Remerciements

Je remercie tout d'abord M. Zaidenberg pour sa confiance, sa patience et son soutien pendant ces années; il m'a fait partager son savoir mathématique très large ainsi que ses intuitions et ses questionnements ce qui m'a permis, finalement, de trouver ma voie. De plus je remercie MM. Kaliman et Zaidenberg pour m'avoir associé à la rédaction de l'article qui figure dans cette thèse, ce fut, je crois, une collaboration très fructueuse.
Je tiens à remercier M. Daigle pour la très grande attention avec laquelle il a lu cette thèse et pour les remarques très pertinentes qu'il m'a communiquées. M[me] Cassou-Noguès m'a fait l'honneur d'être à la fois rapporteur et membre de mon jury de thèse, je l'en remercie doublement. M. Miyanishi a également lu mon travail et ces observations m'ont été utiles, je suis très honoré qu'il participe au jury. M[me] Lejeune-Jalabert et M. Bertin sont aussi membres de mon jury de thèse et je leur en suis très reconnaissant.

Merci également à tout le personnel de l'Institut Fourier pour son efficacité et sa gentillesse, et plus spécialement à Arlette pour sa disponibilité et sa bonne humeur permanentes.

Je tiens à saluer aussi mes amis et néanmoins collègues de l'Institut Fourier: Xavier Martin pour les 11287 invitations à la désormais rituelle "pause-clope" mais aussi, dans la catégorie fumeurs du bureau 307, Julien Maubon, Valentin Savin et Michel Courtieu; les déjà docteurs, Ariane Mézard, Nicolas Ressayre, Michel Imbert, Freddy Bouchet et Stéphane Pin; les footballeurs du mercredi, Laurent Bonavero, Luc Hillairet, Vincent Bayle, Erwann Aubry; les fumeuses(?) Sophie Térouanne, Hélène Berger et Guillemette Reviron; les "Condillac à partir sans eux ils nous rejoindront", Matthieu Romagny, Costia.tex Vernicos.ps, Pierre-Emmanuel Chaput, Salomon Sambou, Laurent Chaumard ...et enfin, seul dans sa catégorie, le spécialiste des proverbes italiens, Paolo Bellingeri.
Je pense aussi à ceux qui m'ont un peu fait oublier les maths pendant ces années, les *Nantais* et le *groupe* Grenoblois se reconnaîtront.

Je remercie de tout cœur ma famille d'être présente aujourd'hui comme elle l'était hier, je suis particulièrement fier de leur montrer mon travail.

Enfin je pense à Marine qui m'a encouragé, soutenu, supporté et même poussé, elle est pour beaucoup dans l'achèvement de cette thèse et je lui redis mille fois merci.

Table des matières

Introduction

Le domaine des automorphismes de l'anneau de polynômes $A[y_1, \cdots, y_n]$ est très vaste et recelle de nombreux problèmes ouverts d'autant plus intéressants que leur énoncé paraît simple et naturel. Certains d'entre eux reposent sur la reconnaissance des polynômes qui ont la propriété d'être une composante de l'un de ces automorphismes, on les appelle des *variables*; c'est-à-dire que les variables sont, à automorphisme près, équivalentes à y_1.
Au-delà de cette définition, comment peut-on reconnaître ces variables et en construire de nouvelles?
On tente d'apporter des réponses à cette question dans cette thèse qui se divise en trois parties: les deux premières visent à décrire les automorphismes (I) et variables (II) sous certains points de vue et à en définir de nouveaux en généralisant la construction de Nagata, la troisième partie est un article en anglais co-écrit avec MM. Kaliman et Zaidenberg (prépublié à l'Institut Fourier) qui s'attaque à la rectifiabilité (ou linéarisabilité) des hypersurfaces acycliques de $\mathbb{C}^4$ d'équation $f(x,y)u + g(x,y,z)$. Bien que la conclusion espérée de cet article n'ait pas été atteinte, il constitue un champ d'application très intéressant des résultats obtenus sur les variables.

On profite de cette introduction pour donner, d'abord, un résumé de l'article que l'on décompose, ici, en quatre théorèmes principaux: 0.4, 0.6, 0.9 et 0.10, puis, en partant de ce dernier théorème, on présente les principaux résultats obtenus par l'auteur.

L'article s'intitule "Simple birational extensions of the polynomial ring $\mathbb{C}^{[3]}$" soit "Extensions birationnelles simples de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}^{[3]}$" ce qui désigne l'algèbre $\mathbb{C}[x,y,z][\frac{g}{f}]$ des fonctions régulières sur l'hypersurface de $\mathbb{C}^4_{x,y,z,u}$ d'équation $f(x,y,z)u + g(x,y,z) = 0$. On se restreindra en réalité au cas particuliers où $f(x,y,z) = f(x,y,0) \in \mathbb{C}[x,y]$.

Avant de s'y intéresser rappelons que, dans [KZ99], S. Kaliman et M. Zaidenberg ont amélioré un résultat de Russell-Sathaye (Th.5.6) en montrant qu'une hypersurface lisse et irréductible X de $\mathbb{C}^3$ d'équation $p = f(x,y)u + g(x,y) = 0$ est rectifiable (i.e. p est une variable) et donc isomorphe à $\mathbb{C}^2$ si et seulement si elle est acyclique c'est-à-dire que son homologie réduite est nulle: $\tilde{H}_*(X) := \tilde{H}_*(X;\mathbb{Z}) = 0$.
On sait déjà qu'un résultat semblable n'est plus vrai dans $\mathbb{C}^4$ puisque la cubique de Russell: $x^2u + x + y^2 + z^3 \subset \mathbb{C}^4$ est un $\mathbb{C}^3$ exotique c'est-à-dire qu'elle est difféomorphe à $\mathbb{R}^6$ mais pas isomorphe à $\mathbb{C}^3$.

Dans un premier temps cet article étudie donc les hypersurfaces lisses, irréductibles et acycliques de $\mathbb{C}^4$ définies par:

$$X = p^{-1}(0) \quad \text{où} \quad p = f(x,y)u + g(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z,u]$$

et donne une description précise de la forme de p lorsque X est isomorphe à $\mathbb{C}^3$ ou, au contraire, un $\mathbb{C}^3$ exotique.

En fait, la philosophie de l'article est de donner, à chaque pas, les résultats les plus généraux possibles qui s'appliquent, bien sûr, au cas particulier où $X : f(x,y)u + g(x,y,z) = 0$.

Les premiers résultats concernent l'acyclicité de certaines modifications affines.

On rappelle qu'un espace topologique E est dit *acyclique* si son homologie réduite est nulle: $\tilde{H}_i(E;\mathbb{Z}) = 0,\ \forall i \in \mathbb{N}$.
Avant de "resserrer" les hypothèses sur ce qui nous intéresse on se place d'abord dans une situation générale:

Hypothèses et définitions 0.1. — Soit Y une variété affine, complexe, irréductible et réduite, $A := \mathbb{C}[Y]$ l'algèbre des fonctions régulières sur Y, $I \subseteq A$ un idéal non-trivial et $f \in I \setminus \{0\}$. *La modification affine de la variété Y le long du diviseur $D_f = f^*(0)$ de centre I* est la variété affine $X = \operatorname{spec} \mathrm{A}'$, où $A' := A[I/f] = \{a' = a_k/f^k | a_k \in I^k\} \subseteq \operatorname{Frac} A$. L'inclusion $A \hookrightarrow A'$ correspond à un morphisme birationnel $\sigma : X \to Y$ de diviseur exceptionnel $E = \sigma^{-1}(D) = (f \circ \sigma)^{-1}(0) \subseteq X$, où $D := \operatorname{supp} D_f$. La restriction $\sigma|(X \backslash E) : X \backslash E \to Y \backslash D$ est un isomorphisme.

Soit $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ resp. $E = \bigcup_{i=1}^{n'} E_i$ la décomposition en composantes irréductibles qu'on suppose être des diviseurs de Cartier. On appelle *matrice de multiplicité* de σ la matrice

$$M_\sigma = (m_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n'; \mathbb{Z}) \ \text{ où } \ \sigma^*(D_i) = \sum_{j=1}^{n'} m_{ij} E_j, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Remarquons que, clairement, $m_{ij} > 0 \Leftrightarrow \sigma(E_j) \subset D_i$.

Proposition 0.2. — *Avec les hypothèses et définitions 0.1, si X et Y sont lisses et A' et A factoriels (en particulier si X et Y sont acycliques) alors*

(a) $n = n'$ et la matrice M_σ est unimodulaire.

Si de plus, M_σ est une matrice triangulaire supérieure unipotente alors *(b)* $\sigma_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ *est un isomorphisme.*

(c) X *est contractible si et seulement si* Y *l'est.*

(d) ([CD94]) Dans ce dernier cas X *et* Y *sont difféomorphes à* $\mathbb{R}^{2m}$ *lorsque* $m := \dim_{\mathbb{C}} Y \geq 3$.

HYPOTHÈSES ET DÉFINITIONS 0.3. — En plus de 0.1, on suppose que X et Y sont lisses, de dimension 3 et que la modification affine est *simple* c'est-à-dire que $I = (f, g)$ est un idéal de A de hauteur 2, on dit aussi que $A' = A[g/f]$ est une *extension birationnelle simple* de l'anneau A. On suppose aussi que $D := D_f^{\mathrm{red}}$ est un *diviseur cylindrique* i.e. $D \simeq \Gamma \times \mathbb{C}$ (où Γ est une courbe affine) .

Remarquons que X peut être vue comme l'hypersurface de $Y \times \mathbb{C}_u$ donnée par l'équation $fu + g = 0$ avec $\sigma = \mathrm{pr}_1|_X : X \to Y$. Le diviseur exceptionnel $E = \sigma^{-1}(D) = \{f = 0\} \subset X$ est cylindrique: $E = C \times \mathbb{C}$ où $C = V(I) = D_f^{\mathrm{red}} \cap D_g^{\mathrm{red}}$. La surface D étant aussi cylindrique, on peut relier σ à la projection canonique $\pi : \Gamma \times \mathbb{C} \to \Gamma$ restreinte à C grâce au diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} E \simeq C \times \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & C \arrow[d, "\pi"] \\ D \simeq \Gamma \times \mathbb{C} \arrow[r] & \Gamma \end{tikzcd} \quad . \tag{0.0.1}$$

Soit $C = \bigcup_{i=1}^{n'} C_i$ resp. $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_i$ la décomposition en irréductibles de C resp. Γ. Les composantes irréductibles du diviseur E resp. D sont $E_i \simeq C_i \times \mathbb{C}$, resp. $D_j \simeq \Gamma_j \times \mathbb{C}$. Remarquons que $m_{ij} \geq 1$ si et seulement si $C_j \subset D_i^{\mathrm{red}}$, et $m_{ij} = 1$ si et seulement si les surfaces D_i^{red} et D_g^{red} de Y se rencontrent transversalement aux points généraux de la courbe C_j.

Le théorème 0.4 plus bas nécessite des définitions appropriées où l'on suppose que $A = \mathbb{C}[Y]$ est factoriel, $n = n'$ et la matrice de multiplicité M_σ est unimodulaire (voir Prop.0.2 et Th.0.4(δ)):

Remarquons que pour tout $j = 1, \ldots, n$ il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\pi(C_j) \subseteq \Gamma_i$, et cet indice $i = i(j)$ est unique à moins que $\pi|_{C_j} = \mathrm{const}$. Une composante irréductible C_j de C est dite *verticale* si $\pi|_{C_j} = \mathrm{const}$ (i.e. $\deg(\pi|_{C_j}) = 0$), ainsi les composantes verticales de C sont disjointes et isomorphes à $\mathbb{C}$. L'unicité de l'indice $i = i(j)$ pour une composante non-verticale C_j et l'unimodularité de M_σ impliquent que la $j$ème colonne de la matrice M_σ est le $i$ème vecteur de le base standard $(\bar{e}_1, \ldots \bar{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et deux composantes non-verticales différentes C_j et $C_{j'}$ de C se projettent dans deux composantes différentes Γ_i resp. $\Gamma_{i'}$ de Γ. Ainsi, quitte à réordonner, on suppose que $C_1, \dots, C_k$ sont les composantes non-verticales de C et $\pi(C_i) \subseteq \Gamma_i$, $i = 1, \dots, k$. Alors on a

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} I_k & | & B \\ --- & | & --- \\ 0 & | & B' \end{pmatrix}$$

Les composantes irréductibles $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ sont aussi dites *non-verticales* et $\Gamma_{k+1}, \dots, \Gamma_n$ *verticales.* Parmi les composantes non-verticales C_i resp. Γ_i on distingue celles où $\deg(\pi|_{C_j}) = 1$ qu'on appelle *horizontales* et celles où $\deg(\pi|_{C_j}) \geq 2$ qu'on appelle *inclinées.* On réordonne encore pour obtenir que $C_1, \dots, C_h$ resp. $\Gamma_1, \dots, \Gamma_h$ sont les composantes horizontales de C resp. Γ et $C_{h+1}, \dots, C_k$ resp. $\Gamma_{h+1}, \dots, \Gamma_k$ les inclinées. On note C_{horiz} la réunion de toutes les composantes horizontales de C. De même on définie $C_{\text{non-horiz}}$, C_{vert}, etc. Ainsi $f = \prod_{j=1}^n f_j^{a_j} = f_{\text{horiz}} \cdot f_{\text{non-horiz}}$ où $f_j^*(0) = D_j^{\text{red}}$ et

$$\Gamma_{\text{horiz}} = \bigcup_{i=1}^{h} \Gamma_i, \quad \Gamma_{\text{inclin}} = \bigcup_{i=h+1}^{k} \Gamma_i, \quad \Gamma_{\text{vert}} = \bigcup_{i=k+1}^{n} \Gamma_i, \quad C_{\text{horiz}} = \bigcup_{i=1}^{h} C_i, \quad \text{etc.}$$

Les théorèmes 2.11 et 2.27 de l'article, référencés A.2.11 et A.2.27, donnent le théorème suivant:

Théorème 0.4 (Th.A.2.11 et A.2.27). — *Soit X et Y comme dans 0.3 avec Y acyclique. Si X est acyclique alors*

(α) $\pi|(C_{\text{horiz}} \setminus C_{\text{non-horiz}}) : C_{\text{horiz}} \setminus C_{\text{non-horiz}} \to \Gamma_{\text{horiz}} \setminus \Gamma_{\text{non-horiz}}$ *est un isomorphisme.*

(β) *Les composantes inclinées $C_{h+1}, \dots, C_k$ et $\Gamma_{h+1}, \dots, \Gamma_k$ sont isolées (i.e. des composantes connexes de C et de Γ) et homéomorphes à $\mathbb{C}$.*

(γ) $f_{\text{non-horiz}} = q \circ f_{h+1}$ *avec $q \in \mathbb{C}[z]$, et chaque composante non-horizontale de Γ est homéomorphe à la droite affine $\mathbb{C}$. Autrement dit,*

$$f_{\text{non-horiz}} = c \cdot \prod_{i=h+1}^{n} (f_{h+1} - \lambda_i)^{a_i} \qquad (c \in \mathbb{C}^*, \ \lambda_{h+1} = 0)$$

avec $\pi(f_{h+1}^{-1}(\lambda_i)) = \Gamma_i$ homéomorphe à $\mathbb{C}$ $(i = h+1, \dots, n)$.

(δ) *Quitte à réordonner, la matrice de multiplicité est de la forme:*

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} I_h & | & 0 & | & B_0 \\ --- & | & --- & | & --- \\ 0 & | & I_{k-h} & | & 0 \\ --- & | & --- & | & --- \\ 0 & | & 0 & | & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

La réciproque est vraie si on suppose en plus que

(ϵ) $Y = Z \times \mathbb{C}$ *est un cylindre au-dessus d'une surface affine (lisse et acyclique)* Z *avec* $\Gamma \subseteq Z$.

C'est-à-dire que sous les hypothèses (α), (β),(γ), (δ) *et* (ϵ) *l'hypersurface* X *est acyclique.*

Quelques mots d'une preuve très longue. — Le preuve repose sur une étude poussée du morphisme de groupes d'homologie induit par π:

$$\pi_* : H_1(C^*) \longrightarrow H_1(\Gamma^*)$$

où Γ^* est Γ débarrassée des ces "mauvais points" et $C^* = \pi^{-1}(\Gamma^*)$. On obtient des informations sur ce morphisme grâce:

- à l'isomorphisme induit par σ:

  $$\sigma_* : H_*(X^* \setminus E^*) \xrightarrow{\sim} H_*(Y^* \setminus D^*)$$

  où $E^* := \sigma^{-1}(C^*) = C^* \times \mathbb{C}$ et $D^* = \Gamma^* \times \mathbb{C}$,

- à une version non classique de la dualité d'Alexander sur les sphères d'homologie que deviennent les variétés acycliques X et Y lorsqu'on les compactifie par un point.

- à l'isomorphisme de Thom,

- au diagramme commutatif 0.0.1.

$\square$

Corollaire 0.5. — *Supposons que* X *et* Y *sont comme dans 0.3 et acycliques. Alors d'après la Prop.0.2* $\sigma_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ *est un isomorphisme et donc:*

X est difféomorphe à $\mathbb{R}^6 \Leftrightarrow Y$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^6$.

On s'intéresse maintenant plus précisément aux modifications affines simples de $\mathbb{C}^3$ le long d'un cylindre c'est-à-dire au cas particulier des Hyp. et Déf.0.3 où $Y = \mathbb{C}^3_{x,y,z}$ et

$$\mathbb{C}^4_{x,y,z,u} \supset X : p = f(x,y)u + g(x,y,z) = 0$$

comme annoncé plus haut.
En utilisant le théorème 0.4 et l'invariant de Derksen on obtient:

Théorème 0.6. — *Soit X une hypersurface lisse de $\mathbb{C}^4$ d'équation $p = f(x,y)u + g(x,y,z) = 0$. Alors,*

X est acyclique $\Leftrightarrow$ X est difféomorphe à $\mathbb{R}^6$ $\Leftrightarrow$ Les conditions (α), (β), (γ) et (δ) du Th.0.4 sont vérifiées.

Et dans ce cas, $X \simeq \mathbb{C}^3$ si et seulement si les courbes $C_{\text{non-horiz}}$ et $\Gamma_{\text{non-horiz}}$ (voir Hyp. et Déf.0.3) sont lisses.

Autrement dit on montre que, lorsque X est difféomorphe à $\mathbb{R}^6$, X est un $\mathbb{C}^3$ exotique si et seulement si, l'une des courbes $C_{\text{non-horiz}}$ ou $\Gamma_{\text{non-horiz}}$ est singulière.
On constate au passage que cela ne peut pas arriver si p est aussi linéaire en z ce qui permet de montrer:

Théorème 0.7 (A.3.24). — *Soit X une hypersurface lisse et irréductible de $\mathbb{C}^4$ d'équation*

$$p = f(x,y)u + g(x,y)z + h(x,y) = 0.$$

L'hypersurface X est isomorphe à $\mathbb{C}^3$ et même rectifiable (Th.0.9 et 0.10(jjj) plus bas) si et seulement si elle est acyclique.

Ce résultat constitue un analogue en dimension supérieure du théorème de Kaliman-Zaidenberg cité au début de cette introduction.

Idée de la preuve du théorème 0.6. — Remarquons d'abord que p peut s'écrire

$$p = f_{\text{horiz}} f_{\text{non-horiz}} u + b_0 + b_1 z + f^{\text{red}}_{\text{horiz}} h_0 \tag{0.0.2}$$

avec b_0, $b_1 \in \mathbb{C}[x,y]$ et $h_0 \in (z^2) \subseteq \mathbb{C}[x,y,z]$, où $b_1|_{\Gamma_{\text{horiz}} \setminus \Gamma_{\text{non-horiz}}}$ ne s'annule pas.

On va utiliser l'invariant de Derksen:

$$\mathrm{Dk}\,(A') = \mathbb{C}\Big[\bigcup_{\partial\in\mathrm{LND}(A')} A'^{\partial}\Big] \subset A'$$

et pour montrer que $A' = \mathbb{C}[X]$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}^{[3]}$ on prouve que

$$\mathrm{Dk}\,(A') \neq A' \quad \big(\text{ alors que } \mathrm{Dk}\,(\mathbb{C}^{[3]}) = \mathbb{C}^{[3]}\big)$$

En fait on montre que

$$\mathrm{Dk}_{\mathrm{gr}}\,(\hat{A}') \subset \hat{A}'_{\leq 0} := \bigoplus_{t\leq 0} A'_t/A'_{t-} \subset \hat{A}'$$

où $\{A'_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est la filtration ascendante définie par une fonction degré d sur A' avec

$$\begin{aligned} A'_t &:= \{a\in A'/d(a)\leq t\} \\ A'_{t-} &:= \{a\in A'/d(a)< t\}. \end{aligned}$$

Il se trouve que si d est une fonction degré définie sur $A' = \mathbb{C}^{[n]}/(p)$, et que la partie d-homogène principale $\hat{p}$ de p est irréductible alors

$$\hat{A}' := \bigoplus_{t\in\mathbb{R}} A'_t/A'_{t-} \subset \hat{A}' \simeq \mathbb{C}^{[n]}/(\hat{p}) \quad .$$

On suppose d'abord que $\Gamma_{\mathrm{non-horiz}}$ est singulière. On sait (Th.0.4(γ)) que $f_{\mathrm{non-horiz}} = p\circ f_{h+1}$ où $f_{h+1}^{-1}(0)$ est homéomorphe à $\mathbb{C}$ donc d'après le théorème de Lin-Zaidenberg ([LZ89]), à un automorphisme de $\mathbb{C}[x,y]$ près on peut supposer que $f_{h+1} = x^k - y^l$ avec $k,l\geq 2$ et $(k,l)=1$. Et comme les autres fibres $x^k - y^l = c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ne sont pas homéomorphes à $\mathbb{C}$ on déduit que $h+1=n$ i.e. $f_{\mathrm{non-horiz}} = f_n^m = (x^k-y^l)^m$ et on trouve que $\Gamma_n = f_n^{-1}(0)$ ne peut pas être vertical; finalement on obtient

$$p = (x^k-y^l)^m f_{\mathrm{horiz}}(x,y)u + z^e + g_0(x,y,z) + (x^k-y^l)h_0(x,y,z)$$

où $k,l,e\geq 2$, $(k,\,l)=1$, $f_{\mathrm{horiz}}\in\mathbb{C}[x,y]$ et $f_{\mathrm{horiz}}(0,0)=1$, g_0, $h_0\in\mathbb{C}[x,y,z]$, $\deg_z g_0 < e$ et $z^e|h_0$. Puis on choisit une fonction degré pondérée d sur $A'=\mathbb{C}[X]$ définie par

$$d_x = -lN,\; d_y = -kN,\; d_z = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad d_u = klmN + e\sqrt{2}\,,$$

de telle sorte que

$$f_n = f_{h+1} = x^k - y^l \qquad \text{et} \qquad \hat{p} := (x^k - y^l)^m u + z^e$$

soit d-quasihomogènes et que $\hat{p}$ soit la partie d-principale de p .

En vue de trouver des générateurs homogènes du noyau $\hat{A}'^{\hat{\partial}}$ d'une dérivation quelconque non nulle $\hat{\partial}$ de

$$\hat{A}' = \mathbb{C}[x, y, z, u] \big/ (\hat{p}) = \mathbb{C}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{u}]$$

on calcule tous les éléments irréductibles d-homogènes de $\hat{A}'$:

$$\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z},\ \hat{u},\ \lambda\hat{x}^k + \mu\hat{y}^l, \qquad \text{où} \qquad \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}^* .$$

De plus un résultat de Makar-Limanov montre que $\lambda\hat{x}^k + \mu\hat{y}^l \in A'^{\hat{\partial}} \Rightarrow \hat{x},\ \hat{y} \in A'^{\hat{\partial}}$ ce qui nous amène à la conclusion que $A'^{\hat{\partial}}$ est engendré par l'un des couples

$$(\hat{x},\ \hat{y}), \quad (\hat{x},\ \hat{u}), \quad (\hat{y},\ \hat{u}), \quad (\hat{x},\ \hat{z}), \quad (\hat{y},\ \hat{z}), \quad (\hat{z},\ \hat{u}) .$$

Mais on a la relation $\hat{p} = \hat{z}^e + (\hat{x}^k + \hat{y}^l)^m \hat{u} = 0$ et on sait que $A'^{\hat{\partial}}$ est factoriellement clos d'où $\hat{z} \in A'^{\hat{\partial}} \Rightarrow \hat{\partial} = 0$. Des trois couples restants seuls $\mathbb{C}[\hat{x}, \hat{y}] = A'^{\hat{\partial}}$ est possible car les deux autres s'éliminent en raisonnant sur la fonction degré induite par $\hat{\partial}$: $\deg_{\hat{\partial}}(\hat{a}) = \min\{n \in \mathbb{N} / \hat{\partial}^{n+1}(\hat{a}) = 0\}$.
Ainsi,

$$\mathrm{Dk}_{\mathrm{gr}}\,(\hat{A}') \subset \mathbb{C}[\hat{x}, \hat{y}] \subset \hat{A}'_{\leq 0}.$$

On traite le cas où c'est $C_{\mathrm{non-horiz}}$ (et donc C_{inclin}) qui est singulière (sans que $\Gamma_{\mathrm{non-horiz}}$ ne le soit) de la même manière. Au cours de cette démonstration on démontre un lemme intéressant en lui-même:

Lemme 0.8 (Lem.A.3.19). — *Soit* $B = \mathbb{C}[S]$ *où* $S := \{x^m + y^k + z^l = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ *et* $k,\ l,\ m \geq 2$, $\gcd(k, l) = 1$, *et soit* $\partial_1 \in \mathrm{LND}\,(B)$. *Alors* $b|_S \notin \ker \partial_1$ *lorsque* $b \in \mathbb{C}[y,\ z] \setminus \mathbb{C}$.

□

On a donc maintenant une description assez précise des plongements de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^4$ dont l'image est $X : p = f(x, y)u + g(x, y, z) = 0$. Naturellement, en vue de la conjecture de plongement de Abhyankar-Sathaye (Conj.4.7 et 5.3) la question qui vient à l'esprit est: X est-elle rectifiable? Autrement dit, p est-il une variable?
Cette question s'est avérée trop difficile et on n'a pu y répondre que partiellement, cependant un pas important dans l'étude de ces hypersurfaces isomorphes à $\mathbb{C}^3$ est le théorème suivant:

Théorème 0.9 (Th.A.3.21). — *Soit X une hypersurface de $\mathbb{C}^4$ d'équation*

$$p = f(x,y)u + g(x,y,z) = 0 \qquad (f \in \mathbb{C}^{[2]} \backslash \{0\}\,, g \in \mathbb{C}^{[3]})\,.$$

Si X est isomorphe à $\mathbb{C}^3$ alors, à un automorphisme de $\mathbb{C}[x,y]$ près (naturellement étendu à $\mathbb{C}[x,y,z,u]$), p est une variable x-résiduelle c'est-à-dire que, $\forall x = x_0 \in \mathbb{C}$ fixé, $p(x_0,y,z,u)$ est une variable de $\mathbb{C}[y,z,u]$.

Démonstration abrégée. — D'après Th.0.4(γ) et Th.0.6,

$$f_{\text{non-horiz}} = q \circ f_{h+1} \text{ où } f_{h+1}^{-1}(0) \simeq \mathbb{C},$$

donc d'après le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki, à un automorphisme de $\mathbb{C}[x,y]$ près, $f_{\text{non-horiz}} = q(x)$. De plus, en regardant l'égalité 0.0.2 on constate que $\forall x_0 \notin q^{-1}(0)$,

$$p(x_0,y,z,u) = q(x_0)f_{\text{horiz}}(x_0,y)u + b_0(x_0,y) + b_1(x_0,y)z + f_{\text{horiz}}^{\text{red}}(x_0,y)h_0(x_0,y,z)$$

et on reconnaît là une y-variable (voir la variable 8.1.1). Lorsque $x_0 \in q^{-1}(0)$, d'après Th.0.4(β) et Th.0.6,

$$\mathbb{C} \simeq C_i : p(x_0,y,z,u) = b_0(x_0,y) + b_1(x_0,y)z + f_{\text{horiz}}^{\text{red}}(x_0,y)h_0(x_0,y,z) = 0$$

et le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki conclut encore. □

Outre la conjecture de plongement d'Abhyankar-Sathaye, on a donc encore une autre raison de penser que p est une variable et même une x-variable, c'est-à-dire une composante d'un automorphisme qui fixe x. En effet (section 7) on constate qu'une x-variable est une variable x-résiduelle et on ne connaît pas de cas où la réciproque n'est pas vraie.
En application des parties I et II de cette thèse on trouve le théorème suivant:

Théorème 0.10 (Th.9.2). — *Soit $p = p(x,y,z,u) = f(x,y)u + g(x,y,z) \in \mathbb{C}[x][y,z,u]$.*
Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) p est une variable x-résiduelle,

(ii) p est un plan x-résiduel i.e. $\mathbb{C}[y,z,u]/(p(x_0,y,z,u)) \simeq \mathbb{C}^{[2]}$, $\forall x_0 \in \mathbb{C}$ *fixé,*

(iii) p est un x-plan i.e. $\mathbb{C}[x][y,z,u]/(p(x,y,z,u)) \simeq \mathbb{C}[x]^{[2]}$,

(iii') p définit une fibration en x-plans i.e. $p - c(x)$ est un x-plan, $\forall c(x) \in \mathbb{C}[x]$ fixé,

(iv) *p est 1-stablement équivalent à une x-variable i.e. il existe un x-automorphisme α de $\mathbb{C}[x][y,z,u,v]$ tel que $\alpha\big((p,v)\big)=(y,v)$.*

Et lorsqu'elles sont vérifiées,

(j) *Si $f\notin\mathbb{C}[x]$ alors p est de la forme:*

$$p=q[r\tilde{f}u+\tilde{g}_0y^2+\tilde{g}_1z+\tilde{f}_{\mathrm{red}}\tilde{g}_2z^2]+a_0+a_1y \qquad (0.0.3)$$

avec

- $q,\ r,\ a_0,a_1\in\mathbb{C}[x],\ \tilde{f},\ \tilde{g}_0,\tilde{g}_1\in\mathbb{C}[x,y],\tilde{g}_2\in\mathbb{C}[x,y,z]$,
- $\tilde{f}^{-1}(0)\cap\tilde{g}_1^{-1}(0)$ *est un sous-ensemble fini de* $q^{-1}(0)\times\mathbb{C}_y$, *et*
- $\forall x_0\in r^{-1}(0),\ q(x_0)\tilde{f}(x_0,y)\in\mathbb{C}$

et si $\tilde{f}^{-1}(0)\cap\tilde{g}_1^{-1}(0)=\emptyset$ alors p est une x-variable.
De plus, si $\tilde{g}_1\in\mathbb{C}[x]$ et $\tilde{g}_2z^2=\hat{g}_2(x,y,\tilde{g}_{1(x)}z)\in\mathbb{C}[x][y,\tilde{g}_1z]$ alors p est aussi une x-variable.

(jj) *Si $f\in\mathbb{C}[x]$ alors p est une x-variable.*

(jjj) *Si $\deg_z(g)\leq 1$ alors p est une x-variable.*

(j^4) *Si g est de la forme $g(x,y,z)=g_0(x,y)+\check{g}_2(x,y,z)z^2$ alors p est une x-variable.*

(j^5) *p est une x-variable de $\mathbb{C}(x)[y,z,u]$ ($\mathbb{C}(x)=\mathrm{Frac}\big(\mathbb{C}[x]\big)$).*

Signalons que le polynôme $w=y+x[xz+y(yu+z^2)]$ vérifie les conditions (i), (ii), (iii), (iii'), (iv) et (j^5) de ce théorème pourtant on ne sait toujours pas si c'est une x-variable ce qui fait de lui un contre-exemple éventuel à de nombreuses conjectures. Notons que $y+x^3[xz+y(yu+z^2)]$ est, lui, une x-variable.

Enfin on s'est aperçu que les techniques utilisées pour montrer le théorème 0.10 peuvent aussi montrer la généralisation suivante d'un théorème de D. Wright (Th.5.7):

Théorème 0.11 (Th.9.3). — *Soit $p=p(x,y,z,u)=f(x,y,z)u^m+g(x,y,z)\in\mathbb{C}[x][y,z,u]$ où $m\geq 2$.*
Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *p est un x-plan,*

(ii) p est une variable x-résiduelle,

(iii) p est une x-variable.

Le principal résultat, hormis le théorème indispensable d'Abhyankar-Moh-Suzuki, sur lequel reposent les théorèmes 0.10 et 0.11 est le théorème suivant:

THÉORÈME 0.12 (Th.8.7). — *Soit $p = p(x, y, z, u)$ une x-variable de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[x][y, z, u]$ et $a = a(x) \in \mathbb{C}[x]$.*
Les conditions suivantes sont équivalentes:

(ii') *$p(x_0, y, z, 0)$ est une variable de $\mathbb{C}[y, z]$, $\forall x_0 \in a^{-1}(0)$;*

(iii) *$p(x, y, z, a(x)u)$ est une x-variable de $\mathbb{C}[x][y, z, u]$;*

(iv) *$p(x, y, z, a(x)u)$ est une variable x-résiduelle de $\mathbb{C}[x][y, z, u]$.*

La démonstration de ce théorème repose sur l'idée suivante:

$$p(x, y, z, a(x)u) = \sigma(p)$$

où σ est simplement défini par $\sigma(u) = a(x)u$ c'est-à-dire que σ peut être vu non seulement comme un endomorphisme de $\mathbb{C}[x][u]$ ou même de $\mathbb{C}[x, y, z][u]$ mais aussi comme un automorphisme de $\mathbb{C}(x)[u]$ ou encore de $\mathbb{C}(x)[y, z][u]$. Comme p est une x-variable, il existe des x-automorphismes α tels que $p = \alpha(y)$. Le but est de trouver , parmi ces automorphismes, ceux que l'on peut conjuguer avec σ de telle sorte que $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ reste un automorphisme de $\mathbb{C}[x][y, z, u]$. Ainsi on aura

$$p(x, y, z, a(x)u) = \sigma\alpha\sigma^{-1}(y) = \sigma\alpha(y) = \sigma(p).$$

En fait il s'avère suffisant de montrer que $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ est un endomorphisme car le jacobien de $\sigma\alpha\sigma^{-1}$, $\mathrm{j}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) = \mathrm{j}(\alpha)$ est inversible et $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ a donc un inverse formel qui coïncide avec $\sigma^{-1}\alpha^{-1}\sigma$ ce qui implique qu'il est polynomial. Le premier exemple de ce type de construction est l'automorphisme de Nagata (sous-section 1.2). En toute généralité on trouve le théorème suivant (où $\mathbb{C}[x]$ est remplacé par un anneau commutatif unitaire quelconque):

THÉORÈME 0.13 (Th.2.7). — *Soit l'anneau de polynômes $A^{[m+n]} = A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$ où $m \geq 0$ et $n \geq 1$. Soit σ un endomorphisme tel que*

$$\sigma \in \mathrm{End}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \cap \mathrm{Aut}(\,\mathrm{Quot}(A)[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \subset \mathrm{End}_{A[\bar{y}_{\mathbf{m}}]}(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}][\bar{z}_{\mathbf{n}}])$$

et soit $k = k(\sigma)$ le plus petit entier positif tel que

$$\sigma^{-1}\, \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \in \mathrm{End}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \ \textit{(voir Lem.2.6)}.$$

Si $\alpha \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}])$ est un automorphisme tel que $\alpha_{|A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]}$ et σ commutent[1] *modulo $\left(\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\right)$ alors $\sigma\alpha\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}])$.*

En outre pour montrer le point (iv) du théorème 0.10 on utilise un cas particulier d'un isomorphisme général intéressant qui semble être présent dans beaucoup d'exemples:

$$\begin{array}{cccc} \phi \ : & A[y]\big/\big(y - q(p(y))\big) & \xrightarrow{\sim} & A[y]\big/\big(y - p(q(y))\big) \\ & y & \longmapsto & q(y) \\ & p(y) & \longleftarrow & y \end{array} \tag{0.0.4}$$

où $p(y)$ et $q(y)$ sont des polynômes quelconques de $A[y]$. De plus, $y - p(q(y))$ et $y - q(p(y))$ sont 1-stablement équivalents.

Enfin, comme on l'a vu, on se demande si les variables x-résiduelles sont toujours des x-variables. En utilisant les résultats sur les dérivations localement nilpotentes de Daigle et Freudenburg on montre:

THÉORÈME 0.14 (Th.7.6). — *Le polynôme $p = p(\bar{x}_{\mathbf{k}}, y, z)$ de $\mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y, z]$ est une $\bar{x}$-variable $\mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y, z]$ si et seulement si c'est une variable $\bar{x}$-résiduelle, i.e. $p(\bar{x}_0, y, z)$ est une variable de $\mathbb{C}[y, z]$ pour tout $\bar{x} = \bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k$ fixé.*

Dans l'optique de ce problème il apparaît normal de se demander ce qu'il en est des automorphismes résiduels. En élargissant la notion de *résiduel* aux anneaux quelconques en remplaçant "pour tout $x = x_0 \in \mathbb{C}$ fixé" par " $\mathrm{mod}\, \mathcal{M}$, pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A" on trouve:

PROPOSITION 0.15 (Prop.2.15). — *Soit A un anneau dont le radical de Jacobson est réduit au nilradical i.e. $\bigcap_{\mathcal{M}\max} \mathcal{M} = \sqrt{0_A}$ et $\alpha \in \mathrm{End}(A^{[n]})$. Alors α est un automorphisme si et seulement si c'est un automorphisme résiduel.*

[1] C'est-à-dire $\alpha\sigma(p(\bar{z})) \equiv \sigma\alpha(p(\bar{z})) \bmod \left(\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\right) \ \forall p \in A[\bar{z}]$.

Notations et définitions

L'anneau commutatif unitaire A

Dans cette thèse tous les anneaux sont supposés commutatifs unitaires. On note $A^\star \subset A$ l'ensemble des éléments inversibles de A et $A^\times \subset A$, l'ensemble des éléments qui ne divisent pas 0. On note $\mathrm{Quot}(A) := (A^\times)^{-1}\cdot A$ l'anneau quotient total de A et si A est un anneau intègre (i.e. si $A^\times = A \setminus \{0\}$) on note $\mathrm{Frac}(A) := \mathrm{Quot}(A)$ le corps des fractions de A. On appelle *nilradical* et on note $\sqrt{0}$ ou $\sqrt{0_A}$ l'idéal des éléments nilpotents de A. Si $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de A, on notera $\big(\mathcal{E}\big)$ l'idéal de A engendré par $\mathcal{E}$ et, si $\mathcal{E} = \{a_1, \cdots, a_k\}$, plus rapidement: $\big(a_1, \cdots, a_n\big) := \big(\mathcal{E}\big)$.

On placera souvent le préfixe "A-" devant certains mots (A-automorphismes, A-variables...) pour dire "de A-algèbre" ou bien "qui fixe A". Lorsque $A = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$ on dira simplement $\bar{x}$-automorphismes, $\bar{x}$-variables etc.

L'anneau de polynômes $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$

Si A est un anneau et n est un entier naturel non nul on note $A[y_1, y_2, \cdots, y_n]$ l'algèbre des polynômes $p = p(y_1, \cdots, y_n)$ en les n indéterminées $y_1, y_2, , \cdots, y_{n-1}$ et y_n, à coefficients dans A. On note $\mathbf{n} := \{1, 2, \cdots, n\}$ (si $n = 0$ alors $\mathbf{n} = \emptyset$). On utilise aussi la notation $\bar{y}_{\mathbf{n}}$ en lieu et place de $y_1, y_2, \cdots, y_n$ de sorte que $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}] = A[y_1, y_2, \cdots, y_n]$. On notera aussi souvent $A^{[n]} := A[y_1, y_2, \cdots, y_n]$. La notation $A[\,.\,]$ peut aussi être utilisée dans un sens plus large. En effet soit R un anneau, A un sous-anneau de R et $p_1, \cdots, p_n \in R$, on note $A[p_1, \cdots, p_n]$ le sous-anneau de R engendré par A et $p_1, \cdots, p_n$ autrement dit les polynômes en $p_1, \cdots, p_n$ à coefficients dans A.

Les matrices à coefficients dans A

$\mathrm{M}(n, A)$ est l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans A, identifiée à l'algèbre des endomorphismes linéaires de A^n.
De même on note $\mathrm{Aff}(n, A)$ l'algèbre des endomorphismes affines de A^n, identifiée de manière naturelle à $\mathrm{M}(n, A) \times A^n$. On peut voir $\mathrm{M}(n, A)$ comme une sous-algèbre de $\mathrm{Aff}(n, A)$, en considérant que $\mathrm{M}(n, A) = \mathrm{M}(n, A) \times \{\bar{0}_{\mathbf{n}}\} \subset \mathrm{Aff}(n, A)$.

Les endomorphismes de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$

$\mathrm{End}_A(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}])$, aussi noté plus simplement $\mathrm{End}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}])$ quand il n'y a pas d'ambiguïté, est l'ensemble des endomorphismes de A-algèbre de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$. La composition $\alpha \circ \beta =: \alpha\beta$ lui donne une structure de semi-groupe unitaire où $1_{\mathrm{End}(A^{[n]})}$ est l'identité de $A^{[n]}$, $\mathrm{Id}_{A^{[n]}}$ que l'on notera aussi $\mathrm{id}_{[n]}$. Remarquons qu'un endomorphisme α de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ est déterminé par les images $\alpha(y_1), \cdots, \alpha(y_n)$ des n indéterminées. En effet $\forall p(y_1, \cdots, y_n) \in A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$, $\alpha(p) = p\big(\alpha(y_1), \cdots, \alpha(y_n)\big)$. On a donc une bijection naturelle entre $\mathrm{End}(A^{[n]})$ et $\big(A^{[n]}\big)^n$ ce qui permet de définir

une addition: $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathrm{End}(A^{[n]})$ on a

$$(\alpha + \beta)(y_i) = \alpha(y_i) + \beta(y_i), \quad \forall i \in \mathbf{n}.$$

une opération (à droite) de A sur $\mathrm{End}(A^{[n]})$: $\forall a \in A$ on a

$$\alpha a(y_i) = \alpha(a y_i) = a\alpha(y_i), \quad \forall i \in \mathbf{n}.$$

$\mathrm{End}(A^{[n]})$ a donc une structure de A-module. Cependant remarquons que pour un polynôme $p \in A^{[n]}$ en général on a

$$(\alpha + \beta)(p) \neq \alpha(p) + \beta(p) \text{ et } (\alpha a)(p) \neq \alpha(ap)$$

et de ce fait pour un endomorphisme γ on a en général

$$(\alpha + \beta)\gamma \neq \alpha\gamma + \beta\gamma \text{ et } (\alpha a)\beta \neq \alpha(\beta a).$$

Dans la suite on identifie a à l'automorphisme $\mathrm{Id}_{A^{[n]}}a$, ainsi $(\alpha a)\beta = \alpha a \beta$.

Si l'on note $\mathbb{A}^n_A := \mathrm{Spec}(A^{[n]})$ l'espace affine au-dessus de A, chaque endomorphisme α de $A^{[n]}$ induit un endomorphisme de A-schéma $\Psi(\alpha) : \mathbb{A}^n_A \to \mathbb{A}^n_A$. En fait l'application Ψ est un anti-isomorphisme de semi-groupe (i.e. $\Psi(\alpha\beta) = \Psi(\beta)\Psi(\alpha)$).
Chaque endomorphisme α de $A^{[n]}$ induit aussi une application polynomiale α_* de A^n dans lui-même définie par :

$$\begin{array}{cccl} \alpha_* : & A^n & \longrightarrow & A^n \\ & (b_1, \cdots, b_n) & \longmapsto & \alpha_*(b_1, \cdots, b_n) = (\alpha(y_1)(b_1, \cdots, b_n), \cdots, \alpha(y_n)(b_1, \cdots, b_n)) \end{array}$$

On a encore $(\alpha\beta)_* = \beta_*\alpha_*$ mais l'application $\alpha \mapsto \alpha_*$ n'est pas forcément bijective. En réalité elle est toujours surjective et peut être injective lorsque par exemple A est un anneau intègre infini.

Automorphismes (linéaires, affines, polynomiaux...)

$\mathrm{GL}(n,A)$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}(n,A)$ ou groupe (des automorphismes) linéaire(s) de A^n.
De même $\mathrm{GA}(n,A) \subset \mathrm{Aff}(n,A)$ est le groupe (des automorphismes) affine(s)de A^n.

Le sous-ensemble de $\mathrm{End}_A(A[\overline{y}_{\mathbf{n}}])$, $\mathrm{Aut}_A(A[\overline{y}_{\mathbf{n}}])$, aussi noté plus simplement $\mathrm{Aut}(A[\overline{y}_{\mathbf{n}}])$ quand il n'y a pas d'ambiguïté, est le groupe des (A-)automorphismes algébriques de $A[\overline{y}_{\mathbf{n}}]$, dits aussi automorphismes polynomiaux.

Degré et valence

En général quand on parlera de *degré d'un polynôme* p noté $\deg(p)$ on entendra le degré usuel et le *degré d'un endomorphisme* $\alpha \in \mathrm{End}(A[\overline{y}_{\mathbf{n}}])$ aussi noté $\deg(\alpha)$ est défini par:

$$\deg(\alpha) := \max_{i \in \mathbf{n}} \deg\big(\big(\alpha(y_i)\big)\big) \tag{0.0.5}$$

La *valence* est définie de la même manière, en remplaçant max par min dans 0.0.5.

Matrice Jacobienne, jacobien...

On notera det l'application "déterminant" :

$$\begin{array}{rccl} \det : & \mathrm{M}(n,A) & \longrightarrow & A \\ & M & \longmapsto & \det(M) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} M_{1\sigma(1)} \cdots M_{n\sigma(n)} \end{array}$$

On notera Jac l'application "matrice Jacobienne" :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Jac} : & \mathrm{End}(A[\overline{y}_{\mathbf{n}}]) & \longrightarrow & \mathrm{M}(n, A[\overline{y}_{\mathbf{n}}]) \\ & \alpha & \longmapsto & \mathrm{Jac}(\alpha) = \left(\frac{\partial(\alpha(y_i))}{\partial y_j}\right)_{1 \le i,j \le n} \end{array}$$

En remplaçant A par $A[\overline{y}_{\mathbf{n}}]$ dans la définition du déterminant, et en composant ces deux applications on obtient l'application "jacobien" notée $\mathrm{j} := \det \circ \mathrm{Jac}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{j} : & \mathrm{End}(A[\overline{y}_{\mathbf{n}}]) & \longrightarrow & A[\overline{y}_{\mathbf{n}}] \\ & \alpha & \longmapsto & \mathrm{j}(\alpha) = \det\big(\mathrm{Jac}(\alpha)\big) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\alpha(y_1))}{\partial y_1} & . & . & . & \frac{\partial(\alpha(y_1))}{\partial y_n} \\ . & & & & . \\ . & & \frac{\partial(\alpha(y_i))}{\partial y_j} & & . \\ . & & & & . \\ \frac{\partial(\alpha(y_n))}{\partial y_1} & . & . & . & \frac{\partial(\alpha(y_n))}{\partial y_n} \end{vmatrix} \end{array}$$

En vue de la bijection naturelle entre $\mathrm{End}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}])$ et $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]^n$ on définit de même le jacobien $\mathrm{j}(p_1, \cdots, p_n)$ d'un n-uplet de polynômes $(p_1, \cdots, p_n)$:

$$\mathrm{j}(p_1, \cdots, p_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} & . & . & . & \frac{\partial p_n}{\partial y_n} \\ . & & & & . \\ . & & \frac{\partial p_i}{\partial y_j} & & . \\ . & & & & . \\ \frac{\partial p_n}{\partial y_1} & . & . & . & \frac{\partial p_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} .$$

Pour alléger un peu l'écriture on utilisera aussi la notation:

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{j}_{\bar{0}} : & \mathrm{End}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) & \longrightarrow & A \\ & \alpha & \longmapsto & \mathrm{j}_{\bar{0}}(\alpha) := \mathrm{j}(\alpha)(\bar{0}) . \end{array}$$

Pour deux endomorphismes α et β, la règle de la chaîne donne,

$$\mathrm{Jac}(\alpha\beta) = \alpha\big(\,\mathrm{Jac}(\beta)\big) \cdot \mathrm{Jac}(\alpha)$$

où $\alpha(M) = (\alpha(m_{ij}))$ pour une matrice $M = (m_{ij})$ à coefficients dans $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$. De même on a

$$\mathrm{j}(\alpha\beta) \;=\; \alpha\big(\,\mathrm{j}(\beta)\big) \cdot \mathrm{j}(\alpha) . \tag{0.0.6}$$

Remarquons que si α et β sont des endomorphismes dont le jacobien est constant (i.e. $\mathrm{j}(\alpha)$, $\mathrm{j}(\beta) \in A$) on a:

$$\mathrm{j}(\alpha\beta) = \mathrm{j}(\beta\alpha) = \mathrm{j}(\beta) \cdot \mathrm{j}(\alpha) . \tag{0.0.7}$$

Et en particulier si α est inversible

$$\mathrm{j}(\alpha^{-1}) = \mathrm{j}(\alpha)^{-1}$$

Idéaux de A, congruence modulo I

Soit I un idéal de A. Par abus de notation on utilisera l'expression "*modulo I*" noté "mod I" pour deux choses un peu différentes:
Si a et b sont dans A on dit que $a \equiv b \bmod I$ si $a - b \in I$.
On notera aussi $a \bmod I$ l'élément de A/I image de a par la surjection $A \to A/I$. Ainsi $a \equiv b \bmod I$ équivaut à $a \bmod I = b \bmod I \in A/I$.
La surjection

$$A[\bar{y}] \longrightarrow A/I\,[\bar{y}]$$

a pour noyau l'idéal de $A[\bar{y}]$ engendré par I, c'est-à-dire $I[\bar{y}]$ aussi noté $I \cdot A[\bar{y}]$. On identifiera donc

$$A/_{I}[\bar{y}] = A[\bar{y}]/_{I[\bar{y}]}$$

On utilisera aussi la notation $\bmod I$ au lieu de $\bmod I[\bar{y}]$.
Enfin on dira que

$$\alpha \equiv \beta \bmod I \text{ ou } \alpha \bmod I = \beta \bmod I \in \operatorname{End}_{A/_{I}}(A/_{I}[\bar{y}])$$

pour deux endomorphismes $\alpha, \beta \in \operatorname{End}_A(A[\bar{y}])$ si $\alpha(p) \equiv \beta(p) \bmod I\ \forall p \in A[\bar{y}]$. Bien évidemment, si α est un automorphisme de $A[\bar{y}]$ alors $\alpha \bmod I$ est encore un automorphisme de $A/_{I}[\bar{y}]$.

Dérivations, LND

Une dérivation est un morphisme de groupe d'un anneau R dans lui même $\partial : R \to R$ qui vérifie la règle de Leibniz : $\partial(ab) = a\partial b + b\partial a,\ \forall a,\ b \in R$. On dit qu'une dérivation ∂ est localement nilpotente si $\forall a \in R\ \exists n_a \in \mathbb{N}$ tel que $\partial^{n_a}(a) = \partial \circ \partial \cdots \partial(a) = 0$. On emploie parfois le terme LND (Locally Nilpotent Derivation) pour parler des dérivations localement nilpotentes. Le noyau de ∂ est un sous-anneau de R noté R^{∂}, on vérifie que, si R est intègre, il est factoriellement clos i.e. $ab \in R^{\partial} \setminus \{0\} \Rightarrow a,\ b \in R^{\partial}$. Souvent, les anneaux seront des A-algèbres et les dérivations des morphismes de A-modules, autrement dit on demandera que $\partial(A) = \{0\}$. Lorsque $R = A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ la donnée des images des coordonnées par une dérivation D, $D(y_1), \cdots, D(y_n)$ suffit pour définir D, en effet on a

$$D\big(p(y_1, \cdots, y_n)\big) = \frac{\partial p}{\partial y_1} D(y_1) + \cdots + \frac{\partial p}{\partial y_n} D(y_n).$$

Première partie

Automorphismes

Dans beaucoup de domaines mathématiques on a la notion d'*isomorphisme*. En général on ne s'intéresse pas aux isomorphismes en tant que tels mais seulement à leur existence ou non entre deux ensembles donnés. En réalité s'y intéresser revient à s'intéresser aux automorphismes:

Si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux isomorphismes entre A et B,

$$\phi_1,\ \phi_2 : A \longrightarrow B$$

alors

$$\phi_2 = \phi_1\alpha = \beta\phi_1 \quad \text{ avec } \alpha = \phi_1^{-1}\phi_2 \in \mathrm{Aut}(A) \simeq \mathrm{Aut}(B) \ni \phi_2\phi_1^{-1} = \beta.$$

Signalons ici que le livre de A. van den Essen [vdE00] constitue désormais une référence incontournable dans le sujet des automorphismes polynomiaux en général et de la conjecture Jacobienne en particulier, l'auteur de cette thèse n'en a malheureusement appris l'existence qu'après l'avoir rédigée.

Les endomorphismes surjectifs sont des automorphismes

Avant de donner des exemples on peut “simplifier” la définition d’un automorphisme grâce au résultat bien connu (voir par exemple [Nag72]):

Proposition 0.16. — *Un endomorphisme de* $A^{[n]} = A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ *est un automorphisme si et seulement s’il est surjectif. Autrement dit pour un endomorphisme* α *on a* $\alpha \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}])$ *si et seulement si* $A[y_1, \cdots, y_n] = \alpha(A[y_1, \cdots, y_n]) = A[\alpha(y_1), \cdots, \alpha(y_n)]$.

Démonstration. — Soit α un endomorphisme surjectif de $A^{[n]}$. Il existe alors un endomorphisme α_{-1} de $A^{[n]}$ tel que $\alpha\alpha_{-1} = \mathrm{id}_{[n]} = \mathrm{Id}_{A^{[n]}}$. Soit $p = p(\bar{y}) \in \mathrm{Ker}\,\alpha$.
Quitte à se restreindre au sous-anneau de A engendré par 1 et les coefficients des polynômes p, $\alpha(y_1), \cdots, \alpha(y_n)$, $\alpha_{-1}(y_1), \cdots, \alpha_{-1}(y_n)$ on peut considérer que A est Nœthérien.
Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite croissante d’idéaux se stabilise:

$$\mathrm{Ker}\,\alpha \subset \mathrm{Ker}\,\alpha^2 \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}\,\alpha^N = \mathrm{Ker}\,\alpha^{N+1} = \ldots$$

Or, par hypothèse,

$$\alpha_{-1}^N(p) \in \mathrm{Ker}\,\alpha^{N+1} = \mathrm{Ker}\,\alpha^N$$

donc

$$0 = \alpha^N\big(\alpha_{-1}^N(p)\big) = p$$

On a montré que α est injectif donc α est bien un automorphisme de $A^{[n]}$, d’inverse $\alpha^{-1} = \alpha_{-1}$. □

Les n-uplets de polynômes $(q_1, \cdots, q_n)$ qui ont cette propriété que $A[y_1, \cdots, y_n] = A[q_1, \cdots, q_n]$ sont dits *système de coordonnées* (ce sont les équivalents des bases en algèbre linéaire). Ainsi on a une correspondance biunivoque entre les automorphismes de $A^{[n]}$ et ses systèmes de coordonnées. Ce résultat sera utilisé à plusieurs reprises dans la thèse sans forcément être mentionner, la correspondance avec les systèmes de coordonnées pouvant être pensée comme une deuxième définition des automorphismes.

1. Quelques exemples d’automorphismes

Cette manière un peu différente de voir les automorphismes ne nous fournit cependant pas d’idée pour en construire.

La composition donne à $\mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}])$ une structure de groupe ce qui permettra avec quelques exemples basiques d'automorphismes d'en définir de nouveaux, de plus en plus complexes.
Ajoutons ici que même si on ne s'intéresse qu'aux automorphismes de $k[\bar{z}]$ où k est un corps on doit quand même étudier les automorphismes de $A[\bar{y}]$. En effet si $\bar{z} = \bar{x}, \bar{y}$ les $k[\bar{x}]$-automorphismes de $k[\bar{x}][\bar{y}]$ sont des cas particuliers de k-automorphismes de $k[\bar{z}]$. Ces $k[\bar{x}]$-automorphismes permettent (en changeant les regroupements $\bar{x}, \bar{y}$) de construire des k-automorphismes plus complexes.

1.1. Les automorphismes modérés

1.1.1. Les automorphismes affines.

On a vu dans la section précédente que les endomorphismes de $A^{[n]}$ induisent des applications polynomiales de A^n dans lui-même. Un cas particulier de telles applications sont bien sûr les transformations affines de A^n. On a vu aussi que l'application $\alpha \mapsto \alpha_*$ fournit un anti-isomorphisme de semi-groupe entre les endomorphismes de degré au plus un de $A^{[n]}$ et $\mathrm{Aff}(A, n)$. Si $T = (M, \bar{a}) \in \mathrm{Aff}(A, n) = \mathrm{M}(n, A) \times A^n$ est une transformation affine de A^n on notera $T^* \in \mathrm{End}(A^{[n]})$ l'endomorphisme associé de sorte que:

$$\begin{array}{rlcll} \mathrm{Aff}(A,n) & = \mathrm{M}(n,A) \times A^n & \to & \mathrm{End}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) & \\ T & = (M = (m_{ij}), \bar{a}_{\mathbf{n}}) & \mapsto & T^* : A[\bar{y}_{\mathbf{n}}] & \to A[\bar{y}_{\mathbf{n}}] \\ & & & y_i & \mapsto m_{i1}y_1 + \cdots + m_{in}y_n + a_i \end{array}$$

Ainsi pour tout $T \in \mathrm{Aff}(n, A)$ resp. $\alpha \in \mathrm{End}(A^{[n]})$ de degré au plus un, on aura $T^*_* = T$ resp. $\alpha^*_* = \alpha$. On emploiera la notation $\mathrm{Aff}^*(n, A)$ pour désigner l'image par * de $\mathrm{Aff}(n, A)$, idem pour $\mathrm{M}^*(n, A)$, $\mathrm{GL}^*(n, A)$, $\mathrm{GA}^*(n, A)$. Par abus de langage on utilisera les adjectifs *linéaire* et *affine* également pour les endomorphismes de $A^{[n]}$.

On vient donc de trouver deux sous-groupes du groupe des automorphismes ($\lhd$ signifie sous-groupe):

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{GL}^*(n,A) & \lhd & \mathrm{GA}^*(n,A) & \lhd & \mathrm{Aut}(A^{[n]}) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathrm{M}^*(n,A) & \subset & \mathrm{Aff}^*(n,A) & \subset & \mathrm{End}(A^{[n]}) \end{array}$$

Remarquons que si $\alpha \in \mathrm{M}^*(n, A)$ alors $\mathrm{Jac}(\alpha)$ et α_* coïncident (en considérant que $\mathrm{M}(n, A)$ est une sous-algèbre de $\mathrm{M}(n, A^{[n]})$).

De même que le groupe affine $\mathrm{GA}(n, A)$ est engendré par le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, A)$ et le groupe des translations, le sous-groupe affine $\mathrm{GA}^*(n, A)$ de

$\mathrm{Aut}(A^{[n]})$ est engendré par les automorphismes linéaires $\mathrm{GL}^*(n,A)$ et les translations: $\{\alpha \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}])/\ \alpha(y_i) = y_i + b_i,\ b_i \in A\}$.

Bien évidemment il en existe d'autres.

1.1.2. Les automorphismes élémentaires.

Pour les trouver on a, en quelque sorte, généralisé la notion de translation : prenons un polynôme $p \in A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ tel que p ne dépend pas d'une certaine indéterminée y_{i_0} (on note parfois $p(y_1,\cdots,\check{y}_{i_0},\cdots,y_n) \in A[y_1,\cdots,\check{y}_{i_0},\cdots,y_n]$). On définit un automorphisme α par

$$\begin{cases} \alpha(y_i) &= y_i, \quad \forall i \neq i_0 \\ \alpha(y_{i_0}) &= y_{i_0} + p(y_1,\cdots,\check{y}_{i_0},\cdots,y_n) \end{cases}$$

En remplaçant p par $-p$ on trouve l'inverse de α, α^{-1}. Ces automorphismes sont dits *élémentaires*. En composant les automorphismes élémentaires avec les automorphismes linéaires on obtient le sous-groupe des automorphismes *modérés*.

Remarque. — Lorsque l'on s'intéresse à la structure du groupe des automorphismes modérés, on préfère le définir en remplaçant les automorphismes élémentaires par les automorphismes triangulaires:

$$\forall i = 1,\cdots,n, \qquad \alpha(y_i) = u_i y_i + p_i(y_{i+1},\cdots,y_n), \quad u_i \in A^\star$$

Cela donne évidemment le même sous-groupe.

1.1.3. Y en a-t-il d'autres?.

En général, il est facile de construire des automorphismes qui ne sont pas modérés. En effet, soit $A = \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$ et $\alpha \in \mathrm{End}(A[y])$ définie par $\alpha(y) = y + 2y^2$. On a $\alpha\alpha(y) = \alpha(y+2y^2) = y + 2y^2 + 2(y+2y^2)^2 = y$ donc $\alpha \in \mathrm{Aut}(A[y])$ alors que clairement α n'est pas modéré. On voit ici que c'est parce que 2 est nilpotent dans A qu'on a cet automorphisme non modéré.

Il semble donc que le fait que A puisse avoir des éléments nilpotents complique encore les choses. En fait cela les complique de la manière la plus "simple" possible comme le montre le résultat bien connu (voir [Nag72]) :

Lemme 1.1. — *Soit $\alpha \in \mathrm{End}(A[\bar{y}])$. Alors α est un automorphisme si et seulement si α mod$\sqrt{0}$ est un automorphisme de $A/_{\sqrt{0}}\ [\bar{y}]$.*

Démonstration. — Si $\alpha \bmod \sqrt{0_A} \in \mathrm{Aut}{A}\!\!\diagup\!\!{\sqrt{0_A}}[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ alors

$$A[\bar{y}] = \alpha(A[\bar{y}]) + \sqrt{0_A}[\bar{y}]$$

et donc, $\forall i \in \mathbf{n}$, $y_i = \alpha(p_i) + q_i(\bar{y})$ avec $p_i \in A[\bar{y}]$ et $q_i \in \sqrt{0_A}[\bar{y}]$.
Soit N l'idéal de A engendré par les coefficients des q_i, N est nilpotent et on a:

$$\begin{aligned}
A[\bar{y}] &= \alpha(A[\bar{y}]) + N \cdot A[\bar{y}] \\
&= \alpha(A[\bar{y}]) + N \cdot \big(\alpha(A[\bar{y}]) + N \cdot A[\bar{y}]\big) \\
&= \alpha(A[\bar{y}]) + N \cdot \alpha(A[\bar{y}]) + N^2 \cdot A[\bar{y}] \\
&= \alpha(A[\bar{y}]) + N^2 \cdot A[\bar{y}]
\end{aligned}$$

et, de même, $\forall k \geq 1$,

$$A[\bar{y}] = \alpha(A[\bar{y}]) + N^k \cdot A[\bar{y}]$$

Puisque N est nilpotent on a

$$A[\bar{y}] = \alpha(A[\bar{y}])$$

i.e. d'après la proposition 0.16 α est un automorphisme de $A[\bar{y}]$. □

Ainsi dans les démonstrations, on pourra souvent se ramener au cas où l'anneau des coefficients A est sans nilpotents ou *réduit.*

Lorsque A est réduit, le problème de savoir s'il existe des automorphismes non modérés est plus intéressant. Le cas $n = 1$ est sans difficultés puisque si A est réduit alors $\mathrm{Aut}(A[y]) = \{\alpha \in \mathrm{End}(A[y]) /\ \alpha(y) = uy + b$ où $u \in A^\star,\ b \in A\}$ et donc en général on a une correspondance bi-univoque:

$$\mathrm{Aut}(A[y]) \xleftrightarrow{1.1} uy + b + r(y) \text{ où } u \in A^\star,\ b \in A \text{ et } r(y) \text{ nilpotent} \quad (1.1.1)$$

Dans le cas où $n = 2$ les choses sont loin d'être aussi évidentes cependant pour le cas où $A = K$ est un corps on a le résultat classique suivant:

Théorème 1.2 (Jung-van der Kulk). — *Soit K un corps. Les automorphismes de $K[y, z]$ sont modérés, c'est-à-dire qu'ils sont composés d'automorphismes affines et élémentaires.*

Jung ([Jun42]) l'a démontré dans le cas où le corps K est de caractéristique nulle et van der Kulk ([vdK53]) dans le cas général.

Il faut attendre Nagata ([Nag72]) pour obtenir plus d'information sur ce problème.

1.2. L'automorphisme de Nagata [Nag72]

1.2.1. Un automorphisme de $A[y,z]$ non modéré.

Tout d'abord on s'intéresse au cas où $n = 2$ mais A n'est pas un corps. Comme le remarque Nagata, le théorème de Jung-van der Kulk reste vrai lorsque A est non plus un corps mais seulement un anneau Artinien.

On suppose que A est un anneau intègre et qu'il existe un élément non nul $a \in A^{\times}$ qui n'est pas inversible. *L'automorphisme de Nagata*, noté γ_{N}, est l'automorphisme de $A[y,z]$ défini par[2]:

$$\begin{cases} \gamma_{\mathrm{N}}(y) &= y + a(az+y^2) \\ \gamma_{\mathrm{N}}(z) &= z - 2y(az+y^2) - a(az+y^2)^2 \end{cases}$$

On vérifie que l'inverse de γ_{N}, γ_{N}^{-1} est donné par

$$\begin{cases} \gamma_{\mathrm{N}}^{-1}(y) &= y - a(az+y^2) \\ \gamma_{\mathrm{N}}^{-1}(z) &= z + 2y(az+y^2) - a(az+y^2)^2 \end{cases}$$

Par un argument d'unicité de la décomposition de γ_{N} en tant qu'automorphisme de $\mathrm{Frac}(A)[y,z]$, Nagata montre (voir aussi [EV99]):

THÉORÈME 1.3. — *L'automorphisme de Nagata $\gamma_{\mathrm{N}} \in$Aut($A[y,z]$) n'est pas modéré.*

1.2.2. Un automorphisme de $K[x,y,z]$ non modéré?.

Le cas $n \geq 3$ n'est toujours pas résolu à ce jour, cependant Nagata fait la conjecture suivante:

CONJECTURE 1.4. — *Soit $A = K^{[1]} = K[x]$ avec K un corps et $a := x$. L'automorphisme de Nagata $\gamma_{\mathrm{N}} \in \mathrm{Aut}(K[x,y,z])$ n'est pas modéré en tant qu'automorphisme de $K[x,y,z]$ ($\gamma_{\mathrm{N}}(x) = x$).*

Quelques indices semblent confirmer son hypothèse (voir [Ale95]).

1.2.3. Une décomposition de l'automorphisme de Nagata.

Le théorème 1.3 et la conjecture 1.4 ci-dessus nous incitent donc à copier la construction de l'automorphisme de Nagata pour obtenir de nouveaux automorphismes.

[2] On a modifié la notation classique pour des raisons d'homogénéité avec ce qui suit.

La décomposition en automorphismes de $\mathrm{Frac}(A)[y,z]$ que Nagata en donne lui sert dans la preuve du Th.1.3 mais on préférera une autre décomposition :

$$\gamma_{\mathrm{N}} = \sigma\beta\alpha\beta^{-1}\sigma^{-1}$$

où

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha(y) & = & y+az\\ \alpha(z) & = & z\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl}\beta(y) & = & y\\ \beta(z) & = & z+y^2\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl}\sigma(y) & = & y\\ \sigma(z) & = & az\end{array}\right. \qquad (1.2.1)$$

On voit que l'automorphisme de Nagata est obtenu en conjuguant un automorphisme $\beta\alpha\beta^{-1}$ de $A[y,z]$ avec un automorphisme σ de $\mathrm{Frac}(A)[y,z]$.

Une autre technique permet de construire des automorphismes non modérés a priori, elle consiste à prendre les exponentiels de dérivations localement nilpotentes.

1.3. Exponentiels de LND et automorphismes stablement modérés

1.3.1. Exponentiels de LND.

Soit R un anneau contenant $\mathbb{Q}$ et ∂ une dérivation localement nilpotente de R. On appelle *exponentielle* de ∂ et on note e^{∂} l'automorphisme de R

$$\begin{array}{rrcl} e^{\partial}: & R & \longrightarrow & R \\ & a & \longmapsto & e^{\partial}(a) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i(a)}{i!} \end{array}$$

Remarquons que même si $\mathbb{Q} \not\subset R$ il se peut que $i!$ divise ∂^i et donc que e^{∂} soit bien définie.

On vérifie aisément que, si ∂_1 et ∂_2 sont deux dérivations localement nilpotentes de R qui commutent alors $\partial_1+\partial_2$ est encore une dérivation localement nilpotente et:

$$e^{\partial_1+\partial_2} = e^{\partial_1}e^{\partial_2} = e^{\partial_2}e^{\partial_1}$$

Ainsi $e^{\partial}e^{-\partial} = e^0 = \mathrm{Id}_R$ et e^{∂} est bien un automorphisme d'inverse $e^{-\partial}$. Remarquons que si $b \in \operatorname{Ker}\partial$ alors $b\cdot\partial\ \big(: p \mapsto b\cdot\partial(p)\big)$ est encore une dérivation localement nilpotente.

1.3.2. Quelques exemples.

Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire $R = A^{[n]} = A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$, on exige en plus que les dérivations soient des morphismes de A-module ce qui se traduit par $A \subset R^{\partial}$.

L'exemple le plus simple de dérivation localement nilpotente est la dérivée partielle par rapport à une indéterminée y_i: $\partial_{y_i} := \frac{\partial}{\partial y_i}$ que l'on peut aussi définir par $\partial_{y_i}(y_j) = \delta_{ij}$ [3]. L'exponentielle de cette dérivation est la translation: $e^{\partial_{y_i}}(y_j) = y_j + \delta_{ij}$.

Un autre exemple un peu plus compliqué consiste à prendre un polynôme $p \in A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ tel que p ne dépend pas d'une certaine indéterminée y_{i_0}, on définit ∂ par

$$\begin{cases} \partial(y_i) &= 0 \quad \forall i \neq i_0 \\ \partial(y_{i_0}) &= p(y_1, \cdots, \check{y}_{i_0}, \cdots, y_n) \end{cases}$$

Cette définition ressemble fortement à celle des automorphismes élémentaires de la sous-section 1.1.2 et c'est sans surprise qu'on constate que e^{∂} est effectivement un automorphisme élémentaire ($e^{\partial}(y_i) = y_i + \delta_{ii_0} p(y_1, \cdots, \check{y}_{i_0}, \cdots, y_n)$). Ces dérivations sont aussi dites *élémentaires*. De même on dira qu'une dérivation ∂ est *triangulaire* si $\partial(y_i) \in A[y_{i+1}, \cdots, y_n]$, $\forall i \in \mathbf{n}$ ($\partial(y_n) \in A$), en faisant la même analogie (ss-sec.1.1.2).
Remarquons que si ∂ est une dérivation localement nilpotente et α un automorphisme de $A^{[n]}$, on obtient une nouvelle dérivation localement nilpotente en conjuguant ∂ avec α:

$$\alpha \partial \alpha^{-1} \in \mathrm{LND}(A^{[n]}) \qquad \text{et} \qquad e^{\alpha \partial \alpha^{-1}} = \alpha e^{\partial} \alpha^{-1}.$$

En fait $\alpha \partial \alpha^{-1}$ peut-être vue comme étant la dérivation ∂ dans le système de coordonnées $\alpha^{-1}(\bar{y}) = (\alpha^{-1}(y_1), \cdots, \alpha^{-1}(y_n))$. S'il existe un automorphisme α de $A^{[n]}$ tel que $\alpha \partial \alpha^{-1}$ est triangulaire on dit que ∂ est *triangulable*, on dira que ∂ est *modérément triangulable* si α est modéré. Ainsi, si ∂ est modérément triangulable alors e^{∂} est modéré.

Soit A un anneau intègre de caractéristique différente de 2 qui possède un élément non nul non inversible: a. Soit ∂ une dérivation de $A[y, z]$ définie par:

$$\begin{cases} \partial(y) &= a \\ \partial(z) &= -2y \, . \end{cases}$$

On a bien une dérivation localement nilpotente car, $\partial^2(y) = \partial(a) = 0$ et $\partial^3(z) = \partial^2(-2y) = \partial(-2a) = 0$. En fait, à l'ordre des indéterminées y, z près c'est une dérivation triangulaire, i.e. $\pi \partial \pi$ est triangulaire où $\pi \in \mathrm{Aut}(A[y, z])$ est donné par $\pi(y) = \pi^{-1}(y) = z$. En résumé, ∂ est modérément triangulable.

On remarque que $\partial(\Delta) = 0$ où $\Delta = az + y^2$, ainsi la dérivation $\Delta \cdot \partial := (az + y^2) \cdot \partial$ est encore localement nilpotente comme on l'a vu dans ss-sec.1.3.1.

[3] δ_{ij} est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $i = j$ et 0 sinon.

On obtient:

$$\begin{cases} (\Delta\cdot\partial)(y) &= a(az+y^2) \\ (\Delta\cdot\partial)(z) &= -2y(az+y^2) \end{cases}$$

et $(\Delta\cdot\partial)^2(y)=0$, $(\Delta\cdot\partial)^3(z)=(\Delta\cdot\partial)^2(-2y(az+y^2))=(\Delta\cdot\partial)(-2a(az+y^2))=0$ d'où

$$\begin{cases} e^{\Delta\cdot\partial}(y) &= y+a(az+y^2) \\ e^{\Delta\cdot\partial}(z) &= z-2y(az+y^2)-a(az+y^2)^2. \end{cases}$$

On retrouve encore l'automorphisme de Nagata $\gamma_{\mathrm{N}}=e^{\Delta\cdot\partial}=e^{(az+y^2)\cdot\partial}$

1.3.3. L'automorphisme de Nagata est stablement modéré.

On a vu (Th.1.3) que l'automorphisme de Nagata n'est pas modéré, cependant, si on étend γ_{N} à un (u)-automorphisme $\tilde{\gamma}_{\mathrm{N}}$ de $A[u][y,z]$, M. Smith [Smi89] a montré qu'il était alors modéré. On dit d'un automorphisme $\alpha\in\mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}])$ qui a cette propriété (i.e. son extension $\tilde{\alpha}$ à $A[u][\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ en tant que u-automorphisme est modéré) qu'il est *stablement modéré* (*stably tame* en anglais). En fait M. Smith montre un résultat plus général:

Proposition 1.5 (Smith [Smi89]). — *Soit* $\partial\in LND(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}])$, $\Delta=\Delta(\bar{y})\in\mathrm{Ker}\,(\partial)$, $\gamma:=e^{\Delta\partial}$, $\tilde{\partial}$ *et* $\tilde{\gamma}$ *sont les extensions de* ∂ *et* γ *à* $A[u][\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ *et* $\tau\in\mathrm{Aut}_{A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}},u]))$ *donné par* $\tau(u)=u+\Delta$. *On a*

$$\tilde{\gamma}=e^{\Delta\tilde{\partial}}=e^{-u\tilde{\partial}}\tau e^{u\tilde{\partial}}\tau^{-1}(=\tau^{-1}e^{-u\tilde{\partial}}\tau e^{u\tilde{\partial}}).$$

Et donc si $e^{u\tilde{\partial}}$ *est modéré (par exemple lorsque* ∂ *est modérément triangulable) alors* $\gamma:=e^{\Delta\partial}$ *est stablement modéré.*

Démonstration. — La preuve est un calcul qu'on donne ici pour se familiariser avec les compositions d'automorphismes et les exponentiels de dérivations localement nilpotentes:
On montre que $\tau e^{u\tilde{\partial}}=e^{(u+\Delta)\tilde{\partial}}\tau$, en effet, $\forall i\in\mathbf{n}$, on a

$$\begin{aligned} \tau e^{u\tilde{\partial}}(y_i) &= \tau\Big(\sum_{k\geq 0}\frac{u^k\tilde{\partial}^k(y_i)}{k!}\Big) \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{(u+\Delta)^k\tilde{\partial}^k(y_i)}{k!} \\ &= e^{(u+\Delta)\tilde{\partial}}(y_i) \\ \tau e^{u\tilde{\partial}}(y_i) &= e^{(u+\Delta)\tilde{\partial}}\tau(y_i) \end{aligned}$$

et

$$\tau e^{u\tilde{\partial}}(u) = \tau(u) = u + \Delta = e^{(u+\Delta)\tilde{\partial}}(u + \Delta) = e^{(u+\Delta)\tilde{\partial}}\tau(u).$$

Or $e^{(u+\Delta)\tilde{\partial}} = e^{u\tilde{\partial}}e^{\Delta\tilde{\partial}}$ et donc,

$$\begin{aligned} e^{u\tilde{\partial}}e^{\Delta\tilde{\partial}}\tau &= \tau e^{u\tilde{\partial}} \\ e^{\Delta\tilde{\partial}} &= e^{-u\tilde{\partial}}\tau e^{u\tilde{\partial}}\tau^{-1}(= \tau^{-1}e^{-u\tilde{\partial}}\tau e^{u\tilde{\partial}}). \end{aligned}$$

□

2. De nouveaux automorphismes

On a vu que l'automorphisme de Nagata pouvait se décomposer en un produit $\gamma_{\mathrm{N}} = \sigma\gamma\sigma^{-1}$ où γ est un automorphisme de $A[y, z]$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Frac}(A)[y, z])$. On tente ici de généraliser au maximum cette construction pour obtenir de nouveaux automorphismes. Auparavant on a besoin de quelques résultats autour de la conjecture Jacobienne.

2.1. La conjecture Jacobienne [BCW82]

La *conjecture Jacobienne* ou *problème Jacobien* est l'un des plus fameux problèmes ouverts sur les automorphismes polynomiaux. En s'inspirant de [BCW82] on en donne ici une présentation très succincte ainsi qu'un moyen de l'aborder: l'inverse formel. Il permet de montrer le lemme 2.5, très utile pour la suite.

2.1.1. Un problème simple...non résolu.

Il semble que Keller [Kel39] soit le premier à avoir pensé à cette conjecture que l'on peut présenter ainsi:

CONJECTURE 2.1 (**Jacobienne).** — *Soit A un anneau de caractéristique nulle. Un endomorphisme α de $A^{[n]}$ est un automorphisme de $A^{[n]}$ si et seulement si sa matrice Jacobienne Jac(α) est inversible i.e. Jac(α) $\in$* $\mathrm{GL}(n, A^{[n]})$.

En effet si $\alpha \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}])$ alors $\mathrm{id}_{[n]} = \alpha\alpha^{-1}$ et la règle de la chaîne donne $\mathrm{Jac}(\mathrm{id}_{[n]}) = I_n = \mathrm{Jac}(\alpha\alpha^{-1}) = \alpha(\mathrm{Jac}(\alpha^{-1})) \cdot \mathrm{Jac}(\alpha)$ donc $\mathrm{Jac}(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, A^{[n]})$. C'est donc la réciproque

$$\mathrm{Jac}(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, A^{[n]}) \Rightarrow \alpha \in \mathrm{Aut}(A^{[n]})$$

qui fait l'objet d'une conjecture.

Notons que si $\mathrm{car}(A) = p > 0$ alors l'endomorphisme $\alpha \in \mathrm{End}(A[y])$ défini par $\alpha(y) = y + y^p$ vérifie $\mathrm{Jac}(\alpha) = 1$ alors que α n'est pas un automorphisme. Le cas $n = 1$ de la conjecture est trivial mais dès que $n \geq 2$ le problème n'est pas résolu. Seuls quelques résultats partiels existent ([Moh83, Wan80]) au milieu de nombreuses preuves erronées ce qui confirme la difficulté de ce problème.

La conjecture a de nombreuses formulations possibles. La condition " $\mathrm{Jac}(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, A[\bar{y}])$" est évidemment équivalente à " le déterminant jacobien $\mathrm{j}(\alpha) \in A[\bar{y}]^{\star}$" de plus $A[\bar{y}]^{\star} = A^{\star}$ lorsque A est réduit (sans nilpotent).

Il faut savoir que si la conjecture est vraie pour $A = \mathbb{C}$ alors elle l'est pour tout anneau intègre de caractéristique nulle (c'est une conséquence du lemme 2.5 plus bas). On peut aussi reformuler la conjecture Jacobienne comme ceci:

CONJECTURE 2.2 (**Jacobienne**). — *Soit $p_1, \cdots, p_n$, n polynômes de $\mathbb{C}^{[n]}$. Alors $j(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{C}^{\star}$* [4] *si et seulement si $\mathbb{C}^{[n]} = \mathbb{C}[p_1, \cdots, p_n]$.*

2.1.2. L'inverse formel.

La notion d'inverse formel semble pouvoir être utile dans le problème Jacobien.
On note $A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]]$ l'anneau des séries formelles en $y_1, \cdots, y_n$ à coefficients dans A. Ainsi $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}] \subset A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]]$ cependant $\mathrm{End}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) \not\subset \mathrm{End}(A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]])$, en effet si $\gamma \in \mathrm{End}(A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]])$ est défini par $\gamma(y_i) = P_i(\bar{y}_{\mathbf{n}}) \in A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]]$ il faut $P_i(\bar{0}_{\mathbf{n}}) = 0$ pour que $\gamma\big(\sum_{k\geq 0} y_i^k\big)(\bar{0}_{\mathbf{n}}) = \sum_{k\geq 0} P_i(\bar{0}_{\mathbf{n}})^k$ soit bien défini.

Autrement dit les endomorphismes de $A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]]$, dits *endomorphismes formels*, sont de valence au moins 1.

L'équivalent de la conjecture Jacobienne est vrai dans $A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]]$ (à noter que la caractéristique de A n'est plus nécessairement nulle); c'est le théorème d'inversion locale:

THÉORÈME 2.3. — *Soit A un anneau quelconque. Un endomorphisme formel γ de $A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]]$ est un automorphisme formel si et seulement si sa matrice jacobienne est inversible à l'origine, i.e.* $\mathrm{Jac}(\gamma)(\bar{0}) \in \mathrm{GL}(n, A)$.

Donc en particulier, (rappelons que $\mathrm{j}_{\bar{0}}(\alpha) = \mathrm{j}(\alpha)(\bar{0})$)

[4] $j(p_1, \cdots, p_n)$ est défini dans l'intro.

Corollaire 2.4. — *Soit* $\alpha \in \operatorname{End}(A[\bar{y}])$ *tel que* $\alpha_*(\bar{0}) = \bar{0}$ *et* $\mathrm{j}_{\bar{0}}(\alpha) \in A^\star$ *alors* α *a un inverse formel* $\alpha_{\mathrm{f}}^{-1} \in \operatorname{Aut}(A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]])$.

La condition $\alpha_*(\bar{0}) = \bar{0}$ n'est pas très contraignante puisqu'il suffit de le composer avec une translation adaptée pour qu'un endomorphisme quelconque la remplisse. Ainsi, si τ est la translation définie par $\tau(y_i) = y_i - \alpha(y_i)(\bar{0})$ alors $(\alpha\tau)_*(\bar{0}) = \bar{0}$ et, de plus, α est un automorphisme de $A[\bar{y}]$ si et seulement si $\alpha\tau$ l'est.
Le problème Jacobien consiste donc à montrer que, lorsque $\mathrm{j}_{\bar{0}}(\alpha) \in A^\star$, les composantes $\gamma_{\mathrm{f}}^{-1}(y_i) \in A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]]$ sont des polynômes. L'inverse formel permet de montrer facilement quelques résultats, nous l'utiliserons pour démontrer le Lem.2.5 et la Prop.2.15 plus bas.

2.1.3. Une application.

Comme on l'a vu dans 1.2, un moyen d'obtenir des automorphismes de $A[\bar{y}]$ non modérés a priori est de composer des automorphismes de $\operatorname{Frac}(A)[\bar{y}]$ (quand A est intègre). Plus généralement (que $A \subset \operatorname{Frac}(A)$), on considère une extension d'anneau $A \subset B$ qui donne lieu aux inclusions $\operatorname{End}(A^{[n]}) \subset \operatorname{End}(B^{[n]})$ et $\operatorname{Aut}(A^{[n]}) \subset \operatorname{Aut}(B^{[n]})$. Qu'est-ce qui caractérise, parmi les automorphismes de $B[\bar{y}]$ ou même parmi ses endomorphismes, ceux qui sont dans $\operatorname{Aut}(A[\bar{y}])$?
On a d'abord

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{Aut}(A[\bar{y}]) & = & \{\alpha \in \operatorname{End}(B[\bar{y}]) \text{ tel que } A[\bar{y}] = \alpha(A[\bar{y}])\} \\
\operatorname{Aut}(A[\bar{y}]) & = & \{\alpha \in \operatorname{Aut}(B[\bar{y}]) \text{ tel que } A[\bar{y}] = \alpha(A[\bar{y}])\} \\
\operatorname{Aut}(A[\bar{y}]) & = & \{\alpha \in \operatorname{Aut}(B[\bar{y}]) \cap \operatorname{End}(A[\bar{y}]) \text{ tel que } A[\bar{y}] \subset \alpha(A[\bar{y}])\}
\end{array}$$

Mais la condition $A[\bar{y}] \subset \alpha(A[\bar{y}])$ n'est pas facile à vérifier; on montre grâce à la ss-sec.2.1.2 qu'elle est équivalente à $\mathrm{j}_{\bar{0}}(\alpha) \in A^\star$:

Lemme 2.5. — *Soit* $A \subset B$ *une extension d'anneau, on a*

$$\operatorname{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) = \{\alpha \in \operatorname{Aut}(B[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) \cap \operatorname{End}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) \textit{ tel que } \operatorname{Jac}(\alpha)(\bar{0}) \in \operatorname{GL}(n, A)\}$$

et donc

$$\begin{array}{rcll}
\operatorname{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) & = & \operatorname{Aut}(B[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) \cap \operatorname{End}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) \cap \mathrm{j}_{\bar{0}}^{-1}(A^\star) & (2.1.1) \\
\operatorname{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) & = & \operatorname{Aut}(B[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) \cap \operatorname{End}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) \cap \mathrm{j}^{-1}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]^\star) & (2.1.2)
\end{array}$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in \operatorname{Aut}(B[\bar{y}_{\mathbf{n}}]) \cap \operatorname{End}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}])$. On a donc:

$$\operatorname{Jac}(\alpha)(\bar{0}) \in \operatorname{GL}(n, B) \cap \operatorname{M}(n, A).$$

On suppose que $\mathrm{Jac}(\alpha)(\bar{0}) \in \mathrm{GL}(n, A)$ (ce qui est vérifié si $\mathrm{j}_{\bar{0}}(\alpha) \in A^\star$ ou encore si $\mathrm{j}(\alpha) \in A[\bar{y}]^\star$). Comme on l'a vu dans ss-sec.2.1.2 on peut toujours se ramener au cas où $\alpha_*(\bar{0}) = \bar{0}$. Ainsi, d'après le corollaire 2.4, α a un inverse formel $\alpha_{\mathrm{f}}^{-1} \in \mathrm{Aut}(A[[\bar{y}_{\mathbf{n}}]])$, mais, puisque $\alpha \in \mathrm{Aut}(B[\bar{y}])$, cet inverse formel étendu à $B[[\bar{y}]]$ coïncide avec $\alpha^{-1} \in \mathrm{Aut}(B[\bar{y}])$. Les composantes $\alpha_{\mathrm{f}}^{-1}(y_i)$ sont donc bien des polynômes et donc $\alpha^{-1} = \alpha_{\mathrm{f}}^{-1}$, $\alpha \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}])$. □

2.2. Généralisation de l'automorphisme de Nagata

Pour généraliser l'automorphisme de Nagata on va conjuguer des automorphismes de $A[\bar{y}]$ avec des endomorphismes qui sont en même temps des automorphismes de $\mathrm{Quot}(A)[\bar{y}]$.

2.2.1. Des endomorphismes-automorphismes.

Comme on l'a vu dans la ss-sec.1.2.3 l'automorphisme de Nagata est un automorphisme de $A[y,z]$ qui a la décomposition suivante:

$$\gamma_{\mathrm{N}} = \sigma\beta\alpha\beta^{-1}\sigma^{-1}$$

c'est-à-dire

$$\gamma_{\mathrm{N}} = \tilde{\sigma}\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}^{-1}$$

avec $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(A[y,z])$ et $\tilde{\sigma} \in \mathrm{End}(A[y,z]) \cap \mathrm{Aut}(\mathrm{Quot}(A)[y,z])$. Notons que cette décomposition peut se voir de deux manières différentes: la première en posant $\tilde{\sigma} = \sigma$ et $\tilde{\alpha} = \beta\alpha\beta^{-1}$ et la deuxième en posant $\tilde{\sigma} = \sigma\beta$ et $\tilde{\alpha} = \alpha$. Dans le premier cas $\tilde{\sigma}$ est un automorphisme linéaire de $\mathrm{Quot}(A)[y,z]$ alors que dans le deuxième cas $\tilde{\sigma} = \sigma\beta$ ne l'est pas. Le cas où ces endomorphismes-automorphismes sont linéaires ou même affines a cet avantage que l'on connaît une formule qui donne leur inverse.
Le lemme 2.6 ci-dessous nous servira pour la suite.

On doit utiliser la notation A_f qui, lorsque $f \in A^\times$, désigne l'anneau des fractions:

$$A \subset A_f := \{f^{-k}, k \in \mathbb{N}\} \cdot A = A[\frac{1}{f}] \subset \mathrm{Quot}(A).$$

Rappelons (voir sec. Not. et Déf.) que l'on peut identifier, le cas échéant, un élément $a \in A$ et l'endomorphisme de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$, $y_i \mapsto a \cdot y_i$.

Lemme 2.6. — *Soit $\sigma \in \mathrm{End}(A[\bar{y}]) \cap \mathrm{Aut}(\mathrm{Quot}(A)[\bar{y}])$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \in \mathrm{End}(A[\bar{y}])$. Si de plus σ est affine alors $\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma) = \mathrm{j}(\sigma)$ et $k = 1$ convient.*

Démonstration. — Puisque $\sigma \in \operatorname{End}(A[\bar{y}]) \cap \operatorname{Aut}(\operatorname{Quot}(A)[\bar{y}])$, on a $\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma) \in A \cap \operatorname{Quot}(A)^\star = A^\times$ et donc on peut écrire

$$\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma) \in A_{\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)}{}^\star, \text{ avec l'extension d'anneaux } A_{\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)} \subset \operatorname{Quot}(A).$$

D'après l'égalité 2.1.1 du lemme 2.5 (où $A_{\mathrm{j}(\sigma)}$ resp. $\operatorname{Quot}(A)$ joue le rôle de A resp. B) $\sigma, \sigma^{-1} \in \operatorname{Aut}(A_{\mathrm{j}(\sigma)}[\bar{y}])$ donc il existe k tel que

$$A[\bar{y}] \ni \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \cdot \sigma^{-1}(y_i) = \sigma^{-1}(\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \cdot y_i) = \sigma^{-1}\, \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k(y_i),\ \forall i \in \mathbf{n}$$

i.e.

$$\sigma^{-1}\, \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \in \operatorname{End}(A[\bar{y}]).$$

Si σ est affine, à une translation de $A[\bar{y}]$ près on peut considérer que $\sigma \in \mathrm{M}^*(n, A)$ est linéaire et, dans ce cas on sait que $(\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma) = \mathrm{j}(\sigma))$

$$\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)\sigma_*^{-1} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(\sigma_*) \in \mathrm{M}(n, A) \text{ et donc } \sigma^{-1}\, \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma) \in \mathrm{M}^*(n, A) \subset \operatorname{End}(A[\bar{y}]).$$

(où $\mathrm{com}(M)$ désigne la co-matrice de M). □

2.2.2. Des conditions suffisantes pour conjuguer.

Revenons encore une fois sur l'automorphisme de Nagata: $\gamma_{\mathrm{N}} = \sigma\beta\alpha\beta^{-1}\sigma^{-1}$. En fait on a $\sigma \in \operatorname{Aut}_{\operatorname{Quot}(A)[y]}(\operatorname{Quot}(A)[y][z])$ et

$$\begin{aligned}
\beta\alpha\beta^{-1}(z) &= \beta\alpha(z - y^2) \\
&= \beta\big(z - (y + az)^2\big) \\
&= z + y^2 - [y + a(z + y^2)]^2 \\
\beta\alpha\beta^{-1}(z) &= z - a[2y(z + y^2) + a(z + y^2)^2]
\end{aligned}$$

Donc $\beta\alpha\beta^{-1}(z) \equiv z \bmod a \cdot A[y, z] = z \bmod \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma) \cdot A[y, z]$ et c'est ce qui permet que

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathrm{N}}(z) &= \sigma\beta\alpha\beta^{-1}\sigma^{-1}(z) \\
&= \sigma\beta\alpha\beta^{-1}(\frac{z}{a}) \\
&= \frac{1}{a}\sigma\beta\alpha\beta^{-1}(z) \\
&= \frac{1}{a}\sigma(z - a[2y(z + y^2) + a(z + y^2)^2]) \\
&= \frac{1}{a}(az - a[2y(z + y^2) + a(az + y^2)^2]) \\
\gamma_{\mathrm{N}}(z) &\in A[y, z]
\end{aligned}$$

(pour $\gamma_{\mathrm{N}}(y) = \sigma\beta\alpha\beta^{-1}\sigma^{-1}(y) = \sigma\beta\alpha\beta^{-1}(y) \in A[y, z]$ aucun problème). On va tenter de généraliser au maximum cette construction grâce au lemme et à la remarque suivants:

Lemme 2.7. — *Soit σ un endomorphisme de $A[\bar{y}] = A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ tel que*

$$\sigma \in \mathrm{End}(A[\bar{y}]) \cap \mathrm{Aut}(\,\mathrm{Quot}(A)[\bar{y}]),$$

et soit α un automorphisme de $A[\bar{y}]$.
Alors $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ est un automorphisme de $A[\bar{y}]$ si et seulement si c'est un endomorphisme de $A[\bar{y}]$.

Démonstration. — Supposons que $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ est un endomorphisme de $A[\bar{y}]$. On sait déjà que $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ est un automorphisme de $\mathrm{Quot}(A)[\bar{y}]$ aussi, en vue de l'égalité 2.1.2 du lemme 2.5 avec $B = \mathrm{Quot}(A)$, il suffit de montrer que $\mathrm{j}(\sigma\alpha\sigma^{-1})$ est inversible dans $A[\bar{y}]$.
Puisque $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ est un endomorphisme de $A[\bar{y}]$, $\mathrm{j}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) \in A[\bar{y}]$. De plus si l'on quotiente A par son nilradical $\sqrt{0}$ on a $A[\bar{y}]^\star \equiv A^\star \bmod \sqrt{0}$ resp. $\mathrm{Quot}(A)[\bar{y}]^\star \equiv \mathrm{Quot}(A)^\star \bmod \sqrt{0}$ et donc $\mathrm{j}(\alpha) \bmod \sqrt{0}$ resp. $\mathrm{j}(\sigma) \bmod \sqrt{0}$ sont dans $A/\sqrt{0}$. Ainsi, d'après l'égalité 0.0.7, on a:

$$\mathrm{j}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) \equiv \mathrm{j}(\sigma)\,\mathrm{j}(\alpha)\,\mathrm{j}(\sigma)^{-1} \equiv \mathrm{j}(\alpha) \bmod \sqrt{0} \in {A/\sqrt{0}}^{\,\star}$$

donc

$$A[\bar{y}] \ni \mathrm{j}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) = j(\alpha) + r(\bar{y}, \bar{z})$$

où $r(\bar{y}, \bar{z})$ est un nilpotent de $\mathrm{Quot}(A)[\bar{y}]$ mais puisque $\mathrm{j}(\alpha)$ et $\mathrm{j}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) \in A[\bar{y}]$ on a que $r(\bar{y}, \bar{z})$ est un nilpotent de $A[\bar{y}]$ et donc

$$\mathrm{j}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) \in A[\bar{y}]^\star.$$

Ainsi, d'après l'égalité 2.1.2 du lemme 2.5, $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ est bien un automorphisme de $A[\bar{y}]$.
La réciproque est immédiate. □

Avant d'énoncer les propositions 2.8 et 2.9 faisons la remarque simple suivante qui servira dans leur preuve:

Remarque. — Dans les hypothèses du lemme 2.7 précédent $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ est un endomorphisme de $A[\bar{y}]$ si et seulement si, quel que soit $i \in \mathbf{n}$,

$$\sigma\alpha\sigma^{-1}(y_i) \in A[\bar{y}]$$

cette dernière condition étant aussi équivalente à

$$\sigma\alpha\sigma^{-1}(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k y_i) \in \left(\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\right) \cdot A[\bar{y}]$$

où $k = k(\sigma)$ est le plus petit entier positif tel que

$$\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k \in \mathrm{End}(A[\bar z_{\mathbf{n}}]) \text{ (voir Lem.2.6).}$$

PROPOSITION 2.8. — *Soit l'anneau de polynômes $A^{[m+n]} = A[\bar y_{\mathbf{m}}, \bar z_{\mathbf{n}}]$ où $m \geq 0$ et $n \geq 1$. Soit σ un endomorphisme tel que*

$$\sigma \in \mathrm{End}(A[\bar z_{\mathbf{n}}]) \cap \mathrm{Aut}(\,\mathrm{Quot}(A)[\bar z_{\mathbf{n}}]) \subset \mathrm{End}_{A[\bar y_{\mathbf{m}}]}(A[\bar y_{\mathbf{m}}][\bar z_{\mathbf{n}}])$$

et soit $k = k(\sigma)$ le plus petit entier positif tel que

$$\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k \in \mathrm{End}(A[\bar z_{\mathbf{n}}]) \text{ (voir Lem.2.6).}$$

Si $\alpha \in \mathrm{Aut}(A[\bar y_{\mathbf{m}}, \bar z_{\mathbf{n}}])$ est un automorphisme tel que

$$\alpha_{|A[\bar z_{\mathbf{n}}]} \equiv \mathrm{Id}_{|A[\bar z_{\mathbf{n}}]} \bmod \left(\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k\right)$$ [5]

alors $\sigma\alpha\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(A[\bar y_{\mathbf{m}}, \bar z_{\mathbf{n}}])$.

Démonstration. — Si $i \in \mathbf{m}$ alors $\sigma^{-1}(y_i) = y_i$, donc $\sigma\alpha\sigma^{-1}(y_i) = \sigma\alpha(y_i) \in A[\bar y_{\mathbf{m}}, \bar z_{\mathbf{n}}]$.

Si $j \in \mathbf{n}$ alors $\sigma^{-1}(\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k z_j) \in A[\bar z_{\mathbf{n}}]$, donc par hypothèse

$$\alpha\sigma^{-1}(\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k z_j) \equiv \sigma^{-1}(\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k z_j) \bmod \left(\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k\right)\ ,$$

ce qui implique

$$\sigma\alpha\sigma^{-1}(\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k z_j) \equiv \sigma\sigma^{-1}(\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k z_j) \equiv (\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k z_j) \equiv 0 \pmod{\mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma)^k}$$

et on conclut grâce au lemme 2.7 et à la remarque précédente.

□

Lorsque σ est linéaire on améliore un peu le résultat:

PROPOSITION 2.9. — *Soit l'anneau de polynômes $A^{[m+n]}$ comme dans la proposition 2.8. Soit un endomorphisme linéaire*

$$\sigma \in \mathrm{M}^*(n, A) \subset \mathrm{End}(A[z_1, \cdots, z_n]) \subset \mathrm{End}(A^{[m+n]})$$

dont le (déterminant) jacobien $\mathrm{j}(\sigma) = \mathrm{j}_{\bar 0}(\sigma) \in A$ ne divise pas 0. Si $\alpha \in \mathrm{Aut}(A[\bar y_{\mathbf{m}}, \bar z_{\mathbf{n}}])$ est un automorphisme tel que

$$\alpha(z_j) \equiv q(\bar y, \bar z) z_j \bmod \left(\mathrm{j}(\sigma)\right),\ \forall j \in \mathbf{m}$$

où q est un polynôme (forcément inversible modulo $(\mathrm{j}(\sigma))$) de $A[\bar y, \bar z]$, alors $\sigma\alpha\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(A[\bar y_{\mathbf{m}}, \bar z_{\mathbf{n}}])$ (où $\sigma_*^{-1} = \mathrm{j}(\sigma)^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(\sigma_*)$).

[5] La conjecture 10.3 plus bas dit qu'il suffit que cette condition soit vérifiée pour $k = 1$.

Démonstration. — Si $i \in \mathbf{m}$ alors $\sigma\alpha\sigma^{-1}(y_i) = \sigma\alpha(y_i) \in A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$.

Si $j \in \mathbf{n}$ alors $\sigma^{-1}(\,\mathrm{j}(\sigma) z_j)$ est une combinaison linéaire de $z_1, \ldots, z_n$ à coefficients dans A donc l'hypothèse implique que

$$\alpha(\sigma^{-1}(\,\mathrm{j}(\sigma) z_j)) \equiv q(\bar{y}, \bar{z})\, \sigma^{-1}(\,\mathrm{j}(\sigma) z_j) \bmod \big(\,\mathrm{j}(\sigma)\big)$$

et on obtient enfin

$$\sigma\alpha\sigma^{-1}(\,\mathrm{j}(\sigma) z_j) \equiv \sigma\big(q(\bar{y}, \bar{z})\sigma^{-1}(\,\mathrm{j}(\sigma) z_j)\big) \equiv \sigma\big(q(\bar{y}, \bar{z})\big)\,\mathrm{j}(\sigma) z_j \equiv 0 \bmod \big(\,\mathrm{j}(\sigma)\big).$$

Le lemme 2.7 et la remarque qui le suit concluent. $\square$

Il est intéressant de regarder ce que donnent les propositions 2.8 et 2.9 dans des cas particuliers:

Si $m = 0$ dans la proposition 2.8 on obtient

Corollaire 2.10. — *Soit un endomorphisme* $\sigma \in \mathrm{End}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \cap \mathrm{Aut}(\,\mathrm{Quot}(A)[\bar{z}_{\mathbf{n}}])$ *et* $k = k(\sigma)$ *le plus petit entier positif tel que*

$$\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \in \mathrm{End}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \text{ (voir Lem.2.6).}$$

Si $\alpha \in \mathrm{Aut}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}])$ *est un automorphisme tel que* $\alpha \equiv \mathrm{id}_{[n]} \bmod \big(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\big)$ *alors* $\sigma\alpha\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}])$.

Si $n = 1$ et $\sigma(z) = az$ dans Prop.2.9 on a:

Corollaire 2.11. — *Soit σ l'endomorphisme de* $\mathrm{End}(A[z]) \cap \mathrm{Aut}(\,\mathrm{Quot}(A)[z])$ *défini par* $\sigma(z) = az$ *où* $a \in A^\times$ *et soit* $\alpha \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, z])$.
On a $\sigma\alpha\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, z])$ *si et seulement si* $\alpha(z) \in (z, a)$.

Démonstration. — Si $i \in \mathbf{m}$ alors $\sigma\alpha\sigma^{-1}(y_i) = \sigma\alpha(y_i) \in A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, z]$ et donc, d'après le lemme 2.7,

$$\begin{aligned}
\sigma\alpha\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, z]) \;&\Leftrightarrow\; \sigma\alpha\sigma^{-1}(z) \in A[\bar{y}, z] \\
&\Leftrightarrow\; \sigma\alpha(\frac{z}{a}) \in A[\bar{y}, z] \\
&\Leftrightarrow\; \frac{1}{a}\sigma\alpha(z) \in A[\bar{y}, z] \\
&\Leftrightarrow\; \frac{1}{a}\alpha(z)(\bar{y}, az) \in A[\bar{y}, z] \\
&\Leftrightarrow\; a \text{ divise } \alpha(z)(\bar{y}, 0) \\
&\Leftrightarrow\; \alpha(z) \in (a, z).
\end{aligned}$$

$\square$

2.2.3. Conjuguer des LND.

On a vu dans la sous-section 1.3.2 qu'on pouvait aussi conjuguer les dérivations localement nilpotentes. On donne deux analogues des résultats de la ss-sec.2.2.2 où l'on remplace α, l'automorphisme à conjuguer par ∂ une LND:

PROPOSITION 2.12. — *Soit l'anneau de polynômes $A^{[m+n]}$ comme dans Prop.2.8. Soit σ un endomorphisme tel que*

$$\sigma \in \mathrm{End}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \cap \mathrm{Aut}(\,\mathrm{Quot}(A)[\bar{z}_{\mathbf{n}}])$$

et soit $k = k(\sigma)$ le plus petit entier positif tel que

$$\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \in \mathrm{End}(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]) \text{ (voir Lem.2.6).}$$

Si $\partial \in \mathrm{LND}(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}])$ est une dérivation localement nilpotente telle que

$$\partial(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \subset \left(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\right) \cdot A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$$

alors $\sigma\partial\sigma^{-1} \in \mathrm{LND}(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}])$.

Démonstration. — On sait déjà que $\sigma\partial\sigma^{-1} \in \mathrm{LND}(\,\mathrm{Quot}(A)[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}])$ (voir ss-sec.1.3.2) et il suffit donc de vérifier que, si $\partial(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \subset \left(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\right)$, alors $\sigma\partial\sigma^{-1}(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]) \subset A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$.
Pour tout $i \in \mathbf{m}$, on a

$$\sigma\partial\sigma^{-1}(y_i) = \sigma\partial(y_i) \in A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}].$$

Pour tout $j \in \mathbf{n}$, $\sigma^{-1}(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k z_j) \in A[\bar{z}]$ et donc par hypothèse

$$\partial\big(\sigma^{-1}(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k z_j)\big) \in \left(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\right) \cdot A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$$

et

$$\sigma\partial\sigma^{-1}(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k z_j) = \sigma\Big(\partial\big(\sigma^{-1}(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k z_j)\big)\Big) \in \left(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\right) \cdot A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$$

également donc

$$\sigma\partial\sigma^{-1}(z_j) = \frac{1}{\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k}\sigma\partial\sigma^{-1}(\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k z_j) \in A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}].$$

□

Dans le cas $m = 0$ on peut modifier un peu l'énoncé du résultat:

Corollaire 2.13. — *Soit un endomorphisme* $\sigma \in \mathrm{End}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \cap \mathrm{Aut}(\,\mathrm{Quot}(A)[\bar{z}_{\mathbf{n}}])$ *et* $k = k(\sigma)$ *le plus petit entier positif tel que*

$$\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \in \mathrm{End}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \text{ (voir Lem.2.6).}$$

Soit $\partial \in \mathrm{LND}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}])$ *une dérivation localement nilpotente quelconque. On a* $\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \cdot \sigma\partial\sigma^{-1} = \sigma\big(\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \cdot \partial\big)\sigma^{-1} \in \mathrm{LND}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}])$.

Démonstration. — Lorsque $m = 0$, pour une dérivation $\partial_1 \in \mathrm{LND}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}])$ on a

$$\partial_1(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \subset \big(\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\big) \qquad \Leftrightarrow \qquad \partial_1 = \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \cdot \partial,\;\; \partial \in \mathrm{LND}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}])$$

Et donc d'après la proposition 2.12

$$\sigma\partial_1\sigma^{-1} = \sigma\big(\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \cdot \partial\big)\sigma^{-1} = \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \cdot \sigma\partial\sigma^{-1} \in \mathrm{LND}(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]).$$

□

2.3. Automorphismes résiduels

2.3.1. Approche générale.

De manière générale on utilisera l'expression *(A-)résiduel* ou *(A-)résiduellement* à la place de " mod $\mathcal{M}$ pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A". Ainsi, dans le cas particulier où $A = \mathbb{C}[\bar{x}]$, ($\bar{x}$-)résiduel(lement) signifie donc "$\forall \bar{x} = \bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k$ fixé".
On étudiera la réciproque de l'implication:

$$\text{Vrai} \Rightarrow \text{ Vrai résiduellement.}$$

Ainsi, dire qu'un élément a de A est *nul résiduellement* signifie que $a \equiv 0 \bmod \mathcal{M}$, $\forall \mathcal{M}$ idéal maximal de A. On a:

$$a \text{ est nul } \Rightarrow a \text{ est nul résiduellement.}$$

Mais la réciproque de cette implication est fausse si $\bigcap\limits_{\mathcal{M}\max} \mathcal{M}$, appelé le radical de Jacobson de A, est non nul. Par contre on a

$$a \text{ est inversible } \Leftrightarrow a \text{ est inversible résiduellement} \qquad (2.3.1)$$

car

$$a \in \left(A/\mathcal{M}\right)^\star,\ \forall\mathcal{M} \Leftrightarrow a \notin \mathcal{M},\ \forall\mathcal{M} \Leftrightarrow (a) \not\subset \mathcal{M},\ \forall\mathcal{M} \Leftrightarrow (a) = A \Leftrightarrow a \in A^\star$$

Quand on passe à l'anneau de polynômes $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ le terme (A-)résiduel(lement) signifie encore " mod $\mathcal{M}$ pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A" et non pas " mod $\mathcal{M}$ pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$". Ainsi l'équivalence 2.3.1 n'est plus vraie pour les polynômes en général. En effet, si la radical de Jacobson de A, n'est pas réduit à son nilradical alors, si

$$a \in \bigcap_{\mathcal{M}\max} \mathcal{M} \setminus \sqrt{0_A} \neq \emptyset$$

on a $1+ay \in A[y]$ est inversible résiduellement mais $1+ay$ n'est pas inversible. De ce fait quand on utilise l'approche "résiduelle" pour les anneaux de polynômes on suppose que $\bigcap_{\mathcal{M}\max} \mathcal{M} = \sqrt{0_A}$ et, dans cette situation on peut encore montrer que pour un polynôme $p(\bar{y}) \in A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ on a:

$$p(\bar{y}) \text{ est inversible } \Leftrightarrow p(\bar{y}) \text{ est inversible résiduellement} \qquad (2.3.2)$$

En ce qui concerne les automorphismes on aura donc

Définition 2.14 (**Automorphisme résiduel).** — *Un endomorphisme α de $A^{[n]}$ est un* automorphisme résiduel *ou* automorphisme A-résiduel *si $\alpha \bmod \mathcal{M}$ est un automorphisme de ${}^{A}\!/\!_{\mathcal{M}}[\bar{y}]$, pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A.*

On a encore pour un A-endomorphisme α

$$\alpha \text{ est un automorphisme } \Rightarrow \alpha \text{ est un automorphisme résiduel.} \qquad (2.3.3)$$

Il faut encore que $\bigcap_{\mathcal{M}\max} \mathcal{M} = \sqrt{0_A}$ pour que la réciproque soit vraie car sinon l'endomorphisme α de $A[y]$ défini par $\alpha(y) = y(1+ay)$, où a est comme plus haut, fournit un contre-exemple.
Dans le cas où $\text{Jacobson}(A) = \sqrt{0_A}$, remarquons que si la conjecture jacobienne est vraie alors, en appliquant l'équivalence 2.3.2 au jacobien $\mathrm{j}(\alpha)$ on trouve que $\mathrm{j}(\alpha)$ est inversible et on obtient la réciproque de l'implication 2.3.3.

Dans la sous-section suivante, on donne une preuve de la réciproque de 2.3.3.

2.3.2. Les automorphismes résiduels sont des automorphismes.

Proposition 2.15. — *Soit A un anneau dont le radical de Jacobson est réduit au nilradical i.e. $\bigcap_{\mathcal{M}\max} \mathcal{M} = \sqrt{0_A}$ et $\alpha \in \mathrm{End}(A^{[n]})$. Alors α est un automorphisme si et seulement si c'est un automorphisme résiduel.*

Dans la preuve on a besoin du résultat 2.16 suivant qui donne une borne pour le degré de l'inverse d'un automorphisme. C'est le corollaire (1.4) de [BCW82] et les auteurs l'attribuent à O. Gabber:

Théorème 2.16 (Gabber-Bass-Connell-Wright). — *Si K est un corps et $\alpha \in \mathrm{Aut}(K^{[n]})$ alors $\deg(\alpha^{-1}) \leq \deg{(\alpha)}^{n-1}$.*

Démonstration de Prop.2.15. — En vue du lemme 1.1, quitte à quotienter par $\sqrt{0_A}$, on peut supposer que A est réduit et donc que le radical de Jacobson $\bigcap\limits_{\mathcal{M}\max} \mathcal{M}$ est réduit à (0). On suppose que α est un automorphisme résiduel, cela implique que $\mathrm{j}(\alpha)(\bar{0})$ est inversible résiduellement et donc inversible (voir équiv.2.3.1). On suppose que $\alpha_*(\bar{0}) = \bar{0}$ (voir ss-sec.2.1.2) et donc d'après le corollaire 2.4, α a un inverse formel α_{f}^{-1}.
Par hypothèse, pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A on a:

$$(\alpha \bmod \mathcal{M})^{-1} = \alpha_{\mathrm{f}}^{-1} \bmod \mathcal{M} \in \mathrm{Aut}({A}/{\mathcal{M}}\,[\bar{y}_{\mathbf{n}}])$$

et d'après le théorème 2.16

$$\deg\left(\alpha_{\mathrm{f}}^{-1} \bmod \mathcal{M}\right) \leq \deg\left(\alpha \bmod \mathcal{M}\right)^{n-1} \leq \deg(\alpha)^{n-1} \qquad (2.3.4)$$

Soit $\alpha_{\mathrm{f,p}}^{-1}$ l'endomorphisme polynômial de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ défini en prenant la partie de α_{f}^{-1} de degré inférieur ou égal à $\deg{(\alpha)}^{n-1}$. D'après l'inégalité 2.3.4 on a

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathrm{f}}^{-1} &\equiv \alpha_{\mathrm{f,p}}^{-1} \bmod \mathcal{M} \ \ \forall \mathcal{M} \\ \alpha_{\mathrm{f}}^{-1} - \alpha_{\mathrm{f,p}}^{-1} &\in \mathcal{M}[\bar{y}_{\mathbf{n}}] \ \ \forall \mathcal{M} \\ \alpha_{\mathrm{f}}^{-1} - \alpha_{\mathrm{f,p}}^{-1} &\in \bigcap_{\mathcal{M}\max} \mathcal{M}[\bar{y}_{\mathbf{n}}] = (0) \end{aligned}$$

et donc $\alpha_{\mathrm{f}}^{-1} = \alpha_{\mathrm{f,p}}^{-1} (= \alpha^{-1})$ et α est un automorphisme de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$. □

On a immédiatement le

Corollaire 2.17. — *Un automorphisme x-résiduel de $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ est un x-automorphisme.*

Deuxième partie

Variables

Une *(A-)variable* d'un anneau de polynômes $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ est un polynôme $p = p(\bar{y}_{\mathbf{n}})$ équivalent à la coordonnée y_1, c'est-à-dire un polynôme p tel qu'il existe un automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{n}}])$ qui envoie y_1 sur p: $\alpha(y_1) = p$. Ainsi une variable $p(x, \bar{y}_{\mathbf{n}}) = \alpha(y_1)$ de $\mathbb{C}[x, \bar{y}_{\mathbf{n}}]$ telle que $\alpha(x) = x$ est aussi une x-variable de $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{n}}]$. On notera parfois $\mathrm{Var}\big(A[\bar{y}]\big)$ ou $\mathrm{Var}_A\big(A[\bar{y}]\big)$ l'ensemble des (A-)variables de $A[\bar{y}]$.

3. Quelques exemples de variables

La question générale liée aux variables est:

Comment reconnaître une variable ?

Pour y répondre commençons d'abord par en construire certains exemples grâce à ce qu'on a vu dans la section 1.

3.1. Variables affines

Les variables a priori les plus simples qui viennent à l'esprit sont les *variables affines* c'est-à-dire celles qui proviennent d'automorphismes affines.

Notons que si p est une variable de degré un, c'est forcément une variable affine. En effet si $\alpha(y_1) = p = a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b$ on a

$$\mathrm{Jac}(\alpha) = \begin{bmatrix} a_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_n \\ \frac{\partial(\alpha(y_2))}{\partial y_1} & & \frac{\partial(\alpha(y_2))}{\partial y_1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial(\alpha(y_n))}{\partial y_1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial(\alpha(y_n))}{\partial y_n} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}\big(n, A[\bar{y}]\big)$$

et donc

$$\mathrm{Jac}(\alpha)(\bar{0}_{\mathbf{n}}) = \begin{bmatrix} a_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_n \\ \frac{\partial(\alpha(y_2))}{\partial y_1}(\bar{0}_{\mathbf{n}}) & & \frac{\partial(\alpha(y_2))}{\partial y_1}(\bar{0}_{\mathbf{n}}) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial(\alpha(y_n))}{\partial y_1}(\bar{0}_{\mathbf{n}}) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial(\alpha(y_n))}{\partial y_n}(\bar{0}_{\mathbf{n}}) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}\big(n, A\big).$$

En posant

$$\big(M, (b, 0, \cdots, 0)\big) := \big(\,\mathrm{Jac}(\alpha)(\bar{0}_{\mathbf{n}}), (b, 0, \cdots, 0)\big) \in \mathrm{GL}\big(n, A\big) \times A^n = \mathrm{GA}(n, A)$$

on obtient que $p = \big(M, (b, 0, \cdots, 0)\big)^*(y_1)$ est une variable affine de $A[\bar{y}]$.

Dans le cas particulier des variables affines on se retrouve avec des problèmes d'algèbre linéaire à coefficients dans un anneau. En vue d'aborder un de ces problèmes faisons la remarque suivante (qui concerne les variables en général):

Remarque. — Si $p = p(\bar{y}_{\mathbf{n}})$ est une variable de $A[\bar{y}]$ alors l'idéal engendré par les dérivées partielles de p par rapport aux indéterminées $y_1, \cdots, y_n$ est égal à tout l'anneau: $\left(\frac{\partial p}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial p}{\partial y_n}\right) = A[\bar{y}]$ de plus, si $p = a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n + b$ est de degré un alors dans A on a: $a_1 A + \cdots + a_n A = (a_1, \cdots, a_n) = A$.

C'est une conséquence directe de l'implication facile de la conjecture Jacobienne (Conj.2.1). En effet si l'on calcule le déterminant de la matrice jacobienne d'un automorphisme qui envoie y_1 sur p en le développant suivant la première ligne on obtient le résultat ci-dessus.

Dans le cas des variables affines la réciproque de la remarque ci-dessus coïncide avec un problème d'algèbre connu sous le nom de *Problème de Serre* ou *Conjecture de Serre* dans le cas où $A = B[\bar{x}_{\mathbf{k}}]$ avec B un corps:

PROBLÈME 3.1 (de Serre généralisé). — *Soit $a_1, \cdots, a_n$, $n(\geq 1)$ éléments d'un anneau A qui l'engendrent i.e. $(a_1, , \cdots, a_n) = A$.*
Est-ce que $[a_1, \cdots, a_n]$ est la première ligne d'une matrice inversible $M \in \mathrm{GL}(n, A)$?

C'est, en fait, une autre formulation de la question: Tous les A-modules projectifs de type fini sont-ils libres?
Notons que pour $n = 1$ ou 2 la réponse est immédiate (si $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1$ alors $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, A)$).

Le problème de Serre en lui-même a été résolu indépendemment par D. Quillen et A. Suslin en 1976:

THÉORÈME 3.2 (Quillen, Suslin). — *Si $A = B[\bar{x}_{\mathbf{k}}]$ où B est un anneau principal*[6] *alors la réponse au problème de Serre est positive.*

Enfin, pour se convaincre que la conjecture de Serre n'est pas toujours vraie donnons le contre-exemple classique suivant dû à P. Samuel:

CONTRE-EXEMPLE 3.3 (à la conjecture de Serre généralisée). — *Soit $A := \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(S^2)$ l'anneau des fonctions continues de la sphère $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \subset \mathbb{R}^3_{x,y,z}$ dans $\mathbb{R}$ et a_1, a_2 et a_3 les trois éléments de A égaux respectivement aux fonctions x, y et z. On a bien $(a_1, a_2, a_3) = A$ puisque $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et pourtant il n'existe pas deux autres vecteurs lignes $[p_1, p_2, p_3]$ et $[q_1, q_2, q_3] \in A^3$ tels que:*

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 1.$$

[6] Anneau intègre dont tout idéal est principal.

Démonstration. — Dans le cas contraire, les vecteurs $[x, y, z]$ et $[p_1, p_2, p_3]$ sont linéairement indépendants donc la projection (orthogonale) de $[p_1, p_2, p_3]$ de direction $[x, y, z]$ sur le plan tangent à la sphère donne un champ de vecteurs tangents jamais nul sur la sphère ce qui est connu pour être impossible. □

Pour plus de renseignements sur le sujet, voir (entre autres) [Lam78],[Man97] ou encore [Swa87] pour de nombreux contre-exemples.

3.2. Variables modérées

Naturellement, on dira qu'un polynôme $p = p(\bar{y}) \in A[\bar{y}]$ est une *variable modérée* si elle provient d'un automorphisme modéré (voir sous-section 1.1.2). De même que dans la sous-section 1.1.3 on se rend compte que les éléments nilpotents éventuels de A jouent un rôle particulier. Le lemme 1.1 à pour conséquence directe le

COROLLAIRE 3.4. — *Soit $p = p(\bar{y})$ un polynôme de $A[\bar{y}]$. Alors p est une variable de $A[\bar{y}]$ si et seulement si $p \bmod \sqrt{0}$ est une variable de ${}^{A}\!/\!_{\sqrt{0}}\ [\bar{y}]$.*

Dans le cas où A est réduit tout ce qu'on sait sur les variables modérées se déduit de ce qu'on sait sur les automorphismes modérés (voir sous-sections 1.1.3, 1.2.1 et 1.2.2):

PROPOSITION 3.5 (Jung-van der Kulk-Nagata). — *On a:*

1. *lorsque $n = 1$ et A un anneau quelconque les variables de $A[y]$ sont de la forme $uy + b + r(y)$ où u est un inversible de A, $b \in A$ et $r(y)$ un polynôme nilpotent de $A[y]$;*

2. *lorsque $n = 2$ et $A = K$ est un corps les variables de $K[y, z]$ sont toujours modérées;*

3. *si A et a sont comme dans la sous-section 1.2.1 alors la variable de $A[y, z]$, $y + a(az + y^2)$ qu'on appellera* variable de Nagata *n'est pas modérée.*

Démonstration. — On se réfère à la sous-section 1.1:

1. Voir la correspondance 1.1.1.

2. Le théorème 1.2 de Jung-van der Kulk implique que toute variable de $K[y, z]$ est modérée.

3. Si $y+a(az+y^2)=\alpha(y)$ où α est un automorphisme modéré de $A[y,z]$ alors $\alpha^{-1}\gamma_{\mathrm{N}}(y)=y$ i.e. $\alpha^{-1}\gamma_{\mathrm{N}}$ est un $A[y]$-automorphisme de $A[y][z]$ donc forcément modéré ce qui implique que $\gamma_{\mathrm{N}}=\alpha\alpha^{-1}\gamma_{\mathrm{N}}$ l'est aussi or d'après la sous-section 1.2.1 ce n'est pas le cas.

□

Enfin, si la conjecture 1.4 est vraie alors la x-variable de Nagata $y+x(xz+y^2)$ n'est pas une variable modérée de $K[x,y,z]$. Cependant, on a vu dans la sous-section 1.3.3 que l'automorphisme de Nagata est stablement modéré et donc on peut dire que la variable de Nagata $y+a(az+y^2)\in A[y,z]$ est *stablement modérée* avec le sens évident qu'on peut lui donner. On verra plus loin (théorème 8.2) qu'on peut donner un résultat un peu plus général.

4. Les problèmes de plongement en général

Les variables interviennent dans un cas particulier des problèmes dits *de plongement* dont on donne ici une présentation générale.

4.1. Présentation du problème

Commençons par l'observation suivante:
Soit I et J deux idéaux de l'anneau de polynôme $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ et α un automorphisme de $A[\bar{y}]$ tel que $\alpha(I)=J$. On a alors un isomorphisme des algèbres quotient induit par α:

$$\tilde{\alpha}:{A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]}/{I}\longrightarrow {A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]}/{J}$$

On s'intéresse à la réciproque de cette implication, à savoir:

Problème 4.1 (de plongement). — *Tout isomorphisme*

$$\phi:{A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]}/{I}\xrightarrow{\sim}{A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]}/{J}$$

se relève-t-il en un automorphisme de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$?

Il s'avère qu'en général la réponse est non, comme le montrent les contre-exemples suivants:

4.2. Quelques contre-exemples

On aura besoin de la définition suivante:

DÉFINITION 4.2 (**Équivalence).** — *Soit I et J resp. $p(\bar{y})$ et $q(\bar{y})$ deux idéaux resp. deux polynômes de l'anneau de polynômes $A[\bar{y}]$. On dit que I et J resp. p et q sont* équivalents à automorphismes près *ou, plus simplement, quand il n'y a pas d'ambiguïté,* équivalents *s'il existe un automorphisme de $A[\bar{y}]$, α tel que $\alpha(I) = J$ resp. $\alpha(p) = q$.*

Regardons les exemples d'isomorphismes suivants (où les idéaux I et J de $A[\bar{y}]$ sont principaux):

- Exemple 1: $A = \mathbb{Z},\ n = 1,\ I = (2y - 1),\ J = (4y - 1)$:

$$\phi : \quad \mathbb{Z}[y]/(2y-1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[y]/(4y-1)$$

$$\begin{array}{ccc} y & \longmapsto & 2y \\ y^2 & \longleftarrow & y \end{array}$$

- Exemple 2: $A = \mathbb{C},\ n = 2,\ I = (zy - 1),\ J = (z^2y - 1)$:

$$\phi : \quad \mathbb{C}[y,z]/(zy-1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[y,z]/(z^2y-1)$$

$$\begin{array}{ccc} z & \longmapsto & z \\ y & \longmapsto & zy \\ y^2 & \longleftarrow & y \end{array}$$

- Exemple 3: $A = \mathbb{C},\ n = 1,\ I = J = \big(y(y-1)(y-2)\big)$:

$$\phi : \quad \mathbb{C}[y]/\big(y(y-1)(y-2)\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[y]/\big(y(y-1)(y-2)\big)$$

$$\begin{array}{ccc} y & \longmapsto & (-\frac{3}{2}y+1)(y+1) \\ (\frac{3}{2}y+1)(y-1) & \longleftarrow & y \end{array}$$

- Exemple 4: $A = \mathbb{C},\ n = 2,\ I = J = \big(z(zy-1)\big)$:

$$\phi : \quad \mathbb{C}[y,z]/\big(z(zy-1)\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[y]/\big(z(zy-1)\big)$$

$$\begin{array}{ccc} z & \longmapsto & z \\ y & \longmapsto & y + zy - 1 \\ y - zy + 1 & \longleftarrow & y \end{array}$$

Dans les exemples 1 et 2, on constate que I et J ne sont pas équivalents: dans l'exemple 1 cela vient du fait que les automorphismes de $\mathbb{Z}[y]$ sont tous affines et dans l'exemple 2, si les idéaux $(zy-1)$ et (z^2y-1) sont équivalents alors les polynômes $zy-1$ et z^2y-1 aussi et donc zy est équivalent à z^2y ce qui est impossible car ils n'ont pas le même nombre de composantes irréductibles.

Dans les exemples 3 et 4 la situation est différente puisqu'on a $I = J$, l'obstruction à l'extension de ϕ n'est donc plus la non équivalence de I et J mais l'absence d'automorphisme α qui conserve I et qui coïncide avec ϕ sur $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]/I$. Ces deux exemples sont empruntés à [DKW99].
Pour l'exemple 3, si on regarde la situation géométriquement on a $\phi_* : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$ où $\phi_*(-1) = 0$, $\phi_*(0) = 1$, $\phi_*(1) = -1$ ce qui ne peut s'étendre à un automorphisme, nécessairement affine, de $\mathbb{C}$. Enfin, dans l'exemple 4, on montre aisément (voir [DKW99]) que les seuls automorphismes qui préservent $\big(z(zy-1)\big)$ sont du type $\alpha(y) = ay$, $\alpha(z) = a^{-1}z$ ce qui les empêche d'être égaux à ϕ dans $\mathbb{C}[y,z]/(z(zy-1))$.

On renvoie à [DKW99] pour plus de précisions sur les isomorphismes qu'on ne peut pas étendre.
On trouve aussi des exemples intéressants dans [SY01] où S. Shpilrain et J.T. Yu utilisent le gradient pour distinguer des hypersurfaces non équivalentes à automorphismes près. D'ailleurs, les résultats de leur article sont aussi utiles dans la section suivante.

4.3. Une équivalence 1-stable

Grâce aux résultats de [SY01], dans chacun des quatre exemples, on peut montrer que les idéaux I et J sont 1-stablement équivalents dans le sens de la définition suivante:

DÉFINITION 4.3 (**Équivalence k-stable**). — *Soit I et J resp. $p(\bar{y})$ et $q(\bar{y})$ deux idéaux resp. deux polynômes de l'anneau de polynômes $A[\bar{y}]$. On dit que I et J resp. p et q sont k-*stablement équivalents *si les idéaux $(I, \bar{v}_{\mathbf{k}})$ et $(J, \bar{v}_{\mathbf{k}})$ resp. $(p, \bar{v}_{\mathbf{k}})$ et $(q, \bar{v}_{\mathbf{k}})$ sont équivalents dans $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}, \bar{v}_{\mathbf{k}}]$.*

En fait on a un résultat plus fort puisqu'on peut définir un automorphisme α de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}, v]$ qui étend le v-isomorphisme ϕ_v entre $A[v][\bar{y}_{\mathbf{n}}]/(I,v)$ et $A[v][\bar{y}_{\mathbf{n}}]/(J,v)$ induit par ϕ. On donne ces automorphismes pour les exemples 1 et 4:

- dans l'exemple 1, soit $\alpha \in \mathrm{Aut}\big(\mathbb{Z}[y,v]\big)$ défini par:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha(y) & = & v+2y\\ \alpha(v) & = & y-(v+2y)^2\end{array}\right. \text{ d'inverse } \left\{\begin{array}{lcl}\alpha^{-1}(y) & = & v+y^2\\ \alpha^{-1}(v) & = & y-2(v+y^2)\end{array}\right.$$

On a

$$\alpha\big((2y-1,v)\big) = \big(2(v+2y)-1, y-(v+2y)^2\big) = \big(2v+4y-1, -v^2-4yv-y(4y-1)\big).$$

Et on vérifie

$$\big(2v+4y-1, -v^2-4yv-y(4y-1)\big) = \big(4y-1, v\big)$$

Enfin on a

$$\begin{array}{rccl}\tilde{\alpha} = \phi_v : & \mathbb{Z}[y,v]\big/\big(2y-1,v\big) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}[y,v]\big/\big(4y-1,v\big)\\ & v=0 & \longmapsto & y-(v+2y)^2 = v = 0\\ & y & \longmapsto & v+2y = 2y\\ & v+y^2 = y^2 & \longleftarrow & y\end{array}$$

- dans l'exemple 4, on prend $\alpha \in \mathrm{Aut}\big(\mathbb{C}[y,z,v]\big)$ défini par:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha(y) & = & y(1+z)+v-1\\ \alpha(z) & = & z\\ \alpha(v) & = & yz^2+v(z-1)-z\end{array}\right. \text{ d'inverse } \left\{\begin{array}{lcl}\alpha^{-1}(y) & = & y(1-z)+v+1\\ \alpha^{-1}(z) & = & z\\ \alpha^{-1}(v) & = & yz^2-v(z+1)-z\end{array}\right.$$

On a bien $\alpha\big(z(zy-1),v\big) = \big(z(zy-1),v\big)$ et

$$\begin{array}{rccl}\tilde{\alpha} = \phi_v : & \mathbb{C}[y,z,v]\big/\big(z(zy-1),v\big) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[y,z,v]\big/\big(z(zy-1),v\big)\\ & z & \longmapsto & z\\ & v=0 & \longmapsto & yz^2+v(z-1)-z = v = 0\\ & y & \longmapsto & y(1+z)+v-1 = y+zy-1\\ & y(1-z)+v+1 = y-zy+1 & \longleftarrow & y\end{array}$$

D'un point de vue géométrique, le passage de ${}^{A[\bar{y}]}\!\big/_{I}$ à ${}^{A[\bar{y}]}\!\big/_{(I,v)}$ consiste à plonger la variété affine $\mathrm{Spec}\,{}^{A[\bar{y}]}\!\big/_{I}$ dans un espace affine de dimension plus grande. Dans la cas particulier où $A=\mathbb{C}$, la situation est assez bien connue grâce notamment à [Kal91].

4.4. Le cas $A = \mathbb{C}$

Dans le cas particulier où $A = \mathbb{C}$ (ou tout autre corps de caractéristique nulle algébriquement clos) notre problème consiste à se demander si un isomorphisme entre deux sous-variétés algébriques de $\mathbb{C}^n$ s'étend en un automorphisme polynômial de $\mathbb{C}^n$. Le résultat suivant, qui est une amélioration d'un résultat de Jelonek [Jel87] dû à Kaliman [Kal91] (voir aussi [Jel95] pour une "ré-amélioration") , dit que si les sous-variétés sont de co-dimension suffisamment grande la réponse est oui:

Théorème 4.4 (Kaliman, [Kal91]). — *Soit $\phi_* : X \to Y$ un isomorphisme entre deux sous-variétés affines algébriques fermées X et Y de $\mathbb{C}^n$, et TX le fibré tangent de Zariski de X. Si*

$$n > \max\bigl(2\dim(X) + 1, \dim(TX)\bigr),$$

alors ϕ_* s'étend en un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.

Bien évidemment, si X est lisse, la condition sur la dimension devient : $n > 2\dim(X) + 1$.
En outre Kaliman montre aussi que cette condition ne peut être améliorée en exhibant deux courbes (non lisses) isomorphes de $\mathbb{C}^3$ non équivalentes à automorphisme près.

4.5. Un isomorphisme récurrent

Outre les exemples donnés en 4.2 on a signalé que [SY01] contenait aussi des exemples d'hypersurfaces complexes isomorphes mais non équivalentes à automorphisme près. Certains de ces exemples sont construits, essentiellement, à partir de l'isomorphisme suivant:

$$\begin{array}{cccc} \phi \ : & A[y]\big/\bigl(y - p(y)^k\bigr) & \xrightarrow{\sim} & A[y]\big/\bigl(y - p(y^k)\bigr) \\ & y & \longmapsto & y^k \\ & p(y) & \longleftarrow & y \end{array}$$

où $p = p(\bar{y})$ est un polynôme quelconque de $A[y]$ et A un anneau quelconque (par exemple $A = \mathbb{C}[\bar{z}]$). D'autre part, dans l'article III, on a besoin de l'isomorphisme suivant:

$$\begin{array}{cccc}\phi\ : & A[y]\big/\big(y-ap(y)\big) & \xrightarrow{\sim} & A[y]\big/\big(y-p(ay)\big) \\ & y & \longmapsto & ay \\ & p(y) & \longleftarrow & y\end{array} \tag{4.5.1}$$

où a est un élément quelconque de l'anneau A.
Il parait alors naturel de donner la généralisation suivante de ces deux isomorphismes:

$$\begin{array}{cccc}\phi\ : & A[y]\big/\big(y-q(p(y))\big) & \xrightarrow{\sim} & A[y]\big/\big(y-p(q(y))\big) \\ & y & \longmapsto & q(y) \\ & p(y) & \longleftarrow & y\end{array} \tag{4.5.2}$$

où $p(y)$ et $q(y)$ sont des polynômes quelconques de $A[y]$.
En outre, grâce à la technique de [SY01], on montre le résultat suivant:

Lemme 4.5. — *Soit $p(y)$ et $q(y)$ deux polynômes de $A[y]$. Les polynômes $y-q(p(y))$ et $y-p(q(y))$ sont 1-stablement équivalents, de plus l'automorphisme α de $A[y,v]$ qui réalise cette équivalence peut-être choisi de telle sorte que*

$$\begin{array}{cccc}\tilde{\alpha}\ : & A[y,v]\big/\big(y-q(p(y)),v\big) & \xrightarrow{\sim} & A[y,v]\big/\big(y-p(q(y)),v\big) \\ & y & \longmapsto & q(y) \\ & p(y) & \longleftarrow & y\end{array}$$

Démonstration. — On vérifie que l'automorphisme α défini par

$$\begin{cases}\alpha(y)=v+q(y)\\ \alpha(v)=y-p(v+q(y))\end{cases} \quad \text{d'inverse} \quad \begin{cases}\alpha^{-1}(y)=v+p(y)\\ \alpha^{-1}(v)=y-q(v+p(y))\end{cases}$$

convient. $\square$

Ainsi, à l'isomorphisme naturel $A[y,v]\big/(r(y),v) \simeq A[y]\big/(r(y))$ près on retrouve l'isomorphisme 4.5.2.
Remarquons que si on pose $A=\mathbb{C}[z]$, $q(y)=y+zy-1$ et $p(y)=y-zy+1$, on a

$$y-q\big((p(y)\big)=y-p\big((q(y)\big)=y-[y-yz^2+z]=z(yz-1)$$

et on retrouve exactement l'exemple 4 ainsi que l'automorphisme de $\mathbb{C}[y,z]$ trouvé en 4.3 donné ici par le lemme 4.5.

4.6. Le problème de plongement d'Abhyankar-Sathaye

On s'intéresse désormais à un cas particulier du problème 4.1 qui consiste à regarder ce qui se passe lorsque l'idéal J est égal à $(y_{k+1}, \cdots, y_n)$ (où $1 \leq k \leq n-1$):

PROBLÈME 4.6 (de plongement d'Abhyankar-Sathaye). — *Tout isomorphisme*

$$\phi : A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]/I \xrightarrow{\sim} A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]/(y_{k+1}, \cdots, y_n) \simeq A[\bar{y}_{\mathbf{k}}]$$

se relève-t-il en un automorphisme de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$*?*

Dans ce cas le problème est résolu dès lors qu'on a prouvé que I est équivalent à $(y_{k+1}, \cdots, y_n)$ sans forcément que l'automorphisme correspondant ne coïncide avec ϕ sur $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]/I$.
En effet, soit α un automorphisme de $A[\bar{y}]$ tel que $\alpha(I) = (y_{k+1}, \cdots, y_n)$ et $\tilde{\alpha}$ l'isomorphisme des algèbres quotient induit, on a

$$\begin{tikzcd} A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]/I \arrow[rr, "\sim", "\phi"'] \arrow[dr, "\tilde{\alpha}"', "\wr"] & & A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]/(y_{k+1}, \cdots, y_n) \simeq A[\bar{y}_{\mathbf{k}}] \\ & A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]/(y_{k+1}, \cdots, y_n) \simeq A[\bar{y}_{\mathbf{k}}] \arrow[ur, "\wr", "\bar{\beta}:=\phi\tilde{\alpha}^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

où $\bar{\beta} := \phi\tilde{\alpha}^{-1} \in \mathrm{Aut}(A[\bar{y}_{\mathbf{k}}])$ s'étend naturellement en un $y_{k+1}, \cdots, y_n$-automorphisme de $A[\bar{y}]$ noté β.
On a alors

$$\beta\alpha(I) = \beta\big((y_{k+1}, \cdots, y_n)\big) = (y_{k+1}, \cdots, y_n)$$

et si on note $\widetilde{\beta\alpha}$ l'isomorphisme induit on a

$$\widetilde{\beta\alpha} = \bar{\beta}\tilde{\alpha} = \phi\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha} = \phi.$$

Et $\beta\alpha$ est donc bien un automorphisme qui relève ϕ.

En général la réponse à la question du problème 4.6 est non, comme on le verra dans la section 5, cependant, lorsque $A = \mathbb{C}$, on ne connaît pas de contre-exemple qui infirme le problème, d'où la conjecture suivante:

CONJECTURE 4.7 (de plongement d'Abhyankar-Sathaye). — *Tout plongement birégulier de* $\mathbb{C}^k$ *dans* $\mathbb{C}^n$ *est* rectifiable *c'est-à-dire équivalent à un plongement linéaire.*

On se contente, dans cette section, de donner le corollaire du théorème 4.4 adapté:

Corollaire 4.8 (Kaliman, [Kal91]). — *Lorsque* $n \geq 2k+2$ *la conjecture 4.7 de plongement d'Abhyankar-Sathaye est vraie.*

Lorsque cette condition $n \geq 2k+2$ n'est pas vérifiée on sait très peu de choses sur la conjecture d'Abhyankar-Sathaye, on donne un aperçu des connaissances supplémentaires que l'on a à ce jour sur le problème 4.6 dans la section 5.

5. Variables et problème de plongement d'Abhyankar-Sathaye

5.1. Les hyperplans sont-ils des variables?

Lorsque $k = n-1$ le problème 4.6 de plongement devient:

Problème 5.1 (de l'hyperplan plongé d'Abhyankar-Sathaye). — *Un polynôme* $p = p(\bar{y})$ *de* $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ *qui vérifie*

$$A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]/(p) \simeq A^{[n-1]}$$

est-il une variable de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$*?*

Un polynôme qui satisfait l'hypothèse du théorème sera appelé un *hyperplan* ou *A-hyperplan*; bien entendu lorsque $n = 3$ resp. 2 on dira *plan* resp. *droite* (ce vocabulaire est emprunté à Sathaye [Sat76]). On dira aussi qu'un polynôme $p \in A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ définit une *fibration en hyperplans* ou en *A-hyperplans* si $p - a$ est un (A-)hyperplan, $\forall a \in A$.

Lorsque $n = 1$, $A[y]/(p) \simeq A \Rightarrow \exists q \in A[y]$ tel que $y = p(y)q(y)$ et on montre sans trop de difficultés que p est alors de la forme $uy + b + n(y)$ comme dans la proposition 3.5(1.) c'est-à-dire une variable.

En toute généralité la réponse est encore négative, comme le montre le contre-exemple suivant dû à Nagata:

Contre-exemple 5.2 (au problème 5.1 (Nagata, [Nag71])). — *Si* K *un corps de caractéristique* $p \neq 0$ *et* $a > 1$ *un entier premier à* p*, alors le polynôme* $y - y^{ap} - z^{p^2}$ *est une droite mais pas une variable de* $K[y,z]$.

Remarque. — Le fait que $y - y^{ap} - z^{p^2}$ soit une droite peut se démontrer avec un isomorphisme du type 4.5.2, en effet on a:

$$\begin{array}{rccc} \phi\ : & K[z][y]\big/\big(y-(y^a+z^p)^p\big) & \xrightarrow{\sim} & K[z][y]\big/\big(y-(y^{pa}+z^p)\big) \\ & y & \longmapsto & y^p \\ & y^a+z^p & \longleftarrow & y \end{array}$$

Et $y-(y^{pa}+z^p) = y-(y^a+z)^p$ est une variable de $K[y,z]$ (l'automorphisme correspondant se décompose en deux automorphismes élémentaires). En outre, d'après le lemme 4.5, la "non-variable" $y - y^{ap} - z^{p^2}$ est 1-stablement équivalente à une variable.

C'est la caractéristique non nulle qui permet de trouver des contre-exemples, aussi a-t-on la conjecture:

Conjecture 5.3 (d'Abhyankar-Sathaye). — *Soit A un anneau de caractéristique nulle. Si $p = p(\bar{y})$ est un hyperplan de $A[\bar{y}]$ alors p est une variable.*

5.2. Les résultats connus

Les principaux résultats concernant cette conjecture datent des années 70. Le premier résultat qui correspond au cas où $n = 2$ et A est un corps de caractéristique nulle a été trouvé indépendamment par Abhyankar et Moh [AM75] d'un côté et Suzuki [Suz74] de l'autre dans le cas où $K = \mathbb{C}$:

Théorème 5.4 (Abhyankar-Moh-Suzuki). — *Si K un corps de caractéristique nulle et $p = p(y,z)$ une droite de $K[y,z]$ alors p est une variable modérée de $K[y,z]$.*

Remarque. — Au passage, on remarque que ce théorème redémontre le théorème 1.2 de Jung-van der Kulk dans le cas où le corps est de caractéristique nulle puisque si $\alpha \in \mathrm{Aut}\big(K[y,z]\big)$, $\alpha(y)$ est une droite donc une variable modérée donc $\alpha(y) = \beta(y)$ où β est modéré et ainsi $\alpha = \beta\beta^{-1}\alpha$ avec $\beta^{-1}\alpha \in \mathrm{Aut}_{K[y]}\big(K[y][z]\big)$ aussi modéré donc α est modéré.

Ce théorème a été généralisé par Russell et Sathaye dans [RS79] puis par Bhatwadekar dans [Bha88] pour devenir:

Théorème 5.5 (Russell-Sathaye-Bhatwadekar). — *Si A est un anneau commutatif contenant $\mathbb{Q}$ et p une droite de $A[y,z]$ alors p est une variable de $A[y,z]$.*

En dimension $n = 3$ on n'a aucun résultat général, cependant, en imposant une certaine forme au plan p on a:

THÉORÈME 5.6 (Russell [Rus76], Sathaye [Sat76]). — *Si K est un corps quelconque et $p = p(y,z,u) = f(y,z)u + g(y,z)$ est un plan de $K[y,z,u]$ alors p est une variable de $K[y,z,u]$.*

Ce résultat peut se généraliser au cas où u est remplacé par u^n (n quelconque) dans p grâce au résultat de D. Wright:

THÉORÈME 5.7 (Wright [Wri78]). — *Soit K un corps algébriquement clos et p un polynôme de $K[y,z,u]$ de la forme $p(y,z,u) = f(y,z)u^n + g(y,z)$ où $n \geq 2$ n'est pas divisible par la caractéristique du corps K. Si p est un plan alors c'est une variable.*

Ce résultat est encore généralisé par Russell et Sathaye:

THÉORÈME 5.8 (Russell-Sathaye [RS79]). — *Soit K un corps de caractéristique nulle et p un polynôme de $K[y,z,u]$ de la forme*

$$p(y,z,u) = a(y,z)\sum_{i\geq 1} f_i(y,z)u^i + g(y,z)$$

où $a(y,z) \notin K$. Si p est un plan alors c'est une variable.

Enfin donnons encore un résultat qui, bien qu'il ne soit pas tout à fait du même type, constitue un premier pas dans la caractérisation des variables de $\mathbb{C}^{[3]}$ en générale.

THÉORÈME 5.9 (Kaliman, [Kal]). — *Soit $p = p(x,y,z)$ un polynôme de $\mathbb{C}[x,y,z]$. Si p définit une fibration en plans, i.e. $p - c$ est un plan $\forall c \in \mathbb{C}$, alors p est une variable de $\mathbb{C}[x,y,z]$.*

Il existe bien entendu d'autre résultats de ce type, comme, par exemple, [Rus79], [BD93] ou [Rus96].

6. Variables et dérivations localement nilpotentes de $A[y,z]$

6.1. Une LND définie à partir d'un automorphisme

Comme on l'a vu dans la sous-section 1.3.2, outre le passage à l'exponentiel qui permet de fabriquer des automorphismes à partir de dérivations localement nilpotentes, on a un autre lien, complètement différent, entre LND et

automorphismes de $A[\bar{y}]$ qui consiste à conjuguer l'une avec l'autre. Ainsi, si l'on prend l'une des dérivations les plus simples: $\frac{\partial}{\partial y_n}$ et un automorphisme α de $A[\bar{y}]$, on obtient une nouvelle dérivation localement nilpotente $\alpha\frac{\partial}{\partial y_n}\alpha^{-1}$ que l'on peut voir comme étant la dérivation $\frac{\partial}{\partial Y_n}$ dans le système de coordonnées $\big(Y_1 = \alpha(y_1), \cdots, Y_n = \alpha(y_n)\big)$.
Il existe une autre façon d'écrire cette dérivation, en effet soit $\mathrm{j}\big(\alpha(y_1), \cdots, \alpha(y_{n-1}), *\big)$ l'application de $A[\bar{y}]$ dans lui même qui envoie un polynôme $p(\bar{y})$ sur le jacobien $\mathrm{j}\big(\alpha(y_1), \cdots, \alpha(y_{n-1}), p\big)$; on vérifie aisément que c'est bien une dérivation. De plus

$$\begin{aligned} \mathrm{j}\big(\alpha(y_1), \cdots, \alpha(y_{n-1}), \alpha(y_i)\big) &= \mathrm{j}(\alpha)\delta_{in} \\ &= \mathrm{j}(\alpha).\alpha\frac{\partial}{\partial y_n}\alpha^{-1}\big(\alpha(y_i)\big) \\ \text{et donc} \qquad & \\ \alpha\frac{\partial}{\partial y_n}\alpha^{-1} &= \mathrm{j}(\alpha)^{-1}.\,\mathrm{j}\big(\alpha(y_1), \cdots, \alpha(y_{n-1}), *\big) \end{aligned}$$

Ainsi la donnée d'un automorphisme ou plus exactement de $n-1$ composantes d'un automorphisme fournit directement une LND.
Lorsque $n = 2$, on introduit la notation Δ_p pour un polynôme p quelconque:

Définition 6.1 ($\boldsymbol{\Delta}_p$). — *Soit $p = p(y,z)$ un polynôme de $A[y,z]$, on note Δ_p la dérivation de $A[y,z]$ définie par*

$$\begin{array}{rccl} \Delta_p : & A[y,z] & \longrightarrow & A[y,z] \\ & q(y,z) & \longmapsto & \Delta_p(q) = \mathrm{j}\big(p,q\big) = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial y}. \end{array}$$

Ainsi, d'après ce qui précède, si p est une variable de $A[y,z]$ alors Δ_p est une dérivation localement nilpotente.
Les travaux de D. Daigle et G. Freudenburg permettent de décrire, entre autres, les dérivations localement nilpotentes de $A[y,z]$.

6.2. Un théorème dû à Daigle et Freudenburg

Grâce aux résultats de [DF98] on peut donner une caractérisation des variables p de $A[y,z]$ par les dérivations Δ_p associées lorsque A est un anneau factoriel contenant $\mathbb{Q}$.

Théorème 6.2 (Daigle et Freudenburg). — *Soit A un anneau factoriel*[7] *contenant $\mathbb{Q}$, de corps des fractions $K =$ Frac(A), $p = p(y,z)$ un polynôme*

[7]Rappelons qu'un anneau factoriel est, par définition, intègre.

de $A[y,z]$ et $\Delta_p = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}$ la dérivation associée. Les trois assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Le polynôme p est une variable de $A[y,z]$.

(ii) La dérivation Δ_p est localement nilpotente et l'idéal engendré par l'image de Δ_p, $\big(\Delta_p(A[y,z])\big) = \big(\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\big) = A[y,z]$.

(iii) Le polynôme p est une variable de $K[y,z]$ et $\big(\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\big) = A[y,z]$.

Démonstration. — Supposons que $p = p(y,z)$ est une variable de $A[y,z]$ i.e. $p = \alpha(y)$ où $\alpha \in \operatorname{Aut}(A[y,z])$ et donc si $q = \alpha(z)$, on a

$$\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial y} = \mathrm{j}(\alpha) \in A^\star$$

d'où $\big(\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\big) = A[y,z]$.
De plus on a bien évidemment $\alpha \in \operatorname{Aut}(K[y,z])$ et donc p est une variable de $K[y,z]$. Enfin comme on l'a vu précédemment, puisque $A[y,z] = A[p,q]$ la dérivation

$$\Delta_p : r(p,q) \longmapsto \mathrm{j}(p,q)\frac{\partial r}{\partial q}(p,q)$$

est localement nilpotente. On a montré (i)⇒(ii) et (iii).
Supposons maintenant que (ii) est vérifié. D'après la proposition 2.1 de [DF98], pour toute dérivation localement nilpotente de $A[y,z]$ non nulle D on a $\ker D = A^{[1]}$ donc on a $\ker \Delta_p = A[f]$ pour un certain $f = f(y,z)$ de $A[y,z] \setminus A$. Puisque $p \in \ker \Delta_p$ on a en particulier $p = P(f)$ pour un certain polynôme $P(t) \in A[t]$ mais alors

$$A[y,z] = \big(\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\big) = \big(P'(f)\frac{\partial f}{\partial y}, P'(f)\frac{\partial f}{\partial z}\big) \subset \big(P'(f)\big)$$

donc $P'(f) \in A^\star$ ce qui nécessite $P = ut + v$ où $u \in A^\star$ et $v \in A$ d'où

$$\ker \Delta_p = A[f] = A[u^{-1}(p - v)] = A[p]$$

Le second résultat de [DF98] que l'on utilise est le théorème 2.5 qui dit que pour une dérivation localement nilpotente $D \in \operatorname{LND}(A[y,z])$ on a $\big(D(A[y,z])\big) = A[y,z]$ si et seulement s'il existe $q = q(y,z) \in A[y,z]$ tel que $D(q) = 1$. Ainsi pour notre dérivation Δ_p, on a $\Delta_p(q) = 1$. C'est un fait bien connu ([DF98] 1.1(3) ou [Wri81] prop. 2.1) que, puisque $\mathbb{Q} \subset A$, on a alors, $A[y,z] = \ker D[q] = A[p,q]$ et donc p est une variable de $A[y,z]$; on a montré

(ii)$\Rightarrow$(i).
Supposons enfin que (iii) est vérifié. D'après l'implication (i)$\Rightarrow$(ii) où A est remplacé par K on sait que Δ_p définit une dérivation localement nilpotente de $K[y,z]$ en même temps qu'une dérivation de $A[y,z]$, c'est donc une LND de $A[y,z]$; on a montré (iii)$\Rightarrow$(ii) ce qui termine la démonstration de l'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii). $\square$

7. Les variables résiduelles sont-elles des variables?

7.1. Présentation du problème

Dans la logique de ce qui précède (voir ss-sec.2.3) on a

DÉFINITION 7.1 (**Variable (hyperplan, plan...) (A-)résiduelle).** — *Un polynôme $p \in A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ est une variable résiduelle ou variable A-résiduelle si $p \bmod \mathcal{M}$ est une variable de ${}^{A}\!/\!_{\mathcal{M}}\,[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A. L'adjectif (A-)résiduel s'étend naturellement aux hyperplans, plans et droites tels qu'ils sont définis dans la sous-section 5.1.*

En fait, le terme "variable résiduelle" (ou plutôt "residual variable" puisqu'il s'agit d'un article en anglais) a déjà été utilisé par S. M. Bhatwadekar et A. K. Dutta dans [BD93]. Le sens qu'ils lui donnent est différent du notre car chez eux regarder un polynôme de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ "résiduellement" consiste à le regarder dans ${}^{A_{\mathcal{P}}}\!/\!_{\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}}\,[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de A. Ainsi une variable résiduelle au sens de Bhatwadekar et Dutta est une variable résiduelle à notre sens mais l'inverse n'est pas forcément vrai.

Bien évidemment de même qu'on avait l'implication 2.3.3 pour les automorphismes on a, pour les variables

$$p \text{ est une variable} \quad \Rightarrow \quad p \text{ est une variable résiduelle} \qquad (7.1.1)$$

La proposition 2.15 qui donne la réciproque de 2.3.3 nous autorise à penser que la réciproque de 7.1.1 est aussi vraie. Remarquons encore que, si

$$a \in \bigcap_{\mathcal{M}\max} \mathcal{M} \setminus \sqrt{0_A} \neq \emptyset$$

le polynôme $y(1+ay)$ sert de contre-exemple à la réciproque de 7.1.1. Aussi, il semble logique de se poser la question suivante:

QUESTION 7.2. — *Soit A un anneau tel que $\bigcap_{\mathcal{M}\max}\mathcal{M}=\sqrt{0_A}$. Si p est une variable résiduelle de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ i.e. un polynôme tel que $p \bmod \mathcal{M}$ est une variable de ${}^{A}\!/\!_{\mathcal{M}}[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A, est-ce-que p est une variable de $A[\bar{y}_{\mathbf{n}}]$?*

Dans le cas $n = 1$ on peut identifier automorphismes et variables et, d'après la proposition 2.15, la réponse est donc positive.
Dans le cas particulier où les idéaux de A sont en nombre fini la réponse est encore positive, c'est une conséquence du lemme suivant:

LEMME 7.3. — *Soit $A_1, \cdots, A_m$ des anneaux et A l'anneau produit $A := A_1 \times \cdots \times A_m$. L'isomorphisme de A-algèbres :*

$$\begin{array}{rcl} (A_1 \times \cdots \times A_m)[\bar{y}] & \xrightarrow{\simeq} & (A_1[\bar{y}]) \times \cdots \times (A_m[\bar{y}]) \\ y_i = (1_{A_1}, \cdots, 1_{A_m}).y_i & \longmapsto & (y_i, \cdots, y_i) \end{array}$$

s'étend naturellement aux groupes des A-automorphismes:

$$\mathrm{Aut}(A[\bar{y}]) \simeq \mathrm{Aut}(A_1[\bar{y}]) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(A_m[\bar{y}]).$$

et induit une correspondance bi-univoque:

$$\mathrm{Var}\big(A[\bar{y}]\big) \stackrel{1-1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Var}\big(A_1[\bar{y}]\big) \times \cdots \times \mathrm{Var}\big(A_m[\bar{y}]\big)\ .$$

Dans le corollaire suivant on parle de $\bar{z}_{\mathbf{k}}$-variable A-résiduelle, c'est à dire $\bar{z}_{\mathbf{k}}$-variable $\bmod \mathcal{M}$ pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A ce qui n'est pas équivalent a priori à variable $A[\bar{z}_{\mathbf{k}}]$-résiduelle. On peut d'abord regarder ce corollaire avec $k = 0$ puis constater que rajouter $\bar{z}_{\mathbf{k}}$ ne change pas grand chose.

COROLLAIRE 7.4. — *Soit A un anneau qui n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux et tel que $\bigcap_{\mathcal{M}\max}\mathcal{M}=\sqrt{0_A}$ (condition vérifiée pas un anneau Artinien). Si p est une $\bar{z}_{\mathbf{k}}$-variable A-résiduelle de $A[\bar{z}_{\mathbf{k}}][\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ alors c'est une $A[\bar{z}_{\mathbf{k}}]$-variable ($k \geq 0,\ n \geq 1$).*

Démonstration. — En vertu du corollaire 3.4 quitte à quotienter $A[\bar{z}_{\mathbf{k}}]$ par $\sqrt{0_A}[\bar{z}_{\mathbf{k}}]$ on peut supposer que $A[\bar{z}_{\mathbf{k}}]$ est réduit, i.e. que A est réduit. Si $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_l$ sont les idéaux maximaux de A le théorème des restes chinois donne l'isomorphisme:

$$\begin{array}{rcl} A = {}^{A}\!\big/\!_{\prod_{i\in 1}\mathcal{M}_i} & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i\in 1} {}^{A}\!\big/\!_{\mathcal{M}_i} \\ a & \longmapsto & (a \bmod \mathcal{M}_1, \cdots, a \bmod \mathcal{M}_l) \end{array}$$

Si $B := A[\bar{z}_{\mathbf{k}}]$ et $\mathcal{N}_i := \mathcal{M}_i[\bar{z}_{\mathbf{k}}]$ on a encore

$$B = {}^{B}\!\diagup_{\prod_{i\in\mathbf{1}}\mathcal{N}_i} \qquad \simeq \prod_{i\in\mathbf{1}} {}^{B}\!\diagup_{\mathcal{N}_i} \quad .$$

Or une $\bar{z}_{\mathbf{k}}$-variable A-résiduelle est un élément de

$$\prod_{i\in\mathbf{1}} \bar{z}_{\mathbf{k}}\text{-}\operatorname{Var}\big({}^{A}\!\diagup_{\mathcal{M}_i}\ [\bar{z}_{\mathbf{k}}][\bar{y}]\big) = \prod_{i\in\mathbf{1}} \operatorname{Var}\big({}^{B}\!\diagup_{\mathcal{N}_i}\ \ [\bar{y}]\big)$$

et d'après le lemme précédent (qui donne la flèche horizontale) et le théorème des restes Chinois (qui donne la flèche diagonale de droite) on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in\mathbf{1}} \operatorname{Var}\big(\ B/\mathcal{N}_i[\bar{y}]\ \big) \arrow[rr, leftrightarrow, "1-1"] \arrow[dr, leftrightarrow, "1-1"] & & \operatorname{Var}\Big(\big(\ \prod_{i\in\mathbf{1}} B/\mathcal{N}_i\big)[\bar{y}]\Big) \arrow[dl, leftrightarrow, "1-1"'] \\ & \operatorname{Var}\big(B[\bar{y}_{\mathbf{k}}]\big) & \end{tikzcd}$$

La flèche diagonale de gauche permet de "remonter" les variables résiduelles en variables. $\square$

Ce corollaire a lui-même un corollaire qui correspond au cas où $A = {}^{\mathbb{C}[x]}\!\diagup_{(a(x))}$:

Corollaire 7.5. — *Soit $a = a(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme de degré au moins un. Un polynôme $p = p(x, \bar{y}_{\mathbf{n}}, \bar{z}_{\mathbf{k}})$ de ${}^{\mathbb{C}[x]}\!\diagup_{(a(x))}\ [\bar{z}_{\mathbf{k}}][\bar{y}_{\mathbf{n}}]$ est une $x, \bar{z}_{\mathbf{k}}$-variable si et seulement si c'est une $\bar{z}_{\mathbf{k}}$-variable x-résiduelle autrement dit si $p = p(x_0, \bar{y}_{\mathbf{n}}, \bar{z}_{\mathbf{k}})$ est une $\bar{z}_{\mathbf{k}}$-variable, $\forall x_0 \in a^{-1}(0)$.*

Dans le cas $n = 2$ on ne connaît pas la réponse à la question 7.2 en général; on montre dans la sous-section suivante que la réponse est "oui" si $A = \mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}]$.

7.2. Les variables $\bar{x}$-résiduelles de $\mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y, z]$ sont des $\bar{x}$-variables

En utilisant les résultats sur les dérivations localement nilpotentes de [DF98] tels qu'on les présente en 6.2 on montre:

Théorème 7.6. — *Le polynôme $p = p(\bar{x}_{\mathbf{k}}, y, z)$ de $\mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y, z]$ est une $\bar{x}$-variable de $\mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y, z]$ si et seulement si c'est une variable $\bar{x}$-résiduelle, i.e. $p(\bar{x}_0, y, z)$ est une variable de $\mathbb{C}[y, z]$ pour tout $\bar{x} = \bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k$ fixé.*

Démonstration. — Bien entendu, comme on l'a vu précédemment, une $\bar{x}$-variable est une variable $\bar{x}$-résiduelle et seule la réciproque n'est pas triviale. Soit $p = p(\bar{x}, y, z)$ une variable $\bar{x}$-résiduelle de $\mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y, z]$. Soit $r = r(\bar{x}, y, z)$ un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y, z]$, on vérifie aisément que, $\forall \bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k$, on a

$$\Delta_p\big(r\big)(\bar{x}_0, y, z) = \Delta_{p(\bar{x}_0,y,z)}\big(r(\bar{x}_0, y, z)\big) \in \mathbb{C}[y, z]$$

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}$ on a

$$\Delta_p^m\big(r\big)(\bar{x}_0, y, z) = \Delta^m_{p(\bar{x}_0,y,z)}\big(r(\bar{x}_0, y, z)\big) \in \mathbb{C}[y, z]$$

Or, p étant une variable $\bar{x}$-résiduelle, $\forall \bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k$, d'après le théorème 6.2, la dérivation de $\mathbb{C}[y, z]$, $\Delta_{p(\bar{x}_0,y,z)}$ est localement nilpotente et donc

$$\forall \bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k, \ \ \exists d(x_0) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \Delta^{d(x_0)}_{p(\bar{x}_0,y,z)}\big(r(\bar{x}_0, y, z)\big) = 0$$

autrement dit,

$$\mathbb{C}^k = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{\bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k \text{ tel que } \Delta^m_{p(\bar{x}_0,y,z)}\big(r(\bar{x}_0, y, z)\big) = 0\}$$

et, d'après ce qui précède,

$$\mathbb{C}^k = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{\bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k \text{ tel que } \Delta_p^m(r)(\bar{x}_0, y, z) = 0\}$$

Mais $\mathbb{C}$ étant indénombrable, $\mathbb{C}^k$ ne peut pas être une réunion dénombrable de sous-variétés de codimension au moins 1 donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta_p^M(r)(\bar{x}_0, y, z) = 0$, $\forall \bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k$ i.e. $\Delta_p^M(r) = 0$. On a montré que Δ_p est localement nilpotente.
En outre, on sait que, d'après le théorème 6.2, puisque p est une variable $\bar{x}$-résiduelle, on a

$$\big(\frac{\partial p}{\partial y}(\bar{x}_0, y, z), \frac{\partial p}{\partial z}(\bar{x}_0, y, z)\big) = \mathbb{C}[y, z], \ \forall \bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k$$

ce qui équivaut à

$$\{(y_0, z_0) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \frac{\partial p}{\partial y}(\bar{x}_0, y_0, z_0) = \frac{\partial p}{\partial z}(\bar{x}_0, y_0, z_0) = 0\} = \emptyset, \ \forall \bar{x}_0 \in \mathbb{C}^k$$

ou encore

$$\frac{\partial p}{\partial y}^{-1}(0) \cap \frac{\partial p}{\partial z}^{-1}(0) = \emptyset$$

et donc

$$\big(\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\big) = \mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y, z]$$

Le polynôme p vérifie donc la condition (ii) du théorème 6.2, c'est une $\bar{x}$-variable de $\mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y,z]$. $\square$

Remarquons que ce résultat permet de redémontrer le théorème 5.5 dans le cas particulier où $A = \mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}]$ en utilisant, bien sûr, le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki (Th.5.4):

COROLLAIRE 7.7. — *Si $p = p(\bar{x}_{\mathbf{k}}, y, z)$ est une $\bar{x}_{\mathbf{k}}$-droite de $\mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y,z]$ alors p est une $\bar{x}_{\mathbf{k}}$-variable de $\mathbb{C}[\bar{x}_{\mathbf{k}}][y,z]$.*

Démonstration. — Une $\bar{x}_{\mathbf{k}}$-droite est une droite $\bar{x}_{\mathbf{k}}$-résiduelle et par le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki une droite $\bar{x}_{\mathbf{k}}$-résiduelle est une variable $\bar{x}_{\mathbf{k}}$-résiduelle et donc, d'après le théorème 7.6 c'est une $\bar{x}_{\mathbf{k}}$-variable. $\square$

8. De nouvelles variables

8.1. Quelques variables dans le cas où A est un anneau quelconque

Grâce aux résultats de 2.2.2 on peut construire des variables sans pour autant construire tout l'automorphisme correspondant.
Les deux propositions suivantes sont des conséquences du corollaire 2.11:

PROPOSITION 8.1. — *Soit $p = p(y,z)$ une variable de l'anneau de polynômes $A[y,z]$ et $a \in A^{\times}$. Le polynôme $p(y,az)$ est une variable de $A[y,z]$ si et seulement si $p(y,0)$ est une variable de ${}^{A}\!/_{(a)}[y]$ i.e. $p(y,0) = b_0 + b_1 y + r(y)$ où $b_0, b_1 \in A$, b_1 est inversible* $\bmod (a)$ *et $r(y) \in A[y]$ nilpotent* $\bmod (a)$ *(voir Prop.3.5(1)).*

Démonstration. — Si $p(y,az)$ est une variable de $A[y,z]$ alors $p(y,az) \bmod (a)$ est une variable de ${}^{A}\!/_{(a)}[y,z]$ mais $p(y,az) \equiv p(y,0) \bmod (a)$ et il n'est pas difficile de montrer que $p(y,0) \bmod (a)$ est également une variable de ${}^{A}\!/_{(a)}[y]$.
Supposons maintenant que $p(y,z)$ est une variable de $A[y,z]$ et $p(y,0) \bmod (a)$ une variable de ${}^{A}\!/_{(a)}[y]$. Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}\big(A[y,z]\big)$ un automorphisme tel que $\alpha(y) = p(y,z)$. On a

$$\alpha(z) \in A[y,z] = A[y] + (z)$$

or, par hypothèses,

$$A[y] = A[p(y,0)] + (a)$$

et donc

$$\begin{array}{rcl} \alpha(z) & \in & A[p(y,0)] + (a,z) \\ \alpha(z) & \equiv & q\big(p(y,0)\big) \bmod (a,z) \quad \equiv \quad q\big(p(y,z)\big) \bmod (a,z) \end{array}$$

où q est un polynôme de $A^{[1]}$. Soit μ l'automorphisme élémentaire défini par

$$\begin{cases} \mu(y) &= y \\ \mu(z) &= z - q(y) \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} \alpha\mu(y) &= \alpha(y) = p(y,z) \\ \alpha\mu(z) &= \alpha\big(z - q(y)\big) = \alpha(z) - q\big(p(y,z)\big) \equiv 0 \bmod (a,z) \end{cases}$$

et d'après le corollaire 2.11, $\sigma\alpha\mu\sigma^{-1} \in \operatorname{Aut}\big(A[y,z]\big)$ où σ est l'endomorphisme de $A[z]$ défini par $\sigma(z) = az$. Ainsi $\sigma\alpha\mu\sigma^{-1}(y) = \sigma\alpha\mu(y) = \sigma\big(p(y,z)\big) = p(y,az)$ est une variable de $A[y,z]$. □

Voici quelques exemples où cette proposition s'applique:

$$p(y,az) = az + b_0 + b_1 y + r(y) \tag{8.1.1}$$

est une variable de $A[y,z]$ lorsque $a \in A^{\times}$, b_1 est inversible $\bmod a$ et $r(y) \in A[y]$ est nilpotent $\bmod a$. On retrouve la proposition 2.2 de [Rus76] qui constitue le dernier pas de la démonstration du théorème 5.6.

$$p(y,az) = a^2 z + y + ay^2$$

est une variable de $A[y,z]$ car $p(y,z) = y + a(z+y^2)$ est une variable modérée de $A[y,z]$; on retrouve la variable de Nagata. On a aussi $a^2z + y + ay^2 = \tilde{p}(y,a^2z)$ où $\tilde{p}(y,z) = z + y + ay^2$ comme dans l'exemple précédent.

$$p(y,az) = y + h\big(az + g(y)\big) \tag{8.1.2}$$

est une variable de $A[y,z]$ si $h(t) = h_0 + h_1 t + \cdots \in A[t]$ vérifie h_i nilpotent $\bmod (a)$, $\forall i \geq 1$ (la variable de Nagata est de ce type).

On se souvient (sous-section 3.2) que la variable de Nagata est stablement modérée, en fait, le théorème 5 de [EV99] donne un résultat un peu plus général qui doit être attribué à E. Edo:

Théorème 8.2 (Edo). — *Lorsque A un anneau factoriel, la variable 8.1.2 précédente est stablement modérée.*

En regardant l'image de z par l'automorphisme du corollaire 2.11 on obtient:

Proposition 8.3. — *Soit $p = p(\bar{y}_{\mathbf{m}}, z)$ une variable de l'anneau de polynômes $A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, z]$ et $a \in A^{\times}$. Si $\frac{p(\bar{y}_{\mathbf{m}}, az)}{a} \in A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, z]$ alors c'est une variable de $A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, z]$.*

Démonstration. — Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}\big(A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, z]\big)$ tel que $\alpha(z) = p = p(\bar{y}_{\mathbf{m}}, z)$. La condition $\frac{p(\bar{y}_{\mathbf{m}}, az)}{a} \in A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, z]$ est équivalente à a divise $p(\bar{y}_{\mathbf{m}}, 0)$ ou encore $\alpha(z) \in (z, a)$ et donc, d'après le corollaire 2.11, si σ est défini par $\sigma(z) = az$ on a

$$\sigma\alpha\sigma^{-1}(z) = \frac{\sigma\alpha(z)}{a} = \frac{\sigma(p)}{a} = \frac{p(\bar{y}_{\mathbf{m}}, az)}{a}$$

est une variable de $A[\bar{y}_{\mathbf{m}}, z]$. □

Un cas particulier de ce résultat donne l'automorphisme qui relève l'isomorphisme ϕ dans 4.5.1. En effet, en remplaçant y par z et A par $A[\bar{y}_{\mathbf{m}}]$ dans l'isomorphisme 4.5.1 on obtient

$$\begin{array}{cccc} \phi \ : & A[\bar{y}_{\mathbf{m}}][z] \big/ \big(z - ap(\bar{y}_{\mathbf{m}}, z)\big) & \xrightarrow{\sim} & A[\bar{y}_{\mathbf{m}}][z] \big/ \big(z - p(\bar{y}_{\mathbf{m}}, az)\big) \\ & z & \longmapsto & az \\ & p(\bar{y}_{\mathbf{m}}, z) & \longleftarrow & z \end{array}$$

et si $z - ap(\bar{y}_{\mathbf{m}}, z)$ est une variable alors d'après la proposition précédente $z - p(\bar{y}_{\mathbf{m}}, az)$ est équivalent à $z - ap(\bar{y}_{\mathbf{m}}, z)$ et à z ce qui suffit pour relever l'isomorphisme ϕ (voir la sous-section 4.6).

Une application du corollaire 2.10:

PROPOSITION 8.4. — *Soit σ un y-endomorphisme de $A[y, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$ qui satisfait $\sigma \in \mathrm{End}(A[y][\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \cap \mathrm{Aut}(\mathrm{Quot}(A)[y][\bar{z}_{\mathbf{n}}])$et $k = k(\sigma)$ le plus petit entier positif tel que*

$$\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k \in \mathrm{End}(A[y][\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \text{ (voir Lem.2.6).}$$

Alors $y + \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\sigma(z_1)$ est une variable de $A[y, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le corollaire 2.10 avec $\alpha \in \mathrm{Aut}_{A[\bar{z}_{\mathbf{n}}]}\big(A[\bar{z}_{\mathbf{n}}][y]\big)$ défini par $\alpha(y) = y + \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k z_1$. □

Ainsi,

$$y + a(az + y^2)$$

la variable de Nagata, est du type $y + \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k\sigma(z_1)$ avec $a = \mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma) = \mathrm{j}(\sigma)$, $\sigma(z) = az + y^2$.

$$y + a^6[az + y(yu + z^2)]$$

est aussi une variable (voir la section 10 plus bas).

8.2. Quelques variables dans le cas où $A = \mathbb{C}[x]$

Les résultats présentés restent vrais si on remplace $\mathbb{C}$ par n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

La proposition 2.8 permet de montrer la proposition suivante:

PROPOSITION 8.5. — *Soit $p = p(x, \bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}})$ une x-variable de $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$ et $\sigma \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}[x]}(\mathbb{C}[x][\bar{z}_{\mathbf{n}}]) \cap \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}(x)}(\mathbb{C}(x)[\bar{z}_{\mathbf{n}}])$ de jacobien x tel que*

$$\sigma^{-1}x \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}[x]}(\mathbb{C}[x][\bar{z}_{\mathbf{n}}])$$

Si $p(0, \bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}})$ est une $\bar{z}_{\mathbf{n}}$-variable de $\mathbb{C}[\bar{z}_{\mathbf{n}}][\bar{y}_{\mathbf{m}}]$ alors $\sigma(p)$ est une x-variable de $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$.

Démonstration. — On se place dans les hypothèses de la proposition. Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[x]}\big(\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]\big)$ tel que $\alpha(y_1) = p(x, \bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}})$. Soit α_0 l'automorphisme de $\mathbb{C}[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$ obtenu en fixant $x = 0$ dans α, autrement dit $\alpha_0 = \alpha \bmod (x)$. Par hypothèses, il existe un $\bar{z}_{\mathbf{n}}$-automorphisme β de $\mathbb{C}[\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$ tel que

$$\alpha_0(y_1) = p(0, \bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}) = \beta(y_1).$$

En étendant de manière naturelle les automorphismes α_0 et β à $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$ et en posant $\tilde{\alpha} := \alpha\alpha_0^{-1}\beta$ on obtient:

$$\tilde{\alpha}(y_1) = \alpha\alpha_0^{-1}\beta(y_1) = \alpha(y_1) = p(x, \bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}})$$

et, $\forall j \in \mathbf{n}$,

$$\tilde{\alpha}(z_j) = \alpha\alpha_0^{-1}\beta(z_j) = \alpha\alpha_0^{-1}(z_j) \equiv z_j \bmod (x)$$

On peut donc appliquer la proposition 2.8 à $\tilde{\alpha}$ et ainsi on obtient que

$$\sigma\tilde{\alpha}\sigma^{-1}(y_1) = \sigma\tilde{\alpha}(y_1) = \sigma(p)$$

est une variable de $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}}, \bar{z}_{\mathbf{n}}]$. □

Dans le cas particulier de la proposition précédente où $n = 1$ et σ devient $\sigma(z) = a(x)z$ on a:

PROPOSITION 8.6. — *Soit $p = p(x, \bar{y}_{\mathbf{m}}, z)$ une x-variable de $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}}, z]$ et $a(x) \in \mathbb{C}[x]$.*
Les conditions (i) et (ii) suivantes sont équivalentes:

(i) $p(x, \bar{y}_{\mathbf{m}}, z) \bmod (a(x))$ *est une z-variable de* $\mathbb{C}[x]/_{(a(x))}[z][\bar{y}_{\mathbf{m}}]$;

(ii)$p(x_0,\bar{y}_{\mathbf{m}},z)$ *est une* z*-variable de* $\mathbb{C}[z][\bar{y}_{\mathbf{m}}]$, $\forall x_0\in a^{-1}(0)$.

Et lorsqu'elles sont vérifiées on a

(iii)$p(x,\bar{y}_{\mathbf{m}},a(x)z)$ *est une* x*-variable de* $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}},z]$.

Démonstration. — L'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) provient du corollaire 7.5.
Pour démontrer (ii)$\Rightarrow$ (iii), on utilise la proposition 8.5 dans une récurrence sur le degré de $a(x)$. Remarquons que si $a(x)=0$ la proposition dit que si $p(x,\bar{y}_{\mathbf{m}},z)$ est une z-variable alors $p(x,\bar{y}_{\mathbf{m}},0)$ est une variable ce qui est évident (voit l'implication 7.1.1). Si $a(x)=a(0)\in\mathbb{C}^\star$ alors $p(x,\bar{y}_{\mathbf{m}},a(x)z)=\sigma(p)$ où σ (défini par $\sigma(z)=a(0)z$) est un automorphisme de $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}},z]$ donc c'est évident aussi.
Soit $a(x)\in\mathbb{C}[x]$ de degré au moins 1. À une translation près on peut supposer que $a(0)=0$ autrement dit $a(x)=x\tilde{a}(x)$. Par hypothèse on a bien sûr $p(x_0,\bar{y}_{\mathbf{m}},z)$ est une z-variable de $\mathbb{C}[z][\bar{y}_{\mathbf{m}}]$, $\forall x_0\in\tilde{a}^{-1}(0)$ et par hypothèse de récurrence $p(x,\bar{y}_{\mathbf{m}},\tilde{a}(x)z)$ est une x-variable de $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}},z]$.
Par hypothèse on sait aussi que $p(0,\bar{y}_{\mathbf{m}},z)$ est une z-variable de $\mathbb{C}[z][\bar{y}_{\mathbf{m}}]$ et donc $p(0,\bar{y}_{\mathbf{m}},\tilde{a}(0)z)$ aussi car

- Si $\tilde{a}(0)=0$ c'est évident.
- Sinon soit $\sigma\in\operatorname{Aut}\big(\mathbb{C}[\bar{y}_{\mathbf{m}},z]\big)$ défini par $\sigma(z)=\tilde{a}(0)z$ et $\alpha\in\operatorname{Aut}\big(\mathbb{C}[\bar{y}_{\mathbf{m}},z]\big)$ tel que $\alpha(y_1)=p(0,\bar{y}_{\mathbf{m}},z)$ et $\sigma(z)=z$. On a

$$\sigma\alpha\sigma^{-1}(y_1)=\sigma\alpha(y_1)=\sigma\big(p(0,\bar{y}_{\mathbf{m}},z)\big)=p(0,\bar{y}_{\mathbf{m}},\tilde{a}(0)z)$$

et

$$\sigma\alpha\sigma^{-1}(z)=\sigma\alpha(\frac{z}{\tilde{a}(0)})=\sigma(\frac{z}{\tilde{a}(0)})=z$$

Donc $p(x,\bar{y}_{\mathbf{m}},\tilde{a}(x)z)$ est une variable de $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}},z]$ telle que $p(0,\bar{y}_{\mathbf{m}},\tilde{a}(0)z)$ est une z-variable de $\mathbb{C}[z][\bar{y}_{\mathbf{m}}]$ donc, d'après la proposition 8.5 (où $\sigma(z)=xz$),

$$p(x,\bar{y}_{\mathbf{m}},x\tilde{a}(x)z)=p(x,\bar{y}_{\mathbf{m}},a(x)z)$$

est une variable de $\mathbb{C}[x][\bar{y}_{\mathbf{m}},z]$. □

Ainsi, on peut montrer que l'hypersurface de Choudary-Dimca, $q_n=0$, est rectifiable (voir [CD94]) $\forall n$ pair. En fait on montre que

$$q_n=y_0+y_0^{k_0}y_1+y_1^{k_1}y_2+\cdots+y_{n-2}^{k_{n-2}}y_{n-1}+y_{n-1}^{k_{n-1}}y_n$$

est une variable de $\mathbb{C}[\bar{y}_{\mathbf{n+1}}]$ pour tout n pair par récurrence sur $\frac{n}{2}$. En effet

$$q_n(\bar{y}_{\mathbf{n+1}}) = p_n(y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}, y_{n-1}^{k_{n-1}} y_n)$$

où

$$\begin{cases} p_n(y_0, \cdots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n) & = & q_{n-2} + y_{n-2}^{k_{n-2}} y_{n-1} + y_n \text{ est une variable} \\ p_n(y_0, \cdots, y_{n-2}, 0, y_n) & = & q_{n-2} + y_n \text{ est une } y_n\text{-variable} \end{cases}$$

car $q_{n-2} = q_{n-2}(y_0, \cdots, y_{n-1})$ est une variable par hypothèse de récurrence donc $q_{n-2} + y_n$ est une y_n-variable et donc d'après la proposition 8.6 q_n est une variable. Remarquons que lorsque $n = 3$ et $k_0 \geq 0$ en changeant le nom des indéterminées on obtient

$$q_3 = y_0 + y_0^{k_0} y_1 + y_1^{k_1} y_2 + y_2^{k_2} y_3 = x^{k_2} u + y + y^{k_0} z + x z^{k_1} \in \mathbb{C}[x, y, z, u]$$

qui fait partie des polynômes qu'on étudie dans l'article. La proposition A.1.3[8] ou 0.2 montre que $q_3^{-1}(0)$ n'est pas acyclique et donc pas isomorphe à $\mathbb{C}^3$ puisqu'alors $D = \{x = 0\}$ et $E = \{y(1 + y^{k_0 - 1} z) = 0\}$ n'ont pas le même nombre de composantes.

Dans le cas où $m = 2$ dans la proposition précédente on parvient à affaiblir la condition "$p(x_0, \bar{y}_{\mathbf{m}}, z)$ est une z-variable de $\mathbb{C}[z][\bar{y}_{\mathbf{m}}]$, $\forall x_0 \in a^{-1}(0)$" en la remplaçant par "$p(x_0, y_1, y_2, 0)$ est une variable de $\mathbb{C}[x][y_1, y_2]$". Cela donne une généralisation de la proposition 8.1 (quand $A = \mathbb{C}[x]$) puisqu'on a trois indéterminées au lieu de deux.
Les notations dans ce théorème sont différentes de ce qui précède pour être en harmonie avec l'article III, ainsi, c'est u qui joue maintenant le rôle de z et y, z qui jouent le rôle de $\bar{y}_{\mathbf{m}}$:

Théorème 8.7. — [9] *Soit $p = p(x, y, z, u)$ une x-variable de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[x][y, z, u]$ et $a = a(x) \in \mathbb{C}[x]$.*
Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $p(x, y, z, u) \bmod (a(x))$ *est une u-variable de* ${}^{\mathbb{C}[x]}\!/\!_{(a(x))}[u][y, z]$;

(ii) $p(x_0, y, z, u)$ *est une u-variable de* $\mathbb{C}[u][y, z]$, $\forall x_0 \in a^{-1}(0)$;

(i') $p(x, y, z, 0) \bmod (a(x))$ *est une variable de* ${}^{\mathbb{C}[x]}\!/\!_{(a(x))}[y, z]$;

(ii') $p(x_0, y, z, 0)$ *est une variable de* $\mathbb{C}[y, z]$, $\forall x_0 \in a^{-1}(0)$;

[8]Rappel: le A. de A.1.3 signifie **A**rticle.
[9]On a mis **(ii')**, **(iii)** et **(iv)** en gras car c'est l'équivalence la plus intéressante.

(iii) *$p(x,y,z,a(x)u)$ est une x-variable de $\mathbb{C}[x][y,z,u]$;*

(iv) *$p(x,y,z,a(x)u)$ est une variable x-résiduelle de $\mathbb{C}[x][y,z,u]$.*

Démonstration. — (i)⇔(ii)⇒**(iii)** provient de la proposition 8.6 ci-dessus et (i')⇔**(ii')** est donnée par le corollaire 7.5.
(iii)⇒**(iv)** est évident.
(iv)⇒(ii') n'est pas immédiat: soit $x_0 \in a^{-1}(0)$, si $p(x_0,y,z,0)$ est une variable de $\mathbb{C}[y,z,u]$, alors

$$\mathbb{C}[y,z,u]\Big/\big(p(x_0,y,z,0)\big) \simeq \mathbb{C}[y,z]\Big/\big(p(x_0,y,z,0)\big)^{[1]} \simeq \mathbb{C}^{[2]}$$

on retrouve un cas simple et résolu du "Cancellation Problem". Ainsi $p(x_0,y,z,0)$ est une droite de $\mathbb{C}[y,z]$ et par le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki c'est une variable de $\mathbb{C}[y,z]$.
(ii')⇒(ii): soit $x_0 \in a^{-1}(0)$, $p(x_0,y,z,u)$ est une variable de $\mathbb{C}[y,z,u]$ et $p(x_0,y,z,0)$ une variable de $\mathbb{C}[y,z]$ donc on a deux isomorphismes:

$$\phi : \mathbb{C}[y,z,u]\Big/\big(p(x_0,y,z,u)\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{[2]} \text{ et } \mathbb{C}[y,z]\Big/\big(p(x_0,y,z,0)\big) \simeq \mathbb{C}^{[1]}$$

d'où

$$\mathbb{C}^{[2]}\Big/\big(\phi(u)\big) \overset{\phi}{\simeq} \mathbb{C}[y,z,u]\Big/\big(p(x_0,y,z,u),u\big) \simeq \mathbb{C}[y,z]\Big/\big(p(x_0,y,z,0)\big) \simeq \mathbb{C}^{[1]}$$

donc, d'après le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki, $\phi(u)$ est une variable de $\mathbb{C}^{[2]}$ on peut donc considérer que $\mathbb{C}^{[2]} = \mathbb{C}[u]^{[1]}$ et que $\phi(u) = u$ ainsi, ϕ réalise un u-isomorphisme:

$$\phi : \mathbb{C}[u][y,z]\Big/\big(p(x_0,y,z,u)\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[u]^{[1]}$$

et, d'après la généralisation du théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki par Russell-Sathaye, i.e. le théorème 5.5 ou même le corollaire 7.7, cela implique que $p(x_0,y,z,u)$ est une u-variable de $\mathbb{C}[u][y,z]$. □

Ce théorème est important dans les démonstrations de résultat du type: "variable x-résiduelle ⇒ x-variable".

9. Application dans l'article

Donnons ici une reformulation du théorème 8.7 (**(iii)**⇔**(iv)**) qui est essentielle dans la preuve de la majorité des résultats présentés ci-dessous:

LEMME 9.1. — *Soit* $p, q \in \mathbb{C}[x][y,z,u]$, $a = a(x) \in \mathbb{C}[x]$ *et* a_{red} *son réduit*[10].
Si $p(x,y,z,a(x)u)$ *est une variable* x*-résiduelle de* $\mathbb{C}[x][y,z,u]$ *alors, pour montrer que c'est une* x*-variable, il suffit de montrer que* $p(x,y,z,u)$ *en est une. En particulier lorsque* $q(x,y,z,u)$ *est une* x*-variable,* $q(x,y,z,a(x)u)$ *est une* x*-variable si et seulement si* $q(x,y,z,a_{\text{red}}(x)u)$ *en est une.*

Démonstration. — Remarquons seulement que $q(x,y,z,a(x)u)$ et $q(x,y,z,a_{\text{red}}(x)u)$ sont des variables x-résiduelles simultanément. $\square$

Ainsi lorsqu'on veut démontrer qu'une variable x-résiduelle $p(x,y,z,u)$ est une x-variable on s'autorise, dans p, à diviser u (ou les autres coordonnées) par des polynômes en x tant que p est une variable x-résiduelle.

9.1. Des résultats partiels lorsque $p = f(x,y)u + g(x,y,z)$

Dans un premier temps l'article III montre, entre autres, que si $p(x,y,z,u) = f(x,y)u+g(x,y,z)$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[x,y,z,u]$ alors à un automorphisme de $\mathbb{C}[x,y]$ près, p est une variable x-résiduelle de $\mathbb{C}[x][y,z,u]$ (Th.0.9).
En partant de cette seule hypothèse et grâce aux résultats précédents on montre dans l'article:

THÉORÈME 9.2. — *Soit* $p = p(x,y,z,u) = f(x,y)u+g(x,y,z) \in \mathbb{C}[x][y,z,u]$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) p *est une variable* x*-résiduelle,*

(ii) p *est un plan* x*-résiduel,*

(iii) p *est un* x*-plan,*

(iii') p *définit une fibration en* x*-plans,*

(iv) p *est* 1*-stablement équivalent à une* x*-variable.*

Et lorsqu'elles sont vérifiées,

(j) Si $f \notin \mathbb{C}[x]$ *alors* p *est de la forme:*

$$p = q[r\tilde{f}u + \tilde{g}_0 y^2 + \tilde{g}_1 z + \tilde{f}_{\text{red}}\tilde{g}_2 z^2] + a_0 + a_1 y \tag{9.1.1}$$

avec

[10] Si $a = a_1^{m_1} \cdots a_k^{m_k}$ où les a_i sont irréductibles alors $a_{\text{red}} := a_1 \cdots a_k$ (est en fait défini aux inversibles près).

- q, r, $a_0, a_1 \in \mathbb{C}[x]$, $\tilde{f}$, $\tilde{g}_0, \tilde{g}_1 \in \mathbb{C}[x,y], \tilde{g}_2 \in \mathbb{C}[x,y,z]$,
- $\tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0)$ *est un sous-ensemble fini de* $q^{-1}(0) \times \mathbb{C}_y$, *et*
- $\forall x_0 \in r^{-1}(0)$, $q(x_0)\tilde{f}(x_0,y) \in \mathbb{C}$

et si $\tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0) = \emptyset$ *alors* p *est une* x*-variable.*
De plus, si $\tilde{g}_1 \in \mathbb{C}[x]$ *et* $\tilde{g}_2 z^2 = \hat{g}_2(x, y, \tilde{g}_{1(x)}z) \in \mathbb{C}[x][y, \tilde{g}_1 z]$ *alors* p *est aussi une* x*-variable.*

(jj) Si $f \in \mathbb{C}[x]$ *alors* p *est une* x*-variable.*

(jjj) Si $\deg_z(g) \leq 1$ *alors* p *est une* x*-variable.*

(j⁴) Si g *est de la forme* $g(x,y,z) = g_0(x,y) + \breve{g}_2(x,y,z)z^2$ *alors* p *est une* x*-variable.*

(j⁵) p *est une* x*-variable de* $\mathbb{C}(x)[y,z,u]$ *(* $\mathbb{C}(x) = \mathrm{Frac}\big(\mathbb{C}[x]\big)$*).*

À propos de la démonstration. — (i)⇔(ii) est une conséquence d'un cas facile du théorème 5.6 de Russell-Sathaye puisque, pour tout $x = x_0 \in \mathbb{C}$ fixé on a un plan d'équation $f(x_0,y)u + g(x_0,y,z)$; dans le preuve du lemme A.4.10 on redémontre indirectement ce résultat.
(ii)⇒(iv)⇒(iii') est donné par théorème A.4.23 qui utilise l'isomorphisme 4.5.1 et le lemme 4.5.
(iii')⇒(iii)⇒(ii) est évident.
Et, si on suppose ces conditions vérifiées, alors

(j) la proposition A.4.8 donne la forme de p, on la démontre en connaissant sa forme x-résiduelle (Lem.A.4.10).
Pour le reste on utilise les lemmes A.4.13 et A.4.16 qui reposent essentiellement sur le lemme 9.1.

(jj) Le lemme 9.1 donne directement le résultat.

(jjj) C'est le lemme A.4.14, on le démontre par une récurrence dont le passage du rang n au rang $n+1$ utilise le lemme 9.1.

(j⁴) On est en fait dans un cas particulier de (jj) car (j) est impossible si $\tilde{g}_1 = 0$.

(j⁵) On retrouve des variables du type $p(y, az) = az + b_0 + b_1 y + r(y) \in A[y,z]$ (voir Prop.8.1) où $A = \mathbb{C}(x)[y]$ et $A[y,z] = \mathbb{C}(x)[y][z,u]$.

□

9.2. Généralisation d'un théorème de Wright

On obtient également la généralisation suivante du théorème 5.7 de Wright où le corps K est remplacé par l'anneau $\mathbb{C}[x]$:

Théorème 9.3. — *Soit $p = p(x,y,z,u) = f(x,y,z)u^m + g(x,y,z) \in \mathbb{C}[x][y,z,u]$ où $m \geq 2$.*
Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) p est un x-plan,

(ii) p est une variable x-résiduelle,

(iii) p est une x-variable.

Commentaires sur la preuve. — Le théorème 5.7 utilisé x-résiduellement permet de montrer (i)$\Leftrightarrow$(ii). En fait dans l'article de Wright [Wri78] ou encore dans [KZ99] ou trouve la forme précise de $p(x_0,y,z,u)$ à automorphisme de $\mathbb{C}[y,z]$ près ce qui permet de montrer le théorème A.4.27 (avec, toujours le lemme 9.1) qui donne le résultat. □

Remarque. — Dans ce théorème on a $f = f(x,y,z)$ et non plus $f = f(x,y)$ comme dans les résultats précédents.

10. Le polynôme $y + x[xz + y(yu + z^2)]$ est-il une variable?

On a constaté que les résultats de l'article sont incomplets puisqu'en toute généralité on n'a pas réussi à démontrer que les hyperplans de $\mathbb{C}[x,y,z,u]$ de la forme $f(x,y)u + g(x,y,z)$ sont des variables. Cet échec n'est pas dû à une trop grande diversité dans la forme que peuvent prendre ces hyperplans mais bien à l'impossibilité de démontrer que certains polynômes explicites sont des variables. On en donne ici un des exemples les plus simples:

$$w := xy^2u + y + x^2z + xyz^2 = y + x[xz + y(yu + z^2)]$$

10.1. Présentation

On remarque que le terme entre crochet de w ressemble à la variable de Nagata: $z + y(yu + z^2)$ où $A = \mathbb{C}[y]$, $a = y$ et $y, z = z, u$ (voir proposition

3.5 et sous-section 1.2.1). En vue de la sous-section 1.3.2 on définit la y-dérivation localement nilpotente de $\mathbb{C}[y][z,u]$ ∂ par:

$$\begin{cases} \partial(z) &=& y \\ \partial(u) &=& -2z \\ (\partial(y) &=& 0) \end{cases}$$

et

$$\Delta = \Delta(y,z,u) := yu + z^2$$

On a $\partial(\Delta) = 0$ et

$$\begin{cases} e^{\Delta\cdot\partial}(z) &=& z + y\Delta \\ e^{\Delta\cdot\partial}(u) &=& u - 2z\Delta - y\Delta^2. \end{cases}$$

est l'automorphisme de Nagata.
On a

$$w = y + x[xz + y\Delta] = y + x^2[z + y\frac{\Delta}{x}] = y + x^2 e^{\frac{\Delta}{x}\cdot\partial}(z) \qquad (10.1.1)$$

où $\frac{\Delta}{x}\cdot\partial$ est une LND de $\mathbb{C}(x)[y][z,u]$ et donc $e^{\frac{\Delta}{x}\cdot\partial}$ est un x,y-automorphisme de $\mathbb{C}(x)[y][z,u]$ et $e^{\frac{\Delta}{x}\cdot\partial}(z)$ une x,y-variable de $\mathbb{C}(x)[y][z,u]$.

PROPOSITION 10.1. — *Le polynôme $w = w(x,y,z,u) = y + x[xz + y(yu+z^2)] \in \mathbb{C}[x][y,z,u]$ vérifie les six conditions (i),(ii), (iii), (iii'), (iv) et (j^5) du théorème 9.2.*

Démonstration. — D'après le théorème 9.2 il suffit de montrer que l'une des cinq premières conditions est vérifiée cependant on profite de cette occasion pour présenter certains points de manière plus explicite.

(i) $w(0,y,z,u) = y$ est une variable et en fixant $x_0 \neq 0$ dans l'égalité 10.1.1, on constate que $w(x_0,y,z,u)$ aussi.

(iii) L'isomorphisme 4.5.1 avec $a = x$ et $p(y) = -[xz + y(yu+z^2)]$ donne

$$\begin{array}{rcl} \phi \ : \ \mathbb{C}[x,y,z][y]\big/\big(y + x[xz + y(yu+z^2)]\big) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[x,y,z][y]\big/\big(y + xz + xy(xyu+z^2)\big) \\ y & \longmapsto & xy \\ -[xz + y(yu+z^2)] & \longleftarrow & y \end{array}$$

et $w' := y + xz + xy(xyu+z^2) = y + x[z + y(xyu+z^2)]$ est une x-variable de $\mathbb{C}[x][y,z,u]$ en effet

$$w' = e^{[z+y(xyu+z^2)]\cdot\tilde{D}}(y)$$

avec
$$\tilde{D} = \sigma_u e^{\Delta\cdot\partial} D e^{-\Delta\cdot\partial} \sigma_u^{-1}$$
et D est la x, z, u-dérivation élémentaire $D(y) = x$ et σ_u l'automorphisme de $\mathbb{C}(x)[y, z][u]$ défini par $\sigma_u(u) = xu$.
On a
$$e^{\Delta\cdot\partial} D e^{-\Delta\cdot\partial} = x \cdot e^{\Delta\cdot\partial} \partial_y e^{-\Delta\cdot\partial} = e^{\Delta\cdot\partial} x \cdot \partial_y e^{-\Delta\cdot\partial}$$
($\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$) et, d'après le corollaire 2.13, $\tilde{D}$ est bien une LND de $\mathbb{C}[x][y, z, u]$.
Enfin on a bien $z + y(xyu + z^2) \in \operatorname{Ker} \tilde{D}$ car
$$\begin{aligned}
\tilde{D}\big(z + y(xyu + z^2)\big) &= \sigma_u e^{\Delta\cdot\partial} D e^{-\Delta\cdot\partial} \sigma_u^{-1}\big(z + y(xyu + z^2)\big) \\
&= \sigma_u e^{\Delta\cdot\partial} D e^{-\Delta\cdot\partial}\big(z + y(yu + z^2)\big) \\
&= \sigma_u e^{\Delta\cdot\partial} D e^{-\Delta\cdot\partial}\big(z + y\Delta\big) \\
&= \sigma_u e^{\Delta\cdot\partial} D(z) \\
\tilde{D}\big(z + y(xyu + z^2)\big) &= 0.
\end{aligned}$$

(j^5) D'après l'égalité 10.1.1 $w = e^{\frac{\Delta}{x}\cdot\partial}(x^2 z + y)$ donc w est bien une x-variable de $\mathbb{C}(x)[y, z, u]$ et même un x, y-variable ($x^2 z + y = \mu(z)$ avec $\mu \in \operatorname{Aut}_{x,y}\big(\mathbb{C}(x)[y][z]\big)$).

$\square$

10.2. Un contre-exemple éventuel

Démontrer que w n'est pas une variable serait une avancée très significative notamment dans les problèmes de plongements de Abhyankar-Sathaye, on donne ici une présentation des questions que cela résoudrait (en y répondant pas la négative bien entendu):

Proposition 10.2. — *Si $w = y + x[xz + y(yu + z^2)]$ n'est pas une x-variable de $\mathbb{C}[x][y, z, u]$ alors:*

(i) La réponse au problème 5.1 de l'hyperplan plongé d'Abhyankar-Sathaye est "non" lorsque:

1. $A = \mathbb{C}[x]$ et $n = 3$,

2. $A = \mathbb{C}$ et $n = 4$ si on arrive à montrer qu'une variable qui est aussi une variable x-résiduelle est forcément une x-variable.

(ii) La réponse à la question 7.2 sur les variables résiduelles est "non" lorsque $n = 3$.

(iii) *La caractérisation des variables de $A^{[2]}$ due à Daigle et Freudenburg qui correspond à (i)⇔(iii) dans le théorème 6.2 n'est plus valable dans $A^{[3]} = \mathbb{C}[x]^{[3]}$.*

Démonstration. — Seul (iii) nécessite une petite explication: on sait que w est une x-variable de $\mathbb{C}(x)[y,z,u]$ et, étant une variable x-résiduelle, $\forall x = x_0 \in \mathbb{C}$ fixé $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} = 0$ n'a pas de solution donc pas de solution tout court (sans fixer x) donc $\left(\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial u}\right) = \mathbb{C}[x][y,z,u]$. □

10.3. $y + x^3[xz + y(yu + z^2)]$ est une x-variable

En fait $w = y + x[xz + y(yu + z^2)]$ ressemble aux variable de la proposition 8.4.
On prend $\sigma = e^{\frac{\Delta}{x}\cdot\partial}\sigma_{x^3}$, avec $\sigma_{x^3} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}[x][y]}(\mathbb{C}[x][y][z,u]) \cap \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}(x)[y]}\mathbb{C}(x)[y][z,u])$ est défini par

$$\begin{cases} \sigma_{x^3}(z) &= xz \\ \sigma_{x^3}(u) &= x^2u \end{cases}$$

Ce σ_{x^3} a été choisi pour que $\sigma = e^{\frac{\Delta}{x}\cdot\partial}\sigma_{x^3}$ soit aussi dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x][y][z,u]) \cap \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(x)[y][z,u])$ en effet:

$$\begin{cases} e^{\frac{\Delta}{x}\cdot\partial}(z) &= z + y\frac{\Delta}{x} \\ e^{\frac{\Delta}{x}\cdot\partial}(u) &= u - 2z\frac{\Delta}{x} - y\frac{\Delta^2}{x^2} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \sigma(z) &= e^{\frac{\Delta}{x}\cdot\partial}\sigma_{x^3}(z) &= xz + y\Delta \\ \sigma(u) &= e^{\frac{\Delta}{x}\cdot\partial}\sigma_{x^3}(u) &= x^2u - 2xz\Delta - y\Delta^2\ . \end{cases}$$

On a $\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma) = \mathrm{j}(\sigma) = \mathrm{j}(\sigma_{x^3}) = x^3$ et on constate que le k de la proposition 8.4 qui vérifie:

$$\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma)^k = \sigma^{-1}(x^3)^k \in \mathrm{End}(A[y][\bar{z}_{\mathbf{n}}]).$$

est égale à 2 car:

$$\begin{cases} e^{\frac{-\Delta}{x}\cdot\partial}(z) &= z - yx^{-1}(yu + z^2) \\ e^{\frac{-\Delta}{x}\cdot\partial}(u) &= u + 2x^{-1}z(yu + z^2) - x^{-2}y(yu + z^2)^2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \sigma^{-1}(z) &= \sigma_{x^3}^{-1}(e^{\frac{-\Delta}{x}\cdot\partial}(z)) &= x^{-1}z - x^{-1}y(x^{-2}yu + x^{-2}z^2) \\ \sigma^{-1}(u) &= \sigma_{x^3}^{-1}(e^{\frac{-\Delta}{x}\cdot\partial}(u)) &= x^{-2}u + 2x^{-2}z(x^{-2}yu + x^{-2}z^2) - x^{-2}y(x^{-2}yu + x^{-2}z^2)^2 \end{cases}$$

(le calcul fait apparaître du $x^6 = (\,\mathrm{j}(\sigma))^2$ au dénominateur).
Ainsi, d'après la proposition 8.4, $y + x^6[xz + y(yu + z^2)]$ est une x-variable

(ou plus généralement $y + a^6[az + y(yu + z^2)] \in A[y, z, u]$ avec $a \in A$). En fait $y + x^6[xz + y(yu + z^2)] = \sigma\alpha\sigma^{-1}(y)$ où α est le x, z, u-automorphisme $\alpha(y) = y + x^6 z$.

En réalité le calcul montre qu'il suffit de prendre $\alpha(y) = y + x^3 z$ ou même tout autre automorphisme qui soit congru à l'identité $\bmod\,(x^3)$ pour que $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ soit bien un x-automorphisme de $\mathbb{C}[x][y, z, u]$ ce qui fait que

$$y + x^3[xz + y(yu + z^2)] \text{ est encore une } x\text{-variable.}$$

Dans d'autres exemples on constate ce fait un peu étrange qui nous amène à énoncer la conjecture suivante:

Conjecture 10.3. — *Soit A un anneau réduit et σ un endomorphisme de $A[\bar{y}]$ tel que*

$$\sigma \in \operatorname{End}(A[\bar{y}]) \cap \operatorname{Aut}(\operatorname{Quot}(A)[\bar{y}]).$$

Si $\alpha \in \operatorname{Aut}(A[\bar{y}])$ est un automorphisme congru à l'identité $\bmod\,(\mathrm{j}_{\bar{0}}(\sigma))$ *alors $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ est un automorphisme de $A[\bar{y}]$.*

Remarque. — Une démonstration de cette conjecture dans le cas où A est un anneau réduit contenant le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ a été trouvée par Daniel Daigle, rapporteur de cette thèse.

Le problème concernant $w = y + x[xz + y(yu + z^2)]$ consisterait donc à trouver un x, y-endomorphisme $\sigma \in \operatorname{End}(\mathbb{C}[x][y][z, u]) \cap \operatorname{Aut}(\mathbb{C}(x)[y][z, u])$ tel que

$$\begin{cases} \sigma(z) = xz + y(yu + z^2) \\ \mathrm{j}(\sigma) = x\ . \end{cases}$$

Enfin il existe bien sûr d'autres polynômes que w dont on ne sait pas s'ils sont des variables:

$$y + x[x^k z + y(yu + z^l)]$$

par exemple, paraît d'autant moins être une variable que k et l sont grands.

On peut aussi rajouter des indéterminées:

$$x + t\Big(ty + x[xz + y(yu + z^2)]\Big)$$

est une t-hypersurface de $\mathbb{C}[t][x, y, z, u]$ (on le montre avec l'isomorphisme 4.5.1), est-ce une t-variable?

Bibliographie

[Ale95] Jacques Alev. A note on Nagata's automorphism. In *Automorphisms of affine spaces (Curaçao, 1994)*, pages 215–221. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[AM75] Shreeram S. Abhyankar and Tzuong Tsieng Moh. Embeddings of the line in the plane. *J. Reine Angew. Math.*, 276:148–166, 1975.

[BCW82] Hyman Bass, Edwin H. Connell, and David Wright. The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(2):287–330, 1982.

[BD93] S. M. Bhatwadekar and Amartya K. Dutta. On residual variables and stably polynomial algebras. *Comm. Algebra*, 21(2):635–645, 1993.

[Bha88] S. M. Bhatwadekar. Generalized epimorphism theorem. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 98(2-3):109–116, 1988.

[CD94] A. D. R. Choudary and A. Dimca. Complex hypersurfaces diffeomorphic to affine spaces. *Kodai Math. J.*, 17(2):171–178, 1994.

[DF98] Daniel Daigle and Gene Freudenburg. Locally nilpotent derivations over a UFD and an application to rank two locally nilpotent derivations of $k[X_1, \cdots, X_n]$. *J. Algebra*, 204(2):353–371, 1998.

[DKW99] Harm Derksen, Frank Kutzschebauch, and Jörg Winkelmann. Subvarieties of $\mathbb{C}^n$ with non-extendable automorphisms. *J. Reine Angew. Math.*, 508:213–235, 1999.

[EV99] Eric Edo and Stéphane Vénéreau. Length 2 variables of $A[x, y]$ and transfer. In *Proc. of the conf. Polynomial automorphisms and related topics*, pages 67–76, Cracovia, July 1999. Ann. Polinici Math.

[Jel87] Zbigniew Jelonek. The extension of regular and rational embeddings. *Math. Ann.*, 277(1):113–120, 1987.

[Jel95] Zbigniew Jelonek. A note about the extension of polynomial embeddings. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 43(3):239–244, 1995.

[Jun42] Heinrich W. E. Jung. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.*, 184:161–174, 1942.

[Kal] Shulim Kaliman. Polynomials with general $\mathbb{C}^2$-fibers are variables. *Pacific J. of Math. (to appear).*

[Kal91] Shulim Kaliman. Extensions of isomorphisms between affine algebraic subvarieties of k^n to automorphisms of k^n. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 113(2):325–334, 1991.

[Kel39] O. Keller. Ganze Cremona-transformationen. *Monatsh. Math. Phys.*, 47:299–306, 1939.

[KVZ01a] Shulim Kaliman, Stéphane Vénéreau, and Mikhail Zaidenberg. Extensions birationnelles simples de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}^3$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(4):319–322, 2001.

[KVZ01b] Shulim Kaliman, Stéphane Vénéreau, and Mikhail Zaidenberg. Simple birational extensions of the polynomial ring $\mathbb{C}^{[3]}$. preprint, Institut Fourier, **532**; E-print math.AG/0104204, 49p., 2001.

[KZ99] Sh. Kaliman and M. Zaidenberg. Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group. *Transform. Groups*, 4(1):53–95, 1999.

[Lam78] T. Y. Lam. *Serre's conjecture.* Springer-Verlag, Berlin, 1978. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 635.

[LZ89] V.Ya. Lin and M.G. Zaidenberg. Finiteness theorems for holomorphic mappings. In *Several Complex Variables III.*, volume 9, pages 113–172. Berlin Heidelberg New York e.a.: Springer Verlag, encyclopedia of math. sci. edition, 1989.

[Man97] Satya Mandal. *Projective modules and complete intersections.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Moh83] T. T. Moh. On the Jacobian conjecture and the configurations of roots. *J. Reine Angew. Math.*, 340:140–212, 1983.

[Nag71] Masayoshi Nagata. A theorem of Gutwirth. *J. Math. Kyoto Univ.*, 11:149–154, 1971.

[Nag72] Masayoshi Nagata. *On automorphism group of* $k[x, y]$. Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1972. Department of Mathematics, Kyoto University, Lectures in Mathematics, No. 5.

[RS79] Peter Russell and Avinash Sathaye. On finding and cancelling variables in $k[X, Y, Z]$. *J. Algebra*, 57(1):151–166, 1979.

[Rus76] Peter Russell. Simple birational extensions of two dimensional affine rational domains. *Compositio Math.*, 33(2):197–208, 1976.

[Rus79] Peter Russell. Simple Galois extensions of two-dimensional affine rational domains. *Compositio Math.*, 38(3):253–276, 1979.

[Rus96] Peter Russell. Sufficiently homogeneous closed embeddings of $\mathbb{A}^{n-1}$ into $\mathbb{A}^n$ are linear. *Canad. J. Math.*, 48(6):1286–1295, 1996.

[Sat76] Avinash Sathaye. On linear planes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 56:1–7, 1976.

[Smi89] Martha K. Smith. Stably tame automorphisms. *J. Pure Appl. Algebra*, 58(2):209–212, 1989.

[Suz74] Masakazu Suzuki. Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace $\mathbb{C}^2$. *J. Math. Soc. Japan*, 26:241–257, 1974.

[Swa87] Richard G. Swan. Vector bundles, projective modules and the K-theory of spheres. In *Algebraic topology and algebraic K-theory (Princeton, N.J., 1983)*, pages 432–522. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987.

[SY01] Vladimir Shpilrain and Jie-Tai Yu. Embeddings of hypersurfaces in affine spaces. *J. Algebra*, 239(1):161–173, 2001.

[vdE00] Arno van den Essen. *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[vdK53] W. van der Kulk. On polynomial rings in two variables. *Nieuw Arch. Wiskunde (3)*, 1:33–41, 1953.

[Wan80] Stuart Sui Sheng Wang. A Jacobian criterion for separability. *J. Algebra*, 65(2):453–494, 1980.

[Wri78] David Wright. Cancellation of variables of the form $bT^n - a$. *J. Algebra*, 52(1):94–100, 1978.

[Wri81] David Wright. On the Jacobian conjecture. *Illinois J. Math.*, 25(3):423–440, 1981.

Troisième partie

Simple birational extensions of the polynomial ring $\mathbb{C}^{[3]}$

Cet article a été écrit par Shulim Kaliman, Mikhail Zaidenberg et l'auteur de cette thèse. Il a fait l'objet d'une prépublication à l'Institut Fourier et d'une prépublication électronique [KVZ01b]. Ces principaux résultats ont été publiés dans une note parue aux comptes-rendus de l'académie des sciences ([KVZ01a]). En outre les auteurs espèrent publier l'intégralité de cet article d'ici peu.

Simple birational extensions of the polynomial algebra $\mathbb{C}^{[3]}$

Shulim Kaliman* Stéphane Vénéreau
Mikhail Zaidenberg†

Abstract

The Abhyankar-Sathaye Problem asks whether any biregular embedding $\varphi : \mathbb{C}^k \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ can be rectified, that is, whether there exists an automorphism $\alpha \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}^n$ such that $\alpha \circ \varphi$ is a linear embedding. Here we study this problem for the embeddings $\varphi : \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^4$ whose image $X = \varphi(\mathbb{C}^3)$ is given in $\mathbb{C}^4$ by an equation $p = f(x, y)u + g(x, y, z) = 0$, where $f \in \mathbb{C}[x, y] \backslash \{0\}$ and $g \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Under certain additional assumptions we show that, indeed, the polynomial p is a variable of the polynomial ring $\mathbb{C}^{[4]} = \mathbb{C}[x, y, z, u]$ (i.e., a coordinate of a polynomial automorphism of $\mathbb{C}^4$). This is an analog of a theorem due to Sathaye [Sat76] which concerns the case of embeddings $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^3$. Besides, we generalize a theorem of Miyanishi [Miy84, Thm. 2] giving, for a polynomial p as above, a criterion for as when $X = p^{-1}(0) \simeq \mathbb{C}^3$.

1991 Mathematics Subject Classification: 14R10, 14R25.
Key words: affine space, polynomial ring, variable, affine modification, birational extension.

*Research of the first author partially supported by the NSA grant MDA904-00-1-0016.
†The third author is grateful to the IHES and to the MPI at Bonn (where a part of the work was done) for their hospitality and excellent working conditions.

Contents

Introduction

Generalizing a theorem of A. Sathaye [Sat76] it is proven in [KZ99] that if a surface $X = p^{-1}(0) \subseteq \mathbb{C}^3$ with $p = fu + g \in \mathbb{C}^{[3]}$ and $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ is acyclic (that is, $\widetilde{H}_*(X; \mathbb{Z}) = 0$) then p is a variable of the polynomial ring $\mathbb{C}^{[3]}$ i.e., a coordinate of an automorphism $\alpha \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}^3$. Thus X can be rectified, and so is isomorphic to $\mathbb{C}^2$. This does not hold any more in $\mathbb{C}^4$ (even with $f \in \mathbb{C}[x]$). Indeed [Rus76, ML96] the Russell cubic 3-fold

$$X := \{p = x^2u + x + y^2 + z^3 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4$$

is an exotic $\mathbb{C}^3$ i.e., is diffeomorphic to $\mathbb{R}^6$ and non-isomorphic to $\mathbb{C}^3$. In 2.28, 3.21 and 3.6 below we give a criterion for as when a 3-fold $X = p^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^4$ with

$$p = f(x, y)u + g(x, y, z) \in \mathbb{C}^{[4]} \qquad (f \in \mathbb{C}^{[2]} \backslash \{0\},\ g \in \mathbb{C}^{[3]}) \tag{1}$$

is acyclic (resp., is isomorphic to $\mathbb{C}^3$ resp., is an exotic $\mathbb{C}^3$). In particular, we show in 2.11 that if X is acyclic then actually it is diffeomorphic to $\mathbb{R}^6$. If furthermore (3.21) X is isomorphic to $\mathbb{C}^3$ then any fiber $X_\lambda := p^{-1}(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) of the polynomial p is isomorphic to $\mathbb{C}^3$ as well, and moreover (with an appropriate choice of coordinates (x, y)) all fibers of the morphism

$$\rho := (x, p) : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$$

are reduced and isomorphic to $\mathbb{C}^2$. We do not know whether in that case a polynomial p in (1) must be a variable of the polynomial ring $\mathbb{C}^{[4]}$, and ρ must be a trivial family. However, in section 4 in many cases we provide affirmative answers to these questions and give simple concrete examples where the answers remain unknown. Due to the Quillen-Suslin Theorem, the latter question would be answered in positive if the following conjecture [VD74, (3.8.5)] (cf. [Sat83, KZ00]) were true for $n = 2 = \dim S$:

Dolgachev-Weisfeiler Conjecture. *Let $f : X \to S$ be a flat affine morphism of smooth schemes with every fiber isomorphic (over the residue field) to an affine space $\mathbb{A}^n_k$. Then f is locally trivial in the Zariski topology (i.e., is a fiber bundle).*

Whereas the former question (as whether p is a variable of the polynomial ring $\mathbb{C}^4$) is a particular case (with $n = 4$ and $k = 3$) of the famous

Abhyankar-Sathaye Embedding Problem: *Is it true that any biregular embedding $\mathbb{C}^k \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ is rectifiable i.e., is equivalent to a linear one under the action of the group $\operatorname{Aut} \mathbb{C}^n$ on $\mathbb{C}^n$?*

Geometrically, the situation can be regarded as follows (cf. [KZ99]). The morphism $\sigma : (x, y, z, u) \longmapsto (x, y, z)$ represents the 3-fold X as a birational modification of $Y := \mathbb{C}^3$. The latter essentially consists in replacing the divisor $D := D(f) \subseteq Y$ by the exceptional one $E := \{f = g = 0\} \subseteq X$. All the important properties of X can be recovered in terms of the restriction $\sigma|_E : E \to D$. In our setting both E and D are cylindrical surfaces, namely $E = C \times \mathbb{C}$ and $D = \Gamma \times \mathbb{C}$, where $C := D(f) \cap D(g) \subset Y$ is the center of the blowing up σ and $\Gamma := f^{-1}(0) \subseteq \mathbb{C}^2_{x,y}$. This makes it possible to formulate the criteria mentioned above in terms of the natural projection $\pi : C \to \Gamma,\ (x, y, z) \longmapsto (x, y)$, and enables us in concrete examples to verify these criteria.

Let us briefly describe the content of the paper. Section 1 contains preliminaries; it can be omitted at the first reading and consulted when necessary. However, some results obtained here (and used later on in the proofs) are of independent interest. For instance, this concerns 1.3 where we treat the question for as when a birational extension of a UFD is again a UFD. Furthermore, generalizing an observation due to V. Shpilrain and J.-T. Yu [SY01, SY99] we claim in 1.32-1.33 that for arbitrary polynomials $p,\ q \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n][y]$ the hypersurfaces in $\mathbb{C}^{n+1}$ given respectively by the equations

$$y = q(p(y)) \qquad \text{and} \qquad y = p(q(y))$$

are isomorphic and moreover, 1-stably equivalent (see 4.21). We also use the fact (see 1.12) that a one-point compactification of an acyclic smooth affine variety is a homology manifold which is a homology sphere and satisfies the Alexander duality.

In section 2 we study the topology of the 3-folds X as above. More generally, we work with a 3-fold $X = \{p = fu + g = 0\} \subset Y \times \mathbb{C}$, where $f, g \in \mathbb{C}[Y]$ with Y being a smooth acyclic affine 3-fold and $D := f^{-1}(0) \subseteq Y$ being a cylinder $D = \Gamma \times \mathbb{C}$ over an affine curve Γ (whereas in subsection 2.3 Y itself is supposed to be a cylinder over an acyclic affine surface Z i.e., $Y = Z \times \mathbb{C}$, with $\Gamma \subseteq Z$). The main results of section 2 (see 2.11, 2.27 and 2.28) provide a criterion for as when such a 3-fold X is diffeomorphic to $\mathbb{R}^6$.

In subsection 3.1 we determine when $X = p^{-1}(0) \subseteq \mathbb{C}^4$ with $p = fu + g$ as in (1) is an exotic $\mathbb{C}^3$. The main tool used here is Derksen's version of the Makar-Limanov invariant [ML96, Der97] described in subsection 1.3.

Subsection 3.2 is devoted to a study of embeddings $\mathbb{C}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^4$ given by an equation $p = fu+g = 0$ with $f \in \mathbb{C}^{[2]} \backslash \mathbb{C}$ and $g \in \mathbb{C}^{[3]}$. In 3.21 we show that in appropriate new coordinates in the (x, y)-plane, the x-coordinate restricted to any fiber of p gives a $\mathbb{C}^2$-fibration. On the other hand, the restriction of

p to any hyperplane $x = \text{const}$ is a variable of the polynomial ring $\mathbb{C}[y, z, u]$ (in the latter case we say in brief that p is a *x-residual variable*).

A complete analog of Theorem 7.2 in [KZ99] cited at the beginning holds if the polynomial $p \in \mathbb{C}^{[4]}$ is linear with respect to two (and not just one) variables. Indeed (3.24) if the 3-fold X:

$$p = a(x,y)u + b(x,y)v + c(x,y) = 0$$

in $\mathbb{C}^4$ is smooth and acyclic then $p \in \mathbb{C}^{[4]}$ is a variable. We give a simple criterion (in terms of the coefficients $a, b, c \in \mathbb{C}[x, y]$) for as when this is the case.

In section 4 we concentrate on the Abhyankar-Sathaye Problem for our particular class of embeddings. The main results 4.2, 4.16 of subsection 4.1 provide sufficient conditions for as when a residual x-variable $p = fu + g \in \mathbb{C}^{[4]}$ as in (1) is indeed a variable. For instance (see 4.2, 4.3) this is the case if $\deg_z g \le 1$, or f is a power of an irreducible polynomial, or else $f \in \mathbb{C}[x]$ (the latter result strengthens those of M. Miyanishi [Miy84, Thm. 2], where it is supposed in addition that $g \in \mathbb{C}[y, z]$). As another examples, we show (see 4.17) that the polynomials

$$p_1 := xy^2u + y + xz + xyz^2 \qquad \text{and} \qquad p_3 := xy^2u + y + x^2z + x^3yz^2$$

are variables of $\mathbb{C}^{[4]}$. However, we do not know whether or not so is

$$p_2 := xy^2u + y + x^2z + xyz^2$$

(whereas $p_2^{-1}(\mu) \simeq \mathbb{C}^3$ $\forall \mu \in \mathbb{C}$ and p_2 is a residual x-variable and a $\mathbb{C}(x)$-variable, see 4.9 and 4.18).

In subsection 4.2 we establish (see 4.23) that every embedding $\mathbb{C}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^4$ given by an equation $p = fu + g = 0$ as in (1) can be rectified in $\mathbb{C}^5$.

In the last subsection 4.3 (attributed to the second author) we generalize a theorem of D. Wright [Wri78] which says that Sathaye's Theorem holds for the embeddings $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ given by an equation $p = fu^n + g = 0$ with $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ and $n \in \mathbb{N}$. Namely, it is shown in 4.27 that a residual x-variable of the form $p = fu^n + g \in \mathbb{C}^{[4]}$, where $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ and $n \ge 2$, actually is an x-variable.

1. Preliminaries

1.1. Affine modifications of UFD's

We start by recalling the notion of affine modification [KZ99]; at the same time, we introduce the notation that will be used throughout the paper.

Notation 1.1 Let Y be a reduced, irreducible affine variety over $\mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[Y]$ be the algebra of regular functions on Y, $I \subseteq A$ be a non-trivial ideal and $f \in I$ be a non-zero element of I. *The affine modification of the variety Y along the divisor $D_f = f^*(0)$ with center I* is the affine variety $X = \operatorname{spec} A'$, where

$$A' := A[I/f] = \{a' = a_k/f^k | a_k \in I^k\} \subseteq \operatorname{Frac} A\,.$$

The inclusion $A \hookrightarrow A'$ corresponds to a birational morphism $\sigma : X \to Y$ with the exceptional divisor $E = \sigma^{-1}(D) = (f\circ\sigma)^{-1}(0) \subseteq X$, where $D := \operatorname{supp} D_f$. The restriction $\sigma|(X\backslash E) : X\backslash E \to Y\backslash D$ is an isomorphism.

Let $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ resp., $E = \bigcup_{i=1}^{n'} E_i$ be the decomposition into irreducible components, which we assume to be Cartier divisors. Letting

$$\sigma^*(D_i) = \sum_{j=1}^{n'} m_{ij} E_j, \quad i = 1, \dots, n\,, \tag{2}$$

we consider the $n \times n'$ *multiplicity matrix* $M_\sigma = (m_{ij})$ with non-negative integer entries. Clearly, $m_{ij} > 0 \Leftrightarrow \sigma(E_j) \subseteq D_i$.

The following simple observation will be useful in 1.4 below. We denote $\operatorname{reg} E_j = E_j\backslash\operatorname{sing} E_j$ and $\operatorname{reg} D_i = D_i\backslash\operatorname{sing} D_i$.

Lemma 1.2 *In the notation as above, suppose that the affine varieties X and Y are smooth. If $m_{ij} = 1$ then $\sigma(E_j) \not\subseteq \operatorname{sing} D_i$. Moreover $m_{ij} = 1$ if and only if $\sigma(\operatorname{reg} E_j) \subseteq \operatorname{reg} D_i$ and σ sends the analytic discs in X transversal to E_j at a point $Q \in \operatorname{reg} E_j$ biholomorphically onto analytic discs in Y transversal to D_i at the point $P := \sigma(Q) \in \operatorname{reg} D_i$.*

Proof. We may assume that $m_{ij} > 0$ that is, $\sigma(E_j) \subseteq D_i$. For a point $Q \in E_j$ with the image $P = \sigma(Q) \in D_i$, we let $U \ni P$ resp., $V \ni Q$ be a neighborhood such that $D_i \cap U = f_i^*(0)$ resp., $E_j \cap V = h_j^*(0)$, where f_i resp., h_j is a holomorphic function in U resp., V. Then we have

$$f_i \circ \sigma|_V = h_j^{m_{ij}} \cdot h \qquad \text{with} \quad h(Q) \neq 0\,,$$

which gives the equality of 1-forms:

$$d(f \circ \sigma)(Q) = m_{ij} h_j^{m_{ij}-1}(Q) h(Q) \cdot dh_j(Q)\,. \tag{3}$$

Assuming that $Q \in \operatorname{reg} E_j$ ($\Leftrightarrow dh_j(Q) \neq 0$) and $m_{ij} = 1$, from (3) we obtain:

$$d(f \circ \sigma)(Q) = h(Q) \cdot dh_j(Q) \neq 0\,,$$

whence $df_i(P) \neq 0$ and $d\sigma(T_Q X) \not\subseteq T_P D_i$. This yields the implication "$\Longrightarrow$". On the other hand, if $P \in \operatorname{reg} D_i$ ($\Leftrightarrow df_i(P) \neq 0$) and $d\sigma(T_Q X) \not\subseteq T_P D_i$ then $d(f \circ \sigma)(Q) \neq 0$, and so by (3) $m_{ij} = 1$, which gives "$\Longleftarrow$". □

For an algebra B, denote by B^* its group of invertible elements.

Proposition 1.3 *In the notation as in 1.1 above, assume moreover that the algebras $A = \mathbb{C}[Y]$ and $A' = \mathbb{C}[X]$ are UFD's, and $A^* = A'^*$. Then $n = n'$ and the multiplicity matrix M_σ is unimodular.*

Proof. Since the algebras A and A' are UFD's there exist irreducible elements $f_1, \ldots, f_n \in A$ resp., $h_1, \ldots, h_{n'} \in A'$ such that $D_i = f_i^*(0),\ i = 1, \ldots, n$, resp., $E_j = h_j^*(0),\ j = 1, \ldots, n'$. Clearly, $h_j = (a_j/b_j) \circ \sigma$ with coprime $a_j, b_j \in A,\ j = 1, \ldots, n'$. The regular functions a_j, b_j do not vanish in $Y \backslash D$, and hence their irreducible factors are proportional to some of the elements $f_1, \ldots, f_n$. Thus for each $j = 1, \ldots, n'$ there exists $\gamma_j \in A^*$ such that

$$h_j = (\gamma_j \prod_{i=1}^{n} f_i^{m'_{ji}}) \circ \sigma \tag{4}$$

with $m'_{ji} \in \mathbb{Z}$. On the other hand, for each $i = 1, \ldots, n$ there exists $\delta_i \in A'^* = A^*$ such that

$$f_i \circ \sigma = \delta_i \prod_{k=1}^{n'} h_k^{m_{ik}}\,. \tag{5}$$

Plugging successively (4) and (5) one into another and taking into account the assumption that the algebras A' and A are UFD's and σ is a birational morphism, we obtain the equalities

$$\sum_{k=1}^{n'} m_{ik} m'_{kj} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n\,, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m'_{ji} m_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, n'\,, \tag{7}$$

that is, $M'_\sigma \cdot M_\sigma = I_{n'}$ and $M_\sigma \cdot M'_\sigma = I_n$, where I_k denotes the identity matrix of order k. Hence $n = n'$ and $M'_\sigma = M_\sigma^{-1}$, so M_σ is unimodular. □

Proposition 1.4 *Suppose that the varieties X and Y as in 1.1 are smooth, and the multiplicity matrix M_σ is an upper triangular unipotent square matrix:*

$$n = n', \quad m_{ii} = 1,\ i = 1, \ldots, n, \qquad m_{ij} = 0\ \ \forall i > j\,.$$

Then $\sigma_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ is an isomorphism.

Proof. Letting $G = \pi_1(Y \backslash D)$, $G' = \pi_1(X \backslash E)$ and $\sigma' = \sigma|_{X \backslash E}$, we have that $\sigma'_* : G' \to G$ is an isomorphism which sends the subgroup

$$H' := \langle\langle \alpha_{E_1}, \ldots, \alpha_{E_n} \rangle\rangle \subseteq G'$$

into the subgroup

$$H := \langle\langle \alpha_{D_1}, \ldots, \alpha_{D_n} \rangle\rangle \subseteq G\,,$$

where for a hypersurface Z in a complex manifold X, α_Z denotes a vanishing loop of Z in $X \setminus Z$, whereas for a group G and elements $a_1, \ldots, a_k \in G$, $\langle\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\rangle$ denotes the minimal normal subgroup of G generated by $a_1, \ldots, a_k$. Moreover, $\sigma_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ is a surjection with kernel $\ker \sigma_* \cong H/\sigma'_*(H')$ (see e.g., [KZ99, the proof of Prop. 3.1]). Thus we must show that $\sigma'_*(H') = H$.

For $i = 1, \ldots, n$ denote

$$H_i := \langle\langle \alpha_{D_1}, \ldots, \alpha_{D_i} \rangle\rangle \subseteq G \quad \text{resp.,} \quad H'_i := \langle\langle \alpha_{E_1}, \ldots, \alpha_{E_i} \rangle\rangle \subseteq G'\,,$$

so that $H_n = H$ and $H'_n = H'$. Clearly, $\sigma'_*(\alpha_{E_1}) \sim \alpha_{D_1}$ (where $\sim$ stands for conjugation), whence $\sigma'_*(H'_1) = H_1$. We show by induction that $\sigma'_*(H'_i) = H_i$ for all $i = 1, \ldots, n$.

Assume that this equality holds for $i = k - 1 < n$. As $m_{kk} = 1$, by 1.2 we may conclude that for a general point $Q \in E_k$, $P := \sigma(Q)$ is a smooth point of D_k, and σ sends biholomorphically a smooth analytic disc transversal to the divisor E_k at Q onto a transversal disc to D_k at P. As the matrix M_σ is upper triangular we obtain $\sigma'_*(H'_i) \subseteq H_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ and furthermore, $\sigma'_*(\alpha_{E_k}) \sim \alpha_{D_k} \mod H_{k-1}$. As $\sigma'_*(H'_{k-1}) = H_{k-1}$ it follows that also $\sigma'_*(H'_k) = H_k$, therefore $\sigma'_*(H') = H$, as desired. $\square$

1.2. Acyclic varieties

Recall that the acyclicity of a topological space X means that its reduced homology vanishes: $\widetilde{H}_*(X) := \widetilde{H}_*(X; \mathbb{Z}) = 0$. The following proposition is an immediate corollary of the above results.

Proposition 1.5 *Assume that the affine varieties X and Y as in 1.1 above are smooth and acyclic. Then*

(a) $n = n'$ and the multiplicity matrix M_σ is unimodular.

If moreover, M_σ is an upper triangular unipotent matrix then *(b)* $\sigma_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ *is an isomorphism.*

(c) X *is contractible if and only if so is* Y*.*

(d) In the latter case the varieties X *and* Y *are both diffeomorphic to the affine space* $\mathbb{R}^{2m}$ *provided that* $m := \dim_{\mathbb{C}} Y \geq 3$*.*

Proof. By [Fuj82, 1.18-1.20] (see also [Kal94, 3.2]) for any smooth acyclic affine variety Z the algebra $\mathbb{C}[Z]$ is UFD and its invertible elements are constants. Thus (a) follows from 1.3. (b) directly follows from 1.4. In virtue of the Hurewicz and Whitehead theorems [FF89, Ch.2, §11.5, §14.2], an acyclic manifold is contractible if and only if it is simply connected. Hence (c) follows from (b). In turn, (d) follows from the Dimca-Ramanujam theorem [CD94, Zaĭ99]. □

1.6 In section 3.2 we will apply the following corollary (see 1.7 below) of Miyanishi's characterization of $\mathbb{C}^3$ [Miy84, Miy88]. On the other hand, this corollary also follows from [Sat83] and [KZ00], as stated in [KZ00, Cor. 0.2]. Moreover, by [Kal94, L. III] it would be enough to suppose in 1.7 that only general (rather than all) fibers of x were isomorphic to $\mathbb{C}^2$.

Theorem 1.7 *Let* X *be a smooth acyclic affine 3-fold. Then* $X \simeq \mathbb{C}^3$ *if and only if there exists a regular function* $x \in \mathbb{C}[X]$ *with all fibers isomorphic to* $\mathbb{C}^2$*.*

1.8 It is known [KZ99, Thm.1.1] that any birational morphism $\sigma : X \to Y$ of affine varieties is an affine modification. The divisor $D \subseteq Y$ of modification and the exceptional divisor $E \subseteq X$ of σ can be defined as minimal reduced divisors such that the restriction $\sigma|_{X\backslash E} : X\backslash E \to Y\backslash D$ is an isomorphism. In the next proposition and its corollary we provide conditions (more general than those in [KZ99, Thm. 3.1]) which guarantee preservation of the homology group under modification. (Note that the divisors $\hat{E}$ and $\hat{D}$ below do not need to satisfy the assumption of minimality.)

Proposition 1.9 *Given affine varieties* $\hat{X}$, $\hat{Y}$ *and decompositions*

$$\hat{X} = (\hat{X}\backslash\hat{E}) \cup \hat{E} \quad \text{and} \quad \hat{Y} = (\hat{Y}\backslash\hat{D}) \cup \hat{D},$$

where $\hat{E} \subseteq \hat{X}$ *and* $\hat{D} \subseteq \hat{Y}$ *are reduced divisors, let* $\sigma : \hat{X} \to \hat{Y}$ *be a birational morphism which respects these decompositions. Suppose that the following hold.*

(i) $\hat{E}, \hat{D}$ *are topological manifolds,* $\hat{E} \subseteq \operatorname{reg} \hat{X}$*,* $\hat{D} \subseteq \operatorname{reg} \hat{Y}$*, and* $\sigma^*(\hat{D}) = \hat{E}$*.*

(ii) The induced homomorphisms

$$(\sigma|_{\hat{E}})_* : H_*(\hat{E}) \to H_*(\hat{D}) \quad \text{and} \quad (\sigma|_{\hat{X}\backslash\hat{E}})_* : H_*(\hat{X}\backslash\hat{E}) \to H_*(\hat{Y}\backslash\hat{D})$$

are isomorphisms.

Then $\sigma_* : H_*(\hat{X}) \to H_*(\hat{Y})$ *is an isomorphism as well; in particular,* $\hat{X}$ *is acyclic if and only if* $\hat{Y}$ *is so.*

Proof. We apply the Thom isomorphism [Dol72, 7.15] to the pairs $(\hat{X}, \hat{E})$ resp., $(\hat{Y}, \hat{D})$ (notice that locally near $\hat{E}$ resp., $\hat{D}$ these are pairs of topological manifolds). As $\sigma^*(\hat{D}) = \hat{E}$ and $(\sigma|_{\hat{E}})_* : H_0(\hat{E}) \xrightarrow{\cong} H_0(\hat{D})$, σ maps the irreducible components of $\hat{E}$ into those of $\hat{D}$ providing a one-to-one correspondence, and (as in 1.2) sends their transverse classes [Dol72, Ch. VIII] to the corresponding transverse classes. By functoriality of the cap-product [Dol72, VII.12.6] for every $i \geq 0$ the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc}
H_i(\hat{X},\, \hat{X}\backslash\hat{E}) & \xrightarrow[t_{\hat{X}}]{\cong} & \widetilde{H}_{i-2}(\hat{E}) \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma_*} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_*} \\
H_i(\hat{Y},\, \hat{Y}\backslash\hat{D}) & \xrightarrow[t_{\hat{Y}}]{\cong} & \widetilde{H}_{i-2}(\hat{D})
\end{array}$$

(where t stands for the Thom isomorphism, and the homology groups in negative dimensions are zero). This allows to replace the relative homology groups in the exact sequences of pairs as to obtain the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots \to & \widetilde{H}_{i-1}(\hat{E}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_i(\hat{X}\backslash\hat{E}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_i(\hat{X}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{i-2}(\hat{E}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{i-1}(\hat{X}\backslash\hat{E}) & \to \ldots \\
& \wr\downarrow{\scriptstyle \sigma_*} & & \wr\downarrow{\scriptstyle \sigma_*} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_*} & & \wr\downarrow{\scriptstyle \sigma_*} & & \wr\downarrow{\scriptstyle \sigma_*} & \\
\ldots \to & \widetilde{H}_{i-1}(\hat{D}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_i(\hat{Y}\backslash\hat{D}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_i(\hat{Y}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{i-2}(\hat{D}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{i-1}(\hat{Y}\backslash\hat{D}) & \to \ldots
\end{array}$$

By (ii) the four vertical arrows (as shown at the diagram) are isomorphisms, whence by the 5-lemma, the middle one is so as well, as stated. $\square$

Actually, the divisors E and D we deal with in section 2 below are not always topological manifolds. However, in our setting we can apply 1.9 by decomposing further as follows.

Corollary 1.10 *The same conclusion as in 1.9 holds if (instead of (i), (ii)) we assume that there are decompositions $\hat{E} = E' + E''$ and $\hat{D} = D' + D''$ satisfying the following conditions:*

(i') $E'\backslash E''$, $D'\backslash D''$, E'' and D'' are topological manifolds, $\hat{E} \subseteq \operatorname{reg} \hat{X}$, $\hat{D} \subseteq \operatorname{reg} \hat{Y}$, and $\sigma^*(D'\backslash D'') = E'\backslash E''$, $\sigma^*(D'') = E''$.

(ii') The induced homomorphisms $(\sigma_{\hat{X}\backslash\hat{E}})_* : H_*(\hat{X}\backslash\hat{E}) \to H_*(\hat{Y}\backslash\hat{D})$,

$$(\sigma|_{E'\backslash E''})_* : H_*(E'\backslash E'') \to H_*(D'\backslash D'') \quad \text{and} \quad (\sigma|_{E''})_* : H_*(E'') \to H_*(D'')$$

are isomorphisms.

Proof. Indeed, 1.9 implies that (under our assumptions)

$$(\sigma|_{\hat{X}\backslash E''})_* : H_*(\hat{X}\backslash E'') \to H_*(\hat{Y}\backslash D'')$$

is an isomorphism. Now (with $\hat{E}$ and $\hat{D}$ in 1.9 replaced by E'' resp., D''), 1.9 implies that $\sigma_* : H_*(\hat{X}) \to H_*(\hat{Y})$ is an isomorphism as well. □

1.11 Recall [Mau70, Ch. 5, §5.3], [VF88, Ch. 2, §8.1][1] that a simplicial polyhedron P is called a *homology n-manifold* if for any point $p \in P$ we have $H_*(P, P\backslash\{p\}) \cong \widetilde{H}_*(S^n)$ [2].

Proposition 1.12 *Let X be a smooth acyclic affine variety of complex dimension n. Then the one-point compactification $\dot{X}$ of X is a homology $2n$-manifold which is a homology $2n$-sphere: $H_*(\dot{X}) \cong H_*(S^{2n})$. In particular, the Alexander duality holds for $\dot{X}$.*

Proof. Notice first that X is diffeomorphic to the interior of a compact manifold, say, X_R with boundary ∂X_R (indeed, one can take for X_R the intersection of X with a ball of a large enough radius R in an affine space $\mathbb{C}^N \supseteq X$). Hence $\dot{X} \simeq X_R/\partial X_R \simeq X_R \cup_{\partial X_R} C(\partial X_R)$ (with CY denoting the cone over Y), and any triangulation of X_R naturally extends to those of $\dot{X}$.

[1] We are grateful L. Guillou for useful discussions on homology manifolds and references.

[2] Or equivalently, $H_*(lk(p)) \cong H_*(S^{n-1})$, where $lk(p)$ denotes the link of p in P, or else, for any q-simplex σ in P, $H_*(lk(\sigma)) \cong H_*(S^{n-q-1})$.

By the Poincaré-Lefschetz duality for a manifold with boundary [Mau70, 5.4.13],

$$H^{2n-i}(X_R) \cong H_i(X_R, \partial X_R) \cong \widetilde{H}_i(X_R/\partial X_R) \cong \widetilde{H}_i(\dot{X})\,,$$

whence $\dot{X}$ is a homology $2n$-sphere. Using the acyclicity of X_R and of $C(\partial X_R)$ and applying the Mayer-Vietoris sequence to the decomposition $\dot{X} = X_R \cup_{\partial X_R} C(\partial X_R)$, we see that $H_i(\dot{X}) \cong H_{i-1}(\partial X_R)$. Thus the smooth manifold ∂X_R is a homology $(2n-1)$-sphere.

Clearly, $H_*(\dot{X}, \dot{X}\backslash\{x\}) \cong \widetilde{H}_*(S^{2n})$ for any point $x \in X = \dot{X}\backslash\{\infty\}$. For the vertex $x = \infty$ of the cone $C(\partial X_R)$ and for any $i \in \mathbb{N}$, by excision and from the exact homology sequence of a pair we obtain:

$$H_i(\dot{X}, \dot{X}\backslash\{\infty\}) \cong H_i(C(\partial X_R), C(\partial X_R)\backslash\{\infty\})$$

$$\cong \widetilde{H}_{i-1}(\partial X_R) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{2n-1}) \cong \widetilde{H}_i(S^{2n})\,.$$

Thereby $\dot{X}$ is a homology manifold and is a homology $2n$-sphere. For any point $x \in \dot{X}$, from the exact homology sequence of the pair $(\dot{X}, \dot{X}\backslash\{x\})$ it follows that $\dot{X}\backslash\{x\}$ is acyclic. Now the proof of the Alexander duality for the usual sphere [Mau70, 5.3.19] goes *mutatis mutandis* for $\dot{X}$ (cf. [Beg45, Thm. 6.4], [Wil79, p. 176]). □

1.3. Digest on Makar-Limanov and Derksen invariants

These invariants (introduced in [ML96, KML97, Der97]) allow in certain cases to distinguish space-like affine varieties from the affine spaces. On this purpose, we use them in subsection 3.1 (to establish 3.6). Let us first recall the following notions and facts.

1.13 *Locally nilpotent derivations.* Let A be an affine domain over $\mathbb{C}$. A derivation $\partial \in \operatorname{Der} A$ of A is called *locally nilpotent* (*LND* for short) if for each $a \in A$ there exists $n = n(a, \partial) \in \mathbb{N}$ such that $\partial^{(n)}(a) = 0$; the set of all non-zero locally nilpotent derivations of the algebra A is denoted by $\mathrm{LND}(A)$. Given $\partial \in \mathrm{LND}\,(A)$, the function $\deg_\partial(a) := \min\{n(a, \partial) - 1\}$ is a degree function on A. The kernel $A^\partial = \ker \partial$ of ∂ is a ∂-invariant subalgebra of A; its elements are called *∂-constants.* For the proof of the following lemma see e.g., [ML96, ML98, KML97, Der97], [Zaĭ99, §7] or [Kal94, 5.1(6)].

Lemma 1.14 *The following statements hold:*

(a) *tr.deg* $[A : A^\partial] = 1$.

(b) *The subalgebra* A^∂ *is algebraically closed.*

(c) *It is factorially closed i.e.,* $uv \in A^\partial\backslash\{0\} \Longrightarrow u,\, v \in A^\partial$.

(d) *If* $u^k + v^l \in A^\partial\backslash\{0\}$ *for some* $k,\, l \geq 2$ *then* $u,\, v \in A^\partial$.
Moreover, $p(u, v) \in A^\partial\backslash\mathbb{C} \Longrightarrow u,\, v \in A^\partial$ *for any polynomial* $p \in \mathbb{C}^{[2]}$ *with general fibers being irreducible and non-isomorphic to* $\mathbb{C}$.

1.15 *Invariants.* The *Makar-Limanov invariant* of the algebra A is the subalgebra

$$\mathrm{ML}\,(A) = \bigcap_{\partial\in\mathrm{LND}(A)} A^\partial \subset A\,,$$

whereas the *Derksen invariant*:

$$\mathrm{Dk}\,(A) = \mathbb{C}\Big[\bigcup_{\partial\in\mathrm{LND}(A)} A^\partial\Big] \subset A$$

is the subalgebra of A generated by the ∂-constants of all locally nilpotent derivations on A. If $\mathrm{ML}(A) = \mathbb{C}$ (resp., $\mathrm{Dk}(A) = A$) then we say that the corresponding invariant is trivial. This is, indeed, the case for a polynomial algebra $A = \mathbb{C}^{[n]}$ $(n \in \mathbb{N})$.

1.16 *Specializations.* Let X be an affine variety, and set $A = \mathbb{C}[X]$. To study the locally nilpotent derivations on A, it is possible to proceed by induction on the dimension of X. Namely, let $\partial \in \mathrm{LND}\,(A)$, and let $u \in \ker\partial$ be non-zero. As $\partial(u - c) = 0\ \forall c \in \mathbb{C}$, the principal ideal $(u - c)$ of the algebra A is invariant under ∂, and so ∂ descends to the quotient $B_c = A/(u - c) = \mathbb{C}[S_c]$, where $S_c = u^{-1}(c)$ is a fiber of u. For a general $c \in \mathbb{C}$, this specialization ∂_c is a non-zero locally nilpotent derivation of the algebra B_c (see 1.17 below). Clearly, the restriction to S_c of any ∂-constant $v \in \ker\partial$ is a ∂_c-constant.

1.17 $\mathbb{C}_+$*-actions.* Otherwise, the above specialization can be described via the natural correspondence between the locally nilpotent derivations of the algebra A and the regular actions of the additive group $\mathbb{C}_+$ on the variety $X = \mathrm{spec}\,A$ (e.g., see [Ren68, Zaĭ99]). Indeed, the subalgebra $\ker\partial$ coincides with the algebra of invariants A^φ of the associated $\mathbb{C}_+$-action $\varphi = \varphi_\partial$. If u is a φ-invariant then clearly, the $\mathbb{C}_+$-action $\varphi|_{S_c}$ on a fiber $S_c = \mathrm{spec}\,B_c$ of u is associated with the above specialization ∂_c. Hence $\partial_c \in \mathrm{LND}\,(B_c)$ if and only if the $\mathbb{C}_+$-action $\varphi|_{S_c}$ is non-trivial.

1.18 *Jacobian derivations [KML97, KML98].* For an n-tuple of polynomials $p_1, \dots, p_{n-1},\, q \in \mathbb{C}^{[n]}$, the Jacobian

$$\partial(q) := \operatorname{jac}(p_1, \dots, p_{n-1},\, q) = \frac{\partial(p_1, \dots, p_{n-1},\, q)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

(regarded as a function of q, whereas the polynomials $p_1, \dots, p_{n-1}$ are fixed) gives a derivation on the polynomial algebra $\mathbb{C}^{[n]}$. This derivation is non-zero provided that the polynomials $p_1, \dots, p_{n-1}$ are algebraically independent. For $p := p_1$, the principal ideal $(p) \subseteq \mathbb{C}^{[n]}$ is invariant under ∂, whence ∂ descents to a derivation of the quotient algebra $A := \mathbb{C}^{[n]}/(p) = \mathbb{C}[X]$, where $X := p^*(0) \subset \mathbb{C}^n$ [3]. Denote by $\operatorname{JLND}(A)$ the set of all locally nilpotent Jacobian derivations of the algebra A. Two derivations $\partial, \partial' \in \operatorname{Der}(A)$ are called *equivalent* if $A^\partial = A^{\partial'}$. Actually, two derivations are equivalent iff they generate the same degree function [KML98]: $\deg_\partial = \deg_{\partial'}$. We have the following theorem.

Theorem 1.19 ([KML97, KML98]) *If $p \in \mathbb{C}^{[n]}$ is a non-constant irreducible polynomial then every locally nilpotent derivation $\partial \in \operatorname{LND}(A)$ (where as above, $A = \mathbb{C}^{[n]}/(p)$) is equivalent to a Jacobian locally nilpotent derivation $\partial' \in \operatorname{JLND}(A)$. Henceforth, we have*

$$\operatorname{ML}(A) = \bigcap_{\partial \in \operatorname{JLND}(A)} A^\partial \qquad \text{and} \qquad \operatorname{Dk}(A) = \mathbb{C}\Big[\bigcup_{\partial \in \operatorname{JLND}(A)} A^\partial\Big].$$

1.20 *Weight degree functions and the associated graded algebras* (see e.g., [KML97, KML98, Zaĭ99]). A *weight degree function* on the algebra $A = \mathbb{C}[X] = \mathbb{C}^{[n]}/(p)$ is defined by assigning weights $d_i = d(x_i) \in \mathbb{R}$ to the variables $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^{[n]}$ and letting for $a \in A$:

$$d_A(a) := \inf\{d(q) \mid q \in \mathbb{C}^{[n]},\, q|_X = a\}.$$

Here as usual

$$d(q) = \max\{d(m) \mid m \in M(q)\}$$

with $M(q)$ denoting the set of the monomials $m = c_m \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ of q, where $d(m) := \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i$. The weight degree function $d_A : A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ defines an ascending filtration $\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ of the algebra A with $A_t := \{a \in A \mid d_A(a) \le$

[3] To simplify the exposition we suppose that X is a hypersurface, whereas the results of [KML98] hold in a more general setting.

$t\}$. We also let $A'_t := \{a \in A \,|\, d_A(a) < t\} \subset A_t$, and we consider the *associated graded algebra*

$$\hat{A} = \bigoplus_{t \in \mathbb{R}} A_t / A'_t$$

(actually, the set of non-zero homogeneous components A_t/A'_t of the algebra $\hat{A}$ is at most countable).

1.21 *Associated homogeneous derivations.* For a polynomial $q \in \mathbb{C}^{[n]}$, we consider its *d-principal part* (in other words, the *principal d-quasihomogeneous part*) $\hat{q} := \sum_{m \in M(q),\, d(m)=d(q)} m$. For an element $a \in A$, we let $\hat{a}$ to be its image in the graded algebra $\hat{A}$ (clearly, $\hat{a} \in A_t/A'_t$ with $t = d_A(a)$). Notice that $\hat{a} = \hat{q}\,|_{\hat{X}}$ for a polynomial $q \in \mathbb{C}^{[n]}$ such that $q\,|_X = a$ and $d(q) = d_A(a)$; the latter equality holds if and only if $\hat{q}|_{\hat{X}} \neq 0$.

If $\partial \in \mathrm{Der}\,(A)$ is a derivation then the degree

$$d_A(\partial) := \inf\,\{d_A(a) - d_A(\partial a) \,|\, a \in A\}$$

is finite [KML98]. Letting

$$\hat{\partial}\hat{a} := \widehat{\partial a} \quad \text{if} \quad d_A(a) - d_A(\partial a) = d_A(\partial) \quad \text{and} \quad \hat{\partial}\hat{a} = 0 \quad \text{otherwise,}$$

and extending $\hat{\partial}$ in a natural way to a homogeneous derivation of the graded algebra $\hat{A}$, we obtain a correspondence $\mathrm{Der}(A) \to \mathrm{Der}_{\mathrm{gr}}(\hat{A})$. It has the following properties.

Theorem 1.22 ([KML97, KML98]) *Let $p \in \mathbb{C}^{[n]}$ be a polynomial with a non-constant, irreducible d-principal part $\hat{p}$. Set $\hat{X} = \hat{p}^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n$. Then the following hold.*

(a) $\hat{A} \simeq \mathbb{C}[\hat{X}]$.

(b) If $\partial \in \mathrm{LND}\,(A)$ then $\hat{\partial} \in \mathrm{LND}\,(\hat{A})$, and for any $a \in A^{\partial}$, $\hat{a} \in \hat{A}^{\hat{\partial}}$.

(c) [4] *For any non-zero Jacobian derivation*

$$\partial = \frac{\partial(p,\, p_2, \ldots, p_{n-1},\, *)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

of the algebra $A = \mathbb{C}[X]$ there exists an equivalent one

$$\partial' = \frac{\partial(p,\, p'_2, \ldots, p'_{n-1},\, *)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

[4] A similar fact remains true for any affine domain [ML].

such that the d-principal parts $\hat{p}, \hat{p}'_2, \dots, \hat{p}'_{n-1}$ are algebraically independent.

(d) *If the latter condition holds then the associated derivation $\hat{\partial}' \in$Der$(\hat{A})$ of the associated graded algebra $\hat{A}$ is also a Jacobian one, namely,*

$$\hat{\partial}' = \frac{\partial(\hat{p}, \hat{p'}_2, \dots, \hat{p'}_{n-1}, *)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} .$$

1.23 *Graded invariants.* For a graded algebra $\hat{A}$, we denote by $\mathrm{Dk}_{\mathrm{gr}}\,(\hat{A})$ the following 'graded' version of the Derksen invariant:

$$\mathrm{Dk}_{\mathrm{gr}}\,(\hat{A}) = \mathbb{C}\Big[\bigcup_{\partial \in \mathrm{LND}_{\mathrm{gr}}(\hat{A})} \hat{A}^{\partial} \Big] .$$

The way we use in the next section the Derksen invariant (similar to that of [Der97, KML97, ML96, Zaĭ99]) is based on the next simple lemma.

Lemma 1.24 *Given an irreducible hypersurface $X \subseteq \mathbb{C}^n$, suppose that the algebra $A = \mathbb{C}[X]$ is equipped with a weight degree function d_A such that the hypersurface $\hat{X} \subset \mathbb{C}^n$ is also irreducible. If*

$$\mathrm{Dk}_{\mathrm{gr}}\,(\hat{A}) \subset \hat{A}_{\le 0} := \bigoplus_{t \le 0} A_t / A'_t \subset \hat{A}$$

then

$$\mathrm{Dk}\,(A) \subset A_0 = \{a \in A \,|\, d_A(a) \le 0\} .$$

Henceforth, $X \not\simeq \mathbb{C}^{n-1}$ unless $A = A_0$.

Proof. By 1.22 (a),(b) for every $\partial \in \mathrm{LND}\,(A)$ and for every ∂-constant $a \in A^{\partial}$, we have $\hat{a} \in \ker \hat{\partial}$, where $\hat{\partial} \in \mathrm{LND}_{\mathrm{gr}}(\hat{A})$, whence $\hat{a} \in \hat{A}_{\le 0}$. Therefore, $d_A(a) \le 0$ i.e., $a \in A_0$, as stated. $\square$

1.4. Variables in polynomial rings

1.25 For a commutative ring B, we let $B^{[n]} = B[y_1, \dots, y_n]$. A polynomial $p \in B^{[n]}$ is called a *B-variable* (or simply a *variable* if no ambiguity occurs) if it is a coordinate ($p = p_1$) of an automorphism $\beta = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathrm{Aut}_B B^{[n]}$ (thus $\beta|_B = \mathrm{id}_B$). The set of all B-variables of $B^{[n]}$ is denoted as $\mathrm{Var}_B B^{[n]}$. For $B = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, a B-automorphism is called in brief an $(x_1, \cdots, x_n)$*-automorphism*, and a B-variable is also called an $(x_1, \cdots, x_n)$-variable.

Remark 1.26 It is easily seen that a polynomial $p \in \mathbb{C}^{[n]}$ is an $(x_1, \ldots, x_k)$-variable (where $0 \le k \le n-1$) if and only if $X := p^{-1}(0) \simeq \mathbb{C}^{n-1}$ and there exists $\partial \in \mathrm{LND}\,(\mathbb{C}^{[n]})$ with $x_1, \ldots, x_k \in \ker \partial$ such that $\partial p = 1$ (i.e., p is a *slice of* ∂). Indeed, $\partial p = 1$ implies that X can be identified with the orbit space $\mathbb{C}^n/\varphi_\partial = \mathrm{spec}\,(\mathbb{C}^{[n]})^{\varphi_\partial} = \mathrm{spec}\,(\ker \partial)$ of the associated $\mathbb{C}_+$-action φ_∂ on $\mathbb{C}^n$ (see 1.17), and so $\mathbb{C}^{[n]} = (\ker \partial)[p] \cong \mathbb{C}^{[n-1]}[p]$.

Notice that as $\mathbb{C}^n \simeq X \times \mathbb{C}$, the assumption $X \simeq \mathbb{C}^{n-1}$ above is superfluous provided that the Zariski Cancellation Conjecture holds.

1.27 For a polynomial $q = q(x, y, z, \ldots) \in \mathbb{C}^{[n]}$, we denote by q_λ $(\lambda \in \mathbb{C})$ the specialization $q(\lambda, y, z, \ldots) \in \mathbb{C}^{[n-1]}$.

We say that a polynomial $p(x, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}[x][y_1, \cdots, y_n]$ is a *x-residual variable* if for every $\lambda \in \mathbb{C}$, the specialization p_λ is a variable of $\mathbb{C}[y_1, \cdots, y_n]$. It is easily seen that any x-variable is a x-residual variable.

1.28 Let $f \in B$. An element $b \in B$ is said to be *invertible* (resp., *nilpotent*) $\bmod f$ if its image $[b] \in B/(f)$ is so. Thus b is nilpotent $\bmod f$ if and only if $b \in \mathrm{rad}\,(f)$. Observe that if B is UFD and $f = \prod_{i=1}^n f_i^{a_i}$ is a canonical factorization then $b \in \mathrm{rad}\,(f) \Leftrightarrow b \in (f^{\mathrm{red}})$, where $f^{\mathrm{red}} := \prod_{i=1}^n f_i \in B$.

To detect variables in polynomial rings, the following results will be useful. The statement (a) below is due to P. Russell [Rus76, Prop. 2.2], and is reproved in [Vén99] basing on (b) (see [Vén99, Prop. 1.4], or also [EV99]).

Proposition 1.29 *For a commutative ring B, the following hold.*

(a) For any f, b_0, $b_1 \in B$ and $q \in B[z]$ with b_1 invertible $\bmod f$ and q nilpotent $\bmod f$, we have $p := fu + b_0 + b_1 z + q(z) \in \mathrm{Var}_B B[z, u]$.

(b) For $f \in B$, we let $B_f := B/(f)$, and we denote by $\rho : B \to B_f$ the canonical surjection. If $p \in \mathrm{Var}_B B[z, u]$ is such that $\rho(p(z, 0)) \in \mathrm{Var}_{B_f} B_f[z]$ then also $p_f(z, u) := p(z, fu) \in \mathrm{Var}_B B[z, u]$.

(c) Let $B = \mathbb{C}[x]$ and $f \in B$. If $p \in \mathrm{Var}_B B[y, z, u]$ is such that for every root x_0 of f, the specialization $p_{x_0}(y, z, 0)$ is a variable of $\mathbb{C}[y, z]$ [5] then also $p_f(y, z, u) := p(y, z, fu) \in \mathrm{Var}_B B[y, z, u]$.

[5] Or equivalently, $\rho(p(y, z, 0)) \in \mathrm{Var}_{B_f} B_f[y, z]$.

Proof of (c). It suffices to prove (c) for $f = x$ and then conclude by induction on the degree of f. Let $\gamma \in \mathrm{Aut}_B B[y,z,u]$ be such that $\gamma(y) = p(x,y,z,u)$. Denote γ_0 the specialization of γ at $x = 0$. Clearly, $\gamma_0(y) = p(0,y,z,u)$ is a variable of $\mathbb{C}[y,z,u]$; in particular,

$$\mathbb{C}[y,z,u]/(p(0,y,z,u)) \simeq \mathbb{C}^{[2]}\,.$$

If ϕ denotes this isomorphism then

$$\mathbb{C}[y,z,u]/(p(0,y,z,u),u) \simeq \mathbb{C}^{[2]}/(\phi(u))\,.$$

By our assumption, $p(0,y,z,0)$ is a variable of $\mathbb{C}[y,z]$, and so [6]

$$\mathbb{C}[y,z,u]/(p(0,y,z,u),u) \simeq \mathbb{C}[y,z]/(p(0,y,z,0)) \simeq \mathbb{C}^{[1]}\,.$$

Hence by the Abhyankar-Moh-Suzuki Theorem, $\phi(u)$ is a variable in $\mathbb{C}^{[2]}$. Therefore we may assume that $\phi(u) = u$ i.e., there is a $\mathbb{C}[u]$-isomorphism

$$\mathbb{C}[u][y,z]/(p(0,y,z,u)) \simeq \mathbb{C}[u]^{[1]}\,.$$

By the Abhyankar-Moh-Suzuki theorem as generalized by Russell and Sathaye [RS79, Thm. 2.6.2], $p(0,y,z,u)$ is a $\mathbb{C}[u]$-variable of $\mathbb{C}[u][y,z]$. Let α_0 be the corresponding $\mathbb{C}[u]$-automorphism of $\mathbb{C}[u][y,z]$ such that $\alpha_0(y) = p(0,y,z,u)$, and denote by $\bar\gamma$ the composition

$$\bar\gamma := \gamma\gamma_0^{-1}\alpha_0 \in \mathrm{Aut}_B B[y,z,u]\,.$$

Then we get

$$\bar\gamma(y) = \gamma\gamma_0^{-1}\alpha_0(y) = \gamma\gamma_0^{-1}(p(0,y,z,u)) = \gamma(y) = p(x,y,z,u)$$

and

$$\bar\gamma(u) = \gamma\gamma_0^{-1}\alpha_0(u) = \gamma\gamma_0^{-1}(u) \equiv u \bmod x\,.$$

If σ_u is the (x,y,z)-automorphism of $\mathbb{C}(x)[y,z][u]$ defined by $\sigma_u(u) = xu$ then the composition $\sigma_u\bar\gamma\sigma_u^{-1}$ (which *à priori* is an x-automorphism of $\mathbb{C}(x)[y,z,u]$) actually is a B-automorphism of $B[y,z,u]$. Thus $\sigma_u\bar\gamma\sigma_u^{-1}(y) = p(x,y,z,xu)$ is an x-variable of $\mathbb{C}[x][y,z,u]$. □

Remark 1.30 We would like to use this opportunity to indicate a flaw in the proof of Theorem 7.2 in [KZ99] (which generalizes the Sathaye theorem mentioned in the introduction). Namely, proving Proposition 7.1 in [KZ99] and carrying induction by the multiplicity of a root $x = 0$ of the polynomial p, it was forgotten to extend it over all the roots. Instead, one can apply 1.29(a)(cf. also [Vén99, Thm. 3.6]) which fixes the flaw and simplifies the proof considerably.

[6]Hereafter under (f,g) we mean the ideal generated by f and g.

Corollary 1.31 *Let $p \in \mathbb{C}[x][y,z,u]$ be an x-variable.*

(a) If for $q(x) \in \mathbb{C}[x]$, $p_q := p(x,y,z,q(x)u)$ is an x-residual variable then it actually is an x-variable.

(b) Consequently, $p(x,y,z,q(x)u)$ is an x-variable if and only if $p(x,y,z,q_{\mathrm{red}}(x)u)$ is so.

Proof. (a) As p_q is an x-residual variable, for every root x_0 of q, $p_{x_0,0} := p(x_0,y,z,0)$ is a variable of $\mathbb{C}[y,z,u]$. In particular, $\mathbb{C}[y,z,u]/(p_{x_0,0}) = \mathbb{C}[y,z]/(p_{x_0,0}) \otimes \mathbb{C}[u] \cong \mathbb{C}^{[2]}$. It follows that $\mathbb{C}[y,z]/(p_{x_0,0}) \cong \mathbb{C}^{[1]}$, and then by the Abhyankar-Moh-Suzuki Theorem $p_{x_0,0}$ is a variable of $\mathbb{C}[y,z]$. It follows from 1.29(c) that $p(x,y,z,q(x)u)$ is an x-variable, as stated.

The proof of (b) relies on (a) and on the fact that $p(x,y,z,q(x)u)$ and $p(x,y,z,q_{\mathrm{red}}(x)u)$ are simultaneously x-residual variables. □

The proof of the following results is inspired by those of [SY01, Thm. 1.1] and [SY99, Thm. 1.4].

Proposition 1.32 *For any commutative ring B, the following hold.*

(a) For arbitrary pair of polynomials $p, q \in B[y]$ there exists an automorphism $\gamma = \gamma_{p,q} \in \mathrm{Aut}_B B[y,v]$ such that

$$\gamma((y - q(p(y)), v)) = (y - p(q(y)), v)\,.$$

(b) In particular, for $q(y) = -ay$ with $a \in B$ we have:

$$\gamma((y + ap(y), v)) = (y + p(ay), v)\,.$$

Moreover, if $a^k | p(0)$ then there exists an automorphism $\gamma_k \in \mathrm{Aut}_B B[y,v]$ such that

$$\gamma_k((y + ap(y), v)) = (y + \frac{p(a^{k+1}y)}{a^k}, v)\,.$$

Proof. It is not difficult to verify that the desired automorphism γ and its inverse γ^{-1} can be defined as follows :

$$\begin{cases} \gamma(y) = v + q(y) \\ \gamma(v) = y - p(v + q(y)) \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^{-1}(y) = v + p(y) \\ \gamma^{-1}(v) = y - q(v + p(y)) \end{cases}.$$

Iterating γ yields an appropriate γ_k as needed in (b). □

Corollary 1.33 *(a) For any pair $p, q \in B[y]$ the homomorphism*

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & B[y]/(y - q(p(y))) & \longrightarrow & B[y]/(y - p(q(y))) \\ & & y & \longmapsto & q(y) \end{array}$$

is an isomorphism.

(b) In particular, for any $a \in B$ and $p \in B[y]$ the homomorphism

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & B[y]/(y + ap(y)) & \longrightarrow & B[y]/(y + p(ay)) \\ & & y & \longmapsto & ay \end{array}$$

is an isomorphism. Moreover, if $a^k | p(0)$ then also

$$\begin{array}{rcccl} \phi_k & : & B[y]/(y + ap(y)) & \longrightarrow & B[y]/(y + \frac{p(a^{k+1}y)}{a^k}) \\ & & y & \longmapsto & a^{k+1}y \end{array}$$

is an isomorphism.

Proof. We just apply 1.32 and the obvious isomorphism $B[y]/(f(y)) \simeq B[y, v]/(f(y), v)$. $\square$

2. Simple modifications of acyclic 3-folds along cylindrical divisors

We focus below on a special case of affine modifications called simple birational extensions (see 2.1 below), applied to acyclic affine 3-folds. Our aim in this sections is to give a criterion for as when the acyclicity is preserved under such a modification (cf. [KZ99, Thm. 3.1]). In the special case when the divisor of modification is a cylinder, we obtain in Theorem 2.11 below necessary conditions for preserving the acyclicity. In Theorem 2.27 (cf. also 2.28) we show that these conditions are also sufficient, provided that the given acyclic 3-fold is a cylinder as well.

2.1. Simple affine modifications

Definition 2.1 A *simple birational extension* of a domain A (over $\mathbb{C}$) is an algebra $A' := A[g/f]$, where $f, g \in A$ are such that the ideal $I = (f, g) \subset A$ is of height 2 (i.e., the center of modification $C = V(I) = D_f^{\text{red}} \cap D_g^{\text{red}}$ is of codimension 2 in $Y := \operatorname{spec} A$). We also call $X := \operatorname{spec} A'$ a *simple affine modification* of the affine variety Y.

In the sequel A is UFD, and the above condition simply means that $f, g \in A$ are coprime. More generally [KZ99, Prop. 1.1], any affine modification can be obtained as $A' = A[g_1/f_1, \ldots, g_n/f_n]$ with $f_i, g_i \in A$; here again, if A is UFD then we may suppose f_i, g_i being coprime ($i = 1, \ldots, n$).

2.2 Observe that the variety $X = \operatorname{spec} A'$ can be realized as the hypersurface in $Y \times \mathbb{C}$ with the equation $fu + g = 0$ (where u is a coordinate in $\mathbb{C}$), and the blowup morphism is just the first projection: $\sigma = \mathrm{pr}_1|_X : X \to Y$. The exceptional divisor $E = \sigma^{-1}(C) = \sigma^{-1}(D) = \{f = 0\} \subseteq X$ is cylindrical: $E \simeq C \times \mathbb{C}$ (cf. [KZ99, Prop. 1.1]).

We have the following simple but useful lemma.

Lemma 2.3 *In the notation as above, assume that the affine variety $Y := \operatorname{spec} A$ is smooth. Then the simple affine modification $X = \operatorname{spec} A[g/f]$ is also smooth if and only if*

(i) the divisor $D_g = g^*(0)$ is smooth and reduced at each point of the center $C = D_f^{\mathrm{red}} \cap D_g^{\mathrm{red}}$, and

(ii) D_f and D_g meet transversally at those points of C where the divisor D_f is also smooth and reduced.

Furthermore, if X is smooth then $df = 0$ at each singular point of the center C.

Proof. The second assertion easily follows from the first one. To prove the first one, let $F = 0$ be the equation of the hypersurface $X \subseteq Y \times \mathbb{C}$ with $F := uf - g \in \mathbb{C}[Y][u]$ being irreducible. As $X \backslash E \simeq Y \backslash D$ is smooth, we should only control the smoothness of X at the points of the exceptional divisor

$$E = \{f = g = 0\} = C \times \mathbb{C} \subseteq Y \times \mathbb{C}\,.$$

At a point $Q = (P, u) \in E$, we have:

$$dF = udf + dg + fdu = udf + dg = 0$$

if and only if $dg = -udf$ is proportional to df. Now the assertion easily follows. $\square$

2.2. Preserving acyclicity: necessary conditions

In this subsection we adopt the following convention and notation.

Convention 2.4 (i) X and Y denote smooth, acyclic affine 3-folds [7] such that

(ii) $A' = \mathbb{C}[X]$ is a simple birational extension of the algebra $A = \mathbb{C}[Y]$ i.e., $A' = A[g/f]$ with coprime elements $f,\, g \in A$, and

(iii) $D := D_f^{\text{red}} \simeq \Gamma \times \mathbb{C}$ (where Γ is an affine curve) is a cylindrical divisor.

2.5 Denote by $\pi : D \to \Gamma$ the morphism induced by the canonical projection $\Gamma \times \mathbb{C} \to \Gamma$. By abuse of notation, we equally denote by π the restriction $\pi|_C : C \to \Gamma$. Thus we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} E \simeq C \times \mathbb{C} & \longrightarrow & C \\ \Big\downarrow \sigma & & \Big\downarrow \pi \\ D \simeq \Gamma \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \Gamma \end{array}$$

If $C = \bigcup_{i=1}^{n'} C_i$ resp., $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_i$ is the irreducible decomposition then the irreducible components of the divisor E resp., D are $E_i \simeq C_i \times \mathbb{C}$, resp., $D_j \simeq \Gamma_j \times \mathbb{C}$. As in 1.1 we denote by $M_\sigma = (m_{ij})$ the multiplicity matrix of σ . Recall that by 1.1, 1.2 and 2.3, $m_{ij} \geq 1$ if and only if $C_j \subset D_i^{\text{red}}$, and $m_{ij} = 1$ if and only if the surfaces D_i^{red}, $D_g^{\text{red}} \subseteq Y$ meet transversally at general points of the curve C_j.

The terminology in the following definitions comes from the real picture corresponding to our situation.

2.6 Notice that for each $j = 1, \ldots, n$ there exists $i \in \{1, \ldots, n\}$ such that $\pi(C_j) \subseteq \Gamma_i$, and this index $i = i(j)$ is unique unless $\pi|_{C_j} = \text{const}$.

An irreducible component C_j of the curve C is called *vertical* if $\pi|C_j =$ const (i.e. $\deg(\pi|_{C_j}) = 0$) and *non-vertical* otherwise (thus the vertical components of C are disjoint and each of them is isomorphic to $\mathbb{C}$). The uniqueness of the index $i = i(j)$ for a non-vertical component C_j and the unimodularity of M_σ (see 1.5) imply that the j-th column of the matrix M_σ is the i-th vector of the standard basis $(\bar{e}_1, \ldots \bar{e}_n)$ in $\mathbb{R}^n$, and two different

[7] Hence the algebras A and A' are UFD's, see the proof of 1.5.

non-vertical components C_j and $C_{j'}$ of C project into two different irreducible components Γ_i resp., $\Gamma_{i'}$ of Γ. Hence up to reordering, we may assume that $C_1, \ldots, C_k$ are the non-vertical components of C and $\pi(C_i) \subseteq \Gamma_i$, $i = 1, \ldots, k$. Then we have

$$M_\sigma = \left(\begin{array}{c|c} I_k & B \\ --- & --- \\ 0 & B' \end{array} \right)$$

with a unimodular matrix B'. Consequently, for every $i = 1, \ldots, k$, the surfaces D_i^{red} and D_g^{red} meet transversally at general points of the curve C_i.

2.7 The irreducible components $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ are also called *non-vertical* resp., $\Gamma_{k+1}, \ldots, \Gamma_n$ are called *vertical*. Among the non-vertical components C_i resp., Γ_i we distinguish those with $\deg(\pi|_{C_j}) = 1$ which we call *horizontal* and those with $\deg(\pi|_{C_j}) \geq 2$ which we call *slanted*. We reorder again to obtain that $C_1, \ldots, C_h$ resp., $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_h$ are the horizontal components of C resp., Γ, and $C_{h+1}, \ldots, C_k$ resp., $\Gamma_{h+1}, \ldots, \Gamma_k$ are the slanted ones. An irreducible component of C resp., Γ which is not horizontal is refered to as a *non-horizontal* component; C_{horiz} denotes the union of all horizontal components of C. In the same way we define $C_{\text{non-horiz}}$, C_{vert}, $C_{\text{non-vert}}$, C_{slant}, Γ_{horiz}, $\Gamma_{\text{non-horiz}}$, D_{horiz}, etc. Thus we have:

$$\Gamma_{\text{horiz}} = \bigcup_{i=1}^{h} \Gamma_i, \quad \Gamma_{\text{slant}} = \bigcup_{i=h+1}^{k} \Gamma_i, \quad \Gamma_{\text{vert}} = \bigcup_{i=k+1}^{n} \Gamma_i\,,$$

and similarly

$$C_{\text{horiz}} = \bigcup_{i=1}^{h} C_i, \quad C_{\text{slant}} = \bigcup_{i=h+1}^{k} C_i, \quad C_{\text{vert}} = \bigcup_{i=k+1}^{n} C_i\,.$$

2.8 Let furthermore $f = \prod_{j=1}^{n} f_j^{a_j} = f_{\text{horiz}} \cdot f_{\text{non-horiz}}$ be factorizations such that

$$f_j^*(0) = D_j^{\text{red}} \;\; (j = 1, \ldots, n), \quad (f_{\text{horiz}})^{-1}(0) = D_{\text{horiz}} \simeq \Gamma_{\text{horiz}} \times \mathbb{C}$$

and

$$(f_{\text{non-horiz}})^{-1}(0) = D_{\text{non-horiz}} \simeq \Gamma_{\text{non-horiz}} \times \mathbb{C}\,.$$

2.9 An irreducible component is called *isolated* if it is a connected component.

Let us give a typical example which illustrates our definitions.

Example 2.10 Letting $Y = \mathbb{C}^3$ with coordinates x, y, z, set $f = xy, g = y + xz$. Then $X = \{xyu + y + xz = 0\} \subset \mathbb{C}^4 = Y \times \mathbb{C}$, $D = \{xy = 0\} \subset \mathbb{C}^3$, $\sigma(x, y, z, u) = (x, y, z)$ and $E = \{xy = y + xz = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4$. Therefore, $\Gamma = \{xy = 0\} \subset \mathbb{C}^2$, $\Gamma_{\text{horiz}} = \{y = 0\}$ and $\Gamma_{\text{vert}} = \{x = 0\}$ whereas $C = C_{\text{vert}} \cup C_{\text{horiz}}$ with $C_{\text{horiz}} = \{y = z = 0\}$ and $\Gamma_{\text{vert}} = \{x = y = 0\}$.

The main result of this subsection is the following theorem.

Theorem 2.11 *Let X and Y be smooth acyclic affine 3-folds satisfying the conditions (ii) and (iii) of 2.4. Then (in the notation of 2.6-2.9) the following hold.*

(α) $\pi|(C_{\text{horiz}} \setminus C_{\text{non-horiz}}) : C_{\text{horiz}} \setminus C_{\text{non-horiz}} \to \Gamma_{\text{horiz}} \setminus \Gamma_{\text{non-horiz}}$ *is an isomorphism.*

(β) *The slanted components $C_{h+1}, \ldots, C_k$ and $\Gamma_{h+1}, \ldots, \Gamma_k$ are isolated and homeomorphic to $\mathbb{C}$.*

(γ) $f_{\text{non-horiz}} = p \circ f_{h+1}$ *with $p \in \mathbb{C}[z]$, and every non-horizontal component of Γ is homeomorphic to the affine line $\mathbb{C}$. In other words,*

$$f_{\text{non-horiz}} = c \cdot \prod_{i=h+1}^{n} (f_{h+1} - \lambda_i)^{a_i} \qquad (c \in \mathbb{C}^*, \ \lambda_{h+1} = 0)$$

with $\pi(f_{h+1}^{-1}(\lambda_i)) = \Gamma_i$ homeomorphic to $\mathbb{C}$ $(i = h+1, \ldots, n)$.

(δ) *Up to a further reordering, the multiplicity matrix has the following form:*

$$M_\sigma = \left(\begin{array}{c|c|c} I_h & 0 & B_0 \\ \hline 0 & I_{k-h} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-k} \end{array} \right)$$

Consequently (by 1.5), $\sigma_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ is an isomorphism. Moreover, X is contractible (and hence diffeomorphic to $\mathbb{R}^6$) if and only if Y is so.

The rest of this subsection is devoted to the proof of Theorem 2.11. It is convenient to introduce the following terminology and notation.

2.12 Let F be a curve. We say that a point $P \in F$ is *multibranch* (resp., *unibranch*) if it is a center of $\mu_P = \mu_P(F) > 1$ (resp., $\mu_P = 1$) local analytic branches of F. We denote by F^{norm} the normalization of F and by $\bar{F}$ its smooth complete model. The points of $\bar{F} \setminus F^{\mathrm{norm}}$ are called the *punctures* of F. A morphism of curves $\rho : F \to G$ can be lifted to the normalizations resp., the completions; we denote the lift by $\rho^{\mathrm{norm}} : F^{\mathrm{norm}} \to \Gamma^{\mathrm{norm}}$ resp., $\bar{\rho} : \bar{F} \to \bar{G}$.

2.13 Consider further an irreducible smooth curve F of genus g with n punctures, and let the 1-cycles $a_1, \ldots, a_g,\ b_1, \ldots, b_g$ on F provide a symplectic basis of the group $H_1(\bar{F}) = H_1(\bar{F}; \mathbb{Z})$. Then there is an injection $H_1(\bar{F}) \hookrightarrow H_1(F)$ onto the subgroup generated by the classes $[a_1], \ldots, [a_g],\ [b_1], \ldots, [b_g]$; we may identify the group $H_1(\bar{F})$ with its image in $H_1(F)$. The group $H_1(F)$ being freely generated by the classes $[a_1], \ldots, [a_g],\ [b_1], \ldots, [b_g],\ [c_1], \ldots, [c_{n-1}]$, where $c_1, \ldots, c_n$ are simple 1-cycles around the punctures of F, we have a (non-canonical) decomposition

$$H_1(F) \simeq H_1(\bar{F}) \oplus G(F) \quad \text{with} \quad G(F) := \langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \simeq \mathbb{Z}^{n-1} \tag{8}$$

($\sum_{i=1}^{n} [c_i] = 0$ being the only relation between the generators $[c_1], \ldots, [c_n]$ of the group $G(F)$).

2.14 We denote by $S_\Gamma = S_\Gamma^{(0)} \cup S_\Gamma^{(1)}$ (where $S_\Gamma^{(0)} \cap S_\Gamma^{(1)} = \emptyset$) the finite subset of the curve Γ such that a point P belongs to S_Γ if and only if it satisfies at least one of the following three conditions:

(i) $P = \pi(C_i)$ for a vertical component C_i of C ($\Leftrightarrow P \in S_\Gamma^{(1)}$);

(ii) $P = \pi(Q)$ for a multibranch point Q of C;

(iii) P is a multibranch point of Γ.

2.15 Set $S_C = \pi^{-1}(S_\Gamma) \subseteq C$ and $S_C^{(i)} = \pi^{-1}(S_\Gamma^{(i)})$, $i = 0, 1$. Thus the analytic set S_C contains the union $S_C^{(1)} = C_{\mathrm{vert}}$ of vertical components of C, whereas the residue set $S_C^{(0)} = S_C \setminus S_C^{(1)}$ is finite.

It is easily seen that if $Q \in S_C^{(0)}$ then over any local analytic branch B_i of Γ at the point $P := \pi(Q)$ there is at least one local analytic branch $A_j \subseteq \pi^{-1}(B_i) \cap D_g^{\mathrm{red}}$ of C at Q. Indeed, the surfaces $\pi^{-1}(B_i) \simeq B_i \times \mathbb{C}$ and D_g meet at Q, and so the polynomial $g|_{\pi^{-1}(B_i)} \in \mathcal{O}[B_i][z]$ vanishes at

$Q =: (P, z_0)$, but its specialization at P is nonzero, as $Q \in S_C^{(0)}$ means that no vertical component of C passes through Q. Consequently $\mu_Q(C) \geq \mu_P(\Gamma)$ and $P \notin \Gamma_{\text{vert}}$, whence $\pi^{-1}(\Gamma_{\text{vert}}) \subseteq S_C^{(1)} = C_{\text{vert}}$.

2.16 We let $\Gamma^* = \Gamma \setminus S_\Gamma$ (more generally, $\Gamma^*_{\text{something}} = \Gamma_{\text{something}} \cap \Gamma^*$) and $C^* = C \setminus S_C = \pi^{-1}(\Gamma^*) = \pi^{-1}(\Gamma^*_{\text{non-vert}}) \subseteq C$.

2.17 For a complex hermitian manifold M and a closed analytic subset T of M, by a *link* $lk_P(T)$ of T at a point $P \in T$ we mean the intersection $T \cap S_\varepsilon$ of T with a small enough sphere S_ε in M centered at P. We also call *link* the corresponding homology class $[lk_P(T)] \in H_*(T \setminus \{P\}) = H_*(T \setminus \{P\}; \mathbb{Z})$, and we still denote it simply by $lk_P(T)$.

2.18 We denote by H_Γ resp., H_C the subgroup of the group $H_1(\Gamma^*) = H_1(\Gamma^*; \mathbb{Z})$ resp., $H_1(C^*)$ generated by the links[8] $lk_P(\Gamma)$ resp., $lk_Q(C)$ of the points $P \in S_\Gamma$ resp., $Q \in S_C^{(0)}$. Notice that $lk_P(\Gamma) = \sum_{i=1}^{\mu} lk_P(B_i)$, where $B_1, \ldots, B_\mu$ are the local branches of Γ at P and $\mu := \mu_P(\Gamma)$. Clearly, $H_\Gamma \subseteq G(\Gamma^*)$ resp., $H_C \subseteq G(C^*)$, and so we obtain (non-canonical) isomorphisms

$$H_1(C^*)/H_C \simeq H_1(\overline{C^*}) \oplus [G(C^*)/H_C] \tag{9}$$

resp.,

$$H_1(\Gamma^*)/H_\Gamma \simeq H_1(\bar{\Gamma}) \oplus [G(\Gamma^*)/H_\Gamma] \,. \tag{10}$$

The next proposition is our main technical tool in the proof of Theorem 2.11.

Proposition 2.19 *Under the assumptions as in 2.4, consider the restriction $\pi = \pi_{|C^*} : C^* \to \Gamma^*$. Then $\pi_*(H_C) \subseteq H_\Gamma$, and π induces the following isomorphisms:*

$$\widehat{\pi}_* : H_1(C^*)/H_C \xrightarrow{\cong} H_1(\Gamma^*)/H_\Gamma \,, \tag{11}$$

$$\bar{\pi}_* : H_1(\overline{C^*}) \xrightarrow{\cong} H_1(\bar{\Gamma}) \,, \tag{12}$$

$$\tilde{\pi}_* : G(C^*)/H_C \xrightarrow{\cong} G(\Gamma^*)/H_\Gamma \,. \tag{13}$$

[8]Here we are in the special case when $M = X$ resp., Y and $T = C$ resp. Γ.

The proof is based on Lemmas 2.21 and 2.22 below. Let us introduce the following notation.

2.20 Denote

$$S_E = \sigma^{-1}(S_C) = S_C \times \mathbb{C} \subseteq E \quad \text{resp.,} \quad S_E^{(i)} = \sigma^{-1}(S_C^{(i)}) \ \ (i = 0, 1)$$

and

$$S_D = \pi^{-1}(S_\Gamma) \subseteq D\,, \qquad \text{so that} \quad S_D \simeq S_\Gamma \times \mathbb{C} \subseteq \Gamma \times \mathbb{C} \simeq D\,.$$

Furthermore, set

$$E^* = \sigma^{-1}(C^*) = E \backslash S_E = C^* \times \mathbb{C} \qquad \text{resp.,} \qquad D^* = \pi^{-1}(\Gamma^*) = D \backslash S_D \simeq \Gamma^* \times \mathbb{C}$$

and

$$X^* = X \setminus S_E \qquad \text{resp.,} \qquad Y^* = Y \setminus S_D.$$

Thus

$$X \setminus E = X^* \setminus E^* \qquad \text{resp.,} \qquad Y \setminus D = Y^* \setminus D^*\,,$$

and so we have an isomorphism

$$\sigma|_{X^* \setminus E^*} : X^* \setminus E^* \to Y^* \setminus D^*\,.$$

Lemma 2.21 *There are monomorphisms*

$$\rho_X : H_3(X^*) \to H_1(C^*) \qquad \text{resp.,} \qquad \rho_Y : H_3(Y^*) \to H_1(\Gamma^*) \qquad (14)$$

such that $\pi_* \rho_X = \rho_Y \sigma_*$ *and*

$$\widehat{\pi}_* : H_1(C^*)/\rho_X(H_3(X^*)) \to H_1(\Gamma^*)/\rho_Y(H_3(Y^*))$$

is an isomorphism.

Proof.

The map of pairs $\sigma|_{X^*} : (X^*, X^* \setminus E^*) \to (Y^*, Y^* \setminus D^*)$ induces the following commutative diagram (where the horizontal lines are exact homology sequences of pairs):

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_i(X^* \setminus E^*) \arrow[r] \arrow[d, "\wr\,\sigma_*"] & H_i(X^*) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\sigma_*"] & H_i(X^*,\, X^* \setminus E^*) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\sigma_*"] & H_{i-1}(X^* \setminus E^*) \arrow[r] \arrow[d, "\wr\,\sigma_*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_i(Y^* \setminus D^*) \arrow[r] & H_i(Y^*) \arrow[r, "i_*"] & H_i(Y^*,\, Y^* \setminus D^*) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{i-1}(Y^* \setminus D^*) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd} \qquad (*_1)$$

Claim. (a) $H_3(X^*\setminus E^*)=H_3(Y^*\setminus D^*)=0$ *and* (b) $H_2(X^*)=H_2(Y^*)=0$.

Proof of the claim. (a) In virtue of the isomorphism

$$\sigma_*: H_3(X^*\setminus E^*)=H_3(X\setminus E)\xrightarrow{\cong} H_3(Y\setminus D)=H_3(Y^*\setminus D^*)$$

it is enough to show the vanishing of one of these groups, say, of $H_3(X\setminus E)$. Let as before, $\dot F$ denote the one-point compactification of a topological space F. As X is acyclic (whence by 1.12, the Alexander duality can be applied to $\dot X$) and moreover E is closed in X, the Alexander duality gives an isomorphism

$$H_3(X\setminus E)\cong H^2(\dot E,\,\{\infty\})\,. \tag{15}$$

Consider the homeomorphisms $E\approx C\times\mathbb{R}^2$, $\dot E\approx(\dot C\times\dot{\mathbb{R}}^2)/(\dot C\vee\dot{\mathbb{R}}^2)$ and replace here $\dot{\mathbb{R}}^2$ by S^2. Since $(\dot C\times S^2,\,\dot C\vee S^2)$ has the homotopy type of a pair of cell complexes, by [Dol72, 4.4] we get

$$H^2(\dot E,\,\{\infty\})\cong\widetilde{H}^2(\dot E)\cong H^2(\dot C\times S^2,\,\dot C\vee S^2)\,.$$

The Künneth formula for cohomology [Mas80, (11.2)] yields a monomorphism

$$\mu:\sum_{p+q=2}H^p(\dot C,\{\infty\})\otimes H^q(S^2,\{\infty\})=:H\to H^2(\dot C\times S^2,\,\dot C\vee S^2)$$

with the cokernel

$$\operatorname{coker}\mu=\sum_{p+q=3}\operatorname{Tor}\left(H^p(\dot C,\{\infty\}),H^q(S^2,\{\infty\})\right).$$

As

$$H^0(\dot C,\{\infty\})=H^0(S^2,\{\infty\})=H^1(S^2,\{\infty\})=0$$

we have $H=0$. The group $H^*(S^2,\{\infty\})$ being torsion free, we also have $\operatorname{coker}\mu=0$, and so $H^2(\dot C\times S^2,\,\dot C\vee S^2)=0$ as well. Thus in view of (15), $H_3(X\setminus E)=0$. This proves (a).

(b) By the Alexander duality we obtain

$$H_2(X^*)=H_2(X\setminus S_E)\cong H^3(\dot S_E,\{\infty\})=H^3(\dot S_E)\,.$$

The topological space $\dot S_E$ is homeomorphic to a bouquet of 4-spheres S^4 and 2-spheres S^2. The 4-spheres are provided by the one-point compactification of the product $S_C^{(1)} \times \mathbb{C} = C_{\mathrm{vert}} \times \mathbb{C}$ (recall (see 2.6) that the components of the curve C_{vert} are disjoint and each one is isomorphic to $\mathbb{C}$), whereas the 2-spheres S^2 are provided by the one-point compactification of the product $S_C^{(0)} \times \mathbb{C}$.

Hence $H^3(\dot{S}_E) \cong H_2(X^*) = 0$. Similarly, we have $H_2(Y^*) = 0$. This proves the claim. $\square$

In virtue of the above claim, $(*_1)$ (with $i = 3$) leads to the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_3(X^*) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\sigma_*"] & H_3(X^*, X^* \setminus E^*) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\sigma_*"] & H_2(X^* \setminus E^*) \arrow[r] \arrow[d, "\wr\,\sigma_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_3(Y^*) \arrow[r, "i_*"] & H_3(Y^*, Y^* \setminus D^*) \arrow[r, "\partial_*"] & H_2(Y^* \setminus D^*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (*_2)$$

Next we apply the Thom isomorphism [Dol72, 7.15] to the pairs of manifolds (X^*, E^*) resp., (Y^*, D^*) (cf. the proof of 1.9). Indeed, the curve C^* resp., Γ^* being locally unibranch (whence homeomorphic to its normalization), $E^* = C^* \times \mathbb{C}$ resp., $D^* = \Gamma^* \times \mathbb{C}$ is a topological manifold. Notice that (in virtue of 1.2 and 2.6) σ^* maps the transverse classes [Dol72, Ch. VIII] of E^* into those of D^*. By functoriality of the cap-product [Dol72, VII.12.6], for every $i \geq 2$ the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd}
H_i(X^*,\, X^* \setminus E^*) \arrow[r, "\cong", "t_X"'] \arrow[d, "\sigma_*"] & \widetilde{H}_{i-2}(E^*) \arrow[d, "\sigma_*"] \\
H_i(Y^*,\, Y^* \setminus D^*) \arrow[r, "\cong", "t_Y"'] & \widetilde{H}_{i-2}(D^*)
\end{tikzcd} \qquad (*_3)$$

By making use of $(*_3)$ together with the following commutative diagram (see 2.5):

$$\begin{tikzcd}
H_*(E^*) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\sigma_*"] & H_*(C^*) \arrow[d, "\pi_*"] \\
H_*(D^*) \arrow[r, "\cong"] & H_*(\Gamma^*)
\end{tikzcd} \qquad (*_4)$$

we may replace in $(*_2)$ the group $H_3(X^*,\, X^*\setminus E^*)$ resp., $H_3(Y^*,\, Y^*\setminus D^*)$ by the group $H_1(C^*)$ resp., $H_1(\Gamma^*)$ to obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_3(X^*) \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "\sigma_*"] & H_1(C^*) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\pi_*"] & H_2(X^*\setminus E^*) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H_3(Y^*) \arrow[r, "\rho_Y"] & H_1(\Gamma^*) \arrow[r, "\partial_*"] & H_2(Y^*\setminus D^*) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (*_5)$$

where $\rho_X := \sigma_*\circ t_X\circ i_*$ resp., $\rho_Y := \pi_*\circ t_Y\circ i_*$. The diagram $(*_5)$ yields the assertions of the lemma. $\square$

Lemma 2.22 *$\rho_X(H_3(X^*)) = H_C$ and $\rho_Y(H_3(Y^*)) = H_\Gamma$.*

Proof. We start by constructing an appropriate free base of the $\mathbb{Z}$-module $H_3(X^*)$ (resp., $H_3(Y^*)$). By the Alexander duality we have isomorphisms

$$\widetilde{H}_3(X^*) \cong H^2(\dot{S}_E) \cong H^2(\dot{S}_E^{(0)}) \cong \mathbb{Z}^{b_0(S_C^{(0)})},$$

where $S_E^{(0)} := S_C^{(0)}\times\mathbb{C}$ (similarly, $\widetilde{H}_3(Y^*) \cong \mathbb{Z}^{b_0(S_\Gamma)}$). Thus $H_3(X^*) = \widetilde{H}_3(X^*) \cong H^2(\dot{S}_E^{(0)})$ is a free $\mathbb{Z}$-module, and so the universal coefficient formula provides yet another form of the Alexander duality:

$$H_3(X^*) \cong H^2(\dot{S}_E^{(0)}) \cong H_2(\dot{S}_E^{(0)}) \qquad (\text{resp.,}\quad H_3(Y^*) \cong H_2(\dot{S}_D))$$

(see e.g., [FF89, Ch. 2, §15.5]). Now a free base of $H_3(X^*)$ can be reconstructed as follows. On each component $T_Q := \sigma^{-1}(Q) = \{Q\}\times\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$ of $S_E^{(0)}$ (where $Q\in S_C^{(0)}$) fix a point $Q'\in T_Q$, and fix a complex 2-ball $B^2_{Q'}$ in X transversal to T_Q at Q'. Then the 3-cycle $[s_{Q'}]\in H_3(X^*)$ which corresponds to the 2-cycle $[\dot{T}_Q]\in H_2(\dot{S}_E^{(0)})$ by the Alexander duality, can be represented by a small 3-sphere (say) $s_{Q'}$ in $B^2_{Q'}$ centered at Q' [FF89, Ch. 2, §17]. These cycles $[s_{Q'}]\in H_3(X^*)$ with $\pi(Q') = Q$, where Q runs over $S_C^{(0)}$ form the desired base.

It is convenient to fix the choice of a point $Q'\in T_Q$ as follows. Consider the curve $C'\subseteq X$ given by the equations $u = f\circ\sigma = 0$ (thus $C' = E\cap D_u^{\mathrm{red}}$).

It is easily seen that the restriction $\sigma|C' : C' \to C$ is an isomorphism. Its inverse $C \to C' \subseteq E$ is a section of the projection $\sigma|E : E = C \times \mathbb{C} \to C$. Letting $Q' := T_Q \cap C'$ and placing the transversal ball $B^2_{Q'}$ into the divisor $D_u^{\mathrm{red}} = \{u = 0\} \subseteq X$ (notice that by 2.3, Q' is a smooth point of $D_u^{\mathrm{red}} \simeq D_g^{\mathrm{red}}$), we let $\delta_{Q'} := s_{Q'} \cap C'$. Then $\sigma(\delta_{Q'}) =: \delta_Q = lk_Q(C)$ is a link of the curve C at the point $Q \in C$, and so $\delta_Q \in H_C$. We claim that $\rho_X([s_{Q'}]) = [\delta_Q] \in H_1(C^*)$, or in other words, that $i_*([s_{Q'}]) = t_X^{-1}([\delta_{Q'}])$.

Indeed, consider the Zariski open dense subsets $X^{**} := X^* \setminus \operatorname{sing} E^* \subseteq X^*$ resp., $\operatorname{reg} E^* := E^* \setminus \operatorname{sing} E^* \subseteq E^*$. Let U be a small tubular neighborhood of the closed submanifold $\operatorname{reg} E^* \subseteq X^{**}$ with a retraction $\tau : U \to \operatorname{reg} E^*$. We have $\delta_{Q'} \subseteq \operatorname{reg} E^*$, and the class $[\tau^{-1}(\delta_{Q'})] \in H_3(X^{**}, X^{**} \setminus \operatorname{reg} E^*) = H_3(U, U \setminus \operatorname{reg} E^*)$ corresponds to the class $[\delta_{Q'}]$ under the Thom isomorphism $H_3(X^{**}, X^{**} \setminus \operatorname{reg} E^*) \xrightarrow{\cong} H_1(\operatorname{reg} E^*)$ [FF89, Ch. 4, §30]. The Thom isomorphism being functorial under open embeddings [Dol72, VIII.11.5], we have $t_X^{-1}([\delta_{Q'}]) = [\tau^{-1}(\delta_{Q'})] \in H_3(X^*, X^* \setminus E^*)$.

The divisors D_u^{red} and E^* in X^* are transversal, and so the 3-sphere $s_{Q'}$ is transversal to the divisor E^* along the 1-cycle $\delta_{Q'} \subseteq E^*$. Hence $s_{Q'} \cap U$ and $\tau^{-1}(\delta_{Q'})$ represent the same relative homology class in $H_3(U, U \setminus \operatorname{reg} E^*) = H_3(X^{**}, X^{**} \setminus \operatorname{reg} E^*)$. This proves the equality $\rho_X([s_{Q'}]) = [\delta_Q]$.

Therefore, we have shown that $\rho_X(H_3(X^*)) \subseteq H_C$, and every element $[\delta_Q]$ of a free base of the $\mathbb{Z}$-module H_C is the image of an element $[s_{Q'}] \in H_3(X^*)$ with $\sigma(Q') = Q$. This proves the first equality of the lemma; the proof of the second one is similar. $\square$

Proof of Proposition 2.19. In virtue of 2.21 and 2.22 we have $\pi_*(H_C) \subseteq H_\Gamma$ and $\hat{\pi}_*$ in (11) is, indeed, an isomorphism. Furthermore, as $H_1(\bar{\Gamma}) = H_1(\Gamma)/G(\Gamma^*)$ and $H_1(\overline{C^*}) = H_1(C)/G(C^*)$ (see 2.13), the homomorphism $\bar{\pi}_* : H_1(\overline{C^*}) \to H_1(\bar{\Gamma})$ factors through $\hat{\pi}_*$, whence $\bar{\pi}_*$ is a surjection. To show that it is also injective, consider a nonzero element $[\alpha] \in H_1(\overline{C^*})$ generated by a 1-cycle α in C_i^* (where $i \leq k$) such that the 1-cycle $\beta := \pi(\alpha)$ in Γ_i^* gives a zero element of $H_1(\bar{\Gamma}_i)$. Hence the class $[\beta] \in H_1(\Gamma_i^*)$ is contained in the subgroup $G(\Gamma_i^*)$. It is easily seen that $\pi_*(G(C_i^*))$ contains a subgroup of finite index in $G(\Gamma_i^*)$. Thus for some $m > 0$ we have $m[\beta] = \pi_*([\gamma])$ with $[\gamma] \in G(C_i^*)$. As $m[\alpha] - [\gamma]$ is still a nonzero element of $H_1(\overline{C^*})$ whose image in $H_1(\Gamma_i^*)$ is zero, we have $\hat{\pi}_*(m[\alpha] - [\gamma]) = 0$, which is wrong since $\hat{\pi}_*$ is an isomorphism. This proves that $\bar{\pi}_*$ in (12) is an isomorphism.

It follows that the decompositions (9) and (10) in 2.18 can be chosen in such a way that π_* respects them. Then by (11) and (12), $\tilde{\pi}_*$ in (13) is also an isomorphism. The proof is completed. $\square$

2.23 The proof of the next lemma is based on the following simple observation. Let G is a free abelian group of finite rank. For an element $a \in G$, the following conditions are equivalent:

(i) a is *primitive* (that is, if $a = kb$ with $b \in G,\ k \in \mathbb{Z}$ then $k = \pm 1$);

(ii) given a free base $a_1, \ldots, a_n$ of a $\mathbb{Z}$-module G, the coordinates in the presentation $a = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ are relatively prime.

Lemma 2.24 *Let F be a curve with the irreducible components $F_1, \ldots, F_L$, which are all non-compact, and with the multiple points $P_1, \ldots, P_M$. Denote by $p_1, \ldots, p_N$ the punctures of the curve $F^* := F \backslash \{P_1, \ldots, P_M\}$, and let B_i be a local branch of $\bar{F}$ centered at p_i. Consider the group $G := G(F^*)/H_F$, where*

$$G(F^*) := \langle lk_{p_i}(B_i) \,|\, i = 1, \ldots, N \rangle \subseteq H_1(F^*)$$

and

$$H_F := \langle lk_{P_j}(F) \,|\, j = 1, \ldots, M \rangle \subseteq G(F^*)\,.$$

Then $G \cong \mathbb{Z}^{N-M-L}$. Furthermore, for each $i = 1, \ldots, N$ the class $[lk_{p_i}(B_i)] \in G$ is primitive unless it is zero. The latter holds if and only if p_i is the only puncture of the corresponding component F_l, and F_l is an isolated component of F.

Proof. Denoting $\nu : F^{\mathrm{norm}} \to F$ a normalization, we let $\nu^{-1}(P_m) = \{p_j\}_{j \in J_m}$ with $J := \coprod_{m=1}^M J_m \subseteq \{1, \ldots, N\}$ [9]. Thus $lk_{P_m}(F) = \sum_{j \in J_m} lk_{p_j}(B_j)$. We also let $\{p_i\}_{i \in I_l}$ be the set of punctures of a component $F_l^* := F_l \cap F^*$ of the curve F^*. For every $m = 1, \ldots, M$ (resp., $l = 1, \ldots, L$) we pick an index $j_m \in J_m$ (resp., $i_l \in I_l \backslash J$) (notice that the index set $I_l \backslash J$ of the punctures of F_l is non-empty, as F_l is assumed to be non-compact). Then we have:

$$G(F^*) = \langle lk_{p_i}(B_i) \,|\, i \notin \{i_1, \ldots, i_L\} \rangle$$

$$= \langle lk_{p_i}(B_i),\ lk_{P_m}(F) \,|\, m = 1, , \ldots, M,\ \ i \notin \{i_1, \ldots, i_L, j_1, \ldots, j_M\} \rangle\,.$$

Thus $G(F^*) \cong \mathbb{Z}^{N-L} \cong H_F \oplus \mathbb{Z}^{N-L-M}$ with $H_F \cong \mathbb{Z}^M$, and so

$$G = G(F^*)/H_F = \langle [lk_{p_i}(B_i)] \,|\, i \notin \{i_1, \ldots, i_L, j_1, \ldots, j_M\} \rangle \cong \mathbb{Z}^{N-L-M}\,. \quad (16)$$

The elements $[lk_{p_i}(B_i)] \in G$ of the free base (16) satisfy the condition (ii) of 2.23, whence are primitive. The indices $j_m \in J_m$ being arbitrary, as

[9] Here $\coprod$ stands for the disjoint union.

card$J_m \geq 2$ the classes $[lk_{p_i}(B_i)] \in G$ with $i \in J$ are all primitive as well. By the same reason, a class $[lk_{p_i}(B_i)] \in G$ with $i \in I_l \backslash J$ is primitive unless $\{i\} = I_l \backslash J$ (i.e., unless p_i is the only puncture of F_l). If such a component F_l meets another one $F_{l'}$ at a multibranch point P_m, then choosing j_m from $J_m \cap I_{l'}$ and decomposing $[lk_{p_i}(B_i)] \in G$ in the base (16) we obtain that at least one of the coordinates equals -1, hence 2.23(ii) is fulfilled, and so $[lk_{p_i}(B_i)]$ is primitive too. Finally, $[lk_{p_i}(B_i)] \in G$ is not primitive if and only if p_i is the only puncture of F_l and F_l is isolated (in that case $lk_{p_i}(B_i) + \sum_{P_m \in F_l} lk_{P_m}(F) = 0$ in $G(F^*)$, whence $[lk_{p_i}(B_i)] = 0$ in G). $\square$

In the proof of Theorem 2.11 below (based on 2.19 and 2.24) the role of F in 2.24 is played respectively by the curves Γ and $C_{\mathrm{non-vert}} \backslash C_{\mathrm{vert}}$. As in the proof of 2.24, it will be important to bear in mind the freedom of choice when selecting the indices $\{i_1, \ldots, i_L, j_1, \ldots, j_M\}$ as in (16). From 2.24 we obtain such a corollary.

Corollary 2.25 *In the notation as in 2.19, let $Q \in \bar{C}_i$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ be a puncture of C_i^* such that $P := \bar{\pi}(Q) \in \bar{\Gamma}_i$ is not a puncture at infinity of the affine curve Γ_i. Then the following hold.*

(a) $\mathrm{mult}_Q \bar{\pi} = 1$ *(that is, $\bar{\pi}$ is non-ramified at Q);*

(b) P is a puncture of Γ_i^*;

(c) the components C_i and Γ_i are horizontal (that is, $1 \leq i \leq h$).

Proof. The curve C_i^* possesses yet another puncture over a place at infinity of Γ_i, whence by (2.24), $[lk_Q(C_i^*)]$ is a primitive element of the group $G(C^*)/H_C$. As $\tilde{\pi}_*$ in (13) is an isomorphism, $\tilde{\pi}_*([lk_Q(C_i^*)]) = \kappa[lk_P(\Gamma_i^*)] \in G(\Gamma^*)/H_\Gamma \backslash \{0\}$ is primitive as well, whence $\kappa = \mathrm{mult}_Q \bar{\pi} = 1$, which yields (a) and (b).

Suppose that there are two different local branches A and A' of $\bar{C}$ over a local branch B of $\bar{\Gamma}$ at P, and let Q, $Q' \in \bar{C}$ be their centers. The same argument as above shows that $\tilde{\pi}_*([lk_Q(A)]) = \tilde{\pi}_*([lk_{Q'}(A')]) = [lk_P(B)]$, where both $[lk_Q(A)]$, $[lk_{Q'}(A')] \in G(C^*)/H_C$ are primitive. Hence

$$[lk_Q(A)] = [lk_{Q'}(A')] \neq 0\,. \tag{17}$$

It is not difficult to verify that (in contradiction with (17)) there exists a base (16) which includes both $[lk_Q(A)]$ and $[lk_{Q'}(A')]$, unless A and A' are local branches of the curve C at a multibranch point $Q \in S_C^{(0)}$ with $\mu_Q(C) = 2$. But in the latter case $[lk_Q(A)] = -[lk_{Q'}(A')]$, which again contradicts (17). Therefore, there is only one local branch of $\bar{C}$ over B, which yields (c). $\square$

Now we are ready to prove Theorem 2.11.

Proof of Theorem 2.11. It is convenient to proceed first with the proof of (β). From 2.25 we get:

$$\Gamma_{\text{slant}} \cap S_\Gamma = \emptyset = C_{\text{slant}} \cap S_C$$

(indeed, Γ^*_{slant} resp., C^*_{slant} cannot have punctures other than the places at infinity). Thus the slanted components C_i and Γ_i $(h+1 \le i \le k)$ of C resp., Γ are isolated and do not contain multibranch points. In particular, $C_i = C_i^*$ resp., $\Gamma_i = \Gamma_i^*$, and these curves are homeomorphic to their normalizations. Furthermore, the group $G(C_i^*)$ (resp., $G(\Gamma_i^*)$) is a direct summand of $G(C^*)/H_C$ (resp., $G(\Gamma^*)/H_\Gamma$). Hence by 2.19,

$$\tilde{\pi}_*|_{G(C_i^*)} : G(C_i^*) \xrightarrow{\cong} G(\Gamma_i^*) \tag{18}$$

is an isomorphism, as well as

$$\bar{\pi}_*|_{H_1(\bar{C}_i)} : H_1(\bar{C}_i) \xrightarrow{\cong} H_1(\bar{\Gamma}_i)\,. \tag{19}$$

Since $\deg \bar{\pi}|_{\bar{C}_i} > 1$, (19) shows that $H_1(\bar{C}_i) = 0 = H_1(\bar{\Gamma}_i)$ i.e., both $\bar{C}_i$ and $\bar{\Gamma}_i$ are rational curves. Therefore by (8) in 2.13,

$$H_1(C_i^{\text{norm}}) \cong H_1(C_i) = H_1(C_i^*) = G(C_i^*)$$

and

$$H_1(\Gamma_i^{\text{norm}}) \cong H_1(\Gamma_i) = H_1(\Gamma_i^*) = G(\Gamma_i^*)\,.$$

Now (18) yields that

$$\pi^{\text{norm}}{}_* : H_1(C_i^{\text{norm}}) \to H_1(\Gamma_i^{\text{norm}})$$

is an isomorphism. By a theorem of Hurwitz (see e.g., [LZ89, I.2.1]), a morphism $\rho : F \to G$ of smooth irreducible affine curves is an isomorphism once the induced homomorphism $\rho_* : H_1(F) \to H_1(G)$ is an isomorphism, unless $H_1(F) = H_1(G) = 0$ i.e., $F \simeq G \simeq \mathbb{C}$. Thus $C_i^{\text{norm}} \simeq \Gamma_i^{\text{norm}} \simeq \mathbb{C}$, and so the curves C_i and Γ_i are homeomorphic to $\mathbb{C}$, which proves (β).

(α) By 2.15 $\pi^{-1}(\Gamma_{\text{vert}}) \subseteq C_{\text{vert}}$, whence $\pi(C_{\text{horiz}} \backslash C_{\text{vert}}) \subseteq \Gamma_{\text{horiz}} \backslash \Gamma_{\text{vert}}$. To show that actually, the latter inclusion is an equality, suppose on the contrary that for a point $P \in \Gamma_{\text{horiz}} \backslash \Gamma_{\text{vert}}$, $\pi^{-1}(P) = \emptyset$. Then all $\mu := \mu_P(\Gamma)$ branches $A_1, \ldots, A_\mu$ of $\bar{C}$ over the branches $B_1, \ldots, B_\mu$ of Γ at P have centers at infinity. By 2.25(b) the curve Γ^* has a puncture over P. Thus $P \in S_\Gamma^{(0)}$ is a multibranch point of $\Gamma_{\text{horiz}} \backslash \Gamma_{\text{vert}}$, and so the primitive classes (see 2.24) $[lk_P(B_j)] \in G(\Gamma^*)/H_\Gamma$ $(j = 1\ldots,\mu)$ are subjected to the (only) relation $\sum_{j=1}^{\mu}[lk_P(B_j)] = 0$. Therefore, the primitive classes $[lk_{Q_j}(A_j)] \in G(C^*)/H_C$ $(j = 1\ldots,\mu)$ are also related by

$$\sum_{j=1}^{\mu}[lk_{Q_j}(A_j)] = 0\,, \tag{20}$$

where $Q_j \in \bar{C}$ is the center of the branch A_j. Constructing a free base (16) of the free $\mathbb{Z}$-module $G(C^*)/H_C$, we may suppose that for any $j = 1,\ldots,\mu$, $j \notin \{i_1,\ldots,i_L\}$ (and definitely, $j \notin \{j_1,\ldots,j_M\}$ as Q_j is a puncture at infinity of C). Thus the classes $[lk_{Q_j}(A_j)]$ $(j = 1\ldots,\mu)$ make a part of a free base (16), and so cannot satisfy (20), a contradiction.

Denote $F := C_{\text{horiz}}\backslash C_{\text{non-horiz}} = C_{\text{horiz}}\backslash C_{\text{vert}}$ and $G := \Gamma_{\text{horiz}}\backslash\Gamma_{\text{non-horiz}} = \Gamma_{\text{horiz}}\backslash\Gamma_{\text{vert}}$. We have shown that the morphism $\pi_{|F} : F \to G$ of degree 1 is bijective. It follows that it is an isomorphism. Indeed, as D_g and D_f meet transversally along F (see 2.5), the curve F is the zero divisor of the restriction $g|_{G\times\mathbb{C}_z}$, which is a polynomial of degree one in z, say, $az+b \in \mathbb{C}[G][z]$. Note that a and b have no common zero on G (otherwise the zeros of $g|_{G\times\mathbb{C}} = az+b$ would contain a vertical component). As $\pi|_F$ is surjective, a is nowhere zero, whence $z = -b/a \in \mathbb{C}[G]$, and so $\pi|_F$ is an isomorphism. This proves (α).

(γ) The group $G(\Gamma^*)/H_\Gamma = \tilde{\pi}_*(G(C^*)/H_C)$ being generated by the classes

$$\tilde{\pi}([lk_{Q_j}(C_i^*)]) \in G(\Gamma^*_{\text{non-vert}})/[H_\Gamma \cap G(\Gamma^*_{\text{non-vert}})]$$

(where Q_j runs over the set of punctures of the curve C^*) we have

$$G(\Gamma^*_{\text{non-vert}})/[H_\Gamma \cap G(\Gamma^*_{\text{non-vert}})] = G(\Gamma^*)/H_\Gamma\,.$$

Since in virtue of (β), $G(\Gamma^*_{\text{slant}}) = 0$ we obtain

$$G(\Gamma^*)/H_\Gamma = G(\Gamma^*_{\text{non-slant}})/H_\Gamma = G(\Gamma^*_{\text{horiz}})/[H_\Gamma \cap G(\Gamma^*_{\text{horiz}})]\,.$$

In particular, for each puncture P of Γ^*_{vert}, we have

$$[lk_P(\bar{\Gamma})] \in G(\Gamma^*_{\text{horiz}})/[H_\Gamma \cap G(\Gamma^*_{\text{horiz}})]\,. \tag{21}$$

It follows that on any vertical component of Γ there is only one puncture at infinity. Indeed, if there were a component Γ_i of Γ_{vert} with at least two punctures at infinity, say, P_1 and P_2, then any free base as in (16) of the $\mathbb{Z}$-module $G(\Gamma^*)/H_\Gamma$ would contain at least one of the corresponding classes, say, $[lk_{P_1}(\bar{\Gamma})]$, which contradicts (21).

A similar argument shows that the curve Γ_{vert} has no selfintersection. In particular, the components of Γ_{vert} are disjoint, and for each $i = k+1, \ldots, n$, Γ_i is homeomorphic to Γ_i^{norm}.

Furthermore, by 2.19

$$\bar{\pi}_* : H_1(\bar{C}^*) \to H_1(\bar{\Gamma}) = H_1(\bar{\Gamma}_{\text{non-vert}}) \oplus H_1(\bar{\Gamma}_{\text{vert}})$$

is an isomorphism, and $\bar{\pi}_*(H_1(\bar{C}^*)) \subseteq H_1(\bar{\Gamma}_{\text{non-vert}})$. It follows that $H_1(\bar{\Gamma}_{\text{vert}}) = 0$, whence the components of Γ_{vert} are rational. Finally, Γ_i $(i = k+1, \ldots, n)$ is a rational curve with one place at infinity and without selfintersections, therefore is homeomorphic to $\mathbb{C}$.

As for any $i = h+2, \ldots, n$, $D_{h+1} \cap D_i = \emptyset$ and $D_i \simeq \Gamma_i \times \mathbb{C}$ is simply connected, with the notation as in 2.6 we have that the restriction $f_{h+1}|_{D_i}$ does not vanish, and so is constant: $f_{h+1}|_{D_i} =: \lambda_i \in \mathbb{C}$. Thus we obtain a decomposition as in (γ), which completes the proof of (γ).

(δ) As the matrix B' in 2.6 is unimodular and by (γ) the vertical components are disjoint, arguing as in 2.6 we can easily see that the morphism $\pi : C \to \Gamma$ maps any component of C_{vert} into a component of Γ_{vert}, and maps different components of C_{vert} into different components of Γ_{vert}. Moreover, the columns of B' are vectors of the standard basis in $\mathbb{R}^{n-k}$. Hence up to a reordering we may assume that B' is the unit matrix. The slanted components $\Gamma_{h+1}, \ldots, \Gamma_k$ being isolated the last $k-h$ lines of the matrix B are zero, which completes the proof of (δ). □

Remark 2.26 Notice that for any vertical component C_i of C $(i = k+1, \ldots, n)$, $P_i := \pi(C_i)$ is a smooth point of the curve Γ_i. This follows from 1.2 as $m_{ii} = 1$.

2.3. Preserving acyclicity: a criterion

We have the following partial converse to 2.11.

Theorem 2.27 *Let X and Y be irreducible smooth affine 3-folds which satisfy the condition (ii) of 2.4, as well as the following one (which replaces 2.4(iii)):*

(iii′) $Y = Z \times \mathbb{C}$ is a cylinder over a smooth acyclic affine surface Z, and $D = \Gamma \times \mathbb{C}$ with $\Gamma \subseteq Z$.

Suppose also that the conditions (α)-(δ) of Theorem 2.11 are fulfilled. [10] *Then the induced homomorphisms*

$$\sigma_* : H_*(X) \to H_*(Y) \quad \text{and} \quad \sigma_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$$

are isomorphisms. Henceforth, the 3-fold X is acyclic; it is contractible if and only if Y is so.

Proof. The theorem immediately follows from 1.4, 1.10 and 2.32 below. Indeed, the assumption 2.11(δ) allows to apply 1.4 in order to get that $\sigma_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ is an isomorphism. In turn, by 2.32 the assumptions of 1.10 are fulfilled, and so by 1.10, $\sigma_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ is an isomorphism as well. $\square$

From 2.11 and 2.27 we obtain the following criterion for preserving the acyclicity.

Corollary 2.28 *Let X and Y be smooth affine 3-folds satisfying the conditions 2.4(ii) and 2.27(iii′). If Y is acyclic resp., contractible then X is so if and only if the conditions 2.11(α)-(δ) are fulfilled.*

Remark 2.29 Assuming in 2.27 that the conditions 2.11(α)-(δ) are fulfilled we require implicitly that the things are as in 2.6-2.8, without supposing acyclicity as in 2.4(i). In fact, 2.6-2.8 refer only to the fact that the multiplicity matrix M_σ is unimodular, which is anyhow foreseen by 2.11(δ).

Actually the proofs of the lemmas below rely only on the conditions (ii), (iii) and the following one.

(iv) There is a regular function $\varphi \in A = \mathbb{C}[Y]$ such that for every $i = h + 1, \ldots, n$ the restriction $\varphi|_{D_i}$ is constant, as well as the restriction of φ to any fiber of the morphism $\pi : D \to \Gamma$, and for any point $P \in S_\Gamma \backslash \Gamma_{\text{vert}}$, both $\Phi_P := \varphi^*(\varphi(\pi^{-1}(P))) \subseteq Y$ and $\Psi_P := \sigma^{-1}(\Phi_P) \subseteq X$ are smooth, reduced surfaces with $\sigma^*(\Phi_P) = \Psi_P$.

Under these assumptions σ_* is an isomorphism in homology (even if we do not suppose as in 2.27 that Y is acyclic).

The next lemma shows that the conditions (ii) and (iii′) imply (iv).

[10] See 2.29 below.

Lemma 2.30 *Under the assumptions of 2.27 there exists a (possibly empty) smooth, reduced curve Γ' on Z such that*

(a) $\Gamma' \cap \Gamma_{\text{non-horiz}} = \emptyset$ *and* $\Gamma' \supseteq S_\Gamma^{(0)} \backslash \Gamma_{\text{non-horiz}}$,

(b) the surfaces $\Phi := \Gamma' \times \mathbb{C} \subseteq Y$ *and* $\Psi := \sigma^{-1}(\Phi) \subseteq X$ *are smooth, and*

(c) $\sigma|_\Psi : H_*(\Psi) \to H_*(\Phi)$ *is an isomorphism.*

Proof. If $h < n$ (i.e., $\Gamma_{\text{non-horiz}} \neq \emptyset$) then we take for Γ' the union of the fibers of the regular function $f_{h+1}|_Z$ through the points of $S_\Gamma^{(0)} \backslash \Gamma_{\text{non-horiz}}$. Indeed, since the Euler characteristics $e(\Gamma_{h+1}) = e(Z) = 1$ and $\Gamma_{h+1} = (f_{h+1}|_Z)^*(0)$, by [Zaĭ87, 6.2] the fibers of $f_{h+1}|_Z$ are smooth, reduced and irreducible except for, possibly, Γ_{h+1}. Thus Γ' is smooth and reduced. As f_{h+1} is constant on any component Γ_i of $\Gamma_{\text{non-horiz}}$ we have $\Gamma' \cap \Gamma_{\text{non-horiz}} = \emptyset$, whence (a) is fulfilled.

In the case where $h = n$ (i.e., $\Gamma_{\text{non-horiz}} = \emptyset$) the existence of a smooth, reduced curve Γ' satisfying (a) easily follows by Bertini's Theorem.

Evidently, $\Phi = \Gamma' \times \mathbb{C}$ is a smooth surface. Since $\sigma|_{X\backslash E} : X\backslash E \to Y\backslash D$ is an isomorphism, the surface $\Psi := \sigma^{-1}(\Phi)$ is smooth if it is smooth at the points $R \in \Psi \cap E$. Let $Q = (P, z_0) := \sigma(R) \in C$ with $P \in \Gamma \cap \Gamma' \subseteq \Gamma_{\text{horiz}} \backslash \Gamma_{\text{non-horiz}}$. As Γ' is smooth we can find local coordinates (x, y) on Z centered at P such that (locally) $\Gamma' = \{x = 0\}$. Thus $Q = (P, z_0) = (0, 0, z_0)$, $R = (Q, u_0) = (0, 0, z_0, u_0)$, and (locally)

$$\Psi = \{x = 0\} \cap X = \{f(0, y)u - g(0, y, z) = 0\} \subseteq \mathbb{C}^3_{y,z,u}\,,$$

where by the condition 2.11(α), (locally) $g(0, y, z) = a(y)z + b(y)$ with $a(0) \neq 0$ (see the proof of 2.11(α)). Therefore, $\partial g/\partial z(Q) = a(0) \neq 0$, whence the surface Ψ is smooth at R. Thus (b) holds.

To show (c) we need the following claim.

Claim. $(\sigma|_\Psi)^*((D_{\text{horiz}} \cap \Phi)^{\text{red}}) = (E_{\text{horiz}} \cap \Psi)^{\text{red}}$.

Proof of the claim. We will use the same local chart and the notation as above. We have $(D_{\text{horiz}} \cap \Phi)^{\text{red}} = \{P\} \times \mathbb{C}_z = y^*(0)$ (y being regarded as a function on Φ). Then locally, $(y \circ \sigma) : (y, z, u) \longmapsto y$, whence the subspace $\ker d(y \circ \sigma)|_R = \{y = 0\}$ does not contain the tangent space $T_R X$ (indeed as $a(0) \neq 0$ the differential $d(fu - g)|_R = ... - a(0)dz$ of the defining polynomial of Ψ in $\mathbb{C}^3_{y,z,u}$ at the point R is not proportional to the differential dy of

$y = y \circ \sigma$ at R). It follows that $d(y \circ \sigma)|_\Psi$ does not vanish at the points $R \in \Psi \cap E$, and so locally

$$(E_{\text{horiz}} \cap \Psi)^{\text{red}} = (y \circ \sigma)^*(0) = (\sigma|_\Psi)^*((D_{\text{horiz}} \cap \Phi)^{\text{red}})\,,$$

as desired. $\square$

Notice that $\Phi \cap D_{\text{horiz}} = (\Gamma' \cap \Gamma_{\text{horiz}}) \times \mathbb{C} \subseteq \Phi$ is a disjoint union of affine lines, whereas in virtue of 2.11(α), $\Phi \cap C_{\text{horiz}}$ is a finite set of points, one on every of those lines. Furthermore, $\Psi \cap E_{\text{horiz}} = (\Phi \cap C_{\text{horiz}}) \times \mathbb{C}$.

The proof of (c) is based on 1.9. In the notation as in 1.9 we let $\hat{X} := \Psi$, $\hat{Y} := \Phi$, $\hat{E} := \Psi \cap E_{\text{horiz}}$ and $\hat{D} := \Phi \cap D_{\text{horiz}}$. Then by (b) above, $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{E}$ and $\hat{D}$ are smooth varieties, $\sigma(\hat{E}) \subseteq \hat{D}$, $\sigma(\hat{X}\backslash\hat{E}) = \hat{Y}\backslash\hat{D}$, and (by the above claim) $\sigma^*(\hat{D}) = \hat{E}$, that is, the condition (i) of 1.9 is fulfilled. As $\sigma|_{\hat{X}\backslash\hat{E}} : \hat{X}\backslash\hat{E} \to \hat{Y}\backslash\hat{D}$ is an isomorphism, taking into account the observations following the claim it is easily seen that 1.9(ii) holds as well. Thus by 1.9, $\sigma_* : H_*(\hat{X}) \to H_*(\hat{Y})$ is an isomorphism, which yields (c). $\square$

2.31 The proof of the next lemma relies on 1.10, where we let $\hat{E} = E' \cup E''$ and $\hat{D} = D' \cup D''$ with $E' := E_{\text{horiz}}$, $D' := D_{\text{horiz}}$,

$$E'' := E_{\text{non-horiz}} \coprod \Psi \quad \text{and} \quad D'' := D_{\text{non-horiz}} \coprod \Phi\,,$$

Φ and Ψ being the same as in 2.30(b).

Lemma 2.32 *Under the assumptions and the notation as in 2.27 and 2.31, the conditions (i′) and (ii′) of 1.10 are fulfilled.*

Proof. In virtue of 2.11(γ), for every $i = h+1, \ldots, n$ both curves C_i and Γ_i are homeomorphic to $\mathbb{C}$, whence both surfaces $E_i = C_i \times \mathbb{C}$ and $D_i \simeq \Gamma_i \times \mathbb{C}$ are homeomorphic to $\mathbb{C}^2$. Therefore $E_{\text{non-horiz}}$ and $D_{\text{non-horiz}}$ are topological manifolds, and $(\sigma|_{E_{\text{non-horiz}}})_* : H_*(E_{\text{non-horiz}}) \to H_*(D_{\text{non-horiz}})$ is an isomorphism. As the surfaces Φ and Ψ are smooth we have that E'' and D'' are topological manifolds as well, and in view of 2.30(c), $(\sigma|_{E''})_* : H_*(E'') \to H_*(D'')$ is an isomorphism.

As by our construction

$$S_\Gamma \subseteq \Gamma' \cup \Gamma_{\text{non-horiz}} \quad \text{and} \quad S_C \subseteq \pi^{-1}(\Gamma') \cup C_{\text{non-horiz}}\,,$$

the curves $\Gamma_{\text{horiz}}\backslash(\Gamma' \cup \Gamma_{\text{non-horiz}})$ and $C_{\text{horiz}}\backslash(\pi^{-1}(\Gamma') \cup C_{\text{non-horiz}})$ have no multibranch points. Therefore they are topological manifolds, as well as the surfaces

$$D'\backslash D'' = [\Gamma_{\text{horiz}}\backslash(\Gamma' \cup \Gamma_{\text{non-horiz}})] \times \mathbb{C} \quad \text{and} \quad E'\backslash E'' = [C_{\text{horiz}}\backslash(\pi^{-1}(\Gamma') \cup C_{\text{non-horiz}})] \times \mathbb{C}\,.$$

By 2.11(α) the projection

$$\pi : C_{\mathrm{horiz}} \backslash (\pi^{-1}(\Gamma') \cup C_{\mathrm{non-horiz}}) \longrightarrow \Gamma_{\mathrm{horiz}} \backslash (\Gamma' \cup \Gamma_{\mathrm{non-horiz}})$$

is an isomorphism, whence $\sigma|_{E' \backslash E''} : E' \backslash E'' \to D' \backslash D''$ is so as well. Now the conditions (i$'$) and (ii$'$) of 1.10 follow. $\square$

3. Simple affine modifications of $\mathbb{C}^3$ diffeomorphic to $\mathbb{R}^6$

The main result of this section is 3.6, which together with 2.28 provides a criterion for as when a simple affine modification $X \subseteq \mathbb{C}^4$ of $Y = \mathbb{C}^3$ is isomorphic to $\mathbb{C}^3$.

3.1. Exotic simple modifications of $\mathbb{C}^3$

We keep the terminology and the notation of section 2, and we adopt the following

Convention 3.1 Hereafter

(i) $Y = \mathbb{C}^3$ with the coordinates x, y, z, and

(ii) X is a smooth affine 3-fold in $\mathbb{C}^4$ diffeomorphic to $\mathbb{R}^6$, with equation of the form

$$p = f(x, y)u + g(x, y, z) = 0\,, \tag{22}$$

where $f \in \mathbb{C}[x,\, y] \setminus \mathbb{C}$, $g \in \mathbb{C}[x,\, y,\, z]$ (thus by 2.28, the conditions 2.11(α)-(δ) hold).

3.2 Note that the blowup morphism $\sigma : X \ni (x, y, z, u) \longmapsto (x, y, z) \in Y$ represents X as a simple affine modification of $Y = \mathbb{C}^3$ along the cylindrical divisor $D = D_f^{\mathrm{red}} = \Gamma \times \mathbb{C}$ (where $\Gamma := f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^2$) with center $C = \{f = g = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ and with the morphism $\pi : C \to \Gamma$ as in 2.5 given by $\pi : (x, y, z) \longmapsto (x, y)$. Hence the assumptions (i)-(iii) of 2.4 are fulfilled.

3.3 As in 2.8 we factorize $f \in \mathbb{C}[x,y]$ into irreducible factors: $f = \prod_{i=1}^n f_i^{a_i}$, and we write g as a polynomial in z:

$$g(x,y,z) = \sum_{j=0}^{d} b_j(x,y)z^j \quad \text{with} \quad d := \deg_z g\,.$$

We let $d_i := \deg(\pi|_{C_i})$. Recall (2.6, 2.7) that an irreducible component C_i (resp., $\Gamma_i = f_i^{-1}(0)$) of the curve C (resp., Γ) is vertical (resp., horizontal resp., slanted) if and only if $d_i = 0$ (resp., $d_i = 1$ resp., $d_i \geq 2$). The following lemma is a simple observation, and so we omit the proof.

Lemma 3.4 *For every $i = 1, \ldots, n$ we have $b_j \in (f_i)$ $\forall j = d_i + 1, \ldots, d$ and $b_{d_i} \notin (f_i)$. Hence p as in (22) admits a unique presentation*

$$p = fu + g_i + f_i h_i$$

with $g_i(x,y,z) := \sum_{j=0}^{d_i} b_j(x,y)z^j \in \mathbb{C}[x,y,z]$ and $h_i \in (z^{d_i+1}) \subseteq \mathbb{C}[x,y,z]$. Furthermore, if $f_{\mathrm{horiz}} \neq \mathrm{const}$ then p can be written as

$$p = f_{\mathrm{horiz}} f_{\mathrm{non-horiz}} u + b_0 + b_1 z + f_{\mathrm{horiz}}^{\mathrm{red}} h_0 \tag{23}$$

with b_0, $b_1 \in \mathbb{C}[x,y]$ and $h_0 \in (z^2) \subseteq \mathbb{C}[x,y,z]$, where $b_1|_{\Gamma_{\mathrm{horiz}} \setminus \Gamma_{\mathrm{non-horiz}}}$ has no zero.

3.5 Recall [Zaĭ99] that an *exotic* $\mathbb{C}^3$ is a smooth affine 3-fold diffeomorphic to $\mathbb{R}^6$ but non-isomorphic to $\mathbb{C}^3$.

The principal result of this subsection is the following theorem.

Theorem 3.6 *If under the assumptions as in 3.1, at least one of the curves $C_{\mathrm{non-horiz}}$ and $\Gamma_{\mathrm{non-horiz}}$ is singular then X is an exotic $\mathbb{C}^3$.*

The proof is done in 3.9 and 3.15 below. For a converse result, see 3.21 in the next subsection.

Notice that 3.6 provides a regular way of constructing exotic $\mathbb{C}^3$-s as hypersurfaces in $\mathbb{C}^4$. Let us give concrete examples.

3.7 Examples. For the Russell cubic 3-fold

$$X = \{x^2 u + x + y^2 + z^3 = 0\} \subset \mathbb{C}^4\,,$$

the curve $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{slant}} = \{x = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ is smooth and isomorphic to $\mathbb{C}$, whereas $C = C_{\mathrm{slant}} = \{x = y^2 + z^3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ (the center of modification) is homeomorphic to $\mathbb{C}$ but singular. It is well known [ML96, Der97, Zaĭ99] that X represents an exotic algebraic structure on $\mathbb{C}^3$. By [KML97] the Koras-Russell cubic 3-fold

$$X = \{(x^2 + y^3)u + x + z^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^4$$

also is an exotic $\mathbb{C}^3$; here both $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{slant}} = \{x^2 + y^3 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ and $C = C_{\mathrm{slant}} = \{x^2 + y^3 = 0 = x + z^2\} \subset \mathbb{C}^3$ are homeomorphic to $\mathbb{C}$ but singular.

Remark 3.8 Generalizing a theorem of Sathaye [Sat76], in [KZ99, Thm. 7.2] it is proven that actually, every smooth acyclic surface in $\mathbb{C}^3$ with equation $p = f(x, y)u + g(x, y) = 0$ (where $f,\, g \in \mathbb{C}^{[2]}$) is isomorphic to $\mathbb{C}^2$ and rectifiable. Examples 3.7 show that in general, this does not hold anymore in $\mathbb{C}^4$ without the additional assumption of smoothness of $C_{\mathrm{non-horiz}}$ and $\Gamma_{\mathrm{non-horiz}}$ (cf. 3.6 above).

The proof of 3.6 starts with the following proposition (cf. 3.20 below).

Proposition 3.9 *Let X and Y be as in 3.1. If the curve $\Gamma_{\mathrm{non-horiz}}$ is singular then the Derksen invariant $\mathrm{Dk}\,(A')$ of the algebra $A' := \mathbb{C}[X]$ is non-trivial, whence $X \not\cong \mathbb{C}^3$.*

The proof is done in 3.10-3.14.

Lemma 3.10 *Under the assumptions as in 3.9, choosing appropriate new coordinates in the (x, y)-plane and rescaling the z-coordinate we may write the polynomial p in the form*

$$p = (x^k - y^l)^m f_{\mathrm{horiz}}(x, y)u + z^e + g_0(x, y, z) + (x^k - y^l)h_0(x, y, z)\,, \qquad (24)$$

where $k, l, e \geq 2,\ (k,\, l) = 1,\ f_{\mathrm{horiz}} \in \mathbb{C}[x, y]$ and $\quad f_{\mathrm{horiz}}(0, 0) = 1,\ g_0,\, h_0 \in \mathbb{C}[x, y, z]$, $\deg_z g_0 < e$ and $z^e | h_0$.

Proof. In the notation as in 2.6-2.9 we have $h < n$. In virtue of the condition 2.11(γ) we may suppose that the component Γ_{h+1} of $\Gamma_{\mathrm{non-horiz}}$ is a singular plane curve homeomorphic to $\mathbb{C}$. Hence by the Lin-Zaidenberg Theorem [LZ89], choosing new coordinates in the (x, y)-plane we may assume that $f_{h+1} = x^k - y^l$ with $k,\, l \geq 2$ and $(k,\, l) = 1$. As the other fibers $x^k - y^l = c\ \ (c \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$ of the polynomial f_{h+1} are not homeomorphic to $\mathbb{C}$, in view of

2.11(γ) we have $h+1=n$, and so $f_{\text{non-horiz}} = f_n^m = (x^k - y^l)^m$ with $m := a_n$. By 3.4 the polynomial (22) can be now written as follows:

$$p = (x^k - y^l)^m f_{\text{horiz}}(x,y)u + b_e(x,y)z^e + g_0(x,y,z) + (x^k - y^l)h_0(x,y,z)$$

with $b_e \in \mathbb{C}[x,y]$, g_0, $h_0 \in \mathbb{C}[x,y,z]$, $\deg_z g_0 < e$ and $z^{e+1}|h_0$. In virtue of 2.11(δ) and 2.5 the divisors $D_n = \Gamma_n \times \mathbb{C}$ and D_g^{red} meet transversally at general points of $C_n = D_n \cap D_g^{\text{red}}$. If Γ_n were vertical (i.e., $g(x,y,z) \equiv b_0(x,y) \bmod (x^k - y^l)$; see 3.3, 3.4) then the equation $b_0(t^l, t^k) = 0$ would have a unique solution t_0 such that (in virtue of 2.26) $\pi(C_n) = (t_0^l, t_0^k)$ is a smooth point of $\Gamma_n \subseteq \mathbb{C}^2_{x,y}$ i.e., $t_0 \neq 0$. Thus $b_0(t^l, t^k) = c(t-t_0)^r$ which is wrong as the derivative of the left hand side vanishes at $t=0$. Therefore, $\Gamma_n = \Gamma_{\text{slant}}$, whence $e = \deg \pi|_{C_n} \geq 2$ and $\pi|_{C_n} : C_n \to \Gamma_n$ is a proper morphism (as each of these curves has only one puncture). It follows that the restriction $b_e|_{\Gamma_n}$ has no zero. As Γ_n is simply connected we have $b_e|_{\Gamma_n} = \text{const} =: b_e^0 \in \mathbb{C}^*$, and so $b_e(x,y) = b_e^0 + (x^k - y^l)c_e(x,y)$ for a certain polynomial $c_e \in \mathbb{C}^{[2]}$. Finally, rescaling the z-coordinate if necessary, we obtain the desired presentation. As by 2.11(δ), $\Gamma_n = \Gamma_{\text{slant}}$ is an isolated component of Γ, the restriction $f_{\text{horiz}}|_{\Gamma_n}$ does not vanish, whence is constant, and we may assume in addition that this constant is $f_{\text{horiz}}(0,0) = 1$. $\square$

3.11 We choose the weight degree function d on the algebra A with

$$d_x = -lN,\ d_y = -kN,\ d_z = \sqrt{2} \quad \text{and} \quad d_u = klmN + e\sqrt{2}\,,$$

so that the polynomials

$$f_n = f_{h+1} = x^k - y^l \qquad \text{and} \qquad \hat{p} := (x^k - y^l)^m u + z^e$$

are d-quasihomogeneous. Letting $N \in \mathbb{N}$ to be sufficiently large (thus $d(h_0) < klN$, and hence $d((x^k - y^l)h_0) < 0$) we may assume that $\hat{p}$ as above is the d-principal part of the polynomial p as in (24).

Lemma 3.12 *Let $q \in \mathbb{C}[x,y,z,u] \setminus \mathbb{C}$ be an irreducible d-homogeneous polynomial with $\deg_z q < e$. Then q coincides (up to a constant factor) with one of the following polynomials:*

$$x,\ y,\ z,\ u,\ \lambda x^k + \mu y^l, \quad \text{where} \quad \lambda,\, \mu \in \mathbb{C}^*\,.$$

Proof. Letting $q = \sum_{i=0}^{e-1} a_i(x,y,u)z^i$ with $a_i \in \mathbb{C}[x,y,u]$ $(i = 0,\ldots,e-1)$ we claim that there can be only one nonzero coefficient a_i. Assuming on the contrary that a_i, $a_{i+j} \neq 0$ for some i, $i+j \in \{0,\ldots,e-1\}$ with $1 \leq j \leq$

$e-1$ we would have $d(a_i z^i) = d(a_{i+j} z^{i+j})$. Taking into account the equality $d_y = \frac{k}{l} d_x$ we derive

$$d(a_i z^i) - d(a_{i+j} z^{i+j}) = j d_z = j\sqrt{2} = \alpha d_u + \beta d_x = \alpha e\sqrt{2} + \beta' d_x$$

$$\Rightarrow (j - \alpha e)\sqrt{2} = \beta' d_x \in \mathbb{Q} \tag{25}$$

for certain $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $\beta,\, \beta' \in \mathbb{Q}$. But $\alpha e - j \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, whence (25) leads to a contradiction.

Therefore, the irreducible polynomial q must coincide (up to a constant factor) either with z or with a polynomial $a_0 \in \mathbb{C}[x, y, u]$. Let $q = a_0(x, y, u) = \sum_{i=0}^t c_i(x, y) u^i$ with $c_i \in \mathbb{C}[x, y]$ $(i = 0, \ldots, t)$. The weights d_x (resp., d_y) and d_u being independent over $\mathbb{Q}$ the same argument as above shows that at most one summand $c_i(x, y)u^i$ may be different from zero.

Thus once again, the irreducible polynomial q coincides (up to a constant factor) either with u or with a polynomial $c_0 \in \mathbb{C}[x, y]$. In the latter case, being d-homogeneous the polynomial q must coincide (up to a constant factor) with one of the polynomials x, y, $\lambda x^k + \mu y^l$ $(\lambda,\, \mu \in \mathbb{C}^*)$, as stated. $\square$

3.13 Let an irreducible polynomial $p \in \mathbb{C}^{[4]}$ be as in (24). Set as before $X = p^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^4$, $\hat{X} = \hat{p}^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^4$ and $\hat{A}' = \mathbb{C}[\hat{X}]$ where $\hat{p}$ is the d-principal part of p. Denote by $\rho_{\hat{A}'}$ the canonical surjection

$$\rho_{\hat{A}'} \, : \, \mathbb{C}^{[4]} \to \mathbb{C}^{[4]}/(\hat{p}) = \hat{A}'$$

and by $\hat{x} = \rho_{\hat{A}'}(x), \ldots, \hat{u} = \rho_{\hat{A}'}(u) \in \hat{A}'$ the traces on $\hat{X}$ of the coordinate functions.

The polynomial $\hat{p}$ being irreducible, by 1.22(a) $\hat{A}'$ is just the graded algebra associated with the filtered algebra A', a filtration being provided by the degree function d on A'.

Lemma 3.14 *In the notation as in 3.13 we have*

$$\mathrm{ML}_{\mathrm{gr}}\,(\hat{A}') = \mathrm{Dk}_{\mathrm{gr}}\,(\hat{A}') = \mathbb{C}[\hat{x},\, \hat{y}] \,\subset \hat{A}'_{\leq 0}.$$

Therefore (by 1.24)

$$\mathrm{Dk}\,(A') \subset A'_0 \neq A'\,,$$

so that $A' \not\simeq \mathbb{C}^{[3]}$ and $X \not\simeq \mathbb{C}^3$, which proves 3.9.

Proof. The Jacobian derivation

$$\partial_0 := \frac{\partial(\hat{p},\, x,\, y,\, *)}{\partial(x,\, y,\, z,\, u)}$$

on the algebra $\hat{A}'$ being homogeneous and locally nilpotent with $\hat{A}'^{\partial_0} = \ker \partial_0 = \mathbb{C}[\hat{x},\, \hat{y}]$, it is sufficient to show that $\hat{x},\, \hat{y} \in \ker \hat{\partial}$ for any $\hat{\partial} \in \mathrm{LND}_{\mathrm{gr}}(\hat{A}')$. Indeed, by 1.14 both $\mathbb{C}[\hat{x},\, \hat{y}]$ and $\ker \hat{\partial}$ are algebraically closed subalgebras of $\hat{A}'$ of transcendence degree 2, thereby they coincide provided that $\mathbb{C}[\hat{x},\, \hat{y}] \subset \ker \hat{\partial}$.

The derivation $\hat{\partial}$ being homogeneous, the subalgebra $\ker \hat{\partial} \subset \hat{A}$ is generated by homogeneous elements (i.e., by the restrictions to $\hat{X}$ of d-homogeneous polynomials on $\mathbb{C}^4$). Let $a = q|_{\hat{X}} \in \ker \hat{\partial}$ (with a d-homogeneous $q \in \mathbb{C}^{[4]}$) be nonconstant. We may assume that $\deg_z q < e$ (otherwise we replace the polynomial q by the rest of the Euclidean division of q by the z-monic d-homogeneous polynomial $\hat{p} = z^e + (x^k - y^l)^m u$).

The kernel $\hat{A}^{\hat{\partial}} = \ker \hat{\partial}$ being factorially closed (see 1.14(c)), the irreducible factors of q restricted to $\hat{X}$ belong to this kernel as well. Therefore, $\ker \hat{\partial}$ is generated by the traces of irreducible d-homogeneous polynomials q with $\deg_z q < e$. By 1.14(d) we have $\hat{x},\, \hat{y} \in \ker \hat{\partial}$ provided that $\lambda \hat{x}^k + \mu \hat{y}^l \in \ker \hat{\partial}$ for some $\lambda,\, \mu \in \mathbb{C}^*$. Due to 3.12 and to the above argument on algebraic closeness, $\ker \hat{\partial}$ coincides with the subalgebra of $\hat{A}'$ generated by one of the following pairs:

$$(\hat{x},\, \hat{y}), \quad (\hat{x},\, \hat{u}), \quad (\hat{y},\, \hat{u}), \quad (\hat{x},\, \hat{z}), \quad (\hat{y},\, \hat{z}), \quad (\hat{z},\, \hat{u})\,.$$

If $\hat{z} \in \ker \hat{\partial}$ then by 1.14 and the equality

$$\hat{z}^e + (\hat{x}^k + \hat{y}^l)^m \hat{u} = 0 \tag{26}$$

also $\hat{x},\, \hat{y},\, \hat{u} \in \ker \hat{\partial}$, whence $\hat{\partial} = 0$, a contradiction. This eliminates the last three cases.

If $\ker \hat{\partial} = \mathbb{C}[\hat{x},\, \hat{u}]$ [11] then (26) yields the equality

$$lm \deg_{\hat{\partial}} \hat{y} = e \deg_{\hat{\partial}} \hat{z}\,. \tag{27}$$

On the other hand, as $\ker \hat{\partial} = \mathbb{C}[\hat{x},\, \hat{u}]$, by 1.19 $\hat{\partial}$ is equivalent to the Jacobian derivation

$$\hat{\partial}_1 := \frac{\partial(\hat{p},\, x,\, u,\, *)}{\partial(x,\, y,\, z,\, u)}\,.$$

[11] The case where $\ker \hat{\partial} = \mathbb{C}[\hat{y},\, \hat{u}]$ can be eliminated by a similar argument.

It is easily seen that

$$\hat{\partial}_1\,(\hat{y}) = -(\hat{p})'_z|_{\hat{X}} = -\hat{z}^{e-1}\,,$$

and so as $\deg_{\partial} = \deg_{\partial_1}$ (see 1.18) we get

$$\deg_{\hat{\partial}}\hat{y} = (e-1)\deg_{\hat{\partial}}\hat{z} + 1\,. \tag{28}$$

From (27) and (28) we obtain:

$$[(1-\frac{1}{lm})e-1]\deg_{\hat{\partial}}\hat{z} = -1\,.$$

But this is impossible because $l,\, e \ge 2,\, m \ge 1$, and so $(1-\frac{1}{lm})e \ge 1$. This completes the proof of the lemma, as well as those of 3.9. $\square$

Next we consider the remaining possibility in 3.6.

Proposition 3.15 *Let X and Y be as in 3.1. Suppose that $\Gamma_{\mathrm{non-horiz}}$ is a smooth curve, whereas there exists a singular component, say, C_{h+1} of the curve C_{slant}. Then once again, the Derksen invariant* $\mathrm{Dk}\,(A')$ *is non-trivial, whence $X \not\simeq \mathbb{C}^3$.*

The proof is done in 3.16-3.19 below.

Lemma 3.16 *Under the assumptions as in 3.15, after applying an appropriate tame automorphism of $\mathbb{C}^3_{x,y,z}$ the polynomial p can be presented in the form*

$$p = x^m h_0(x,y,z)u + y^k + z^l + xh_1(x,y,z) \tag{29}$$

with $k,\, l,\, m \ge 2,\ (k,\, l) = 1,\ h_0,\, h_1 \in \mathbb{C}[x,y,z]$ and $h_0(0,y,z) = \mathrm{const} = 1$.

Proof. The curve $\Gamma_{h+1} \subset \mathbb{C}^2_{x,y}$ (being smooth and homeomorphic to $\mathbb{C}$) is isomorphic to $\mathbb{C}$. Thus by the Abhyankar-Moh-Suzuki Theorem, choosing appropriate new coordinates in the (x,y)-plane we may suppose that $f_{h+1} = x$. We factorize $f = f_{h+1}^m\tilde{f} = x^m\tilde{f}$ with $m := a_{h+1}$. As C_{h+1} is singular, by 2.3 the gradient $\mathrm{grad}f$ has to vanish at some point of $\Gamma_{h+1} = \{x = 0\}$. The component Γ_{h+1} of Γ being isolated (see 2.11(β)) this implies that $m \ge 2$. Furthermore the polynomial $\tilde{f}(0,\, y)$ does not vanish, whence is a non-zero constant; by rescaling the x-coordinate we may assume this constant being 1.

As the curve $C_{h+1} = \{x = 0 = g(0,\, y,\, z)\} \subseteq \mathbb{C}^2_{y,z}$ is homeomorphic to $\mathbb{C}$ and singular, by the Lin-Zaidenberg Theorem (after performing an appropriate automorphism of the plane $\mathbb{C}^2_{y,z}$) we may suppose that C_{h+1} is given by $x = y^k + z^l = 0$ with $k,\, l \geq 2$ and $(k,\, l) = 1$. In virtue of 2.5 and the condition 2.11(δ) the divisors $D_{h+1} = \{x = 0\} \subset \mathbb{C}^3_{x,y,z}$ and D_g^{red} meet transversally at general points of the curve C_{h+1}, whence $g(0,\, y,\, z) = y^k + z^l$ (up to a constant factor which can be put equal to 1) i.e., $g = y^k + z^l + xh_1(x, y, z)$. Taking for $h_0(x, y, z)$ the polynomial obtained from $\tilde{f}$ as a result of the latter coordinate change, we obtain the desired presentation (29) with $h_0(0, y, z) = \tilde{f}(0, y) = 1$. $\square$

3.17 We consider the weight degree function d on the algebra $A' := \mathbb{C}[X]$ with

$$d_x = -1,\ d_y = d_z = 0 \quad \text{and} \quad d_u = m\,.$$

As the d-principal part $\hat{p} = x^m u + y^k + z^l$ of the polynomial p as in (29) is irreducible, by 1.22 $\hat{A}' := \mathbb{C}[\hat{X}]$ is just the graded algebra associated with the filtration on A' defined by the degree function d. Notice that in $\hat{A}'$ the following relation holds:

$$\hat{x}^m \hat{u} + \hat{y}^k + \hat{z}^l = 0\,. \tag{30}$$

With this notation we have the following lemma.

Lemma 3.18 $\mathrm{Dk}_{\mathrm{gr}}\,(\hat{A}') \subset \hat{A}'_{\leq 0}$, *and so (by 1.24)* $\mathrm{Dk}\,(A') \subset A'_0 \neq A'$. *Thereby* $A' \not\simeq \mathbb{C}^{[3]}$ *and* $X \not\simeq \mathbb{C}^3$, *which yields 3.15.*

Proof. We must show that $\ker \hat{\partial} \subset \hat{A}'_{\leq 0}$ whenever $\hat{\partial} \in \mathrm{LND}_{\mathrm{gr}}(\hat{A}')$. Assume that there exist $\hat{\partial} \in \mathrm{LND}_{\mathrm{gr}}(\hat{A}')$ and $\hat{a} \in \ker \hat{\partial}$ such that $\hat{a} \notin \hat{A}'_{\leq 0}$. Furthermore, by 1.14(c) we may suppose that this element $\hat{a}$ is non-decomposable. We have $\hat{a} = q|_{\hat{X}}$ for some d-homogeneous polynomial $q = \sum_{i,j} a_{ij} x^i u^j \in \mathbb{C}^{[4]}$ (with $a_{ij} \in \mathbb{C}[y,\, z]$). Moreover, taking into account (30) we may suppose that $i < m$ whenever $j > 0$.

Claim. *In the above expression for q there is only one non-zero monomial.*

Proof of the claim. Indeed, if there were two of them, say, if $a_{i_1 j_1} \neq 0$ and $a_{i_2 j_2} \neq 0$ then we would have

$$d(q) = mj_1 - i_1 = mj_2 - i_2 \qquad \Longrightarrow \qquad m(j_1 - j_2) = i_1 - i_2\,. \tag{31}$$

Assuming that $i_1 > i_2$, by (31) we get $j_1 > j_2$, and vice versa. Thus $j_1 > 0$, and then by our assumption $i_1 < m$. Hence also $i_1 - i_2 < m$, which contradicts (31). This proves the claim. $\square$

Since the element $\hat{a} = q(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{u}) = a_{ij}(\hat{y}, \hat{z})\hat{x}^i\hat{u}^j$ is supposed to be non-decomposable and of positive d-degree, we have $\hat{a} = \hat{u} \in \ker\hat{\partial}$. Thus $\hat{\partial}$ can be specified to a locally nilpotent derivation ∂_1 of the algebra $B = \mathbb{C}[S]$, where $S := \{x^m + y^k + z^l = 0\} = \{u = 1\} \cap \hat{X} \subset \mathbb{C}^3$ (see 1.16).

By 1.14(a), tr.deg $(\ker\hat{\partial}) = 2$, whence there is a homogeneous $\hat{\partial}$-constant $\hat{b}$ such that the elements $\hat{a} = \hat{u}, \hat{b} \in \hat{A}'$ are algebraically independent. As above we obtain that either $\hat{b} = b(\hat{y}, \hat{z})$ for some irreducible polynomial $b \in \mathbb{C}^{[2]} \setminus \mathbb{C}$, or $\hat{b} = \hat{x}$. In the latter case by (30) we have $\hat{y}^k + \hat{z}^l \in \ker\hat{\partial}$, and thus by 1.14(d) also $\hat{y}, \hat{z} \in \ker\hat{\partial}$. Therefore $\hat{\partial} = 0$, which is impossible. Finally, we conclude that $b(\hat{y}, \hat{z}) \in \ker\hat{\partial}$ for a certain polynomial $b \in \mathbb{C}^{[2]} \setminus \mathbb{C}$, and so the restriction $b|_S$ is a ∂_1-constant.

Now the proof can be completed by applying the next lemma (cf. [Der97, KZ00, Zaĭ99]). □

Lemma 3.19 *Let $B = \mathbb{C}[S]$ where $S := \{x^m + y^k + z^l = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ and $k, l, m \geq 2$, $\gcd(k, l) = 1$, and let $\partial_1 \in \mathrm{LND}(B)$. Then $b|_S \notin \ker\partial_1$ whenever $b \in \mathbb{C}[y, z] \setminus \mathbb{C}$.*

Proof. We define the weight degree function $\hat{d}$ on the algebra B by letting

$$\hat{d}_x = kl, \quad \hat{d}_y = lm, \quad \hat{d}_z = km\,.$$

Actually $x^m + y^k + z^l$ is a $\hat{d}$-homogeneous polynomial, B is a graded algebra, and we may consider the associated homogeneous derivation $\hat{\partial}_1 \in \mathrm{LND}_{\mathrm{gr}}(B)$. Assuming that for a polynomial $b \in \mathbb{C}[y, z] \setminus \mathbb{C}$, $b|_S \in \ker\partial_1$ we will get a $\hat{d}$-homogeneous polynomial $\hat{b}_1 \in \mathbb{C}[y, z] \setminus \mathbb{C}$ such that $\hat{b}_1|_S \in \ker\hat{\partial}_1$ as well. By 1.14(c) an irreducible $\hat{d}$-homogeneous factor of the polynomial $\hat{b}_1$ (this can be y, z or $\lambda y^k + \mu z^l$, where $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$) restricts to S as a $\hat{\partial}_1$-constant. If it were $\lambda y^k + \mu z^l$ then by 1.14(d) both $y|_S$ and $z|_S$ would be $\hat{\partial}_1$-constants, whence $\hat{\partial}_1 = 0$, a contradiction.

Thus we may assume that, say, $y|_S \in \ker\hat{\partial}_1$. As $(x^m + y^k + z^l)|_S = 0$ we have $(x^m + z^l)|_S \in \ker\hat{\partial}_1$, and (since $m, l \geq 2$) again by 1.14(d) we obtain that $x|_S, z|_S \in \ker\hat{\partial}_1$, which is impossible.

This completes the proof of 3.19, 3.18 and 3.15. □

Remark 3.20 Choosing a weight degree function likewise in 3.11 and repeating the proof of Proposition 5.3 in [Kal94] it can be shown that under assumptions as in 3.6 (that is, as in 3.9 or 3.15) one has $\mathbb{C}[x] \subseteq \mathrm{ML}(A')$, whence the Makar-Limanov invariant $\mathrm{ML}(A')$ is non-trivial as well.

3.2. Simple affine modifications of $\mathbb{C}^3$ isomorphic to $\mathbb{C}^3$

The following theorem is a central result of the paper. The expression 'in appropriate (x, y)-coordinates' below means 'after performing an appropriate automorphism $\alpha \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}[x, y] \subset \operatorname{Aut} \mathbb{C}[x, y, z, u]$'. (In fact, the new (x, y)-coordinates are chosen in a way to get $f_{\mathrm{non-horiz}} \in \mathbb{C}[x]$; in particular, no coordinate change is necessary when $f_{\mathrm{non-horiz}}$ =const.)

Theorem 3.21 *For a hypersurface $X \subset \mathbb{C}^4$ given by an equation*

$$p = f(x, y)u + g(x, y, z) = 0 \qquad (f \in \mathbb{C}^{[2]} \backslash \{0\}\, , g \in \mathbb{C}^{[3]})\, ,$$

in appropriately chosen new (x, y)-coordinates the following conditions (i)-(vi) *are equivalent.*

(i) $X \simeq \mathbb{C}^3$.

(ii) *Every fiber $X_\mu = p^{-1}(\mu)$ $(\mu \in \mathbb{C})$ of the polynomial $p \in \mathbb{C}^{[4]}$ is isomorphic to $\mathbb{C}^3$.*

(iii) *Every fiber of the regular function $x|_X \in A' := \mathbb{C}[X]$ is reduced and isomorphic to $\mathbb{C}^2$.*

(iv) *Every fiber of the morphism $\rho : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$, $(x, y, z, u) \longmapsto (x,\, p(x, y, z, u))$, is reduced and isomorphic to $\mathbb{C}^2$.*

(v) *The polynomial p is a x-residual variable* [12].

(vi) *With $Y := \mathbb{C}^3$ and $X \subseteq \mathbb{C}^4$ as above being smooth and irreducible, the conditions 2.11(α)-(δ) hold as well as the following one:*

(ε) The curves $C_{\mathrm{non-horiz}}$ and $\Gamma_{\mathrm{non-horiz}}$ are smooth.

Proof. The implications (v)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(iii) and (ii)$\Rightarrow$(i) are immediate; (i)$\Rightarrow$(vi) follows from 2.28 and 3.6. Thus it suffices to establish (vi)$\Rightarrow$(v) and (iii)$\Rightarrow$(ii).

Let us show (vi)$\Rightarrow$(v). If $f_{\mathrm{non-horiz}} \neq$ const (that is, $h < n$) then in virtue of our assumptions 2.11(γ) and (vi)(ε), $\Gamma_{h+1} \simeq \mathbb{C}$. By the Abhyankar-Moh-Suzuki Theorem, after performing an appropriate automorphism of the plane $\mathbb{C}^2_{x,y}$ we may suppose that $f_{h+1} = x$. Hence by 2.11(γ) we have

$$f_{\mathrm{non-horiz}} = c \prod_{i=h+1}^{n} (x - \lambda_i)^{a_i} \in \mathbb{C}[x]\, .$$

[12] That is (1.27) for any $\lambda \in \mathbb{C}$, the specialization $p_\lambda \in \mathbb{C}[y, z, u]$ of p is a variable.

Anyhow, $f_{\mathrm{non-horiz}}=\mathrm{const}$ or not, assuming that $f_{\mathrm{horiz}}\neq\mathrm{const}$ by 3.4 we may write

$$p_\lambda=\kappa f_{\mathrm{horiz},\lambda}u+b_{0,\lambda}+b_{1,\lambda}z+f^{\mathrm{red}}_{\mathrm{horiz},\lambda}h_\lambda$$

with $f_{\mathrm{horiz},\lambda}$, $f^{\mathrm{red}}_{\mathrm{horiz},\lambda}$, $b_{0,\lambda}$, $b_{1,\lambda}\in B:=\mathbb{C}[y]$, $h_\lambda\in B[z]$ and $\kappa:=f_{\mathrm{non-horiz}}(\lambda)=c\prod_{i=h+1}^n(\lambda-\lambda_i)^{a_i}\in\mathbb{C}$. If $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\lambda_{h+1},\dots,\lambda_n\}$ (i.e., $\kappa\neq 0$) then in virtue of 3.4, $b_{1,\lambda}\in B$ is invertible mod $f_{\mathrm{horiz},\lambda}$, whereas $f^{\mathrm{red}}_{\mathrm{horiz},\lambda}$ is nilpotent mod $f_{\mathrm{horiz},\lambda}$. Therefore by 1.29, $p_\lambda\in B[z,u]$ is a B-variable; in particular, $p_\lambda\in\mathbb{C}[y,z,u]$ is a variable (whence for every $\mu\in\mathbb{C}$, the surface $\{p_\lambda=\mu\}\subseteq\mathbb{C}^3_{y,z,u}$ is reduced and isomorphic to $\mathbb{C}^2$).

For every $i=h+1,\dots,n$ we have $f_i=x-\lambda_i$ and in virtue of 2.11(γ) and (vi)(ε), $\Gamma_i\simeq\mathbb{C}\simeq C_i$. Moreover by 2.3(i) the polynomial $g_{\lambda_i}\in\mathbb{C}[y,z]$ is irreducible and $g^{-1}_{\lambda_i}(0)=C_i\simeq\mathbb{C}$, whence by the Abhyankar-Moh-Suzuki Theorem it is a variable of the polynomial ring $\mathbb{C}[y,z]$. Thus $p_{\lambda_i}=g_{\lambda_i}\in\mathbb{C}[y,z,u]$ is a variable as well. Now (v) follows. In the remaining case where $f_{\mathrm{horiz}}=\mathrm{const}$ the proof is similar (but simpler) and left to the reader.

Next we prove (iii)$\Rightarrow$(ii). We notice first of all that under the condition (iii), the hypersurface X is smooth and irreducible (indeed, for every $\lambda\in\mathbb{C}$ we have

$$\operatorname{grad}p_\lambda=\operatorname{pr}\left((\operatorname{grad}p)_\lambda\right)\qquad\text{with}\qquad \operatorname{pr}:(x,y,z,u)\longmapsto(y,z,u)\,).$$

Similarly, under the condition (iv) every fiber X_μ ($\mu\in\mathbb{C}$) is smooth and irreducible.

Actually we establish (iii)$\Rightarrow$(i), which at the same time shows (iv)$\Rightarrow$(ii). Together with the implication (i)$\Rightarrow$(iv) (which we already know) these yield (iii)$\Rightarrow$(ii), as needed.

To prove the implication (iii)$\Rightarrow$(i), in virtue of 1.7 it is enough to show that a smooth, irreducible 3-fold X satisfying (iii) is acyclic. Let $U=\mathbb{C}\backslash V$ be a Zariski open subset such that over U, the morphism $x|_X:X\to\mathbb{C}$ is a smooth fibration (with the fibers diffeomorphic to $\mathbb{R}^4$). In the notation of 1.9 we let $\hat X=X$, $\hat Y=Y=\mathbb{C}^3$, $\hat E=(x|_X)^{-1}(V)\subseteq\hat X$ and $\hat D=x^{-1}(V)\subseteq\hat Y$. It is easily seen that the induced homomorphisms

$$(x|_{\hat X\backslash\hat E})_*:H_*(\hat X\backslash\hat E)\to H_*(\mathbb{C}\backslash V)\,,$$

$$(x|_{\hat Y\backslash\hat D})_*:H_*(\hat Y\backslash\hat D)\to H_*(\mathbb{C}\backslash V)\,,$$

and hence also

$$(\sigma|_{\hat X\backslash\hat E})_*:H_*(\hat X\backslash\hat E)\to H_*(\hat Y\backslash\hat D)$$

are isomorphisms, as well as

$$(\sigma|_{\hat{E}})_* : H_*(\hat{E}) \to H_*(\hat{D})$$

(indeed, $H_0(\hat{E}) \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{card} V} \cong H_0(\hat{D})$ and the senior homology are trivial). Thus the conditions (i) and (ii) of 1.9 are fulfilled, and so by 1.9

$$\sigma_* : H_*(\hat{X}) \to H_*(\hat{Y})$$

is an isomorphism. Therefore, the 3-fold $X = \hat{X}$ is acyclic. This completes the proof. $\square$

Remark 3.22 For another proof of the implication (iii)$\Rightarrow$(i) which do not use 1.7 see 4.23, 4.24 below.

3.23 If the polynomial $p \in \mathbb{C}^{[4]}$ is linear with respect to two (and not just one) variables we have a much stronger result (see 3.24 below). It is an analog in dimension 4 of Theorem 7.2 in [KZ99] generalizing Sathaye's Theorem [Sat76]. For a polynomial $\varphi \in \mathbb{C}[x, y]$ we let $\Gamma_\varphi := V(\varphi) \subseteq \mathbb{C}^2$. Also, we use below the variable v instead of z to emphasize the symmetry of the situation.

Theorem 3.24 *For a hypersurface $X \subset \mathbb{C}^4$ given by an equation*

$$p = \tilde{a}(x, y)u + \tilde{b}(x, y)v + c(x, y) = d(au + bv) + c = 0 \tag{32}$$

with $a, b, c, d \in \mathbb{C}[x, y]$, $d \neq 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$ and $\gcd(a, b) = 1$, in appropriately chosen new (x, y)-coordinates the following conditions (i′)-(v′) *are equivalent.*

(i′) *The 3-fold X is irreducible, smooth and acyclic.*

(ii′) $X \simeq \mathbb{C}^3$.

(iii′) *The polynomial $p \in \mathbb{C}^{[4]}$ is a x-residual variable.*

(iv′) $p \in \mathbb{C}[x]^{[3]}$ *is an x-variable.*

(v′) $d \in \mathbb{C}[x]$, $\gcd(c, d) = 1$, $\Gamma_a \cap \Gamma_b \subseteq \Gamma_d$, *and for every root $x = x_i$ of d $(i = 1, \ldots, \deg d)$ we have*

$$c_{x_i}(y) = c(x_i, y) \in \mathbb{C}^* y + \mathbb{C}\,. \tag{33}$$

Proof. The strategy of the proof is as follows. In virtue of 3.21 the conditions (ii′) and (iii′) are equivalent to each other and to the other conditions of 3.21. The equivalence (iii′)$\Longleftrightarrow$(iv′) will be established later on in 4.2(b). By 2.11 we have (i′)$\Longrightarrow$2.11(α)-(δ). We show below that (i′) also implies the condition (ε) of 3.21(vi). In virtue of 3.21 this yields the implications (i′)$\Longrightarrow$3.21(vi) $\Longleftrightarrow$(ii′)$\Longrightarrow$(i′), and so gives (i′)$\Longleftrightarrow$(ii′). Finally we show (iii′)$\Longleftrightarrow$(v′), which concludes the proof.

Interchanging (if necessary) the roles of u and v we may suppose in the sequel that $a \neq 0$.

(i′)$\Longrightarrow$(ε). We observe (see 3.3) that for p as in (32), $C_{\text{slant}} = \Gamma_{\text{slant}} = \emptyset$, whence $C_{\text{non-horiz}} = C_{\text{vert}}$ is smooth. And it was shown in the proof of 3.10 that if $\Gamma_{\text{non-horiz}}$ is singular then $\Gamma_{\text{non-horiz}} = \Gamma_{\text{slant}}$. Henceforth in our setting $\Gamma_{\text{non-horiz}}$ is also smooth, that shows (ε).

(iii′)$\Longrightarrow$(v′). As X is irreducible we have $\gcd(c, d) = 1$. Letting $q := p - c$ we fix a point $P = (x_0, y_0)$ such that

$$q_P = d(x_0, y_0)(a(x_0, y_0)u + b(x_0, y_0)v) = 0\,.$$

It is easily seen that $y - y_0$ divides $p_{x_0} - c(x_0, y_0) = q_{x_0} + (c_{x_0} - c(x_0, y_0))$. As $p_{x_0} \in \mathrm{Var}_{\mathbb{C}}[y, u, v]$ we obtain that $q_{x_0} = 0$ and $p_{x_0} - c(x_0, y_0) = c_{x_0} - c(x_0, y_0) = \kappa(y - y_0)$ with $\kappa \in \mathbb{C}^*$, as needed in (33). As $\gcd(a, b) = 1$, from $q_{x_0} = 0$ we get $d_{x_0} = 0$. Thus for every root (x_0, y_0) of $d = 0$ we have $d_{x_0} = 0$, which means that $d \in \mathbb{C}[x]$. Moreover, for every root (x_0, y_0) of $a = b = 0$ we also have $d_{x_0} = 0$, which shows the inclusion $\Gamma_a \cap \Gamma_b \subseteq \Gamma_d$ and gives (v′).

(v′)$\Longrightarrow$(iii′). In view of (33) for every root x_i of d ($i = h + 1, \dots, n$), $p_{x_i} = c_{x_i} \in \mathrm{Var}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y] \subseteq \mathrm{Var}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y, u, v]$. Let further $\lambda \in \mathbb{C}$ and $d(\lambda) \neq 0$. As by (v′), $\Gamma_a \cap \Gamma_b \subseteq \Gamma_d$ we have $\gcd(a_\lambda, b_\lambda) = 1$, whence $r_\lambda a_\lambda - s_\lambda b_\lambda = 1$ for certain polynomials $r_\lambda, s_\lambda \in \mathbb{C}[y]$. As the matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ s_\lambda & r_\lambda \end{pmatrix}$$

is invertible over the ring $\mathbb{C}[y]$, the mapping

$$\alpha : (u, v) \longmapsto (u_1, v_1) := A_\lambda(u, v)$$

induces a $\mathbb{C}[y]$-automorphism of $\mathbb{C}[y][u, v]$ with $\alpha(p_\lambda) = d(\lambda)u_1 + c_\lambda \in \mathrm{Var}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y, u, v]$. Thus (iii′) follows. $\square$

4. Simple birational extensions of $\mathbb{C}^{[3]}$ as variables in $\mathbb{C}^{[4]}$

4.1. Partial positive results

We recall the problem stated in the Introduction.

4.1 Problem. *Is it true that if a hypersurface $X \subseteq \mathbb{C}^4$ with equation of the form*

$$p := f(x,\, y)u + g(x,\, y,\, z) = 0 \qquad (\text{where} \quad f \in \mathbb{C}^{[2]} \backslash \{0\} \quad \text{and} \quad g \in \mathbb{C}^{[3]})$$

is isomorphic to $\mathbb{C}^3$ then necessarily $p \in \operatorname{Var}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{[4]}$ and moreover, $p \in \operatorname{Var}_B B^{[3]}$ (that is, p is an x-variable) provided in addition that $f_{\text{non-horiz}} \in B := \mathbb{C}[x]$?

The principal results of this subsection can be summarized as follows.

Theorem 4.2 *The answer to 4.1 is positive in each of the following cases:*

(a) $f \in \mathbb{C}[x]$.

(b) $\deg_z g \leq 1$.

(c) $f_{\text{vert}} = 1$.

(d) $f_{\text{horiz}} = f_{\text{horiz}}^{\text{red}}$.

(e) *g is of form $g = g_0(x,y) + \breve{g}_2(x,y,z)z^2$.*

The proof is given in 4.15 below. From 4.2(c),(d) we obtain the following corollary.

Corollary 4.3 *If in 4.1, $f = f_1^{a_1}$ with $f_1 \in \mathbb{C}[x,y]$ irreducible then p is a variable.*

4.4 By 3.21(v) we may suppose that p as in 4.1 is a x-residual variable (see 1.25, 1.27). Thus 4.1 would be answered in positive if the following conjecture [13] were true.

[13] Proposed by the second author.

Conjecture 4.5 *If $p \in \mathbb{C}^{[n]}$ is a residual x_1-variable (that is,*

$$p_\lambda := p(\lambda, x_2, \dots, x_n) \in \operatorname{Var}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{[n-1]} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C})$$

then p is an x_1-variable: $p \in \operatorname{Var}_{\mathbb{C}[x_1]} \mathbb{C}[x_1]^{[n-1]}$.

In 4.6-4.8 below we analyze the situation with the only assumption that $p = fu + g$ is a x-residual variable. First in 4.6 we include the case where $f = 0$, then in 4.7 we deal with the special case where $f \in \mathbb{C}[x] \backslash \{0\}$, whereas the general case is treated in 4.8.

Proposition 4.6 *Let X be a smooth affine surface and $\varphi : X \to \mathbb{C}$ be a morphism with $\varphi^*(\lambda) \simeq \mathbb{C}\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Then the following hold.*

(a) $X \simeq \mathbb{C}^2$.

(b) Furthermore, if $X = \operatorname{spec}(\mathbb{C}^{[3]}/(g))$ with $g \in \mathbb{C}^{[3]} = \mathbb{C}[x, y, z]$ and $\varphi = x|_X$ then g is an x-variable.

(c) Consequently, a x-residual variable $g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ is an x-variable. [14]

Proof. (a) The fact is well-known (e.g., cf. [Miy01, Thm. 2.2.1]); nevertheless we indicate the proof. First extending $\varphi : X \to \mathbb{C}$ to a projective morphism $\bar{\varphi} : V \to \mathbb{P}1$ of a smooth ruled surface V, we then pass to a smooth relatively minimal model of $(V, \bar{\varphi})$ by contracting successively the superfluous components of the reducible fibers of $\bar{\varphi}$ different form the closures of the original fibers of φ (this is always possible, see e.g. [Giz70, Lemma 7], [Zaĭ87, Lemma 3.5] or [Miy01, Lemma 1.4.1(6)]). Thus we obtain (as a completion of the original family) a Hirzebruch surface $\pi : \Sigma_n \to \mathbb{P}1$ with a section $s : \mathbb{P}1 \to \Sigma_n$ 'at infinity', so that $X = \Sigma_n \backslash (s(\mathbb{P}1) \cup F_\infty)$. By means of elementary transformations over the point $\infty \in \mathbb{P}1$ we replace Σ_n with $\Sigma_0 = \mathbb{P}1 \times \mathbb{P}1$ and $s(\mathbb{P}1)$ with a constant section, say, C_0. This yields the desired isomorphism $X = \Sigma_0 \backslash (C_0 \cup F_\infty) \simeq \mathbb{C}^2$.

(b) By (a) there is an isomorphism

$$\gamma : \mathbb{C}[x, y, z]/(g) \to \mathbb{C}^{[2]} = \mathbb{C}[x, y]\,.$$

Letting $h := \gamma(x) \in \mathbb{C}^{[2]}$, by our assumption we obtain:

$$\mathbb{C}^{[2]}/(h) = \mathbb{C}[x, y, z]/(g, x) = \mathbb{C}[\varphi^*(0)] \cong \mathbb{C}^{[1]}\,.$$

[14]Moreover, $g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ is a x-residual variable of the ring $\mathbb{C}[x][y, z, u]$ iff it is an x-variable. Indeed, this follows from (c) and the cancellation for curves: $\Gamma \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2 \Longrightarrow \Gamma \simeq \mathbb{C}$.

Hence by the Abhyankar-Moh-Suzuki Theorem, up to an automorphism of $\mathbb{C}[x, y]$ we may suppose that $h = x$ i.e.,

$$\gamma : \mathbb{C}[x][y, z]/(g) \to \mathbb{C}[x]^{[1]} .$$

Now it follows from the generalized version of the Abhyankar-Moh-Suzuki Theorem [RS79, Thm. 2.6.2] that g is an x-variable, as stated.

(c) immediately follows from (a) and (b). $\square$

Proposition 4.7 *If $p = f(x)u + g(x, y, z) \in \mathbb{C}^{[4]}$ (with $f \in \mathbb{C}[x]\backslash\{0\}$) is a x-residual variable then actually it is an x-variable.*

Proof. As $u + g(x, y, z)$ is an x-variable, by 1.31(a) so is $p = fu + g$. $\square$

Proposition 4.8 *If $p = f(x, y)u+g(x, y, z) \in \mathbb{C}[x][y, z, u]$ with $f \notin \mathbb{C}[x]$ is a x-residual variable then p can be written as follows:*

$$p = q[r\tilde{f}u + \tilde{g}_0 y^2 + \tilde{g}_1 z + \tilde{f}^{\mathrm{red}}\tilde{g}_2 z^2] + a_0 + a_1 y\,, \tag{34}$$

where

- $q, r, a_0, a_1 \in \mathbb{C}[x], \quad \tilde{f}, \tilde{g}_0, \tilde{g}_1 \in \mathbb{C}[x, y], \quad \tilde{g}_2 \in \mathbb{C}[x, y, z]$,
- $\tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0)$ *is a finite subset of* $q^{-1}(0) \times \mathbb{C}_y$, *and*
- *for every root* x_0 *of* r, $\quad q(x_0)\tilde{f}(x_0, y) \in \mathbb{C}$.

The proof is done in 4.11 below.

Corollary 4.9 *If $p = f(x, y)u + g(x, y, z) \in \mathbb{C}[x][y, z, u]$ is a x-residual variable then it is a $\mathbb{C}(x)$-variable of $\mathbb{C}(x)^{[3]}$.*

Proof. As a $\mathbb{C}[x]$-variable is also a $\mathbb{C}(x)$-variable, by 4.6 and 4.7 we may suppose that $f \notin \mathbb{C}[x]$, and so 4.8 applies. Let p be presented as in (34). As $\tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0)$ is finite, the polynomials $qr\tilde{f}$, $q\tilde{g}_1 \in \mathbb{C}[x, y]$ regarded as elements of $B := \mathbb{C}(x)[y]$ are coprime. Moreover the polynomial $\tilde{f}^{\mathrm{red}}\tilde{g}_2 z^2 \in B[z]$ is nilpotent $\bmod\,(qr\tilde{f})$, and so by 1.29(a), $p = fu+g \in \mathrm{Var}_B B[z, u]$. $\square$

The proof of 4.8 relies on the following lemma (cf. [Sat76, KZ99, Vén99]).

Lemma 4.10 *Let $p = f(y)u + g(y, z)$ be a variable of $\mathbb{C}[y, z, u]$.*

(a) *If* $f \neq 0$ *then* p *is an* y*-variable, and it can be written as follows:*

$$p = f(y)u + g_0(y) + g_1(y)z + f^{\mathrm{red}}(y)\tilde{g}_2(y,z)z^2$$

with $\gcd(f, g_1) = 1$.

(b) *If* $f = 0$ *then the coefficient of the highest order term in* z *of* p *(which à priori is a polynomial in* y*) is constant,* unless $\deg_z g \leq 0$.

Proof. (a) The statement is evidently true if $f = \mathrm{const}$. Suppose that $f \notin \mathbb{C}$. By our assumption $\mathbb{C}^{[3]}/(p) \cong \mathbb{C}^{[2]}$. If $y_1 \in \mathbb{C}$ is such that $f(y_1) = 1$ then we have

$$\mathbb{C}[y,z,u]/(f(y)u + g(y,z), y - y_1) \cong \mathbb{C}[z,u]/(u + g_{y_1}(z)) \cong \mathbb{C}^{[1]}.$$

By the Abhyankar-Moh-Suzuki Theorem, the same is true for every value of y. In particular, for any root y_0 of f we have

$$\mathbb{C}[y,z,u]/(f(y)u + g(y,z), y - y_0) \cong \mathbb{C}[z,u]/(g_{y_0}(z)) \cong \mathbb{C}^{[1]}\,.$$

Therefore $\deg_z g_{y_0}(z) = 1$, $p = fu + g$ has the desired form, and by 1.29(a) (with $B := \mathbb{C}[y]$) it is an y-variable.

(b) In the course of the proof of 1.31 we have noticed that the polynomials of $\mathbb{C}[y,z]$ which are variables of $\mathbb{C}[y,z,u]$, are actually variables of $\mathbb{C}[y,z]$. Thus $g \in \mathrm{Var}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y,z]$, and so the statement (b) is well-known (e.g., see [AM75]). $\square$

4.11 *Proof of Proposition 4.8.* It is easily seen that the polynomial $p = fu + g \in \mathbb{C}[x][y,z,u]$ admits a presentation

$$p = q[\bar{f}u + \tilde{g}_0 y^2 + \tilde{g}_1 z + \bar{g}_2 z^2] + a_0 + a_1 y \tag{35}$$

with $a_0, a_1 \in \mathbb{C}[x]$, $\bar{f}, \tilde{g}_0, \tilde{g}_1 \in \mathbb{C}[x,y]$, $\bar{g}_2 \in \mathbb{C}[x,y,z]$ and with $q \in \mathbb{C}[x]$ being a monic polynomial of maximal degree such that (35) holds. Clearly,

$$q^{-1}(0) = L(p) := \{x_0 \in \mathbb{C} \mid p_{x_0} = f(x_0,y)u + g(x_0,y,z) \in \mathbb{C}y + \mathbb{C}\}$$

(possibly, this set is empty, and then we put $q := 1$). As by our assumption, $f \notin \mathbb{C}[x]$ the subset

$$K = K(f) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid f_\lambda(y) \in \mathbb{C}\} = q^{-1}(0) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \bar{f}_\lambda(y) \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}$$

is finite. We let $x_0 \in \mathbb{C}\backslash K(f)$. The specialization p_{x_0} being a variable of $\mathbb{C}[y,z,u]$, by 4.10(a) we have $\gcd(\bar{f}(x_0,y), \tilde{g}_1(x_0,y)) = 1$, whence $\bar{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0) \subseteq K \times \mathbb{C}_y$.

Since by 4.10(a), $p_{x_0} \in \mathbb{C}[y,z,u]$ is a residual y-variable, the equality $\bar{f}(x_0,y_0) = 0$ implies that $\deg_z g_{x_0,y_0}(z) = 1$, whence also $\bar{g}_2(x_0,y_0,z) = 0$. It follows that

$$\bar{f}^{-1}(0)\backslash(K \times \mathbb{C}_y) \subseteq \bar{g}_2^{-1}(0)\,.$$

It is easily seen that $\bar{f} \in \mathbb{C}[x,y]$ admits a factorization $\bar{f}(x,y) = r(x)\tilde{f}(x,y)$ such that $r^{-1}(0) \subseteq K$ and $\tilde{f}^{-1}(0) \cap (K \times \mathbb{C}_y)$ is finite. Then we have

$$\tilde{f}^{-1}(0)\backslash(K \times \mathbb{C}_y) \subseteq \bar{g}_2^{-1}(0)\,.$$

Passing to the Zariski closures we obtain

$$\tilde{f}^{-1}(0) \subseteq \bar{g}_2^{-1}(0) \qquad \text{i.e.,} \qquad \bar{g}_2 = \tilde{f}^{\mathrm{red}}\tilde{g}_2\,.$$

Now (35) yields a desired presentation (34). As $r^{-1}(0) \subseteq K(f)$, by the definition of $K(f)$ for every root x_0 of r we have $q(x_0)\tilde{f}(x_0,y) \in \mathbb{C}$, and so it remains to check that $\tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0)$ is a finite subset of $q^{-1}(0) \times \mathbb{C}_y$.

We already know that $\tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0)$ is a finite subset of $K \times \mathbb{C}_y$. Suppose that there is a point

$$(x_0,y_0) \in [\tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0)]\backslash q^{-1}(0)\,.$$

Then $x_0 \in K(f)\backslash q^{-1}(0)$, whence $\bar{f}(x_0,y) \in \mathbb{C}$, and so

$$\bar{f}(x_0,y) = \bar{f}(x_0,y_0) = r(x_0)\tilde{f}(x_0,y_0) = 0\,.$$

By our assumption,

$$p_{x_0} = q(x_0)[\tilde{g}_0(x_0,y)y^2 + \tilde{g}_1(x_0,y)z + \tilde{f}^{\mathrm{red}}(x_0,y)\tilde{g}_2(x_0,y,z)z^2] + a_0(x_0) + a_1(x_0)y$$

is a variable of $\mathbb{C}[y,z,u]$, and thus also of $\mathbb{C}[y,z]$. Hence by 4.10(b), $\tilde{f}^{\mathrm{red}}(x_0,y) = \tilde{f}^{\mathrm{red}}(x_0,y_0) = 0$, and then again by 4.10(b), $\tilde{g}_1(x_0,y) = \tilde{g}_1(x_0,y_0) = 0$. Therefore, $p_{x_0} \in \mathbb{C}[y]$ is a variable, whence $q(x_0) = 0$, a contradiction. □

Remark 4.12 *In the notation of 4.8, if $p = fu + g = qr\tilde{f}u + g$ is a x-residual variable then also $q\tilde{f}u + g$ is so. Moreover by 1.31(a), if $q\tilde{f}u + g$ is an x-variable then $p = fu + g$ is so as well.*

Lemma 4.13 *Let $p = fu + g \in \mathbb{C}[x][y,z,u]$ be a x-residual variable presented as in (34). If $\tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0) = \emptyset$ then p is an x-variable.*

Proof. By 4.12 we may put in (34) $r = 1$. In virtue of 1.29(a), the polynomial

$$\tilde{p} := \tilde{f}(x,y)u + \tilde{g}_0(x,y)y^2 + \tilde{g}_1(x,y)z + \tilde{f}^{\mathrm{red}}(x,y)\tilde{g}_2(x,y,z)z^2$$

is an (x,y)-variable i.e., there is an automorphism $\alpha \in \mathrm{Aut}_B B[z,u]$ (with $B := \mathbb{C}[x,y]$) such that $\alpha(u) = \tilde{p}$ (indeed by our assumption, $\tilde{g}_1$ is invertible mod $\tilde{f}$ in B). Furthermore by our assumption, for every root x_0 of q the specialization

$$p_{x_0} = f(x_0,y)u + g(x_0,y,z) = a_0(x_0) + a_1(x_0)y \in \mathbb{C}[y,z,u]$$

is a variable. Consequently, $a_1(x_0) \neq 0$, and so $\gcd(q, a_1) = 1$. It follows that there is an affine automorphism $\beta \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[x]}\mathbb{C}[x][y,u]$ such that

$$\beta(y) = q(x)u + a_0(x) + a_1(x)y\,.$$

Now $\alpha\beta \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[x]}\mathbb{C}[x][y,z,u]$ is such that

$$\alpha\beta(y) = q\tilde{p} + a_0(x) + a_1(x)y = fu + g = p\,,$$

as desired. □

Lemma 4.14 *If $p = f(x,y)u + g(x,y,z)$ is a residual x-variable of degree at most 1 in z then it is an x-variable.*

Proof. It follows from 4.8 that if $f \notin \mathbb{C}[x]$ then in (34) $\tilde{g}_1 \neq 0$ (indeed, otherwise $\tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0)$ cannot be a finite subset of $q^{-1}(0) \times \mathbb{C}_y$). Thus if $\deg_z g \leq 0$ then $f \in \mathbb{C}[x]$, and so the statement follows from 4.7.

If $\deg_z g = 1$ then by 4.8 $p = fu + g$ can be written as follows:

$$p = q(x)[r(x)\tilde{f}(x,y)u + \tilde{g}_0(x,y)y^2 + \tilde{g}_1(x,y)z] + a_0(x) + a_1(x)y$$

with $\tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0)$ being a finite subset of $q^{-1}(0) \times \mathbb{C}_y$. By 4.12 we may assume that $r = 1$.

We proceed by induction on the intersection index $n := \tilde{f}^*(0) \cdot \tilde{g}_1^*(0)$. If $n = 0$ then the statement follows from 4.13. Suppose that $n \geq 1$.

Let $x_0 \in q^{-1}(0)$ be a coordinate of an intersection point $(x_0, y_0) \in \tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{g}_1^{-1}(0)$. Up to a translation we may suppose that $x_0 = 0$. As

$$\min\{\deg_y \tilde{g}_1(0,y), \deg_y \tilde{f}(0,y)\} > 0$$

we may write

$$\tilde{g}_1(0,y)z + \tilde{f}(0,y)u = d(y)(a(y)z + b(y)u)\,,$$

where $\gcd(a,b)=1$. Hence there is a linear automorphism $\gamma \in \mathrm{Aut}_B B[z,u]$ (with $B := \mathbb{C}[x,y]$) such that $\gamma(a(y)z+b(y)u)=z$. It is not difficult to verify that applying γ amounts to:

$$\mathrm{Jac}(\gamma)\begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \tilde{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{g}_1 \\ x\hat{f} \end{bmatrix}$$

for certain $\hat{f}, \hat{g} \in B$ (where $\mathrm{Jac}(\gamma)$ is the Jacobi matrix of γ), and hence

$$\gamma(p) = \gamma(fu+g) = q(x)[x\hat{f}(x,y)u + \tilde{g}_0(x,y)y^2 + \hat{g}_1(x,y)z] + a_0(x) + a_1(x)y\,.$$

In view of the equality of ideals:

$$(\hat{g}_1, x\hat{f}) = (\tilde{g}_1, \tilde{f})\,,$$

for the intersection indices we have:

$$\hat{g}_1^*(0)\cdot(x\hat{f})^*(0) = \tilde{g}_1^*(0)\cdot\tilde{f}^*(0) = n\,,$$

therefore

$$\hat{g}_1^*(0)\cdot\hat{f}^*(0) \le n-1\,.$$

Now in virtue of 4.12,

$$\hat{p} := q(x)[\hat{f}(x,y)u + \tilde{g}_0(x,y)y^2 + \hat{g}_1(x,y)z] + a_0(x) + a_1(x)y$$

is a x-residual variable. Hence by the inductive hypothesis, it is also an x-variable. Again by 4.12, so are $\gamma(p)$ and $p = fu+g$ as well. The induction step is done, so the proof is completed. □

4.15 *Proof of Theorem 4.2.* By 3.21(v),(vi) we may suppose that $p = fu+g$ is a x-residual variable and $f_{\mathrm{non-horiz}} \in \mathbb{C}[x]$ (cf. 4.4). Thus we must show that actually, under each of the assumptions (a)-(d) p is an x-variable.

(a) (resp., (b)) immediately follows from 4.7 (resp., 4.14).

(c) We write the polynomial $p = fu+g$ in the form (34). The assumption $f_{\mathrm{vert}} = 1$ implies that $q^{-1}(0) = \emptyset$, and hence $\tilde{f}^{-1}(0)\cap\tilde{g}_1^{-1}(0) = \emptyset$. Now the conclusion follows from 4.13.

(d) As by our assumption, $f_{\mathrm{horiz}} = f_{\mathrm{horiz}}^{\mathrm{red}}$ we have $\tilde{f} = \tilde{f}^{\mathrm{red}}$. In view of 4.12 we may suppose that $r=1$ in (34), and so p can be written as follows:

$$p = fu+g = q[\tilde{f}u + \tilde{g}_0y^2 + \tilde{g}_1z + \tilde{f}\tilde{g}_2z^2] + a_0 + a_1y\,.$$

The $\mathbb{C}[x,y,z]$-automorphism $u \longmapsto u - z^2\tilde{g}_2(x,y,z)$ transforms p into a x-residual variable of degree at most 1 in z. Now the conclusion follows from (b).

(e) From the form of g one easily deduces that $f_{\text{horiz}} = f_{\text{horiz}}^{\text{red}} = 1$ which is a special case of (d) or even (a). $\square$

The following result extends our list of variables $p = fu + g$ beyond those provided in 4.2.

Proposition 4.16 *Let $p = fu + g \in \mathbb{C}^{[4]}$ as in (34) be a x-residual variable. If $\tilde{g}_1 \in \mathbb{C}[x]$ and $\tilde{g}_2 z^2 = \hat{g}_2(x, y, \tilde{g}_1(x)z) \in \mathbb{C}[x][y, \tilde{g}_1 z]$ then p is an x-variable.*

Proof. By 4.12 we may suppose that $r = 1$ in (34), and so $p = \bar{p}(x, y, \tilde{g}_1(x)z, u)$, where the polynomial

$$\bar{p} := q[\tilde{f}u + \tilde{g}_0 y^2 + z + \tilde{f}^{\text{red}}\hat{g}_2] + a_0 + a_1 y \tag{36}$$

still is a x-residual variable. Indeed by our assumption for any $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\tilde{g}_1^{-1}(0)$,

$$\bar{p}_\lambda = p_\lambda(y,\, z/\tilde{g}_1(\lambda),\, u) \in \operatorname{Var}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^{[3]}\,.$$

For $x_0 \in g_1^{-1}(0)$, either $q(x_0) = 0$ and then by the assumption, $\bar{p}_{x_0} = a_0(x_0) + a_1(x_0)y = p_{x_0} \in \operatorname{Var}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^{[3]}$, or $q(x_0) \neq 0$ and then again, in virtue of 1.29(a), $\bar{p}_{x_0} \in \operatorname{Var}_B B[z,u]$ with $B := \mathbb{C}[y]$. It follows from 4.13 that the polynomial $\bar{p}$ as in (36) is an x-variable. Hence by 1.31(a) (with z playing the role of u) so is $p = \bar{p}(x, y, \tilde{g}_1(x)z, u)$ as well. $\square$

Example 4.17 The polynomial

$$p := y + x(xz + y(yu + x^2z^2)) \in \mathbb{C}^{[4]}$$

is an x-variable. Indeed $p = \bar{p}(x, y, xz, u)$, where by 1.29(a), $\bar{p} := y + x(z + y(yu + z^2))$ is a residual x-variable (and hence by 4.13 is an x-variable). Therefore, p is a x-residual variable as well, and so 4.16 applies.

4.18 To conclude, we would like to rise the following question. It concerns a (probably simplest) example of a residual x-variable of $\mathbb{C}^{[4]}$ which does not fit any of the assumptions 4.2(a)-(d) or 4.16.

Question: *Is the polynomial $p = y + x(xz + y(yu + z^2)) \in \mathbb{C}^{[4]}$ a variable?*

4.2. Simple modifications of $\mathbb{C}^3$ rectifiable in $\mathbb{C}^5$

The following definitions are inspired by [Sat76].

4.19 Let B be a commutative ring. We say that $p \in B^{[n]}$ is a *B-hyperplane* if $B^{[n]}/(p) \cong B^{[n-1]}$. We say that p defines a *B-hyperplane fibration* if $p - \lambda$ is a B-hyperplane for every $\lambda \in B$.

If $B = \mathbb{C}$ or $B = \mathbb{C}[x]$ we simply say *hyperplane* resp., *x-hyperplane* instead of *B-hyperplane*.

Notice that an x-hyperplane $p(x, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}[x][y_1, \cdots, y_n]$ becomes a hyperplane $p_{x_0}(y_1, \cdots, y_n)$ for every fixed $x = x_0 \in \mathbb{C}$. A polynomial p with the latter property is called a *residual x-hyperplane*.

4.20 Observe [Sat76, KZ00, Vén99] that a polynomial $p = f(x, y)u + g(x, y, z) \in \mathbb{C}^{[4]}$ is a residual x-plane if and only if it is a x-residual variable, and henceforth, if and only if it defines a residual x-plane fibration.

4.21 We say that two polynomials $p,\ q \in B[y_1, \cdots, y_n]$ are *1-stably equivalent* if

$$\gamma((p, v)) = (q, v)$$

for an automorphism $\gamma \in \operatorname{Aut}_B B[y_1, \cdots, y_n, v]$.

4.22 For instance, with this terminology 1.32(b) says that $y + ap(y)$ with $a \in B,\ p \in B[y]$ is 1-stably equivalent to $y + p(ay)$, and moreover if $a^k | p(0)$ then $y + ap(y)$ is 1-stably equivalent to $y + p(a^{k+1}y)/a^k$.

Theorem 4.23 *Let $p = f(x, y)u + g(x, y, z) \in \mathbb{C}^{[4]}$ be a residual x-plane. Then it is 1-stably equivalent to an x-variable. Consequently, p defines an x-plane fibration, and each fiber $X_\lambda := \{p = \lambda\}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ of p is a 3-fold in $\mathbb{C}^4$ isomorphic to $\mathbb{C}^3$ which can be rectified in $\mathbb{C}^5$.*

Remark 4.24 *Notice that 4.23 provides yet another proof of the implication (iii)⇒(i) of 3.21 which does not need 1.7. Indeed, it proves (v)⇒(i) while (iii)⇒(v) is observed in 4.20 above.*

In the proof of 4.23 (see 4.26 below) we use the following lemma.

Lemma 4.25 *If $p \in \mathbb{C}[x,y,z,u] \setminus \mathbb{C}[x,y]$ is a residual x-plane then it is 1-stably equivalent (under an automorphism $\gamma \in \mathrm{Aut}_B B[y,v]$ with $B := \mathbb{C}[x,z,u]$) to a polynomial $\bar{p} \in \mathbb{C}[x][y,z,u]$ which is still a residual x-plane and such that for every $x_0 \in \mathbb{C}$, $\bar{p}_{x_0}(y,z,u) \notin \mathbb{C}^* y + \mathbb{C}$.*

Proof. As $p \notin \mathbb{C}[x,y]$, the subset

$$L(p) := \{x_0 \in \mathbb{C} \mid p_{x_0} \in \mathbb{C}^* y + \mathbb{C}\} =: \{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq \mathbb{C}$$

is finite. The proof proceeds by a descending induction on $n = \mathrm{card}\, L(p)$.

If $\mathrm{card}\, L(p) = 0$ there is nothing to prove. Suppose that $n > 0$, and let $x_n = 0$. Then there exists an affine automorphism $\tau \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[x]}\mathbb{C}[x][y] \subseteq \mathrm{Aut}_D D[y]$ (where $D := \mathbb{C}[x,z,u,v]$) such that $\tau(p) = y + x\hat{p}$, where $\hat{p} \in \mathbb{C}[x,y,z,u]$ and $\hat{p}(x,0,0,0) = 0$. Indeed, up to an affine automorphism of $\mathbb{C}[y]$ we may assume that $p(0,y,z,u) = y$ i.e., $p = y + x\tilde{p}$ with $\tilde{p} \in \mathbb{C}^{[4]}$, and then we apply the shift $y \longmapsto y - x\tilde{p}(x,0,0,0)$ to obtain $\tau(p) = y + x\hat{p}$ with $\hat{p} := \tilde{p} - \tilde{p}(x,0,0,0)$.

The polynomial $\hat{p} \in \mathbb{C}^{[4]}$ admits a presentation:

$$\hat{p} = yq_1(x,y,z,u) + x^k(xq_2(x,z,u) + q_3(z,u)).$$

As by our assumption for every fixed $x = x_0 \in \mathbb{C}$ the polynomial $\tau_{x_0}(p) = y + x_0\hat{p}$ ($\notin \mathbb{C}[y]$) is irreducible, we have $xq_2 + q_3 \neq 0$, and thereby $q_3 \neq 0$. Furthermore,

$$0 = \hat{p}(x,0,0,0) = x^k(xq_2(x,0,0) + q_3(0,0)) = q_3(0,0),$$

whence $q_3 \notin \mathbb{C}$. Now by 1.32(b) (cf. 4.22 above) there exists an automorphism $\alpha \in \mathrm{Aut}_B B[y,v]$ (with $B = \mathbb{C}[x,z,u]$) such that

$$\alpha((y + x\hat{p}, v)) = (y + \frac{\hat{p}(x, x^{k+1}y, z, u)}{x^k}, v).$$

Letting $\gamma_n := \alpha\tau$ we obtain:

$$\gamma_n((p,v)) = (p_n, v),$$

where $p_n := y + \hat{p}(x, x^{k+1}y, z, u)/x^k$. We have:

$$\begin{aligned} p_n &= y + \frac{x^{k+1}yq_1(x, x^{k+1}y, z, u) + x^k(xq_2(x,z,u) + q_3(z,u))}{x^k} \\ &= y + xyq_1(x, x^{k+1}y, z, u) + xq_2(x,z,u) + q_3(z,u). \end{aligned}$$

Hence $p_n(0, y, z, u) = y + q_3(z, u) \in \mathrm{Var}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y, z, u]$ with $q_3 \notin \mathbb{C}$, and so $p_n(0, y, z, u) \notin \mathbb{C}^* y + \mathbb{C}$. In other words,

$$0 = x_n \notin L(p_n) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (p_n)_\lambda \in \mathbb{C}^* y + \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}\,.$$

Now the induction step and the proof of the lemma are completed by the following

Claim. (a) $\quad L(p_n) = \{x_1, \cdots, x_{n-1}\} = L(p)\backslash\{x_n\}\,.$

(b) Furthermore for any $x_0 \neq 0$, $(p_n)_{x_0} \in \mathbb{C}[y, z, u]$ is a plane.

Proof of the claim. [15] It is enough to show that for every $x_0 \neq 0$ there exists an affine automorphism $\beta_{x_0} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y] \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[z,u]}\mathbb{C}[z, u][y]$ such that

$$\beta_{x_0}(p_{x_0}) = x_0^{k+1}(p_n)_{x_0}\,. \tag{37}$$

Indeed, we have:

$$x_0^{k+1}(p_n)_{x_0} = x_0^{k+1}y + x_0\hat{p}_{x_0}(x_0^{k+1}y, z, u)\,. \tag{38}$$

Consider the linear automorphism $\sigma_{x_0} : y \longmapsto x_0^{k+1}y$ extended to $\mathbb{C}[z, u][y]$ in a natural way. From (38) we get:

$$x_0^{k+1}(p_n)_{x_0} = \sigma_{x_0}(y + x_0\hat{p}_{x_0}(y, z, u)) = \sigma_{x_0}((\tau(p))_{x_0}) = \sigma_{x_0}((\tau_{x_0}(p_{x_0}))\,,$$

where τ_{x_0} denotes the specialization of τ at x_0. Thus we obtain (37) with $\beta_{x_0} := \sigma_{x_0}\tau_{x_0} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y]$ extended to $\mathbb{C}[z, u][y]$. Hence $p_{x_0} \in \mathbb{C}^* y + \mathbb{C}$ if and only if so is $(p_n)_{x_0}$. □

4.26 *Proof of Theorem 4.23.* If $f = 0$ then in virtue of 4.6(c) and the Abhyankar-Moh-Suzuki Theorem, p itself is an x-variable.

If $f \neq 0$ then by 4.25, $p = fu + g$ is 1-stably equivalent to a polynomial $\bar{p} \in \mathbb{C}^{[4]}$ such that

$$L(\bar{p}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \bar{p}_\lambda \in \mathbb{C}^* y + \mathbb{C}\} = \emptyset\,. \tag{39}$$

It is easily seen that the polynomial $\bar{p}$ as constructed in the proof of 4.25 still has the form $\bar{p} = \bar{f}u + \bar{g}$ with $\bar{f} \in \mathbb{C}[x, y]$ and $\bar{g} \in \mathbb{C}[x, y, z]$. It follows

[15] Alternatively, (b) also follows from existence of a $\mathbb{C}[x]$-isomorphism $\mathbb{C}[x]^{[3]}/(p) \cong \mathbb{C}[x]^{[3]}/(\bar{p})$, see 1.33(b).

from (39) that $\bar{f}_{\rm vert} = 1$. As $\bar{p}$ is also a residual x-plane, by 4.2(c) it is an x-variable. Consequently,

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x][y,z,u]/(p) &\cong \mathbb{C}[x][y,z,u,v]/(p,v) \cong \mathbb{C}[x][y,z,u,v]/(\bar{p},v)\\ &\cong \mathbb{C}[x][y,z,u,v]/(u,v) \cong \mathbb{C}[x]^{[2]}\,.\end{aligned}$$

Hence p is an x-plane. In view of 4.20 the same arguments work for every 'fiber' $p-\lambda$ of $p = fu + g$ (with $\lambda \in \mathbb{C}[x]$). Therefore $p = fu + g$ defines an x-plane fibration. $\square$

4.3. On Sathaye-Wright's Theorem

The Sathaye Theorem on linear planes [Sat76] cited in the introduction was generalized by D. Wright [Wri78] for the embeddings $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ of the form $p = f(x,y)u^n + g(x,y) = 0$, and further generalized in [KZ99] for the acyclic surfaces in $\mathbb{C}^3$ of this type. Here we prove the following theorem (based on the latter result).

Theorem 4.27 *If $p = f(x,y,z)u^n + g(x,y,z) \in \mathbb{C}^{[4]}$ (with $n \geq 2$) is a x-residual variable then it is an x-variable.*

Proof. By [KZ99, Thm. 7.2], the polynomials f and g satisfy the following condition:

$$\forall\lambda \in \mathbb{C} \quad \exists\alpha_\lambda \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y,z] \quad \text{and} \quad \exists\varphi_\lambda \in \mathbb{C}[y] \qquad \text{such that} \tag{40}$$

$$f_\lambda = \alpha_\lambda(\varphi_\lambda) \quad \text{and} \quad g_\lambda = \alpha_\lambda(z)\,.$$

Hence by 4.6(c), g is an x-variable of $\mathbb{C}[x,y,z]$, and so we may suppose that $g = z$ and $\alpha_\lambda \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[z]}\mathbb{C}[z][y]$. Then (40) yields:

$$\forall\lambda \in \mathbb{C} \quad \exists q_\lambda \in \mathbb{C}[z] \quad \text{and} \quad \exists\varphi_\lambda \in \mathbb{C}[y] \qquad \text{such that} \tag{41}$$

$$f_\lambda = \alpha_\lambda(\varphi_\lambda) = \varphi_\lambda(\alpha_\lambda(y)) = \varphi_\lambda(y + q_\lambda)\,.$$

Eventually, we prove below (by induction on $\deg_y f$) that for any polynomial $f \in \mathbb{C}^{[3]}$ which satisfies (41), we have:

$$f = \Phi(x, a(x)y + zQ(x,z)) \tag{42}$$

with $a \in \mathbb{C}[x]$, $Q \in \mathbb{C}[x,z]$ and $\Phi \in \mathbb{C}[x,y]$. Therefore $p = P(x, a(x)y, z, u)$ is a x-residual variable with $P := \Phi(x,y')u + z \in \mathrm{Var}_{\mathbb{C}[x]}\mathbb{C}[x]^{[3]}$ (where $y' := y + zQ(x,z)$). Thus by 1.31(a), p is an x-variable, as stated.

If $\deg_y f \leq 0$ then (41) implies that $f(x,y,z) = f(x,0,0) \in \mathbb{C}[x]$ and (42) follows. Assume further that $\deg_y f \geq 1$. By (41) we have:

$$\partial_y f_\lambda(y,z) = (\varphi_\lambda)'(y + q_\lambda(z)) .$$

It follows that the polynomial $\partial_y f$ with $\deg_y \partial_y f = \deg_y f - 1$ also satisfies (41), whence by the inductive hypothesis,

$$\partial_y f = \tilde{\Phi}(x, \tilde{a}(x)y + z\tilde{Q}(x,z))$$

with $\tilde{a} \in \mathbb{C}[x]$, $\tilde{Q} \in \mathbb{C}[x,z]$ and $\tilde{\Phi} \in \mathbb{C}[x,y]$. Thereby,

$$\tilde{a}f = \Psi(x, \tilde{a}(x)y + z\tilde{Q}(x,z)) + zR(x,z) \qquad \text{with} \quad \Psi \in \mathbb{C}[x,y] \quad \text{and} \quad R \in \mathbb{C}[x,z] ,$$

where $\partial_y \Psi = \tilde{\Phi}$. If $\deg_y f = 1 = \deg_y \Psi$ then

$$\tilde{a}f = \Psi_0(x) + \Psi_1(x)[\tilde{a}(x)y + z\tilde{Q}(x,z)] + zR(x,z) ,$$

and so $\tilde{a}$ divides $\Psi_0(x) + \Psi_1(x)z\tilde{Q}(x,z) + zR(x,z)$ i.e.,

$$\Psi_0(x) + \Psi_1(x)z\tilde{Q}(x,z) + zR(x,z) = \tilde{a}(zQ(x,z) + \Phi_0) .$$

It follows that

$$f = \Psi_1(x)y + zQ(x,z) + \Phi_0$$

has the desired form (42).

Thus we may assume that $\deg_y f \geq 2$. By (41) for every $\lambda \in \mathbb{C}$ we obtain:

$$\tilde{a}(\lambda)f_\lambda = \Psi(\lambda, \tilde{a}(\lambda)y + z\tilde{Q}(\lambda,z)) + zR(\lambda,z) = \tilde{a}(\lambda)\varphi_\lambda(y + q_\lambda(z)) , \qquad (43)$$

and so

$$\Psi(\lambda, \tilde{a}(\lambda)y - \tilde{a}(\lambda)q_\lambda(z) + z\tilde{Q}(\lambda,z)) + zR(\lambda,z) = \tilde{a}(\lambda)\varphi_\lambda(y) .$$

As $\deg_y \Psi = \deg_y f \geq 2$ it follows that for every $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\deg_y \Psi(\lambda, y) \geq 0$ we have $\deg_z(z\tilde{Q}(\lambda,z) - \tilde{a}(\lambda)q_\lambda(z)) \leq 0$, and so $\deg_z zR(\lambda,z) \leq 0$ as well i.e., $R(\lambda,z) = 0$ for almost every $\lambda \in \mathbb{C}$. Hence $R = 0$, and from (43)

we obtain:

$$\tilde{a}f = \Psi(x, \tilde{a}(x)y + z\tilde{Q}(x,z)) . \qquad (44)$$

If $\tilde{Q} = 0$ then $f = \Psi(x, \tilde{a}(x)y)/\tilde{a} \in \mathbb{C}[x,y]$, as desired. If $\tilde{Q} \neq 0$ then (up to factorizing $\tilde{a}(x)y + z\tilde{Q}(x,z)$ and changing appropriately $\Psi(x,y)$) we may assume that $\gcd(\tilde{a}, \tilde{Q}(x,z)) = 1$. Putting in (44) $y = 0$ gives:

$$\tilde{a}(x)f(x,0,z) = \Psi(x, z\tilde{Q}(x,z)) .$$

From this equality and the assumption that $\gcd(\tilde{a}, \tilde{Q}(x,z)) = 1$ it is not difficult to deduce that $\tilde{a}$ divides Ψ in $\mathbb{C}[x,y]$. Thus from (44) with $\Phi := \Psi/\tilde{a}$ we get

$$f = \Phi(x, \tilde{a}(x)y + z\tilde{Q}(x,z)),$$

as needed. $\square$

References

[AM75] Shreeram S. Abhyankar and Tzuong Tsieng Moh. Embeddings of the line in the plane. *J. Reine Angew. Math.*, 276:148–166, 1975.

[Beg45] Edward G. Begle. Duality theorems for generalized manifolds. *Amer. J. Math.*, 67:59–70, 1945.

[CD94] A. D. R. Choudary and A. Dimca. Complex hypersurfaces diffeomorphic to affine spaces. *Kodai Math. J.*, 17(2):171–178, 1994.

[Der97] Harm Derksen. *Constructive Invariant Theory and the Linearization Problem.* PhD thesis, Basel, 1997.

[Dol72] A. Dold. *Lectures on algebraic topology.* Springer-Verlag, New York, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 200.

[EV99] Eric Edo and Stéphane Vénéreau. Length 2 variables of $A[x,y]$ and transfer. In *Proc. of the conf. Polynomial automorphisms and related topics*, pages 67–76, Cracovia, July 1999. Ann. Polinici Math.

[FF89] A. T. Fomenko and D. B. Fuks. *Kurs gomotopicheskoi topologii.* "Nauka", Moscow, 1989. With an English summary.

[Fuj82] Takao Fujita. On the topology of noncomplete algebraic surfaces. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 29(3):503–566, 1982.

[Giz70] M. H. Gizatullin. On affine surfaces that can be completed by a nonsingular rational curve. *Math. USSR, Izv.*, 4:787–810, 1970.

[Kal94] Shulim Kaliman. Exotic analytic structures and Eisenman intrinsic measures. *Israel J. Math.*, 88(1-3):411–423, 1994.

[KML97] Shulim Kaliman and Leonid Makar-Limanov. On the Russell-Koras contractible threefolds. *J. Algebraic Geom.*, 6(2):247–268, 1997.

[KML98] Shulim Kaliman and Leonid Makar-Limanov. Locally nilpotent derivations of jacobian type. preprint 16p, 1998.

[KVZ01a] Shulim Kaliman, Stéphane Vénéreau, and Mikhail Zaidenberg. Extensions birationnelles simples de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}^3$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(4):319–322, 2001.

[KVZ01b] Shulim Kaliman, Stéphane Vénéreau, and Mikhail Zaidenberg. Simple birational extensions of the polynomial ring $\mathbb{C}^{[3]}$. preprint, Institut Fourier, **532**; E-print math.AG/0104204, 49p., 2001.

[KZ99] Sh. Kaliman and M. Zaidenberg. Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group. *Transform. Groups*, 4(1):53–95, 1999.

[KZ00] Sh. Kaliman and M. Zaidenberg. Families of affine planes: the existence of a cylinder. *Michigan Math. J. (to appear)*; Preprint of the Max Planck Institut für Mathematik, Bonn, MPI-0075; E-print math.AG/0007119, 12p., 2000.

[LZ89] V.Ya. Lin and M.G. Zaidenberg. Finiteness theorems for holomorphic mappings. In *Several Complex Variables III.*, volume 9, pages 113–172. Berlin Heidelberg New York e.a.: Springer Verlag, encyclopedia of math. sci. edition, 1989.

[Mas80] William S. Massey. *Singular homology theory.* Springer-Verlag, New York, 1980.

[Mau70] *Algebraic topology.* Van Nostrand Reinhold Company Ltd., London, 1970.

[Miy84] Masayoshi Miyanishi. An algebro-topological characterization of the affine space of dimension three. *Amer. J. Math.*, 106(6):1469–1485, 1984.

[Miy88] Masayoshi Miyanishi. Algebraic characterizations of the affine 3-space. In *Algebraic Geometry Seminar (Singapore, 1987)*, pages 53–67. World Sci. Publishing, Singapore, 1988.

[Miy01] Masayoshi Miyanishi. *Open algebraic surfaces.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[ML] L. Makar-Limanov. Locally nilpotent derivations of affine domains. In *Affine Algebraic Geometry 14.05-20.05.2000, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagungsbericht*. 11p., 2000.

[ML96] L. Makar-Limanov. On the hypersurface $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ in $\mathbb{C}^4$ or a $\mathbb{C}^3$-like threefold which is not $\mathbb{C}^3$. *Israel J. Math.*, 96(, part B):419–429, 1996.

[ML98] L. Makar-Limanov. Again $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$. preprint, 1998.

[Ren68] Rudolf Rentschler. Opérations du groupe additif sur le plan affine. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 267:A384–A387, 1968.

[RS79] Peter Russell and Avinash Sathaye. On finding and cancelling variables in $k[X, Y, Z]$. *J. Algebra*, 57(1):151–166, 1979.

[Rus76] Peter Russell. Simple birational extensions of two dimensional affine rational domains. *Compositio Math.*, 33(2):197–208, 1976.

[Sat76] Avinash Sathaye. On linear planes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 56:1–7, 1976.

[Sat83] A. Sathaye. Polynomial ring in two variables over a DVR: a criterion. *Invent. Math.*, 74(1):159–168, 1983.

[SY99] Vladimir Shpilrain and Jie-Tai Yu. Embeddings of curves in the plane. *J. Algebra*, 217(2):668–678, 1999.

[SY01] Vladimir Shpilrain and Jie-Tai Yu. Embeddings of hypersurfaces in affine spaces. *J. Algebra*, 239(1):161–173, 2001.

[VD74] B. Ju. Veĭsfeĭler and I. V. Dolgačev. Unipotent group schemes over integral rings. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38:757–799, 1974.

[VF88] O. Ya. Viro and D. B. Fuks. Homology and cohomology. In *Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 24 (Russian)*, pages 123–240, 247. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1988.

[Vén99] Stéphane Vénéreau. Quelques automorphismes et variables de $A[x, y]$. preprint, Institut Fourier, **460**, 10p., 1999.

[Wil79] Raymond Louis Wilder. *Topology of manifolds*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979. Reprint of 1963 edition.

[Wri78] David Wright. Cancellation of variables of the form $bT^n - a$. *J. Algebra*, 52(1):94–100, 1978.

[Zaĭ87] M. G. Zaĭdenberg. Isotrivial families of curves on affine surfaces, and the characterization of the affine plane. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 51(3):534–567, 688, 1987.

[Zaĭ99] M. Zaĭdenberg. Exotic algebraic structures on affine spaces. *Algebra i Analiz*, 11(5):3–73, 1999.

Shulim Kaliman
Department of Mathematics,
University of Miami,
Coral Gables, FL 33124, U.S.A.
E-mail: kaliman@math.miami.edu

Stéphane Vénéreau
Université Grenoble I,
Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-UJF,
BP 74, 38402 St. Martin d'Hères cedex, France
E-mail: venereau@ujf-grenoble.fr

Mikhail Zaidenberg
Université Grenoble I,
Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-UJF,
BP 74, 38402 St. Martin d'Hères cedex, France
E-mail: zaidenbe@ujf-grenoble.fr