{aligned}$$

Finalement, la preuve de la proposition IV.1.4 permet de conclure. ■

La variété M étant à nouveau *quelconque*, ce lemme conduit à la formule d'intégration suivante pour la mesure de Liouville $|\omega_F|$:

Proposition IV.2.3. — *Pour toute $f\in C_c^0(S^F(M),\mathbb{R})$, on a :*

$$\int_{S^F(M)} f\,d|\omega_F| = \frac{1}{C_n}\int_M\left(\int_{S_x^F(M)} f(x,v)\,\mathrm{vol}_{\varphi_x^F(v)}(B_{F(x,\cdot)})\,d\sigma_x^F(v)\right)\mathrm{dvol}_F(x)\,,$$

où, pour $x\in M$, σ_x^F est la mesure riemannienne sur $S_x^F(M)$ associée à la métrique induite par φ_x^F sur $S_x^F(M)$.

Preuve.

1er cas. M est orientée par $\lambda\in\Lambda^n(M)$. D'après la formule d'intégration le long des fibres et le lemme IV.2.2, nous avons :

$$\int_{S^F(M)} f\,d|\omega_F| = \int_M\left(\int_{S_x^F(M)} f(x,v)\,d|(j_x^S)^*(\nu^F)|(v)\right)d|\lambda^F|(x)\,,$$

où $j_x^S : S_x^F(M) \to S^F(M)$ $(x \in M)$ est l'inclusion canonique.

D'autre part, si $(x,v) \in S^F(M)$ et si $(P_2,\dots,P_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}_{(x,v)} \cap T_{(x,v)}S^F(M)$ relativement à $\mathfrak{S}_F(x,v)$, on a pour $i = 2,\dots,n$:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{S}_F(x,v)\cdot(P_1,P_i) \ \ (\text{avec } P_1 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{J}(x,v)) \\ &= \varphi_x^F(v)\cdot\left(v,\iota_{(x,v)}^{-1}(P_i)\right) \\ &= (L_F(x,\cdot))'(v)\cdot\iota_{(x,v)}^{-1}(P_i)\,, \end{aligned}$$

donc $\iota_{(x,v)}^{-1}(P_i) \in T_v S_x^F(M) = \operatorname{Ker}\big((L_F(x,\cdot))'(v)\big)$.

Étant libre, $\left(\iota_{(x,v)}^{-1}(P_2),\dots,\iota_{(x,v)}^{-1}(P_n)\right)$ est une base de $T_v S_x^F(M)$ ($\dim S_x^F(M) = n-1$), et

$$\begin{aligned} (j_x^S)^*(\nu^F)(v)\cdot\left(\iota_{(x,v)}^{-1}(P_2)\right.&\left.,\dots,\iota_{(x,v)}^{-1}(P_n)\right) \\ &= \nu^F(x,v)\cdot(P_2,\dots,P_n) \\ &= \pm\frac{1}{C_n}\operatorname{vol}_{\varphi_x^F(v)}(B_{F(x,\cdot)}) \\ &= \frac{1}{C_n}\operatorname{vol}_{\varphi_x^F(v)}(B_{F(x,\cdot)})\gamma_x^F(v)\cdot\left(\iota_{(x,v)}^{-1}(P_1),\dots,\iota_{(x,v)}^{-1}(P_n)\right) \end{aligned}$$

(où $\gamma_x^F \in \Lambda^n(\overset{\circ}{T}_xM)$ est la forme volume sur $\overset{\circ}{T}_xM$ associée à $\operatorname{vol}_{\varphi_x^F}$ et à $\lambda(x)$)

$$= \frac{1}{C_n}\operatorname{vol}_{\varphi_x^F(v)}(B_{F(x,\cdot)})\theta_x^F(v)\cdot\left(\iota_{(x,v)}^{-1}(P_1),\dots,\iota_{(x,v)}^{-1}(P_n)\right)$$

(où $\theta_x^F \in \Lambda^{n-1}(S_x^F(M))$ est définie à partir de γ_x^F comme dans le lemme IV.2.1).

Ainsi, $(j_x^S)^*(\nu^F)(v) = \frac{1}{C_n}\operatorname{vol}_{\varphi_x^F(v)}(B_{F(x,\cdot)})\theta_x^F(v)$. Par suite, puisque $|\theta_x^F| = \sigma_x^F$ (point *b)* du lemme IV.2.1) et que $|\lambda^F| = \operatorname{vol}_F$, la proposition est établie dans ce cas.

2[e] *cas*. M est non orientable. En utilisant une partition de l'unité sur M dont chaque ouvert est orientable, on se ramène au 1[er] cas. ∎

Remarque IV.2.4. — Lorsque F provient d'une métrique riemannienne g sur M, on a $\forall(x,v) \in S^g(M)$, $\varphi_x^F(v) = g(x)$; d'où $\operatorname{vol}_{\varphi_x^F(v)}(B_{F(x,\cdot)}) = C_n$ et par suite, nous retrouvons l'égalité bien connue :

$$\int_{S^g(M)} f\,d|\omega_g| = \int_M \left(\int_{S_x^g(M)} f(x,v)\,d\sigma_x^g(v)\right)\operatorname{dvol}_g(x)\,.$$

Corollaire IV.2.5. — *Pour toute* $f \in C_c^0(S^F(M),\mathbb{R})$*, on a :*

$$\int_{S^g(M)} f\,d|\omega_g| = \int_M \left(\int_{S_x^g(M)} \bar{f}(x,v)F^{-n}(x,v)\det_{g(x)}(\varphi_x^F(v))\,d\sigma_x^g(v)\right)\operatorname{dvol}_g(x)\,,$$

où g est une métrique de Riemann arbitraire *sur M et après avoir posé pour $(x,u) \in \overset{\circ}{T}M$,* $\bar{f}(x,u) \overset{\text{déf}}{=} f\left(x, \frac{u}{F(x,u)}\right)$.

Preuve. — Nous avons vu en III.1 que

$$\mathrm{dvol}_F(x) = \frac{C_n}{\mathrm{vol}_{g(x)}(B_{F(x,\cdot)})}\,\mathrm{dvol}_g(x) \quad (x \in M)\,.$$

Par ailleurs, on a $\forall (x,v) \in S^F(M)$,

$$\mathrm{vol}_{\varphi_x^F(v)}(B_{F(x,\cdot)}) = \sqrt{\det_{g(x)}(\varphi_x^F(v))}\,\mathrm{vol}_{g(x)}(B_{F(x,\cdot)})\,.$$

Donc, d'après la proposition précédente,

$$\int_{S^F(M)} f\,d|\omega_F| = \int_M \left(\int_{S_x^F(M)} f(x,v)\sqrt{\det_{g(x)}(\varphi_x^F(v))}\,d\sigma_x^F(v)\right)\mathrm{dvol}_g(x)\,.$$

Mais, sachant que φ_x^F est positivement homogène de degré nul, le point *c)* du lemme IV.2.1 implique

$$\int_{S_x^F(M)} f(x,v)\sqrt{\det_{g(x)}(\varphi_x^F(v))}\,d\sigma_x^F(v) = \frac{1}{n}\int_{B_{F(x,\cdot)}\setminus\{0_x\}} \bar{f}(x,u)\sqrt{\det_{g(x)}(\varphi_x^F(u))}\,\mathrm{dvol}_{\varphi_x^F}(u)\,.$$

Ainsi,

$$\int_{S_x^F(M)} f(x,v)\sqrt{\det_{g(x)}(\varphi_x^F(v))}\,d\sigma_x^F(v) = \frac{1}{n}\int_{B_{F(x,\cdot)}\setminus\{0_x\}} \bar{f}(x,u)\,\det_{g(x)}(\varphi_x^F(u))\,\mathrm{dvol}_{g(x)}(u)$$

puisque $\mathrm{dvol}_{\varphi_x^F}(u) = \sqrt{\det_{g(x)}(\varphi_x^F(u))}\,\mathrm{dvol}_{g(x)}(u)$, $(u \in \overset{\circ}{T}_xM)$.

En effectuant alors le changement de variable :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T}_xM &\longrightarrow \overset{\circ}{T}_xM \\ w &\longmapsto \frac{\sqrt{g(x)\cdot(w,w)}}{F(x,w)}\,w \overset{\text{déf}}{=} u \end{aligned}\,,$$

on obtient (proposition III.1.4) :

$$\begin{aligned} \int_{S_x^F(M)} f(x,v)&\sqrt{\det_{g(x)}(\varphi_x^F(v))}\,d\sigma_x^F(v) \\ &= \frac{1}{n}\int_{B_{g(x)}\setminus\{0_x\}} \bar{f}(x,w)\left(\frac{\sqrt{g(x)\cdot(w,w)}}{F(x,w)}\right)^n \det_{g(x)}(\varphi_x^F(w))\,\mathrm{dvol}_{g(x)}(w) \\ &= \int_{S_x^g(M)} \bar{f}(x,w)F^{-n}(x,w)\,\det_{g(x)}(\varphi_x^F(w))\,d\sigma_x^g(w)\,; \end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

Montrons maintenant que le lien entre la mesure de Liouville $|\omega_F|$ et la mesure finslérienne vol_F n'est pas le même selon que F est riemannienne ou non. Plus précisément, nous savons que pour *toute* métrique de Riemann g sur M et pour *tout* $x \in M$, $\sigma_x^g(S_x^g(M)) = nC_n$, d'où il découle que $|\omega_g|(S^g(M)) = nC_n \,\mathrm{vol}_g(M)$ lorsque $\mathrm{vol}_g(M) < +\infty$ (remarque IV.2.4).

Or, ceci est *faux* pour une métrique de Finsler quelconque, C^∞ et strictement convexe, car :

Proposition IV.2.6.

a) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^2$, C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, dont la sphère unité S_N est représentée en coordonnées polaires dans la base canonique par une fonction rayon $\rho : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \theta \longmapsto \rho(\theta)\end{array}$ *différentiable et π-périodique. En posant $\Psi = \frac{1}{\rho}$, on a : N est strictement convexe si, et seulement si, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\Psi(\theta) + \ddot{\Psi}(\theta) > 0$, et dans ce cas*

$$\int_{\mathbb{S}^1} N^{-2}(v) \det_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(\varphi(v)) d\sigma^{\langle\cdot|\cdot\rangle}(v) = \int_0^{2\pi} \left(\Psi^2(\theta) - \dot{\Psi}^2(\theta)\right) d\theta\,,$$

où $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et φ la métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ donnée par $\varphi(v) = \frac{1}{2}(N^2)''(v)$ pour $v \neq 0$.

b) Si $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\Psi(\theta) = 2 + \cos^2\theta$, alors la métrique de Finsler F sur $\mathbb{R}^2$, invariante par translation et définie par N (i.e. $F(x,v) = N(v)$, $\forall x,v \in \mathbb{R}^2$), est C^∞, strictement convexe, et vérifie :

$$|\omega_F|(S^F(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)) \neq 2\pi \,\mathrm{vol}_F(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$$

(on note encore F la métrique quotient).

Preuve.

a) En désignant par (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $e_1(\theta) = \cos\theta i + \sin\theta j$ et $e_2(\theta) = -\sin\theta i + \cos\theta j$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $N^2\left(e_1(\theta)\right) = \Psi^2(\theta)$, d'où en dérivant une première fois par rapport à θ :

$$\frac{1}{2}(N^2)'\left(e_1(\theta)\right) \cdot e_2(\theta) = \Psi(\theta)\dot{\Psi}(\theta)\,, \tag{$*$}$$

soit encore (homogénéité) :

$$\frac{1}{2}(N^2)''\left(e_1(\theta)\right) \cdot (e_1(\theta),e_2(\theta)) = \Psi(\theta)\dot{\Psi}(\theta)\,. \tag{1}$$

Par dérivation de $(*)$, on a ensuite :

$$\frac{1}{2}(N^2)''\left(e_1(\theta)\right) \cdot (e_2(\theta),e_2(\theta)) - \frac{1}{2}(N^2)''\left(e_1(\theta)\right) \cdot (e_1(\theta),e_1(\theta)) = \dot{\Psi}^2(\theta) + \Psi(\theta)\ddot{\Psi}(\theta)$$

i.e.
$$\frac{1}{2}(N^2)''\left(e_1(\theta)\right)\cdot\left(e_2(\theta),e_2(\theta)\right)=\Psi^2(\theta)+\dot\Psi^2(\theta)+\Psi(\theta)\ddot\Psi(\theta) \tag{2}$$
puisque
$$\frac{1}{2}(N^2)''\left(e_1(\theta)\right)\cdot\left(e_1(\theta),e_1(\theta)\right)=N^2(e_1(\theta))=\Psi^2(\theta)\,. \tag{3}$$
Comme $(e_1(\theta),e_2(\theta))$ est une base orthonormée pour $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$, on déduit de (1), (2) et (3) que :
$$\det{}_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(\varphi(e_1(\theta))=\Psi^3(\theta)(\Psi(\theta)+\ddot\Psi(\theta))$$
et
$$\mathrm{tr}_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(\varphi(e_1(\theta))=\Psi^2(\theta)+\dot\Psi^2(\theta)+\Psi(\theta)(\Psi(\theta)+\ddot\Psi(\theta))\,.$$
Dire que N est strictement convexe signifie que les valeurs propres de la forme quadratique $\varphi(e_1(\theta))$ relativement à $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ sont >0 pour tout $\theta\in\mathbb{R}$. Or ici, ceci s'écrit $\det_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(\varphi(e_1(\theta))>0$ et $\mathrm{tr}_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(\varphi(e_1(\theta)))>0$, c'est-à-dire $\Psi(\theta)+\ddot\Psi(\theta)>0$.

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^1}N^{-2}(v)\det{}_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(\varphi(v))d\sigma^{\langle\cdot|\cdot\rangle}(v)&=\int_0^{2\pi}\Psi^{-2}(\theta)\det{}_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(\varphi(e_1(\theta)))\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)(\Psi(\theta)+\ddot\Psi(\theta))\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\Psi^2(\theta)\,d\theta+\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\ddot\Psi(\theta)\,d\theta\,.\end{aligned}$$

En effectuant ensuite une intégration par parties dans la deuxième intégrale et en tenant compte de la π-périodicité de Ψ, on obtient l'égalité voulue.

b) Tout d'abord, par un rapide calcul, nous avons :
$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \Psi(\theta)+\ddot\Psi(\theta)=1+3\sin^2\theta>0\,;$$
donc F est strictement convexe. Notons can la métrique riemannienne canonique sur $\mathbb{R}^2$ (*i.e.* associée à $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$) ainsi que son quotient sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Alors le corollaire IV.2.5 et la $\mathbb{Z}^2$-invariance de can et F entraînent que
$$|\omega_F|(S^F(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2))=I\cdot\mathrm{vol}_{\mathrm{can}}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$$
avec $I=\int_0^{2\pi}(\Psi^2(\theta)-\dot\Psi^2(\theta))\,d\theta$ (point *a)* ci-dessus).

D'autre part, nous avons :
$$\mathrm{vol}_F(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)=\frac{\pi}{V}\,\mathrm{vol}_{\mathrm{can}}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)\,,$$
où $V=\mathrm{vol}_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(B_N)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\Psi^2(\theta)}\,d\theta\,.$

Tout revient donc à montrer que
$$V\cdot I\neq 2\pi^2\,.$$

∗ *Calcul de I.*

On a $\forall\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Psi^2(\theta) - \dot{\Psi}^2(\theta) = 4 + 5\cos^4\theta\,,$$

d'où $I = 8\pi + \frac{15}{4}\pi$, *i.e.* $I = \frac{47}{4}\pi$.

∗ *Calcul de V.*

On a

$$2V = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos^2\theta)^2} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(2+\cos^2\theta)^2}\,,$$

c'est-à-dire $\left(\cos^2\theta = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\theta}\right.$ puis $\left.x = \mathrm{tg}\,\theta\right)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V &= \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{(3+2x^2)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\frac{3}{2}+x^2} - \frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(\frac{3}{2}+x^2)^2} \\ &= \frac{\pi}{12}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{72}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\,,\end{aligned}$$

soit

$$V = \frac{5\pi}{36}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Conclusion :

$$V\cdot I = \frac{47}{4}\cdot\frac{5}{36}\pi^2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} \neq 2\pi^2 \quad \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbb{Q}\right). \qquad \blacksquare$$

Remarques.

∗ La courbure algébrique $\kappa(\theta)$ de S_N au point $c(\theta) = \rho(\theta)e_1(\theta)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ valant

$$\kappa(\theta) = \frac{\Psi^3(\theta)(\Psi(\theta) + \ddot{\Psi}(\theta))}{\left[\Psi^2(\theta) + \dot{\Psi}^2(\theta)\right]^{3/2}}\,,$$

on peut réécrire :

$$\int_{\mathbb{S}^1} N^{-2}(v)\det_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(\varphi(v))\,d\sigma^{\langle\cdot|\cdot\rangle}(v) = \int_0^{2\pi}\kappa(\theta)\|\dot{c}(\theta)\|^3_{\langle\cdot|\cdot\rangle}\Psi^4(\theta)\,d\theta\,.$$

∗ Il est à noter, bien que nous n'en ayons pas besoin ultérieurement, que nous aurions obtenu une proposition similaire en toute dimension en faisant usage des coordonnées sphériques.

Au terme de ce chapitre, il apparaît donc que la mesure de Liouville, qui ne présente pas d'intérêt en géométrie riemannienne pour ce qui est de la normalisation de l'entropie (puisque, rappelons-le, $|\omega_g|(S^g(M)) = nC_n \operatorname{vol}_g(M)$ pour toute métrique de Riemann g sur M), offre en revanche de nouvelles perspectives dans le cadre finslérien, comme nous le verrons par la suite.

Chapitre V

LE CAS DU RANG 1

Ce dernier chapitre traite du problème finslérien du minimum de l'entropie topologique sur les variétés hyperboliques réelles compactes, celles-ci étant les espaces riemanniens localement symétriques de rang 1 les plus simples. Ainsi, nous cherchons ici à donner en quelques sorte un complément à l'étude faite au chapitre III concernant le rang ≥ 2.

Dans une première étape, et tout comme avec l'entropie volumique, nous ferons une normalisation par le volume finslérien puis, sachant que cela présente un intérêt (voir IV.2), nous utiliserons le volume de Liouville introduit précédemment.

À l'intérieur du cadre riemannien, ces deux cas se recoupent et ont été complètement résolus par A. Katok pour les surfaces ([Kat]) et par G. Besson, G. Courtois et S. Gallot pour les dimensions supérieures ([B-C-G 2]). En revanche, les méthodes utilisées par ces auteurs ne s'appliquent plus aux métriques de Finsler, ce qui rend la situation délicate et laisse encore ouvert en rang 1 le problème finslérien des minima des entropies volumique et topologique. Néanmoins, en guise de premiers pas, nous montrons dans ce chapitre que les métriques hyperboliques sont des points critiques de l'entropie topologique parmi les métriques de Finsler strictement convexes et ce, que l'on normalise avec le volume finslérien (en toute dimension) ou bien avec le volume de Liouville (en dimension 2).

V.1. Entropie topologique et flots d'Anosov

Dans ce paragraphe, nous rappelons les notions nécessaires pour toute la suite.

DÉFINITION V.1.1. — *Soient E un espace topologique métrisable, compact, et $\varphi = (\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flot continue sur E.*

Étant donné une distance d induisant la topologie de E, on associe à chaque $t > 0$ la nouvelle distance d_t définie par :

$$\forall x,y \in E,\ d_t(x,y) = \max_{0\leq s\leq t} d(\varphi^s(x),\varphi^s(y))\,,$$

et pour $\delta > 0$ on note $N(t,\delta)$ le nombre minimum de boules ouvertes de rayon δ relativement à d_t qu'il faut pour recouvrir E.

*L'*entropie topologique *du flot φ est alors le nombre positif (fini ou non) :*

$$h_T(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\delta>0}\left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log N(t,\delta)\right).$$

Remarques.

a) Cette définition est indépendante du choix de d et admet plusieurs autres versions équivalentes (voir [Bo-Ru] et [Bo 1]).

En outre, elle peut se généraliser à un espace topologique compact quelconque et à une application continue de cet espace dans lui-même (voir [Smo] et [Wal]).

D'autre part, lorsque E est une variété différentiable et φ un flot de classe C^1, on montre que $h_T(\varphi)$ est finie ([Szle]).

b) Intuitivement parlant, l'entropie topologique est une estimation de la quantité asymptotique d'informations dont on a besoin pour connaître les trajectoires du flot φ avec une certaine précision. Le lecteur intéressé par le lien entre $h_T(\varphi)$ et la théorie de l'information pourra consulter [Ya-Ya], [Bri] et [W-S].

On déduit immédiatement :

Proposition V.1.2.

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $h_T\left((\varphi^{\lambda t})_{t\in\mathbb{R}}\right) = |\lambda| h_T(\varphi)$,

ii) Si G est un autre espace topologique métrisable et compact muni d'un flot continu $\Psi = (\Psi^t)_{t\in\mathbb{R}}$, et si $f : E \to G$ est un homéomorphisme conjuguant φ et Ψ (i.e. $f \circ \varphi^t = \Psi^t \circ f$ pour tout $t \in \mathbb{R}$), alors $h_T(\varphi) = h_T(\Psi)$ (invariance dynamique de h_T).

Considérons dorénavant une variété différentiable compacte V de dimension ≥ 3.

Définition V.1.3. — *Soit $X \in \Gamma(TV)$ un champ de vecteurs C^∞ sur V engendrant le flot $\varphi = (\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$. On dit que X (ou φ) est* d'Anosov *si, et seulement si, φ est sans points fixes (i.e. $X(x) \neq 0_x, \forall x \in V$) et si pour chaque $x \in V$, il existe des sous-espaces vectoriels non nuls E^s_x et E^u_x de T_xV stables par $T_x\varphi^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et qui vérifient :*

$*$ $T_xV = \mathbb{R}X(x) \oplus E^s_x \oplus E^u_x$ *(somme directe continue par rapport à x) ;*

$*$ $\forall t \geq 0, \forall v \in E^s_x$, $\|T_x\varphi^t \cdot v\|_{\varphi^t(x)} \leq ce^{-bt}\|v\|_x$;

$*$ $\forall t \geq 0, \forall v \in E^u_x$, $\|T_x\varphi^{-t} \cdot v\|_{\varphi^{-t}(x)} \leq ce^{-bt}\|v\|_x$,

où $\|\cdot\|_y$ est la norme sur T_yV $(y \in V)$ associée à une métrique riemannienne arbitraire g sur V et $c \geq 1$, $b > 0$ sont des constantes.

Cette propriété ne dépend pas du choix de g (puisque V est compacte) et on notera $\mathcal{A}(V)$ l'ensemble des champs de vecteurs d'Anosov sur V. On a alors :

THÉORÈME V.1.4 ([A]).

∗ *$\mathcal{A}(V)$ est un ouvert de $\Gamma(V)$,*

∗ *Le flot géodésique sur le fibré sphérique d'une variété riemannienne compacte, à courbure sectionnelle partout < 0, est d'Anosov.*

Remarque. — La condition de courbure dans le deuxième point ci-dessus n'est pas minimale, comme on pourra s'en rendre compte dans [Eb].

THÉORÈME V.1.5 (stabilité structurelle) ([L-M-M]). — *Soit $\begin{array}{l}]-a,a[\longrightarrow \mathcal{A}(V) \\ \lambda \longmapsto X_\lambda \end{array}$ une perturbation C^∞ $(a > 0)$. En désignant par $\mathrm{Hom}(V,V)$ l'espace de homéomorphismes de V sur V et par $\varphi_\lambda = (\varphi_\lambda^t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot sur V engendré par X_λ $(\lambda \in]-a,a[)$, il existe $\varepsilon \in]0,a]$ et une application continue*

$$\begin{array}{l}]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow \mathrm{Hom}(V,V) \times C^0(V,\mathbb{R}) \\ \qquad \lambda \longmapsto (\theta_\lambda; u_\lambda) \end{array}$$

tels que :

∗1) $\theta_0 = \mathrm{id}_V$ *et* $u_0 \equiv 1$,

∗2) $\forall\lambda \in]-\varepsilon,\varepsilon[, \forall x \in V, u_\lambda(x) > 0$ *et l'application* $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow V \\ t \longmapsto \theta_\lambda(\varphi_0^t(x)) \end{array}$ *est de classe* C^1,

∗3) $\begin{array}{l}]-\varepsilon,\varepsilon[\times V \longrightarrow TV \\ (\lambda,x) \longmapsto \left(\theta_\lambda(x); \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\theta_\lambda(\varphi_0^t(x))\right) \end{array}$ *est continue,*

∗4) $\forall\lambda \in]-\varepsilon,\varepsilon[, \forall x \in V$,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\theta_\lambda(\varphi_0^t(x)) = u_\lambda(x)X_\lambda(\theta_\lambda(x)) .$$

COROLLAIRE V.1.6. — *Avec les notations précédentes, on a :* $\forall\lambda \in]-\varepsilon,\varepsilon[, \forall x \in V, \forall t \in \mathbb{R}$,

$$\theta_\lambda(\varphi_0^t(x)) = \varphi_\lambda^{\int_0^t u_\lambda(\varphi_0^s(x))ds}(\theta_\lambda(x)) .$$

Preuve. — En remplaçant x par $\varphi_0^s(x)$ $(s \in \mathbb{R})$ dans le 4$^{\mathrm{e}}$ point du théorème de stabilité structurelle, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\theta_\lambda(\varphi_0^t(x)) = u_\lambda(\varphi_0^s(x))X_\lambda(\theta_\lambda(\varphi_0^s(x))) ,$$

ce qui montre que pour $x \in V$ et $\lambda \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ fixés, la courbe $\begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} V \\ t \longmapsto \theta_\lambda(\varphi_0^t(x)) \end{array}$ est solution de l'équation différentielle non-autonome du 1$^{\mathrm{er}}$ ordre sur V : $\dot\sigma = Z_t(\sigma)$ avec

$\sigma(0) = \theta_\lambda(x)$ pour condition initiale et où $Z_t \in \Gamma(TV)$ $(t \in \mathbb{R})$ est défini par $Z_t(y) = u_\lambda(\varphi_0^t(x))X_\lambda(y), \forall y \in V$.

Or, $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & TV \\ (t,y) & \longmapsto & (y, Z_t(y)) \end{array}$ est continue et la courbe $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{C^1} & V \\ t & \longmapsto & \varphi_\lambda^{\int_0^t u_\lambda(\varphi_0^s(x))\,ds}(\theta_\lambda(x)) \end{array}$ vérifie aussi l'équation différentielle ci-dessus avec la même condition initiale ; d'où l'égalité des deux solutions. ■

Remarque. — Pour chaque $\lambda \in \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[$, l'homéomorphisme $\theta_\lambda : V \to V$ envoie ainsi toute orbite de φ_0 sur une orbite de φ_λ et u_λ indique comment il faut changer de temps pour parcourir ces orbites à vitesses égales.

Voici à présent les deux principales conséquences de la stabilité structurelle sur l'entropie topologique des flots d'Anosov, les hypothèses et notations étant toujours celles du théorème V.1.5 :

Conséquence V.1.7 ([K-K-W]). — *L'application* $\begin{array}{rcl} \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & h_T(\varphi_\lambda) \end{array}$ *est continue.*

Elle entraîne à son tour :

Conséquence V.1.8 ([K-K-W]). — *L'application* $\begin{array}{rcl} \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[& \longrightarrow & (C^0(M,\mathbb{R}))' \\ \lambda & \longmapsto & m_\lambda \end{array}$ *est continue, où m_λ est la mesure de Bowen-Margulis associée à φ_λ (i.e. l'unique mesure de probabilité φ_λ-invariante sur V telle que $h_T(\varphi_\lambda) = h_{m_\lambda}(\varphi_\lambda)$ (entropie mesurée)).*

Pour terminer, rappelons un résultat indépendant de la stabilité structurelle et qui exige la définition suivante :

Définition V.1.9 ([K-K-W]). — *Soient Ω un espace topologique compact muni d'une mesure de probabilité μ et $\varphi = (\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flot continu sur Ω pour lequel on note $\mathcal{O}(\varphi) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des orbites. Pour $\delta > 0$, $f \in C^0(\Omega,\mathbb{R})$ et $\Gamma \in \mathcal{O}(\varphi)$ fermée dont* la *période est $T > 0$, on dit que Γ est (δ,f)*-uniformément répartie *par rapport à μ si, et seulement si :*

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^s(x))\, ds - \int_\Omega f\, d\mu \right| \leq \delta\,,$$

où $x \in \Gamma$ est quelconque.

Pour chaque $t > 0$, on désignera alors par ${}^{\varphi}P_\mu^{(\delta,f)}(t)$ le nombre d'orbites fermées de φ dont *la* période est dans $]0,t]$ et qui sont (δ,f)-uniformément réparties par rapport à μ. Aussi, ${}^{\varphi}P(t)$ sera le nombre de toutes les orbites fermées de φ dont *la* période est dans $]0,t]$.

Proposition V.1.10 ([Bo 2] et [K-K-W]). — *Étant donné $X \in \mathcal{A}(V)$ de flot $\varphi = (\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$, on a :*

i) $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log^{\varphi} P(t) = h_T(\varphi)$,

ii) Pour toute mesure de probabilité μ sur V, invariante par φ et telle que φ soit μ-ergodique :

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log\ {}^{\varphi}P_{\mu}^{(\delta,f)}(t) \geq h_{\mu}(\varphi)\,,\ \forall\delta > 0\,,\ \forall f \in C^0(V,\mathbb{R})\,.$$

De plus, si μ est la mesure de Bowen-Margulis associée à φ, alors il y a égalité (le deuxième membre valant dans ce cas $h_T(\varphi)$).

V.2. Dérivée de l'entropie topologique pour les métriques de Finsler

Position du problème.

Soit M une variété différentiable compacte munie d'une métrique riemannienne g_0 à courbure sectionnelle partout strictement négative. En désignant par $S^0(M)$ le fibré sphérique de g_0 et par $\mathcal{F}^+$ l'ensemble des métriques de Finsler C^∞ et strictement convexes sur M, on se fixe une perturbation C^∞ de g_0 dans $\mathcal{F}^+$, c'est-à-dire une application $\begin{array}{l}]-a,a[\longrightarrow \mathcal{F}^+ \\ \lambda \longmapsto F_\lambda \end{array}$ $(a > 0)$ telle que $F_0 = F_{g_0}$ et $\begin{array}{l}]-a,a[\longrightarrow C^\infty(S^0(M),\mathbb{R}) \\ \lambda \longmapsto F_{\lambda \restriction S^0(M)} \end{array}$ soit C^∞.

Pour chaque $\lambda \in \,]-a,a[$, soient alors :

- ℓ_λ la fonction longueur associée à F_λ et s'appliquant aux chemins $[0,1] \to M$ de classe C^1 par morceaux,
- $S^\lambda(M)$ le fibré sphérique de F_λ,
- $\alpha_\lambda \in \Lambda^1(\overset{\circ}{T}M)$ la 1-forme de Liouville associée au lagrangien $L_\lambda = \frac{1}{2}F_\lambda^2$,
- $Y_\lambda \in \Gamma(T(\overset{\circ}{T}M))$ le gradient symplectique de L_λ par rapport à $d\alpha_\lambda$ $(i_{Y_\lambda} d\alpha_\lambda = -dL_\lambda)$, dont la restriction à $S^\lambda(M)$ sera notée de la même façon,
- $\Psi_\lambda = (\Psi_\lambda^t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot sur $S^\lambda(M)$ engendré par Y_λ (flot géodésique de F_λ).

Ceci étant, nous allons prouver dans cette section la dérivabilité en $\lambda = 0$ de l'application $\begin{array}{l} h : \,]-a,a[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \longmapsto h(\lambda) \overset{\text{déf}}{=} h_T(\Psi_\lambda) \end{array}$ et établir une formule pour $\frac{dh}{d\lambda}(0)$ qui nous servira au prochain paragraphe.

On obtiendra ainsi une généralisation de l'expression de la dérivée de l'entropie topologique donnée dans [K-K-W] pour les métriques de Riemann. Par ailleurs, notre formule sera une particularisation finslérienne d'un calcul effectué dans [Po] pour les flots d'Anosov.

Avant de poursuivre, remarquons que pour $\lambda \in \left]-a,a\right[$, la variété $S^\lambda(M)$ supportant le flot Ψ_λ, dont on veut étudier l'entropie topologique $h(\lambda)$, varie avec λ ; commençons donc par tout ramener sur $S^0(M)$. Pour cela, considérons le difféomorphisme $\begin{array}{rcl}\Phi_\lambda : S^\lambda(M) & \longrightarrow & S^0(M) \\ (x,v) & \longmapsto & (x, \frac{v}{\sqrt{g_0(x)\cdot(v,v)}})\end{array}$ et notons $X_\lambda \in \Gamma(TS^0(M))$ l'image de Y_λ par Φ_λ. Ce dernier est alors une conjugaison entre Ψ_λ et le flot $\varphi_\lambda = (\varphi_\lambda^t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $S^0(M)$ engendré par X_λ, d'où il s'ensuit que $h(\lambda) = h_T(\varphi_\lambda)$ (proposition V.1.2).

D'autre part, sachant que $X_0 = Y_0 \in \mathcal{A}(S^0(M))$ et d'après le théorème V.1.4 avec $V = S^0(M)$, on peut supposer (quitte à diminuer $a > 0$) que $\forall\lambda \in \left]-a,a\right[,\ X_\lambda \in \mathcal{A}(S^0(M))$, ce qui conduit à envisager la C^∞ perturbation $\begin{array}{rcl}\left]-a,a\right[& \longrightarrow & \mathcal{A}(S^0(M)) \\ \lambda & \longmapsto & X_\lambda\end{array}$. La propriété de stabilité structurelle s'appliquant par conséquent, nous utiliserons, pour *cette* perturbation et dans *toute* la suite de ce paragraphe, les notations du théorème V.1.5 dans lequel $V = S^0(M)$. Montrons maintenant la :

PROPOSITION V.2.1. — *Soient $\lambda \in \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[$ et $\mathcal{C}$ une classe d'homotopie libre et continue de lacets $[0,1] \to M$ jamais constants.*

Alors il existe une unique géodésique $\gamma : \mathbb{R} \to M$ pour F_λ (i.e. $(\gamma,\dot\gamma) : \mathbb{R} \to \mathring{T}M$ est une courbe intégrale de $Y_\lambda \in \Gamma(T(\mathring{T}M))$) qui vérifie :

$$\gamma(0) = \gamma(1),\ \dot\gamma(0) = \dot\gamma(1) \ \textit{ et } \gamma_{\restriction[0,1]} \in \mathcal{C}\ ;$$

l'unicité s'entendant à composition par $\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ct+d\end{array}$ près $(c \in \mathbb{R}^*,\ d \in \mathbb{R})$. En outre, γ est caractérisée par :

$$\ell_\lambda(\gamma_{\restriction[0,1]}) = \inf\left\{\ell_\lambda(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{C} \ \textit{ de classe } C^1 \textit{ par morceaux}\right\}.$$

Preuve.

$*$ *Existence et minimisation de la longueur*. Pour $F \in \mathcal{F}^+$ quelconque, il est facile de voir qu'elle admet une géodésique fermée $\mathbb{R} \to M$ qui est 1-périodique et telle que sa restriction à $[0,1]$ minimise ℓ_F sur $\mathcal{C}$. Il suffit, en effet, de calquer la démonstration sur celle qui est faite dans [Di], p. 368, pour une métrique riemannienne puisque seules interviennent la compacité de M et la notion de longueur.

$*$ *Unicité*. Donnons-nous $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{R} \to M$ des géodésiques fermées pour F_λ, qui sont 1-périodiques et telles que leurs restrictions à $[0,1]$ soient dans $\mathcal{C}$.

Il existe donc $H : [0,1] \times \mathbb{R} \to M$ continue telle que $\forall (s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$:

$$H(0,1) = \gamma_0(t)$$
$$H(1,t) = \gamma_1(t)$$
$$H(s,t+1) = H(s,t)\,.$$

Notons :

$$T_0 \overset{\text{déf}}{=} F_\lambda(\gamma_0(0),\dot\gamma_0(0)) = F_\lambda(\gamma_0(t),\dot\gamma_0(t)),\ \forall t \in \mathbb{R}\,,$$
$$T_1 \overset{\text{déf}}{=} F_\lambda(\gamma_1(0),\dot\gamma_1(0)) = F_\lambda(\gamma_1(t),\dot\gamma_1(t)),\ \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

$\begin{aligned}\sigma_0 : \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma_0\left(\tfrac{t}{T_0}\right)\end{aligned}$ et $\begin{aligned}\sigma_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma_1\left(\tfrac{t}{T_1}\right)\end{aligned}$. Comme $T_0 > 0$ et $T_1 > 0$, on a $(1-s)T_0+sT_1 \neq 0$ pour $s \in [0,1]$, ce qui permet de poser $T_s \overset{\text{déf}}{=} \frac{T_0T_1}{(1-s)T_0+sT_1}$.

L'application $\begin{aligned}G : [0,1] \times \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ (s,t) &\longmapsto G(s,t) \overset{\text{déf}}{=} H\left(s,\tfrac{t}{T_s}\right)\end{aligned}$ est alors une homotopie continue de σ_0 à σ_1 vérifiant : $G(s,t+T_s) = G(s,t)$, $\forall (s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, $(\sigma_0,\dot\sigma_0)$ et $(\sigma_1,\dot\sigma_1)$ étant des courbes intégrales du flot géodésique Ψ_λ de F_λ (sur $S^\lambda(M)$), $\Phi_\lambda \circ (\sigma_0,\dot\sigma_0)$ et $\Phi_\lambda \circ (\sigma_1,\dot\sigma_1)$ sont des courbes intégrales du flot φ_λ (sur $S^0(M)$) qui sont T_0 et T_1-périodiques respectivement.

Définissons encore :

$$\xi_0 \overset{\text{déf}}{=} \theta_\lambda^{-1}(\Phi_\lambda(\sigma_0(0),\dot\sigma_0(0)) \in S^0(M)\,,$$
$$\xi_1 \overset{\text{déf}}{=} \theta_\lambda^{-1}(\Phi_\lambda(\sigma_1(0),\dot\sigma_1(0)) \in S^0(M)\,,$$
$$\begin{aligned}H_0 : [0,1] \times \mathbb{R} &\longrightarrow S^0(M) \\ (s,t) &\longmapsto \varphi^t_{s\lambda}(\theta_{s\lambda}(\xi_0))\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}H_1 : [0,1] \times \mathbb{R} &\longrightarrow S^0(M) \\ (s,t) &\longmapsto \varphi^t_{s\lambda}(\theta_{s\lambda}(\xi_1))\end{aligned}\,.$$

Puisque l'application $\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \textstyle\int_0^t u_\lambda(\varphi_0^r(\xi_0))dr\end{aligned}$ est bijective, il existe un unique réel $R_0 > 0$ tel que $T_0 = \int_0^{R_0} u_\lambda(\varphi_0^r(\xi_0))dr$; d'où il découle que :

$$\begin{aligned}\theta_\lambda(\varphi_0^{R_0}(\xi_0)) &= \varphi_\lambda^{T_0}(\theta_\lambda(\xi_0)) \\ &= \varphi_\lambda^0(\theta_\lambda(\xi_0)) \ \ (T_0\text{-périodicité}) \\ &= \theta_\lambda(\xi_0)\,,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_0^{R_0}(\xi_0) = \xi_0\,.$$

Si, pour $s \in [0,1]$, on note $\tau_s^0 \overset{\text{déf}}{=} \int_0^{R_0} u_{s\lambda}(\varphi_0^r(\xi_0))\,dr > 0$, on a alors :

$$\begin{aligned}\varphi_{s\lambda}^{\tau_s^0}(\theta_{s\lambda}(\xi_0)) &= \theta_{s\lambda}(\varphi_0^{R_0}(\xi_0)) \\ &= \theta_{s\lambda}(\xi_0)\,,\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$H_0(s,t+\tau_s^0) = H_0(s,t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, on montre que

$$H_1(s,t+\tau_s^1) = H_1(s,t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall s \in [0,1],$$

où

$$\tau_s^1 \overset{\text{déf}}{=} \int_0^{R_1} u_{s\lambda}(\varphi_0^r(\xi_1))\, dr > 0\,,$$

avec $R_1 > 0$ défini par $T_1 = \int_0^{R_1} u_\lambda(\varphi_0^r(\xi_1))\, dr$.

Par suite, $\pi : S^0(M) \to M$ étant la projection canonique, $J_0 \overset{\text{déf}}{=} \pi \circ H_0$ est une homotopie continue de $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow M \\ t \longmapsto \pi(H_0(0,t)) \end{pmatrix}$ à σ_0 telle que : $\forall (s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$,

$$J_0(s,t+\tau_s^0) = J_0(s,t)\,.$$

De façon analogue, $J_1 \overset{\text{déf}}{=} \pi \circ H_1$ est une homotopie continue de $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow M \\ t \longmapsto \pi(H_1(0,t)) \end{pmatrix}$ à σ_1 qui vérifie : $\forall (s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$,

$$J_1(s,t+\tau_s^1) = J_1(s,t)\,.$$

Considérons à présent les applications :

$$\begin{aligned} \chi_0 : \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \pi(H_0(0,\tau_0^0 t)) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \chi_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \pi(H_1(0,\tau_1^1 t)) \end{aligned} \;;$$

ce sont des géodésiques fermées pour g_0 qui sont 1-périodiques. En outre, $I : [0,1] \times \mathbb{R} \to M$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$I(s,t) = J_0(3s,\tau_{3s}^0 t) \ \text{ pour } \ s \in \left[0,\frac{1}{3}\right],$$

$$I(s,t) = G(3s-1,T_{3s-1} t) \ \text{ pour } \ s \in \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$$

et

$$I(s,t) = J_1(3-3s,\tau_{3-3s}^1 t) \ \text{ pour } \ s \in \left[\frac{2}{3},1\right],$$

est une homotopie continue de χ_0 à χ_1, avec : $\forall (s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$,

$$I(s,t+1) = I(s,t)\,.$$

Ainsi, $I_{\restriction [0,1]\times[0,1]}$ est une homotopie libre et continue de lacets joignant $\chi_{0\,\restriction [0,1]}$ à $\chi_{1\,\restriction [0,1]}$.

Sachant que les restrictions de χ_0 et χ_1 à $[0,1]$ ne sont pas dans une classe d'homotopie libre et continue de lacets $[0,1] \to M$ contenant un point (sans quoi il en serait de même pour γ_0 et γ_1 par l'intermédiaire de J_0 et J_1), il résulte alors de la stricte négativité de la courbure sectionnelle de g_0 qu'il existe $A \in \mathbb{R}^*$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\chi_1(t) = \chi_0(At+B),\ \forall t \in \mathbb{R}\ \text{([Kli], p. 357)}\,.$$

Par conséquent, nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(*) \qquad \varphi_0^{\tau_1^1 t}(\xi_1) = \varphi_0^{\tau_0^0(At+B)}(\xi_0)\,,$$

d'où en appliquant θ_λ :

$$\varphi_\lambda^{\int_0^{\tau_1^1 t} u_\lambda(\varphi_0^r(\xi_1))dr}(\Phi_\lambda(\sigma_1(0),\dot\sigma_1(0))) = \varphi_\lambda^{\int_0^{\tau_0^0(At+B)} u_\lambda(\varphi_0^r(\xi_0))dr}(\Phi_\lambda(\sigma_0(0),\dot\sigma_0(0)))\,.$$

Or,

$$\int_0^{\tau_0^0(At+B)} u_\lambda(\varphi_0^r(\xi_0))dr = \int_0^{\tau_0^0 B} u_\lambda(\varphi_0^r(\xi_0))dr + \int_{\tau_0^0 B}^{\tau_0^0(At+B)} u_\lambda(\varphi_0^r(\xi_0))dr\,,$$

le deuxième terme de la somme étant égal à

$$\frac{\tau_0^0 A}{\tau_1^1}\int_0^{\tau_1^1 t} u_\lambda\left(\varphi_0^{\tau_0^0(Av/\tau_1^1+B)}(\xi_0)\right)\,dv$$

(en faisant $r = \tau_0^0(Av/\tau_1^1+B)$), soit encore, d'après $(*)$ ci-dessus :

$$\frac{\tau_0^0 A}{\tau_1^1}\int_0^{\tau_1^1 t} u_\lambda(\varphi_0^v(\xi_1))\,dv\,.$$

En posant alors $C \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\tau_0^0 A}{\tau_1^1}$, $D \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{\tau_0^0 B} u_\lambda(\varphi_0^r(\xi_0))\,dr$ et en remarquant que la fonction $\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \int_0^{\tau_1^1 t} u_\lambda(\varphi_0^r(\xi_1))\,dr\end{array}$ est surjective, on obtient : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_\lambda^t(\Phi_\lambda(\sigma_1(0),\dot\sigma_1(0)) = \varphi_\lambda^{Ct+D}(\Phi_\lambda(\sigma_0(0),\dot\sigma_0(0)))\,,$$

et par suite, en projetant sur M :

$$\sigma_1(t) = \sigma_0(Ct+D)\,,$$

c'est-à-dire : $\gamma_1\left(\frac{t}{T_1}\right) = \gamma_0\left(\frac{C}{T_0}t + \frac{D}{T_0}\right)$.

Finalement, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma_1(t) = \gamma_0(ct+d)$$

avec $c \stackrel{\text{déf}}{=} C\frac{T_1}{T_0} \neq 0$ et $d \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{D}{T_0}$. ■

Remarque. — Si la perturbation de g_0 avait été riemannienne, cette proposition aurait été immédiate puisque l'argument de stricte négativité de la courbure sectionnelle de g_0 que nous avons invoqué dans la preuve aurait pu être directement utilisé avec F_λ.

Pour $\lambda \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, désignons par m_λ (resp. ρ_λ) la mesure de Bowen-Margulis sur $S^0(M)$ (resp. $S^\lambda(M)$) associée au flot d'Anosov φ_λ (resp. Ψ_λ) ; on a donc $(\Phi_\lambda)_*\rho_\lambda = m_\lambda$. De ce qui précède, nous déduisons alors :

Corollaire V.2.2. — $\forall\lambda \in]-\varepsilon,\varepsilon[$,

$$\frac{h(0)}{\int_{S^0(M)} F_\lambda \, dm_0} \leq h(\lambda) \leq h(0) \int_{S^0(M)} \frac{1}{F_\lambda} \, dm_\lambda \, .$$

Preuve. — Soient $\Gamma \in \mathcal{O}(\Psi_0)$ fermée dont *la* période est $T > 0$, $\xi \in \Gamma$ et $\mathcal{C}$ la classe d'homotopie libre et continue de lacets à laquelle appartient $\sigma : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow M \\ t \longmapsto \pi(\Psi_0^{Tt}(\xi)) \end{array}$.

En vertu de la proposition ci-dessus, il existe une unique géodésique (à paramétrisation près) $\gamma : \mathbb{R} \to M$ pour F_λ qui est 1-périodique et telle que sa restriction à $[0,1]$ soit dans $\mathcal{C}$. Si τ est *la* période de γ, on a $(\gamma(0),\frac{1}{\tau}\dot\gamma(0)) \in S^\lambda(M)$ et l'orbite pour Ψ_λ passant par ce point est évidemment fermée, sa période valant τ. Nous avons ainsi une application de l'ensemble des orbites fermées pour Ψ_0 dans celui des orbites fermées pour Ψ_λ qui, à nouveau d'après la proposition V.2.1, est injective.

Par ailleurs, la propriété de minimisation dans la proposition précédente entraîne que $\ell_\lambda(\gamma_{\restriction[0,1]}) \leq \ell_\lambda(\sigma)$, c'est-à-dire

$$\tau \leq \int_0^T F_\lambda(\Psi_0^s(\xi)) \, ds \, .$$

Notons f_λ la restriction de F_λ à $S^0(M)$ et donnons-nous $\delta > 0$. Alors, lorsque Γ est (δ,f_λ)-uniformément répartie par rapport à $\rho_0 = m_0$, on a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T F_\lambda(\Psi_0^s(\xi)) \, ds \leq b(\delta) \overset{\text{déf}}{=} \left(\delta + \int_{S^0(M)} F_\lambda \, dm_0\right) > 0 \, ,$$

et par suite : $\tau \leq b(\delta)T$.

En définitive, on peut associer de manière injective à toute orbite fermée pour Ψ_0, de période T et (δ,f_λ)-uniformément répartie par rapport à m_0, une orbite fermée pour Ψ_λ de période $\leq b(\delta)T$. Ceci s'écrit donc (définition V.1.9) :

$${}^{\Psi_0}P_{m_0}^{(\delta,f_\lambda)}(T) \leq {}^{\Psi_\lambda}P(b(\delta)T) \, ,$$

d'où :

$$\liminf_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \log {}^{\Psi_0}P_{m_0}^{(\delta,f_\lambda)}(T) \leq b(\delta) \lim_{T\to+\infty} \frac{\log {}^{\Psi_\lambda}P(b(\delta)T)}{b(\delta)T}$$

i.e. (proposition V.1.10)

$$h(0) \leq b(\delta)h(\lambda) \, .$$

Puisque c'est vrai pour tout $\delta > 0$, on obtient :

$$h(0) \leq h(\lambda) \int_{S^0(M)} F_\lambda \, dm_0 \, .$$

De la même manière, en échangeant les rôles de λ et 0, on aboutit à :

$$h(\lambda) \leq h(0) \int_{S^\lambda(M)} F_0 \, d\rho_\lambda \, .$$

Or,

$$\int_{S^\lambda(M)} F_0 d\rho_\lambda = \int_{S^0(M)} F_0(\Phi_\lambda^{-1}(x,v)) dm_\lambda(x,v)$$

avec, pour $(x,v) \in S^0(M)$, $F_0(\Phi_\lambda^{-1}(x,v)) = \frac{1}{F_\lambda(x,v)}$, ce qui achève la preuve. ■

Remarque. — Ce corollaire est une extension finslérienne d'un point déjà utilisé pour le cadre riemannien dans [K-K-W].

Nous pouvons en fin de compte passer à la formule de la dérivée de l'entropie topologique :

THÉORÈME V.2.3. — *L'application* $\begin{aligned} h : \,]-a,a[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto h(\lambda) \end{aligned}$ *est dérivable en* 0*, avec :*

$$\frac{dh}{d\lambda}(0) = -h(0) \int_{S^0(M)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda}_{|\lambda=0} dm_0 \, .$$

Preuve. — Nous avons d'après le corollaire précédent : $\forall \lambda \in \,]-\varepsilon,\varepsilon[, \lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{h(0)}{\lambda} \left[\frac{1}{\int_{S^0(M)} F_\lambda \, dm_0} - \frac{1}{\int_{S^0(M)} F_0 \, dm_0} \right] &\leq \frac{h(\lambda) - h(0)}{\lambda} \\ &\leq h(0) \int_{S^0(M)} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{F_\lambda} - \frac{1}{F_0} \right) dm_\lambda \, . \end{aligned}$$

$*$ Lorsque $\lambda \to 0$, le premier membre de cette double inégalité tend vers :

$$h(0) \frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} \left[\frac{1}{\int_{S^0(M)} F_\lambda \, dm_0} \right] = -h(0) \int_{S^0(M)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda}_{|\lambda=0} dm_0 \, .$$

$*$ D'autre part, lorsque $\lambda \to 0$, la fonction $h(0)\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{F_\lambda} - \frac{1}{F_0}\right) : S^0(M) \to \mathbb{R}$ converge uniformément sur $S^0(M)$ vers $-h(0)\frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda}_{|\lambda=0}$. En fixant $\eta > 0$, il existe donc $\delta \in \,]0,\varepsilon]$ tel que $\forall \lambda \in \,]-\delta,\delta[, \lambda \neq 0$, on ait sur $S^0(M)$:

$$h(0) \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{F_\lambda} - \frac{1}{F_0} \right) \leq \frac{\eta}{2} - h(0) \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda}_{|\lambda=0} ,$$

d'où en intégrant par rapport à m_λ :

$$h(0)\int_{S^0(M)}\frac{1}{\lambda}\Big(\frac{1}{F_\lambda}-\frac{1}{F_0}\Big)dm_\lambda \leq \frac{\eta}{2}-h(0)\int_{S^0(M)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}dm_\lambda\,.$$

Or, l'application $\begin{array}{c}]-a,a[\longrightarrow (C^0(S^0(M),\mathbb{R}))' \\ \lambda\longmapsto m_\lambda\end{array}$ est continue en 0 (conséquence V.1.8) ; par suite, il existe $\beta\in\,]0,\delta]$ tel que : $\forall\lambda\in\,]-\beta,\beta[,\,\lambda\neq 0$,

$$-h(0)\int_{S^0(M)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}dm_\lambda \leq \frac{\eta}{2}-h(0)\int_{S^0(M)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}dm_0\,,$$

avec en outre (premier point $*$ ci-dessus)

$$-\eta-h(0)\int_{S^0(M)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}dm_0 \leq \frac{h(0)}{\lambda}\left[\frac{1}{\int_{S^0(M)}F_\lambda dm_0}-\frac{1}{\int_{S^0(M)}F_0 dm_0}\right].$$

Conclusion :

$\forall\lambda\in\,]-\beta,\beta[,\,\lambda\neq 0,$

$$-\eta-h(0)\int_{S^0(M)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}dm_0 \leq \frac{h(\lambda)-h(0)}{\lambda}\leq \eta-h(0)\int_{S^0(M)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}dm_0\,,$$

d'où le résultat. ∎

V.3. Caractères critiques du rang 1

Comme annoncé au début de ce chapitre, nous allons prouver dans le présent paragraphe que les métriques hyperboliques sont des points critiques de l'entropie topologique parmi les métriques de Finsler strictement convexes, aussi bien vis-à-vis de la mesure finslérienne que de la mesure de Liouville. Aussi, rappelons la réponse qui a été donnée au problème de l'entropie minimale dans le cadre riemannien :

Théorème V.3.1 ([Kat], [B-C-G 2]). — *Soit M une variété différentiable compacte, munie d'une métrique riemannienne g_0 localement symétrique de rang 1. Alors pour toute métrique de Riemann g sur M telle que* $\mathrm{vol}_g(M)=\mathrm{vol}_{g_0}(M)$ *, on a :*

$$h_V(g)\geq h_V(g_0)\,.$$

En outre, il y a égalité si, et seulement si :

i) *g est à courbure sectionnelle constante strictement négative lorsque* $\dim M=2$,

ii) *g est isométrique à g_0 lorsque* $\dim M\geq 3$.

Il est à noter que l'inégalité ci-dessus entraîne celle avec les entropies topologiques des flots géodésiques correspondants en vertu du résultat bien connu suivant :

Proposition V.3.2 ([Din], [Man]). — *Pour g métrique riemannienne sur une variété compacte :*

$$h_V(g) \leq h_T(\textit{flot géodésique de } g)\,,$$

avec égalité lorsque g est à courbure sectionnelle strictement négative.

Avant de poursuivre, commençons par justifier le choix des normalisations que nous utiliserons :

Proposition V.3.3. — *Soit M une variété différentiable compacte de dimension $n \geq 2$.*

Pour chaque métrique de Finsler F sur M, de classe C^∞ et strictement convexe, on note $\varphi_F = (\varphi_F^t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot géodésique de F sur $S^F(M)$. Alors, pour tout $\delta > 0$:

i) $[h_T(\varphi_{\delta F})]^n \operatorname{vol}_{\delta F}(M) = [h_T(\varphi_F)]^n \operatorname{vol}_F(M)\,,$

ii) $[h_T(\varphi_{\delta F})]^n |\omega_{\delta F}|(S^{\delta F}(M)) = [h_T(\varphi_F)]^n |\omega_F|(S^F(M))$ *, où* vol_F *et* ω_F *désignent respectivement la mesure finslérienne et la forme volume de Liouville associées à F.*

Preuve.

Le difféomorphisme $\begin{array}{c} S^{\delta F}(M) \longrightarrow S^F(M) \\ (x,v) \longmapsto (x,\delta v) \end{array}$ conjuguant les flots $\varphi_{\delta F}$ et $(\varphi_F^{t/\delta})_{t\in\mathbb{R}}$, il résulte que ceux-ci ont même entropie topologique ; donc, d'après le point *i)* de la proposition V.1.2, $h_T(\varphi_{\delta F}) = \frac{1}{\delta} h_T(\varphi_F)$.

D'autre part, la proposition III.1.5 fournit $\operatorname{vol}_{\delta F}(M) = \delta^n \operatorname{vol}_F(M)$.

Enfin, la formule établie pour $|\omega_F|$ dans le corollaire IV.2.5 conduit à :

$$|\omega_{\delta F}|(S^{\delta F}(M)) = \delta^n |\omega_F|(S^F(M))\,. \qquad \blacksquare$$

Dans ce qui suit, on se donne, comme tout à l'heure, une variété compacte M de dimension $n \geq 2$ et une C^∞ perturbation $\begin{array}{c}]-a,a[\longrightarrow \mathcal{F}^+ \\ \lambda \longmapsto F_\lambda \end{array}$, mais en prenant *désormais* pour g_0 une métrique de Riemann *hyperbolique réelle* (courbure sectionnelle $\equiv -1$). De plus, nous garderons les notations du précédent paragraphe, en ajoutant que pour $\lambda \in]-a,a[$ la mesure finslérienne sur M et la forme volume de Liouville sur $S^\lambda(M)$ associées à F_λ seront notées $\operatorname{vol}_\lambda$ et ω_λ respectivement.

Normalisation par le volume finslérien.

THÉORÈME V.3.4. — *Si* $\forall\lambda \in \,]-a,a[$, $\mathrm{vol}_\lambda(M) = \mathrm{vol}_0(M)$, *alors :*

$$\frac{dh}{d\lambda}(0) = 0\,.$$

Preuve. — Pour $\lambda \in \,]-a,a[$, nous avons d'après la proposition III.1.5 :

$$\mathrm{vol}_\lambda(M) = \int_M \frac{nC_n}{f_\lambda(x)}\,\mathrm{dvol}_0(x) \;\text{ avec } \forall x \in M\,,$$
$$f_\lambda(x) \overset{\text{déf}}{=} \int_{S^0_x(M)} F_\lambda^{-n}(x,v)\,d\sigma_x^{g_0}(v)\,,$$

d'où en dérivant en $\lambda = 0$ et en tenant compte de l'hypothèse :

$$0 = nC_n \int_M -\frac{\frac{\partial f_\lambda}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=0}(x)}{(f_0(x))^2}\,\mathrm{dvol}_0(x) \quad \textit{i.e.}\;\; 0 = \int_M -\frac{\partial f_\lambda}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}(x)\,\mathrm{dvol}_0(x)$$

car $f_0 \equiv nC_n$.

Or, pour $x \in M$,

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}(x) = -n\int_{S^0_x(M)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}(x,v)\,d\sigma_x^{g_0}(v)\,,$$

donc : $0 = \int_{S^0(M)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=0} d|\omega_0|\,.$

Comme g_0 est hyperbolique, on a $m_0 = \frac{|\omega_0|}{nC_n\,\mathrm{vol}_{g_0}(M)}$ (la mesure de Bowen-Margulis du flot géodésique de g_0 est égale à la mesure de Liouville normalisée associée à g_0), et par suite le théorème V.2.3 permet de conclure. ∎

Remarque. — Ce résultat généralise celui obtenu dans [K-K-W] pour les métriques riemanniennes.

Normalisation par le volume de Liouville.

PROPOSITION V.3.5. — *Si* $\forall\lambda \in \,]-a,a[$, $|\omega_\lambda|(S^\lambda(M)) = |\omega_0|(S^0(M))$, *alors :*

$$\frac{dh}{d\lambda}(0) = \delta_n\cdot \int_{S^0(M)} \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0} \det_{g_0(x)}\left[\frac{1}{2}(F_\lambda^2(x,\cdot))''(v)\right] d|\omega_0|(x,v)\,,$$

avec $\delta_n \overset{\text{déf}}{=} \frac{1-n}{n^2C_n\,\mathrm{vol}_{g_0}(M)} < 0$.

Preuve. — Pour $\lambda \in \,]-a,a[$, nous avons d'après le corollaire IV.2.5 :

$$|\omega_\lambda|(S^\lambda(M)) = \int_{S^0(M)} F_\lambda^{-n}(x,v)\,\det_{g_0(x)}\left[\frac{1}{2}(F_\lambda^2(x,\cdot))''(v)\right] d|\omega_0|(x,v)\,,$$

d'où en dérivant en $\lambda = 0$ avec la normalisation :

$$\int_{S^0(M)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda}_{|\lambda=0} d|\omega_0| = \frac{1}{n}\int_{S^0(M)} \frac{\partial}{\partial \lambda}_{|\lambda=0} \det_{g_0(x)} \left[\frac{1}{2}(F_\lambda^2(x,\cdot))''(v)\right] d|\omega_0|(x,v)\,.$$

Mais, g_0 étant hyperbolique, $m_0 = \frac{|\omega_0|}{nC_n \operatorname{vol}_{g_0}(M)}$ et $h(0) = n-1$, ce qui achève la preuve grâce au théorème V.2.3. ■

Théorème V.3.6. — *Lorsque M est une* surface *et si* $\forall \lambda \in\,]-a,a[$, $|\omega_\lambda|(S^\lambda(M)) = |\omega_0|(S^0(M))$, *alors :*

$$\frac{dh}{d\lambda}(0) = 0\,.$$

Preuve. — Posons $\forall \lambda \in\,]-a,a[$, $\forall x \in M$,

$$\mathcal{L}_\lambda(x) \overset{\text{déf}}{=} \int_{S_x^0(M)} F_\lambda^{-2}(x,v) \det_{g_0(x)} \left[\frac{1}{2}(F_\lambda^2(x,\cdot))''(v)\right] d\sigma_x^{g_0}(x)\,,$$

et fixons-nous un ouvert de carte admissible Ω dans M, sur lequel on considère deux champs de vecteurs X_1, $X_2 \in \Gamma(T\Omega)$ orthonormés pour g_0. Définissons ensuite le champ de vecteurs paramétré $X : \mathbb{R}\times\Omega \to T\Omega$ par $X(\theta,x) \overset{\text{déf}}{=} \cos\theta X_1(x) + \sin\theta X_2(x)$, $\forall (\theta,x) \in \mathbb{R}\times\Omega$, puis $\gamma_x(\lambda,\theta) \overset{\text{déf}}{=} F_\lambda(x,X(\theta,x))$ pour tout $\lambda \in\,]-a,a[$.

En vertu de la proposition IV.2.6.a), nous avons alors pour $x \in \Omega$:

$$\mathcal{L}_\lambda(x) = \int_0^{2\pi} (\gamma_x(\lambda,\theta))^2\, d\theta - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\gamma_x(\lambda,\theta)\right)^2 d\theta\,.$$

D'où en dérivant en $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}(x) &= \int_0^{2\pi} 2\gamma_x(0,\theta)\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}\gamma_x(\lambda,\theta)\, d\theta\\ &\quad - \int_0^{2\pi} 2\frac{\partial}{\partial\theta}\gamma_x(0,\theta)\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}\frac{\partial}{\partial\theta}\gamma_x(\lambda,\theta)\, d\theta\,,\end{aligned}$$

c'est-à-dire , puisque $\gamma_x(0,\theta) = 1, \forall\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}(x) &= 2\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}\gamma_x(\lambda,\theta)\, d\theta\\ &= 2\int_{S_x^0(M)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}(x,v)\, d\sigma_x^{g_0}(v)\,.\end{aligned}$$

Comme Ω est arbitraire, il vient :

$$\forall x \in M,\ \frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}(x) = 2\int_{S_x^0(M)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}(x,v)\, d\sigma_x^{g_0}(v)\,.$$

Par conséquent (corollaire IV.2.5) :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{d\lambda}_{\big|\lambda=0} |\omega_\lambda|(S^\lambda(M)) &= \int_M \frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial \lambda}_{\big|\lambda=0}(x)\,\mathrm{dvol}_0(x) \\ &= 2\int_{S^0(M)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda}_{\big|\lambda=0} d|\omega_0|\,, \end{aligned}$$

ce qui entraîne (g_0 étant hyperbolique) d'après le théorème V.2.3 :

$$0 = \frac{dh}{d\lambda}(0)\,. \qquad \blacksquare$$

PERSPECTIVES

Il ne s'agit pas de donner ici une conclusion au travail qui précède — beaucoup s'en faut —, mais plutôt de voir en celui-ci une source de nouvelles pistes à creuser dans le domaine encore trop peu exploré de la géométrie finslérienne.

En effet, plusieurs questions surgissent naturellement et tout d'abord celles relatives à la situation en rang 1 (la plus délicate), telles que par exemple :

• Que peut-on dire de l'entropie *volumique* après normalisation par le volume finslérien d'une part et le volume de Liouville d'autre part ? Il devrait être assez facile de montrer dans les deux cas qu'elle admet déjà un minimum global en s'inspirant de la méthode de calibration développée dans [B-C-G 2].

• Soit, sur une variété compacte M, une métrique riemannienne g_0 à courbure sectionnelle strictement négative telle que, pour *toutes* ses perturbations à travers des métriques de Finsler strictement convexes sur M normalisées par le volume de Liouville, elle est un point critique de l'entropie topologique. Peut-on dire que la mesure de Bowen-Margulis associée à g_0 est égale à sa mesure de Liouville normalisée ? Et en projection sur M ? (Cette question nous a été posée par F. Ledrappier.)

Par ailleurs, en ce qui concerne le rang ≥ 2, on peut se demander :

• Quel est le minimum (s'il existe !) de l'entropie volumique dans l'ensemble de *toutes* les métriques de Finsler (et pas seulement G-invariantes) ?

• Qu'en est-t-il de l'entropie volumique lorsqu'on normalise avec la *mesure de Liouville*, celle-ci étant à définir pour une métrique finslérienne quelconque “en passant convenablement à la limite” la mesure de Liouville associée à une métrique de Finsler C^∞ et strictement convexe ? (D'après une suggestion de Y. Colin de Verdière.)

Enfin, il serait intéressant de considérer le problème de l'entropie minimale dans un cadre plus vaste que celui des métriques de Finsler, en essayant de l'appliquer à des lagrangiens (ou hamiltoniens) assez généraux ou encore aux espaces de longueurs.

BIBLIOGRAPHIE

[A] Anosov D.V. — *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, American Mathematical Society, 1969.

[Ab-Pa] Abate M., Patrizio G. — *Finsler Metrics. A Global Approach*, Springer-Verlag, 1994.

[Ab-Ma] Abraham R., Marsden J.E. — *Foundations of mechanics*, Benjamin-Cummings Publishing Comp., Inc., 1978.

[B-C-G 1] Besson G., Courtois G., Gallot S. — *Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques*, Invent. Math. **103** (n^o 2) (1991), 417–445.

[B-C-G 2] Besson G., Courtois G., Gallot S. — *Volumes, entropies et rigidités des espaces symétriques de courbure strictement négative*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (n^o 1) (1994), 81–84.

[B-C-G 3] Besson G., Courtois G., Gallot S. — *Entropies et produits d'espaces symétriques*, (en préparation).

[Be] Besse A.L. — *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer-Verlag, 1978.

[B-G-S] Ballmann W., Gromov M., Schroeder V. — *Manifolds of nonpositive curvature*, Birkhaüser, 1985.

[Bo 1] Bowen R. — *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 401–414.

[Bo 2] Bowen R. — *Periodic orbits for hyperbolic flows*, Amer. Jour. Math. **94** (1972), 1–30.

[Bo-Fe] Bonnesen T., Fenchel W. — *Konvexe Körper*, Chelsea, 1948.

[Bo-Ru] Bowen R., Ruelle D. — *The ergodic theory of axiom A flows*, Invent. Math. **29** (1975), 181–202.

[Bou] Bourbaki N. — *Espaces vectoriels topologiques, Chap. I et II*, Hermann, 1966.

[Bri] Brillouin L. — *Science and information theory*, Academic Press, Inc., 1956.

[Ch-Eb] Cheeger J., Ebin D.G.. — *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Publishing Comp., 1975.

[Di] Dieudonné J. — *Éléments d'Analyse, Tome 4*, Gauthier-Villars, 1971.

[Din] Dinaburg E.I. — *On the relations among various entropy characteristics of dynamical systems*, Math. U.S.S.R. Isv. **5** (1971), 337–378.

[Eb] Eberlein P. — *When is a geodesic flow of Anosov type?*, J. Differential Geom. **8** (1973), 437–463.

[Eg] Egloff D. — *Some new developments in Finsler geometry*, thèse de l'Université de Fribourg, 1995.

[Fou 1] Foulon P. — *Nouveaux invariants géométriques des systèmes dynamiques du second ordre. Application à l'étude du comportement ergodique*, thèse d'État, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1986.

[Fou 2] Foulon P. — *Géométrie des équations différentielles du second ordre*, Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique **45** (n^o 1) (1986), 1–28.

[Gro 1] Gromov M. — *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. I.H.E.S. **56** (1981), 213–307.

[Gro 2] Gromov M. — *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **18** (1983), 1–47.

[Hel] Helgason S. — *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, Inc., 1978.

[Kat] Katok A. — *Entropy and closed geodesics*, Erg. Th. & Dyn. Syst. **2** (1982), 339–367.

[K-K-W] KATOK A., KNIEPER G., WEISS H. — *Formulas for the derivative and critical points of the topological entropy for Anosov and geodesic flows*, Comm. Math. Phys. **138** (n° 1) (1991), 19–31.

[Kli] KLINGENBERG W. — *Riemann Geometry*, De Gruyter, 1982.

[L-M-M] DE LA LLAVE R., MARCO J.M., MORIYON R. — *Canonical perturbation theory of Anosov systems and regularity results for Livsic cohomology equation*, Ann. Math. **123** (1986), 537–611.

[Man] MANNING A. — *Topological entropy for geodesic flow*, Ann. Math. **110** (1979), 567–573.

[Pla] PLANCHE P. — *Géométrie de Finsler sur les espaces symétriques*, thèse de l'Université de Genève, 1995.

[Po] POLLICOTT M. — *Derivatives of topological entropy for Anosov and geodesic flows*, J. Differential Geom. **39** (n° 3) (1994), 457–489.

[Ro] ROBERT G. — *Invariants topologiques et géométriques reliés aux longueurs des géodésiques et aux sections harmoniques de fibrés*, thèse de l'Université de Grenoble, 1994.

[Run] RUND H. — *The differential geometry of Finsler spaces*, Springer-Verlag, 1959.

[Sch] SCHWARTZ L. — *Analyse III. Calcul Intégral*, Hermann, 1993.

[Smo] SMORODINSKY M. — *Ergodic theory, Entropy*, Springer-Verlag, 1971.

[Spi] SPIVAK M. — *Differential Geometry, vol. II*, Publish or Perish, 1979.

[Szle] SZLENK W. — *An introduction to the theory of smooth dynamical systems*, Wiley-Interscience Publication, 1984.

[Wal] WALTER P. — *Ergodic theory. Introductory lectures*, Springer-Verlag, 1975.

[W-S] WEAVER W., SHANNON C. — *Théorie mathématique de la communication*, C.E.P.L., 1975.

[Ya-Ya] YAGLOM A.M., YAGLOM I.M. — *Probability and information*, D. Reidel Publishing Comp., 1983.

– ◊ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(17 septembre 1996)