Remerciements

Pour commencer, je tiens à remercier José Bertin pour m'avoir suivie et encouragée depuis la maîtrise, puis pour avoir accepté il y a quatre ans d'encadrer ma thèse. Je le remercie pour tout le temps passé à me raconter des mathématiques et pour m'avoir guidée dans ma recherche, en respectant mon rythme parfois un peu particulier.

Christoph Sorger et Dimitri Markushevich ont accepté de jouer le rôle de rapporteurs sur ma thèse. Je les remercie sincèrement d'avoir effectué ce travail, et je suis également très honorée de les avoir comptés dans mon jury de thèse.

La présence de Gérard Gonzalez-Sprinberg a été à plusieurs reprises importante pour moi. En tant qu'expert du domaine, il m'a éclairée et aidée à replacer mon travail dans un contexte global. Je le remercie de l'intérêt qu'il porte à mon travail, et de tous ses encouragements. Merci également d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Dans l'équipe d'algèbre et géométrie de l'Institut Fourier, Michel Brion et Laurent Manivel sont de tous les séminaires et groupes de travail. Leur dynamisme ne les empêche pas de laisser prendre leur place aux débutants, et je leur en suis très reconnaissante. Je les remercie aussi d'avoir participé à mon jury de thèse, et particulièrement Michel Brion pour sa lecture attentive et ses remarques constructives.

Plus généralement, la communauté mathématique suit une politique d'intégration des doctorants dont j'ai largement profité. En effet, j'ai bénéficié à plusieurs reprises de financements me permettant de participer à des rencontres mathématiques, groupes de travail et écoles d'été. Merci donc à l'Institut Fourier, mais également au CIRM, au réseau EAGER, et à l'ICTP de m'avoir permis de connaître cet aspect international de la vie du chercheur durant ma thèse.

À plusieurs reprises durant ces déplacements, j'ai rencontré Miles Reid, qui s'est montré très encourageant. Je le remercie pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je remercie également Tom Bridgeland et Alexei Bondal pour leur disponibilité et leur gentillesse face aux questions les plus naïves.

La vie du labo serait bien triste sans les pauses café, le RU Condillac et les discussions mathématiques (ou non) entre thésards. Je remercie donc tous les thésards de l'Institut Fourier rencontrés durant ces quatre années, et plus particulièrement Frank et Guillaume avec qui j'ai partagé mon bureau ; et Matthieu Romagny et Pierre-Emmanuel Chaput pour leur soutien mathématique et leur dynamisme communicatif.

Je souhaite également remercier les membres de l'équipe administrative pour leur grande efficacité, et leur bonne humeur à la pause traditionnelle de 10h15. Une mention spéciale à Arlette pour sa gentillesse et sa délicatesse avec les thésards stressés...

Avant la thèse et depuis l'enfance, j'ai rencontré beaucoup d'enseignants de mathématiques. Pour leurs encouragements, pour le modèle qu'ils ont représenté, ou la passion qu'ils ont su déclencher chez moi, je vois ici une occasion de les remercier. Voici une liste non exhaustive de ceux à qui je pense et que j'espère ne jamais trahir dans mon métier d'enseignante : Madame Albert, Roland Bacher, Alain Dufresnoy, Jean-Claude Éon, Christine Laurent-Thiébaut, Cristián Mallol, Alain Prouté, Alvaro Rittatore, Éric Térouanne, Richard Varro, Gérard Vinel.

J'ai aussi une pensée pour ceux et celles avec qui j'ai étudié. En particulier Claire, Emilie et les "copines de licence" avec qui j'ai partagé un bout de la route.

Un mot enfin pour tous ceux qui ont été là pour me changer les idées, et m'apporter l'équilibre indispensable au travail de recherche. Merci à Benoit, Lucie, mes parents, ma famille, les chanteurs, les copains de 3I, de Trixell, de Montpellier, et tous les autres. Je souhaite remercier plus particulièrement Benoit qui a supporté mes doutes et mes angoisses quotidiennement. Son calme et ses encouragements ont été le plus précieux des soutiens durant ces années de thèse.

Table des matières

Remerciements i

Table des matières iii

Introduction vii

1 Le G-schéma de Hilbert 1
- 1.1 Définitions. . . . 1
- 1.2 Action de G sur $\mathrm{Hilb}_X^{P(n)}$. . . . 3
  - 1.2.1 Action sur un foncteur de points. . . . 3
  - 1.2.2 Action de G sur le foncteur $\mathcal{H}ilb_X^P$ 4
  - 1.2.3 Schéma des points fixes de Hilb_X^P 5
- 1.3 Démonstration du théorème d'existence 6
  - 1.3.1 Définition de $G-\mathrm{Hilb}_X^{P_G}$ 6
  - 1.3.2 Démonstration du lemme 1.3.1 7
- 1.4 Le G-schéma de Hilbert 10
- 1.5 Construction du morphisme de Hilbert-Chow 12
  - 1.5.1 Linéarisation du déterminant 12
  - 1.5.2 Application géométrique 14
  - 1.5.3 Le morphisme de Hilbert-Chow G-équivariant 17
- 1.6 Cas des groupes engendré par des réflexions 17
  - 1.6.1 Notations 17
  - 1.6.2 Quelques résultats préliminaires 18
  - 1.6.3 Le W-schéma de Hilbert de $\mathbb{A}^n$ 18
  - 1.6.4 Application au cas global lorsque le quotient est lisse 19

2 Singularités affines en dimension trois 21
- 2.1 La méthode de résolution de Jung 22
  - 2.1.1 Revêtement double 22
  - 2.1.2 La méthode de Jung 24
- 2.2 Résolution par la méthode de Jung 26
  - 2.2.1 Notations 26
  - 2.2.2 Le système de racines $A_1 \times A_1 \times A_1$ 27
  - 2.2.3 Le système de racines $A_1 \times A_2$ 29

2.2.4 Le système de racines $A_1 \times B_2$ . . . 30
2.2.5 Le système de racines $A_1 \times G_2$ . . . 33
2.2.6 Le système de racines A_3 . . . 36
2.2.7 Le système de racines B_3 . . . 40
2.3 Résolution par le W_+-schéma de Hilbert . . . 43
2.3.1 Méthode de décomposition de l'algèbre coinvariante . . . 44
2.3.2 Le système de racines $A_1 \times A_1 \times A_1$ . . . 45
2.3.3 Le système de racines $A_1 \times A_2$ . . . 46
2.3.4 Le système de racines $A_1 \times B_2$ . . . 48
2.3.5 Le système de racines $A_1 \times G_2$ . . . 50
2.3.6 Le système de racines A_3 . . . 53
2.3.7 Le système de racines B_3 . . . 56
2.4 Correspondance de McKay . . . 62

3 Singularités non abéliennes en dimension trois 65
3.1 Le théorème de Looijenga . . . 66
3.1.1 Cas du système de racines A_3 . . . 66
3.1.2 Cas du système de racines B_3 . . . 67
3.1.3 Cas du système de racines C_3 . . . 67
3.2 Méthode de Jung . . . 68
3.2.1 Cas du système de racines A_3 . . . 68
3.2.2 Cas du système de racines C_3 . . . 69
3.2.3 Cas du système de racines B_3 . . . 69
3.3 Résolution par le schéma de Hilbert . . . 74

4 Espaces modulaires de fibrés vectoriels 77
4.1 Définitions . . . 78
4.1.1 $\mathrm{Hilb}^N(A, X)$ . . . 78
4.1.2 La construction spectrale . . . 79
4.2 Fibrés vectoriels sur une courbe elliptique . . . 81
4.2.1 Le théorème d'Atiyah . . . 81
4.2.2 Étude du fibré $V_{Z,g}$ associé à un point de $\mathrm{Hilb}^N(A, E)$ . . . 81
4.2.3 Exemples . . . 84
4.3 Le revêtement spectral dans le cas A_n . . . 85
4.3.1 Fibré associé à l'unique $\mathfrak{S}_{n+1}$-grappe de A supportée en 0 . . . 86
4.3.2 Fibré associé à une $\mathfrak{A}_{n+1}$-grappe de A supportée en 0 . . . 87
4.3.3 Cas de la dimension 3 . . . 87
4.4 Le revêtement spectral dans le cas B_n . . . 88
4.4.1 Fibré associé à la $W(B_n)$-grappe de A supportée en 0 . . . 89
4.4.2 Fibré associé à une W_+-grappe de A . . . 89
4.4.3 Cas de la dimension 3 . . . 89

5 La catégorie dérivée G-équivariante $\mathcal{D}^G(X)$ 91
5.1 La catégorie dérivée bornée G-équivariante . . . 92
5.1.1 Une équivalence de catégories . . . 92
5.1.2 Cas d'une action libre . . . 95
5.1.3 Cas de l'action triviale . . . 96
5.2 Théorème de Beĭlinson G-équivariant . . . 98
5.2.1 Théorème de structure des $(A$-$G)$-modules libres gradués de type fini sur une $\mathbb{C}$-algèbre graduée A de type fini . . . 99
5.2.2 Démonstration du théorème 5.2.1 . . . 100
5.2.3 Version Bernstein-Gel'fand-Gel'fand . . . 104
5.3 Critère de descente . . . 105
5.3.1 Descente d'un G-faisceau localement libre . . . 105
5.3.2 Critère de descente . . . 109

A Autour des groupes de Weyl 113
A.1 $A_1 \times A_1 \times A_1$ . . . 113
A.2 $A_1 \times A_2$ . . . 114
A.3 $A_1 \times B_2$ . . . 115
A.4 $A_1 \times G_2$ . . . 117
A.5 A_3 . . . 119
A.6 B_3 . . . 120
A.6.1 Identification de $W_+(B_3)$ et $\mathfrak{S}_4$. . . . 120
A.6.2 Représentations irréductibles de $W_+ = \mathfrak{S}_4$. . . . 121
A.6.3 Diagramme de McKay . . . 122
A.7 C_3 . . . 122

B Le cas de la dimension deux 123
B.1 Terminologie . . . 123
B.2 Résolution par la méthode de Jung . . . 123
B.3 Résolution par le schéma de Hilbert . . . 125

C Sur les singularités 127
C.1 Définitions . . . 127
C.1.1 Singularités . . . 127
C.1.2 Résolutions . . . 128
C.2 Résolutions en dimension deux et trois . . . 129

Bibliographie 131

Introduction

À la fin des années 1970, John McKay observe qu'il existe un lien combinatoire entre la théorie des représentations des sous-groupes finis G de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et les singularités canoniques de surface de la géométrie algébrique.

Soit G un sous-groupe fini non trivial de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Ce groupe appartient à l'une des familles dénombrables des groupes cycliques ou diédraux binaires, ou est l'un des trois sous-groupes exceptionnels préservant un solide platonicien. Il agit naturellement sur $V = \mathbb{C}^2$ admettant pour seul point fixe l'origine, et en dehors de ce point, son action est libre. Le quotient $\mathbb{C}^2/G$ est une variété algébrique admettant une singularité isolée, qui est un point double rationnel. Toutes les singularités de surface de type point double rationnel sont ainsi obtenues, et l'on les nomme selon le point de vue : singularités de points doubles rationnels, *A-D-E*, canoniques, de Du Val, de Klein, ou de Dynkin. D'après des résultats généraux sur la résolution des singularités de surfaces, il existe une unique (à isomorphisme près) résolution minimale, c'est à dire un morphisme de schémas $Y \xrightarrow{q} \mathbb{C}^2/G$ tel que Y est lisse, q est un isomorphisme en dehors de l'origine et tout autre $Y' \xrightarrow{q'} \mathbb{C}^2/G$ ayant ces propriétés se factorise par Y (voir annexe C). Notons E la fibre de q au-dessus du point singulier. C'est le lieu exceptionnel de la résolution. La singularité $\mathbb{C}^2/G$ est rationnelle, de sorte que la résolution minimale est bonne : les composantes irréductibles de E sont lisses et transverses. On peut lui associer un graphe en prenant pour ensemble des sommets $\mathrm{Irr}(E)$ l'ensemble des composantes irréductibles de E, une arête entre deux sommets représentant l'intersection des composantes irréductibles correspondantes.

Par ailleurs, soit $\mathrm{Irr}^*(G)$ l'ensemble des représentations irréductibles non triviales de G. On peut définir un graphe dont les sommets sont indexés par $\mathrm{Irr}^*(G)$ et le nombre d'arêtes entre V_i et V_j est égal à la multiplicité de V_i dans $\mathbb{C}^2 \otimes V_j$. On démontre que cette définition est symétrique en V_i et V_j et on appelle ce graphe le diagramme de McKay du groupe G.

Le résultat de McKay ([McK81]) est qu'il existe une bijection entre ce diagramme et le graphe associé au diviseur exceptionnel de la résolution minimale du quotient $\mathbb{C}^2/G$. Cette bijection est définie à automorphisme de diagrammes près. De plus, le graphe obtenu est celui d'un système de racines *A-D-E* et la forme intersection sur l'ensemble $\mathrm{Irr}(E)$ a pour matrice la matrice de Cartan du système de racines complété.

C'est Gérard Gonzalez-Sprinberg et Jean-Louis Verdier qui donnent à ce joli lien combinatoire le nom de correspondance de McKay ([GSV83]). Ils en donnent une construction

géométrique en termes de K-théorie de la résolution minimale : à toute représentation $\rho \in \mathrm{Irr}^*(G)$, ils associent un fibré vectoriel F_ρ sur la résolution minimale Y, de sorte que la première classe de Chern $c_1(F_\rho)$ est un élément de la base de $\mathrm{Pic}(Y)$ en bijection avec les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel. Au passage, ils construisent un isomorphisme de groupes entre la K-théorie de la résolution et la K-théorie G-équivariante de $\mathbb{C}^2$. Cette construction mène à une reformulation des conjectures géométriques liées à la correspondance de McKay que Miles Reid exprime telle un slogan comme suit ([Rei02]).

Soit X une variété algébrique, G un groupe d'automorphismes de X et X/G le quotient de X par G. Soit Y une résolution des singularités de X/G. Alors la réponse à toute question bien posée au sujet de la géométrie de Y se lit dans la géométrie G-équivariante de X.

Ainsi, la généralisation naturelle de la correspondance de McKay est de remplacer $\mathbb{C}^2$ par une variété X quasiprojective complexe lisse et G par un groupe d'automorphismes de X. L'unicité de la résolution minimale est particulière à la dimension deux. En dimension supérieure, on s'intéresse à l'existence de résolutions crépantes (voir l'annexe C). En dimension trois, les singularités quotients de Gorenstein admettent une résolution crépante, mais celle-ci n'est pas forcément unique. En dimension supérieure à quatre, il n'existe pas toujours de résolution crépante (on trouve un exemple en dimension quatre dans [BS95]).

Au milieu des années 1990, le schéma de Hilbert G-équivariant G-Hilb(X) s'impose comme étant le candidat naturel pour résoudre les singularités du quotient X/G. Ce schéma paramètre les G-grappes de X, c'est à dire les sous-schémas Z de dimension zéro de X qui sont G-invariants et dont l'espace des sections globales $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ est isomorphe à la représentation régulière $\mathbb{C}[G]$ de G (définition 1.4.1). Il existe un morphisme birationnel entre G-Hilb(X) et X/G, dit morphisme de Hilbert-Chow, qui est une résolution des singularités dans le cas où le schéma de Hilbert G-équivariant est lisse.

Lorsque X est de dimension 2, le G-schéma de Hilbert de points est lisse ([Fog68]). Ito et Nakamura démontrent qu'il s'agit de la résolution minimale du quotient $\mathbb{C}^2/G$ et identifient la bijection entre l'ensemble $\mathrm{Irr}(E)$ des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel et celui $\mathrm{Irr}^*(G)$ des représentations irréductibles non triviales de G ([IN96, IN99]). Une des directions de recherche dans la correspondance de McKay est alors devenue la généralisation de ce résultat en dimension supérieure.

En dimension 3, Nakamura, Ito et Nakajima démontrent que le G-schéma de Hilbert est lisse et identifient la correspondance de McKay dans les termes de Gonzalez-Sprinberg et Verdier dans le cas où G est un groupe abélien ([Nak01, IN00]).

Finalement, c'est par une méthode homologique que Bridgeland, King et Reid démontrent en 1999 que dans le cas de la dimension 3, le schéma G-Hilb(X) est lisse, et qu'il s'agit d'une résolution crépante du quotient. De plus, ils démontrent l'équivalence de catégories dérivées suivante ([BKR01]).

$$\mathcal{D}(G\text{-Hilb}(X)) \cong \mathcal{D}^G(X).$$

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la correspondance de McKay en dimension trois. On y étudie une famille d'exemples de quotients par des groupes d'automorphismes non-abéliens. Ces quotients admettent deux résolutions crépantes naturelles. L'une est le G-schéma de Hilbert (qui résout les singularités d'après le théorème suscité), et l'autre est le résultat d'un processus de désingularisation inspiré de la méthode de Jung pour la désingularisation des points doubles rationnels en dimension deux. Ce qui a motivé ce travail est le désir de comprendre le lien et les différences entre ces deux résolutions.

Les résultats obtenus permettent de conclure que la résolution par le schéma de Hilbert G-équivariant est plus naturelle. En effet, elle mène à un énoncé de correspondance de McKay combinatoire (théorème 2.4.2).

Au delà de l'équivalence de catégories dérivées donnée par le théorème de Bridgeland, King et Reid, nous avons donc cherché un lien direct entre le G-schéma de Hilbert et la géométrie équivariante de la variété. Cette curiosité nous a mené vers une tentative d'interprétation de ce schéma en tant qu'espace modulaire d'une famille de fibrés vectoriels (chapitre 4).

Enfin, et toujours motivée par la compréhension du théorème de Bridgeland, King et Reid, la dernière partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la catégorie dérivée G-équivariante d'une variété, avec action d'un groupe fini.

Voici un résumé des problèmes qui sont traitées dans cette thèse, et les principaux résultats. Certains sont nouveaux et d'autres présentés avec une nouvelle preuve.

Chapitre 1 Le premier chapitre est consacré au schéma de Hilbert G-équivariant d'un schéma quasi-projectif lisse avec action de G. Dans un premier temps, on y rappelle les définitions d'action d'un groupe sur un schéma, G-faisceau et caractéristique d'Euler G-équivariante.

On définit et démontre alors l'existence d'un schéma de Hilbert équivariant associé à un polynôme de représentations quelconque. C'est le théorème 1.1.6 :

Soit P_G un polynôme à coefficients dans l'anneau des représentations de G. Il existe un schéma G-$\mathrm{Hilb}_X^{P_G(n)}$ paramétrant les sous-schémas G-stables de X, admettant le polynôme P_G pour caractéristique d'Euler G-équivariante.

Le schéma de Hilbert G-équivariant G-$\mathrm{Hilb}(X)$ est alors défini comme le cas particulier de cette construction où P_G est le polynôme constant égal à la représentation régulière de G. Dans le paragraphe 1.4, on énonce et on démontre des propriétés du schéma de Hilbert G-équivariant.

Dans le paragraphe 1.5, on propose une construction du morphisme de Hilbert-Chow $\mathrm{Hilb}^n(X) \longrightarrow S^n(X) = X^n/\mathfrak{S}_n$ utilisant une méthode de linéarisation du déterminant. On démontre ainsi le théorème 1.5.6 :

Il existe un morphisme $\Phi : \mathrm{Hilb}^n(X) \longrightarrow S^n(X)$ *projectif birationnel, qui à un point* h *de* $\mathrm{Hilb}^n(X)$ *correspondant au sous-schéma* Z *de* X *associe son support avec multiplicité*

$$Z \mapsto \sum_{x \in |Z|} \mathrm{prof}(Z_x)x.$$

La restriction de ce morphisme au G-schéma de Hilbert conduit à la définition du morphisme de Hilbert-Chow G-équivariant $G\text{-Hilb}(X) \xrightarrow{\Phi} X/G$, qui à une G-grappe associe son support. Dans le cas où $G\text{-Hilb}(X)$ est lisse, Φ est une résolution des singularités.

Enfin, on traite dans le paragraphe 1.6 le cas où le quotient X/G est lisse. D'après un théorème de Chevalley, cela correspond au cas où G agit localement comme un groupe de réflexions. On démontre localement, puis globalement que le morphisme de Hilbert-Chow est alors un isomorphisme. Ce sont les théorèmes 1.6.7 et 1.6.9 :

Soit X *une variété et* G *un groupe fini agissant sur* X *de telle sorte que le quotient* X/G *est lisse. Alors* $G\text{-Hilb}(X)$ *est isomorphe à* X/G.

Chapitre 2 Ce chapitre concerne l'étude locale des singularités non-abéliennes qui nous intéressent : soit E une courbe elliptique munie de sa structure de groupe. Notons $p_0 \in E$ l'origine. Soit R un système de racines, $Q(\mathrm{R})$ le réseau engendré par R et $A := Q(\mathrm{R}) \otimes E$. Le groupe de Weyl $W = W(\mathrm{R})$ agit naturellement sur A et d'après un théorème de Looijenga ([Loo76]), le quotient A/W est un espace projectif avec poids. Par exemple, si $\mathrm{R} = A_n$, alors $W = \mathfrak{S}_{n+1}$, et $A/W = E \otimes Q(R)/\mathfrak{S}_{n+1} = \mathbb{P}^n$.

Soit $W_+(\mathrm{R}) = W(\mathrm{R}) \cap \mathrm{SL}_n$ le sous-groupe de $W(\mathrm{R})$ formé des produits pairs de réflexions. Si aucune confusion n'est possible, nous le noterons W_+. Par exemple, dans le cas A_n, on a $W_+ = \mathfrak{A}_{n+1}$. On considère le quotient de A par W_+. Notons X_{R} cette variété. Elle est singulière, et c'est un revêtement double de A/W.

Dans le cas de la dimension trois, Bertin et Markushevich ont démontré que l'on peut résoudre les singularités de X_{R} par une variété de Calabi-Yau grâce à la méthode de Jung ([BM94]). Par ailleurs, d'après le théorème de Bridgeland, King et Reid, le W_+-schéma de Hilbert de A résout également ces singularités de façon crépante. Dans ce chapitre, on décrit les fibres au-dessus de tout point par chacune de ces résolutions. Soit R un système de racines réel de dimension trois. On s'intéresse ici à la singularité locale de $\mathbb{C}^3/W_+$ à l'origine. On verra dans le chapitre suivant que tous les points singuliers de A/W_+ sont de cette forme.

Le premier paragraphe est un rappel de résultats sur les revêtements doubles et la méthode de résolution de Jung.

Dans le deuxième paragraphe, on résout explicitement la singularité $\mathbb{C}^3/W_+$ par la méthode de Jung pour tout système de racines de dimension trois. En particulier, on démontre que la méthode de Jung s'applique pour résoudre chacune de ces singularités, et on exhibe la fibre exceptionnelle au-dessus de l'origine.

Dans le troisième paragraphe, on considère la résolution de la singularité $\mathbb{C}^3/W_+$

par le W_+-schéma de Hilbert et on calcule pour tout système de racines de dimension trois la fibre de cette résolution au-dessus de la singularité à l'origine. Pour ce faire, on développe une technique de décomposition de l'algèbre coinvariante $\mathbb{C}[x,y,z]/I_{W_+}$, où I_{W_+} est l'idéal engendré par les monômes W_+-invariants de degré strictement positif. Cette méthode est explicitée en 2.3.1.

Enfin, en comparant les résultats obtenus et les diagrammes de McKay des groupes de Weyl associés à chaque système de racines, on obtient dans le quatrième paragraphe une correspondance combinatoire de McKay. C'est le théorème 2.4.2 :

Soit $(X,0)$ un germe de singularité analytiquement équivalent au quotient $(\mathbb{C}^3,0)$ par un sous-groupe fini de la forme $W_+ = W \cap \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, où W est le groupe de Weyl associé à un système de racines en dimension trois. Lors de la résolution par le W_+-schéma de Hilbert, le graphe dual de la fibre exceptionnelle est en bijection avec le diagramme de McKay du groupe W_+ privé de ses boucles.

De plus, ce résultat n'est pas vérifié par le schéma obtenu lors de la résolution par la méthode de Jung. Cela démontre que le schéma de Hilbert fournit une résolution plus naturelle, au moins du point de vue de la correspondance de McKay.

Chapitre 3 Ce troisième chapitre est le pendant global du chapitre précédent. Soit E une courbe elliptique, $\mathrm{R} = A_3$, B_3 ou C_3 un système de racines, et X_R le quotient $(E \otimes Q(\mathrm{R}))/W_+$.

Dans un premier paragraphe, on rappelle le théorème de Looijenga, et le démontre dans les cas étudiés.

Dans le deuxième paragraphe sont rappelés les résultats de Bertin et Markushevich sur la résolution de X_R par la méthode de Jung ([BM94]). Le cas B_3 est traité en détail : on décrit la stratification du lieu de branchement du revêtement double $A/W_+(B_3) \longrightarrow \mathbb{P}^3$ et on explique comment la méthode de Jung permet de résoudre cette variété singulière.

D'après le théorème de Bridgeland, King et Reid, le $W_+(\mathrm{R})$-schéma de Hilbert résout également la singularité X_R de façon crépante. Dans le troisième paragraphe, on étudie cette résolution. Grâce aux propriétés locales du schéma de Hilbert démontrées au paragraphe 1.4, on démontre que cette résolution coïncide avec la résolution obtenue par la méthode de Jung en dehors d'un nombre fini de points. De plus, X_R vérifie en tout point les hypothèses du théorème 2.4.2, car tout point $a \in A$ a pour stabilisateur sous l'action de $W(\mathrm{R})$ un groupe de Weyl associé à un sous-système de racines de R. Ainsi, les résultats du chapitre précédent permettent d'obtenir les fibres de la résolution de X_R par $W_+(\mathrm{R})$-Hilb(A) en tout point.

Chapitre 4 Le théorème de Loojienga a une interprétation en terme de fibrés vectoriels sur la courbe elliptique E ([FMW97]). C'est la direction empruntée dans ce chapitre.

Comme dans les chapitres précédents, E est une courbe elliptique, R un système de racines et $A = E \otimes Q(\mathrm{R})$. D'après Friedman, Morgan et Witten, le quotient $A/W = \mathbb{P}(a_1, \ldots, a_k)$ est l'espace de modules $\mathcal{M}$ paramétrant une certaine famille de fibrés sur E

(voir le théorème 4.0.4). Dans les cas des systèmes de racines $\mathrm{R} = A_n$ ou B_n, le quotient A/W est lisse, de sorte que d'après le théorème 1.6.9, $A/W \cong W\text{-Hilb}(A)$. De plus, dans ces cas, la famille universelle de $\mathcal{M}$ est explicite, et il existe une méthode permettant d'associer à chaque W-grappe le fibré qui lui est associé : c'est la construction spectrale.

L'idée motivant ce chapitre est d'appliquer la construction spectrale au W_+-schéma de Hilbert, pour identifier la famille des fibrés paramétrée par les W_+-grappes de A, dans les cas A_n et B_n. Par composition du morphisme de Hilbert-Chow $W_+\text{-Hilb}(A) \longrightarrow A/W_+$ avec le quotient $A/W_+ \longrightarrow A/W$, il existe un morphisme naturel de $W_+\text{-Hilb}(A)$ dans $W\text{-Hilb}(A) \cong \mathcal{M}$. Le premier objectif est donc de savoir si la famille paramétrée par le W_+-schéma de Hilbert est le tiré en arrière de la famille universelle de $\mathcal{M}$ ou si elle comporte des informations supplémentaires. L'espoir était alors que ces éventuelles informations s'expriment encore en termes d'une correspondance de McKay.

Dans le premier paragraphe, on définit et démontre l'existence dans le théorème 4.1.1 d'un schéma comme ci-dessous.

Soient X et A deux schéma projectifs lisses et N un entier. Il existe un sous-schéma ouvert $\mathrm{Hilb}^N(A,X)$ de $\mathrm{Hilb}^N(A \times X)$ paramétrant les couples (Z,g), où Z est une N-grappe de A et g est un morphisme de Z vers X.

On définit alors une construction spectrale générale qui permet d'associer un fibré sur X à un point (Z,g) de $\mathrm{Hilb}(A,X)$ lorsque X est une courbe.

On suppose par la suite que E est une courbe elliptique. Soit (Z,g) un point de $\mathrm{Hilb}^N(A,E)$. On associe une partition $\mu(Z,g) = (k_1, \ldots, k_r)$ de N au couple (Z,g) (voir le paragraphe 4.2.2). On démontre alors le théorème 4.2.2 donnant la forme du fibré associé à (Z,g) par la construction spectrale :

Soit (Z,g) un point de $\mathrm{Hilb}^N(A,E)$ tel que Z est une grappe supporté en un point $a \in A$. Soit $\mu(Z,g) = (k_1, \ldots, k_r)$ la partition associée à (Z,g). Alors le fibré associé sur E est

$$V_{Z,g} = I_{k_1} \oplus I_{k_2} \oplus \ldots \oplus I_{k_r},$$

où I_k est la k-ième extension non-triviale du fibré trivial sur E.

Enfin, en utilisant les résultats du chapitre 2, on applique ce théorème aux W_+-grappes de A dans les cas de la dimension trois, A_3 et B_3. On démontre ainsi par le calcul que le W_+-schéma de Hilbert paramètre une famille de fibrés sur E plus riche que celle paramétrée par $W\text{-Hilb}(A)$. En revanche, la correspondance entre une grappe et le fibré associé ne permet pas de séparer les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel de $W_+\text{-Hilb}(A)$, donc contrairement à nos attentes, aucun phénomène de correspondance de McKay n'apparaît ici.

Chapitre 5 Le dernier chapitre est la version longue d'une note publiée aux comptes rendus de l'académie des sciences ([Tér03]). Il est consacré à l'étude de la catégorie dérivée G-équivariante d'une variété.

Dans le premier paragraphe, on définit la catégorie dérivée G-équivariante des com-

plexes bornés de G-faisceaux, ainsi que celle des complexes bornés supérieurement. On en donne alors une description dans le théorème 5.1.2 :

La catégorie dérivée G-équivariante $\mathcal{D}^{*,G}(X)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine des complexes formés de G-faisceaux cohérents localement libres sur X.

On traite alors les exemples simples où l'action de G est libre ou triviale sur X. En particulier, lorsque G agit trivialement sur X, on démontre que la catégorie dérivée G-équivariante $\mathcal{D}^G(X)$ admet une décomposition orthogonale indexée par les représentations irréductibles de G. On appelle composante triviale de $\mathcal{D}^G(X)$ la sous-catégorie indexée par la représentation triviale dans cette décomposition.

Dans le deuxième paragraphe, on propose une version G-équivariante du théorème de Beĭlinson (théorème 5.2.1) :

Soit $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ et A l'algèbre symétrique ou extérieure sur V. La catégorie dérivée G-équivariante de $\mathbb{P}^n$ est équivalente à la catégorie des complexes à homotopie près de $(A\text{-}G)$-modules gradués, libres et de type fini dont les générateurs sont de degrés compris entre 0 et n.

Enfin, l'objectif du dernier paragraphe est d'évaluer la distance qui sépare la catégorie dérivée G-équivariante d'une variété X de la catégorie dérivée du quotient X/G. En effet, le quotient $\pi : X \longrightarrow X/G$ induit des foncteurs entre les catégories dérivées $\mathcal{D}^G(X)$ et $\mathcal{D}(X/G)$. On décrit exactement l'obstruction à la descente au quotient d'un objet de $\mathcal{D}^G(X)$. C'est le théorème 5.3.8 :

Un complexe E de G-faisceaux sur X se descend en un complexe de faisceaux sur le quotient si et seulement si pour tout sous-groupe H de G, la restriction de E au sous-schéma adhérence des points de stabilisateur H est dans la composante triviale de la catégorie dérivée des H-faisceaux sur ce sous-schéma.

On démontre alors que le foncteur $L\pi^* : \mathcal{D}(X/G) \longrightarrow \mathcal{D}^G(X)$ est pleinement fidèle, de sorte qu'il induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}(X/G)$ et la sous catégorie pleine de $\mathcal{D}^G(X)$ formée des objets sans obstruction à la descente.

Enfin, concluons sur l'élargissement éventuel du contexte, et les possibilités d'applications des résultats de cette thèse.

Dans ce travail, nous nous limitons à des résolutions de singularités en dimension trois. Dans ce cadre, il est connu qu'il existe des résolutions crépantes, et pour la famille traitée, nous démontrons que la résolution par le schéma de Hilbert équivariant est la résolution la plus naturelle au sens de McKay. La question du devenir de ce résultat en dimension supérieure s'impose. D'après le théorème de Bridgeland, King et Reid, le schéma de Hilbert équivariant G-Hilb(X) résout les singularités de X/G si le produit fibré $G\text{-Hilb}(X) \times_{X/G} G\text{-Hilb}(X)$ est de dimension inférieure à $\dim(X) + 1$ ([BKR01]). Cette condition n'est pas vérifiée en dimension quatre dès que le morphisme de Hilbert-Chow admet un diviseur pour fibre au dessus d'un point. Grace à la méthode de décomposi-

tion de l'algèbre coinvariante, le travail fait en dimension trois dans le contexte local est envisageable en dimension quatre, mais il risque d'être fastidieux. Par exemple, dans le cas du système de racines A_4, l'algèbre coinvariante est de dimension 119, et le groupe $W_+ = \mathfrak{A}_5$ admet 5 représentations irréductibles. Exhiber la décomposition en représentations irréductibles de cette algèbre est donc un problème de théorie de représentations des groupes finis. Une fois ce travail accompli, le même type de réduction que dans le cas de la dimension trois pourrait permettre de majorer la dimension des fibres. Il faudrait majorer cette dimension par deux, pour pouvoir appliquer le théorème [BKR01], et conclure que le W_+-schéma de Hilbert est lisse et résout la singularité de façon crépante. Ce résultat n'est absolument pas garanti, puisque l'on sait qu'il existe des singularités en dimension quatre qui n'admettent pas de résolution crépante.

Pour ce qui est de la résolution par le processus de Jung, la méthode consiste à se ramener à la résolution de singularités en dimensions inférieures. Pour appliquer ce processus en dimension quatre, il suffit de savoir résoudre les singularités de la variété discriminant du revêtement double ; et la qualité de résolution de la variété de dimension quatre dépend de la qualité de la résolution de la variété discriminant, qui est de dimension trois. Si les singularités de celle-ci sont obtenues par quotient, (respectivement par revêtement double), le schéma de Hilbert (respectivement le processus de Jung en dimension trois) les résout, et l'on peut appliquer le processus. Cependant, la résolution obtenue n'est généralement pas crépante (voir la proposition 2.1.9).

Les catégories dérivées occupent depuis quelques années une place importante en géométrie algébrique, que ce soit dans le domaine de la résolution des singularités, de la géométrie birationnelle ou de la symétrie miroir.

Dans [BO01], Bondal et Orlov démontrent que l'on peut reconstruire une variété projective lisse dont le faisceau canonique (ou anticanonique) est ample à partir de sa catégorie dérivée. En particulier, si une variété lisse X a une catégorie dérivée équivalente à celle de $\mathbb{P}^n$, alors X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$. Ce résultat suggère l'existence d'une démonstration homologique du théorème de Loojenga, au moins dans les cas où le quotient $E \otimes Q(\mathrm{R})/W(\mathrm{R})$ est lisse. L'idée consiste à exhiber une famille exceptionnelle de $\mathcal{D}^{W(\mathrm{R})}(E \otimes Q(\mathrm{R}))$ formée de complexes sans obstruction à la descente et démontrer qu'elle engendre la catégorie dérivée du quotient, vue comme sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $W(\mathrm{R})$-équivariante.

Chapitre 1

Le G-schéma de Hilbert

Soit G un groupe fini et X un schéma quasi-projectif lisse sur $\mathbb{C}$, dans lequel G agit fidèlement. Dans toute la thèse, on appelle schéma un schéma sur $\mathbb{C}$, noethérien. Le G-schéma de Hilbert de X est l'espace de module des G-grappes de X, à savoir les sous-schémas Z de dimension zéro de X qui sont G-stables et dont l'espace des sections globales du faisceau structural $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ est isomorphe à la représentation régulière $\mathbb{C}[G]$. Ce schéma est un bon candidat à la résolution des singularités du quotient X/G et joue un rôle important dans la correspondance de McKay ; comme l'ont mis en valeur les travaux de Ito et Nakamura ([IN99]), ou Bridgeland, King et Reid ([BKR01]). En effet, il existe un morphisme birationnel $G\text{-Hilb}(X) \longrightarrow X/G$, qui est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert régulier de X/G (image du lieu de X sur lequel G agit librement). C'est le morphisme de Hilbert-Chow. Lorsque le G-schéma de Hilbert est lisse, ce morphisme résout les singularités de X/G.

Dans les premiers paragraphes de ce chapitre, on démontre l'existence du G-schéma de Hilbert, et plus généralement du schéma $\text{Hilb}^{P_G}(X)$ paramétrisant les sous-schémas G-stables de X, et admettant le polynôme P_G pour caractéristique d'Euler G-équivariante.

Dans le cinquième paragraphe, on construit le morphisme de Hilbert-Chow par une méthode de linéarisation du déterminant.

Dans le sixième paragraphe, on traite l'exemple où G agit localement comme un groupe de réflexions sur X. D'après un théorème de Chevalley et Shephard et Todd, cela correspond au cas où le quotient X/G est lisse ([Bou81]). On démontre que le morphisme de Hilbert-Chow est alors un isomorphisme.

1.1 Définitions.

Soit X un schéma quasi-projectif lisse sur $\mathbb{C}$ et G un groupe fini.

Définition 1.1.1 *Supposons que G agisse sur l'espace topologique sous-jacent à X et pour tout $g \in G$, notons g le morphisme de X dans lui même induit par l'action de g. On dit qu'un faisceau sur X est G-linéarisé si il existe une collection de morphismes de*

faisceaux $\{\varphi_g\}_{g\in G}$, $g_*F \xrightarrow{\varphi_g} F$ *telle que*

$$\varphi_1 = \mathrm{Id} \text{ et } \varphi_{fg} = \varphi_f \circ f_*\varphi_g.$$

Un morphisme de faisceaux G-linéarisés est un morphisme de faisceaux qui commute à l'action de G.

Définition 1.1.2 *On dira que le groupe G agit sur le schéma X (ou que X est un G-schéma) si pour tout* $g \in G$, *il existe un isomorphisme de schémas* $g : X \longrightarrow X$ *de telle sorte que les morphismes* $g^{\#} : \mathcal{O}_X \longrightarrow g_*\mathcal{O}_X$ *fournissent une G-linéarisation de* $\mathcal{O}_X$ *:* $\{(g^{\#-1})\}_{g\in G}$.

Définition 1.1.3 *On dira qu'un faisceau G-linéarisé F sur le G-schéma X est un G-faisceau si il est muni d'une G-linéarisation telle que le morphisme* $\mathcal{O}_X \times F \longrightarrow F$ *est un morphisme de G-faisceaux (pour l'action diagonale sur* $\mathcal{O}_X \times F$*).*

On dit qu'un sous schéma fermé Y de X est G-stable si il est défini par un G-faisceau d'idéaux, ce qui équivaut à dire que le quotient $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$ est un G-faisceau.

Soit $\mathcal{O}(1)$ un faisceau très ample relativement à X. Comme on le démontre lors de la preuve de la proposition 1.2.4, on peut choisir le plongement de X dans un espace projectif de telle sorte que $\mathcal{O}(1)$ soit G-linéarisé. Ainsi, pour tout sous-schéma fermé G-stable Y de X, les groupes d'homologie $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(n))$ sont des représentations de G. Si de plus Y est propre, ce sont des représentations de dimension finie.

Définition 1.1.4 *Soit X un G-schéma quasi-projectif. Soit Y un sous-schéma fermé propre et G-stable de X. On définit la caractéristique d'Euler G-équivariante de Y de la façon suivante :*

$$\chi_G(Y, \mathcal{O}_Y(n)) = \sum (-1)^i [H^i(Y, \mathcal{O}_Y(n))],$$

où $[V]$ *désigne la classe de représentation de V. Ainsi,* $\chi_G(Y, \mathcal{O}_Y(n))$ *est un élément de l'anneau des représentations de G.*

Définition 1.1.5 *Soit* P_G *un polynôme à coefficients dans l'anneau des représentations de G. On définit le foncteur* $G - \mathcal{H}ilb_X^{P_G(n)}$ *de la façon suivante.*

$$\begin{array}{rccll} G - \mathcal{H}ilb_X^{P_G(n)} : & \mathcal{S}ch & \longrightarrow & \mathcal{S}et & \\ & Z & \longrightarrow & \{Y \hookrightarrow Z \times X & \text{sous-schéma fermé propre} \\ & & & & \text{et plat sur } Z \text{ tel que} \\ & & & & \forall s \in Z,\ Y_s \text{ est G-stable} \\ & & & & \text{et } \chi_G(Y, \mathcal{O}_Y(n)) = P_G(n).\} \end{array}$$

On remarque que si $P = \dim \circ P_G$, où P_G est un polynôme à coefficients dans $R(G)$, alors $G - \mathcal{H}ilb_X^{P_G(n)}$ est un sous-foncteur du foncteur de Hilbert usuel $\mathcal{H}ilb_X^P$.

Fixons désormais P_G un polynôme à coefficients dans l'anneau des représentations de G et $P = \dim \circ P_G$. Le but des premiers paragraphes de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.1.6 *Le foncteur $G - \mathcal{H}ilb_X^{P_G(n)}$ est représentable. Son représentant est la somme de certaines composantes connexes de $(\mathrm{Hilb}_X^P)^G$, le sous-schéma des points fixes de Hilb_X^P. On le notera G-$\mathrm{Hilb}_X^{P_G(n)}$.*

Notons $R(G)$ la représentation régulière de G. On définit le G-schéma de Hilbert d'un G-schéma quasi-projectif X par $G\text{-Hilb}(X) = \mathrm{Hilb}_X^{R(G)}$, où $R(G)$ est le polynôme constant égal à la représentation régulière. Dans le paragraphe 1.4, on donne quelques propriétés de ce schéma.

Dans le paragraphe 1.5, on construit le morphisme de Hilbert-Chow

$$\Phi : \mathrm{Hilb}_X^n \longrightarrow S^n(X).$$

On verra que sa restriction au G-schéma de Hilbert $G\text{-Hilb}(X)$ factorise par le quotient X/G.

Enfin, dans le paragraphe 1.6, on traite l'exemple du W-schéma de Hilbert de $\mathbb{A}^n$, pour W un groupe de réflexions.

1.2 Action de G sur $\mathrm{Hilb}_X^{P(n)}$.

1.2.1 Action sur un foncteur de points.

On démontre dans ce paragraphe qu'il est équivalent de connaître l'action d'un groupe sur un schéma ou sur son foncteur de points.

Si l'action de G sur X est connue, alors pour tout schéma V sur $\mathbb{C}$, G agit sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}ch}(V, X)$ de la façon suivante : $\forall g \in G, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}ch}(V, X), f \cdot g = g \circ f$. Cette action est fonctorielle car si $V \stackrel{\varphi}{\to} W$ est un morphisme de schémas, alors le foncteur de points appliqué à φ donne $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}ch}(W, X) \stackrel{\varphi^*}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}ch}(V, X)$, qui à f associe $f \circ \varphi$, et on a $\varphi^*(g \cdot f) = (g \circ f) \circ \varphi = g \circ (f \circ \varphi) = g\varphi^*(f)$.

Réciproquement, si on connaît une action fonctorielle de G sur le foncteur de points de X, alors en particulier on a une action de G sur le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}ch}(X, X)$, d'où pour tout $g \in G$ un morphisme de schéma : $\varphi_g = g \cdot Id : X \to X$. Pour vérifier qu'il s'agit d'une action de G sur le schéma X, il faut vérifier que $\{\varphi^{\#-1}\}$ est une G linéarisation de $\mathcal{O}_X$. Soient donc $f, g \in G$. on veut démontrer que $\varphi_{hg}^{\#-1} = \varphi_h^{\#-1} \circ h_* \varphi_g^{\#-1}$. Or

$$\begin{array}{rcll} hg \cdot Id_X & = & h \cdot (g \cdot Id_X) & \text{action sur } \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}ch}(X, X) \\ & = & h \cdot (Id_X \circ g \cdot Id_X) & \\ & = & h \cdot Id_X \circ g \cdot Id_X & \text{car l'action est fonctorielle, donc si} \\ & & & \alpha : X \to X, \text{ alors } (g \cdot Id_X) \circ \alpha = g \cdot \alpha \\ & = & \varphi_h \circ \varphi_g. & \end{array}$$

Cette identité au niveau des morphismes de schémas donne bien l'identité de G-linéarisation du faisceau structural $\mathcal{O}_X$.

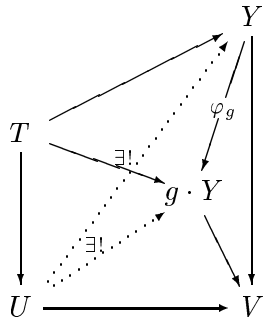
1.2.2 Action de G sur le foncteur $\mathcal{H}ilb_X^P$.

Le groupe G agit naturellement sur le schéma produit $Z \times X$ pour tout schéma Z, par action diagonale, avec l'action donnée sur X et l'action triviale sur Z.

Ainsi, pour tout schéma Z, on obtient une action de G sur $\mathcal{H}ilb_X^P(Z)$, l'ensemble des sous-schémas fermés $Y \hookrightarrow Z \times X$ plats et propres sur Z tels que $\forall s \in Z$, Y_s est G-stable et $\chi_G(Y, \mathcal{O}_Y(n)) = P_G(n)$. En effet, si $Y \in \mathcal{H}ilb_X^P(Z)$ a pour faisceaux d'idéaux $\mathcal{I}_Y$, alors l'image $g \cdot Y$ est le sous schéma fermé de $Z \times X$ ayant pour faisceau d'idéaux $(\varphi_g^\#)^{-1}(\varphi_{g*}\mathcal{I}_Y)$.

$$\mathcal{O}_{Z\times X} \xrightarrow{\varphi_g^\#} \varphi_{g*}\mathcal{O}_{Z\times X} \supset \varphi_{g*}\mathcal{I}_Y$$

Alors $\varphi_{g|Y}$ est un isomorphisme de schémas entre Y et $g\cdot Y$, de sorte qu'en appliquant le critère valuatif, on démontre que $g \cdot Y$ est propre :



Par ailleurs, pour tout $s \in Z$, $(g \cdot Y)_s$ a le même polynôme de Hilbert que $Y_{\varphi_g^{-1}(s)}$, de sorte que $g \cdot Y \in \mathcal{H}ilb_X^P(Z)$.

On a bien défini une action de groupe, car si h et g sont dans G alors $(hg)\cdot Y$ est défini par l'idéal $(\varphi_{hg}^\#)^{-1}(h_*g_*\mathcal{I}_Y) = (\varphi_h^\#)^{-1}h_*(\varphi_g^\#)^{-1}(h_*g_*\mathcal{I}_Y)$ et l'idéal définissant $h \cdot (g \cdot Y)$ est $(\varphi_h^\#)^{-1}((h_*\mathcal{I}_{g\cdot Y}) = (\varphi_h^\#)^{-1}h_*(\varphi_g^\#)^{-1}(h_*g_*\mathcal{I}_Y)$, d'où $(hg) \cdot Y = h \cdot (g \cdot Y)$.

Démontrons maintenant que cette action est fonctorielle. Soit $\alpha : Z_1 \to Z_2$ un morphisme de schémas sur $\mathbb{C}$. Montrons que pour tout $g \in G$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}ilb_X^P(Z_2) & \xrightarrow{\varphi_g} & \mathcal{H}ilb_X^P(Z_2) \\ {\scriptstyle\alpha^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha^*} \\ \mathcal{H}ilb_X^P(Z_1) & \xrightarrow{\varphi_g} & \mathcal{H}ilb_X^P(Z_1) \end{array}$$

Soit donc $Y_1 \in \mathcal{H}ilb_X^P(Z_1)$ et soit $g \in G$. Le morphisme α^* envoit Y_1 sur $(\alpha \times \mathrm{Id}_X)^{-1}(Y_1)$. Par définition $\varphi_g = \mathrm{Id}_{Z_1} \times g$ (respectivement : $\varphi_g = \mathrm{Id}_{Z_2} \times g$), de sorte que la commutativité du diagramme équivaut à l'identité

$$(\alpha \times \mathrm{Id}_X)^{-1} \circ (\mathrm{Id}_{Z_2} \times g)(Y_1) = (\mathrm{Id}_{Z_1} \times g) \circ (\alpha \times \mathrm{Id}_X)^{-1}(Y_1)$$

qui est claire par définition du produit fibré $Z \times X$.

On a ainsi défini une action de G sur le foncteur de points de Hilb_X^P et donc sur le schéma de Hilbert lui-même d'après le paragraphe précédent.

1.2.3 Schéma des points fixes de Hilb_X^P.

Définition 1.2.1 *Soit X un G-schéma. On définit le sous-schéma des points fixes X^G, lorsqu'il existe, par le schéma représentant le foncteur*

$$V \mapsto (\mathrm{Hom}_{Sch}(V, X))^G.$$

Ainsi, le sous schéma des points fixes de X est le schéma par lequel se factorise tous les morphismes de schémas G-invariants.

Lemme 1.2.2 *Si X est affine, alors X^G existe, et c'est un sous schéma fermé de X.*

Preuve : On démontre que si $X = \mathrm{Spec}(A)$, alors le sous-schéma fermé

$$X^G = \mathrm{Spec}(A/ < ga - a >_{g\in G,\ a\in A})$$

convient. Soit V un schéma. Alors $\mathrm{Hom}_{Sch}(V, X) \cong (\mathrm{Hom}_{Ann}(A, \Gamma(V, \mathcal{O}_V))$, de sorte que $\mathrm{Hom}_{Sch}(V, X)^G \cong (\mathrm{Hom}_{Ann}(A, \Gamma(V, \mathcal{O}_V))^G$. Or

$$\begin{array}{rcl} \varphi \in (\mathrm{Hom}_{Ann}(A, \Gamma(V, \mathcal{O}_V))^G & \iff & \varphi \text{ est constant sur les orbites de} \\ & & \text{l'action de } G \text{ sur } A \\ & \iff & \varphi \text{ factorise par le quotient} \\ & & A/ < ga - a >_{g\in G,\ a\in A} . \end{array}$$

□

Définition 1.2.3 *On dit qu'un G-schéma X est G-admissible si on peut le recouvrir d'ouverts affines stables par G.*

Proposition 1.2.4 *Soit X un G-schéma quasi-projectif. Alors il est G-admissible et X^G existe.*

Preuve : Il existe un faisceau $\mathcal{L}$ très ample. A priori, $\mathcal{L}$ n'est pas un G-faisceau. Posons donc $\mathcal{M} = \otimes_{g\in G} g_*\mathcal{L}$. Alors $\mathcal{M}$ est ample et il est G-linéarisé par définition. Or tout faisceau ample a une puissance très ample, d'où l'existence d'un G-faisceau très ample. Notons le encore $\mathcal{M}$. Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\Gamma(X, \mathcal{M})$ tel qu'il existe une immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}(V^*)$. Quitte à remplacer V par $\sum_{g\in G} V$, on a ainsi construit une immersion G-équivariante de X dans un G-schéma projectif $\mathbb{P}(V^*)$. Il suffit donc de voir que pour toute représentation V de G, $\mathbb{P}(V)$ est G-admissible. Supposons que V est de dimension n avec pour système de coordonnées $x_1, \cdots x_n$. Il alors suffit de démontrer que pour tout $x \in V$, il existe un polynôme G-invariant $f \in k[x_1, \cdots, x_n]^G$ qui ne s'annule pas en x. (Ainsi, x appartient à l'ouvert G-stable $D(f)$). Soit $x \in V$ et soit P un polynôme ne s'annulant pas en x. Étant donné que $k[x_1, \cdots, x_n]$ est de type fini sur $k[x_1, \cdots, x_n]^G$ ([Bou81, théorème 2.6.2]), la décomposition de P selon une base de $k[x_1, \cdots, x_n]$ sur $k[x_1, \cdots, x_n]^G$ fournit au moins un polynôme G-invariant ne s'annulant pas en x. Ainsi, on peut définir X^G localement grâce au lemme 1.2.2, et le caractère fonctoriel de la définition assure que les recollements sont possibles. □

1.3 Démonstration du théorème d'existence

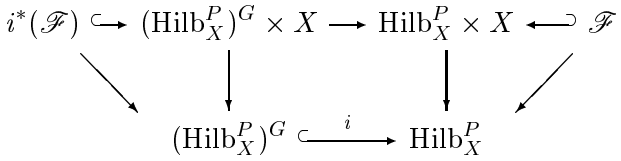
1.3.1 Définition de $G-\mathrm{Hilb}_X^{P_G}$

La définition du schéma $G-\mathrm{Hilb}_X^{P_G}$ s'appuie sur la version équivariante suivante d'un lemme de Mumford ([Mum74, p.50]).

Lemme 1.3.1 *Soit $\pi : X \to S$ un morphisme propre et plat de schémas. Soit G un groupe fini d'automorphismes de X sur S et F un G-faisceau localement libre de rang fini sur X. Alors si S est connexe, $\chi_G(X_s, F_s)$ est constante dans $R(G)$.*

Supposons ce lemme acquis. On va l'appliquer au schéma $(\mathrm{Hilb}_X^P)^G$, sous-schéma des points fixes du schéma de Hilbert associé au polynôme P.

Notons $\mathscr{F}$ la famille universelle de sous-schémas de X de polynôme de Hilbert P. On a donc $\mathscr{F}$ est un sous-schéma fermé de $\mathrm{Hilb}_X^P \times X$, propre et plat sur Hilb_X^P. La restriction au sous schéma des points fixes $(\mathrm{Hilb}_X^P)^G$ correspond à un changement de base, de telle sorte que $i^*(\mathscr{F})$ est propre et plat sur $(\mathrm{Hilb}_X^P)^G$.



Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $i^*(\mathscr{F})$ dans $(\mathrm{Hilb}_X^P)^G \times X$. Pour pouvoir appliquer le lemme, il suffit de démontrer que $\mathcal{I}$ est G-stable. C'est équivalent à démontrer que $i^*(\mathscr{F})$ est G-stable, et comme l'action de G sur $(\mathrm{Hilb}_X^P)^G$ est triviale, cela revient encore à démontrer que pour tout $s \in (\mathrm{Hilb}_X^P)^G$, $i^*(\mathscr{F})_s \hookrightarrow X$ est G-stable. Or la donnée d'un point d'un schéma correspond à la donnée d'un morphisme d'un corps vers ce schéma, d'image le point. Soit donc k un corps. Alors s est l'image d'un morphisme appartenant à $\mathrm{Hom}_{Sch}(\mathrm{Spec}(k), (\mathrm{Hilb}_X^P)^G) = \mathrm{Hom}_{Sch}(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Hilb}_X^P)^G$, par définition du schéma des points fixes. Or un point du schéma de Hilbert correspond, via la famille universelle $\mathscr{F}$ à un sous-schéma de X. Et un point G-invariant comme s (dans le sens où il est donné par un morphisme G-invariant) donne un sous-schéma $\mathscr{F}_s$ de X qui est G-stable. Maintenant, $i^*(\mathscr{F})_s = \mathscr{F}_{i^{-1}(s)} = \mathscr{F}_s$ car i est une immersion, de sorte que le raisonnement ci-dessus nous donne bien : $i^*(\mathscr{F})_s \hookrightarrow X$ est G-stable.

On peut alors appliquer le lemme, qui dit qu'au-dessus d'une composante connexe S de $(\mathrm{Hilb}_X^P)^G$, le G-polynôme de Hilbert $\chi_G(\mathcal{O}_{\mathscr{F}_s}(n))$ de la fibre de la famille universelle est constant. Notons alors $G\text{-}\mathrm{Hilb}_X^{P_G}$ la réunion des composantes connexes de $(\mathrm{Hilb}_X^P)^G$ au-dessus desquelles le polynôme de Hilbert G-équivariant est P_G, et notons $\mathscr{Z}$ le produit fibré $\mathscr{F} \times_{(\mathrm{Hilb}_X^P)^G} G\text{-}\mathrm{Hilb}_X^{P_G}$. Nous allons démontrer que le couple $(G\text{-}\mathrm{Hilb}_X^{P_G}, \mathscr{Z})$ est une solution au problème universel du G-schéma de Hilbert posé dans le théorème 1.1.6.

Soit donc Z un schéma et Y un sous schéma fermé de $Z \times X$, propre et plat sur Z tel que $\forall s \in Z$, Y_s est G-stable et admet P_G pour polynôme de Hilbert G-équivariant.

D'après la propriété universelle du schéma de Hilbert Hilb_X^P, il existe un unique morphisme de schéma f tel que $Y = f^*(\mathscr{F})$.

$$\begin{array}{ccccccc} f^*(\mathscr{F}) = Y & \hookrightarrow & Z \times X & \longrightarrow & \mathrm{Hilb}_X^P \times X & \hookleftarrow & \mathscr{F} \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ & & Z & \xrightarrow{f} & \mathrm{Hilb}_X^P & & \end{array}$$

Il s'agit de démontrer que f est à but dans $G\text{-}\mathrm{Hilb}_X^{P_G}$. Or $\forall s \in Z$, Y_s est G-stable, donc $f(s) \in (\mathrm{Hilb}_X^P)^G$, et son polynôme de Hilbert G-équivariant est P_G, donc $f(s) \in G\text{-}\mathrm{Hilb}_X^{P_G}$. On a donc un unique morphisme $f : Z \to G\text{-}\mathrm{Hilb}_X^{P_G}$ telle que $Y = f^*(\mathscr{Z})$. On a bien démontré que $G - \mathcal{H}ilb^{P_G}$ est représentable ; son représentant est $G\text{-}\mathrm{Hilb}_X^{P_G}$ et la famille universelle est $\mathscr{Z}$. □

1.3.2 Démonstration du lemme 1.3.1

Le théorème suivant est la version équivariante d'un théorème de Mumford ([Mum74, p.46]).

Théorème 1.3.2 *Soit $\pi : X \to S = \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme propre de schémas, avec X projectif de dimension n et A noethérien. Soit G un groupe fini d'automorphismes de X sur S. Soit F un G-faisceau cohérent sur X, plat sur S. Alors il existe un complexe fini*

$$\mathbf{K}^{\cdot} = 0 \longrightarrow K^0 \longrightarrow K^1 \quad \cdots \longrightarrow K^n \longrightarrow 0$$

de (A-G)-modules projectifs de type fini tels que les deux foncteurs de la catégorie des A-algèbres dans la catégorie des représentations de G suivants

$$B \longrightarrow H^p(X \times_S \mathrm{Spec}(B), F \otimes_A B)$$

$$B \longrightarrow H^p(\mathbf{K}^{\cdot} \otimes_A B)$$

sont isomorphes.

Preuve : Soit $\mathbf{U}$ un recouvrement d'ouverts affines G-stables de X et $\mathbf{C}^{\cdot}$ le complexe de Čech de F associé à ce recouvrement. Le G-faisceau F étant supposé plat sur S, le complexe de Čech $\mathbf{C}^{\cdot}$ est formé de (A-G)-modules A-plats. Pour toute A-algèbre B (sur laquelle G agit trivialement), le recouvrement affine $\mathbf{U} \times_S \mathrm{Spec}(B) = \{U_i \times_S \mathrm{Spec}(B)\}$ de $X \times_S \mathrm{Spec}(B)$ est G-stable et $F \otimes_A B$ est un G-faisceau quasi-cohérent sur $X \times_S \mathrm{Spec}(B)$, de sorte que $\mathbf{C}^{\cdot} \otimes_A B$ est un complexe de Čech adapté pour calculer la cohomologie de $F \otimes_A B$.

On démontre qu'il existe un complexe fini $\mathbf{K}^{\cdot}$ de modules plats de types finis sur A quasi-isomorphe à $\mathbf{C}^{\cdot}$. Comme A est noethérien, ces modules plats sont projectifs. On construit $\mathbf{K}^{\cdot}$ par récurrence descendante.

Hypothèse de récurrence au rang m : Il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} K^m & \xrightarrow{\partial_K^m} & K^{m+1} & \xrightarrow{\partial_K^{m+1}} & K^{m+2} & \longrightarrow & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{m+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{m+2}} & & \\ C^m & \xrightarrow{\partial_C^m} & C^{m+1} & \xrightarrow{\partial_C^{m+1}} & C^{m+2} & \longrightarrow & \end{array}$$

où les modules K^i sont construits pour tout $i > m$ et vérifient $\forall i \leq m+1,\ \phi_i : K^i \longrightarrow C^i$ est un morphisme de (G-A)-modules tel que

1. $\partial_C^i \circ \phi_i = \phi_{i+1} \circ \partial_K^i$,
2. $\partial_K^{i+1} \circ \partial_K^i = 0$,
3. les ϕ_i induisent des isomorphismes en cohomologie pour tout $p \geq m+2$ et une surjection $\ker \partial_K^{m+1} \longrightarrow (H^{m+1}\mathbf{C}^\cdot)$,
4. les K^i sont A-libres de type fini pour tout $i \geq m+1$.

Pour initialiser la récurrence, on pose $K^p = 0$ pour tout $p > n$. Alors au rang $m = n$, les hypothèses ci-dessus sont vérifiées, puisque $H^m(F) = 0$ pour tout $m > n = \dim(X)$.

Supposons maintenant que les hypothèses sont vérifiées au rang m et construisons $(K^m, \phi_m, \partial_K^m)$. D'après le point 3, ϕ_{m+1} induit une surjection de $\ker \partial_K^{m+1}$ sur $H^{m+1}(\mathbf{C}^\cdot)$. Notons B^{m+1} le noyau de cette surjection. Alors B^{m+1} est un sous-(A-G)-module de K^{m+1} et il est noethérien car de type fini sur A noethérien. Comme l'action de G sur A est triviale, on peut prolonger l'action de G sur B^{m+1} en une action de G sur L^m, le module libre engendré par les générateurs de B^{m+1}. On a ainsi une surjection de (A-G)-modules $L^m \xrightarrow{\pi} B^{m+1}$. Par ailleurs, $H^m(\mathbf{C}^\cdot)$ est également un A-module de type fini car F est cohérent sur X qui est propre sur A. On peut donc construire $L'^m \longrightarrow H^m(\mathbf{C}^\cdot)$ une surjection d'un (A-G)-module libre de A sur $H^m(\mathbf{C}^\cdot)$.

Puis, $H^m(\mathbf{C}^\cdot)$ étant un (A-G)-module quotient de (A-G)-morphismes, on peut remonter la surjection en un (A-G)-morphisme $\lambda' : L'^m \longrightarrow C^m$. Posons $K^m = L^m \oplus L'^m$, puis

$$\partial_K^m : \begin{cases} K^m \longrightarrow K^{m+1} \\ (x, x') \longrightarrow \pi(x) \end{cases} \quad \text{et } \phi_m : \begin{cases} K^m \longrightarrow C^m \\ (x, x') \longrightarrow \lambda(x) + \lambda'(x') \end{cases}$$

où λ est défini comme suit.

$$\begin{array}{ccccc} L^m & \xrightarrow{\pi} & B^{m+1} \subset K_{m+1} & \xrightarrow{\partial_K^{m+1}} & \cdots \\ \lambda \vdots & & \phi_{m+1} \big\downarrow & & \\ C^m & \xrightarrow{\partial_C^m} & C^{m+1} & \xrightarrow{\partial_C^{m+1}} & \end{array}$$

Pour tout x dans L^m, $\pi(x) \in \ker(\phi^{m+1}_{|\ker(\partial_K^{m+1})})$, donc $\phi^{m+1} \circ \pi(L^m) \subset \partial_C^m(C^m)$, de sorte qu'il existe $\lambda : L^m \longrightarrow C^m$ tel que $\partial_C^m \circ \lambda = \phi_{m+1} \circ \pi$.

Le morphisme ϕ_m est ainsi bien défini et on a $\partial_C^m \circ \phi_m = \phi_{m+1} \circ \partial_C^m$ et clairement $\partial_K^{m+1} \circ \partial_K^m = 0$. Par construction, $H^{m+1}(\mathbf{K}^\cdot) \longrightarrow H^{m+1}(\mathbf{C}^\cdot)$ est un isomorphisme, et ϕ_m induit une surjection $\bar{\lambda}'$ de $L'^m = \ker(\partial_K^m)$ sur $H^m(\mathbf{C}^\cdot)$. De plus, L^m et L'^m étant libres de type fini, K^m l'est aussi.

Au rang 0, les modules K^i sont construits pour $0 \leq i \leq n$. Changeons K^0 en $K^0/(\ker(\partial_K^0 \cap \ker(\phi_0)))$ de sorte qu'en posant $K^{-1} = 0$ on ait

$$H^0(\mathbf{K}^\cdot) = \ker(\partial_K^0)/(\ker(\partial_K^0) \cap \ker(\phi_0)) \cong H^0(\mathbf{C}^\cdot).$$

Alors K^0 est de type fini, mais il n'est plus nécessairement libre.

Démontrons que K^0 est plat.

Notons $\mathbf{C}'^{\cdot}$ le complexe $(\mathbf{C}[1], -\partial_C)$. Soit $\mathbf{P}^{\cdot}$ le cône de $\phi : P^p = K^p \oplus C^{p-1}$, $\partial_P^p = (\partial_K^p, \phi^p - \partial_C^p)$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathbf{C}'^{\cdot} \longrightarrow \mathbf{P}^{\cdot} \longrightarrow \mathbf{K}^{\cdot} \longrightarrow 0$$

est exacte et dans la suite longue induite en cohomologie, le morphisme de connexion est égal au morphisme induit par ϕ en cohomologie. On a démontré qu'il s'agit d'isomorphismes. Ainsi, pour tout p, $H^p(\mathbf{P}^{\cdot}) = 0$, c'est à dire $\mathbf{P}^{\cdot}$ est un complexe exact. Or pour tout $i \geq 1$, P^i est plat par construction. L'exactitude de $\mathbf{P}^{\cdot}$ implique que $P^0 = K^0$ est plat. Comme A est supposé noethérien, et que K^0 est de type fini, il est donc projectif.

On a ainsi construit un complexe $\mathbf{K}^{\cdot}$ de $(A\text{-}G)$-modules projectifs quasi-isomorphe à $\mathbf{C}^{\cdot}$. Pour toute A-algèbre B, on a donc ([Mum74])

$$H^p(\mathbf{K}^{\cdot} \otimes_A B) \cong H^p(\mathbf{C}^{\cdot} \otimes_A B).$$

□

Fin de la démonstration du lemme : Pour tout $y \in S$, on note $X_y = X \times_S \mathrm{Spec}(k(y))$ et $F_y = F \otimes k(y)$. Il s'agit de démontrer que $\sum(-1)^i[H^i(X_y, F_y)]$ est localement constante dans l'anneau $R(G)$. En appliquant le théorème précédent à F, on obtient un complexe $\mathbf{K}^{\cdot}$ tel que $[H^i(X_y, F_y)] = [\ker(\partial^p_{\mathbf{K}^{\cdot}} \otimes k(y))] - [\mathrm{im}(\partial^{p-1}_{\mathbf{K}^{\cdot}} \otimes k(y))]$. Puis, comme

$$0 \longrightarrow \ker(\partial^p \otimes k(y))] \longrightarrow [K^p \otimes k(y)] \longrightarrow [\mathrm{im}(\partial^p \otimes k(y))] \longrightarrow 0,$$

on a par additivité $[\ker(\partial^p \otimes k(y))] = [K^p \otimes k(y)] - [\mathrm{im}(\partial^p \otimes k(y))]$, d'où en sommant sur $\mathbb{Z}$

$$\sum(-1)^p[H^p(X_y, F_y)] = \sum(-1)^p[K^p \otimes k(y)].$$

On est donc ramené à démontrer que $\sum(-1)^p[K^p \otimes k(y)]$ est localement constant pour $y \in S$. Comme les conclusions sont locales, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$ est affine. Chaque K^p est une représentation linéaire de G que l'on peut décomposer selon les représentations irréductibles $K^p = \oplus_{\rho \in \mathrm{Irr}(G)} V_\rho \otimes_A K^p_\rho$, où $K^p_\rho = \mathrm{Hom}_A(V_\rho, K^p)$ est projectif (car facteur direct d'un libre). On obtient

$$\chi_G(X_y, F_y) = \sum(-1)^i \dim(K^i_\rho \otimes k(y))[V_\rho],$$

de sorte que le lemme 1.3.1 découle du lemme suivant. □

Lemme 1.3.3 *Un module projectif K sur A est de rang localement constant.*

Preuve : Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Alors $K_\mathfrak{p}$ est libre sur $A_\mathfrak{p}$. Soit $e_1, \ldots e_r$ une base. On va démontrer qu'au voisinage de $\mathfrak{p}$, le rang de K est r. Le module K étant de type fini, il a lui même un système générateur $\omega_1, \ldots \omega_s$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, il existe $g_j \notin \mathfrak{p}$ tel que $g_j\omega_j = \sum \beta_{j,i} e_i$. Posons $f = \Pi_{j=1}^s g_j$ et définissons $\varphi : A_f^r \longrightarrow K_f$ par $\varphi(a_i) = \sum a_i \frac{e_i}{f}$. Alors φ est surjectif, et par hypothèse, $\ker(\varphi)_\mathfrak{p} = 0$. Donc d'après le lemme de Nakayama, $\ker(\varphi) = 0$ au voisinage de $\mathfrak{p}$, de sorte que φ est un isomorphisme sur un voisinage de $\mathfrak{p}$. □

1.4 Le G-schéma de Hilbert

Définition 1.4.1 *Le G-schéma de Hilbert de X est le schéma G-Hilb(X) précédemment noté G-Hilb$_X^{R(G)}$, où $R(G)$ est le polynôme constant égal à la représentation régulière de G.*

Un point du G-schéma de Hilbert est un sous-schéma Z de X de dimension 0, et de faisceau structural $\mathcal{O}_Z$ tel que $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ est isomorphe à $R(G)$. On appelle un tel sous-schéma de X une G-grappe.

Lemme 1.4.2 *Soit Z une G-grappe de X. Alors le support de Z est une orbite de X sous G.*

Preuve : Pour $Z \in G-\text{Hilb}(X)$, comme Z est invariant sous l'action de G, son support consiste en une union de G-orbites. Par ailleurs G agit trivialement sur le sous espace vectoriel de $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ formé des fonctions constantes sur chaque orbite. Or en tant que G-module, $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ est la représentation régulière. Elle ne contient donc qu'une seule copie de la représentation triviale, ce qui implique que le support d'une G-grappe $Z \in G-\text{Hilb}(X)$ est réduit à une unique orbite de X sous l'action de G. □

Proposition 1.4.3 *Soit $U \subset X$ un ouvert G-stable. Alors le G-schéma de Hilbert G-Hilb(U) est un ouvert de G-Hilb(X).*

Preuve : On sait que le schéma de Hilbert de n points d'un fermé de X est un fermé du schéma de Hilbert Hilb$^n(X)$ ([Ser86]). Ainsi, G-Hilb$(X \setminus U)$ est un fermé de G-Hilb(X). Or par G-stabilité de U,

$$G\text{-Hilb}(X) = G\text{-Hilb}(X \setminus U) \sqcup G\text{-Hilb}(U).$$

□

Proposition 1.4.4 *Si X est un produit $X = X_1 \times X_2$, tel que G agit trivialement sur X_2, alors G-Hilb$(X) \simeq G$-Hilb$(X_1) \times X_2$.*

Preuve : On va démontrer que les foncteurs de points sont isomorphes. Soit S un schéma, et Z un S-point de G-Hilb$(X_1) \times X_2$. Alors $Z \in \text{Hom}(S, G\text{-Hilb}(X_1) \times X_2)$ qui par définition est $G - \mathcal{H}ilb_{X_1}(S) \times \text{Hom}(S, X_2)$, de sorte que Z est un couple

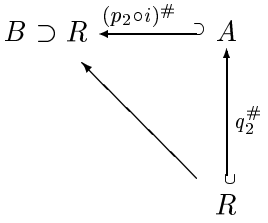
$$Z = \left(Z \xhookrightarrow{i} S \times X_1,\ S \xrightarrow{f} X_2 \right).$$

Considérons l'application $Z \xhookrightarrow{i'} S \times X_1 \times X_2$ qui à $z \in Z$ associe $(i(z), f \circ p_1(i(z)))$. Il s'agit d'un S-point de $G-\text{Hilb}(X)$. En effet, pour tout $s \in S$, la fibre $Z'_s = Z_s \times \{f(s)\}$ est une G-grappe de X. On a donc défini une application de $G-\mathcal{H}ilb_{X_1}(S) \times \text{Hom}(S, X_2)$ dans $G - \mathcal{H}ilb_X(S)$.

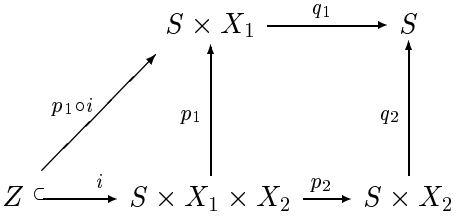
Réciproquement, si $Z \xhookrightarrow{i} S \times X$ est un S-point de $G-\text{Hilb}(X)$, alors on considère

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xhookrightarrow{i} & S \times X_1 \times X_2 & \xrightarrow{p_2} & S \times X_2 \\ & \searrow^{q} & \downarrow & \swarrow_{q_2} & \\ & & S & & \end{array}$$

Soit $s \in S$ et $(x_1, x_2) \in \mathrm{Supp}(Z_s)$ alors la coordonnée x_2 est indépendante du point du support choisi, car $\mathrm{Supp}(Z_s)$ est une orbite de G dans X et X_2 est invariant sous G. On veut définir un morphisme tel que l'application sous-jacente envoie s sur x_2. Raisonnons localement. Soit $\mathrm{Spec}(R) \subset S$ un ouvert affine. Alors $q^{-1}(\mathrm{Spec}(R)) = \mathrm{Spec}(B)$, où B est une R-algèbre finie. Soit Δ l'image schématique de $p_2 \circ i$ et A la R algèbre telle que $q_2^{-1}(\mathrm{Spec}(R)) \cap \Delta = \mathrm{Spec}(A)$. Étant donné que G agit trivialement sur X_2, A est une R-algèbre avec action triviale de G. Ainsi, le morphisme $(p_2 \circ i)^{\#} A \longrightarrow B$ est à but dans B^G. Or, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ est la représentation régulière de G sur $\mathbb{C}$. Ainsi, la composante isotypique de B relative à la représentation régulière est de dimension 1. En particulier, $B^G = R$. On a donc le diagramme suivant.



On en déduit que q_2 est un isomorphisme local entre l'image schématique de Z et S. En particulier il existe un morphisme de schémas $S \xrightarrow{f} X_2$ tel que (I_S, f) est une section de la restriction de q_2 à l'image schématique de $p_2 \circ i$. De plus, dans le carré cartésien suivant, l'isomorphisme $p_2 \circ i(Z) \cong S$ implique que $p_1 \circ i$ est une immersion fermée.



L'application $G - \mathcal{H}ilb_X(S) \longrightarrow G - \mathcal{H}ilb_{X_1}(S) \times \mathrm{Hom}(S, X_2)$ définie par

$$\left(Z \xhookrightarrow{i} S \times X_1 \times X_2\right) \longmapsto \left(Z \xhookrightarrow{i \circ p_1} S \times X_1, S \xrightarrow{f} X_2\right)$$

est la réciproque de la précédente, d'où l'isomorphisme des foncteurs de points. □

Remarque : Le lemme 1.4.4 est utile pour obtenir des résolutions localement produit : supposons que $X = X_1 \times X_2$, où G agit trivialement sur la composante X_1, et qu'il est connu que le G-schéma de Hilbert résout les singularités de X_2. Alors G-Hilb$(X_1) \times X_2$ est une résolution localement produit de X (voir [Joy00]).

Définition 1.4.5 *Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G agissant sur un schéma Y. Considérons le schéma produit $P = G \times Y$. Alors H agit naturellement sur P par $h(g, y) = (gh^{-1}, hy)$. On peut définir le G-schéma induit par Y comme étant le quotient de P par H.* $\mathrm{Ind}_G^H(Y) = (G \times Y)/H$.

Proposition 1.4.6 *Supposons que H est un sous-groupe de G agissant sur un sous-schéma Y de X de telle sorte que $X = \mathrm{Ind}_G^H(Y)$. Alors G-Hilb$(X) \simeq H$-Hilb(Y).*

Preuve : Ici encore, on va démontrer l'isomorphisme des foncteurs de points. Soit S un schéma et Z un S-point de H-Hilb(Y). Posons $Z' = \mathrm{Ind}_G^H(Z)$. Alors pour tout $s \in S$, $Z'_s = \mathrm{Ind}_G^H(Z_s)$, et comme le support de Z_s est une H-orbite, celui de Z'_s est une G-orbite. Puis,

$$\mathcal{O}_{Z'_s} = \mathcal{O}_{\mathrm{Ind}_G^H(Z_s)} = \Pi_{g \in G/H}\, g_* \mathcal{O}_{Z_s}$$

de sorte que la représentation $H^0(Z', \mathcal{O}_{Z'_s})$ de G est la représentation induite de la représentation $H^0(Z, \mathcal{O}_{Z_s}) = R(H)$ de H. On obtient bien la représentation régulière de G et on a ainsi défini une application de $H - \mathcal{H}ilb_Y$ vers $G - \mathcal{H}ilb_X$.

Réciproquement, soit Z un S-point de G-Hilb(X). On définit $Z' = Z \cap (S \times Y)$. Soit $s \in S$. Comme Y est stable par H, $H^0(Z', Z'_s)$ est une représentation de H, et comme $X = \mathrm{Ind}_G^H(Y)$, la représentation $H^0(Z_s, \mathcal{O}_{Z_s})$ est la représentation induite de H à G de $H^0(Z', Z'_s)$. Ainsi, pour tout $s \in S$, Z'_s est une H-grappe, de sorte que Z' est un S-point de H-Hilb(Y) et on a défini une application réciproque à la précédente, donc les foncteurs de points de G-Hilb(X) et H-Hilb(Y) sont isomorphes. □

1.5 Construction du morphisme de Hilbert-Chow

Dans ce paragraphe, on utilise la méthode de linéarisation du déterminant pour construire le morphisme de Hilbert-Chow $\Phi : \mathrm{Hilb}^N(X) \longrightarrow S^n(X)$. Le résultat de linéarisation du déterminant est largement inspiré de Iversen ([Ive70]). L'application à la construction du morphisme de Hilbert-Chow semble en revanche inédite.

1.5.1 Linéarisation du déterminant

Proposition 1.5.1 *Soit A un anneau commutatif et n un entier. Il existe un unique morphisme d'anneaux*

$$\mathrm{ldet} : (M_n(A)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \longrightarrow A$$

tel que $\mathrm{ldet}(a \otimes \ldots \otimes a) = \det(a)$.

Preuve : On note $e_{r,s}$ la matrice élémentaire nulle partout sauf en ligne r et colonne s. Comme $M_n(A) = \oplus_{1 \leq r,s \leq n} e_{r,s} A$, le produit tensoriel $M_n(A)^{\otimes n}$ est engendré par les $e_{r_1,s_1} \otimes \ldots \otimes e_{r_n,s_n}$, pour $1 \leq r_i, s_i \leq n$.

Soient f et g des éléments de T_n (ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans lui même). Notons $E_{f,g} = e_{f(1),g(1)} \otimes \ldots \otimes e_{f(n),g(n)}$. Alors $M_n(A)^{\otimes n} = \oplus_{(f,g) \in T_n^2} E_{f,g} A$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement sur $M_n(A)^{\otimes n}$ via son action sur T_n^2 : $\sigma \cdot E_{f,g} = E_{\sigma \cdot (f,g)} = E_{f\sigma^{-1}, g\sigma^{-1}}$.

Lemme 1.5.2 *L'algèbre des invariants est donnée par*

$$(M_n(A)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} = \oplus_{(f,g) \in T_n^2/\mathfrak{S}_n} \square E_{f,g} A,$$

où $\square E_{f,g} = \sum_{(f',g') \equiv (f,g) \bmod \mathfrak{S}_n} E_{f',g'}$.

Pour toute application $f \in T_n$ on définit $\varepsilon(f)$ comme étant égale à la signature de f si $f \in \mathfrak{S}_n$ et nulle sinon.

Lemme 1.5.3 *Posons* $\mathrm{ldet}(\square E_{f,g}) = \varepsilon(f)\varepsilon(g)$. *Cette formule définit* ldet *comme morphisme d'anneaux de* $(M_n(A)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ *dans* A.

Preuve : Il suffit de démontrer

$$\mathrm{ldet}(\square E_{f,g}\square E_{h,k}) = \varepsilon(f)\varepsilon(g)\varepsilon(h)\varepsilon(k) = \mathrm{ldet}(\square E_{f,g})\mathrm{ldet}(\square E_{h,k}).$$

Soient $f, g, h, k \in T_n$. Remarquons que $E_{f,g}E_{h,k} = \delta_{g,h}E_{f,k}$, où $\delta_{g,h} = \Pi_{i=1}^n g(i)h(i)$. Ainsi,

$$\square E_{f,g}\square E_{h,k} = \sum_{(f',g')\in\mathfrak{S}_n(f,g)} \sum_{(h',k')\in\mathfrak{S}_n(h,k)} \delta_{g',h'}E_{f',k'}.$$

Cette somme étant dans $(M_n(A)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$, c'est clairement une combinaison linéaire de $\square E_{f,\sigma k}$, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, de sorte que le déterminant linéarisé de $\square E_{f,g}\square E_{h,k}$ est nul dès que f ou k n'est pas bijective. Dans ce cas, on a bien l'identité cherchée.

Supposons maintenant que f et k sont bijectives. Alors l'orbite de (f,g) est libre, ainsi que celle de (h,k). On a donc

$$\square E_{f,g}\square E_{h,k} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\tau\in\mathfrak{S}_n} \delta_{g\sigma^{-1},h\tau^{-1}}E_{f\sigma^{-1},k\tau^{-1}}.$$

Or $\delta_{g\sigma^{-1},h\tau^{-1}} = \delta_{g,h\tau^{-1}\sigma}$, donc en posant $\tau' = \sigma^{-1}\tau$, on a

$$\square E_{f,g}\square E_{h,k} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sum_{\tau'\in\mathfrak{S}_n} \delta_{g,h\tau'^{-1}}E_{f\sigma^{-1},k\tau'^{-1}\sigma^{-1}} = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \delta_{g,h\tau^{-1}}\square E_{f,k\tau^{-1}}.$$

Comme la signature est multiplicative, $\square E_{f,k\tau^{-1}} = \varepsilon(f)\varepsilon(k)\varepsilon(\tau)$, et il reste à démontrer que $\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n|g\tau=h}\varepsilon(\tau) = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$. Si g et h ne sont pas dans la même orbite modulo $\mathfrak{S}_n$, alors g ou h n'est pas inversible, et l'égalité est vérifiée. Si il existe τ_0 tel que $g\tau_0 = h$, alors on cherche la somme $S = \sum_{g\tau_0=g\tau}\varepsilon(\tau)$. Si g est inversible, h également et cette somme est réduite à un élément : on a $S = \varepsilon(\tau_0) = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$. Sinon, fixons i et j ayant la même image par g. Alors la permutation (ij) échange les permutations paires et impaires vérifiant $g\tau = h$. La somme S est donc nulle et l'égalité est encore vérifiée. □

Reste à voir que pour tout $a \in M_n(A)$, on a $\mathrm{ldet}(a\otimes\ldots\otimes a) = \det(a)$. Soit $a = \sum a_{i,j}e_{i,j}$ la décomposition de a dans la base canonique de $M_n(A)$. Alors $a\otimes a\ldots\otimes a = \sum a_{i_1,j_1}\ldots a_{i_n,j_n}e_{i_1,j_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_n,j_n}$. Notons $a_{f,g} = \Pi_{i=1}^n a_{f(i),g(i)}$. Pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $a_{\sigma\cdot(f,g)} = a_{f,g}$, de sorte que l'on a $a\otimes a\ldots\otimes a = \sum_{(f,g)\in T_n^2/\mathfrak{S}_n} a_{f,g}\square E_{f,g}$, et $\mathrm{ldet}(a\otimes a\ldots\otimes a) = \sum_{(f,g)\in T_n^2/\mathfrak{S}_n} a_{f,g}\varepsilon(f)\varepsilon(g)$. Les facteurs tels que f et g ne sont pas inversibles étant nuls, on obtient

$$\mathrm{ldet}(a\otimes a\ldots\otimes a) = \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} a_{1,g}\varepsilon(g) = \sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(g)\Pi_{i=1}^n a_{i,g(i)} = \det(a).$$

Enfin, l'unicité provient de la multilinéarité du produit tensoriel. Soient ldet et ldet$'$ vérifiant les propriétés requises. Notons $\psi = \mathrm{ldet} - \mathrm{ldet}'$. Soit $a = a_1\otimes\ldots\otimes a_n \in M_n(A)_A^{(n)}$. Alors en développant $\psi(\sum_{i=1}^n a_i t_i\otimes\ldots\otimes\sum_{i=1}^n a_i t_i) = 0$, on obtient un polynôme homogène de degré n en $t_1,\ldots,t_n$ dont le coefficient du monôme $\Pi_{i=1}^n t_i$ est $n!\psi(a)$. Ainsi, ψ est nul, d'où l'unicité de la linéarisation du déterminant. □

Remarque : : on démontre facilement que si A est de caractéristique nulle, la formule suivante définit le déterminant linéarisé :

$$\begin{aligned} \mathrm{ldet}(a_1 \otimes a_2 \ldots \otimes a_n) &= 1/n! \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \det(a_{\sigma_1}(1), \ldots a_{\sigma_n}(n)) \\ &= 1/n! \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \det(a_1(\sigma_1), \ldots a_n(\sigma_n)), \end{aligned}$$

où $a_j(i)$ est la i-ième colonne de a_j.

1.5.2 Application géométrique

Soit A un anneau commutatif et B une A-algèbre libre de dimension n. L'identification canonique $\mathrm{End}_A(B) \simeq M_n(A)$ induit un morphisme d'anneaux $\mathrm{End}_A(B)^{(n)} = (\mathrm{End}_A(B)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \xrightarrow{\mathrm{ldet}} A$. Si l'on compose avec le morphisme induit par le morphisme naturel $b \to h_b$ de B dans $\mathrm{End}_A(B)$, on obtient le corollaire suivant.

Proposition 1.5.4 *Il existe un morphisme d'anneaux $B_A^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{lNm}} A$ dit norme linéarisée, tel que pour tout $b \in B$, $\mathrm{lNm}(b \otimes \ldots \otimes b) = \det(h_b)$.*

La définition de la norme linéarisée est indépendante de la base choisie pour B. En effet, soit φ un changement de bases. Pour tout $f \in \mathrm{End}_A(B)^{(n)}$, on a $\mathrm{ldet}(\varphi f \varphi^{-1}) = \mathrm{ldet}(f)$, par unicité de la linéarisation du déterminant. □

Lemme 1.5.5 *Si B est un produit d'algèbres $B = B_1 \times B_2$ avec $\dim(B_1) = n_1$ et $\dim(B_2) = n_2$, alors $B_A^{(n)} = \Pi_{p+q=n} B_1^{(p)} \otimes B_2^{(q)}$ et* lNm *factorise par la projection sur $B_1^{(n_1)} \otimes B_2^{(n_2)}$:*

$$\begin{array}{ccc} B_A^{(n)} & \xrightarrow{\mathrm{lNm}} & A \\ & \searrow & \uparrow \mathrm{lNm}_1 \otimes \mathrm{lNm}_2 \\ & & B_1^{(n_1)} \otimes B_2^{(n_2)} \end{array}$$

Preuve : Si $B = B_1 \times B_2$, alors $B^{\otimes n} = \Pi_{p+q=n} B_1^{\otimes p} \otimes B_2^{\otimes q}$ et il est clair que lorsqu'on prend les invariants sous l'action de $\mathfrak{S}_n$, on obtient $B^{(n)} = \Pi_{p+q=n} B_1^{(p)} \otimes B_2^{(q)}$.

Pour démontrer que le morphisme $\mathrm{lNm} : B^{(n)} \longrightarrow k$ factorise par le produit $\mathrm{lNm}_1 \otimes \mathrm{lNm}_2 : B_1^{(n_1)} \otimes B_2^{(n_2)} \longrightarrow k$, utilisons la formule du déterminant linéarisé.

Soit $b = b_1 \otimes \ldots \otimes b_p \otimes b'_1 \otimes \ldots \otimes b'_q \in B_1^{(\otimes p)} \otimes B_2^{(\otimes q)}$. Soit $(e_1, \ldots e_{n_1})$ une base de B_1 et $(e_{n_1+1}, \ldots, e_n)$ une base de B_2. Alors $((e_1, 1), \ldots (e_{n_1}, 1), (1, e_{n_1+1}), \ldots, (1, e_n))$ est une k-base de B. Notons h_{b_i} la matrice représentant l'application multiplication par b_i dans cette base. Alors

$$\mathrm{lNm}(b) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \det \begin{pmatrix} \text{colonne} & & \text{colonne} & \text{colonne} & & \text{colonne} \\ \sigma(1) & \ldots, & \sigma(p) & \sigma(p+1) & \ldots, & \sigma(n) \\ \text{de } h_{b_1} & & \text{de } h_{b_p} & \text{de } h_{b'_1} & & \text{de } h_{b'_q} \end{pmatrix}$$

Or si $b_i \in B_1$, la matrice h_{b_i} est une matrice par bloc de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et si $b'_j \in B_2$, alors $h_{b'_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, de sorte que si $p \neq n_1$ et $q \neq n_2$, chacun des termes de la somme

est nul. Par ailleurs, si $p = n_1$ et $q = n_2$, alors la norme linéarisée de b est

$$\mathrm{lNm}(b) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{n_1}, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n_2}} \varepsilon(\sigma) \det \begin{pmatrix} \text{colonne} & & \text{colonne} & \text{colonne} & & \text{colonne} \\ \sigma_1(1) & \dots, & \sigma_1(n_1) & \sigma_2(1) & \dots, & \sigma_2(n_2) \\ \text{de } h_{b_1} & & \text{de } h_{b_{n_1}} & \text{de } h_{b'_1} & & \text{de } h_{b'_{n_2}} \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{n!} \sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{n_1}, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n_2}} \varepsilon(\sigma_1) \det \begin{pmatrix} \text{colonne} & & \text{colonne} \\ \sigma_1(1) & \dots, & \sigma_1(n_1) \\ \text{de } h_{b_1} & & \text{de } h_{b_{n_1}} \end{pmatrix} \times \varepsilon(\sigma_2) \det \begin{pmatrix} \text{colonne} & & \text{colonne} \\ \sigma_2(1) & \dots, & \sigma_2(n_2) \\ \text{de } h_{b'_1} & & \text{de } h_{b'_{n_2}} \end{pmatrix}$$

Finalement, on obtient

$$\mathrm{lNm}(b) = \frac{n_1! n_2!}{n!} \mathrm{lNm}(b_1 \otimes \dots \otimes b_{n_1}) \mathrm{lNm}(b'_1 \otimes \dots \otimes b'_{n_2}).$$

□

Soit $\mathscr{Z} \longrightarrow H$ un morphisme fini de rang n. La construction locale ci-avant étant fonctorielle, on peut recoller les morphismes définis sur des ouverts affines et on obtient un morphisme $H \longrightarrow (\mathscr{Z} \times_H \dots \times_H \mathscr{Z})/\mathfrak{S}_n$, section du morphisme naturel de $S^n_H(\mathscr{Z}) = (\mathscr{Z} \times_H \dots \times_H \mathscr{Z})/\mathfrak{S}_n$ dans H. Avec $H = \mathrm{Hilb}^n(X)$ et $\mathscr{Z}$ la famille universelle, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.5.6 *Il existe un morphisme $\Phi : \mathrm{Hilb}^n(X) \longrightarrow S^n(X)$ projectif, dit morphisme de Hilbert-Chow qui à un point $h \in \mathrm{Hilb}^N(X)$ correspondant au sous-schéma Z de X associe son support avec multiplicité*

$$Z \mapsto \sum_{x \in |Z|} \mathrm{prof}(Z_x) x.$$

De plus, le morphisme de Hilbert-Chow est un isomorphisme au dessus de l'ouvert complémentaire à la grosse diagonale de $S^n(X)$.

Preuve : Avec la construction ci-avant, comme $\mathscr{Z} \hookrightarrow X \times \mathrm{Hilb}^n(X)$, on obtient Φ par composition

$$\Phi : \mathrm{Hilb}^n(X) \longrightarrow S^n_{\mathrm{Hilb}^n(X)}(\mathscr{Z}) \hookrightarrow S^n(X) \times \mathrm{Hilb}^n(X) \longrightarrow S^n(X)$$

Remarquons que Φ est la composé d'un morphisme fini et de la première projection de $S^n(X) \times \mathrm{Hilb}^n(X)$ sur $S^n(X)$. Le schéma de Hilbert étant projectif, ces morphismes le sont également donc Φ est projectif.

Soit $h \in \mathrm{Hilb}^n(X)$. Pour montrer que $\Phi(h)$ est le cycle défini par le support de $\mathscr{Z}_h$ avec multiplicité, on va faire une récurrence sur le cardinal de ce support.

Supposons que $\mathrm{Supp}(\mathscr{Z}_h)$ est réduit à un point $x \in X$. Par définition Φ factorise par $S^n_{\mathrm{Hilb}^n(X)}(\mathscr{Z})$. Remarquons que la norme linéarisée est une section du morphisme naturel

$S^n_{\mathrm{Hilb}^n(X)}(\mathscr{Z}) \xrightarrow{p} \mathrm{Hilb}^n(X)$. Comme $\mathscr{Z}_h$ est de support réduit à un point x, la fibre de p au-dessus de h est l'image du n-uplet $(x, \dots, x)$ lors du quotient

$$\mathscr{Z}_h \times_{\mathrm{Hilb}^n(X)} \dots \times_{\mathrm{Hilb}^n(X)} \mathscr{Z}_h \longrightarrow S^n_{\mathrm{Hilb}^n(X)}(\mathscr{Z}_h).$$

Ainsi,

$$\Phi(h) = nx = \sum_{x \in |\mathscr{Z}_h|} \mathrm{prof}(\mathscr{Z}_{hx})x.$$

Supposons maintenant que le résultat est démontré pour tout h tel que $\mathrm{Supp}(\mathscr{Z}_h)$ a un support de cardinal inférieur à k, et soit $h \in \mathrm{Hilb}^n(X)$ un point correspondant à une grappe de support de cardinal k. Notons $\mathscr{Z}_h = Z = Z_1 \sqcup Z_2$, où Z_1 et Z_2 sont disjoints. Au voisinage de h, le support de $\mathscr{Z}_h$ est de cardinal k, et il existe un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de $\mathrm{Hilb}^n(X)$ tel que

$$\mathscr{Z}|_U = \mathrm{Spec}(B_1 \times B_2),$$

où B_1 et B_2 sont des A-algèbres de types finis. D'après le lemme 1.5.5, La restriction à U du morphisme Φ factorise par $S^n(\mathrm{Spec}(B_1)) \cup S^n(\mathrm{Spec}(B_2))$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à Φ_1 et Φ_2, on obtient le résultat voulu.

Soit U l'ouvert de $\mathrm{Hilb}^n(X)$ réciproque de $S^n(X) \setminus \Delta$, où Δ est la diagonale épaissie. Soit $h \in U$. Alors le support de $\mathscr{Z}_h$ est de cardinal n : $\mathrm{Supp}(\mathscr{Z}_h) = \{x_1, \dots x_n\}$; et la fibre du morphisme $\mathscr{Z} \times_{\mathrm{Hilb}^n(X)} \dots \times_{\mathrm{Hilb}^n(X)} \mathscr{Z} \longrightarrow \mathrm{Hilb}^n(X)$ au-dessus de h est l'orbite de $(x_1, \dots x_n)$ sous l'action de $\mathfrak{S}_n$. En particulier, elle est de cardinal n. Soit $U_h = \mathrm{Spec}(A)$ un voisinage ouvert affine de h et $\mathfrak{p} \subset A$ l'idéal premier correspondant au point h. Soit B l'algèbre finie sur A telle que $\mathscr{Z}|_{U_h} = \mathrm{Spec}(B)$. Alors il existe un morphisme surjectif $A^m \longrightarrow B$. Soit C son noyau. D'après l'hypothèse, la localisation en $\mathfrak{p}$ donne $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}_\mathfrak{p} = (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}_\mathfrak{p})^n$, de sorte que $m = n$ et $C_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m}_P} = 0$. D'après le lemme de Nakayama, il existe un ouvert affine $A_{(f)}$ tel que $B_{(f)} = A^n_{(f)}$.

Supposons maintenant que U_h est choisi assez petit pour que $B = A^n$. D'après le lemme 1.5.5, la norme linéarisée factorise par le produit tensoriel $A^{\otimes n} = A$:

$$\begin{array}{ccc} (A \times \dots \times A)^{(n)} & \xrightarrow{\mathrm{lNm}} & A \\ & \searrow & \uparrow \mathrm{lNm}_1 \otimes \dots \otimes \mathrm{lNm}_2 \\ & & A \otimes \dots \otimes A \end{array}$$

Or si $B = A$, la norme linéarisée $A \xrightarrow{\mathrm{lNm}} A$ est l'identité, de sorte que $B^{(n)}_A \xrightarrow{\mathrm{lNm}} A$ est l'identité.

On a démontré que Φ est un isomorphisme au voisinage de chaque point de l'ouvert U complémentaire à la grosse diagonale. Comme il est bijectif sur cet ouvert, la restriction Φ_U est un isomorphisme entre U et $S^n(X) \setminus \Delta$.

1.5.3 Le morphisme de Hilbert-Chow G-équivariant

Soit $\mathcal{Z} \subset G\text{-Hilb}(X) \times X$ la famille universelle du G-schéma de Hilbert. Considérons le quotient $\mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}/G \subset G\text{-Hilb}(X) \times X/G$. Chaque G-grappe Z est envoyée sur un point de longueur un dans X/G, car l'algèbre des invariants de la représentation régulière est de dimension un. On définit ainsi un morphisme

$$G\text{-Hilb}(X) \xrightarrow{\phi} X/G.$$

Définition 1.5.7 *ϕ est le morphisme de Hilbert-Chow G-équivariant.*

Proposition 1.5.8 *Le morphisme de Hilbert-Chow G-équivariant est en ensemblistement la restriction du morphisme de Hilbert-Chow au schéma G-Hilb(X).*

Preuve : Pour $Z \in G\text{-Hilb}(X)$, on a vu que le support de Z est une orbite de X sous l'action de G (lemme 1.4.2). Ainsi, la restriction du morphisme de Hilbert-Chow à G-Hilb(X) envoit une grappe Z dont le support contient x sur $\sum_{y\in Gx} \#(G_x)[y] = \sum_{g\in G}[gx] \in S^n(X)^G$. Or l'image du morphisme $X \xrightarrow{\pi} S^n(X)$ envoyant x sur $\sum_{g\in G}[gx]$ est une composante irréductible du schéma des points fixes $S^n(X)^G$ de la variété de Chow $S^n(X)$ qui est en bijection avec X/G. □

Au-dessus de l'ouvert dense de X/G image par π de l'ensemble des points de stabilisateur trivial, et contenu dans l'ouvert des points réguliers de X/G, le morphisme de Hilbert-Chow est un isomorphisme. Ainsi, si G-Hilb(X) est lisse, connexe et de dimension égale à celle de X, alors $\phi : G\text{-Hilb}(X) \longrightarrow X/G$ est une résolution des singularités de X.

1.6 Cas des groupes engendré par des réflexions. Variations autour du théorème de Chevalley

1.6.1 Notations

Définition 1.6.1 *Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie. On appelle réflexion de V tout automorphisme linéaire g d'ordre fini tel que $1-g$ soit de rang 1. Un groupe de réflexions de V est un groupe fini engendré par des réflexions de V.*

Par exemple, si R est un système de racines réel et Q le réseau engendré par R, le groupe de Weyl $W(\mathrm{R})$ est un groupe de réflexions sur $Q \otimes \mathbb{C}$. Notons $S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ l'algèbre symétrique sur V. Le groupe W agit alors naturellement sur S et sur le schéma affine $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(S)$. Notons $R = S^W$ l'algèbre des polynômes invariants sous l'action de W. Alors $\mathbb{A}^n/W = \mathrm{Spec}(R)$.

Définition 1.6.2 *Pour tout groupe G agissant sur S, on notera I_G l'idéal engendré par les polynômes invariants sous G s'annulant en 0 et $S_G = S/I_G$ le quotient par cet idéal. Cette algèbre S_G est appelée algèbre coinvariante de S pour l'action de G.*

1.6.2 Quelques résultats préliminaires

Dans ce paragraphe, on rappelle les résultats de Steinberg sur les algèbres S et R ([Ste64]).

Théorème 1.6.3 [Ste64, Theorem 1.5], [Hum90, proposition 1.14]
Soit U un sous-espace vectoriel de V. Alors le sous-groupe W' de W laissant U invariant point par point est un groupe de réflexions de U.
De plus, si $W = W(\mathrm{R})$ est le groupe de Weyl d'un système de racines, alors W' est le groupe de Weyl d'un sous-système de racines de R.

Théorème 1.6.4 [Ste64, Theorem 1.3], [Bou81, Ch.V n° 5.3]
La $\mathbb{C}$-algèbre R des polynômes invariants sous W est engendrée par n éléments homogènes algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$. En particulier, le quotient $\mathbb{A}^n/W = \mathrm{Spec}(R) \cong \mathbb{A}^n$.

Théorème 1.6.5 [Bou81, Ch.V n° 5.2]
L'algèbre coinvariante S_W est isomorphe à la représentation régulière de W sur $\mathbb{C}$.

Un élément $s \in S$ est dit anti-invariant par W si pour tout $w \in W$, $w \cdot s = \det(w)^{-1} s$. Soit H l'ensemble des hyperplans des réflexions non triviales appartenant à W et pour tout $h \in H$ soit $R_h \in V^*$ s'annulant sur h et e_h son ordre.

Théorème 1.6.6 [Ste64, Theorem 1.3], [Bou81, Ch.V n° 5.4]

1. *Soit Δ le produit des $R_h^{e_h - 1}$ pour h parcourant H. Les éléments de S anti-invariants sont les éléments de ΔR.*
2. *Si $f_1, \ldots, f_n$ sont des générateurs homogènes algébriquement indépendants de S engendrant R (théorème 1.6.4), alors le jacobien $J = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ est de la forme $\lambda\Delta$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

1.6.3 Le W-schéma de Hilbert de $\mathbb{A}^n$

En utilisant les résultats de Steinberg (théorème 1.6.4), on démontre que si W est engendré par des réflexions, alors $\mathbb{A}^n/W \cong W\text{-Hilb}(\mathbb{A}^n)$.

Théorème 1.6.7 *Soit W un groupe de réflexions agissant naturellement sur $\mathbb{A}^n$. Alors le morphisme de Hilbert-Chow $W\text{-Hilb}(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{A}^n/W$ est un isomorphisme.*

Preuve : Pour commencer, démontrons que Φ est un morphisme bijectif. Au-dessus de l'ouvert des points de $\mathbb{A}^n$ de stabilisateur trivial, on sait que Φ est un isomorphisme. Soit maintenant $x \in \mathbb{A}^n$ de stabilisateur H non trivial, et $y \in \mathbb{A}^n/W$ son image par le quotient.

Si $H = W$, alors x est l'origine de $\mathbb{A}^n$. Un point de $\Phi^{-1}(y)$ est une W-grappe de $\mathbb{A}^n$ de support l'origine. Une telle grappe est définie par un idéal I de $S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ contenu dans S_+, l'ensemble des polynômes s'annulant en l'origine, et tel que $S/I \cong \mathbb{C}[W]$, la représentation régulière de W.

La représentation triviale apparaissant avec multiplicité 1 dans la représentation régulière, l'idéal $I_W = R_+ S$ engendré par les polynômes W-invariants somme de polynômes

homogènes de degrés strictement positifs est inclus dans I. On cherche donc l'ensemble $\{I$ idéal de S tel que $I_W \subset I$ et $S/I \cong \mathbb{C}[W]\}$. Il est en bijection avec l'ensemble des idéaux J de $S_W = S/I_W$ tels que $S_W/J \cong \mathbb{C}[W]$. Or d'après le théorème 1.6.5, l'algèbre S_W est la représentation régulière de W. Il existe donc une unique W-grappe antécédent à y.

Si H est un sous-groupe strict de W stabilisant x, notons $\Lambda_H = \cap_{\sigma \in H} \ker(\sigma - 1)$, et soit Λ' un supplémentaire W-stable de Λ_H. Alors H est un groupe de réflexions de Λ'. Choisissons $e_1, \ldots, e_n$ une base de V avec $e_i \in \Lambda_H$ pour $i \leq r$ et $e_i \in \Lambda'$ pour $i \geq r+1$. Alors $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^r \times \mathbb{A}^{n-r}$ et il existe un voisinage U de x stable par W tel que

$$U = \bigsqcup_{g \in W/H} g \cdot U_0,$$

avec $U_0 = U_H \times U'$, où H agit trivialement sur $U_H \subset \mathbb{A}^r$, et U' est un voisinage de $0 \in \mathbb{A}^{n-r}$, sur lequel H agit naturellement comme groupe de réflexions.

D'après la proposition 1.4.6, on a W-Hilb$(U) = H$-Hilb(U_0), puis d'après la proposition 1.4.4, H-Hilb$(U_0) = U_H \times H$-Hilb(U'). Or le morphisme de Hilbert-Chow H-Hilb$(U') \longrightarrow U'/H$ est bijectif d'après la situation précédente. Par ailleurs, comme H agit trivialement sur U_H, on a $(U_H \times U')/H \cong U_H \times U'/H$.

Finalement, d'après la proposition 1.4.3 le morphisme de Hilbert-Chow

$$\begin{array}{ccc} W\text{-Hilb}(\mathbb{A}^n) & \longrightarrow & \mathbb{A}^n/W \\ \uparrow & & \uparrow \\ W\text{-Hilb}(U) & \longrightarrow & U/W \end{array}$$

est bijectif au voisinage de x.

On a démontré que $\Phi : W$-Hilb$(\mathbb{A}^n) \longrightarrow \mathbb{A}^n/W$ est bijectif. En particulier, ses fibres sont finies, et comme il est projectif (théorème 1.5.6), cela implique que ce morphisme est fini ([Har77]). Finalement, il est birationnel et fini à but dans une variété lisse, le théorème suivant qui est une conséquence du théorème de Zariski ([Mum88]) permet alors de conclure. □

Théorème 1.6.8 *Soit Y une variété lisse, et $X \xrightarrow{\phi} Y$ un morphisme birationnel fini. Alors ϕ est un isomorphisme.*

1.6.4 Application au cas global lorsque le quotient est lisse

Théorème 1.6.9 *Soit X une variété et G un groupe fini agissant sur X de telle sorte que le quotient X/G est lisse. Alors le morphisme de Hilbert-Chow G-Hilb$(X) \longrightarrow X/G$ est un isomorphisme.*

Preuve : Le morphisme quotient $X \xrightarrow{\pi} X/G$ est plat, de sorte que son graphe $\mathcal{G}_\pi$, qui est isomorphe à X peut être considéré comme une famille plate de G-grappes de X indexée par X/G :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\pi & \longrightarrow & X \times X/G \\ & \searrow & \downarrow p_2 \\ & & X/G \end{array}$$

En effet, si $\omega \in X/G$, alors pour ω général, $\pi^{-1}(\omega)$ est un schéma de support une orbite libre de $\mathrm{Card}(G)$ points de X. C'est clairement une G-grappe de X. Puis, d'après le lemme 1.3.1, $\chi_G(X_s, F_s)$ est constante car X/G est connexe. Ainsi, $\mathcal{G}_\pi$ est bien une famille plate de G-grappes de X, indexée par X/G.

D'après la propriété universelle du schéma de Hilbert, il existe un morphisme

$$X/G \xrightarrow{\Psi} G\text{-Hilb}(X)$$

tel que $\mathcal{G}_\pi$ est l'image réciproque par Ψ de la famille universelle des G-grappes. Si l'on considère le morphisme Ψ au niveau des points, à un point $\omega \in X/G$ il associe la G-grappe $\pi^{-1}(\omega)$, qui est un point de G-Hilb(X). En particulier, on remarque que si Φ est le morphisme de Hilbert-Chow

$$G\text{-Hilb}(X) \xrightarrow{\Phi} X/G,$$

alors le morphisme composé $\Phi\Psi : X/G \longrightarrow X/G$ est topologiquement égal à l'identité sur les points de X/G.

Nous démontrons que le morphisme de Hilbert-Chow est bijectif. Étant donné qu'il est projectif et birationnel, le théorème de Zariski 1.6.8 permet alors de conclure. Pour cela, et étant donnée la remarque précédente, il suffit de démontrer que Ψ est bijectif.

Lemme 1.6.10 *Soit X une variété et G un groupe fini agissant sur X de telle sorte que le quotient X/G soit lisse. Alors pour tout $\omega \in X/G$, il existe une unique G-grappe de X de support $\pi^{-1}(\omega)$.*

Preuve : Soit $\omega \in X/G$. Si $\pi^{-1}(\omega)$ a pour cardinal $\mathrm{Card}(G)$, alors il n'y a qu'un moyen de munir $\pi^{-1}(\omega)$ d'une structure de G-grappe. Sinon, soit x un point de $\pi^{-1}(\omega)$ et H son stabilisateur. Alors $\pi^{-1}(\omega) = \mathrm{Ind}_G^H(\{x\})$, de sorte que l'ensemble des G-grappes de X de support $\pi^{-1}(\omega)$ est en bijection avec l'ensemble des H-grappes supportées en $\{x\}$ (proposition 1.4.6).

Soient $t_1, \dots t_r$ des générateurs de l'espace tangent $T_x(X) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. D'après le théorème de Chevalley, Shephard et Todd [Bou81], H agit comme un groupe de réflexion sur $T_x(X)$. D'après le théorème 1.6.7, il n'existe donc qu'une H-grappe supportée en l'origine de $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}) = \mathrm{Spec}(k[[t_1, \dots, t_r]])$. Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux définissant une H-grappe supportée en x. Alors $\mathcal{I}$ est entièrement déterminée par sa fibre $\mathcal{I}_x$, et $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ étant fidèlement plat sur $\mathcal{O}_{X,x}$, celle-ci est unique. □

Chapitre 2

Résolution de singularités affines et correspondance de McKay en dimension trois

Soit W un groupe de réflexions de $\mathbb{A}^3$ associé à un système de racines réel. D'après le théorème de Steinberg 1.6.4, le quotient $\mathbb{A}^3/W$ est lisse car l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[x,y,z]^W$ est une $\mathbb{C}$-algèbre graduée de polynômes de degré de transcendance 3 sur $\mathbb{C}$. On a démontré dans le chapitre 1 que le W-schéma de Hilbert est alors isomorphe au quotient $\mathbb{A}^3/W$ (théorème 1.6.7).

On s'intéresse ici au quotient de $\mathbb{A}^3$ par le sous-groupe $W_+ = W \cap \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ engendré par les produits pairs de réflexions de W. Le quotient $\mathbb{A}^3/W_+$ présente une singularité à l'origine dont on exhibe deux résolutions naturelles différentes. D'une part, on observe que le quotient $\mathbb{A}^3/W_+ \longrightarrow \mathbb{A}^3/W$ est un revêtement double, ce qui donne naissance à une résolution par la méthode de Jung, qui consiste à résoudre les singularités du lieu de branchement tout en conservant un revêtement double. D'autre part, d'après le théorème de Bridgeland, King et Reid [BKR01] le schéma de Hilbert W_+-Hilb($\mathbb{A}^3$) est lisse et résout la singularité.

Dans le premier paragraphe, on explique la méthode de résolution de Jung pour des singularités de points doubles. Pour chaque système de racines R, de dimension 3, on calcule alors dans le deuxième paragraphe la fibre exceptionnelle au-dessus de la singularité $X_{\mathrm{R}} = \mathbb{A}^3/W_+(\mathrm{R})$ lors de la résolution par la méthode de Jung. Puis, dans le troisième paragraphe, on calcule la fibre exceptionnelle lors de la résolution par le $W+$-schéma de Hilbert. Enfin, on remarque dans le dernier paragraphe un phénomène de correspondance de McKay lors de la résolution par le schéma de Hilbert.

2.1 La méthode de résolution de Jung

2.1.1 Revêtement double

Définition 2.1.1 *Soient X et Y deux variétés normales. Un morphisme $X \xrightarrow{\pi} Y$ est un revêtement double si et seulement si le morphisme π est fini tel que $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_Y$-algèbre localement libre de rang 2.*

Dans la suite du paragraphe, on supposera toujours X et Y normales.

Lemme 2.1.2 *Soit $X \xrightarrow{\pi} Y$ un revêtement double. Alors il existe un unique faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur Y tel que*

$$\pi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}.$$

Preuve : Localement, on a un morphisme $V_i = \mathrm{Spec}(B_i) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}(A_i) = U_i$ avec A_i, B_i locaux tels que B_i est libre de rang 2 comme A_i-algèbre. On définit le morphisme trace $B_i \xrightarrow{Tr} A_i$ de la façon suivante.

$$\mathrm{Tr} : b \longrightarrow \mathrm{tr}\begin{pmatrix} B_i & \to & B_i \\ y & \mapsto & yb \end{pmatrix}$$

Par hypothèse, $\mathrm{Tr}(1) = 2$ est inversible dans A_i, de sorte que le morphisme trace est surjectif.

Ainsi, $B_i = A_i \oplus \ker(\mathrm{Tr})$, car la suite exacte $\ker(\mathrm{Tr}) \longrightarrow B_i \underset{\pi^\#}{\overset{\mathrm{Tr}}{\rightleftarrows}} A_i \longrightarrow 0$ est scindée. Il existe donc $\xi \in \ker(\mathrm{Tr})$ tel que $B_i = A_i \oplus A_i\xi$. On observe qu'alors on a nécessairement $\xi^2 \in A_i$.

En recollant le long des ouverts affines U_i, on obtient $\pi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}$, où localement $\mathcal{L}_{|U_i} = \mathcal{O}_{Y|U_i}\xi_i$ avec $\xi_i^2 \in \mathcal{O}_Y^*(U_i)$. Sur l'intersection $U_{i,j}$, on a $\xi_i = s_{j,i}\xi_j$ avec $s_{j,i} \in \mathcal{O}_Y(U_{i,j})$. □

Remarque : : Réciproquement, une structure d'algèbre sur $\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}$ est déterminée par une application $\mathcal{L}^{\otimes 2} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_Y$. Pour tout $(\xi, \lambda) \in \mathcal{L}^2$, posons $\xi \cdot \lambda = \frac{1}{2}(\varphi(\xi + \lambda) - \varphi(\xi) - \varphi(\lambda))$. Alors on peut définir un produit sur $\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}$ par

$$(a + \xi)(b + \lambda) = (ab + \xi \cdot \lambda) + (a\lambda + b\xi), \quad \forall((a + \xi), (b + \lambda)) \in (\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L})^2.$$

Proposition 2.1.3 *Un revêtement double est défini par un faisceau localement libre $\mathcal{L}$ sur Y et un diviseur de Cartier B tel que $\mathcal{O}(-B) = \mathcal{L}^{\otimes 2}$.*

Preuve : Soit $X \xrightarrow{\pi} Y$ un revêtement double et $\mathcal{L}$ le faisceau inversible sur Y donné par le lemme. Sur un ouvert affine U_i, on a $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{U_i}\xi_i$ où $\xi_i^2 = \varphi(\xi_i, \xi_i) = b_i \in \mathcal{O}_{U_i}$, de sorte que

$$\mathcal{O}_{U_i} \oplus \mathcal{L}_{|U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \oplus \mathcal{O}_{U_i}\xi_i = \mathcal{O}_{U_i}[X]/(X^2 - b_i).$$

Posons $B = \{U_i, b_i = 0\}$ le diviseur de Cartier d'équation b_i sur U_i. Sur $U_{i,j} = U_i \cap U_j$, on a $\xi_i = s_{j,i}\xi_j$ avec $s_{j,i} \in \mathcal{O}_Y^*(U_{i,j})$. On en déduit que $b_i = s_{j,i}^2 b_j$, et $x_i^2 - b_i = s_{j,i}^2(x_j^2 - b_j)$. Ainsi, on a bien $\mathcal{O}(-B) = \mathcal{L}^{\otimes 2}$.

Réciproquement, si $B = \{U_i, b_i = 0\}$, où les b_i sont choisis de telle façon que $\mathcal{O}_Y(-B) = \mathcal{L}^{\otimes 2}$ est un carré, alors on peut construire un revêtement double $X \xrightarrow{\pi} Y$ à partir de B en posant $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}$, le produit sur $\mathcal{O}_X$ étant défini à partir de $\mathcal{L}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_Y$, où localement sur U_i, si $\mathcal{L} = \xi_i \mathcal{O}_{Y|U_i}$, alors $\varphi(\alpha\xi_i, \beta\xi_i) = \alpha\beta b_i$. □

Le diviseur B est appelé diviseur de branchement du revêtement double π. Il a pour support l'image du lieu de ramification du morphisme π. En effet, les racines de $(X^2 - b_i)$ sont confondues si et seulement si $b_i = 0$. Si R est le diviseur de ramification de π sur X, alors $B = \pi_*(R)$.

Proposition 2.1.4 *Soit $X \xrightarrow{\pi} Y$ un revêtement double de Y, variété lisse. Les singularités éventuelles de X se trouvent au-dessus du lieu singulier du lieu de branchement. En particulier, si B est lisse, alors X est lisse.*

Preuve : Localement, X est de la forme $\mathrm{Spec}(A_i[t]/t^2 - f)$, où f est l'équation de B dans $\mathrm{Spec}(A_i) = U_i \subset Y$. Or $\frac{\partial(t^2-f)}{\partial t} = 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$, donc d'après le critère Jacobien, les singularités de X sont au-dessus de B. Puis $\{t = 0\} \cap \mathrm{Sing}(t^2 - f) = \mathrm{Sing}(f)$, d'où la proposition. □

Proposition 2.1.5 *Soit $X \xrightarrow{\pi} Y$ un revêtement double de Y, variété lisse connexe. Soit B le diviseur de branchement de π. Le revêtement double X est irréductible si et seulement si il n'existe pas de diviseur C tel que $B = 2C$.*

Preuve : On raisonne encore localement. En gardant les mêmes notations que pour la proposition 2.1.4, il est clair que X est réductible si et seulement si f est un carré. □

Proposition 2.1.6 *Soit $X \xrightarrow{\pi} Y$ un revêtement double de Y de diviseur de branchement B et $V \subset Y$ une sous variété. L'image réciproque $\pi^{-1}(V)$ dans X est isomorphe au revêtement double de V ramifié le long de $B \cap V$.*

Preuve : On garde encore les mêmes notations que dans les preuves précédentes. Alors $V \cap U_i = V(I)$, où I est un idéal de A_i, et $\pi^{-1}(V) \cap V_i$ est défini par l'idéal $\pi_*^{\#} I$ de $B_i = A_i[t]/(t^2 - b_i)$. Ainsi, $\pi^{-1}(V) \cap V_i = \mathrm{Spec}\left(\left(A_i[t]/(t^2 - b_i)\right) / \left(IA_i[t]/(t^2 - b_i)\right)\right) = \mathrm{Spec}\left((A_i/I)[t]/(t^2 - \overline{b_i})\right)$. □

Proposition 2.1.7 *Soit $X \xrightarrow{\pi} Y$ un revêtement double de Y de diviseur de branchement B, et soit $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{O}(-B) = \mathcal{L}^{\otimes 2}$. Alors*

$$\omega_X = \pi^*(\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{-1})$$

Preuve : Rappelons la définition de ω_X lorsque X est une variété normale singulière de dimension n. On note $\Omega^n_{k(X)}$ l'espace des formes différentielles sur X. C'est l'espace vectoriel de dimension 1 de base $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ pour toute famille $(f_1 \ldots f_n)$ de $k(X)$ formant une base de transcendance de $k(X)$ sur k. Notons X^0 le lieu non-singulier de X. Alors, pour tout $P \in X^0$, on peut choisir une base de coordonnées $x_1 \ldots, x_n$ en P et un élément s de $\Omega^n_{k(X)}$ s'écrit

$$s = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \text{ avec } f \in k(X).$$

Alors s est régulier en $P \in X^0$ si f est régulier. On dit alors que s est régulier en $P \in X$ si il existe un voisinage $U \subset X$ de P tel que s est régulier en tout point de $U \cap X^0$. On définit alors ω_X comme étant le faisceau dont les sections sur U sont les suivantes.

$$\Gamma(U, \omega_X) = \{s \in \Omega^n_{k(X)} \mid s \text{ est régulier sur } U \cap X^0\}.$$

En particulier, $\omega_X = i_*(\omega_{X^0})$, où ω_{X^0} est le faisceau dualisant de X^0. Les variétés étant normales, les singularités de X sont en codimension supérieure ou égale à 2. Il suffit de démontrer le résultat dans le cas lisse, les diviseurs s'étendant à la partie singulière.

Raisonnons localement. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de Y tel que B admette pour équation b_i sur U_i et $b_i = s^2_{j,i} b_j$. Alors X est recouvert par les ouverts affines comme suit.

$$X = \bigcup_i \mathrm{Spec}(A_i[t]/(t^2 - b_i)).$$

Soit $V = \mathrm{V}(\mathcal{L}^{-1})$ le fibré vectoriel associé au faisceau localement libre $\mathcal{L}$. Localement, au-dessus de U_i, c'est $\mathrm{Spec}(A_i[t])$, de sorte que X se réalise comme une hypersurface de V d'équation locale $t^2 - b_i$. Le faisceau inversible normal est alors $\pi^*(\mathcal{L}^{-2})$ et la première suite exacte des formes différentielles appliquée à la sous-variété lisse X de V implique

$$\omega_X = \omega_V|_X \otimes \pi^*(\mathcal{L}^{-2}).$$

Par ailleurs, la deuxième suite exacte appliquée à la projection $V \xrightarrow{\pi} Y$ donne

$$\omega_V = \pi^*(\omega_Y \otimes \mathcal{L}).$$

□

2.1.2 La méthode de Jung

La méthode de Jung est une méthode de résolution pour les singularités qui sont des revêtements doubles de variétés lisses. Elle s'appuie sur la proposition 2.1.4. L'idée est de désingulariser le lieu de branchement B tout en gardant un revêtement double.

Soit $X \xrightarrow{\pi} Y$ un revêtement double de la variété lisse Y de lieu de branchement B. D'après la proposition 2.1.4, si B est lisse, alors X est lisse. Sinon, soit $S \subset \mathrm{Sing}(B)$ une composante non singulière du lieu singulier de B. Notons $Y_1 \xrightarrow{q_1} Y$ l'éclatement de Y le long de S. Le schéma Y_1 ainsi obtenu est lisse. Posons $B_1 = q_1^*(B) - 2[\frac{m_1}{2}]E_1$, où $E_1 = q_1^{-1}(S)$ est le diviseur exceptionnel et m_1 la multiplicité de E_1 dans $q_1^{-1}(B)$ en le sens suivant : comme $S \subset B$, lorsqu'on éclate le long de S, l'image réciproque de B contient E_1, de sorte que l'équation locale e_1 de E_1 divise l'équation locale b_1 de $q_1^{-1}(B)$. La multiplicité m_1 est définie comme étant le plus grand entier tel que $e_1^{m_1}$ divise b_1. Il est évident que cette définition ne dépend pas de l'ouvert sur lequel on se place.

Comme $\mathcal{O}_Y(-B) = \mathcal{L}^{\otimes 2}$, on a

$$\mathcal{O}_{Y_1}(-B_1) = (q_{1,*}(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(E_1)^{\otimes[\frac{m_1}{2}]})^{\otimes 2}.$$

D'après la proposition 2.1.3 il existe un revêtement double X_1 de Y_1 de lieu de branchement B_1. Soit $\{U_j\}$ un recouvrement de Y par des ouverts affines $U_j = \mathrm{Spec}(A_j)$ au-dessus desquels X est défini par l'équation $t_j^2 = b_j$. Pour tout j, soit $V_{i,j} = \mathrm{Spec}(A'_{i,j})$ un recouvrement affine de $q_1^{-1}(U_j)$ dans Y_1 tel que X_1 soit défini par l'équation $t'^2_{i,j} = b'_{i,j}$ au-dessus de $V_{i,j}$. Soit e_i l'équation de E_1 sur $V_{i,j}$. Par définition de B_1, on a $e_i^{2[m_1/2]} b_{i,j} = q_1^{\#}(b_j)$, où $q_1^{\#} : A_j \longrightarrow A'_{i,j}$ est le morphisme d'anneaux localement induit par q_1. On peut alors définir une application birationnelle p_1 de X_1 dans X en posant localement

$$\begin{array}{ccc} A/(t_j^2 - b_j) & \xrightarrow{p_1^{\#}} & A'_{i,j}/(t'^2_{i,j} - b'_{i,j}) \\ \overline{a} & \longrightarrow & \overline{e_i^{-2[m_1/2]} q_1^{\#}(a)}. \end{array}$$

Si B_1 est lisse, on a ainsi obtenu une désingularisation de X par X_1. Sinon, on peut réappliquer ce processus ; mais il n'est pas garanti d'obtenir ainsi une désingularisation de X. En particulier, si $\mathrm{Sing}(B)$ a des composantes singulières, ce processus ne fonctionne que dans le cas où ces singularités sont résolues lors de l'éclatement d'autres composantes de $\mathrm{Sing}(B)$.

Proposition 2.1.8 *[Hor75] Si $X \longrightarrow Y$ est un revêtement double de surface avec singularités isolées, alors la méthode de Jung permet de résoudre les singularités de X. De plus, elle fournit la résolution minimale.*

En particulier, la méthode de Jung permet de résoudre les singularités de Klein, et donne la résolution minimale. L'intérêt de cette méthode est alors qu'il suffit de moins d'éclatements que par la méthode directe pour résoudre la singularité. Dans la suite, on utilise cette méthode pour résoudre des singularités en dimension trois. La résolution obtenue est crépante sous certaines conditions.

Proposition 2.1.9 *Soit $X \longrightarrow Y$ un revêtement double de la variété lisse Y de lieu de branchement B. Supposons que la méthode de Jung fournit une résolution de X en éclatant successivement des composantes S, $S_1, \ldots S_r$ de codimension 2.*

$$\begin{array}{ccc} X_r & \xrightarrow{\pi_r} & Y_r \supset B_r = q_r^*(B_{r-1}) - 2\left[\frac{m_r}{2}\right] E_r \\ \downarrow{\scriptstyle p_r} & & \downarrow{\scriptstyle q_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ X_1 & \xrightarrow{\pi_1} & Y_1 \supset B_1 = q_r^*(B) - 2\left[\frac{m_1}{2}\right] E_1 \supset S_1 \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y \supset B \supset S \end{array}$$

où $E_i = q_i^{-1}(S_{i-1})$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de Y_{i-1} le long de S_{i-1}. Alors la résolution $X_r \longrightarrow X$ est crépante si et seulement si $\left[\frac{m_1}{2}\right] = \ldots = \left[\frac{m_r}{2}\right] = 1$.

Preuve : Notons $\mathcal{L}_i = q_i^*(\mathcal{L}_{i-1}) \otimes \mathcal{O}_{Y_i}(E_i)^{\otimes\left[\frac{m_i}{2}\right]}$. C'est le faisceau inversible vérifiant $\mathcal{O}(-B_i) = \mathcal{L}_i^{\otimes 2}$. Alors d'après la proposition 2.1.7, $\omega_{X_i} = \pi_i^*(\omega_{Y_i} \otimes \mathcal{L}_i^{-1})$. Or par hypothèse Y_i est l'éclaté de Y_{i-1} le long de S_{i-1}, qui est de codimension deux. Donc

$$\omega_{Y_i} = q_i^*(\omega_{Y_{i-1}}) \otimes \mathcal{O}(E_i).$$

Ainsi, $\omega_{Y_i} \otimes \mathcal{L}_i^{-1} = q_i^*(\omega_{Y_{i-1}}) \otimes q_i^*(\mathcal{L}_{i-1})^{-1} \otimes \mathcal{O}(E_i)^{\otimes 1-\left[\frac{m_i}{2}\right]}$, d'où :

$$\begin{aligned} \omega_{X_i} &= \pi_i^*\left(q_i^*(\omega_{Y_{i-1}} \otimes \mathcal{L}_{i-1}^{-1}) \otimes \mathcal{O}(E_i)^{\otimes 1-\left[\frac{m_i}{2}\right]}\right) \\ &= p_i^*(\pi_{i-1}^*(\omega_{Y_i} \otimes \mathcal{L}_{i-1}^{-1})) \\ &= p_i^*(\omega_{X_{i-1}}) \end{aligned}$$

si et seulement si $\left[\frac{m_i}{2}\right] = 1$. On en déduit par récurrence finie sur $i \in \{1 \dots r\}$ que la résolution est crépante si et seulement si $\left[\frac{m_i}{2}\right] = 1$ pour tout $i \in \{1 \dots r\}$.

2.2 Résolutions des singularités affines par la méthode de Jung

2.2.1 Notations

Soit R un système de racines réel de dimension n. On notera $Q(\mathrm{R})$, ou Q s 'il n'y a pas de confusion possible le réseau engendré par R, $W(\mathrm{R})$ ou W le groupe de Weyl engendré par les symétries associées aux racines de R, $V = Q \otimes \mathbb{C}$ l'espace vectoriel complexe sur lequel il agit naturellement, et V^* son dual. Notons $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ l'algèbre symétrique sur V^*. Le groupe W agit alors naturellement sur S et sur le schéma affine $V = \mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(S)$.

Notons $R = S^W$ l'algèbre des polynômes invariants sous l'action de W. D'après le théorème 1.6.4, il existe des éléments homogènes $u_1, \dots, u_n \in S$ tels que $S^W = R = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_n]$, de sorte que $\mathbb{A}^n/W = \mathrm{Spec}(R) \cong \mathbb{A}^n$.

Considérons maintenant le sous-groupe W_+ de W engendré par les produits pairs de réflexions de W. Les réflexions ayant pour déterminant (-1), $W_+ = W \cap \mathrm{SL}(V)$ et les éléments de S invariants par W_+ sont les éléments de R et les éléments anti-invariants. Ainsi, si Δ est l'élément anti-invariant donné par le théorème 1.6.6, alors $S^{W_+} = R \cup R\Delta$. De plus, comme $\Delta^2 \in R$, il existe un polynôme f tel que $\Delta^2 = f(u_1, \dots, u_n)$, et on a

$$S^{W_+} = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_n, \Delta]/(\Delta^2 - f(u_1, \dots, u_n)).$$

Le quotient $\mathbb{A}^n/W_+$ présente une singularité en l'origine qui est un revêtement double de $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u_1, \dots, u_n])$, avec pour lieu de branchement B d'équation $\{f = 0\}$. On notera X_{R} la singularité affine $\mathrm{Spec}(R^{W_+})$ ainsi obtenue. On dira que c'est la singularité affine associée au système de racines R.

Dans ce paragraphe, on étudie la fibre au-dessus de l'origine des résolutions par la méthode de Jung de ces singularités affines associées à un système de racines en dimension 3. On commence par les cas réductibles $A_1 \times A_1 \times A_1$, $A_1 \times A_2$, $A_1 \times B_2$, et $A_1 \times G_2$, puis on traite les cas irréductibles A_3 et B_3. Le système C_3 se déduit de son système dual B_3 puisque $W(C_3) = W(B_3)$, de sorte que les singularités affines associées sont identiques.

2.2.2 Le système de racines $\mathbf{A_1 \times A_1 \times A_1}$

Soit $\mathrm{R} = A_1 \times A_1 \times A_1$ le système de racines $\mathrm{R} = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\} \subset \mathbb{R}^3$. Le groupe de Weyl $W(\mathrm{R})$ est le produit direct $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Chaque facteur agissant sur la composante correspondante de $Q = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3$ en envoyant e_i sur son opposé. Pour l'action naturelle de W sur S, l'algèbre des invariants est

$$\mathbb{C}[x, y, z]^W = \mathbb{C}[x^2, y^2, z^2] = \mathbb{C}[u, v, w].$$

En effet, si $P = \sum a_{i,j,k} x^i y^j z^k \in \mathbb{C}[x, y, z]^W$, alors pour tout $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in W$ on a $\sum a_{i,j,k} x^i y^j z^k = \sum \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \varepsilon_3^k a_{i,j,k} x^i y^j z^k$, de sorte que l'on somme nécessairement sur des indices pairs. C'est une première illustration du théorème 1.6.4.

Soit W_+ le sous-groupe des produits pairs de réflexions de W.

$$W_+ = \{(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

L'algèbre des invariants $\mathbb{C}[x, y, z]^{W_+}$ est engendrée par $\mathbb{C}[x, y, z]^W$ et l'anti-invariant $\Delta = xyz$. En effet, d'après le théorème 1.6.6.2, on sait que le générateur des anti-invariants est donné par le jacobien

$$\begin{vmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{vmatrix} = 8xyz.$$

On considère la singularité affine $X_{A_1 \times A_1 \times A_1} = \mathbb{A}^3/W_+ = \mathrm{Spec}(S^{W_+})$.

En notant $u = x^2,\ v = y^2,\ w = z^2,\ t = xyz$, on a

$$\mathbb{C}[x, y, z]^{W_+} = \mathbb{C}[u, v, w, t]/(t^2 - uvw).$$

Ainsi, $X = \mathbb{A}^3/W_+$ est un revêtement double de $\mathbb{A}^3$ de lieu de branchement B d'équation $\{uvw = 0\}$. Le lieu singulier de B est

$$\mathrm{Sing}(B) : \{v = w = 0\} \cup \{u = w = 0\} \cup \{u = v = 0\} = S_1 \cup S_2 \cup S_3.$$

Le long de chacun des axes S_i, X_{R} présente une singularité de dimension deux de type A_1 dans la terminologie $A - D - E$. Un sous-système de racines de $A_1 \times A_1 \times A_1$ est associé à chacune de ces axes. Par exemple, le long de $S_1 : \{v = w = 0\}$ agit le groupe de Weyl $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ du sous-système de racines $R_1 = A_1 \times A_1$ de $A_1 \times A_1 \times A_1$ engendré par e_2 et e_3.

La méthode de Jung consiste à désingulariser B par éclatements successifs des composantes du lieu singulier, c'est à dire ici les axes S_i. L'ordre dans lequel les éclatements sont effectués donnent trois résolutions différentes. Ci-après, on décrit le cas où l'on éclate d'abord l'axe associé au sous-système de racines R_1, puis les deux autres.

Étape 1 : Éclatons l'idéal $< v, w >$ dans $\mathbb{A}^3$ (Cela résout les singularités associées au sous-système de racines R_1).

Notons $Y_1 \xrightarrow{q_1} \mathbb{A}^3$ cet éclatement. Alors Y_1 est la réunion des ouverts U et V définis comme suit.

$$U = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, \frac{v}{w}, w]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u', v', w']),$$

$$V = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v, \frac{w}{v}]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u'', v'', w'']).$$

Ces deux ouverts se recollent via les relations $v'w' = v''$ et $v''w'' = w'$ le long du lieu exceptionnel E_1 ayant pour équation $w' = 0$ dans U et $v'' = 0$ dans V.

- Dans U, E_1 a pour équation $w' = 0$, $B_1 = q_1^*(B) - 2E_1$ a pour équation $u'v' = 0$, de sorte que son lieu singulier est $\{u' = v' = 0\}$
- Dans V, E_1 a pour équation $v' = 0$, $B_1 = q_1^*(B) - 2E_1$ a pour équation $u''w'' = 0$, de sorte que son lieu singulier est $\{u'' = w'' = 0\}$

Étape 2 : Éclatons l'idéal $< u'', w'' >$ dans V (sous-système de racines R_2 engendré par e_1 et e_3). Notons $Y_2 = U \cup V' \xrightarrow{q_2} Y_1$ la composée de cet éclatement avec les immersions ouvertes de U et V dans Y_1. Alors Y_2 est la réunion des ouverts U, V_1 et V_2, où en notant $(u_1'', v_1'', w_1'') = (\frac{u''}{w''}, v'', w'')$ et $(u_2'', v_2'', w_2'') = (u'', v'', \frac{w''}{u''})$, alors $V_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u_1'', v_1'', w_1''])$ et $V_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u_2'', v_2'', w_2''])$. Ces ouverts se recollent le long de $E_1 \cup E_2$ donné par les équations suivantes.

- Dans V_1, E_2 a pour équation $w_1'' = 0$, $\widetilde{E_1} = q_2^*(\widetilde{E_1}) - E_2$ a pour équation $v_1'' = 0$, et $B_2 = q_2^*(B_2) - 2E_2$ est lisse, d'équation $u_1'' = 0$
- Dans V_2, E_2 a pour équation $u_2'' = 0$, $\widetilde{E_1} = q_2^*(\widetilde{E_1}) - E_2$ a pour équation $v_2'' = 0$, et $B_2 = q_2^*(B_2) - 2E_2$ est lisse, d'équation $w_2'' = 0$

Étape 3 : Éclatons l'idéal $< u', v' >$ dans U (sous-système de racines R_3 engendré par e_1 et e_2). De la même façon, notons $Y_3 = U' \cup V_1 \cup V_2 \xrightarrow{q_3} Y_2$ la composée de cet éclatement avec les immersions ouvertes dans Y_2. Alors Y_3 est la réunion des ouverts U_1 et U_2 et V tels que $U_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\frac{u'}{v'}, v', w']) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u_1', v_1', w_1'])$ et $U_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u', \frac{v'}{u'}, w']) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u_2', v_2', w_2'])$. Ces trois ouverts se recollent le long du lieu exceptionnel $E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

- Dans U_1, E_3 a pour équation $v_1' = 0$, $\widetilde{E_1} = q_3^*(E_1) - E_3$ a pour équation $w_1' = 0$, et $B_3 = q_3^*(B_1) - 2E_3$ est lisse, d'équation $u_1' = 0$
- Dans U_2, E_3 a pour équation $u_2' = 0$, $\widetilde{E_1} = q_3^*(E_1) - E_3$ a pour équation $w_2' = 0$, et $B_3 = q_3^*(B_1) - 2E_3$ est lisse, d'équation $v_2' = 0$

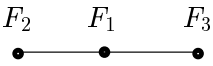
Décrivons la fibre de $0 \in \mathbb{A}^3$ par la composée $q = q_3 \circ q_2 \circ q_1 : Y_3 \longrightarrow \mathbb{A}^3$.

- $q^{-1}(0) \cap U_1 = (F_1 \cap U_1) \cup (F_3 \cap U_1)$ avec pour équation $\{u_1' = w_1' = 0\} \cup \{v_1' = w_1' = 0\}$,
- $q^{-1}(0) \cap U_2 = F_3 \cap U_2$ avec pour équation $\{u_2' = w_2' = 0\}$,
- $q^{-1}(0) \cap V_1 = (F_1 \cap V_1) \cup (F_2 \cap V_1)$ avec pour équation $\{u_1'' = v_1'' = 0\} \cup \{v_1'' = w_1'' = 0\}$ et
- $q^{-1}(0) \cap U_2 = F_2 \cap V_2$ avec pour équation $\{u_2'' = v_2'' = 0\}$.

C'est la réunion des F_i, $i = 1 \ldots 3$, avec $F_i \cong \mathbb{P}^1$ et $F_2 \cap F_3 = \emptyset$.

D'après le paragraphe 2.1.2, le revêtement double $X^* \xrightarrow{\pi_3} Y_3$ avec pour diviseur de branchement B_3 est une résolution de la singularité X. Le diviseur exceptionnel de cette résolution est l'image réciproque de $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ par le revêtement double. Remarquons que $F_1 \subset B_3$, de sorte que son image réciproque par π_3 est isomorphe à $F_1 \cong \mathbb{P}_1$. D'après la proposition 2.1.6, l'image réciproque de F_i est le revêtement double de F_i avec pour lieu de branchement $F_i \cap B_3$. Or pour $i = 1$ ou 2 l'équation de B_3 n'est pas un carré dans F_i, donc d'après la proposition 2.1.5 l'image réciproque de F_i est irréductible. on a donc des revêtements étales de $\mathbb{P}^1$, ce qui implique que $\pi_3^*(F_i) \cong \mathbb{P}^1$, pour $i = 2$ et 3.

Finalement, le diviseur exceptionnel de la résolution de cette singularité par la méthode de Jung est la réunion de trois $\mathbb{P}^1$ formant une chaîne. Le graphe dual est alors le suivant.



Si on effectue ces éclatements dans un autre ordre, en notant toujours F_i la composante de la fibre exceptionnelle apparaissant lors de l'éclatement de l'axe associé au sous-système de racines R_i, on obtient,

2.2.3 Le système de racines $\mathbf{A_1 \times A_2}$

Soit R le système de racines $A_1 \times A_2$. Alors le groupe $W(R) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_3$ agit naturellement sur $\mathbb{C}[x, y, z] = \mathbb{C}[V^*]$, où $V = Q \otimes \mathbb{C}$. L'algèbre des invariants est

$$\mathbb{C}[x, y, z]^W = \mathbb{C}[x^2, yz, y^3 + z^3].$$

Soit $W_+ = W \cap \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Alors $W_+ = \mathbb{D}_3 = \mathfrak{S}_3$, et l'algèbre des invariants par W_+ contient $\mathbb{C}[x, y, z]^W$ et l'anti-invariant Δ calculé grâce au jacobien

$$\begin{vmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 3y^2 & 3z^2 \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = 6x(y^3 - z^3).$$

Posons $u = x^2,\ v = yz,\ w = y^3 + z^3$ et $t = x(y^3 - z^3)$. Alors

$$\mathbb{C}[x, y, z]^{W_+(A_1 \times A_2)} = \mathbb{C}[u, v, w, t]/(t^2 - u(w^2 - 4v^3)),$$

de sorte que $X_{A_1 \times A_2}$ est le revêtement double de $\mathbb{A}^3$ de lieu de branchement B d'équation $\{u(w^2 - 4v^3) = 0\}$. Le lieu singulier de B est

$$\mathrm{Sing}(B) : \{v = w = 0\} \cup \{u = w^2 - 4v^3 = 0\} = S_1 \cup S_2.$$

La composante S_1 est l'image du lieu de $\mathbb{A}^3$ défini par $\{y = z = 0\}$, formé des points de stabilisateur $\mathfrak{S}_3 \subset W$. Ainsi, $X_{A_1 \times A_2}$ présente des singularités de type A_2 (dans la terminologie de Klein) au-dessus de S_1, singularités associées au sous-système de racines A_2 de $A_1 \times A_2$. La composante S_2 est l'image des points $\{(0, a, \omega a)\} \in \mathbb{A}^3$, avec ω racine cubique de l'unité. Ce sont les points de stabilisateur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset W$ de sorte que au-dessus de S_2, $X_{A_1 \times A_2}$ présente des singularités de type A_1 associées au sous-système de racines $A_1 \times A_1$ de $A_1 \times A_2$.

On résout les singularités de B en éclatant successivement S_1 et S_2. La composante S_1 étant lisse, c'est celle que l'on va éclater en premier.

Étape 1 : Éclatons l'idéal $< v, w >$ dans $\mathbb{A}^3$

Notons $Y_1 \xrightarrow{q_1} \mathbb{A}^3$ cet éclatement. Alors Y_1 est la réunion des ouverts U et V définis comme suit : $U = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, \frac{v}{w}, w]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u', v', w'])$ et $V = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v, \frac{w}{v}])= \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u'', v'', w''])$. Ces deux ouverts se recollent via les relations $v'w' = v''$ et $v''w'' = w'$ le long du lieu exceptionnel E_1 ayant pour équation $w' = 0$ dans U et $v'' = 0$ dans V.

- Dans U, E_1 a pour équation $w' = 0$, $F_1 = q_1^{-1}(0)$ a pour équation $\{u' = w' = 0\}$ et $B_1 = q_1^*(B) - 2E_1$ a pour équation $u'(1 - 4v'^3 w') = 0$, de sorte que son lieu singulier S' a pour équation $\{u' = 1 - v'^3 w' = 0\}$. Remarquons que $S' \cap F_1 = \emptyset$, de sorte que l'éclatement de S' n'apportera aucune nouvelle composante à la fibre au dessus de l'origine.
- Dans V, E_1 a pour équation $v' = 0$, $B_1 = q_1^*(B) - 2E_1$ a pour équation $u''(w''^2 - 4v'') = 0$, de sorte que son lieu singulier S'' a pour équation $\{u'' = w''^2 - 4v = 0\}$. C'est la transformée stricte de S_2.

Étape 2 : Éclatons la transformée stricte de S_2 dans Y_1 (on résout ainsi les singularités associées au sous-système de racines $A_1 \times A_1$). Après le changement de variables $(u, v, w) \leftarrow (u'', w''^2 - 4v, w'')$, on a dans V :

$$\begin{array}{lcl} B_1 & : & uv = 0, \\ E_1 & : & v - w^2 = 0, \\ F_1 & : & u = v - w^2 = 0. \end{array}$$

On éclate donc l'idéal $< u, v >$ dans V. Notons $Y_2 = U \cup V' \xrightarrow{q_2} Y_1$ la composée de cet éclatement avec les immersions ouvertes de U et V dans Y_1. Alors Y_2 est la réunion des ouverts U, V_1 et V_2. Les ouverts $V_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\frac{u}{v}, v, w]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u_1, v_1, w_1])$ et $V_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, \frac{v}{u}, w]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u_2, v_2, w_2])$, se recollent le long de E_2.

- Dans V_1, E_2 a pour équation $v_1 = 0$, $\widetilde{E_1} = q_2^*(\widetilde{E_1}) - E_2$ a pour équation $v_1 - w_1^2 = 0$, et $B_2 = q_2^*(B_2) - 2E_2$ est lisse, d'équation $u_1 = 0$
- Dans V_2, E_2 a pour équation $u_2 = 0$, et $B_2 = q_2^*(B_2) - 2E_2$ est lisse, d'équation $v_2 = 0$

Après l'éclatement q_3 de S' dans U, le lieu de branchement est lisse. La fibre de $0 \in \mathbb{A}^3$ par la composée $q = q_3 \circ q_2 \circ q_1 : Y_3 \longrightarrow \mathbb{A}^3$ est la réunion $F_1 \cup F_2$ où $F_1 \subset U \cup V_1$ avec $F_1 \cap U : \{u' = w' = 0\}$ et $F_1 \cap V_1 : \{u_1 = v_1 - w_1^2 = 0\}$, et $F_2 \subset V_1 \cup V_2$ $F_2 \cap V_1 : \{v_1 = w_1 = 0\}$ et $F_2 \cap V_2 : \{u_2 = w_2 = 0\}$.

D'après le paragraphe 2.1.2, le revêtement double $X^* \xrightarrow{\pi_3} Y_3$ avec pour diviseur de branchement B_3 est une résolution de la singularité X_{R}. Le diviseur exceptionnel de cette résolution est l'image réciproque de $F_1 \cup F_2$ par le revêtement double. Remarquons que $F_1 \subset B_3$, de sorte que son image réciproque par π_3 est isomorphe à $F_1 \cong \mathbb{P}_1$. D'après la proposition 2.1.6, l'image réciproque de F_2 est le revêtement double de F_2 avec pour lieu de branchement $F_2 \cap B_3$. Or l'équation de B_3 n'est pas un carré dans F_2, donc d'après la proposition 2.1.5 l'image réciproque de F_2 est irréductible, ce qui implique que $\pi_3^*(F_2) \cong \mathbb{P}^1$.

Finalement, le diviseur exceptionnel de la résolution de cette singularité par la méthode de Jung est la réunion de deux $\mathbb{P}^1$. Le graphe dual est alors le suivant.

2.2.4 Le système de racines $\mathbf{A_1 \times B_2}$

Considérons le système de racines $\mathrm{R} = A_1 \times B_2$, dans $\mathbb{R}^3$, défini comme l'union de $\{\pm e_1\}$ et $\{\pm e_2, \pm e_3, \pm e_2 \pm e_3\}$. Alors $W(\mathrm{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Il agit naturel-

lement sur $S = \mathbb{C}[x, y, z]$ et l'algèbre des invariants est

$$S^W = R = \mathbb{C}[x^2, y^2 + z^2, y^2 z^2].$$

Le sous-groupe W_+ engendré par les produits pairs de réflexions de W est un groupe d'ordre 8 avec deux éléments d'ordre 4. Posons $s = (-1, -1, (1, 1))$ et $r = (1, -1, (-1, 1))$. Ces deux éléments engendrent W_+, tout élément s'écrivant sous la forme s^k ou sr^k et $srs = r^{-1}$. Ainsi, W_+ est le groupe $\mathbb{D}_4$. D'après le théorème 1.6.6, les invariants de S sous l'action de W_+ sont engendrés par les invariants sous l'action de W et l'anti-invariant Δ, déterminé grâce au Jacobien

$$\begin{vmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 2z \\ 0 & 2yz^2 & 2y^2 z \end{vmatrix} = 8xyz(y^2 - z^2).$$

On considère la singularité affine $X_{A_1 \times B_2} = \mathbb{A}^3/W_+ = \mathrm{Spec}(S^{W_+})$.

Notons $\Delta = xyz(y^2 - z^2)$, $u = x^2$, $v = y^2 + z^2$, et $w = y^2 z^2$. Alors on a l'équation $\Delta^2 = uw(v^2 - 4w)$. On en déduit que $X_{A_1 \times B_2}$ est un revêtement double de $\mathbb{A}^3/W$ de lieu de branchement B d'équation $uw(v^2 - 4w) = 0$. Le lieu singulier de B est

$$\mathrm{Sing}(B) : \{v = w = 0\} \cup \{u = w = 0\} \cup \{u = v^2 - 4w = 0\} = S_1 \cup S_2 \cup S_3.$$

Au-dessus de S_1, $X_{A_1 \times B_2}$ présente des singularités associées au sous-système de racines naturel B_2 de $A_1 \times B_2$. En effet, ces points sont les images des points $(a, 0, 0) \in \mathbb{A}^3$, de stabilisateur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \subset W$, groupe de Weyl du système de racines B_2.

Au-dessus de S_2 et S_3, on trouve des singularités de type A_1 dans la nomenclature $A - D - E$, associées à des sous-systèmes de racines $A_1 \times A_1$ de $A_1 \times B_2$. En effet, les points de S_2 sont les images des points $\{(0, 0, a)\}$ ou $\{(0, a, 0)\}$ de $\mathbb{A}^3$, de stabilisateur $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$, et les points de S_2 sont les images des points $\{(0, a, a)\}$ ou $\{(0, a, -a)\}$ de $\mathbb{A}^3$, de stabilisateur $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$.

On va résoudre les singularités de B par éclatements successifs, pour résoudre la singularité du revêtement. Il est nécessaire d'éclater deux fois S_1, une fois S_2 et une fois S_3. On remarquera que l'ordre dans lequel on effectue ces éclatements influe sur la configuration de la fibre au-dessus de l'origine.

Étape 1 : Éclatons l'idéal $< v, w >$. Cela résout partiellement les singularités associées au sous-système de racines B_2, dans le sens où elles sont transformées en singularités associées à un système de racines $A_1 \times A_1$, naturellement plongé dans B_2.

– Dans la carte de coordonnées $(u, \frac{v}{w}, w) = (u', v', w')$, on a

$$\begin{aligned} E &: w' = 0, \\ \phi^{-1}(0) &: u' = w' = 0, \\ \phi^{-1}(B) - 2E = B_1 &: u'(v'^2 w' - 4) = 0, \\ B_1 \cap E &: w' = 0, u' = 0. \end{aligned}$$

Cette équation n'est pas un carré dans E, ce qui implique que lors du revêtement le long de B_1, l'image réciproque de E est irréductible. B_1 présente une famille à

un paramètre de singularité $A_1 \times A_1$. Il suffit d'éclater une fois pour désingulariser. Cette famille de singularités ne rencontrant pas $\phi^{-1}(0)$, le diviseur exceptionnel est inchangé au cours de cet éclatement. L'intersection de $\phi^{-1}(0)$ avec cette carte est l'axe $\{u' = w' = 0\}$.

- Dans la carte de coordonnées $(u, v, \frac{w}{v}) = (u'', v'', w'')$, on a

$$\begin{aligned} E &: v'' = 0, \\ \phi^{-1}(0) &: u'' = v'' = 0, \\ \phi^{-1}(B) - 2E = B_1 &: u''w''(v'' - 4w'') = 0. \end{aligned}$$

Le lieu de branchement B_1 présente une singularité du type de celle rencontrée lors de la résolution par la méthode de Jung de la singularité affine associée au système de racines $A_1 \times A_1 \times A_1$. Posons le changement de variables $(u'', v'', w'') \leftarrow (u'', v'' - 4w'', w'')$. Alors

$$\begin{aligned} E &: v'' + 4w'' = 0, \\ \phi^{-1}(0) &: u'' = v'' + 4w'' = 0, \\ B_1 &: u''v''w'' = 0. \end{aligned}$$

Étape 2 : Résolution de la singularité associé au sous-système de racines $A_1 \times A_1 \times A_1$ ainsi obtenue.

On éclate successivement $< v'', w'' >$, $< u'', v'' >$ et $< u'', w'' >$, ce qui fait apparaître une chaîne de trois $\mathbb{P}^1$ au-dessus de l'origine, et résout les singularités du lieu de branchement B_1. Si on effectue les éclatements dans cet ordre, c'est à dire si l'on commence par résoudre entièrement les singularités associées au sous-système de racines B_2 avant d'aborder les autres, alors avec les notations du paragraphe 2.2.2, le diviseur exceptionnel E a pour transformée stricte une surface encore noté E telle que

$$\begin{aligned} E \cap U_1 &: v_1' + 4 = 0, \\ E \cap U_2 &: v_2' + 4 = 0, \\ E \cap V_1 &: 1 + 4w_1'' = 0, \\ E \cap V_2 &: 1 + 4w_2'' = 0. \end{aligned}$$

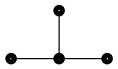
La fibre au-dessus de l'origine de la composée $q : Y^* \longrightarrow \mathbb{A}^3$ de ces éclatements est la réunion de quatre $\mathbb{P}^1$ que l'on note F, F_1, F_2 et F_3 vérifiant dans les cartes U_i et V_i les équations suivantes

- $q^{-1}(0) \cap U_1 = (F_1 \cap U_1) \cup (F_3 \cap U_1) \cup F \cap U_1$ avec pour équation respectivement $\{u_1' = w_1' = 0\} \cup \{v_1' = w_1' = 0\} \cup \{v_1' + 4 = u_1' = 0\}$,
- $q^{-1}(0) \cap U_2 = F_3 \cap U_2$ avec pour équation $\{u_2' = w_2' = 0\}$,
- $q^{-1}(0) \cap V_1 = (F_1 \cap V_1) \cup (F_2 \cap V_1) \cup F \cap V_1$ avec pour équation respectivement $\{u_1'' = v_1'' = 0\} \cup \{v_1'' = w_1'' = 0\} \cup \{1 + 4w_1'' = u_1'' = 0\}$ et
- $q^{-1}(0) \cap U_2 = F_2 \cap V_2$ avec pour équation $\{u_2'' = v_2'' = 0\}$.

Les composantes F, F_2 et F_3 ne se rencontrent pas deux à deux, mais ont chacun une intersection avec F_1.

Soit B^* la transformée stricte de B_1 par cette suite de trois éclatements. D'après le paragraphe 2.1.2, B^* est lisse et il existe un revêtement double de Y^* de lieu de

branchement B^* qui est une résolution de la singularité $X_{A_1\times B_2}$. La fibre exceptionnelle de cette résolution est l'image réciproque de $q^{-1}(0)$ par ce revêtement double. D'après la proposition 2.1.6, c'est le revêtement double de $\cup_i F_i$ de lieu de branchement $\cup_i F_i \cap B^*$. Comme $F \cup F_1 \subset B^*$ et $B^* \cap F_i$ n'a pas pour équation locale un carré pour $i = 2$ et 3, on obtient comme dans le paragraphe 2.2.2, que chaque composante F_i a pour image réciproque une composante isomorphe à $\mathbb{P}^1$, de sorte que le diviseur exceptionnel de la résolution ainsi obtenue est la réunion de quatre $\mathbb{P}^1$ dont un seul rencontre les trois autres. En particulier, le graphe dual est le suivant.



En revanche, si on fait les éclatement dans un autre ordre, en ne tenant par compte des systèmes de racines correspondants, alors les quatre $\mathbb{P}^1$ formant le diviseur exceptionnel de Y^* au-dessus de la singularité sont dans la configuration d'une chaîne. Ainsi, le graphe dual est le suivant

2.2.5 Le système de racines $\mathbf{A_1 \times G_2}$

Considérons le système de racines $\mathrm{R} = A_1 \times G_2$, défini dans $\mathbb{R}^4$ comme l'union du système de racines $A_1 = \{\pm e_1\}$, dont un système générateur est e_1, et du système G_2 des deux ou six-racines dans l'intersection de l'hyperplan $V = \{\xi_1 e_2 + \xi_2 e_3 + \xi_3 e_4 \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}$ avec $\mathbb{Z}^3$. Alors $W(\mathrm{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{D}_6$. Il agit naturellement sur $\mathbb{C}[x, y, z]$ d'après le paragraphe A.4, et l'algèbre des invariants est

$$S^W = R = \mathbb{C}[x^2, yz, y^6 + z^6].$$

Soit $W_+ = W \cap \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Alors $W_+ = \mathbb{D}_6$, et l'algèbre des invariants par W_+ contient $\mathbb{C}[x, y, z]^W$ et l'anti-invariant Δ calculé grâce au jacobien

$$\begin{vmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & z & y \\ 0 & 6y^5 & 6z^5 \end{vmatrix} = 12x(z^6 - y^6).$$

Posons $u = x^2,\ v = yz,\ w = y^6 + z^6$ et $t = x(z^6 - y^6)$. Alors

$$\mathbb{C}[x, y, z]^{W_+(A_1\times G_2)} = \mathbb{C}[u, v, w, t]/(t^2 - u(w^2 - 4v^6)),$$

de sorte que $X_{A_1\times G_2}$ est le revêtement double de $\mathbb{A}^3$ de lieu de branchement B d'équation $u(w^2 - 4v^6) = 0$. Il est singulier et $S = \mathrm{Sing}(B) = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, où $S_1 = \{v = w = 0\}$, $S_2 = \{u = w - 2v^3 = 0\}$ et $S_3 = \{u = w + 2v^3 = 0\}$.

Au-dessus de S_1, $X_{A_1\times G_2}$ présente des singularités associées au sous-système de racines naturel G_2 de $A_1 \times G_2$. En effet, ces points sont les images des points $(a, 0, 0) \in \mathbb{A}^3$, de stabilisateur $\mathbb{D}_6 \subset W$, groupe de Weyl du système de racines G_2.

Au-dessus de S_2 et S_3, on trouve des singularités de type A_1 dans la nomenclature $A - D - E$, associées à des sous-systèmes de racines $A_1 \times A_1$ de $A_1 \times G_2$.

Pour résoudre B, on va éclater trois fois S_1 et une fois S_2 et une fois S_3.

Étape 1 : Éclatons l'idéal $< v, w >$.

– Dans la carte U_1 de coordonnées $(u, \frac{v}{w}, w) = (u', v', w')$, on a

$$\begin{aligned} E_1 &: w' = 0, \\ \phi^{-1}(0) = F_1 &: u' = w' = 0, \\ \phi^{-1}(B) - 2E = B_1 &: u'(1 - 4v'^6 w'^4) = 0, \\ B_1 \cap E &: w' = 0, u' = 0. \end{aligned}$$

Cette équation n'est pas un carré dans E, ce qui implique que lors du revêtement le long de B_1, l'image réciproque de E est irréductible. Comme lors de la résolution de la singularité associée au système de racine $A_1 \times A_2$, le lieu de branchement B_1 obtenu présente des singularités de type $A_1 \times A_1$ le long des transformées strictes de S_2 et S_3, mais ces lieu ne rencontrent pas $\phi^{-1}(0)$. Il suffit d'éclater une fois ces courbes pour désingulariser, et le diviseur exceptionnel est inchangé au cours de cet éclatement. L'intersection de $\phi^{-1}(0)$ avec cette carte est l'axe $\{u' = w' = 0\}$.

– Dans la carte V_1 de coordonnées $(u, v, \frac{w}{v}) = (u'', v'', w'')$, on a

$$\begin{aligned} E_1 &: v'' = 0, \\ \phi^{-1}(0) = F_1 &: u'' = v'' = 0, \\ \phi^{-1}(B) - 2E = B_1 &: u''(w''^2 - 4v''^4) = 0. \end{aligned}$$

Le lieu de branchement B_1 admet des singularités le long des transformées strictes de S_1, S_2 et S_3.

Étape 2 : Éclatons la transformée stricte de S_1 dans X_1, à savoir l'idéal $< v, w >$ dans la carte V_1 ; puisque S_1 n'a pas de trace dans U_1.

– Dans la carte U_2 de coordonnées $(u, \frac{v}{w}, w) = (u', v', w')$, on a

$$\begin{aligned} E_1 &: v = 0, \\ F_1 &: u = v = 0, \\ E_2 &: w' = 0, \\ F_2 &: u' = w' = 0, \\ \phi^{-1}(B) - 2E = B_2 &: u'(1 - 4v'^4 w'^2) = 0, \\ B_2 \cap E &: w' = 0,\ u' = 0. \end{aligned}$$

On est dans le même cas que dans U_1 : après l'éclatement des transformées strictes de S_2 et S_3, le lieu de branchement sera lisse et la contribution à la fibre au-dessus de l'origine inchangée.

– Dans la carte V_2 de coordonnées $(u, v, \frac{w}{v}) = (u'', v'', w'')$, on a

$$\begin{aligned} E_2 &: v'' = 0, \\ F_2 &: u'' = v'' = 0, \\ \phi^{-1}(B_1) - 2E_2 = B_2 &: u''(w''^2 - 4v''^2) = 0. \end{aligned}$$

Le lieu de branchement B_1 admet encore des singularités le long des transformées strictes de S_1, S_2 et S_3.

Étape 3 : Après un troisième éclatement de S_1, on obtient

– Dans la carte U_3 de coordonnées $(u, \frac{v}{w}, w) = (u', v', w')$, on a

$$\begin{array}{rcl} E_2 & : & v' = 0, \\ F_2 & : & u' = v' = 0, \\ E_3 & : & w' = 0, \\ F_3 & : & u' = w' = 0, \\ \phi^{-1}(B_2) - 2E = B_3 & : & u'(1 - 4v'^2) = 0. \end{array}$$

– Dans la carte V_3 de coordonnées $(u, v, \frac{w}{v}) = (u'', v'', w'')$, on a

$$\begin{array}{rcl} E_3 & : & v'' = 0, \\ F_3 & : & u'' = v'' = 0, \\ \phi^{-1}(B_2) - 2E = B_3 & : & u''(w''^2 - 4) = 0. \end{array}$$

Le lieu de branchement B_3 admet ses singularités le long des transformées strictes de S_2 et S_3.

Étape 4 : Éclatons la transformée stricte de S_2 et suivons les calculs au dessus de V_3. On effectue le changement de variables $w - 2 \mapsto w$. Alors E_1 et E_2 n'ont pas de trace dans V_3, et

$$\begin{array}{rcl} E_3 & : & v = 0, \\ F_3 & : & u = v = 0, \\ B_3 & : & uw(w + 4) = 0. \end{array}$$

– Dans la carte U_4 de coordonnées $(u, \frac{v}{w}, w) = (u', v', w')$, on a

$$\begin{array}{rcl} E_3 & : & v' = 0, \\ F_3 & : & u' = v' = 0, \\ E_4 & : & w' = 0, \\ F_4 & : & v' = w' = 0, \\ \phi^{-1}(B_3) - 2E_4 = B_4 & : & u'(w + 4) = 0. \end{array}$$

– Dans la carte V_4 de coordonnées $(u, v, \frac{w}{v}) = (u'', v'', w'')$, on a

$$\begin{array}{rcl} E_3 & : & v'' = 0, \\ E_4 & : & u'' = 0, \\ F_4 & : & u'' = v'' = 0, \\ \phi^{-1}(B_3) - 2E_4 = B_4 & : & w''(u''w'' + 4) = 0 \text{ est lisse.} \end{array}$$

Le lieu de branchement B_4 admet ses singularités le long de la transformée strictes de S_3 dans U_4.

Étape 5 : Enfin, éclatons la transformée stricte de S_3 et suivons les calculs au dessus de V_4. Après changement de variables, on a dans V_4 :

$$\begin{array}{rcl} E_3 & : & v = 0, \\ F_3 & : & u = v = 0, \\ E_4 & : & w - 4 = 0, \\ F_4 & : & v = w - 4 = 0, \\ B_4 & : & uw = 0, \end{array}$$

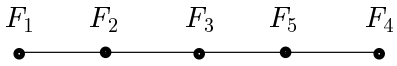
– Dans la carte U_5 de coordonnées $(u, \frac{v}{w}, w) = (u', v', w')$, on a

$$\begin{aligned} E_3 &: v' = 0, \\ F_3 &: u' = v' = 0, \\ E_5 &: w' = 0, \\ F_5 &: v' = w' = 0, \\ \phi^{-1}(B_4) - 2E_5 = B_5 &: u' = 0 \text{ est lisse.} \end{aligned}$$

– Dans la carte V_5 de coordonnées $(u, v, \frac{w}{v}) = (u'', v'', w'')$, on a

$$\begin{aligned} E_3 &: v'' = 0, \\ E_4 &: w'' - 4 = 0, \\ F_4 &: v'' = w'' - 4 = 0, \\ E_5 &: u'' = 0, \\ F_5 &: u'' = v'' = 0, \\ \phi^{-1}(B_4) - 2E_5 = B_5 &: w'' = 0 \text{ est lisse.} \end{aligned}$$

Notons $q : Y^* \longrightarrow \mathbb{A}^3$ la composée des cinq éclatements décrits ci-avant. D'après le paragraphe 2.1.2, il existe un revêtement double de Y^* de lieu de branchement $B^* = B_5$ qui est une résolution crépante de la singularité $X_{A_1 \times G_2}$. La fibre exceptionnelle de cette résolution est l'image réciproque de $q^{-1}(0)$ par ce revêtement double. D'après la proposition 2.1.6, c'est le revêtement double de $\cup_i F_i$ de lieu de branchement $\cup_i F_i \cap B^*$. Comme $F \cup F_1 \subset B^*$ et $B^* \cap F_i$ n'a pas pour équation locale un carré dans chaque carte, on obtient comme dans le paragraphe 2.2.2, que chaque composante F_i a pour image réciproque une composante isomorphe à $\mathbb{P}^1$, de sorte que le diviseur exceptionnel de la résolution ainsi obtenue est la réunion de cinq fibres isomorphes à $\mathbb{P}^1$. Le graphe dual de la fibre est le suivant.



2.2.6 Le système de racines $\mathbf{A_3}$

On définit le système de racines $\mathrm{R} = A_3$ comme étant l'ensemble de tous les vecteurs de longueur $\sqrt{2}$ et appartenant à l'intersection de $H \subset \mathbb{R}^4$, hyperplan de somme des coordonnées égale à zéro avec le réseau $\varepsilon_1\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_2\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_3\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_4\mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{R} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, 1 \leq i \neq j \leq 4\}$, et on peut prendre

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \alpha_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

comme système générateur.

Le groupe de Weyl $W(\mathrm{R}) = \mathfrak{S}_4$ agit naturellement par permutation des ε_i. En posant $e_1 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $e_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, il agit comme suit

dans la base (e_1, e_2, e_3).

(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarquons que si $x_i = \varepsilon_i^*$, alors $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]^W = \mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]$, où σ_i sont les fonctions symétriques en quatre variables.

Notons $x = e_1^*$, $y = e_2^*$ et $z = e_3^*$. Alors $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]/ < \sigma >= S = \mathbb{C}[x, y, z]$, de sorte que $S^W = \mathbb{C}[\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]$. Or

$$\begin{gathered} f_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3\sigma_1^2 - 8\sigma^2, \\ f_3 = xyz = \sigma_1^2 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3, \\ f_4 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 3\sigma_1^4 - 16\sigma_1\sigma_3 + 16\sigma_2^2 - 64\sigma_4. \end{gathered}$$

Ainsi, modulo σ_1, les fonctions symétriques en x_1, x_2, x_3 et x_4 sont des polynômes en f_2, f_3 et f_4, de sorte que l'algèbre des invariants $R = S^W = \mathbb{C}[f_2, f_3, f_4]$. Le sous-groupe W_+ est le groupe $\mathfrak{A}_4$, et d'après le théorème 1.6.6, l'algèbre des invariants par W_+ est engendrée par les invariants par W et un anti-invariant donné par le Jacobien de f_2, f_3, et f_4. On trouve

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \\ 2x(y^2+z^2) & 2y(x^2+z^2) & 2z(x^2+y^2) \end{vmatrix} = 4(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2).$$

Notons $\Delta = (x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$, et $u = f_2$, $v = f_3$ et $w = f_4$ pour alléger les notations.

La singularité $X_{A_3} = \mathbb{A}^3/\mathfrak{A}_4$ est le revêtement double de $\mathbb{A}^3/\mathfrak{S}_4 = \mathbb{A}^3$, de lieu de branchement B d'équation $f(u, v, w) = u^2w^2 - 4u^3v^2 - 4w^3 + 18uv^2w - 27v^4 = 0$. En effet, le lieu de branchement B est le lieu des points de $\mathbb{A}^3/W$ au-dessus desquels X_{A_3} n'a qu'une pré-image. Ce sont les images des points de $\mathbb{A}^3$ pour lesquels la W-orbite et la W_+-orbite coïncident. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Alors $\mathfrak{S}_4(a, b, c, d) = \mathfrak{A}_4(a, b, c, d)$ si et seulement si deux des coordonnées sont égales (car dans ce cas, (a, b, c, d) est stabilisé par une transposition). Dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{A}^3$, les points dont les W-orbites et W_+-orbites coïncident sont donc les points de coordonnées $\{(\lambda, \lambda, \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$. Leurs images dans $\mathbb{A}^3/W$ ont pour coordonnées

$$\begin{aligned} f_2 &= 2\lambda^2 + \mu^2, \\ f_3 &= \lambda^2\mu, \\ f_4 &= \lambda^4 + \lambda^2\mu^2. \end{aligned}$$

Or, en notant $l = \lambda^2$ et $m = \mu^2$, les points $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ de la forme $(2l+m, l^2+2lm, l^2m)$ sont les solutions de l'équation $\Delta(x^3 + \sigma_1x^2 + \sigma_2x + \sigma_3) = 0$, où les σ_i sont les fonctions

symétriques en a,b et c, et Δ est le discriminant du polynôme. Ainsi, comme

$$\begin{aligned}\sigma_1(a^2,b^2,c^2) &= f_2(a,b,c),\\ \sigma_2(a^2,b^2,c^2) &= f_4(a,b,c), \text{ et}\\ \sigma_3(a^2,b^2,c^2) &= f_3(a,b,c)^2.\end{aligned}$$

d'après la formule du discriminant d'un polynôme de degré trois, le lieu de branchement B a pour équation

$$\mathrm{Disc}(x^3+ux^2+wx+v^2) = u^2w^2-4u^3v^2-4w^3+18uv^2w-27v^4.$$

On vérifie par ailleurs qu'on a bien

$$\Delta^2 = u^2w^2-4u^3v^2-4w^3+18uv^2w-27v^4.$$

Le lieu singulier de B est formé de deux composantes

$$T_1 := \{v=w=0\},$$

$$T_2 := \{(3\tau^2,-\tau^3,3\tau^4)\}$$

qui s'intersectent en 0. Ces courbes correspondent aux images des points de stabilisateur non trivial, et non inclus dans W_+. Dans $\mathbb{C}^4$, les points de stabilisateur non trivial sont

- les points du type (a,a,a,a), stabilisés par le groupe entier. Seul l'origine est dans H. et son image dans $\mathbb{A}^3/\mathfrak{S}_4$ est l'origine.
- les points du type (a,a,a,b), $a\neq b$. Sous l'action de $W_+=\mathfrak{A}_4$, ils sont stabilisés par un cycle d'ordre trois. L'intersection avec H donne des points du type $(a,a,a,-3a)$ avec $a\neq 0$, qui dans le nouveau système de coordonnées donnent $(\tau,\tau,-\tau) = (4a,4a,-4a)$ dans $\mathbb{A}^3$, s'envoyant sur $(3\tau^2,-\tau^3,3\tau^4)\in\mathbb{A}^3/\mathfrak{S}_4$
- les points du type (a,a,b,b), $a\neq b$. Sous l'action de W_+, ils sont stabilisés par un élément d'ordre deux ($(12)(34)$). L'intersection avec H donne des points du type $(a,a,-a,-a)$, $a\neq 0$, qui dans le nouveau système de coordonnées donnent $(16a^2,0,0)\in\mathbb{A}^3$, s'envoyant sur la droite $\{v=w=0\}\in\mathbb{A}^3/\mathfrak{S}_4$

Ainsi, au-dessus de T_1, X_{A_3} présente des singularités de type A_1, associées à un système de racines $A_1\times A_1$, et au-dessus de T_2 , des singularités de type A_2, associées à un système de racines A_2.

On remarque que T_1 est la droite tangente au cusp que présente T_2 en 0. On veut désingulariser le discriminant B, donc on va éclater successivement ces deux courbes dans $\mathbb{C}^3$. autrement dit, on résout les singularités au dessus des composantes T_1 et T_2, puis on vérifie que la singularité au-dessus de l'origine est résolue. Lors de l'éclatement de la courbe T_1, le cusp de T_2 se résout, donc on peut ensuite éclater transformée stricte lisse de T_2 dans ce premier éclatement.

Étape 1 : On éclate la courbe lisse : $Y_1 = \mathrm{Bl}_{T_1}(\mathbb{A}^3)\xrightarrow{\phi_1}\mathbb{A}^3$.

- Dans la carte U de coordonnées $(u,v/w,w)=(u',v',w')$, on a

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad w'=0,\\ \phi_1^{-1}(B) &: \quad u'^2w'^2-4u'^3v'^2w'^2-4w'^3+18u'v'^2w'^3-27v'^4w'^4=0,\\ \phi_1^{-1}(B)-2E_1=B_1 &: \quad u'^2-4u'^3v'^2-4w'+18u'v'^2w'-27v'^4w'^2=0.\end{aligned}$$

Alors B_1 est lisse. En particulier, il n'y a pas de trace de la courbe T_2 de singularité A_2 dans cette carte.

– Dans la carte V ayant pour coordonnées $(u, v, w/v) = (u'', v'', w'')$,

$$\begin{array}{rcl} E_1 & : & v'' = 0, \\ \phi_1^{-1}(B) - 2E_1 = B_1 & : & u''^2 w''^2 - 4u''^3 - 4v''w''^3 + 18u''v''w'' - 27v''^2 = 0, \\ \phi_1^{-1}(T_2) - 2E_1 = \widetilde{T_2} & : & (3\tau^2, -\tau^3, -3\tau), \end{array}$$

où $\widetilde{T_2}$ est la transformée stricte de T_2 (On la notera simplement encore T_2 par la suite).

Étape 2 : Considérons l'éclatement de Y_1 le long de T_2 : $Y_2 = \mathrm{Bl}_{T_2}(Y_1) \longrightarrow Y_1$. Étant donné que T_2 est entièrement inclus dans la carte V lors de l'éclatement précédent, on se restreint au calcul de l'éclatement dans cette carte. En effet, l'autre demeurera inchangée par l'opération. Par ailleurs, pour simplifier les calculs, on effectue un changement de coordonnées qui nous ramène à un éclatement le long d'un axe de coordonnées. Pour cela, on pose le changement de coordonnées $(u - w^2/3, v - w^3/27, w) \mapsto (u, v, w)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} B_1 & : & -4u^3 - 27v^2 - 3u^2w^2 + 18uvw = 0, \\ E_1 & : & v + w^3/27 = 0, \\ T_2 & : & u = v = 0. \end{array}$$

L'éclatement $Y_2 \xrightarrow{\phi_2} Y_1$ correspond donc dans V à l'éclatement de l'axe $< u, v >$ dans $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v, w])$.

– Dans la carte V_1 de coordonnées $(u, v/u, w) = (u', v', w')$,

$$\begin{array}{rcl} E_2 & : & u' = 0, \\ \phi_2^{-1}(E_1) - 2E_2 = \widetilde{E_1} & : & u'v' + w'^3/27 = 0, \\ \phi_2^{-1}(B_1) - 2E_2 = B_2 & : & -4u' - 27v'^2 - 3w'^2 + 18v'w' = 0. \end{array}$$

On note que l'intersection $T_2 \cap E_1$ étant d'ordre 3, la transformée stricte de E_1 lors de l'éclatement le long de T_2 (qui est isomorphe à l'éclatement de E_1 le long de $T_2 \cap E_1$) présente une singularité A_2.

– Dans la carte V_2 de coordonnées $(u/v, v, w) = (u'', v'', w'')$,

$$\begin{array}{rcl} E_2 & : & v'' = 0, \\ \phi_2^{-1}(B_1) - 2E_2 = B_2 & : & -4u''^3 v'' - 27 - 3u''^2 w''^2 - 18u''w'' = 0. \end{array}$$

En particulier, B_2 est lisse, de sorte que d'après la proposition 2.1.9, le revêtement double $X^* \xrightarrow{\pi} Y_2$ avec pour diviseur de branchement B_2 est une résolution de la singularité X_{A_3}.

Pour déterminer les fibres dans X_2 au-dessus des points singuliers du quotient, on va déterminer les fibres dans Y_2 au-dessus des points des courbes T_1 et T_2, puis en étudiant leur intersection avec le lieu de ramification B_2 du dernier revêtement double, on en déduira les fibres cherchées dans X_2.

Plaçons nous dans la carte V_1 de Y_2 au-dessus de la carte V de Y_1 contenant la courbe T_2. (Car cette carte rencontre E_1 et E_2).

Les surfaces exceptionnelles $E_1 : uv - w^3/27 = 0$ et $E_2 : u = 0$ se coupent le long de la droite $u = w = 0$. La fibre au-dessus de l'origine est la réunion de cette droite et de la courbe C (incluse dans E_1) paramétrée $C : \{(27\tau^2, \tau, 9\tau), \tau \in \mathbb{C}\}$. Enfin, l'intersection des surfaces exceptionnelles avec le lieu de branchement sont

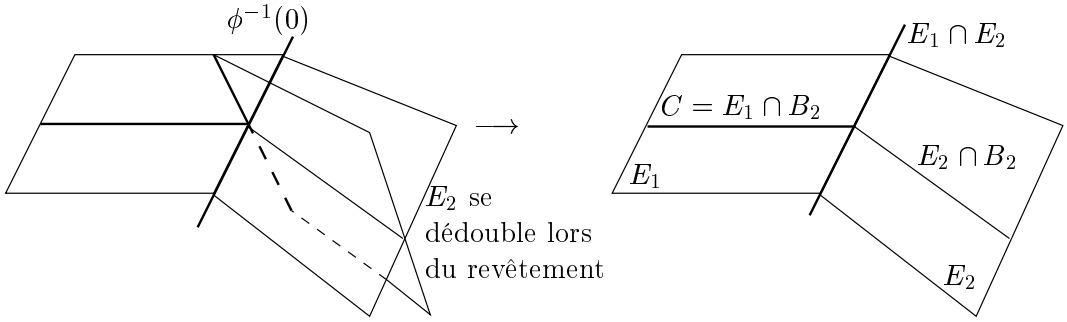
$$E_2 \cap B_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} u & = & 0 \\ (3v - w)^2 & = & 0 \end{array} \right.$$

de sorte que $B_2 \cap E_2$ est de multiplicité deux dans E_2, et

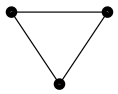
$$E_1 \cap B_2 = C : \left\{ \begin{array}{rcl} 27uv + w^3 & = & 0 \\ -4u - 3(3v - w)^2 & = & 0. \end{array} \right.$$

D'après la proposition 2.1.6, l'image réciproque de E_2 par le revêtement double $X_2 \longrightarrow Y_2$ est isomorphe au revêtement double de E_2 avec pour lieu de branchement $E_2 \cap B_2$. Puis, d'après la proposition 2.1.5, le fait que l'équation de $E_2 \cap B_2$ dans E_2 soit un carré entraîne que le revêtement double n'est pas irréductible. Lors du revêtement double, la surface E_2 se dédouble en deux surfaces qui se coupent le long de leur intersection avec l'image réciproque de B_2. En particulier, la fibre au-dessus de 0 se dédouble en deux courbes. En revanche, comme l'équation de $E_1 \cap E_2$ n'est pas un carré dans E_1, l'image réciproque de E_1 est irréductible. La composante C de la fibre au-dessus de l'origine étant incluse dans le diviseur de branchement, elle est comptée avec multiplicité deux dans le revêtement.

On obtient donc pour lieu exceptionnel au-dessus du lieu singulier de X_{A_3} une surface à trois composantes irréductibles. La fibre au-dessus de l'origine est la réunion de trois courbes rationnelles s'intersectent en un unique point.



En particulier, le graphe dual de la fibre au-dessus de l'origine est le suivant.



2.2.7 Le système de racines $\mathbf{B_3}$

On définit $\mathrm{R} = B_3$ comme étant l'ensemble des vecteurs de longueurs 1 ou $\sqrt{2}$ de $\mathbb{R}^3$ appartenant au réseau standard $\varepsilon_1\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_2\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_3\mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{R} = \{\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i \neq j \leq 3\}$, et on peut prendre

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \alpha_3 = \varepsilon_3$$

comme système générateur. $W(\mathrm{R}) = \mathfrak{S}_3 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ agit par permutation des ε_i pour la première composante et multiplication par (-1) pour la deuxième. Ainsi, l'algèbre des invariants $R = \mathbb{C}[x,y,z]^W = \mathbb{C}[x^2,y^2,z^2]^{\mathfrak{S}_3} = \mathbb{C}[f_2, f_4, f_6]$ avec $f_2 = x^2+y^2+z^2, f_4 = x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2, f_6 = x^2y^2z^2$.

Pour identifier la singularité $\mathbb{A}_3/W_+ = X_{B_3}$, cherchons un anti-invariant. D'après le théorème 1.6.6.2, il est donné par le Jacobien :

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x(y^2+z^2) & 2y(x^2+z^2) & 2z(x^2+y^2) \\ 2xy^2z^2 & 2x^2y^2z & 2x^2y^2z \end{vmatrix} = 8xyz(x^2y^2(x^2-y^2)+x^2z^2(z^2-x^2)+y^2z^2(y^2-z^2)).$$

Notons $\Delta = xyz(x^2y^2(x^2-y^2)+x^2z^2(z^2-x^2)+y^2z^2(y^2-z^2))$, et pour simplifier les notations, $u = f_2$, $v = f_4$ et $w = f_6$. Alors X_{B_3} est le revêtement double de $\mathbb{A}^3/W$ de lieu de branchement B d'équation $w(u^2v^2-4u^3w-4v^3+18uvw-27w^2) = 0$. En effet, le lieu de branchement est le lieu de $\mathbb{A}^3/W$ formé des points images de $(a,b,c) \in \mathbb{A}^3$ ayant la même orbite sous l'action de W et de W_+, c'est à dire stabilisés par une réflexion de W. Ce sont les points dont une coordonnée au moins est nulle (par exemple, si $a = 0$, l'élément est stabilisé par $(I;(-1,1,1))$), et les points dont deux coordonnées sont égales ou opposées (si $a = b$, alors l'élément est stabilisé par $((12);(1,1,1))$, et si $a = -b$, il l'est par $((12),(-1,-1,1))$. Ces points vérifient donc $xyz = 0$ ou $\mathrm{Disc}(x^3+\sigma_1(a^2,b^2,c^2)x^2+\sigma_2(a^2,b^2,c^2)x+\sigma_3(a^2,b^2,c^2)) = 0$, où Δ est le discriminant du polynôme. Autrement dit, et d'après la formule du discriminant d'un polynôme de degré trois, dans $\mathbb{A}^3$, l'équation de B est

$$f_6(f_2^2f_4^2-4f_2^3f_6-4f_4^3+18f_2f_4f_6-27f_6^2).$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$\Delta^2 = w(u^2v^2-4u^3w-4v^3+18uvw-27w^2).$$

Notons $B = S \cup H$ où H est l'hyperplan d'équation $w = 0$ et S a pour équation $u^2v^2-4u^3w-4v^3+18uvw-27w^2 = 0$. Alors B a trois composantes singulières se rencontrant en 0. D'une part le lieu singulier de S, qui est une courbe rationnelle normale de représentation paramétrique

$$\mathrm{Sing}(S) : \{(3\alpha, 3\alpha^2, \alpha^3)\}.$$

D'autre part le lieu d'intersection $S \cap H$ qui se divise en deux composantes dont une conique $\mathcal{C}$ et une droite L.

$$\mathcal{C} : \begin{cases} w &= 0 \\ u^2-4v &= 0 \end{cases}$$

$$L : \{v = w = 0\}.$$

Ils correspondent aux images des points de stabilisateur non trivial pour l'action de $W_+ = \mathfrak{S}^4$ sur $\mathbb{A}^3$. Ces points sont

– l'origine, seul point stabilisé par le groupe entier.

- les points du type (a,a,a), stabilisés par le sous-groupe $\mathfrak{A}_3$ de $\mathfrak{S}_3$. Ils s'envoient sur $(3a^2, 3a^4, a^6) \in \mathrm{Sing}(S)$, de sorte que, au-dessus de $\mathrm{Sing}(S)$, X_{B_3} présente des singularités de type A_2 dans la terminologie *A-D-E*, associées au sous-système de racines A_2 engendré par α_1 et α_2 de B_3 .
- les points du type $(0,a,a)$, stabilisés par le sous-groupe de W $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathfrak{S}_2 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2)$, et donc par le sous-groupe $\mathbb{D}_4$ de W_+ associé au sous-système de racines $A_1 \times B_2$ de B_3. Ces points s'envoient sur $(2a^2, a^4, 0) \in \mathcal{C}$ dans $\mathbb{A}^3/W$, de sorte que l'on a au-dessus de $\mathcal{C}$ des singularités de type D_4 dans la terminologie *A-D-E*, associées à un système de racines $A_1 \times B_2$.
- les points du type $(0,0,a)$, stabilisés par $\mathfrak{S}_2 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ de W. Ils s'envoient sur $(a^2,0,0) \in L$ dans $\mathbb{A}^3/W$, de sorte que X_{B_3} présente des singularités de type D_4 dans la terminologie *A-D-E*, associées au sous-système de racines B_2 de B_3 au-dessus de L.

Comme dans le cas A_3, on va résoudre ces familles de singularités planes en éclatant les courbes $\mathcal{C}$, L et $\mathrm{Sing}(S)$, et on vérifiera que le singularité à l'origine est ainsi résolue.

Étape 1 et 2 : On éclate deux fois l'axe L (pour résoudre les singularités de type D_4). Dans la carte de coordonnées $(x,y,z) = (u,v,\frac{w}{v})$, on obtient pour le lieu de branchement $B_1 : z(x^2y - x^3z - 4y^2 + 18xyz - 27yz^2) = 0$.

Le lieu exceptionnel $E_1 : y = 0$ et la fibre au-dessus de l'origine : $F_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0. \end{array} \right.$

On éclate encore l'axe $\mathcal{O}_x$ et on obtient

- dans la carte U de coordonnées $(x,y,\frac{z}{y})$, il n'y a pas de trace de E_1,

$$\begin{array}{rcl} E_2 & : & y = 0, \\ \phi^{-1}(B_1) - 2E_2 = B_2 & : & z(x^2 - 4x^3z - 4y + 18xyz - 27y^2z^2) = 0, \\ \phi^{-1(0)} = F_2 & : & x = y = 0. \end{array}$$

- dans la carte V de coordonnées $(x,\frac{y}{z},z)$,

$$\begin{array}{rcl} E_1 & : & y = 0, \\ E_2 & : & z = 0, \\ B_2 & : & x^2y - 4x^3 - 4y^2z + 18xyz - 27yz^2 = 0, \\ F_1 & : & x = y = 0, \\ F_2 & : & x = z = 0. \end{array}$$

$B_2 \cap U$ est le lieu de branchement d'une famille à un paramètre de singularités associées au système de racines $A_1 \times A_1$ (Le long de la transformée de $\mathcal{C}$). Elle se résout en un éclatement qui fait apparaître un facteur $F_3 \cong \mathbb{P}^1$ dans la fibre au-dessus de l'origine.

Étape 3 : On éclate la transformée de $\mathrm{Sing}(S)$. Le lieu de branchement $B_2 \cap V$ présente des singularités le long de l'axe $(3\alpha, 9\alpha, \frac{\alpha}{3})$. Après le changement de variables $(u,v,w) =$

$(x-9z, y-27z, z)$, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} B_2 & : & w(9u-2v)^2 - u^2v + 4u^3 = 0, \\ E_1 & : & v + 27w = 0, \\ E_2 & : & w = 0, \\ F_1 & : & u + 9w = v + 27w = 0, \\ F_2 & : & u = w = 0. \end{array}$$

On éclate alors l'axe $\mathcal{O}_w$ et on obtient

– Dans la carte V_1 de coordonnées $(\frac{u}{v}, v, w)$,

$$\begin{array}{rcl} E_4 & : & v = 0, \\ F_4 & : & v = w = 0, \\ B_4 & : & w(9u-2)^2 - u^2v + 4u^3v = 0, \\ \phi^{-1}(E_1) & : & v + 27w = 0, \\ \phi^{-1}(F_1) & : & uv + 9w = v + 27w = 0, \\ (\phi^{-1}(F_1) - F_4) = \widetilde{F_1} & : & u = \frac{1}{3},\ v + 27w = 0, \\ \phi^{-1}(E_2) & : & w = 0, \\ \phi^{-1}(F_2) & : & uv = w = 0, \\ (\phi^{-1}(F_2) - F_4) \cap \{w = 0\} = \widetilde{F_2} & : & u = w = 0. \end{array}$$

– Dans la carte V_2 de coordonnées $(u, \frac{v}{u}, w)$

$$\begin{array}{rcl} E_4 & : & u = 0, \\ B_4 & : & w(9-2v)^2 - uv + 4u = 0, \\ \widetilde{F_1} & : & u + 9w = 0, v = 3, \\ F_4 & : & u = w = 0. \end{array}$$

et F_2 n'a pas de trace dans cette carte.

Le lieu de branchement obtenu après ces quatre éclatements est lisse. Reste à voir ce que devient la fibre au-dessus de l'origine lors du revêtement double au-dessus de ce nouveau lieu de branchement. On vérifie facilement que les fibres F_1, F_2 et F_4 sont contenues dans le lieu de branchement. Elles ne sont donc pas dédoublées lors du revêtement double. En revanche, F_3 n'est pas incluse dans le lieu de branchement mais l'équation de celui-ci n'étant pas un carré dans F_3, l'image réciproque de la fibre F_3 lors du revêtement double est irréductible. Elle est donc isomorphe à $\mathbb{P}^1$, seul revêtement étale de lui même. Finalement, on obtient une chaîne de quatre $\mathbb{P}^1$. En particulier, le graphe dual de la fibre est le suivant.

2.3 Résolution des singularités locales par le W_+-schéma de Hilbert

Rappelons que d'après le théorème de Bridgeland King et Reid ([BKR01]), pour tout sous-groupe G de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, le morphisme de Hilbert-Chow $G\text{-Hilb}(\mathbb{A}^3) \longrightarrow \mathbb{A}^3/G$ (défini au paragraphe 1.5, théorème 1.5.6) résout les singularités de $\mathbb{A}^3/G$.

2.3.1 Méthode de décomposition de l'algèbre coinvariante

Déterminer la fibre au-dessus de l'origine du W_+-schéma de Hilbert de $\mathbb{A}^3$ revient à déterminer la structure de l'ensemble des idéaux $I \subset \mathbb{C}[x,y,z]$ tels que $\mathbb{C}[x,y,z]/I$ soit la représentation régulière de W_+, et $\sqrt{I}$ est l'idéal (x,y,z). Ce sont les idéaux définissant un sous-schéma ayant une structure de W_+-grappe de support l'origine. Comme on l'a déjà vu pour le W-schéma de Hilbert (preuve du théorème 1.6.7), il est équivalent d'étudier la structure de l'ensemble des idéaux I de l'algèbre coinvariante S_{W_+} tels que S_{W_+}/I définisse une W_+-grappe de $\mathrm{Spec}(S_{W_+})$ de support l'origine.

En effet, étant donné que les constantes sont invariantes sous l'action de W_+ et que la représentation triviale intervient avec multiplicité 1 dans la décomposition de la représentation régulière en représentations irréductibles, tout idéal de $\mathbb{C}[x,y,z]$ définissant une W_+-grappe contient l'idéal engendré par les polynômes non-constants de la sous-algèbre des polynômes invariants par W_+. Notons $S = \mathbb{C}[x,y,z]$, $I_{W_+} = S_+^{W_+} S$ et $S_{W_+} = S/I_{W_+}$ l'algèbre coinvariante de W_+. L'ensemble des idéaux $I \subset S_+$ tels que S/I est la représentation régulière de W_+ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des idéaux $I \subset (S_{W_+})_+$ tels que S_{W_+}/I est la représentation régulière de W_+.

$$\begin{array}{ccc} \text{idéal de } S_{W_+} & & \text{idéal de } S = \mathbb{C}[x,y,z] \\ \text{définissant une } W_+\text{-grappe} & & \text{définissant une } W_+\text{-grappe} \\ \text{de support l'origine} & & \text{de support l'origine} \\ I & \to & \pi^{-1}(I) \\ J/I_{W_+} & \leftarrow & J, \end{array}$$

où $\pi : S \longrightarrow S_{W_+}$ est la surjection canonique.

Par ailleurs, (cf p. 26) rappelons qu'il existe un système générateur de la $\mathbb{C}$-algèbre $R = S^W$ formée d'éléments homogènes f_{d_1}, f_{d_2}, f_{d_3} de S. (1.6.4, [Ste64, Theorem 1.3], [Bou81, Ch.V n° 5.3]). En particulier, f_{d_1}, f_{d_2}, f_{d_3} est une suite S-régulière ([Bou81, Ch.V n° 5.5]). En notant $S_W = S/R_+S$ l'algèbre coinvariante de W, on a donc le complexe de Koszul exact suivant.

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)S \xrightarrow{\partial_3} & \\ (e_1 \wedge e_2)S \oplus (e_2 \wedge e_3)S \oplus (e_3 \wedge e_1)S \xrightarrow{\partial_2} & e_1S \oplus e_2S \oplus e_3S \\ \xrightarrow{\partial_1} S \longrightarrow S_W \longrightarrow 0, & \end{aligned}$$

où $\partial_2(e_i \wedge e_j) = f_{d_i} e_j - f_{d_j} e_i$ et $\partial_1(e_i) = f_{d_i}$. On peut rendre cette suite homogène en affectant les poids $d_i = \deg(f_{d_i})$ à e_i. Alors en degré n, on a

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow S[n-(d_1+d_2+d_3)] \longrightarrow & S[n-(d_2+d_3)] \oplus S[n-(d_1+d_3)] \oplus S[n-(d_1+d_2)] \\ \longrightarrow & S[n-d_1] \oplus S[n-d_2] \oplus S[n-d_3] \longrightarrow S[n] \longrightarrow S_W[n] \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Cette suite permet de calculer les dimensions des composantes homogènes de l'algèbre S_W. En particulier, pour $n \geq d_1+d_2+d_3-2$,

$$\begin{aligned} \dim(S_W[n]) \;=\; & C^2_{n+2} - (C^2_{n-d_1+2} + C^2_{n-d_2+2} + C^2_{n-d_3+2}) \\ & + (C^2_{n-d_2-d_3+2} + C^2_{n-d_1-d_3+2} + C^2_{n-d_1-d_2+2}) - C^2_{n-d_1-d_2-d_3+2} = 0 \end{aligned}$$

Puis si $n = d_1 + d_2 + d_3 - 3$, alors $S_W[n]$ est de dimension 1, engendrée par l'anti-invariant $\Delta = \mathrm{Jac}(f_{d_i})$ Comme $S_{W_+} = S_W/\Delta S_W$, on en déduit la proposition suivante sur les dimensions des composantes de l'algèbre coinvariante S_{W_+}

Proposition 2.3.1 *Pour tout $n \geq d_1 + d_2 + d_3 - 3$ la composante $S_{W_+}[n]$ est nulle. Autrement dit, tout monôme de $\mathbb{C}[x, y, z]$ de degré supérieur à $d_1 + d_2 + d_3 - 3$ appartient à l'idéal I_{W_+}.*

Pour $n \leq d_1 + d_2 + d_3 - 3$, avec la convention $C_n^p = 0$ si $p \notin [0, n]$, on a

$$\begin{aligned}\dim(S_{W_+}[n]) = C^2_{n+2} &- (C^2_{n-d_1+2} + C^2_{n-d_2+2} + C^2_{n-d_3+2}) \\ &+ (C^2_{n-d_2-d_3+2} + C^2_{n-d_1-d_3+2} + C^2_{n-d_1-d_2+2}).\end{aligned}$$

Par ailleurs, rappelons que S_W est isomorphe à la représentation régulière de W (théorème 1.6.5). Ainsi, la dimension totale de S_{W_+} est $\mathrm{Card}(W) - 1 = 2\mathrm{Card}(W_+) - 1$, et chacune des représentations irréductibles non triviale V_i de dimension d_i de W_+ apparaît avec la multiplicité $2d_i$. Ainsi, choisir une W_+-grappe de support l'origine revient à choisir pour chaque représentation irréductible V_i de W_+ une famille libre de d_i copies de V_i, de façon compatible avec la multiplication de l'algèbre.

Pour chaque système de racines, on va décomposer l'algèbre graduée S_{W_+} en représentations irréductibles, puis on va en déduire la structure de l'ensemble des W_+-grappes de support l'origine de $\mathbb{A}^3$.

Rappelons que l'idéal $I_{W_+} = (\mathbb{C}[x, y, z]^{W_+})_+\mathbb{C}[x, y, z]$ est contenu dans tous les idéaux définissant des W_+-grappes de support l'origine. Ainsi, si B_i est une V_i-base dans S_{W_+}, et I un idéal de $\mathbb{C}[x, y, z]$ définissant une W_+-grappe, on s'autorisera à écrire "$B_i \in I$" pour "des représentants dans $\mathbb{C}[x, y, z]$ des classes composant la base B_i appartiennent à l'idéal I". De plus, comme toute V_i-base est contenue dans la somme des $V_i[k]$, pour k variant de 0 à 6, on s'autorisera à écrire des combinaisons linéaires de bases. Par exemple, si $B_\theta[4] = \{\bar{y}^4, \bar{z}^4\}$ et $B_\theta[5] = \{\bar{x}\bar{y}\bar{z}(\bar{z}^2 - \bar{x}^2), \bar{x}\bar{y}\bar{z}(\bar{y}^2 - \bar{x}^2\}$, on écrira $aB_\theta[4] + B_\theta[5] \in I$ pour $\begin{cases} ay^4 + bxyz(z^2 - x^2) \in I, \\ az^4 + bxyz(y^2 - x^2) \in I, \end{cases}$

Soit V_i une représentation de dimension k et B_i une base. On dira qu'on multiplie l'identité $B_i \in I$ par le vecteur $(a_1, \ldots, a_k)$ si on multiplie la i-ème ligne de l'identité par a_i. Par exemple, si $B_\psi[4] = \{x^2yz, xy^2z, xyz^2\}$, la multiplication de $B_\psi[4] \in I$ par (z, x, y), donne $\begin{cases} x^2yz^2 \in I \\ x^2y^2z \in I \\ xy^2z^2 \in I \end{cases}$.

2.3.2 Le système de racines $\mathbf{A_1 \times A_1 \times A_1}$

Ici, l'algèbre des polynômes invariants par W_+ est engendrée par x^2, y^2, z^2 et xyz, de sorte que l'algèbre coinvariante $S_{W_+} = \overline{1} \cdot k \oplus \overline{x} \cdot k \oplus \overline{y} \cdot k \oplus \overline{z} \cdot k \oplus \overline{yz} \cdot k \oplus \overline{xz} \cdot k \oplus \overline{xy} \cdot k$. Le groupe $W_+ = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ possède quatre représentations irréductibles de degré un, χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 (voir paragraphe A.1) et on a $\overline{1} \cdot k \cong V_{\chi_1}$, $\overline{x} \cdot k \cong \overline{yz} \cdot k \cong V_{\chi_2}$, $\overline{y} \cdot k \cong \overline{xz} \cdot k \cong V_{\chi_3}$, $\overline{z} \cdot k \cong \overline{xy} \cdot k \cong V_{\chi_4}$.

Lemme 2.3.2 *Soit I un idéal de $\mathbb{C}[x,y,z]$ définissant une W_+- grappe de support l'origine. Alors il existe un unique triplet*

$$((a:b),(c:d),(e:f)) \in (\mathbb{P}^1)^3 \text{ tel que } \begin{cases} ax+byz \in I \\ cy+dxz \in I \\ ez+fxy \in I. \end{cases}$$

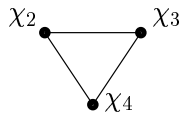
De plus, si $a \neq 0$ alors $c=e=0$, si $c \neq 0$ alors $a=e=0$ et si $e \neq 0$ alors $a=c=0$.

Preuve : Pour que chacune des représentations irréductibles n'apparaisse qu'une fois dans la décomposition du quotient S/I en représentations irréductibles de W_+, il est nécessaire qu'un facteur isomorphe à V_{χ_i} soit inclus dans l'idéal I pour $i=2,3$ ou 4. Puis, si $(a:b) \neq (a':b') \in \mathbb{P}^1$, alors $a\overline{x}+b\overline{yz}, a'\overline{x}+b'\overline{yz}$ forme une famille libre de $\overline{x}\cdot k \oplus \overline{yz}\cdot k \subset S_{W_+}$. L'appartenance de ces deux polynômes à I impliquerait donc l'absence de χ_2 dans la décomposition en représentations irréductibles de $S_{W_+}/(I \cap S_{W_+})$, ce qui est impossible puisqu'il s'agit de la représentation régulière de W_+. On en déduit l'unicité du triplet $((a:b),(c:d),(e:f))$.

Maintenant, supposons que $ax+byz \in I$, avec $a \neq 0$. Comme $y^2 \in I_{W_+} \subset I$ et $z^2 \in I_{W_+}$, cela implique $xy \in I$ et $xz \in I$, c'est à dire $c=e=0$ par unicité du triplet $((a:b),(c:d),(e:f))$. □

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.3.3 *La fibre exceptionnelle du W_+-schéma de Hilbert est la réunion de trois $\mathbb{P}^1$ s'intersectant en un unique point correspondant à l'idéal $< xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2 >$ de $\mathbb{C}[x,y,z]$. En particulier, le graphe dual de la fibre du morphisme de Hilbert-Chow au-dessus de la singularité à l'origine est*



Preuve : En effet, si J est un idéal représentant une W_+-grappe de support l'origine, d'après le lemme, il appartient à l'une des familles suivantes.

$$\begin{aligned} I_{\chi_2}(a:b) &= < ax+byz, x^2, y^2, z^2, xy, xz > \quad (a:b) \in \mathbb{P}^1, \\ I_{\chi_3}(a:b) &= < ay+bxz, x^2, y^2, z^2, xy, yz > \quad (a:b) \in \mathbb{P}^1, \\ I_{\chi_4}(a:b) &= < az+bxy, x^2, y^2, z^2, xz, yz > \quad (a:b) \in \mathbb{P}^1. \end{aligned}$$

□

2.3.3 Le système de racines $\mathbf{A_1 \times A_2}$

La table des représentations de $W_+ = \mathbb{D}_3$ est donnée en annexe, au paragraphe A.2. Par ailleurs, on a vu dans le paragraphe 2.2.3 que $I_{W_+} =< x^2, yz, y^3+z^3, x(y^3-z^3) >$. D'après la proposition 2.3.1 l'algèbre graduée S_{W_+} voit ses composantes s'annuler pour $n \geq 4$, et on a $\dim(S_{W_+}[0]) = 1$, $\dim(S_{W_+}[1]) = 3$ $\dim(S_{W_+}[2]) = 6-2 = 4$, $\dim(S_{W_+}[3]) = 10-6-1 = 3$. Elle se décompose comme suit en composantes irréductibles.

	déc. en rep. irréd.	base
$S_{W_+}[0]$	V_{ψ_1}	$B_{\psi_1}[0] = \{\bar{1}\}$
$S_{W_+}[1]$	$V_{\psi_2} \oplus V_\rho$	$B_{\psi_2}[1] = \{\bar{x}\}$ $B_\rho[1] = \{\bar{y}, \bar{z}\}$
$S_{W_+}[2]$	$V_\rho \oplus V_\rho$	$B_\rho[2]_1 = \{\bar{x}\bar{y},\ -\bar{x}\bar{z}\}$ $B_\rho[2]_2 = \{\bar{z}^2, \bar{y}^2\}$
$S_{W_+}[3]$	$V_{\psi_2} \oplus V_\rho$	$B_{\psi_2}[3] = \{\bar{y}^3 - \bar{z}^3\}$ $B_\rho[3] = \{\bar{x}\bar{z}^2,\ -\bar{x}\bar{y}^2\}$

Lemme 2.3.4 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Alors il existe un unique couple $(a_\psi : b_\psi) \in \mathbb{P}^1$ tel que*

$$a_\psi x + b_\psi(y^3 - z^3) \in I.$$

Preuve : En effet, la représentation irréductible V_{ψ_2} étant de degré un, elle ne doit apparaître qu'avec multiplicité un dans le quotient S/I, or elle apparaît avec multiplicité deux dans S_{W_+}. □

Lemme 2.3.5 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Alors $B_\rho[3] \in I$ et il existe un unique couple $(a_\rho : b_\rho) \in \mathbb{P}^1$ tel que*

$$a_\rho B_\rho[2]_1 + b_\rho B_\rho[2]_2 \in I.$$

Preuve : A priori, la famille formée des $(\alpha : \beta : \gamma : \delta) \in \mathbb{P}^4$ vérifiant l'identité $I(\rho)$ suivante $\alpha B_\rho[2] \oplus \beta B_\rho[2]_1 + \gamma B_\rho[2]_2 \oplus \delta B_\rho[3] \in I$ est de dimension 2, car V_ρ apparaît avec multiplicité 4 dans S_{W_+}.

Remarquons que en multipliant l'identité $I(\rho)$ par (x, y), on obtient $(0 : \alpha : 0 : \beta)$ vérifie $I(\rho)$. Puis, en la multipliant par $(xy : xz)$, on obtient $(0 : 0 : 0 : \alpha)$ également. Comme le rang de cette famille est deux, on a nécessairement $\alpha = 0$.

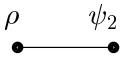
Maintenant, supposons qu'il existe $(0 : \beta : \gamma : \delta)$ vérifiant $I(\rho)$ avec $\gamma \neq 0$, alors comme $x^2 \in I$ car il est invariant par W_+, en multipliant par $(x, -x)$, on obtient $(0 : 0 : 0 : \gamma)$ vérifie $I(\rho)$, c'est à dire $B_\rho[3] \in I$, et il existe un unique couple $(a_\rho : b_\rho) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\rho B_\rho[2]_1 + b_\rho B_\rho[2]_2 \in I$, avec $b \neq 0$. Si au contraire pour tout $(0 : \beta : \gamma : \delta)$ vérifiant $I(\rho)$, on a $\gamma = 0$, alors comme le rang de la famille vérifiant l'identité est deux, on a nécessairement $B_\rho[2]_1 \in I$ et $B_\rho[3] \in I$. □

Proposition 2.3.6 *Les deux familles suivantes décrivent exactement l'ensemble des idéaux de $\mathbb{C}[x,y,z]$ définissant une W_+-grappe de support l'origine.*

$$I_\psi(a:b) =< ax + b(y^3 - z^3), xy, xz, yz, x^2, x^3 + z^3 >,$$

$$I_\rho(a:b) =< aB_\rho[2]_1 + bB_\rho[2]_2, x^2, yz, y^3, z^3, xy^2, xz^2 > .$$

De plus, $I_\psi(0:1) = I_\rho(1:0)$. En particulier, le graphe dual de la fibre est le suivant.



Preuve : Soit I une W_+-grappe. D'après le lemme 2.3.4, il existe un couple $(a_\psi : b_\psi) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\psi x + b_\psi(y^3 - z^3) \in I$. Supposons que $a_\psi \neq 0$. Étant donné que tout les monômes de degrés supérieurs à 4 sont nécessairement dans I, la relation $a_\psi x + b_\psi(y^3 - z^3) \in I$ implique $B_\rho[2]_1 \in I$ et $B_\rho[3] \in I$, de sorte que $I = I_\psi(a_\psi : b_\psi)$. Sinon, $a = 0$ et d'après le lemme 2.3.5, $B_\rho[3] \in I$ et il existe $(a_\rho : b_\rho) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\rho B_\rho[2]_1 + b_\rho B_\rho[2]_2 \in I$. Dans ce cas, on a donc $I = I_\rho(a_\rho : b_\rho)$. □

2.3.4 Le système de racines $\mathbf{A_1 \times B_2}$

La table des représentations de $W_+ = \mathbb{D}_4$ est donnée en annexe, au paragraphe A.3. On a vu que $I_{W_+} =< x^2, y^2 + z^2, y^2z^2, xyz(y^2 - z^2) >$. D'après la proposition , l'algèbre graduée S_{W_+} a des composantes nulles en degré supérieurs à 5 et $\dim(S_{W_+}[0]) = 1$, $\dim(S_{W_+}[1]) = 3$, $\dim(S_{W_+}[2]) = 6-2 = 4$, $\dim(S_{W_+}[3]) = 10-6 = 4$, et $\dim(S_{W_+}[4]) = 15 - 12 - 1 + 1 = 3$. Elle se décompose comme suit en composantes irréductibles.

	déc. en rep. irréd.	base
$S_{W_+}[0]$	V_{ψ_1}	$B_{\psi_1}[1] = \{\bar{1}\}$
$S_{W_+}[1]$	$V_{\psi_2} \oplus V_\rho$	$B_{\psi_1}[2] = \{\bar{x}\}$ $B_\rho[1] = \{\bar{y}, \bar{z}\}$
$S_{W_+}[2]$	$V_{\psi_3} \oplus V_{\psi_4} \oplus V_\rho$	$B_{\psi_3}[2] = \{\bar{y}\bar{z}\}$ $B_{\psi_4}[2] = \{\bar{y}^2 - \bar{z}^2\}$ $B_\rho[2] = \{-\bar{x}\bar{z}, \bar{x}\bar{y}\}$
$S_{W_+}[3]$	$V_{\psi_3} \oplus V_{\psi_4} \oplus V_\rho$	$B_{\psi_3}[3] = \{\bar{x}(\bar{y}^2 - \bar{z}^2)\}$ $B_{\psi_4}[3] = \{\bar{x}\bar{y}\bar{z}\}$ $B_\rho[3] = \{\bar{y}^3, \bar{z}^3\}$
$S_{W_+}[4]$	$V_{\psi_2} \oplus V_\rho$	$B_{\psi_2}[4] = \{\bar{y}\bar{z}(\bar{y}^2 - \bar{z}^2)\}$ $B_\rho[4] = \{-\bar{x}\bar{z}^3, \bar{x}\bar{y}^3\}$

Les représentations ψ_2, ψ_3 et ψ_4 sont de dimensions un et interviennent donc chacune avec multiplicité un dans la représentation régulière. On obtient directement le lemme suivant.

Lemme 2.3.7 *Soit I un idéal de $\mathbb{C}[x,y,z]$ définissant une W_+-grappe de support l'origine. Il existe, et de façon unique $(a_{\psi_4} : b_{\psi_4})$, $(a_{\psi_3} : b_{\psi_3})$ et $(a_{\psi_2} : b_{\psi_2})$ dans $\mathbb{P}^1$ tels que $a_{\psi_4}(y^2 - z^2) + b_{\psi_4}xyz \in I$, $a_{\psi_3}x(y^2 - z^2) + b_{\psi_3}yz \in I$ et $a_{\psi_2}x + b_{\psi_2}yz(y^2 - z^2) \in I$.*

Lemme 2.3.8 *Soit I un idéal de $\mathbb{C}[x,y,z]$ définissant une W_+-grappe de support l'origine. $B_\rho[4] \in I$ et il existe un unique couple $(a_\rho : b_\rho) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\rho B_\rho[2] + b_\rho B_\rho[3] \in I$.*

Preuve : Étant donné que ρ ne doit intervenir que deux fois dans la décomposition de S/I en représentation irréductibles de $\mathbb{D}_4$, et qu'elles apparaissent avec multiplicité 4 dans S_{W_+}, la famille des $(a : b : c : d) \in \mathbb{P}^3$ vérifiant l'identité $I(\rho) : aB_\rho[1] + bB_\rho[2] + cB_\rho[3] + dB_\rho[4] \in I$ est de rang deux. Soit $(a : b : c : d)$ vérifiant $I(\rho)$. Alors en multipliant par $(-x, x)$, on obtient $(0 : a : 0 : c)$ vérifie également $I(\rho)$, puis en multipliant encore par (z^2, y^2), on obtient $(0 : 0 : 0 : a)$ vérifie encore $I(\rho)$. Ceci implique que $a = 0$.

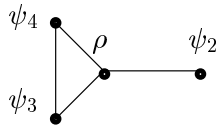
Soit $(0 : b : c : d)$ vérifiant $I(\rho)$, avec b ou c non nul. (Il en existe, d'après le rang de la famille). En multipliant respectivement par (z^2, y^2) ou par $(-x, x)$ l'identité, on obtient $B_\rho[4] \in I$.

On a bien démontré que $B_\rho[4] \in I$ et il existe un unique $(a_\rho : b_\rho) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\rho B_\rho[2] + b_\rho B_\rho[3] \in I$. □

Proposition 2.3.9 *Soit I un idéal de $\mathbb{C}[x,y,z]$ définissant une W_+-grappe de support l'origine. Alors I appartient à l'une des quatre familles d'idéaux suivantes.*

$$\begin{aligned}
I_{\psi_2}(a:b) &=< ax - byz(y^2-z^2), xy, xz, x^2, y^2+z^2xy^3, xz^3, y^2z^2, xyz(y^2-z^2) >,\\
I_{\psi_3}(a:b) &=< ax(y^2-z^2) - byz, x^2y^2+z^2, xyz, y^3, z^3, xy^3, xz^3, y^2z^2 >,\\
I_{\psi_4}(a:b) &=< a(y^2-z^2) - bxyz, x^2, y^2+z^2, x(y^2-z^2), y^3, z^3, y^2z^2 >,\\
I_{\rho}(a:b) &=< axz - by^3, axy + bz^3, x^2, y^2+z^2, xyz, x(y^2-z^2),\\
&\qquad\qquad yz(y^2-z^2), xy^3, xz^3, y^2z^2 > .
\end{aligned}$$

De plus, $I_{\psi_2}(0:1) = I_\rho(1:0)$, $I_{\psi_3}(1:0) = I_{\psi_4}(0:1) = I_\rho(0:1)$. En particulier, le graphe dual de la fibre est le suivant.



Preuve : D'après le lemme 2.3.7, il existe trois couples $(a_{\psi_2} : b_{\psi_2})$, $(a_{\psi_3} : b_{\psi_3})$, $(a_{\psi_4} : b_{\psi_4})$ tels que $a_{\psi_2}x + b_{\psi_2}yz(y^2-z^2) \in I$, $a_{\psi_3}x(y^2-z^2) + b_{\psi_3}yz \in I$ et $a_{\psi_4}(y^2-z^2) + b_{\psi_4}xyz \in I$.

Supposons dans un premier temps que $a_{\psi_2} \neq 0$. Alors comme tout les monômes de degré supérieur à 5 appartiennent à $I_{W_+} \subset I$, en multipliant l'identité par y et z, on obtient que $B_\rho[2] \in I$, puis en la multipliant par yz et (y^2-z^2), on a $B_{\psi_3}[3] \in I$ et $B_{\psi_4}[3] \in I$. On a donc $I = I_{\psi_2}(a_{\psi_2} : b_{\psi_2})$.

On peut maintenant supposer que $a_{\psi_2} = 0$, de sorte que tous les monômes de degrés supérieurs à quatre appartiennent à I. D'après le lemme 2.3.8, il existe $(a_\rho : b_\rho) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\rho B_\rho[2] + b_\rho B_\rho[3] \in I$, c'est à dire : $\left\{ \begin{array}{rcl} -a_\rho xz + b_\rho y^3 & \in & I, \\ a_\rho xy + b_\rho z^3 & \in & I. \end{array} \right.$

Supposons alors que $a_\rho \neq 0$. Comme tout les monômes de degré supérieur à quatre appartiennent à I, en multipliant la première ligne par y, on obtient $xyz \in I$, de sorte que $a_{\psi_4} = 0$, et en multipliant la première ligne par z et la deuxième par y, on obtient $xy^2 \in I$ et $xz^2 \in I$, de sorte que $B_{\psi_3}[3] \in I$ et $b_{\psi_3} = 0$. Dans ce cas, $I = I_\rho(a_\rho : b_\rho)$.

On est maintenant dans le cas où $a_{\psi_2} = a_\rho = 0$. Supposons maintenant que $a_{\psi_4} \neq 0$. Étant donné que $x^2 \in I_{W_+} \subset I$, l'identité $a_{\psi_4}(y^2-z^2) + b_{\psi_4}xyz \in I$ avec $a_{\psi_4} \neq 0$ implique que $x(y^2-z^2) \in I$, donc $b_{\psi_3} = 0$. Ainsi, $I = I_{\psi_4}(a_{\psi_4} : b_{\psi_4})$.

Enfin, si $a_{\psi_3}x(y^2-z^2) + b_{\psi_3}yz \in I$ avec $b_{\psi_3} \neq 0$, cela implique $xyz \in I$, donc $a_{\psi_4} = 0$, de sorte que $xyz \in I$ et $yz(y^2-z^2) \in I$, et $I = I_{\psi_3}(a_{\psi_3} : b_{\psi_3})$. □

2.3.5 Le système de racines $\mathbf{A_1 \times G_2}$

La table des représentations de $W_+ = \mathbb{D}_6$ est donnée en annexe au paragraphe A.4. Par ailleurs, on a vu dans le paragraphe 2.2.5 que I_W est engendré par les polynômes $u = x^2$, $v = yz$, $w = y^6 + z^6$ et I_{W_+} est engendré par u, v, w et $\Delta = x(z^6 - y^6)$. En particulier, d'après la proposition 2.3.1, on a $\dim(S_{W_+}[n]) = 0$ pour tout $n \geq 7$, et $\dim(S_{W_+}[0]) = 1$, $\dim(S_{W_+}[1]) = 3$, $\dim(S_{W_+}[2]) = 6-2 = 4$, $\dim(S_{W_+}[3]) = 10-6 = 4$, $\dim(S_{W_+}[4]) = 15 - 12 + 1 = 4$, $\dim(S_{W_+}[5]) = 21 - 20 + 3 = 4$, $\dim(S_{W_+[6]}) = 28 - 30 - 1 + 6 = 3$. La décomposition de l'algèbre graduée S_{W_+} en représentations irréductibles est la suivante.

	déc. en rep. irréd.	base
$S_{W_+}[0]$	V_{ψ_1}	$B_{\psi_1}[1] = \{\bar{1}\}$
$S_{W_+}[1]$	$V_{\psi_2} \oplus V_{\rho_1}$	$B_{\psi_1}[2] = \{\bar{x}\}$ $B_{\rho_1}[1] = \{\bar{y}, \bar{z}\}$
$S_{W_+}[2]$	$V_{\rho_1} \oplus V_{\rho_2}$	$B_{\rho_1}[2] = \{\bar{x}\bar{y}, -\bar{x}\bar{z}\}$ $B_{\rho_2}[2] = \{\bar{y}^2, \bar{z}^2\}$
$S_{W_+}[3]$	$V_{\psi_3} \oplus V_{\psi_4} \oplus V_{\rho_2}$	$B_{\psi_3}[3] = \{\bar{y}^3 + \bar{z}^3\}$ $B_{\psi_4}[3] = \{\bar{y}^3 - \bar{z}^3\}$ $B_{\rho_2}[3] = \{\bar{x}\bar{y}^2, -\bar{x}\bar{z}^2)\}$
$S_{W_+}[4]$	$V_{\psi_3} \oplus V_{\psi_4} \oplus V_{\rho_2}$	$B_{\psi_3}[4] = \{\bar{x}(\bar{y}^3 - \bar{z}^3)\}$ $B_{\psi_4}[4] = \{\bar{x}(\bar{y}^3 + \bar{z}^3)\}$ $B_{\rho_2}[4] = \{\bar{y}^4, \bar{z}^4\}$
$S_{W_+}[5]$	$V_{\rho_1} \oplus V_{\rho_2}$	$B_{\rho_1}[5] = \{\bar{y}^5, \bar{z}^5\}$ $B_{\rho_2}[5] = \{\bar{x}\bar{y}^4, -\bar{x}\bar{z}^4\}$
$S_{W_+}[6]$	$V_{\psi_2} \oplus V_{\rho_1}$	$B_{\psi_2}[6] = \{\bar{y}^6 - \bar{z}^6\}$ $B_{\rho_1}[6] = \{\bar{x}\bar{y}^5, -\bar{x}\bar{z}^5)\}$

Les représentations V_{ψ_i} de $\mathbb{D}_6$ sont de degré un, donc elles apparaissent avec multiplicité un dans la représentation régulière. On en déduit le lemme suivant

Lemme 2.3.10 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Il existe, et de façon unique, trois couples $(a_{\psi_i} : b_{\psi_i}) \in \mathbb{P}^1$, $i = 2, 3, 4$ tels que $a_{\psi_2}x + b_{\psi_2}(y^6 - z^6) \in I$, $a_{\psi_3}(y^3 + z^3) + b_{\psi_3}x(y^3 - z^3) \in I$, $a_{\psi_4}(y^3 - z^3) + b_{\psi_4}x(y^3 + z^3) \in I$.*

Lemme 2.3.11 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Alors $B_{\rho_1}[6] \in I$ et il existe un unique couple $(a_{\rho_1} : b_{\rho_1}) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_{\rho_1}B_{\rho_1}[2] + b_{\rho_1}B_{\rho_1}[5] \in I$.*

Preuve : La représentation ρ_1 étant de dimension 2 et apparaissant avec multiplicité 4

dans S_{W_+}, la famille des $(a:b:c:d) \in \mathbb{P}^3$ vérifiant l'identité

$$I(\rho_1) \ : \ a\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} xy \\ -xz \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} y^5 \\ z^5 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} xy^5 \\ -xz^5 \end{pmatrix} \in I$$

est a priori de rang deux. Soit $(a:b:c:d)$ vérifiant $I(\rho_1)$. Alors en multipliant chaque composante par x, on obtient $(0:a:0:c)$ vérifie $I(\rho_1)$, puis en multipliant encore par (y^4, z^4), on obtient $(0:0:0:a)$ vérifie $I(\rho_1)$, ce qui implique que $a = 0$.

Si il existe $(0:b:c:d)$ vérifiant $I(\rho_1)$ avec $b \neq 0$, alors en multipliant encore par (y^4, z^4), on a $B_{\rho_1}[6] \in I$, et il existe un unique couple $(a_{\rho_1} : b_{\rho_1}) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_{\rho_1}B_{\rho_1}[2] + b_{\rho_1}B_{\rho_1}[5] \in I$. Sinon, la famille des vecteurs vérifiant $I(\rho_1)$ étant de rang deux, on a $B_{\rho_1}[5] \in I$ et $B_{\rho_1}[6] \in I$, ce qui correspond au point $(a_{\rho_1} : b_{\rho_1}) = (0:1)$ avec les notations de l'énoncé. □

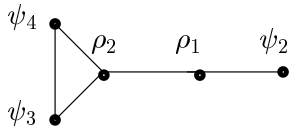
On démontre de la même façon le lemme suivant.

Lemme 2.3.12 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Alors $B_{\rho_2}[5] \in I$ et il existe un unique couple $(a_{\rho_2} : b_{\rho_2}) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_{\rho_2}B_{\rho_2}[3] + b_{\rho_2}B_{\rho_2}[4] \in I$.*

Proposition 2.3.13 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Alors I appartient à l'une des familles suivantes*

$I_{\psi_2}(a:b) =< ax + b(y^6 - z^6), x^2, xy, xz, yz, y^6 + z^6, x(y^6 - z^6) >,$
$I_{\psi_3}(a:b) =< a(y^3 + z^3) + bx(y^3 - z^3), x^2, yz, x(y^3 + z^3), y^4, z^4,$ *degré supérieur à 5* $>,$
$I_{\psi_4}(a:b) =< a(y^3 - z^3) + bx(y^3 + z^3), x^2, yz, x(y^3 - z^3), y^4, z^4,$ *degré supérieur à 5* $>,$
$I_{\rho_1}(a:b) =< axy + by^5, axz - bz^5, xy^2, xz^2, yz, x^2,$ *degré supérieur à 6* $>,$
$I_{\rho_2}(a:b) =< axy^2 + by^4, axz^2 - bz^4, x^2, xy^3, xz^3, yz, y^5, z^5,$ *degré supérieur à 6* $>$.

Et $I_{\psi_2}(0:1) = I_{\rho_1}(1:0)$, $I_{\rho_1}(0:1) = I_{\rho_2}(1:0)$, et $I_{\rho_2}(0:1) = I_{\psi_3}(0:1) = I_{\psi_4}(0:1)$. En particulier, le graphe dual de la fibre du morphisme de Hilbert-Chow au-dessus de la singularité à l'origine est le suivant.



Preuve : En utilisant les notations des lemmes 2.3.10, 2.3.11, et 2.3.12, supposons que $a_{\psi_2} \neq 0$. Alors en multipliant l'identité $a_{\psi_2}x + b_{\psi_2}(y^6 - z^6) \in I$ par y et z, étant donné que tous les monômes de degré supérieur à 7 appartiennent à $I_{W_+} \subset I$, on obtient $B_{\rho_1}[2] \in I$, $B_{\rho_2}[3] \in I$, $B_{\psi_3}[4] \in I$ et $B_{\psi_4}[4] \in I$. Ainsi, $I = I_{\psi_2}(a_{\psi_2} : b_{\psi_2})$

Sinon, $a_{\psi_2} = 0$, de sorte que d'après le lemme 2.3.11, tous les monômes de degré supérieur à six appartiennent à I. Supposons que $a_{\rho_1} \neq 0$. Alors en multipliant l'identité $a_{\rho_1}B_{\rho_1}[2] + b_{\rho_1}B_{\rho_1}[5] \in I$ par (y, z), on obtient $B_{\rho_3}[3] \in I$, puis en multipliant par (y^2, z^2) on obtient $B_{\psi_3}[4] \in I$ et $B_{\psi_4}[4] \in I$. Finalement, $I = I_{\rho_1}(a_{\rho_1} : b_{\rho_1})$.

On peut maintenant supposer que $a_{\rho_1} = a_{\psi_2} = 0$. Si $a_{\rho_2} \neq 0$, alors en multipliant l'identité $a_{\rho_2}B_{\rho_2}[3] + b_{\rho_2}B_{\rho_2}[4] \in I$ par y et z, on obtient $B_{\psi_3}[3] \in I$ et $B_{\psi_4}[3] \in I$. Ainsi, $I = I_{\rho_2}(a_{\rho_2} : b_{\rho_2})$.

Enfin, $a_{\rho_2} = a_{\rho_1} = a_{\psi_2} = 0$, de sorte que tous les monômes de degré supérieur à 5 appartiennent à I. Alors $a_{\psi_3} \neq 0$ implique $a_{\psi_4} = 0$ et réciproquement, $a_{\psi_4} \neq 0$ implique $a_{\psi_3} = 0$, de sorte soit $I = I_{\psi_3}(a_{\psi_3} : b_{\psi_3})$ soit $I = I_{\psi_4}(a_{\psi_4} : b_{\psi_4})$. On remarque que $I_{\psi_3}(0:1) = I_{\psi_4}(0:1)$. □

2.3.6 Le système de racines $\mathbf{A_3}$

Le résultat de ce paragraphe est donné dans [GNS00].

On a déjà vu dans le paragraphe 2.2.6 que I_W est engendré par les polynômes $f_2 = x^2+y^2+z^2$, $f_3 = xyz$, $f_4 = x^2y^2+x^2y^2+y^2z^2$ et I_{W_+} est engendré par f_2,f_3, f_4 et $\Delta = (x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$. En particulier, d'après la proposition 2.3.1, on a $\dim(S_{W_+}[n]) = 0$ pour tout $n \geq 6$, et $\dim(S_{W_+}[0]) = 1, \dim(S_{W_+}[1]) = 3, \dim(S_{W_+}[2]) = 6-1 = 5$, $\dim(S_{W_+}[3]) = 10-3-1 = 6$, $\dim(S_{W_+}[4]) = 15-6-3-1 = 5$, et $\dim(S_{W_+}[5]) = 21-10-6-3+1 = 3$.

Si on note $f = x^2+jy^2+j^2z^2$, on observe que

$$\begin{aligned} yzf+yz\bar{f} &= yz(2x^2+(j+j^2)y^2+(j+j^2)z^2) \\ &= yz(3x^2-f_2) \\ &= 3xf_3 - yzf_2 \in I_W. \end{aligned}$$

De même, $xz(j^2f+j\bar{f}) \in I_W$) et $xy(jf+j^2\bar{f}) \in I_W$.

Puis, $f^2+\bar{f}^2 = x^4-y^4-z^4+2(y^2z^2-(x^2y^2+x^2z^2))$, de sorte que

$$\begin{aligned} x(f^2+\bar{f}^2) &= 2x^5 - x(x^4+y^4+z^4) + 4xy^2z^2 - 2x(y^2z^2+x^2y^2+x^2z^2) \\ &= x^5 - x(f_2^2-2f_4) + 4yzf_3 - 2xf_4. \end{aligned}$$

Or $x^5 = x^3f_2 - xf_4 + yzf_3$, donc on obtient

$$x(f^2+\bar{f}^2) = x^3f_2 + 5yzf_3 - xf_2^2 - xf_4 \in I_W.$$

De même, $y((jf)^2+(j^2\bar{f})^2) \in I_W$ et $z((j^2f)^2+(j\bar{f})^2) \in I_W$.

Ainsi, la décomposition de l'algèbre graduée S_{W_+} en représentations irréductibles est la suivante.

	déc. en rep. irréd.	V_i-base
$S_{W_+}[0]$	V_{ψ_1}	$B_0[0] = \{\bar{1}\}$
$S_{W_+}[1]$	V_Ψ	$B_\Psi[1] = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$
$S_{W_+}[2]$	$V_{\psi_2} \oplus V_{\psi_3} \oplus V_\Psi$	$B_{\psi_2}[2] = \{\bar{x}^2 + j^2\bar{y}^2 + j\bar{z}^2\} = \{\bar{f}\}$ $B_{\psi_3}[2] = \{\bar{x}^2 + j\bar{y}^2 + j^2\bar{z}^2\} = \{f\}$ $B_\Psi[2] = \{\bar{y}\bar{z}, \bar{x}\bar{z}, \bar{x}\bar{y}\}$
$S_{W_+}[3]$	$V_\Psi \oplus V_\Psi$	$B_\Psi[3]_1 = \{\bar{x}f, j^2\bar{y}f, j\bar{z}f\}$ $B_\Psi[3]_2 = \{\bar{x}\bar{f}, j\bar{y}\bar{f}, j^2\bar{z}\bar{f}\}$
$S_{W_+}[4]$	$V_{\psi_2} \oplus V_{\psi_3} \oplus V_\Psi$	$B_{\psi_2}[4] = \{f^2\}$ $B_{\psi_3}[4] = \{\bar{f}^2\}$ $B_\Psi[4] = \{\bar{y}\bar{z}f, j^2\bar{x}\bar{z}f, j\bar{x}\bar{y}f\}$,
$S_{W_+}[5]$	V_Ψ	$B_\Psi[5] = \{\bar{x}f^2, \bar{y}jf^2, \bar{z}j^2f^2\}$

Les représentations V_{ψ_2} et V_{ψ_3} étant de rang un, elles apparaissent avec multiplicité un dans la représentation régulière. Cela implique les lemmes 2.3.14 et 2.3.15 suivant.

Lemme 2.3.14 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Il existe un unique couple $(a_{\psi_2} : b_{\psi_2}) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_{\psi_2}\bar{f} + b_{\psi_2}f^2 \in I$.*

Lemme 2.3.15 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Il existe un unique couple $(a_{\psi_3} : b_{\psi_3}) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_{\psi_3}f + b_{\psi_3}\bar{f}^2 \in I$.*

Puis, V_Ψ étant de multiplicité trois, on a le lemme suivant.

Lemme 2.3.16 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. $B_\Psi[4] \in I$, $B_\Psi[5] \in I$ et il existe un unique couple $(a_\Psi : b_\Psi) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\Psi B_\Psi[3]_1 + b_\Psi B_\Psi[3]_2 \in I$.*

Preuve : Pour commencer, remarquons que le lemme 2.3.15 implique $B_\Psi[5] \in I$. En effet, si $a_{\psi_3} \neq 0$, alors $f^2 \in I$, donc $B_\Psi[5] \in I$. Si $a_{\psi_3} = 0$, alors $\bar{f}^2 \in I$. On a vu que
$\begin{cases} x(f^2 - \bar{f}^2) \in I_{W_+}, \\ y(j^2f^2 - j\bar{f}^2) \in I_{W_+}, \\ z(jf^2 - j^2\bar{f}) \in I_{W_+}. \end{cases}$ Comme $I_{W_+} \subset I$, on obtient encore $B_\Psi[5] \in I$.

Notons $I(\Psi)$ l'identité $\alpha B_\Psi[1] + \beta B_\Psi[2] + \gamma B_\Psi[3]_1 + \delta B_\Psi[3]_2 + \epsilon B_\Psi[4] \in I$. Alors la famille des $(\alpha : \beta : \gamma : \delta : \epsilon) \in \mathbb{P}^5$ vérifiant $I(\Psi)$ est de rang deux.

Soit $(\alpha : \beta : \gamma : \delta : \epsilon) \in \mathbb{P}^5$ vérifiant $I(\Psi)$. Alors, en multipliant $I(\Psi)$ par $(f, j^2 f, jf)$, on obtient $(0 : 0 : \alpha : 0 : \beta)$ vérifie $I(\Psi)$, et en la multipliant par $(\bar{f}, j\bar{f}, j^2\bar{f})$, on obtient

$$\alpha \begin{pmatrix} x\bar{f} \\ jy\bar{f} \\ j^2 z\bar{f} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} yz\bar{f} \\ jxz\bar{f} \\ j^2 xy\bar{f} \end{pmatrix} \in I.$$

Les identités $\begin{cases} yz(f+\bar{f}) \in I_{W_+} \\ xz(j^2 f + j\bar{f}) \in I_{W_+} \\ xy(jf - j^2\bar{f}) \in I_{W_+} \end{cases}$ et la relation $I_{W_+} \subset I$ impliquent alors $\alpha B_\Psi[3]_2 - \beta B_\Psi[4] \in I$, c'est à dire $(0 : 0 : 0 : \alpha : -\beta)$ vérifie $I(\Psi)$. Ainsi, comme la famille des vecteurs vérifiant $I(\Psi)$ est de rang deux, on a nécessairement $\alpha = 0$.

Supposons maintenant qu'il existe $(0 : \beta : \gamma : \delta : \epsilon) \in \mathbb{P}^5$ vérifiant $I(\Psi)$, avec $\beta \neq 0$. On obtient directement $B_\psi[4] \in I$ en multipliant par $(f, j^2 f, jf)$, et il reste

$$\beta B_\Psi[2] + \gamma B_\Psi[3]_1 + \delta B_\Psi[3]_2 \in I.$$

En multipliant la deuxième ligne de cette identité par z et la troisième par y, on obtient $\begin{cases} \beta xz^2 + \gamma jyzf + \delta j^2 yz\bar{f} \in I \\ \beta xy^2 + \gamma jyzf + \delta j^2 yz\bar{f} \in I \end{cases}$, de sorte que $xy^2 \in I$ et $xz^2 \in I$. En effet, $B_\Psi[4] \in I$ implique yzf et $yz\bar{f} \in I$. Or $xf = x^3 + jxy^2 + j^2 xz^2$, et $x\bar{f} = x^3 + j^2 xy^2 + jxz^2$. Ainsi, $xf - x\bar{f} \in I$. De la même façon, on a $j^2 yf - jy\bar{f} \in I$ et $jzf - j^2 z\bar{f} \in I$, donc $(0 : 0 : 1 : -1 : 0)$ vérifie $I(\Psi)$, ce qui contredit le fait que la famille de ces vecteurs est de rang deux. On a donc $\beta = 0$.

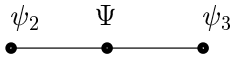
Finalement, la famille des $(0 : 0 : \gamma : \delta : \epsilon) \in \mathbb{P}^5$ vérifiant $I(\Psi)$ est de rang deux, de sorte qu'il existe $(0 : 0 : \gamma : \delta : \epsilon) \in \mathbb{P}^5$ vérifiant $I(\Psi)$ avec $\gamma \neq 0$ ou $\delta \neq 0$. En multipliant par (y, z, x), on obtient $(a - bj^2)xyf \in I$, $(a - b)yzf \in I$ et $(a - bj)xzf \in I$, de sorte que $B_\Psi[4] \in I$.

On a bien démontré que $B_\Psi[4] \in I$, $B_\Psi[5] \in I$ et il existe un unique couple $(a_\Psi : b_\Psi) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\Psi B_\Psi[3]_1 + b_\Psi B_\Psi[3]_2 \in I$. □

Proposition 2.3.17 *Soit I un idéal de $\mathbb{C}[x, y, z]$ définissant une W_+-grappe de support l'origine. Alors I appartient à l'une des trois familles d'idéaux suivantes.*

$$I_{\psi_2}(a : b) =< af + b\bar{f}^2, f^2, x\bar{f}, y\bar{f}, z\bar{f}, f_2, f_3, f_4, \Delta > .$$
$$I_{\psi_3}(a : b) =< a\bar{f} + bf^2, \bar{f}^2, xf, yf, zf, f_2, f_3, f_4, \Delta > .$$
$$I_\Psi(a : b) =< aB_\Psi[3]_1 + bB_\Psi[3]_2, f^2, \bar{f}^2, f_2, f_3, f_4, \Delta > .$$

De plus, $I_{\psi_2}[0 : 1] = I_\Psi[0 : 1]$, et $I_{\psi_3}[0 : 1] = I_\Psi[1 : 0]$. En particulier, le graphe dual de la fibre est le suivant.



Preuve : Avec les notations des lemmes 2.3.14 et 2.3.15, si $a_{\psi_2} \neq 0$, alors en multipliant l'identité $a_\psi \bar{f} + b_\psi f^2 \in I$ par $\bar{f}$, on obtient $a_{\psi_3} = 0$, et en la multipliant par x, y et z, on a $B_\Psi[3]_2$. Dans ce cas, $I = I_{\psi_2}(a_{\psi_2} : b_{\psi_2})$ avec $a_{\psi_2} \neq 0$.

De même, si $a_{\psi_3} \neq 0$, on a $B_\Psi[3]_1 \in I$, et $b_\Psi = 0$, de sorte que $I = I_{\psi_3}(a_{\psi_3} : b_{\psi_3})$.

Enfin, si $a_{\psi_2} = a_{\psi_3} = 0$, alors d'après le lemme 2.3.16, il existe $(a : b) \in \mathbb{P}^1$ tel que $I = I_\Psi(a : b)$. On vérifie enfin que $I_{\psi_2}[0 : 1] = I_\Psi[0 : 1]$, et $I_{\psi_3}[0 : 1] = I_\Psi[1 : 0]$. □

2.3.7 Le système de racines $\mathbf{B_3}$

On a déjà vu dans le paragraphe 2.2.7 que I_W est engendré par les polynômes $f_2 = x^2 + y^2 + z^2$, $f_4 = x^2y^2 + x^2y^2 + y^2z^2$, $f_6 = x^2y^2z^2$ et I_{W_+} est engendré par f_2,f_3, f_4 et $\Delta = xyz(x^2y^2(x^2 - y^2) + x^2z^2(z^2 - x^2) + y^2z^2(y^2 - z^2))$. En particulier, d'après la proposition 2.3.1, on a

$$\begin{aligned}
&\dim(S_{W_+}[n]) = 0 \text{ pour tout } n \geq 9, \text{ et}\\
&\dim(S_{W_+}[0]) = 1,\\
&\dim(S_{W_+}[1]) = 3,\\
&\dim(S_{W_+}[2]) = 6 - 1 = 5,\\
&\dim(S_{W_+}[3]) = 10 - 3 = 7,\\
&\dim(S_{W_+}[4]) = 15 - 6 - 1 = 8,\\
&\dim(S_{W_+}[5]) = 21 - 10 - 3 = 8,\\
&\dim(S_{W_+}[6]) = 28 - 15 - 6 - 1 + 1 = 7,\\
&\dim(S_{W_+}[7]) = 36 - 21 - 10 - 3 + 3 = 5, \text{ et}\\
&\dim(S_{W_+}[8]) = 45 - 28 - 15 - 6 + 6 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Ci-après un tableau représentant la décomposition de chaque composante en représentations irréductibles, et pour chacune d'elle une V_i-base.

	déc. en rep. irréd.	V_i-base
$S_{W_+}[0]$	V_0	$B_0[0] = \{\bar{1}\}$
$S_{W_+}[1]$	$V_{\varepsilon\psi}$	$B_{\varepsilon\psi}[1] = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$
$S_{W_+}[2]$	$V_\theta \oplus V_\psi$	$B_\theta[2] = \{\bar{y}^2, \bar{z}^2\}$ $B_\psi[2] = \{\bar{y}\bar{z}, \bar{x}\bar{z}, \bar{x}\bar{y}\}$
$S_{W_+}[3]$	$V_\varepsilon \oplus V_\psi \oplus V_{\varepsilon\psi}$	$B_\varepsilon[3] = \{\bar{x}\bar{y}\bar{z}\}$ $B_\psi[3] = \{\bar{x}(\bar{y}^2 - \bar{z}^2), \bar{y}(\bar{z}^2 - \bar{x}^2), \bar{z}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)\}$ $B_{\varepsilon\psi}[3] = \{\bar{x}^3, \bar{y}^3, \bar{z}^3\}$
$S_{W_+}[4]$	$V_\theta \oplus V_\psi \oplus V_{\varepsilon\psi}$	$B_\theta[4] = \{\bar{y}^4, \bar{z}^4\}$ $B_\psi[4] = \{\bar{x}^2\bar{y}\bar{z}, \bar{x}\bar{y}^2\bar{z}, \bar{x}\bar{y}\bar{z}^2\}$ $B_{\varepsilon\psi}[4] = \{\bar{y}\bar{z}(\bar{y}^2 - \bar{z}^2), \bar{x}\bar{z}(\bar{z}^2 - \bar{x}^2), \bar{x}\bar{y}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)\}$
$S_{W_+}[5]$	$V_\theta \oplus V_\psi \oplus V_{\varepsilon\psi}$	$B_\theta[5] = \{\bar{x}\bar{y}\bar{z}(\bar{z}^2 - \bar{x}^2), \bar{x}\bar{y}\bar{z}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2\}$ $B_\psi[5] = \{\bar{x}^3(\bar{y}^2 - \bar{z}^2), \bar{y}^3(\bar{z}^2 - \bar{x}^2), \bar{z}^3(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)\}$ $B_{\varepsilon\psi}[5] = \{\bar{x}^5, \bar{y}^5, \bar{z}^5\}$
$S_{W_+}[6]$	$V_\varepsilon \oplus V_\psi \oplus V_{\varepsilon\psi}$	$B_\varepsilon[6] = \{\bar{x}^2\bar{y}^2(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + \bar{x}^2\bar{z}^2(\bar{z}^2 - \bar{x}^2) + \bar{y}^2\bar{z}^2(\bar{y}^2 - \bar{z}^2)\}$ $B_\psi[6] = \{\bar{y}^3\bar{z}^3, \bar{x}^3\bar{z}^3, \bar{x}^3\bar{y}^3\}$ $B_{\varepsilon\psi}[6] = \{\bar{x}^2\bar{y}\bar{z}(\bar{y}^2 - \bar{z}^2), \bar{x}\bar{y}^2\bar{z}(\bar{z}^2 - \bar{x}^2), \bar{x}\bar{y}\bar{z}^2(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)\}$
$S_{W_+}[7]$	$V_\theta \oplus V_\psi$	$B_\theta[7] = \{\bar{x}\bar{y}\bar{z}(\bar{x}^4 - \bar{z}^4), \bar{x}\bar{y}\bar{z}(\bar{y}^4 - \bar{x}^4)\}$ $B_\psi[7] = \{\bar{x}^5(\bar{y}^2 - \bar{z}^2), \bar{y}^5(\bar{z}^2 - \bar{x}^2), \bar{z}^5(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)\}$
$S_{W_+}[8]$	$V_{\varepsilon\psi}$	$B_{\varepsilon\psi}[8] = \{\bar{x}^4\bar{y}\bar{z}(\bar{y}^2 - \bar{z}^2), \bar{x}\bar{y}^4\bar{z}(\bar{z}^2 - \bar{x}^2), \bar{x}\bar{y}\bar{z}^4(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)\}$

Lemme 2.3.18 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine.*

Il existe un couple $(a_\varepsilon : b_\varepsilon) \in \mathbb{P}^1$ *tel que*

$$a_\varepsilon xyz + b_\varepsilon(x^2y^2(x^2-y^2) + x^2z^2(z^2-x^2) + y^2z^2(y^2-z^2)) \in I.$$

Preuve : Comme V_ε est une représentation de degré un de W_+, elle doit apparaître avec multiplicité un dans la décomposition de $\mathbb{C}[x,y,z]/I$ en représentations irréductibles. Or, elle apparaît avec multiplicité deux dans la décomposition de l'algèbre coinvariante S_{W_+}. Il existe donc un unique $(a : b) \in \mathbb{P}^1$ tel que $axyz + b(x^2y^2(x^2-y^2) + x^2z^2(z^2-x^2) + y^2z^2(y^2-z^2))$ appartient à I. □

Lemme 2.3.19 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Alors $B_{\varepsilon\psi}[8] \in I$, $B_{\varepsilon\psi}[6] \in I$ et il existe un unique couple $(a_{\varepsilon\psi} : b_{\varepsilon\psi}) \in \mathbb{P}^1$ tel que*

$$a_{\varepsilon\psi}B_{\varepsilon\psi}[4] + b_{\varepsilon\psi}B_{\varepsilon\psi}[5] \in I.$$

Preuve : Comme $V_{\varepsilon\psi}$ est une représentation de degré trois de W_+, elle doit apparaître avec multiplicité trois dans la décomposition de $\mathbb{C}[x,y,z]/I$ en représentations irréductibles. Notons $I(\varepsilon\psi)$ l'identité suivante :

$$aB_{\varepsilon\psi}[1] + bB_{\varepsilon\psi}[3] + \alpha B_{\varepsilon\psi}[4] + cB_{\varepsilon\psi}[5] + \beta B_{\varepsilon\psi}[6] + \gamma B_{\varepsilon\psi}[8] \in I.$$

Comme $V_{\varepsilon\psi}$ apparaît avec multiplicité six dans la décomposition de S_{W^+} en représentations irréductibles, la famille de vecteurs $(a : b : c : \alpha : \beta : \gamma)$ de $\mathbb{P}^5$ vérifiant $I(\varepsilon\psi)$ est de rang trois.

Soit $(a : b : c : \alpha : \beta : \gamma)$ un vecteur de cette famille. Alors en multipliant par (x^2, y^2, z^2) puis par (x^4, y^4, z^4) l'identité $I(\varepsilon\psi)$, on montre que $(0 : a : b : 0 : \alpha : \beta)$ et $(0 : 0 : a : 0 : 0 : \alpha)$ vérifient également cette identité. C'est une conséquence des égalités $(x^2, y^2, z^2)B_{\varepsilon\psi}[k] = B_{\varepsilon\psi}[k+2]$, et de l 'identité $(x^2, y^2, z^2)B_{\varepsilon\psi} \in I$.

Supposons que $a \neq 0$. Alors en multipliant $I(\varepsilon\psi)$ par $(x^3yz(y^2-z^2), xy^3z(z^2-x^2), xyz^3(x^2-y^2))$, étant donné que tous les monômes de degré supérieur à 9 appartiennent à I, on obtient $B_{\varepsilon\psi}[8] \in I$. Mais comme $a \neq 0$, $(a : b : c : \alpha : \beta : \gamma)$, $(0 : a : b : 0 : \alpha : \beta)$, $(0 : 0 : a : 0 : 0 : \alpha)$ et $(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ forment une famille libre de rang 4, d'où une contradiction. Ainsi, $a = 0$.

Supposons maintenant qu'il existe $(0 : b : c : \alpha : \beta : \gamma)$ un vecteur de cette famille avec $b \neq 0$. En multipliant $I(\varepsilon\psi)$ par $(xyz(y^2-z^2), xyz(z^2-x^2), xyz(x^2-y^2))$, on obtient $B_{\varepsilon\psi}[8] \in I$. Alors, les monômes de degré supérieur à huit appartenant tous à I, on obtient en multipliant $I(\varepsilon\psi)$ par (y^2z, z^2x, x^2y) puis par (yz^2, x^2z, xy^2) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} bx^3y^2z + \alpha y^3z^2(y^2-z^2) & \in & I \\ bxy^3z^2 + \alpha x^2z^3(z^2-x^2) & \in & I \\ bx^2yz^3 + \alpha x^3y^2(x^2-y^2) & \in & I \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} bx^3yz^2 + \alpha y^2z^3(y^2-z^2) & \in & I \\ bx^2y^3z + \alpha x^3z^2(z^2-x^2) & \in & I \\ bxy^2z^3 + \alpha x^2y^3(x^2-y^2) & \in & I \end{array}\right. ,$$

d'où par différence,

$$\left\{\begin{array}{lcl} bx^2yz(y^2-z^2) + \alpha(x^3z^4 - x^5z^2 - x^5y^2 + x^3y^4) & \in & I \\ bxy^2z(z^2-x^2) + \alpha(x^4y^3 - x^2y^5 - y^5z^2 + y^3z^4) & \in & I \\ bxyz^2(x^2-y^2) + \alpha(y^4z^3 - y^2z^5 - x^2z^5 + x^4z^3) & \in & I \end{array}\right. .$$

Or $x^4+y^4+z^4 = f_2^2 - 2f_4 \in I$, d'où par exemple, $x^3z^4 - x^5z^2 - x^5y^2 + x^3y^4 = x^3(f_2^2-2f_4) - x^5f_2 \in I$. Ainsi, si $b \neq 0$, $B_{\varepsilon\psi}[6] \in I$. Mais alors $(0:b:c:\alpha:\beta:\gamma)$, $(0:0:b:0:\alpha:\beta)$, $(0:0:0:0:1:0)$ et $(0:0:0:0:0:1)$ vérifient $I(\varepsilon\psi)$ et forment une famille libre de rang 4, d'où une contradiction. Ainsi, $b=0$.

Enfin, supposons qu'il existe $(0:0:c:\alpha:\beta:\gamma)$ de $\mathbb{P}^5$ vérifiant l'identité $I(\varepsilon\psi)$, avec $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, $B_{\varepsilon\psi}[8] \in I$, $B_{\varepsilon\psi}[6] \in I$, et il existe un unique $(a_{\varepsilon\psi} : b_{\varepsilon\psi}) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_{\varepsilon\psi}B_{\varepsilon\psi}[4] + b_{\varepsilon\psi}B_{\varepsilon\psi}[5] \in I$. Si en revanche pour tout $(0:0:c:\alpha:\beta:\gamma)$ de $\mathbb{P}^5$ vérifiant l'identité $I(\varepsilon\psi)$, $\alpha = 0$, étant donné que la famille est de rang trois, on a $B_{\varepsilon\psi}[5] \in I$, $B_{\varepsilon\psi}[6] \in I$ et $B_{\varepsilon\psi}[8] \in I$. Cela correspond au point $(a_{\varepsilon\psi} : b_{\varepsilon\psi}) = (0:1)$. □

Lemme 2.3.20 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Alors $B_\psi[7] \in I$, $B_\psi[6] \in I$ et il existe un unique couple $(a_\psi : b_\psi) \in \mathbb{P}^1$ tel que*

$$a_\psi B_\psi[4] + b_\psi B_\psi[5] \in I.$$

Preuve : Ici encore, comme V_ψ est une représentation de degré trois de W_+, elle doit apparaître avec multiplicité trois dans la décomposition de $\mathbb{C}[x,y,z]/I$ en représentations irréductibles. Notons $I(\psi)$ l'identité suivante :

$$aB_\psi[2] + \alpha B_\psi[3] + bB_\psi[4] + \beta B_\psi[5] + cB_\psi[6] + \gamma B_\psi[7] \in I.$$

Comme V_ψ apparaît avec multiplicité six dans la décomposition de S_{W^+} en représentations irréductibles, la famille de vecteurs $(a:b:c:\alpha:\beta:\gamma)$ de $\mathbb{P}^5$ vérifiant $I(\psi)$ est de rang trois.

Comme précédemment, on remarque que $(x^2,y^2,z^2)B_\psi[k] = B_\psi[k+2]$. Le seul cas non évident est pour $k=4$. Il est une conséquence des égalités du type $y^3z^3 - yzf_4 + x^2yzf_2 = x^4yz$. De plus, tous les monômes de degré supérieurs à 8 appartiennent à I d'après le lemme 2.3.19. Ainsi, si $(a:b:c:\alpha:\beta:\gamma)$ vérifie $I(\psi)$, alors $(0:a:b:0:\alpha:\beta)$ et $(0:0:a:0:0:\alpha)$ également.

Supposons qu'il existe $(a:b:c:\alpha:\beta:\gamma)$ vérifiant $I(\psi)$, avec $a \neq 0$. En multipliant I_ψ par (y^4z, x^4z, x^4y) puis par yz^4, xz^4, xy^4, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} ay^5z^2 + \alpha xy^4z(y^2-z^2) & \in & I \\ ax^5z^2 + \alpha x^4yz(z^2-x^2) & \in & I \\ ax^5y^2 + \alpha x^4yz(x^2-y^2) & \in & I \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} ay^2z^5 + \alpha xyz^4(y^2-z^2) & \in & I \\ ax^2z^5 + \alpha xyz^4(z^2-x^2) & \in & I \\ ax^2y^5 + \alpha xy^4z(x^2-y^2) & \in & I \end{array}\right. ,$$

d'où par différence, $B_\psi[7] \in I$, car par exemple,

$$\begin{array}{rcl} x^4yz(x^2-y^2) - x^4yz(z^2-x^2) & = & -x^4yz(y^2+z^2) \\ & = & x^6yz - x^4yzf_2 \\ & = & yz(x^4f_2 - x^2f_4 + f_6 - x^4f_2) \in I. \end{array}$$

Ainsi, si $a \neq 0$, $(a:b:c:\alpha:\beta:\gamma)$, $(0:a:b:0:\alpha:\beta)$ et $(0:0:a:0:0:\alpha)$ et $(0:0:0:0:0:1)$ forment une famille libre de quatre vecteurs vérifiant $I(\psi)$, d'où une contradiction. Donc $a=0$.

Supposons qu'il existe $(0:b:c:\alpha:\beta:\gamma)$ vérifiant $I(\psi)$, avec $\alpha \neq 0$. En multipliant I_ψ par (x^2y, y^2z, xz^2) puis par (x^2z, y^2x, z^2y), on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha x^3y^3 - x^3yz^2 + bx^4y^2z & \in & I \\ \alpha y^3z^3 - x^2y^3z + bxy^4z^2 & \in & I \\ \alpha x^3z^3 - xy^2z^3 + bx^2yz^4 & \in & I \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \alpha x^3y^2z - x^3z^3 + bx^4yz^2 & \in & I \\ \alpha xy^3z^2 - x^3y^3 + bx^2y^4z & \in & I \\ \alpha x^2yz^3 - y^3z^3 + bxy^2z^4 & \in & I \end{array}\right.$$

En tenant compte des identités

$$\left\{\begin{array}{lcll} -(x^2y^3z + x^2yz^3) & = & -yz(x^2y^2 + x^2z^2) & = & y^3z^3 - yzf_4, \\ -(xy^2z^3 + x^3y^2z) & = & -xz(y^2z^2 + x^2y^2) & = & x^3z^3 - xzf_4, \\ -(x^3yz^2 + xy^3z^2) & = & = -xy(x^2z^2 + y^2z^2) & = & x^3y^3 - xyf_4, \end{array}\right.$$

on obtient par différence

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3\alpha y^3z^3 + b(xy^4z^2 - xy^2z^4) & \in & I \\ 3\alpha x^3z^3 + b(x^2yz^4 - x^4yz^2) & \in & I \\ 3\alpha x^3y^3 + b(x^4y^4z - x^2y^4z) & \in & I \end{array}\right. .$$

Or par exemple,

$$\begin{array}{rcl} xy^4z^2 - xy^2z^4 & = & xy^2z^2(y^2 - z^2) \\ & = & xf_4(y^2 - z^2) - x^3(y^2 + z^2)(y^2 - z^2) \\ & = & xf_4(y^2 - z^2) - x^3f_2(y^2 - z^2) + x^5(y^2 - z^2). \end{array}$$

D'où finalement $3\alpha B_\psi[6] + bB_\psi[7] \in I$. Si $\alpha \neq 0$, on a donc $(0:b:c:\alpha:\beta:\gamma)$, $(0:0:b:0:\alpha:\beta)$, $(0:0:0:0:0:1)$ et $(0:0:0:0:3\alpha:b)$ forment une famille libre de cardinal 4 vérifiant $I(\psi)$. D'où une contradiction, donc $\alpha = 0$.

Enfin, supposons qu'il existe $(0:b:c:0:\beta:\gamma)$ vérifiant $I(\psi)$, avec $b \neq 0$. Alors en multipliant $I(\psi)$ par $(x^2z - z^3, y^2z - z^3, xz^2 - x^3)$, comme tous les monômes de degré supérieurs à 8 appartiennent à I , $x^4yz^2 - x^2yz^4 \in I$, $xy^4z^2 - xy^2z^4 \in I$, et $x^2yz^4 - x^4yz^2 \in I$. Or on a vu que, par exemple $xy^4z^2 - xy^2z^4 = xf_4(y^2 - z^2) - x^3f_2(y^2 - z^2) + x^5(y^2 - z^2)$. Ainsi, on obtient $B_\psi[7] \in I$.

Finalement, si il existe $(0:b:c:0:\beta:\gamma)$ vérifiant $I(\psi)$ avec $b \neq 0$, $B_\psi[6]$ et $B_\psi[7] \in I$, et il existe un unique $(a_\psi : b_\psi) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\psi B_\psi[4] + b_\psi B_\psi[5] \in I$. Sinon, le fait que la famille des vecteurs vérifiant $I(\psi)$ est de rang trois implique $B_\psi[5]$ $B_\psi[6]$ et $B_\psi[7] \in I$. Cela correspond au point $(a_\psi : b_\psi) = (0:1)$. □

Lemme 2.3.21 *Soit I un idéal définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine. Alors $B_\theta[7] \in I$, et il existe un unique couple $(a_\theta : b_\theta) \in \mathbb{P}^1$ tel que*

$$a_\theta B_\theta[4] + b_\theta B_\theta[5] \in I.$$

Preuve : La représentation V_θ étant de dimension 2 et apparaissant quatre fois dans la décomposition de S_{W_+} en représentations irréductibles, la famille des vecteurs $(a:b:c:d)$ vérifiant $I(\theta)$ est de rang 2, où $I(\theta)$ est l'identité suivante :

$$aB_\theta[2] + bB_\theta[4] + cB_\theta[5] + dB_\theta[7] \in I.$$

Remarquons que $(y^2,z^2)B_\theta[2] = B_\theta[4]$, $(y^2,z^2)B_\theta[5] = B_\theta[7]$, et $(y^2,z^2)B_\theta[4] \in I$, de sorte que si $(a:b:c:d)$ vérifie $I(\theta)$, alors $(0:a:0:d)$ également. Supposons qu'il existe $(a:b:c:d)$ vérifiant $I(\theta)$, avec $a \neq 0$. Alors comme tous les monômes de degrés supérieurs ou égaux à 8 sont dans I d'après le lemme 2.3.19, en multipliant $I(\theta)$ par des monômes de degré 5 et par combinaisons linéraires, on obtient $B_\theta[7] \in I$. Alors $(a:b:c:d)$, $(0:a:0:d)$ et $(0:0:0:1)$ forment une famille libre de vecteurs vérifiant $I(\theta)$, d'où une contradiction. Ainsi, $a=0$.

Si il existe $(0:b:c:d)$ vérifiant $I(\theta)$, avec $b \neq 0$, encore une fois, en multipliant $I(\theta)$ par des monômes de degré 3 et par combinaisons linéraires, on obtient $B_\theta[7] \in I$. Sinon, comme l'ensemble des vecteurs vérifiant $I(\theta)$ forme une famille de rang 2, $B_\theta[6] \in I$ et $B_\theta[7] \in I$.

Finalement, on a toujours $B_\theta[7] \in I$ et il existe un unique $(a_\theta : b_\theta) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\theta B_\theta[4] + b_\theta B_\theta[5] \in I$. □

Proposition 2.3.22 *Les quatre familles suivantes indéxées par $\mathbb{P}^1$ décrivent exactement l'ensemble des idéaux définissant une W_+-grappe de $\mathbb{A}^3$ de support l'origine.*

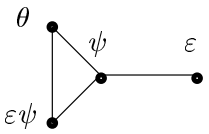
$$I_\varepsilon(a:b) =< aB_\varepsilon[3] + bB_\varepsilon[6], B_\theta[5], B_\psi[4], B_{\varepsilon\psi}[5], f_2, f_4, f_6, B_\psi[6], B_{\varepsilon\psi}[6], d^\circ \geq 7 >,$$

$$I_\psi(a:b) =< aB_\psi[4] + bB_\psi[5], B_\theta[5], B_{\varepsilon\psi}[5], f_2, f_4, d^\circ \geq 6 >,$$

$$I_{\varepsilon\psi}(a:b) =< aB_{\varepsilon\psi}[4] + bB_{\varepsilon\psi}[5], B_\theta[5], B_\psi[5], f_2, f_4, d^\circ \geq 6 >,$$

$$I_\theta(a:b) =< aB_\theta[4] + bB_\theta[5], B_\psi[5], B_{\varepsilon\psi}[5], f_2, f_4, d^\circ \geq 6 > .$$

De plus, on a $I_\varepsilon(0:1) = I_\psi(1:0)$ et $I_\psi(0:1) = I_{\varepsilon\psi}(0:1) = I_\theta(0:1)$. En particulier, le graphe dual de la fibre est le suivant.



Preuve : En gardant les notations des lemmes 2.3.18, 2.3.19, 2.3.20 et 2.3.21, supposons $a_\varepsilon \neq 0$. Alors, comme tous les monômes de degré supérieur à 8 appartiennent à I, en multipliant par (z^2-x^2) puis par (x^2-y^2) l'identité $a_\varepsilon B_\varepsilon[3] + b_\varepsilon B_\varepsilon[6] \in I$, on obtient $B_\theta[5] \in I$, de sorte que $a_\theta = 0$. Puis, en multipliant par yz, par xz et par xy cette identité, on obtient $xy^2z^2 \in I$, $x^2yz^2 \in I$ et $x^2y^2z \in I$. Or par exemple, $xy^2z^2 = xf_4 - x^3(y^2+z^2) = x^5 + xf_4 - x^3f_2$. Ainsi, $B_{\varepsilon\psi}[5] \in I$, de sorte que $a_{\varepsilon\psi} = 0$. Enfin, remarquons que si $b_\psi \neq 0$, alors en multipliant par (x,y,z) l'identité $a_\psi B_\psi[4] + b_\psi B_\psi[5] \in I$, et en additionnant les trois équations ainsi obtenues, on obtient $a_\psi xyz(x^2+y^2+z^2) + b_\psi B_\varepsilon[6] \in I$, ce qui implique que $B_\varepsilon[6] \in I$, et $a_\varepsilon = 0$. Finalement, si $a_\varepsilon \neq 0$, alors $a_\theta = b_\psi = a_{\varepsilon\psi} = 0$, de sorte que $I = I_\varepsilon(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$.

Supposons maintenant que $a_\theta \neq 0$. D'après ce qui précède, cela implique $a_\varepsilon = 0$. On a alors d'après les lemmes 2.3.19, 2.3.20 et 2.3.21 que tous les monômes de degrés supérieurs ou égaux à 6 sont dans I. En multipliant l'identité $a_\theta B_\theta[4] + b_\theta B_\theta[5]$ par (y,z), et en utilisant la W_+-stabilité de I, on obtient $a_\theta B_{\varepsilon\psi}[5] + b_\theta B_{\varepsilon\psi}[6] \in I$. On en déduit que $B_{\varepsilon\psi}[5] \in I$, c'est à dire $a_{\varepsilon\psi} = 0$. Enfin, supposons $a_\psi \neq 0$. En multipliant

par (x, y, z) l'identité $a_\psi B_\psi[4] + b_\psi B_\psi[5] \in I$, et par combinaisons linéaires, on obtient $a_\psi xyz(z^2 - x^2)+$ sommes des monômes de degré $\geq 6 \in I$, de sorte que $B_\theta[5] \in I$ et $a_\theta = 0$. Finalement, si $a_\theta \neq 0$, alors $a_\varepsilon = a_\psi = a_{\varepsilon\psi} = 0$, de sorte que $I = I_\theta(a_\theta, b_\theta)$.

Si $a_{\varepsilon\psi} \neq 0$. Alors d'après ce qui précède, $a_\theta \neq 0$ et $a_\varepsilon = 0$. Par ailleurs, supposons que $a_\psi \neq 0$. Alors comme $x^5 = xy^2z^2 - xf_4 + x^3 f_2$, et que les monômes de degré supérieurs à 6 sont dans I, lorsqu'on multiplie l'identité $a_\psi B_\psi[4] + b_\psi B_\psi[5] \in I$ par (y, z, x), on obtient $B_\varepsilon\psi[5] \in I$, de sorte que $a_{\varepsilon\psi} = 0$ Finalement, si $a_{\varepsilon\psi} \neq 0$, alors $a_\varepsilon = a_\psi = a_\theta = 0$, de sorte que $I = I_{\varepsilon\psi}(a_{\varepsilon\psi}, b_{\varepsilon\psi})$.

Si $a_\psi \neq 0$ et $b_\psi \neq 0$, alors ce qui précède implique $a_\varepsilon = a_{\varepsilon\psi} = a_\theta = 0$, de sorte que $I = I_\psi(a_\psi, b_\psi)$.

Enfin, si l'on est dans aucun des cas précédent, alors ou bien $a_\psi = 0$, ou bien $b_\psi = 0$. Si $a_\psi = 0$, alors nécessairement $a_\varepsilon = 0$ car $b_\psi \neq 0$, donc $a_\theta = a_{\varepsilon\psi} = 0$. Dans ce cas, $I = I_\varepsilon(0 : 1) = I_\psi(1 : 0)$. Si $b_\psi = 0$, alors $a_\psi \neq 0$ implique $a_\theta = a_{\varepsilon\psi} = 0$, et donc $a_\varepsilon = 0$. Dans ce cas, $I = I_\psi(0 : 1) = I_{\varepsilon\psi}(0 : 1) = I_\theta(0 : 1)$. □

2.4 Une correspondance de McKay en dimension trois

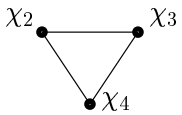
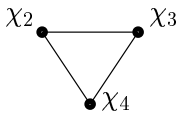
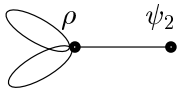
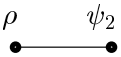
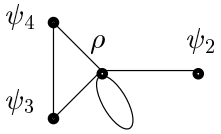
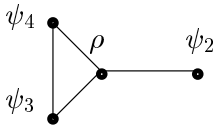
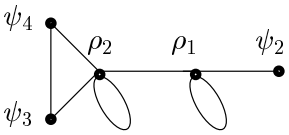
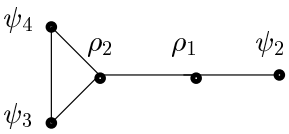
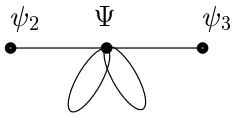
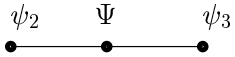
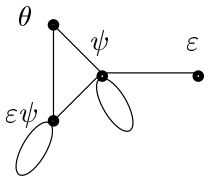
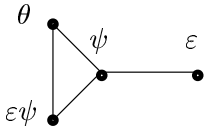
Dans [BM94], Bertin et Markushevich rappellent la conjecture suivante.

Conjecture 2.4.1 (Conjecture locale) *Soit $(X, 0)$ un germe de singularité analytiquement équivalent au quotient $(\mathbb{C}^3, 0)$ par un sous-groupe fini $G \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Alors il existe une résolution $f : \widetilde{X} \longrightarrow X$ avec $K_{\widetilde{X}} \sim 0$ telle que*

$$\chi(f^{-1}(0)) = \#\{ \text{ classes de conjugaison de } G\}.$$

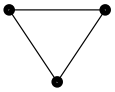
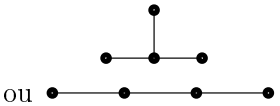
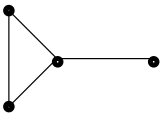
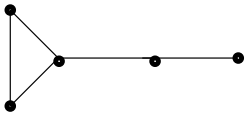
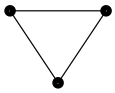
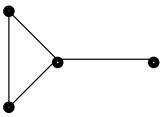
Soit $(X, 0)$ un germe de singularité analytiquement équivalent au quotient $(\mathbb{C}^3, 0)$ par un sous-groupe fini de la forme $W \cap \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, où W est le groupe de Weyl associé à un système de racines en dimension trois. Les résolutions de ces singularités locales par la méthode de Jung et par le schéma de Hilbert décrites ci-avant répondent à cette conjecture. D'après ce même article de Bertin et Markushevich ([BM94]), ce résultat était déjà connu pour la résolution par la méthode de Jung dans certains cas. D'après le théorème de Bridgeland, King et Reid ([BKR01]), il était également connu pour la résolution par le schéma de Hilbert. Si G est un graphe, appelons graphe simplifié de G le graphe G auquel on a supprimé les boucles. Comme le récapitule le tableau suivant, on vient de démontrer le

théorème qui suit.

R	W_+	diagramme de McKay	graphe dual de la fibre dans W_+-Hilb($\mathbb{A}^3$)
$A_1 \times A_1 \times A_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
$A_1 \times A_2$	$\mathfrak{S}_3 = \mathbb{D}_3$		
$A_1 \times B_2$	$\mathbb{D}_4$		
$A_1 \times G_2$	$\mathbb{D}_6$		
A_3	$\mathfrak{A}_4$		
B_3	$\mathfrak{S}_4$		

Théorème 2.4.2 *Soit $(X, 0)$ un germe de singularité analytiquement équivalent au quotient $(\mathbb{C}^3, 0)$ par un sous-groupe fini de la forme $W_+ = W \cap \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, où W est le groupe de Weyl associé à un système de racines en dimension trois. Le morphisme de Hilbert-Chow $\phi : H \longrightarrow X$ est une résolution crépante de X en 0 et le graphe dual de la fibre $\phi^{-1}(0)$ est en bijection avec le diagramme de McKay simplifié du groupe W_+.*

En revanche, on observe dans la tableau ci-après que la résolution par la méthode de Jung ne vérifie généralement pas ce critère.

R	W_+	fibre lors de la résolution par Jung	graphe dual de la fibre dans W_+-Hilb($\mathbb{A}^3$)
$A_1 \times A_1 \times A_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
$A_1 \times A_2$	$\mathfrak{S}_3 = \mathbb{D}_3$		
$A_1 \times B_2$	$\mathbb{D}_4$	 ou	
$A_1 \times G_2$	$\mathbb{D}_6$		
A_3	$\mathfrak{A}_4$		
B_3	$\mathfrak{S}_4$		

Chapitre 3

Singularités non abéliennes associées à un système de racines en dimension trois

Soit R un système de racines réel irréductible. Dans le chapitre 1, on a considéré l'action du groupe de Weyl $W(\mathrm{R})$ sur $\mathbb{A}^n$. D'après un théorème de Steinberg (1.6.4), le quotient est lisse. On a alors démontré (théorème 1.6.7) que W-Hilb$(\mathbb{A}^3) \cong \mathbb{A}^3/W$. Dans le chapitre 2, on a considéré le quotient par le sous-groupe $W_+ = W \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. C'est un revêtement double de $\mathbb{A}^n/W$. Dans le cas de la dimension trois, le schéma de Hilbert W_+-Hilb$(\mathbb{A}^3)$ est une résolution crépante d'après le théorème de Bridgeland King et Reid ([BKR01]) et l'on a construit une autre résolution crépante par la méthode de Jung.

Soit E une courbe elliptique munie de sa structure de groupe. Notons $p_0 \in E$ l'origine. Dans [Loo76], Looijenga propose le résultat suivant. Bernstein et Shvartsman remarquent que sa preuve ne fonctionne que pour E de module générique ([BS79]), mais le résultat est valable. Une nouvelle preuve est donnée dans [FMW98].

Théorème 3.0.3 *Soit* R *un système de racines,* $Q(\mathrm{R})$ *le réseau engendré par* R *et* E *une courbe elliptique. Le groupe de Weyl* $W(\mathrm{R})$ *agit naturellement sur* $A := Q(\mathrm{R}) \otimes E$ *et le quotient* $A/W(\mathrm{R})$ *est un espace projectif avec poids.*

Dans un premier paragraphe, on explique ce théorème de façon élémentaire dans les cas des systèmes de racines A_3, B_3 et C_3. D'après le théorème 1.6.9, lorsque le quotient A/W est lisse, le morphisme de Hilbert-Chow $W - \mathrm{Hilb}(A) \longrightarrow A/W$ est un isomorphisme. Si R est de dimension trois, on a donc un isomorphisme $W - \mathrm{Hilb}(A) \longrightarrow A/W$ dans les cas A_3 et B_3. Dans le cas, C_3, on verra que le quotient $A/W = \mathbb{P}(1,1,2)$ admet une singularité isolée qui est résolue par le schéma de Hilbert.

Dans la suite de ce chapitre, on étudie globalement la situation décrite localement dans le chapitre 2. Ainsi, R est un système de racines réel irréductible de dimension trois, $Q = Q(\mathrm{R})$ et X_{R} le quotient de $A = E \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ par W_+. C'est un revêtement double de l'espace projectif A/W. Dans ce cadre, Bertin et Markushevich on démontré le théorème suivant ([BM94]).

Théorème 3.0.4 *Dans le cas des systèmes de racines A_3, B_3 et C_3, le quotient X_{R} admet une résolution crépante obtenue par la méthode de Jung. De plus, cette résolution est une variété de Calabi-Yau.*

Par ailleurs, d'après le théorème de Bridgeland, King et Reid, le W_+-schéma de Hilbert donne également une résolution crépante de cette singularité.

Dans le deuxième paragraphe, on rappelle le théorème de Bertin et Markushevich pour chacun des systèmes de racines A_3, B_3 et C_3. On ne traite en détail que le cas B_3.

Dans le troisième paragraphe, on rappelle le théorème de Bridgeland, King et Reid et on compare les résolutions obtenues avec chacune des deux méthodes. Ici aussi, on ne traite en détail que le cas B_3, les autres étant analogues.

3.1 Le théorème de Looijenga

Soit R un système de racines irréductible et réduit de dimension 3. Dans ce premier paragraphe, on considère le quotient de $A = Q(\mathrm{R}) \otimes E$ par le groupe de Weyl $W(\mathrm{R})$. Dans ce cas, le théorème de Looijenga et le théorème 1.6.9 rappelés en introduction s'expriment comme suit.

Théorème 3.1.1 *Si* $\mathrm{R} = A_3$ *ou* B_3*, alors le quotient* $(Q(\mathrm{R}) \otimes E)/W(\mathrm{R})$ *est isomorphe à* $\mathbb{P}^3$ *et on a*

$$W(\mathrm{R})\text{-Hilb}(Q(\mathrm{R}) \otimes E) \cong (Q(\mathrm{R}) \otimes E)/W(\mathrm{R}) \cong \mathbb{P}^3.$$

Si $\mathrm{R} = C_3$*, alors* $(Q(C_3) \otimes E)/W(C_3) \cong \mathbb{P}(1,1,2)$ *et* $W(C_3)$-Hilb$(Q(C_3) \otimes E)$ *est une résolution crépante de ce quotient.*

3.1.1 Cas du système de racines A_3

Rappelons que $\mathrm{R} = A_3$ est l'ensemble de tous les vecteurs de longueur $\sqrt{2}$ et appartenant à l'intersection de $H \subset \mathbb{R}^4$, hyperplan de somme des coordonnées égale à zéro avec le réseau $\varepsilon_1\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_2\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_3\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_4\mathbb{Z}$. Alors $R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, 1 \leq i \neq j \leq 4\}$. La variété $A = E \otimes Q$ est lisse, isomorphe à E^3 définie comme sous variété de E^4 par l'équation somme des coordonnées égale zéro. Le groupe de Weyl $W = \mathfrak{S}_4$ agit naturellement sur A via son action sur Q et d'après le théorème de Looijenga, $A/W \cong \mathbb{P}^3$. On redémontre ce résultat directement.

Les points de A sont les quadruples $(x_1, \ldots, x_4) \in E^4$ tels que $\sum_{i=1}^4 x_i = 4p_0$, de telle sorte que $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^4 x_i) = \mathcal{O}(4p_0)$. Ainsi, $A/\mathfrak{S}_4$ s'identifie naturellement à l'ensemble des diviseurs de E linéairement équivalent à $4p_0$; qui est lui même en correspondance avec les fonctions méromorphes $f \in \mathcal{O}^*$ telles que $\mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^4 (x_i - p_o)$. Finalement, à un point de $A/\mathfrak{S}_4$ correspond une droite de l'espace des fonctions $H^0(E, \mathcal{O}_E(4p_0))$ ayant un pôle d'ordre 4 en p_0 et aucun ailleurs.

$$A/\mathfrak{S}_4 \cong \mathbb{P}^*(H^0(E, \mathcal{O}(4p_0))) = \mathbb{P}^3.$$

Ce quotient étant lisse, le morphisme de Hilbert Chow

$$\mathfrak{S}_4\text{-Hilb}(A) \longrightarrow A/\mathfrak{S}_4 \cong \mathbb{P}^3$$

est un isomorphisme d'après le théorème 1.6.9.

3.1.2 Cas du système de racines B_3

Rappelons que $\mathrm{R} = B_3$ est défini comme étant l'ensemble des vecteurs de longueurs 1 ou $\sqrt{2}$ de $\mathbb{R}^3$ appartenant au réseau standard $\varepsilon_1\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_2\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_3\mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{R} = \{\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i \neq j \leq 3\}$, et $W(\mathrm{R}) = \mathfrak{S}_3 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ agit sur $Q = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_2 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_3$ par permutation des ε_i et multiplication par (-1). On considère l'action induite sur $A = E \otimes_{\mathbb{Z}} Q \cong E^3$. Le quotient de E par l'action de l'involution $E/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{P}^1$, de sorte qu'on obtient directement

$$A/W(B_3) = E^3/(\mathfrak{S}_3 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3) = (\mathbb{P}^1)^3/\mathfrak{S}_3 \cong \mathbb{P}^3,$$

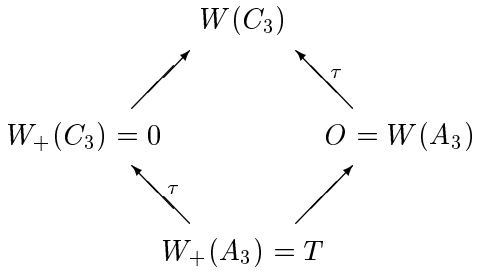
ce qui est une preuve du théorème de Looijenga pour les systèmes de racines de type B_n. De plus, ce quotient étant lisse, le morphisme de Hilbert Chow

$$W\text{-Hilb}(A) \longrightarrow A/W \cong \mathbb{P}^n$$

est un isomorphisme d'après le théorème 1.6.9.

3.1.3 Cas du système de racines C_3

Le système de racines C_3 est l'ensemble des deux et des quatre-racines du réseau $\mathbb{Z}^4 \cap \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Ainsi, $C_3 = A_3 \cup \{e_1 + e_2 - e_3 - e_4, \dots\}$. En particulier, $W(C_3)$ contient $W(A_3)$. Remarquons que $W_+(C_3) = W(A_3) = O$, le groupe octaédral, mais $W_+(C_3)$ agit par $\varepsilon\psi$ alors que $W(A_3)$ agit par ψ sur $\mathbb{C} \otimes Q(C_3) \cong \mathbb{C}^3$. Ainsi, on a deux plongements non conjugués de O dans $W(C_3)$. Soit $T = W_+(A_3) \cong \mathfrak{A}_4$. Dans $W(C_3)$, $T = W(A_3) \cap W_+(C_3)$ et il existe $\tau \in W_+(C_3)/T$ tel que le diagramme suivant est commutatif.



Par exemple, $\tau = (12)_{W_+(C_3)}$. Alors $W(C_3)$ s'obtient à partir de $W(A_3)$ par adjonction de -1. (En effet, le produit $(12)_{W(A_3)}(12)_{W_+(C_3)} = -1$.)

Ainsi, le quotient $E \otimes Q(C_3)/W(C_3) \cong E \otimes Q(C_3)/(W(A_3) \ltimes \tau)$ est isomorphe à $\mathbb{P}^3/\tau$. Les points fixes de $\mathbb{P}^3 = H^0(E, \mathcal{O}(4p_0))$ sous l'action de τ sont d'une part les diviseurs de la forme $x + (-x) + y + (-y)$, où $x, y \in E$ et d'autre part le diviseur $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, où les p_i sont les quatre points d'ordre 2 de E. Au voisinage d'un point de la forme $x + (-x) + y + (-y)$, τ agit comme une pseudo réflexion, donc le quotient est lisse. En revanche, $\mathbb{P}^3/\tau$ présente une singularité isolée en l'image du point $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, de sorte que

$$E \otimes Q(C_3)/W(C_3) \cong \mathbb{P}(1, 1, 2).$$

Celle-ci est localement isomorphe au quotient de $\mathbb{A}^3$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pour l'action $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. Elle est donc résolue par le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-schéma de Hilbert d'après le théorème de Bridgeland, King et Reid. D'après les propriétés locales du schéma de Hilbert équivariant (propositions 1.4.3 et 1.4.6), le morphisme de Hilbert Chow $W - \mathrm{Hilb}(A) \longrightarrow A/W$ induit un isomorphisme entre le W-schéma de Hilbert de A et le quotient A/W en dehors du point singulier de $A/W = \mathbb{P}(1, 1, 2)$, et il donne une résolution crépante de ce schéma.

3.2 Stratification du lieu de branchement et résolution par la méthode de Jung

Les résultats de ce paragraphes sont dûs à Bertin et Markushevich ([BM94]). On les rappelle brièvement dans les cas A_3 et C_3, et on explique plus en détail la géométrie du lieu de branchement et de la résolution dans le cas B_3.

3.2.1 Cas du système de racines A_3

Comme dans le cas affine, le sous-groupe W_+ étant d'indice 2 dans W, le quotient A/W_+ est un revêtement double de $\mathbb{P}^3$. Son lieu de branchement B est par définition l'image du lieu de A où les orbites sous l'action de W et W_+ coïncident. Cela revient à dire que le stabilisateur sous l'action de W est non trivial, et n'est pas inclus dans W_+. Il se décompose en strates correspondantes aux sous-schémas des points de stabilisateur fixé.

- S_0 formée des points $(a, a, a, a) \in E^4$ avec $4a = 0$.
- S_1 formée des points $(a, a, a, b) \in E^4$ avec $3a + b = 0,\ a \neq b$.
- S_2 formée des points $(a, a, b, b) \in E^4$ avec $2a + 2b = 0$.

Proposition 3.2.1 ([BM94]) *Le lieu $\overline{S_2}$ est la réunion de quatre coniques disjointes et $\overline{S_1}$ est une courbe elliptique avec* 16 *points singuliers qui sont les points d'intersection $\overline{S_1} \cap \overline{S_2} = \overline{S_0}$.*

On commence par résoudre les singularités du lieu de branchement B, puis on construit un revêtement double le long du nouveau lieu de branchement. D'après la situation locale, on obtient ainsi une résolution du quotient A/W_+.

Proposition 3.2.2 ([BM94]) *La méthode de Jung fournit une résolution du quotient A/W_+ en éclatant successivement $\overline{S_2}$ puis $\overline{S_1}$.*

Preuve : D'après la situation locale au voisinage des points de $\overline{S_0}$ (paragraphe 2.2.6), la transformée stricte de $\overline{S_1}$ lors de l'éclatement de $\overline{S_2}$ est lisse ; et si l'on éclate successivement ces deux composantes, le lieu de branchement est résolu au voisinage des points de $\overline{S_0}$.

Par ailleurs, A/W_+ présente une famille de singularités planes de type A_2 au-dessus de $\overline{S}_1$ et une famille de singularités planes de type A_1 au-dessus de $\overline{S_2}$. D'après le théorème 2.1.8 de Horikawa, elles admettent une résolution par la méthode de Jung, et celle-ci fournit la résolution minimale. Elles sont respectivement associées aux systèmes

de racines A_2 et $A_1 \times A_1$. Dans les deux cas, un éclatement suffit à résoudre le lieu de branchement.

D'après le paragraphe 2.2.6, la transformée stricte $\tilde{B}$ de B après les éclatements de $\overline{S_2}$ et $\overline{S_1}$ est lisse. Le revêtement double le long de $\tilde{B}$ est une résolution crépante du schéma singulier A/W_+.

3.2.2 Cas du système de racines C_3

Ici, A/W_+ est un revêtement double de $\mathbb{P}(1,1,2)$. Son lieu de branchement B est par définition l'image du lieu de A où les orbites sous l'action de W et W_+ coïncident. Cela revient à dire que le stabilisateur sous l'action de W est non trivial, et n'est pas inclus dans W_+. Rappelons que $A/W(C_3) = A/(W(A_3) \ltimes < \tau >) = \mathbb{P}\left(H^0(E, \mathcal{O}(4p_0))\right) / < \tau >$. Ainsi, B est l'image lors du quotient par τ de la réunion de $B(A_3)$ (image du discriminant du quotient par $W(A_3)$) et du plan H constitué des diviseurs de la forme $x + (-x) + y + (-y)$, où $x, y \in E$.

Proposition 3.2.3 ([BM94]) *Le lieu singulier de B est la réunion de l'image du lieu singulier de $B(A_3)$ et des points de $B(A_3) \cap H$. Il s'agit d'un quadrilatère et d'une conique inscrite dans ce quadrilatère.*

On remarque que le point singulier de $\mathbb{P}(1,1,2)$ ne contribue pas à un point singulier de A/W_+. Plus précisemment, $p_0 + p_1 + p_2 + p_3$ est l'unique point fixe de $\mathbb{P}^3$ sous l'action de τ et son image n'appartient pas au lieu de branchement de π. Par conséquent, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{2:1} & \mathbb{P}^3 \quad \supset B(A_3) \cup H \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ A/W_+(C_3) & \xrightarrow{2:1} & \mathbb{P}(1,1,2) \quad \supset B(C_3) \end{array}$$

et l'action de τ sur Y est sans point fixe.

Proposition 3.2.4 ([BM94]) *En éclatant successivement les composantes du lieu singulier de $B(A_3$ et de $B(A_3) \cap H$, la méthode de Jung donne une résolution crépante $\widetilde{Y}$ de Y respectant cette action de sorte que $\widetilde{Y}/ < \tau >$ est lisse et c'est une résolution crépante de $A/W_+(C_3)$.*

3.2.3 Cas du système de racines B_3

Lors du quotient de E^3 par le sous-groupe distingué $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, il y a seize points de stabilisateurs non triviaux, qui sont les triplets faisant intervenir des points d'ordre deux de E.

Le morphisme $(\mathbb{P}^1)^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ est défini par $((t_0 : t_1), (u_0 : u_1), (v_0 : v_1)) \mapsto (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$, où $(xt_1 - yt_0)(xu_1 - yu_0)(xv_1 - yv_0) = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 = F_a(x,y)$. Les images des points de $(\mathbb{P}^1)^3$ de stabilisateurs non triviaux sont les $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ tels que le polynôme $F_a(x,y) = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$ a un facteur double. Ceux avec un facteur triple ont pour stabilisateur $\mathfrak{S}_3$.

Stratification du lieu de branchement

Le groupe W_+ étant d'indice deux dans W, le quotient A/W_+ est encore un revêtement double de $\mathbb{P}^3$. Son lieu de branchement est donné par l'image dans $\mathbb{P}^3$ du lieu des points de stabilisateur non trivial et non inclus dans W_+.

Les points de stabilisateur non trivial sont donc à l'intersection des hypersurfaces de réflexions dans E^3. Celles-ci sont

- les douze hypersurfaces du type : $\{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_1 = a\}$, où $2a = 0$. Elles sont stabilisées par la réflexion associée à une racine de longueur 1,
- les trois hypersurfaces du type : $\{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_1 = x_2\}$. Elles sont stabilisées par la réflexion associée à une racine de longueur $\sqrt{2}$.

Les premières ont pour images dans $\mathbb{P}^3$ quatre hyperplans correspondant aux $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ tels que le polynôme F_a a un facteur imposé : si on note c_1, c_2, c_3, c_4 les images par $E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ des quatre éléments d'ordre 2 de E, alors l'un des $(xc_{i,1} - yc_{i,0})$ doit être facteur du polynôme. On note H_i l'hyperplan $\{a \in \mathbb{P}^3 \mid F_a(c_i) = 0\}$. Il admet pour équation dans $\mathbb{P}^3$

$$a_0 c_{i,0}^3 + a_1 c_{i,0}^2 c_{i,1} + a_2 c_{i,0} c_{i,1}^2 + a_3 c_{i,1}^3 = 0.$$

Les trois autres hypersurfaces de stabilisateur non trivial s'envoient dans $\mathbb{P}^3$ sur la surface S des points de coordonnées $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ telles que le polynôme $a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 xy^2 + a_3 y^3$ a un facteur double. D'après la formule du discriminant d'un polynôme de degré trois, l'équation de S dans $\mathbb{P}^3$ est donc

$$a_1^2 a_2^2 - 4a_1^3 a_3 + 18 a_0 a_1 a_2 a_3 - 27 a_0^2 a_3^2 - 4 a_0 a_2^3 = 0.$$

Résolution par la méthode de Jung

Le quotient A/W_+ est un morphisme de degré deux ramifié le long de la surface $B = S \cup \bigcup_{i=1..4} H_i$. D'après la méthode de Jung, il suffit pour désingulariser A/W_+ de désingulariser cette surface de branchement, de sorte à pouvoir construire un revêtement double ramifié le long de la surface lisse ainsi obtenue.

Le lieu singulier de B est une union de trois composantes. D'une part le lieu singulier de S, d'autre part l'intersection de S avec la réunion des hyperplans et enfin l'intersection des hyperplans entre eux.

Le lieu singulier de S, est l'ensemble des $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ tels que F_a a un facteur triple, c'est à dire a est de la forme $(t_1^3 : -3t_1^2 t_0 : 3t_1 t_0^2 : -t_0^3)$. C'est une courbe rationnelle de degré 3.

$$\mathrm{Sing}(S) : \left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 = 9 a_0 a_3 \\ 3 a_1 a_3 = a_2^2 \end{array} \right.$$

L'intersection de S avec l'un des hyperplans H_i correspond à la réunion d'une conique et d'une droite dans $\mathbb{P}^3$. En effet, $a \in S$ si F_a admet une racine double, et $a \in H_i$ si c_i est racine, de sorte que l'on obtient la décomposition suivante.

$$\begin{array}{rcl} \{a \in \mathbb{P}^3 \mid a \in S \text{ et } F_a(c_i) = 0\} & = & \{a \in \mathbb{P}^3 \mid F_a(x,y) = (t_1 x - t_0 y)^2 (c_{i,0} x - c_{i,1} y)\} \\ & & \cup \{a \in \mathbb{P}^3 \mid F_a(x,y) = (t_1 x - t_0 y)(c_{i,0} x - c_{i,1} y)^2\} \\ & = & \mathcal{C}_i \cup L_i. \end{array}$$

La conique $\mathcal{C}_i$ est l'ensemble des F_a admettant c_i pour racine et une racine double. Elle a pour équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_{i,0}^2(a_2^2-4a_1a_3) & = & c_{i,1}a_3(3c_{i,1}a_3+2c_{i,0}a_2) \\ c_{i,1}^2(a_1^2-4a_0a_2) & = & c_{i,0}a_0(3c_{i,0}a_0+2c_{i,1}a_1), \end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{l} a_0c_{i,0}^3+a_1c_{i,0}^2c_{i,1}+a_2c_{i,0}c_{i,1}^2+a_3c_{i,1}^3=0 \\ c_{i,0}^2(a_2^2-4a_1a_3)=c_{i,1}a_3(3c_{i,1}a_3+2c_{i,0}a_2). \end{array}\right.$$

La droite L_i des F_a admettant c_i pour racine double a pour équation

$$\left\{\begin{array}{l} a_0c_{i,0}^3+a_1c_{i,0}^2c_{i,1}+a_2c_{i,0}c_{i,1}^2+a_3c_{i,1}^3=0 \\ 3a_3c_{i,1}^2+2a_2c_{i,0}c_{i,1}+a_1c_{i,0}^2=0. \end{array}\right.$$

Les deux composantes $\mathcal{C}_i$ et L_i de $S\cap H_i$ se coupent en le point a_{c_i} correspondant au polynôme admettant c_i pour racine triple. Montrons qu'elles sont tangentes en ce point. Calculons un vecteur normal à la conique en $a_{c_i}=(c_{i,1}^3:-3c_{i,0}c_{i,1}^2:3c_{i,0}^2c_{i,1}:-c_{i,0}^3)$: Si $F(a_0,a_1,a_2,a_3)=c_{i,0}^2(a_2^2-4a_1a_3)-c_{i,1}a_3(3c_{i,1}a_3+2c_{i,0}a_2)$ alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial F/\partial a_0 & = & 0 \\ \partial F/\partial a_1 & = & -4c_{i,0}^2a_3, \\ \partial F/\partial a_2 & = & 2c_{i,0}^2a_2-2c_{i,0}c_{i,1}a_3 \\ \partial F/\partial a_3 & = & -4c_{i,0}^2a_1-6c_{i,1}^2a_3-2c_{i,1}c_{i,0}a_2. \end{array}\right.$$

En a_{c_i}, on obtient donc le vecteur $(0:4c_{i,0}^5:8c_{i,0}^4c_{i,1}:12c_{i,0}^3c_{i,1}^2)$, de sorte que le plan d'équation

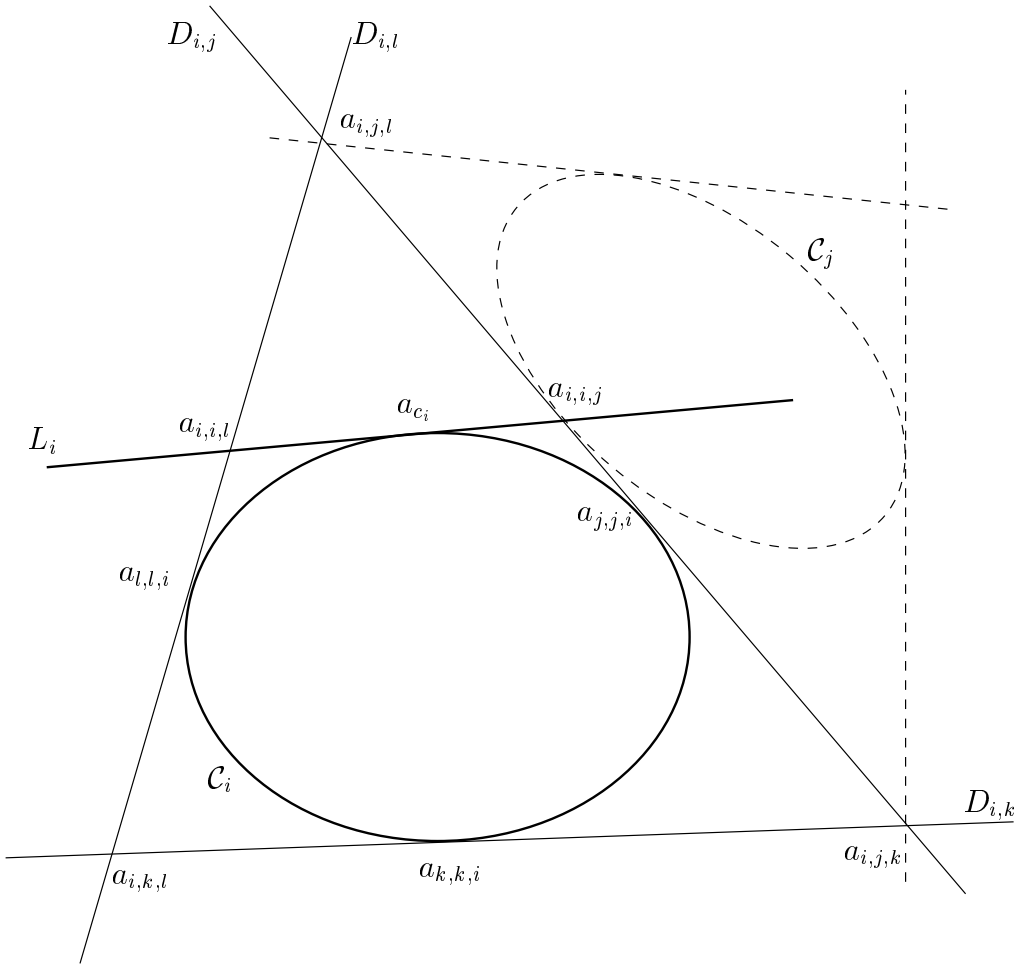
$$c_{i,0}^2a_1+2c_{i,0}c_{i,1}a_2+3c_{i,1}^2a_3=0$$

est tangent à $\mathcal{C}_i$ en a_{c_i}, donc L_i est tangente à $\mathcal{C}_i$ en a_{c_i}.

L'intersection $D_{i,j}$ de deux hyperplans H_i et H_j représente l'ensemble des F_a admettant c_i et c_j pour racine. Il rencontre L_i en un point $a_{i,i,j}$, qui représente le polynôme admettant c_i pour racine double et c_j pour racine simple. La droite $L_{i,j}$ rencontre $\mathcal{C}_i$ en l'unique point $a_{i,j,j}$ qui représente le polynôme admettant c_i pour racine double et c_i pour racine simple.

En particulier, la conique C_j incluse dans le plan H_j coupe la droite L_i du plan H_i en $a_{i,i,j}\in H_i\cap H_j=D_{i,j}$

Dans chacun des quatre plan H_i, on obtient une figure analogue à la suivante. Le lieu singulier de S n'apparaît pas sur la figure car il coupe H_i en l'unique point a_{c_i}.



Au-dessus du lieu générique de $\mathcal{C}_i$, le quotient A/W_+ présente une famille de singularités de type A_1. En effet, les antécédents dans E^3 sont les points du type (α_i, e, e) ou $(\alpha_i, e, -e)$ (où α_i est un élément d'ordre 2 de E) à permutations près. Or le stabilisateur de (α_i, e, e) sous l'action de W_+ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =< ((23), \varepsilon_1) >$, et celui de $(\alpha_i, e, -e)$ est $< (23), \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 >$. Ces singularités sont résolues par le schéma de Hilbert d'après Ito et Nakamura ([IN99]) ou par la méthode de Jung d'après Horikawa ([Hor75]), et ces deux résolutions coïncident et donnent la résolution minimale de la singularité.

Au-dessus du lieu générique de $\mathrm{Sing}(S)$, le quotient A/W_+ présente une famille de singularités de type A_2. En effet, les antécédents dans E^3 sont les points du type (e, e, e) et $(e, e, -e)$ à permutations près. Or le stabilisateur de (e, e, e) sous l'action de W_+ est $\mathfrak{A}_3$ et celui de $(e, e, -e)$ est $\{(1, 1), ((123), \varepsilon_2\varepsilon_3), ((132), \varepsilon_1\varepsilon_3\} = \mathfrak{A}_3$. Ici encore, ces singularités sont résolues indifféremment par le schéma de Hilbert ou par la méthode de Jung.

Au-dessus du lieu générique de L_i, le quotient A/W_+ est lisse. En effet, les antécédents dans E^3 sont les points du type (α_i, α_i, e). Or le stabilisateur sous l'action de W_+ de ces points est $\{(1, 1), (1, \varepsilon_1\varepsilon_2), ((12), \varepsilon_1), ((12), \varepsilon_2)\} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Il s'agit donc d'un quotient par un groupe de réflexions en dimension 2.

Les différents types de points apparaissant dans le lieu de branchement sont récapitulés dans le tableau suivant.

a	racines	stabilisateur	R
a_{c_i}	c_i, c_i, c_i	$\mathfrak{S}_3 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$	B_3
$a_{i,i,j}$	c_i, c_i, c_j	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ $=< (12) > \rtimes < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 >$	$A_1 \times B_2$
$a_{i,j,k}$	c_i, c_j, c_k	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ $=< \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 >$	$A_1 \times A_1 \times A_1$
$a \in D_{i,j}$	c_i, c_j, x	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ $=< \varepsilon_1, \varepsilon_2 >$	$A_1 \times A_1$
$a \in L_i$	c_i, c_i, x	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ $=< (12) > \rtimes < \varepsilon_1, \varepsilon_2 >$	B_2
$a \in \mathrm{Sing}(S)$	x, x, x	$\mathfrak{S}_3$	A_2
$a \in \mathcal{C}_i$	c_i, x, x	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $=< (23) > \times < \varepsilon_1 >$	$A_1 \times A_1$
$a \in \mathcal{H}_i$	c_i, x, y	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =< \varepsilon_3 >$	A_1
$a \in S$	x, x, y	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =< (12) >$	A_1

D'après la résolution locale des singularités associées à un système de racines, il suffit,
- pour résoudre la singularité au-dessus de a_{c_i} d'éclater deux fois la droite L_i puis la transformée stricte du lieu singulier de S ;
- pour résoudre la singularité au-dessus de $a_{i,i,j}$ d'éclater une première fois L_i, puis dans un ordre indifférent les transformées strictes de L_i, $\mathcal{C}_j$ et $D_{i,j}$;
- pour résoudre la singularité au-dessus de $a_{i,j,k}$ d'éclater les trois axes $D_{i,j}$, $D_{i,k}$ et $D_{j,k}$.

Proposition 3.2.5 ([BM94]) *La méthode de Jung fournit une résolution crépante de A/W_+ en éclatant successivement deux fois $\cup_{i=1}^4 L_i$, puis* $\mathrm{Sing}(S)$, $\cup_{i=1}^4 \mathcal{C}_i$ *et* $\cup_{1 \leq i < j \leq 4} D_{i,j}$.

Preuve : L'étude locale des paragraphes 2.2.7, 2.2.4, 2.2.2 assure que les singularités au-dessus des points a_{c_i}, $a_{i,i,j}$ et $a_{i,j,k}$ sont ainsi résolues. De plus, on connaît la fibre de la résolution au-dessus de chacun des ces points.

Les autres singularités sont des familles à un paramètre de singularités planes. D'après le théorème de Horikawa (théorème 2.1.8), elles sont résolues par la méthode de Jung, et de plus, celle-ci fournit la résolution minimale. Ainsi,

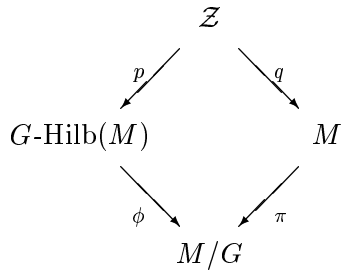
- Au-dessus d'un point générique de $D_{i,j}$, la singularité plane de type A_1, associé au système de racines $A_1 \times A_1$ est résolue grâce à l'éclatement de $D_{i,j}$.
- Au-dessus d'un point générique de $\mathcal{C}_i$, la singularité est résolue grâce à l'éclatement de $\mathcal{C}_i$.
- Au-dessus d'un point générique de L_i, la singularité plane de type A_3 et associée au système de racines B_2 est résolue après deux éclatement du point singulier du lieu de branchement.
- Au-dessus d'un point générique de $\mathrm{Sing}(S)$, la singularité plane de type A_2 et associée au système de racines A_2 est résolue par l'éclatement de $\mathrm{Sing}(S)$.

□

3.3 Résolution par le schéma de Hilbert

Rappelons le théorème de Bridgeland, King et Reid.

Théorème 3.3.1 ([BKR01]) *Soit M une variété complexe projective lisse de dimension trois sur laquelle agit un groupe G fini tel que ω_M est trivial en tant que G-faisceau. Soit $X = M/G$ et $\mathcal{Z}$ la famille universelle du G-schéma de Hilbert de M. Alors le diagramme commutatif suivant*



permet de définir un foncteur de Fourier-Mukai

$$\Phi = Rq_* \circ p^* : \mathcal{D}(G\text{-Hilb}(M)) \longrightarrow \mathcal{D}^G(M).$$

Alors Φ est une équivalence de catégorie et G-Hilb(M) est une résolution crépante de $X = M/G$.

Par ailleurs, d'après le théorème suivant de Bridgeland, cette équivalence de catégorie est également vérifiée par le schéma obtenu lors de la résolution par la méthode de Jung :

Théorème 3.3.2 ([Bri02]) *Soient Y_1 et Y_2 deux variétés de Calabi Yau de dimension trois, lisses et birationnellement équivalentes. Alors on a une équivalence de catégories*

$$\mathcal{D}(Y_1) \cong \mathcal{D}(Y_2).$$

Dans les cas que nous étudions, ces théorèmes s'appliquent, de sorte que le W_+-schéma de Hilbert fournit de A une résolution crépante de A/W_+. Notons $Y(W_+)$ le schéma obtenu lors de la résolution par la méthode de Jung. Alors $Y(W_+)$ et W_+-Hilb(A) sont des variétés de Calabi-Yau et elles sont birationnellement équivalentes, puisqu'il s'agit de deux résolutions du quotient A/W_+. On a les équivalences de catégories

$$\mathcal{D}(Y(W_+)) \cong \mathcal{D}(W_+\text{-Hilb}(A)) \cong \mathcal{D}^{W_+}(A).$$

Ces équivalences impliquent en particulier et directement que la conjecture locale (2.4.1) sur les nombres d'Euler est vérifiée par les deux résolutions. Mais l'étude locale du chapitre 2 donne plus de précision. En effet, on connaît la géométrie des fibres au-dessus de chaque point du quotient A/W_+. Par exemple, dans le cas du système de racines B_3 :

- Au-dessus des 4 points de type a_{c_i}, en lesquels A/W_+ présente une singularité locale du type de X_{B_3}, le schéma W_+-Hilb(A) admet une fibre formée de quatre branches isomorphes à $\mathbb{P}^1$ dans la configuration donnée au paragraphe 2.3.7
- Au dessus des 12 points de type $a_{i,i,j}$, on obtient également une fibre de quatre $\mathbb{P}^1$ dans la configuration donnée au paragraphe 2.3.4
- Au-dessus des 4 points de type $a_{i,j,l}$, on obtient une fibre de trois $\mathbb{P}^1$ s'intersectant en un unique point.
- Les autres singularités de A/W_+ sont des familles à un paramètre de singularités planes. Le schéma de Hilbert donne donc localement la résolution minimale de ces singularités.

En dehors des 20 points fortement critiques, de type B_3, $A_1 \times B_2$ ou $A_1 \times A_1 \times A_1$, les singularités sont des familles à un paramètre de singularités planes, et les deux résolutions donnent la résolution minimale au voisinage de ces points d'après les résultats de Ito et Nakamura pour le schéma de Hilbert ([IN99]) et de Horikawa pour la méthode de Jung ([Hor75]). De plus, la géométrie de ces fibres récapitulée dans le tableau du paragraphe 2.4 démontre le résultat suivant.

Proposition 3.3.3 *Les deux résolutions de la singularité $A/W_+(B_3)$ coïncident en dehors des fibres des 20 points fortement critiques, de type B_3, $A_1 \times B_2$ ou $A_1 \times A_1 \times A_1$, et cet ouvert de définition de l'isomorphisme est maximal.*

De plus, au-dessus des points de type B_3, $A_1 \times B_2$ et $A_1 \times A_1 \times A_1$, les fibres du W_+-schéma de Hilbert admettent pour graphe dual le diagramme de McKay simplifié des groupes $W_+(B_3)$, $W_+(A_1 \times B_2)$ et $W_+(A_1 \times A_1 \times A_1)$ respectivement.

Chapitre 4

Espaces modulaires de fibrés vectoriels sur une courbe elliptique

Dans ce chapitre, nous examinons la situation globale du chapitre 3 sous un nouvel angle. Soit E une courbe elliptique, R un système de racines irréductibles, $Q(\mathrm{R})$ le réseau engendré par R et $A = E \otimes Q(\mathrm{R})$. Lors du quotient de A par le groupe de Weyl $W(\mathrm{R})$, le théorème de Looijenga 3.0.3 admet d'après Friedman, Morgan et Witten une reformulation en termes de fibrés vectoriels sur la courbe elliptique E : soit G le groupe de Lie complexe semi-simple et simplement connexe correspondant à R. On peut définir une relation d'équivalence, de G-fibrés semi-stables, dite S-équivalence qui est généralement plus faible que l'isomorphisme. Il existe alors un espace de module $\mathcal{M}$ paramétrant les G-fibrés holomorphes semi-stables à S-équivalence près. De plus, on a le théorème suivant.

Théorème 4.0.4 ([FMW97]) *L'espace de module $\mathcal{M}$ est un espace projectif avec poids $\mathbb{P}(s_0, \ldots, s_r)$; et les poids sont* 1 *et les coefficients de la plus grande racine de* R.

De plus, la famille universelle est explicite dans les cas des systèmes de racines A_n et B_n, et elle associe à chaque classe d'isomorphisme son représentant régulier, c'est à dire le G-fibré holomorphe semi-stable ξ tel que $h^0(E, \mathrm{ad}(\xi)) = \mathrm{rang}(G)$ (voir [FMW98]). La construction de cette famille se fait grâce à une construction dite construction spectrale.

Lors du quotient de A par le sous-groupe W_+ de W engendré par les produits pairs de réflexions, la construction spectrale fournit une autre famille de fibrés sur E, indexée par W_+-Hilb(A). Il est naturel de se demander si cette famille est ou non le tiré en arrière de $\mathcal{L}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_+ & & \mathcal{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \times W_+\text{-Hilb}(A) & \xrightarrow{\phi} & E \times W\text{-Hilb}(A). \end{array}$$

On peut également s'interroger sur les éventuelles informations que $\mathcal{L}_+$ pourrait contenir sur la géométrie de A/W_+, et de sa résolution par W_+-Hilb(A).

Dans le premier paragraphe, on définit un schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^N(A, E)$ paramétrant les couples (Z, g), où Z est une N-grappe de A et g un morphisme $Z \longrightarrow E$. On

explique alors comment associer à chaque point (Z, g) de $\mathrm{Hilb}^N(A, E)$, un fibré vectoriel $V_{Z,g}$ de degré zéro et de rang N sur E : c'est la construction spectrale.

Dans le deuxième paragraphe, on étudie ce fibré $V_{Z,g}$. Les fibrés vectoriels sur une courbe elliptique sont classifiés par le théorème d'Atiyah ([Ati57]). Le théorème 4.2.2, décrit la structure du fibré associé à un point (Z, g) de $\mathrm{Hilb}^N(A, E)$ en fonction de la géométrie de Z et du morphisme $g : Z \longrightarrow E$.

Dans le troisième paragraphe, on traite quelques exemples.

Dans les quatrième et cinquième paragraphes, on s'intéresse successivement aux cas des systèmes de racines A_n et B_n. On rappelle le théorème de Friedman, Morgan et Witten, puis on démontre que le fibré associé à l'unique grappe supportée en l'origine est le fibré régulier I_{n+1} (respectivement I_{2n}). Enfin, en effectuant la construction spectrale associée au groupe W_+, on démontre grâce aux tables du chapitre 2 que la famille universelle $\mathcal{L}_+$ classifie une famille de fibrés qui n'est pas l'image réciproque de $\mathcal{L}$. Cependant, contrairement à nos espérances, le type des fibrés ne sépare pas les différentes branches du graphe associé à la fibre à l'origine du morphisme de Hilbert-Chow W_+-Hilb$(A) \xrightarrow{\phi} A/W_+$, de sorte qu'aucune conclusion en terme de correspondance de McKay ne se dessine ici.

4.1 Définitions

4.1.1 $\mathrm{Hilb}^N(A, X)$

Soit A et X deux schémas projectifs lisses sur $\mathbb{C}$, et N un entier. On définit le foncteur $\mathcal{H}ilb^N(A, X)$ de la façon suivante.

$$\mathcal{H}ilb^N(A,X) : \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{S}ch & \longrightarrow & \mathcal{S}et \\ S & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & A \times S \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \square & \downarrow \\ X \times S & \longrightarrow & S \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{avec } Z \in \mathcal{H}ilb^N(A)(S) \\ \text{et le graphe } \Gamma_g \text{ de } g \\ \text{est plat sur } S \end{array} \end{array}$$

Théorème 4.1.1 *Le foncteur $\mathcal{H}ilb^N(A, X)$ est représentable par un sous-schéma ouvert* $\mathrm{Hilb}^N(A, X)$ *de* $\mathrm{Hilb}^N(A \times X)$.

Preuve : On démontre que ce foncteur est un sous-foncteur ouvert de $\mathcal{H}ilb^N(A \times X)$. Soit S un schéma et $(Z, g) \in \mathcal{H}ilb^N(A, X)(S)$. Alors le graphe de g est un sous-schéma fermé de $A \times X \times S$ plat sur S par hypothèse et qui restreint à chacune de ses fibres est un sous-schéma de dimension 0 et de longueur N de $A \times X$.

$$\Gamma_g \hookrightarrow Z \times_S (X \times S) \hookrightarrow (A \times S) \times_S (X \times S) = A \times X \times S.$$

Soient maintenant $Y \in \mathcal{H}ilb^N(A \times X)(S)$ et $g : Y \longrightarrow X \times S$ le morphisme induit par deuxième projection de $A \times X \times S$. Soit p_1 la restriction de la première projection à Y :

$$\begin{array}{ccc} A \times X \times S & \longrightarrow & A \times S \\ Y & \xrightarrow{p_1} & Z. \end{array}$$

Alors (Y, g) est dans $\mathcal{H}ilb^N(A, X)(S)$ si et seulement si p_1 est une immersion fermée. Soit $\mathcal{Z}$ la famille universelle de $\mathcal{H}ilb^N(A \times X)$. On veut définir un sous-schéma H de $\mathrm{Hilb}^N(A \times X)$ ayant la propriété suivante :

$$\forall h \in \mathrm{H},\ (\mathcal{Z})_h \longrightarrow A \text{ est une immersion fermée.}$$

Plus précisément, on va construire un schéma $\mathrm{H} \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hilb}^N(A \times X)$ tel que

$$(1 \times \psi)^*(\mathcal{Z}) \longrightarrow A \times \mathrm{H}$$

est une immersion fermée et H est universel pour cette propriété, c'est à dire que si $S \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hilb}^N(A \times X)$ vérifie $(1 \times \phi)^*(\mathcal{Z}) \longrightarrow A \times S$ est une immersion fermée, alors ϕ factorise par ψ :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Hilb}^N(A \times X) \\ & \searrow \quad \nearrow_{\psi} & \\ & \mathrm{H} & \end{array}$$

Ce problème étant un problème universel, il suffit de le résoudre localement. L'unicité de la solution assure que les recollements ont lieu correctement. On démontre que la propriété qui doit être vérifiée au-dessus de H est une propriété ouverte, de sorte que H est un sous schéma ouvert de $\mathrm{Hilb}^N(A \times X)$.

Soit $U = \mathrm{Spec}(R)$ un ouvert affine de $\mathrm{Hilb}^N(A \times X)$, et $V = \mathrm{Spec}(T)$ un ouvert affine de X. Alors le morphisme $\mathcal{Z} \xrightarrow{p} \mathrm{Hilb}^N(A \times X)$ étant fini, $p^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(B)$ est un ouvert affine de $\mathcal{Z}$, et B est une R-algèbre de type fini. Considérons la suite exacte de R-algèbres

$$\longrightarrow T \otimes R \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où C est le conoyau du morphisme $T \otimes R \longrightarrow B$. Soit h un point de $U \subset \mathrm{Hilb}^N(A \times X)$ au-dessus duquel le morphisme $\mathcal{Z}_h \longrightarrow A$ est une immersion fermée. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de R correspondant au point h et $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ l'idéal maximal de l'anneau $R_{\mathfrak{p}}$. Alors on a

$$\longrightarrow T \otimes R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B \otimes R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0,$$

de sorte que $C \otimes R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = 0$. Mais alors C étant une R-algèbre de type fini, d'après le lemme de Nakayama $C_{\mathfrak{p}} = 0$, et il existe $f \notin \mathfrak{p}$ tel que $C_{(f)} = 0$. Ainsi, il existe un voisinage $D(f)$ de h dans U au-dessus duquel le morphisme $\mathcal{Z}_k \longrightarrow A$ est une immersion fermée. Soit H l'ouvert maximal vérifiant cette propriété. Il représente le foncteur $\mathcal{H}ilb^N(A \times X)$, et la famille universelle est $(\mathcal{Z}|_{\mathrm{H}}, p_2)$, où p_2 est la restriction de la projection de $\mathcal{Z}$ à $X \times \mathrm{Hilb}^N(A \times X)$. □

4.1.2 La construction spectrale

Soit X une courbe lisse, et A un schéma projectif lisse sur $\mathbb{C}$. Un point de $\mathrm{Hilb}^N(A, X)$ est donné par un couple (Z, g), où Z est une N-grappe de A et $g : Z \longrightarrow X$. À un

tel point, on associe un fibré de rang N sur X de la façon suivante. Notons P l'image schématique de g. Le support de P est fini, et on note $\mathrm{Supp}(P) = \{p_1, \ldots, p_r\}$. Pour tout i, posons $Z_i = g^{-1}(p_i)$. Enfin, soit Γ_g le graphe de g. Alors pour tout i, $Z_i \times \{p_i\}$ et Γ_g sont des diviseurs de Cartier sur $Z \times X$ et on peut définir le faisceau localement libre

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{O}_{Z\times X}(\Gamma_g - \sum Z_i \times \{p_i\}).$$

Alors $p_{2,*}(\mathcal{L}_g)$ est un faisceau localement libre de rang N sur X. On note $V_{Z,g}$ le fibré dont les sections sont ce faisceau. Les deux lemmes suivants démontrent que $V_{Z,g}$ est un fibré de degré nul.

Lemme 4.1.2 *Supposons que $(Z,g) \in \mathrm{Hilb}^N(A,X)$ vérifie $Z = Z_1 \sqcup \ldots \sqcup Z_r$, où chaque facteur est supporté en un point. Alors $V_{Z,g} = V_{Z_1,g_1} \oplus \ldots \oplus V_{Z_r,g_r}$, avec $Z_i \xrightarrow{g_i} X$.*

Preuve : Notons P_i l'image schématique de g_i dans X, et p_i son support. Alors $g^{-1}(P_j) = W_j = \sqcup_{g(Z_i)=p_j} Z_i$, et les diviseurs W_j ainsi obtenus forment une partition de Z. Notons q_j le support de l'image schématique de W_j. Alors le diviseur $\sum_{j=1}^k W_j \times \{q_j\} = \sum_{i=1}^r Z_i \times \{p_i\}$. Par ailleurs, $\Gamma_g = \sum \Gamma_{g_i}$, où Γ_{g_i} est un diviseur de $Z \times X$ supporté par $Z_i \times P_i$. Finalement,

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{O}_{Z\times X}(\sum \Gamma_{g_i} - \sum Z_i \times \{p_i\}).$$

Or $\mathcal{O}_{Z\times X} = \mathcal{O}_{Z_1\times X} \times \ldots \times \mathcal{O}_{Z_r\times X}$, de sorte que

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{O}_{Z_1\times X}(\Gamma_{g_1} - Z_1 \times \{p_1\}) \times \ldots \times \mathcal{O}_{Z_r\times X}(\Gamma_{g_r} - Z_r \times \{p_r\}).$$

Ainsi, après avoir appliqué $p_{2,*}$, on obtient $V_{Z,g} = V_{Z_1,g_1} \oplus \ldots \oplus V_{Z_r,g_r}$. □

On se ramène ainsi au cas où Z est une grappe de longueur N supportée par un point $a \in A$.

Lemme 4.1.3 *Soit $(Z,g) \in \mathrm{Hilb}^N(A,X)$, supporté en un point. Alors* $\deg(V_{Z,g}) = 0$.

Preuve : Par hypothèse, $\mathcal{O}_Z$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension N. Si $N = 1$, alors $\mathcal{O}_Z = \mathbb{C} = \mathcal{O}_P$, et $\mathcal{L}_g = \mathcal{O}_{Z\times X}$, de sorte que $V_{Z,g}$ est le fibré trivial. Il est bien de degré zéro.

Par récurrence, supposons que si $\mathcal{O}_Z$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension $N-1$, alors $V_{Z,g}$ est de degré zéro. Notons p_0 l'image de Z par g. Soit $\mathfrak{m}$ l'anneau maximal de $\mathcal{O}_Z$ et $\xi \in \mathfrak{m}^{r-1}$ non nul, où $\mathfrak{m}^r = 0$. Soit $Z^* \subset Z$ défini par $\xi = 0$ et g^* la restriction de g à Z^*. On a la suite exacte suivante.

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z\times X} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z\times X}|_{Z^*\times X} \longrightarrow 0$$

Or $\mathcal{L}_g \otimes \mathcal{O}_{Z\times X}|_{Z^*\times X} = \mathcal{O}_{Z\times X}|_{Z^*\times X}(\Gamma_g - Z \times \{p_0\}) = \mathcal{O}_{Z^*\times X}(\Gamma_{g^*} - Z^* \times \{p_0\})$, de sorte que l'on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z\times X}(\Gamma_g - Z \times \{p_0\}) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z^*\times X}(\Gamma_{g^*} - Z^* \times \{p_0\}) \longrightarrow 0.$$

Comme $\mathfrak{m}$ annule ξ et $\mathcal{O}_Z/\mathfrak{m}$ est de dimension 1, Z^* est une $(N-1)$-grappe de A.

Soit $a \in A$ le support de la grappe Z. Au voisinage de (a, p_0), la suite exacte est la suivante.

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \frac{x}{t-x}\mathbb{C}[t,x]/t^n \longrightarrow \frac{x}{t-x}\mathbb{C}[t,x]/t^{n-1} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, $I \cong \mathbb{C}[x]$ et le noyau $\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_{a\times X}$. Finalement, $V_{Z,g}$ est une extension de V_{Z^*,g^*} par le fibré trivial sur X, donc il est de degré nul. □

4.2 Fibrés vectoriels sur une courbe elliptique

4.2.1 Le théorème d'Atiyah

Supposons que E est une courbe elliptique. Les fibrés de degré nul sur E sont classifiés par le théorème d'Atiyah suivant.

Théorème 4.2.1 ([Ati57]) *Soit E une courbe elliptique. Il existe, à isomorphisme près, un unique fibré vectoriel I_r de degré zéro et de rang r indécomposable et tel que $\Gamma(I_r) \neq 0$. Pour tout fibré F indécomposable de degré zéro et de rang r, il existe un faisceau localement libre $\mathcal{L}$ de degré zéro tel que $F = \mathcal{L} \otimes I_r$.*

De plus, pour tout $s < r$, on a

$$0 \longrightarrow I_s \longrightarrow I_r \longrightarrow I_{r-s} \longrightarrow 0.$$

4.2.2 Étude du fibré $V_{Z,g}$ associé à un point de $\mathrm{Hilb}^N(A,E)$

Soit A un schéma projectif lisse, E une courbe elliptique et $(Z,g) \in \mathrm{Hilb}^N(A,E)$. Supposons que Z est supporté par un point $a \in A$. Alors l'image schématique P de g est également supportée en un point $\{p_0\}$, et de longueur n. Comme P est un sous-schéma de la courbe lisse E, on a $\mathcal{O}_P = \mathbb{C}[x]/x^n$. Puis $\mathcal{O}_Z$ étant de dimension finie sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}_Z$ est un $\mathcal{O}_P$-module de type fini. D'après la décomposition en modules monogènes d'un module de type fini sur un anneau principal, il existe des générateurs $p_1, \ldots, p_r$ et des entiers $k_1, \ldots, k_r$ tels que $\mathcal{O}_Z = \mathbb{C}[t]/t^{k_1} p_1 \oplus \mathbb{C}[t]/t^{k_2} p_2 \ldots \oplus \mathbb{C}[t]/t^{k_r} p_r$. De plus, comme $g^{\#} : \mathcal{O}_P \longrightarrow \mathcal{O}_Z$ est injective, on peut supposer que $k_1 = n$ et les k_i sont tous inférieurs ou égaux à n. On ordonne les entiers k_i et on note $\mu(Z,g) = (k_1, \ldots, k_r)$ la partition de N associée à (Z,g).

Théorème 4.2.2 *Soit A un schéma projectif lisse et E une courbe elliptique. Soit (Z,g) un point de $\mathrm{Hilb}^N(A,E)$ tel que Z est une grappe supporté en un point $a \in A$. Soit $\mu(Z,g) = (k_1, \ldots, k_r)$ la partition associée à (Z,g). Alors le fibré associé sur E est*

$$V_{Z,g} = I_{k_1} \oplus I_{k_2} \oplus \ldots \oplus I_{k_r}.$$

Preuve : On démontre ce théorème par récurrence en s'appuyant sur les lemmes 4.2.3 et 4.2.4 suivants.

Lemme 4.2.3 *Soit E une courbe de genre supérieur ou égal à 1 et $(Z,g) \in \mathrm{Hilb}^N(A,E)$ supporté en un point $a \in A$, avec $\mu(Z,g) = \{k_1, \ldots, k_r\}$. Alors $\dim(H^0(E, V_{Z,g})) = r$.*

Preuve : Soit $s \in H^0(E, V_{Z,g}) \cong H^0(Z \times E, \mathcal{O}_{Z\times E}(\Gamma_g - Z \times \{p_0\}))$. Soit $t = g^{\#}x \in \mathcal{O}_Z$. Le graphe Γ_g a pour équation $t - x$ au voisinage de (a, p_0). Ainsi, le faisceau localement libre $\mathcal{O}_{Z\times E}(\Gamma_g - Z \times \{p_0\})$ est localement engendré par $\frac{x}{t-x}$ au voisinage de (a, p_0), et par 1 en dehors de ce point.

Soit U un voisinage de $a \times p_0 \in Z \times E$, et $V = Z \times (E \setminus p_0)$. Alors il existe $f \in \mathcal{O}_{Z\times E}(U)$ telle que $s_{|U} = f\frac{x}{t-x}$ et $g \in \mathcal{O}_{Z\times E}(V)$ telle que $s_{|V} = g$. Enfin, sur $U \cap V$, on a $xf = (t-x)g$

Rappelons que $\mathcal{O}_Z = \mathbb{C}[t]/t^{k_1}p_1 \oplus \mathbb{C}[t]/t^{k_2}p_2 \ldots \oplus \mathbb{C}[t]/t^{k_r}p_r$. On a donc une décomposition

$$\begin{cases} f &= \sum_{i=1}^r \sum_{m=0}^{k_i-1} (t^m \cdot p_i) f_{i,m}(x), \\ g &= \sum_{i=1}^r \sum_{m=0}^{k_i-1} (t^m \cdot p_i) g_{i,m}(x), \end{cases}$$

où $f_{i,m}$ et $g_{i,m}$ sont des sections de $\mathcal{O}_E$. Comme $t = t \cdot 1_{\mathcal{O}_Z}$, $t(t^m \cdot p_k) = t^{m+1} \cdot p_k$, de sorte que

$$\begin{cases} xf &= \sum_{i=1}^r \sum_{m=0}^{k_i-1} (t^m \cdot p_i) x f_{i,m}(x), \\ (t-x)g &= \sum_{i=1}^r \sum_{m=1}^{k_i-1} (t^m \cdot p_i) g_{i,m-1}(x) - \sum_{i=1}^r \sum_{m=0}^{k_i-1} (t^m \cdot p_i) x g_{i,m}(x). \end{cases}$$

L'identité sur $U \cap V$ donne donc pour tout $i \in [1,r]$:

$$xf_{i,0} = -xg_{i,0}, \quad xf_{i,1} = g_{i,0} - xg_{i,1}, \quad \ldots \quad xf_{i,k_i-1} = g_{i,k_i-2} - xg_{i,k_i-1}.$$

Étant donné que x n'est pas diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_E$, la première égalité implique que pour tout $i \in [1,r]$, $g_{i,0} = -f_{i,0}$ est régulière sur au voisinage de p_0. Comme elle est régulière en dehors de p_0, c'est une section globale de $\mathcal{O}_E$, donc c'est donc une constante.

Fixons $i \in [1,r]$ et raisonnons par récurrence sur m. Soit $m \in [0, k_i - 2]$. Supposons que $g_{i,m} = f_{i,m}$ est constante, et montrons que $g_{i,m+1} = f_{i,m+1}$ est constante et que $g_{i,m} = 0$. La $(m+1)$-ième identité $xg_{i,m+1} = g_{i,m} - xf_{i,m}$ implique que $g_{i,m+1}$ admet au plus un pôle en p_0. Si elle admettait un pôle, elle admettrait également un unique zéro, et définirait un morphisme birationnel entre E et $\mathbb{P}^1$ ([Har77, II, 6.10.1]). Cela est impossible puisque E est de genre supérieur ou égal à 1. Ainsi, $g_{i,m+1}$ est régulière sur E, donc constante. Puis, l'identité $g_{i,m} = x(g_{i,m+1} + f_{i,m})$ implique $g_{i,m} = 0$, et $g_{i,m+1} = f_{i,m+1}$.

Par récurrence, on a démontré que pour tout $i \in [1,r]$, $f_{i,0} = g_{i,0} = \ldots = f_{i,k_i-2} = g_{i,k_i-2} = 0$ et $f_{i,k_i-1} = -g_{i,k_i-1}$ est une constante. En particulier, la section s est définie par r constantes et $H^0(Z \times E, \mathcal{O}(\Gamma_g - Z \times p_0))$ est de dimension r. Une famille génératrice est $s_1, \ldots, s_r$, où $s_{i|U} = (t^{k_i-1} \cdot p_i)\frac{x}{t-x}$ et $s_{i|V} = t^{k_i-1} \cdot p_i$. □

Lemme 4.2.4 *Soit $(Z,g) \in \mathrm{Hilb}^N(A,E)$, de partition associée $\mu(Z,g) = (1,1,\ldots,1)$. Alors le fibré associé sur E est*

$$V_{Z,g} = I_1 \oplus I_1 \oplus \ldots \oplus I_1.$$

Preuve : Sous les hypothèses, on a $n = 1$, de sorte que $P = \{p_0\} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, et $\mathcal{O}_Z = \mathbb{C}^N$. Le graphe $\Gamma_g = Z \times p_0$, de sorte que $\mathcal{O}_{Z\times E}(\Gamma_g - Z \times \{p_0\})) = \mathcal{O}_{Z\times E}$. Ainsi, $V_{Z,g} = p_{2,*}(\mathcal{O}_{Z\times E}) = \mathcal{O}_E^N$, d'où le résultat. □

Notons HR_n l'hypothèse de récurrence suivante au rang n

HR$_\mathbf{n}$: *Soit $(Z,g) \in \mathrm{Hilb}^N(A,E)$ avec $\mu(Z,g) = (k_1,\ldots,k_r)$ vérifiant $k_1 \leq n$, c'est à dire $Z \xrightarrow{g} E$ envoie Z sur un point de longueur inférieure à n et la décomposition de $\mathcal{O}_Z$ en $\mathbb{C}[t]/t^n$-modules cycliques est $\mathcal{O}_Z = \mathbb{C}[t]/t^{k_1}p_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[t]/t^{k_r}p_r$. Alors*

$$V_{Z,g} = I_{k_1} \oplus \ldots \oplus I_{k_r}.$$

De plus, on connaît une base $s_1, \dots, s_r$ *de* $H^0(E, V_{Z,g}) = H^0(Z \times E, \mathcal{O}(\Gamma_g - Z \times \{p_0\}))$ *telle que* s_i *est une section globale de* I_{k_i}*, et elle est localement donnée par les formules* $s_{i|U} = (t^{k_i - 1} \cdot p_i)\frac{x}{t-x}$ *au voisinage de* (a, p_0) *et* $s_{i|V} = t^{k_i-1} \cdot p_i$ *en dehors de* (a, p_0).

Les lemmes 4.2.4 et 4.2.3 initialisent la récurrence à $n = 1$.

Supposons que HR_{n-1} est vérifié et démontrons le résultat au rang n. Soit donc $(Z, g) \in \mathrm{Hilb}^N(A, E)$ avec $\mu(Z, g) = (k_1, \dots, k_r)$ vérifiant $k_1 = n$. Soit α le plus grand entier tel que $k_\alpha = n$. Alors

$$\mathcal{O}_Z = \mathbb{C}[t]/t^n p_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[t]/t^n p_\alpha \oplus \mathbb{C}[t]/t^{k_{\alpha+1}} p_{\alpha+1} \ldots \oplus \mathbb{C}[t]/t^{k_r} p_r.$$

Considérons le sous-schéma Z^* de Z défini par l'équation $(g^\# x)^{n-1} = t^{n-1} \cdot p_1$. Alors

$$\mathcal{O}_{Z^*} = \mathbb{C}[t]/t^{n-1} p_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[t]/t^{n-1} p_\alpha \oplus \mathbb{C}[t]/t^{k_{\alpha+1}} p_{\alpha+1} \ldots \oplus \mathbb{C}[t]/t^{k_r} p_r.$$

Notons g^* la restriction de g à Z^*. Alors $\mu(Z^*, g^*) = (k_1^*, \dots, k_r^*)$ avec $k_1^* = \ldots = k_\alpha^* = n - 1$, et $k_i^* = k_i \leq n - 1$ pour $i > \alpha$. En particulier, (Z^*, g^*) vérifie les hypothèses de HR_{n-1}. De plus, $\mathcal{O}_{Z \times E|Z^* \times E}(\Gamma_g - Z \times \{p_0\}) = \mathcal{O}_{Z^* \times E}(\Gamma_{g^*} - Z^* \times \{p_0\})$, de sorte qu'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z \times E}(\Gamma_g - Z \times \{p_0\}) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_{Z^* \times E}(\Gamma_{g^*} - Z^* \times \{p_0\}) \longrightarrow 0,$$

où ϕ est l'application induite par la projection de $\mathcal{O}_Z$ sur $\mathcal{O}_Z/(t^{n-1} \cdot 1) = \mathcal{O}_{Z^*}$.

Lemme 4.2.5 *$V_{Z,g}$ est une extension non triviale de V_{Z^*,g^*} par $(\mathcal{O}_E)^\alpha$.*

Preuve : Pour commencer, remarquons que $H^0(E, V_{Z,g})$ et $H^0(E, V_{Z^*,g^*})$ ont la même dimension r d'après le lemme 4.2.3. Plus précisemment, la preuve de ce lemme montre que $H^0(E, V_{Z,g})$ est engendré par les sections $s_1, \dots, s_r$ définies comme suit. Soit U un voisinage de (a, p_0), et V le complémentaire de (a, p_0), alors $s_{i|U} = (t^{k_i-1} \cdot p_i)\left(\frac{x}{t-x}\right)$ et $s_{i|V} = t^{k_i-1} \cdot p_i$. De même, $H^0(E, V_{Z,g})$ est engendré par les sections $s_1^*, \dots, s_r^*$. De plus, d'après HR_{n-1}, $V_{Z^*,g^*} = \oplus_{i=1}^r I_{k_i^*}$ et s_i^* est une section globale de $I_{k_i^*}$.

Montrons que $\mathcal{I} = (\mathcal{O}_{\{a\} \times E})^\alpha$. Par définition, il est clair que le noyau de ϕ est engendré par les sections $s_1, \dots, s_\alpha$. Soit $s \in \mathcal{O}_{Z \times E}(\Gamma_g - Z \times \{p_0\})$, une section. Alors $s_{|U} \in \mathcal{O}_Z[x]\left(\frac{x}{t-x}\right)$, et il existe une décomposition $s_{|U} = \sum_{i=1}^r \sum_{m=0}^{k_i-1} (t^m \cdot p_i) f_{i,m}(x)\left(\frac{x}{t-x}\right)$. Pour tout $i \geq \alpha$, $(t^m \cdot p_i) f_{i,m}(x)$ est dans l'annulateur de $\{s_1, \dots s_\alpha\}$. De même, pour tout $m \geq 1$, $(t^m \cdot p_i) f_{i,m}(x)$ est dans l'annulateur de $\{s_1, \dots, s_\alpha\}$. De la même façon, $s_{|V} \in \mathcal{O}_Z[x]$, et il existe une décomposition $s_{|V} = \sum_{i=1}^r \sum_{m=0}^{k_i-1} (t^m \cdot p_i) g_{i,m}(x)$. Mais pour tout $i \geq \alpha$ ou $m \geq 1$, $(t^m \cdot p_i) g_{i,m}(x)$ est dans l'annulateur de $\{s_1, \dots, s_\alpha\}$.

Finalement, si s n'est pas dans l'annulateur de ϕ, alors $s_{|U} = \sum_{i=1}^\alpha f_{i,0}(x) p_i \left(\frac{x}{x}\right)$ et $s_{|V} = \sum_{i=1}^\alpha g_{i,0}(x) p_i$. Par recollement, $f_{i,0} = g_{i,0} \in \mathcal{O}_E$ et $\ker(\phi)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}p_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}p_\alpha) \otimes \mathcal{O}_E \cong (\mathcal{O}_{\{a\} \times E})^\alpha$.

Le foncteur $p_{2,*}$ étant exact car p_2 est fini, on obtient la suite exacte suivante.

$$0 \longrightarrow (\mathcal{O}_E)^\alpha \longrightarrow V_{Z,g} \longrightarrow (I_{n-1})^\alpha \bigoplus \oplus_{i=\alpha+1}^r I_{k_i} \longrightarrow 0.$$

Or $H^0(E, V_{Z,g})$ et $H^0(E, V_{Z^*,g^*})$ ont la même dimension r, donc $V_{Z,g}$ est une extension non triviale de V_{Z^*,g^*} par $(\mathcal{O}_E)^\alpha$. □

L'ensemble des extensions de $V_{Z^*,g^*} = (I_{n-1})^\alpha \oplus \bigoplus \oplus_{i=\alpha+1}^r I_{k_i}$ par $(\mathcal{O}_E)^\alpha$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes $H^0(E, V_{Z^*,g^*}) \longrightarrow H^1(E, (\mathcal{O}_E)^\alpha)$. En effet, la suite exacte d'extension induit la suite exacte longue suivante.

$$0 \longrightarrow H^0(E,(\mathcal{O}_E)^\alpha) \xrightarrow{\phi_0} H^0(E,V_{Z,g}) \longrightarrow H^0(E,V_{Z^*,g^*}) \xrightarrow{\delta} H^1(E,(\mathcal{O}_E)^\alpha) \longrightarrow$$

Étant donné que $\dim(H^0(E,V_{Z,g})) = \dim(H^0(E,V_{Z^*,g^*})) = r$ et $\dim(H^1(E,(\mathcal{O}_E)^\alpha)) = \dim(H^0(E,(\mathcal{O}_E)^\alpha)) = \alpha$, la dernière flèche est surjective. De plus, on connaît la flèche $H^0(E,V_{Z,g}) \longrightarrow H^0(E,V_{Z^*,g^*})$ qui envoie $s_1,\dots s_\alpha$ sur 0 et pour $i < \alpha$, $s_i \mapsto s_i^*$. Finalement, comme $s_{\alpha+1}^*,\dots,s_r^*$ engendrent $H^0(E,\oplus_{i=\alpha+1}^r I_{k_i})$, la suite exacte longue se réécrit comme suit.

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^\alpha \longrightarrow \ker(\phi_0) \bigoplus K \xrightarrow{\phi_0}$$
$$H^0(E,(I_{n-1})^\alpha) \bigoplus H^0(E,\oplus_{i=\alpha+1}^r I_{k_i}) \xrightarrow{\delta} \mathbb{C}^\alpha \longrightarrow 0.$$

Ainsi, la restriction de ϕ au complémentaire K de $\ker(\phi_0)$ induit une bijection $K \cong H^0(E,\oplus_{i=\alpha+1}^r I_{k_i})$ et $\delta = \delta_1 + \delta_2$, où le morphisme $H^0(E,(I_{n-1})^\alpha) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{C}^\alpha$ est bijectif et $H^0(E,\oplus_{i=\alpha+1}^r I_{k_i}) \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{C}^\alpha$ est nul. On en déduit que $V_{Z,g}$ est la somme de $\oplus_{i=\alpha+1}^r I_{k_i}$ (extension correspondante au morphisme δ_2) avec une extension non triviale de $(I_{n-1})^\alpha$ par $(\mathcal{O}_E)^\alpha$.

Puis, comme δ_1 est injectif, sa restriction à chaque facteur $H^0(E,I_{n-1}) \longrightarrow \mathbb{C}^\alpha$ est injective, de sorte que l'extension de $(I_{n-1})^\alpha$ par $(\mathcal{O}_E)^\alpha$ est une somme de α extensions non triviales. Nécessairement,

$$V_{Z,g} = (I_n)^\alpha \bigoplus \oplus_{i=\alpha+1}^r I_{k_i} = \oplus_{i=1}^r I_{k_i}.$$

Pour tout $i \in [\alpha+1, r]$, s_i s'identifie avec s_i^*, donc il s'agit bien d'une section globale de I_{k_i}. Puis, la famille $s_1,\dots,s_\alpha$ engendre $\ker(\phi_0)$, et $\ker(\phi_0) = H^0(E,(I_n)^\alpha)$, donc l'hypothèse de récurrence est démontrée au rang n.

□

4.2.3 Exemples

Soit A un schéma projectif lisse et E une courbe elliptique.

Proposition 4.2.6 *Soit Z une N-grappe de A supportée en un point telle que $\mathcal{O}_Z = \mathbb{C}[z]/z^N$. Si $Z \xrightarrow{g} E$ est un morphisme d'image de longueur n, alors il existe α, s entiers tels que $N = (n-1)s + \alpha$ et le fibré associé est le suivant.*

$$V_{Z,g} = (I_n)^\alpha \oplus (I_{n-1})^{s-\alpha}.$$

Preuve : Dans ce cas, $\mathcal{O}_P = \mathbb{C}[x]/x^n \longrightarrow \mathcal{O}_Z = \mathbb{C}[z]/z^N$ est injectif, et quitte à changer z, il envoie x sur z^r. Cela implique que $nr \geq N > (n-1)r$. Il existe donc $1 \leq \alpha \leq r$ tel que $N = r(n-1) + \alpha$, et la décomposition en modules cycliques de $\mathcal{O}_Z$ est

$$\mathcal{O}_Z = (\mathbb{C}[x]/x^n)\cdot 1 \oplus \dots \oplus (\mathbb{C}[x]/x^n)\cdot z^\alpha \oplus (\mathbb{C}[x]/x^{n-1})\cdot z^{\alpha+1} \oplus \dots \oplus (\mathbb{C}[x]/x^{n-1})\cdot z^{r-1}.$$

Ainsi, $\mu(Z,r) = (n,\dots,n,n-1\dots,n-1)$, de sorte qu'en appliquant le théorème 4.2.2, on obtient $V_{Z,g} = (I_n)^\alpha \oplus (I_{n-1})^{r-\alpha}$. □

Le deuxième exemple correspond aux cas que nous rencontrons dans la suite du chapitre.

Proposition 4.2.7 *Supposons que $(Z,g) \in \mathrm{Hilb}^N(A,E)$ est de la forme*

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t,s]/(t^N, t^n - sP(t), t^k s, s^2)) \xrightarrow{g} P = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]/x^n) \subset E,$$

avec $g^\#(x) = t$. Si $P = 0$ et $n = N$, alors $V_{Z,g} = I_N \oplus I_k$. Sinon, soit m la valuation de P. Alors $V_{Z,g} = I_N \oplus I_m$.

Preuve : Supposons que $P = \sum_{i=m}^{k-1} a_i t^i$, avec $a_m \neq 0$. On se ramène au cas où $P = 0$ et $k = m$ en posant $s' = (\sum_{i=m}^{k-1} a_i t^{i-m})s + t^{n-m}$. Puis, si $P = 0$, la décomposition de $\mathcal{O}_Z$ en $\mathcal{O}_P$-modules cycliques est $\mathcal{O}_Z = (\mathbb{C}[x]/x^n)\cdot 1 \oplus (\mathbb{C}[x]/x^m)\cdot s$, d'où le résultat en appliquant le théorème 4.2.2. □

Dans la suite du chapitre, $A = E \otimes Q(\mathrm{R})$ où R est un système de racines irréductible et réduit.

4.3 Le revêtement spectral dans le cas A_n

Soit A, l'hypersurface de E^{n+1} d'équation la somme des coordonnées, et $Z \subset A \times \mathfrak{S}_{n+1}\text{-Hilb}(A)$ la famille universelle du $\mathfrak{S}_{n+1}$-schéma de Hilbert de A. On peut considérer l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur les n premières coordonnées de E^{n+1}. Cette action induit une action sur Z et on obtient par factorisation par le quotient le morphisme de degré $(n+1)$ suivant

$$\overline{Z} = Z/\mathfrak{S}_n \xrightarrow{n+1:1} \mathfrak{S}_{n+1}\text{-Hilb}(A).$$

Par ailleurs, on peut considérer la restriction à A de la projection sur la dernière coordonnée. Ce morphisme factorise par le quotient $\overline{A} = A/\mathfrak{S}_n$. Notons g la composée avec la première projection de Z sur A :

$$\begin{array}{rccc} g : \overline{Z} & \xrightarrow{p_1} & \overline{A} & \longrightarrow E \\ & & (\sum_{i=1}^{n} x_i, x_{n+1}) & \longrightarrow x_{n+1}. \end{array}$$

Soit Γ le graphe de g et $\mathcal{L} = \pi_* \mathcal{O}(\Gamma)$, où $E \times \overline{Z} \xrightarrow{\pi} E \times \mathfrak{S}_{n+1}\text{-Hilb}(A)$. Alors $\mathcal{L}$ est un fibré localement libre de rang $(n+1)$ et Friedman, Morgan et Witten démontrent le résultat suivant.

Théorème 4.3.1 ([FMW97]) *Soit $\mathcal{M}_{SU(n)}$ l'espace de modules de $SU(n)$-fibrés réguliers semi-stables sur E. Alors*

$$\mathcal{M}_{SU(n)} \cong \mathfrak{S}_{n+1} - \mathrm{Hilb}(A) \cong \mathbb{P}^n \ ;$$

et le fibré $\mathcal{L}$ obtenu par la construction spectrale est la famille universelle.

Dans les chapitres précédents, on a étudié le quotient de A par le groupe alterné $\mathfrak{A}_{n+1}$. Dans le cas de la dimension trois, on a vu qu'il est résolu par le $\mathfrak{A}_{n+1}$-schéma de Hilbert de A. Plus généralement, il y a une flèche naturelle

$$\mathfrak{A}_{n+1}\text{-Hilb}(A) \xrightarrow{\phi} \mathfrak{S}_{n+1}\text{-Hilb}(A),$$

morphisme composé du morphisme de Hilbert-Chow $\mathfrak{A}_{n+1}$-équivariant avec le quotient $A/\mathfrak{A}_{n+1} \longrightarrow A/\mathfrak{S}_{n+1}$.

Par ailleurs, la construction spectrale ci-avant se fait de la même façon avec la famille universelle du $\mathfrak{A}_{n+1}$-schéma de Hilbert Z_+. On considère l'action du sous-groupe $\mathfrak{S}_n \cap \mathfrak{A}_{n+1}$ sur Z_+ et on construit de façon analogue $\mathcal{L}_+$ fibré de rang $(n+1)$ sur $E \times \mathfrak{A}_{n+1}$-Hilb$(A)$. On démontre que la famille $\mathcal{L}_+$ de fibrés sur E comprend des fibrés non réguliers, de sorte qu'elle n'est pas le tiré en arrière de $\mathcal{L}$.

4.3.1 Fibré associé à l'unique $\mathfrak{S}_{n+1}$-grappe de A supportée en 0

Soit $\delta \in \mathfrak{S}_{n+1}$-Hilb$(A)$ et $Z_\delta \subset A$ la $\mathfrak{S}_{n+1}$-grappe correspondante. On a vu que $\mathfrak{S}_n$ agit sur Z_δ et que $g : \sum x_i \mapsto x_{n+1}$ factorise par le quotient $\overline{Z_\delta} = Z_\delta/\mathfrak{S}_n$. Notons $\Gamma_\delta \subset E \times \overline{Z_\delta}$ le graphe de g.

Le morphisme $E \times \overline{Z} \xrightarrow{\pi} E \times \mathfrak{S}_{n+1}$-Hilb$(A)$ étant fini, il commute aux changements de bases. Par la construction ci-dessus, on retrouve donc la fibre au-dessus de $E \times \delta$ du diviseur Γ construit en famille.

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma & \hookrightarrow & E \times \overline{Z} & \xrightarrow{\pi} & E \times \mathfrak{S}_{n+1}\text{-Hilb}(A) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma_\delta & \hookrightarrow & E \times \overline{Z_\delta} & \xrightarrow{\pi} & E \times \delta \end{array}$$

Proposition 4.3.2 *Si δ est l'unique $\mathfrak{S}_{n+1}$-grappe supportée par l'origine $(p_0, \ldots, p_0)$ de A, alors le fibré V_δ correspondant est la n-ième extension I_{n+1} de $\mathcal{O}_E$.*

Preuve : Rappelons que la grappe Z_δ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{S}_{n+1}})$, où $R_{\mathfrak{S}_{n+1}}$ est l'algèbre coinvariante de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ relative à l'action de $\mathfrak{S}_{n+1}$. Notons $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}$ les fonctions symétriques élémentaires en les $n+1$ variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$ et $w_1, \ldots, w_n$ les fonctions symétriques élémentaires en les n premières variables.

$$R_{\mathfrak{S}_{n+1}} = \mathbb{C}[x_1, \ldots x_{n+1}]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}).$$

Ainsi, $Z_\delta/\mathfrak{S}_n = \mathrm{Spec}(R^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n+1}}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n, x_{n+1}]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$. Or on a les relations $\sigma_1 = w_1 + x_{n+1}$, $\sigma_2 = w_2 + w_1 x_{n+1}$, …, $\sigma_{n+1} = w_n x_{n+1}$, de sorte que

$$Z_\delta/\mathfrak{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_{n+1}]/x_{n+1}^{n+1}) \xrightarrow{g} P = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]/x^{n+1}) \subset E,$$

avec $g^\#(x) = x_{n+1}$. On déduit alors le résultat d'après la proposition 4.2.6. □

4.3.2 Fibré associé à une $\mathfrak{A}_{n+1}$-grappe de A supportée en 0

L'action de $\mathfrak{A}_n$ sur A est induite par celle de $\mathfrak{S}_n$. On a donc

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n+1}]^{\mathfrak{A}_n} = \mathbb{C}[w_1,\dots,w_n,x_{n+1},\Delta']/({\Delta'}^2 - f(w_1,\dots,w_n)),$$

où Δ' est un générateur des anti-invariants et $f(w_1,\dots,w_n)$ est donné par la formule du discriminant en degré n.

Considérons maintenant Z une $\mathfrak{A}_{n+1}$-grappe au-dessus de l'origine et I l'idéal de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n+1}]$ le définissant. Alors I contient nécessairement $\sigma_1,\dots,\sigma_{n+1}$ et Δ, les générateurs des polynômes invariants sous $\mathfrak{A}_{n+1}$. Ainsi, $Z/\mathfrak{A}_n$ est un quotient de

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[w_1,\dots,w_n,x_{n+1},\Delta']/\sigma_1,\dots,\sigma_{n+1},\Delta,{\Delta'}^2 - f(w_1,\dots,w_n)) = \mathrm{Spec}(R).$$

Les relations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sigma_1 & = & w_1 + x_{n+1} \\ \sigma_2 & = & w_2 + w_1 x_{n+1} \\ & \vdots & \\ \sigma_{n+1} & = & w_n x_{n+1} \\ \Delta & = & (w_n - x_{n+1}w_{n-1} + \ldots + (-1)^n x_{n+1}^n)\Delta' \end{array}\right.$$

impliquent $x_{n+1}^{n+1} \in I^{\mathfrak{A}_n}$, $x_{n+1}^n\Delta' \in I^{\mathfrak{A}_n}$ et ${\Delta'}^2 \in I^{\mathfrak{A}_n}$. Ainsi l'anneau de $Z/\mathfrak{A}_n$ est un quotient de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_{n+1},\Delta']/(x_{n+1}^{n+1}, x_{n+1}^n\Delta', {\Delta'}^2)$. Comme il est de longueur $n+1$, c'est le spectre de $\mathbb{C}[x,\Delta]/I$, où I est un idéal de la forme $(x^{n+1}, x^N - \Delta P(x), x^k\Delta, \Delta^2)$.

En appliquant la proposition 4.2.7, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.3.3 *Si Z est une $\mathfrak{A}_{n+1}$ grappe supportée en $(p_0,\dots,p_0) \in A$, alors le fibré associé par la construction spectrale est de la forme $I_N \oplus I_m$, avec $N+m = n+1$.*

4.3.3 Cas de la dimension 3

On suppose maintenant que $n = 3$, et on reprend les notations du paragraphe 2.3.6. Soit Z une $\mathfrak{A}_4$-grappe au-dessus de l'origine et I l'idéal de $\mathbb{C}[x,y,z]$ le définissant. Alors, d'après le paragraphe 2.3.6, en notant $f = x^2 + jy^2 + j^2z^2$, on a

- $f_2 = w_1^2 - 2w_2 \in I$
- $f_3 = w_3 \in I$,
- $f_4 = w_2^2 - 2w_1w_3 \in I$,
- $\Delta = \Delta'(w_3 - w_1w_2) \in I$
- yzf, xzf et $xyf \in I$,
- tous les monômes de degré supérieur à 5 sont dans I,
- il existe $(a:b) \in \mathbb{P}^1$ tel que $x(af+b\bar{f}) \in I$, $y(aj^2f+bj\bar{f}) \in I$ et $z(ajf+bj^2\bar{f}) \in I$,
- il existe $(a':b') \in \mathbb{P}^1$ tel que $a'\bar{f} + b'f^2 \in I$,
- il existe $(a'':b'') \in \mathbb{P}^1$ tel que $a''f + b''\bar{f}^2 \in I$.

En particulier, le polynôme $\mathfrak{A}_3$-invariant $s_{(a:b)} = x(af+b\bar{f}+y(aj^2f+bj\bar{f})+z(ajf+bj^2\bar{f}) \in I$. Remarquons que $\Delta' = x^2y + y^2z + xz^2 - (xy^2 + yz^2 + x^2z)$ et $w_1w_2 - 3w_3 = x^2y + y^2z + xz^2 - (xy^2 + yz^2 + x^2z)$, de sorte que

$$\begin{aligned} s_{(a:b)} &= (a+b)(w_1^3 - 6w_1w_2 + 12w_3) + \tfrac{(aj+bj^2)}{2}(w_1w_2 - 3w_3 - \Delta') \\ &\quad + \tfrac{(aj^2+bj)}{2}(w_1w_2 - 3w_3 + \Delta') \\ &= (a+b)(w_1^3 - 6w_1w_2 + 12w_3) + \tfrac{1}{2}(a+b)(j+j^2)(w_1w_2 - 3w_3) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(a-b)(j-j^2)\Delta' \\ &= (a+b)(w_1^3 - \tfrac{13}{2}w_1w_2 + \tfrac{27}{2}w_3) + \tfrac{1}{2}(a-b)(j-j^2)\Delta' \end{aligned}$$

Ainsi, si $a \neq b$, c'est à dire si $I \neq I_\Psi(1:1)$, comme $w_3 = f_3 \in I^{\mathfrak{A}_3}$ et $2w_2 - w_1^2 \in I^{\mathfrak{A}_3}$, on a $(a-b)(j^2-j)\Delta' - 5(a+b)w_1^3 \in I^{\mathfrak{A}_3}$, d'où

$$(\mathbb{C}[x,y,z]/I)^{\mathfrak{A}_3} = \mathbb{C}[w_1\Delta']/(w_1^4, (a-b)(j^2-j)\Delta' - 5(a+b)w_1^3) \cong \mathbb{C}[w]/(w^4).$$

Ainsi, $Z/\mathfrak{A}_3 = Z_0/\mathfrak{S}_3$.

En revanche, si $a = b$, alors $s_{(1:1)} = 2w_1^3 - 13w_1w_2 + 27w_3 \in I^{\mathfrak{A}_3}$, et comme $w_3 = f_3 \in I^{\mathfrak{A}_3}$ et $2w_2 - w_1^2 \in I^{\mathfrak{A}_3}$, on en déduit que $w_1^3 \in I^{\mathfrak{A}_3}$. Dans ce cas tous les monômes de degré supérieur à 4 appartiennent à I, et on obtient

$$(\mathbb{C}[x,y,z]/I)^{\mathfrak{A}_3} = \mathbb{C}[w_1\Delta']/(w_1\Delta, {\Delta'}^2, w_1^3).$$

Ainsi, en appliquant la proposition 4.2.7, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.3.4 *Soit $I \in \mathbb{C}[x,y,z]$ un idéal définissant une $\mathfrak{A}_4$-grappe de A, de support $\{4p_0\}$. Si $I \neq I_\Psi(1:1)$, alors le fibré associé à I est I_4, la troisième extension non triviale du fibré trivial sur E. Si $I = I_\Psi(1:1)$, alors c'est la somme directe $I_3 \oplus \mathcal{O}_E$.*

4.4 Le revêtement spectral dans le cas B_n

Soit $Z \subset A \times W(B_n)\text{-Hilb}(A)$ la famille universelle du $W(B_n)$-schéma de Hilbert de $A = E^n$. On peut considérer l'action de $W(B_{n-1}) = \mathfrak{S}_{n-1} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ sur les $n-1$ premières coordonnées de E^n. Cette action induit une action sur Z et on obtient par factorisation par le quotient le morphisme de degré $2n$ suivant

$$\overline{Z} = Z/\mathfrak{S}_n \xrightarrow{2n:1} W(B_n)\text{-Hilb}(A).$$

Considérons le morphisme projection $A \longrightarrow E$ sur le dernier facteur. Ce morphisme factorise par le quotient $\overline{A} = A/W(B_{n-1})$. Notons g la composée avec la projection de Z sur A. Soit Γ le graphe de g, et $\mathcal{L} = \pi_*\mathcal{O}(\Gamma)$, où $E \times \overline{Z} \xrightarrow{\pi} E \times W(B_n)\text{-Hilb}(A)$. Alors $\mathcal{L}$ est un fibré localement libre de rang $2n$ et Friedman, Morgan et Witten démontrent le théorème suivant.

Théorème 4.4.1 ([FMW97]) *Soit $\mathcal{M}_{Sp(2n)}$ l'espace de modules de $Sp(2n)$-fibrés réguliers semi-stables sur E. Alors*

$$\mathcal{M}_{Sp(2n)} \cong W(B_n) - \text{Hilb}(A) \cong \mathbb{P}^n \ ;$$

et le fibré $\mathcal{L}$ obtenu par la construction spectrale est la famille universelle.

Ici également, on peut considérer la construction spectrale relative au sous-groupe $W_+(B_n) \subset W(B_n)$. On démontre que dans le cas $n = 3$, la famille de fibrés sur E indexée par W_+-Hilb(A) obtenue n'est pas exclusivement formée de fibrés réguliers.

4.4.1 Fibré associé à la $W(B_n)$-grappe de A supportée en 0

Comme dans le cas A_n, on va considérer le fibré associé à la grappe supportée en $(p_0, \dots, p_0) \in A$.

Proposition 4.4.2 *Le fibré correspondant à l'unique $W(B_n)$-grappe supportée en l'origine $(p_0, \dots, p_0)$ de A est I_{2n}, la $(2n-1)$-ième extension non triviale de $\mathcal{O}_E$.*

Preuve : On a $Z = \mathrm{Spec}(R_W(B_n))$, où $R_W(B_n)$ est l'algèbre coinvariante relative à l'action de $W(B_n)$ sur A : $R_W(B_n) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(\sigma_i(x_1^2, \dots, x_n^2))_{i=1\dots n}$, où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires en n variables. Alors

$$Z/W(B_{n-1}) = \mathrm{Spec}(R_W(B_n)^{W(B_{n-1})}), \quad \text{et}$$

$$R_W(B_n)^{W(B_{n-1})} = \mathbb{C}[w_1(x_1^2, \dots, x_{n-1}^2), \dots, w_{n-1}(x_1^2, \dots, x_{n-1}^2), x_n]/(\sigma_i(x_1^2, \dots, x_n^2)),$$

où les w_i sont les fonctions symétriques élémentaires en $(n-1)$ variables. D'après les relations entre les σ_i et les w_i, on obtient

$$Z/W(B_{n-1}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_n]/x_n^{2n}) \xrightarrow{g} \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]/x^{2n}) = P \subset E,$$

avec $g^{\#}(x) = x_n$ de sorte que la proposition 4.2.6 donne le résultat. □

4.4.2 Fibré associé à une W_+-grappe de A

Considérons maintenant la construction analogue pour $W_+ \subset W$.

Proposition 4.4.3 *Le fibré correspondant à une W_+ grappe supportée en $(p_0, \dots, p_0)$ est de la forme $I_N \oplus I_k$, où $k + N = 2n$.*

Preuve : Soit Z une grappe supportée en $(p_0, \dots, p_0)$. Il existe un idéal I tel que $Z = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I)$, et on a donc

$$Z/W_+(B_n) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[w_1(x_i^2), \dots, w_{n-1}(x_i^2), x_n, \Delta']/(I^{W_+(B_n)}, \Delta'^2 - f(w_i))).$$

Les relations entre les w_i et x_i, ainsi qu'entre Δ' et Δ, l'anti-invariant en dimension n impliquent que $Z/W_+(B_n)$ est un quotient de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, \Delta]/x^{2n}, x^{2n-1}\Delta, \Delta^2)$. Or $Z/W_+(B_n)$ est de longueur $2n$, donc en appliquant la proposition 4.2.7, on obtient le résultat. □

4.4.3 Cas de la dimension 3

On suppose ici que $n = 3$ et on reprend les notations du paragraphe 2.3.7. Soit Z une $W_+(B_3)$-grappe de $A = E^3$ supportée en (p_0, p_0, p_0), et soit $I \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ l'idéal le définissant. Le quotient $Z/W_+(B_2)$ est le spectre de

$$\mathbb{C}[x, y, z]^{W_+(B_2)}/I^{W_+(B_2)} = \mathbb{C}[g_2, g_4, z, \Delta']/(I^{W_+(B_2)}, \Delta'^2 - f(g_2, g_4)),$$

où $g_2 = x^2 + y^2$, $g_4 = x^2y^2$ et $\Delta' = xy(x^2 - y^2)$.

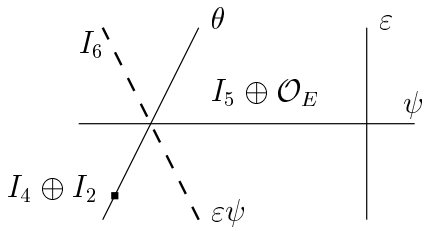
Or on a

- $f_2 = x^2 + y^2 + z^2 = g_2 + z^2 \in I^{W_+(B_2)}$,
- $f_4 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = g_4 + g_2z^2 \in I^{W_+(B_2)}$,
- $f_6 = x^2y^2z^2 = g_4z^2 \in I^{W_+(B_2)}$,
- $\Delta = (zg_4 - z^3g_2 + z^5)\Delta' \in I^{W_+(B_2)}$,
- Il existe un unique $(a_{\varepsilon\psi} : b_{\varepsilon\psi}) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_{\varepsilon\psi}\Delta' + b_{\varepsilon\psi}z^5 \in I^{W_+(B_2)}$,
- Il existe un unique $(a_\theta : b_\theta) \in \mathbb{P}^1$ tel que $a_\theta z^4 + b_\theta z\Delta' \in I^{W_+(B_2)}$
- Ou bien $xyz \in I$, ou bien tous les monômes de degré supérieur à 6 sont dans I. Quoi qu'il en soit, $z^2\Delta' \in I^{W_+(B_2)}$.

Or d'après la preuve de la proposition 2.3.22, $a_{\varepsilon\psi} \neq 0$ si et seulement si $I = I_{\varepsilon\psi}(a_{\varepsilon\psi} : b_{\varepsilon\psi})$, et dans ce cas, tous les monômes de degré supérieur à 6 sont dans I. Puis, si $a_{\varepsilon\psi} = 0$, ce qui implique $z^5 \in I$, alors $b_\theta = 0$ sauf en $I = I_\theta(1 : 0)$. Ainsi, d'après la proposition 4.2.7, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.4.4 *Soit $I \in \mathbb{C}[x, y, z]$ un idéal définissant une $W_+(B_3)$-grappe Z de A de support $\{(p_0, p_0, p_0)\}$.*

- *Si $I = I_{\varepsilon\psi}(a_{\varepsilon\psi} : b_{\varepsilon\psi})$, alors le fibré associé à Z est I_6.*
- *Si $I = I_\theta(1 : 0)$, alors le fibré associé à Z est $I_4 \oplus I_2$*
- *Sinon, c'est la somme directe $I_5 \oplus \mathcal{O}_E$.*



Chapitre 5

La catégorie dérivée G-équivariante $\mathcal{D}^G(X)$

Soit X un schéma projectif lisse sur $\mathbb{C}$, et G un groupe fini agissant sur X. On a déjà observé dans les chapitres précédents que la géométrie G-équivariante de X est un bon outil pour étudier la géométrie du quotient X/G et de ses éventuelles résolutions. En particulier, d'après le théorème de Bridgeland, King et Reid ([BKR01]), on a dans certains cas une équivalence entre la catégorie dérivée G-équivariante de X et la catégorie dérivée d'une résolution crépante de X/G.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la catégorie dérivée G-équivariante de X : $\mathcal{D}^G(X)$. Dans le premier paragraphe, nous la définissons et la décrivons dans les cas de l'action libre et triviale. Dans le deuxième paragraphe, nous donnons une description de la catégorie dérivée G équivariante de l'espace projectif en suivant une méthode de Beĭlinson G-équivariante. Enfin, nous nous intéressons dans le dernier paragraphe à l'écart entre $\mathcal{D}^G(X)$, qui contient des informations sur la géométrie G-équivariante de X et la catégorie dérivée du quotient $\mathcal{D}(X/G)$. Les théorèmes de comparaison que l'on peut obtenir sont des critères de descente au quotient. Déjà, dans [Mum66], Mumford résout la question de la descente d'un faisceau inversible symétrique sur une variété abélienne X, le quotient $K_X = X/ < \iota >$ étant la variété de Kummer associée. Dans [Løn83], Lønsted décrit le groupe $K_G^{\cdot}(X)$ en fonction de $K^{\cdot}(X/G)$, lorsque G agit sur une courbe projective lisse X de telle façon que $X/G \cong \mathbb{P}^1$.

On note $\pi : X \longrightarrow X/G$ le morphisme quotient. Les foncteurs adjoints suivant apparaissent alors naturellement.

$$\pi_*^G : \mathcal{D}^{-,G}(X) \longrightarrow \mathcal{D}^-(X/G)$$

$$\mathbf{L}\pi^* : \mathcal{D}^-(X/G) \longrightarrow \mathcal{D}^{-,G}(X).$$

Remarquons que le foncteur π_*^G est exact car π est affine et par hypothèse, l'ordre de G est inversible dans le corps de base.

Dans le cas particulier où X/G est lisse sur $\mathbb{C}$, π est plat donc π^* est également exact. Il envoie alors $\mathcal{D}(X/G)$ dans $\mathcal{D}^G(X)$. D'après le théorème de Chevalley, Shephard et Todd, une orbifold complexe (voir définition C.1.5) X/G est lisse si et seulement si

pour tout $x \in X$, le sous-groupe d'orbifold G_x est engendré par des pseudo-réflexions ([Bou81]). Dans ce cas, d'après le théorème 1.6.9, le G-schéma de Hilbert G-Hilb(X) et le quotient X/G coïncident. Ainsi, le foncteur de Fourier-Mukai $\mathcal{D}(X/G) \longrightarrow \mathcal{D}^G(X)$ défini dans [BKR01] (voir théorème 3.3.1) est le foncteur π^*.

Le résultat principal de ce chapitre est un critère donnant l'obstruction pour un complexe de faisceaux G-équivariants à descendre en un complexe de faisceaux sur le quotient(théorème 5.3.8). Il généralise le théorème de Lønsted en K-théorie G-équivariante sur des courbes ([Løn83]) et est à rapprocher d'un résultat de Nevins ([Nev02]) dans le cas des groupes algébriques réductifs.

Soit E une courbe elliptique, R un système de racines et $Q(\mathrm{R})$ le réseau engendré par R. Le but de cette étude est d'arriver à une preuve homologique du théorème de Looijenga (théorème 3.0.3), en utilisant ce critère de descente pour identifier la catégorie dérivée du quotient $\mathcal{D}((E \otimes Q(\mathrm{R}))/W(\mathrm{R}))$ avec la catégorie dérivée d'un espace projectif avec poids.

Notations

Pour le langage des catégories dérivées, on renvoie aux notes de Hartshorne ([Har66]). Rappelons tout de même quelques notations.

Pour tout schéma Y, la catégorie $\mathcal{D}^-(Y)$ (respectivement $\mathcal{D}(Y)$) est la catégorie dérivée des faisceaux quasi-cohérents sur Y, restreinte aux complexes bornés supérieurement (respectivement bornés) et à homologies cohérentes.

$$\mathcal{D}^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}^*_{\mathrm{Coh}}(\mathrm{Qco}).$$

Les catégories G-Coh(X) et G-Qco(X) sont les catégories dont les objets sont les faisceaux cohérents (respectivement quasi-cohérents) G-linéarisés et les morphismes sont les morphismes de G-faisceaux. Ces catégories sont abéliennes et G-Qco(X) a assez d'injectifs (cf [Gro57]). Si G agit sur X, la catégorie $\mathcal{D}^{-,G}(X)$ (respectivement $\mathcal{D}^G(X)$)) est la catégorie dérivée des G-faisceaux quasi-cohérents sur X restreinte aux complexes bornés supérieurement (respectivement bornés) et à homologies cohérentes.

$$\mathcal{D}^{*,G}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}^{*,G}_{G\text{-Coh}}(G\text{-Qco}).$$

Pour toute catégorie de complexes $\mathcal{D}$, on notera $\mathcal{D}^*$ lorsqu'on ne veut pas préciser si on considère la catégorie des complexes bornés supérieurement ou bornés.

Dans tout le chapitre, on peut remplacer $\mathbb{C}$ par un corps k algébriquement clos, dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de G.

5.1 La catégorie dérivée bornée G-équivariante

5.1.1 Une équivalence de catégories

Pour décrire la catégorie dérivée G-équivariante, on va voir qu'il suffit de connaître la sous-catégorie pleine dont les objets sont des complexes de faisceaux cohérents localement libres. Rappelons que $H^s_G(X,F)$ (respectivement $\mathrm{Ext}^s_G(A,B)$) désigne le s-ième

groupe de cohomologie G-équivariante du G-faisceau F sur X (respectivement le Ext G-équivariant). Il existe une suite spectrale de terme initial $E_{p,q}^2 = H^p(G, H^q(X,F))$ qui converge vers $H_G^{p+q}(X,F)$ (voir [Gro57]). Sous nos hypothèses, il n'y a pas de cohomologie des groupes, de sorte que d'après cette suite spectrale, on obtient $H_G^s(X,F) = H^s(X,F)^G$.

Lemme 5.1.1 *Si X est un G-schéma de dimension n lisse sur $\mathbb{C}$, alors la catégorie G-Coh(X) est de dimension homologique inférieure à n. C'est à dire, pour tout couple de G-faisceaux cohérents (A,B) et pour tout entier $s > n$, $\mathrm{Ext}_G^s(A,B) = 0$.*

Preuve : La suite spectrale de terme initial $\mathrm{E}_2^{p,q} = H_G^p(X, \mathscr{E}xt^q(A,B)$ converge vers $\mathrm{Ext}_G^{p+q}(A,B)$. Or, par théorème d'annulation de Grothendieck, $H^p(X, \mathscr{E}xt^q(A,B)) = 0$ dès que p est un entier strictement supérieur à $\dim(\mathrm{Supp}(\mathscr{E}xt^q(A,B)))$. Ainsi, $\mathrm{E}_2^{p,q} = H^p(X, \mathscr{E}xt^q(A,B))^G = 0$ pour $p > \dim(\mathrm{Supp}(\mathscr{E}xt^q(A,B)))$.

Supposons maintenant que $\mathscr{E}xt^q(A,B)$ est non nul et majorons la dimension d de son support. Soit x un point générique de $\mathscr{E}xt^q(A,B)$. Alors $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau régulier de dimension inférieure à $n-d$ et la fibre $\mathscr{E}xt^q(A,B)_x = \mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_{X,x}}(A_x, B_x)$ est un $\mathscr{O}_{X,x}$-module non nul. Or la dimension homologique de la catégorie des $\mathscr{O}_{X,x}$-module est inférieure à la dimension de $\mathscr{O}_{X,x}$, donc la non-nullité de $\mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_{X,x}}(A_x, B_x)$ implique $q \leq n-d$.

Finalement, pour que $\mathrm{E}_2^{p,q} = H_G^p(X, \mathscr{E}xt^q(A,B))$ soit non nul, il est nécessaire d'avoir $p+q \leq n$. En particulier, pour tout entier $s > n$, $\mathrm{Ext}_G^s(A,B) = 0$. □

Théorème 5.1.2 *Soit X un schéma projectif lisse et soit G un groupe fini agissant sur X. Soit $\mathscr{L} \subset G$-Coh$(X))$ la sous-catégorie pleine des G-faisceaux cohérents localement libres sur X et $\mathscr{M} \subset \mathcal{D}^G(X)$ (respectivement $\mathscr{M}^- \subset \mathcal{D}^{-,G}(X)$) la sous-catégorie pleine des complexes de faisceaux dans $\mathscr{L}$. On a les équivalences de catégories*

$$\mathscr{M} \simeq \mathcal{D}^G(X),$$

$$\mathscr{M}^- \simeq \mathcal{D}^{-,G}(X).$$

Preuve : Comme on a imposé dans la définition que $\mathscr{M}^*$ soit une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}^{*,G}(X)$, il suffit de démontrer que tout objet de $\mathcal{D}^{*,G}(X)$ est quasi-isomorphe à un objet de $\mathscr{M}$. Dans un premier temps, on rappelle que tout G-faisceau cohérent admet une résolution localement libre finie. Ce résultat de Thomason est classique, mais on le redémontre ici à défaut d'une référence satisfaisante (lemme 5.1.3). On applique alors un résultat de Hartshorne (lemme 5.1.4) qui démontre le cas borné supérieurement, et on en déduit le cas borné.

Lemme 5.1.3 *Soit G un groupe fini, et soit X un G-schéma projectif lisse sur $\mathbb{C}$. Tout G-faisceau cohérent admet une résolution finie par des G-faisceaux localement libres de type fini.*

Preuve : On a démontré dans la preuve de la proposition 1.2.4 qu'il existe un faisceau très ample G linéarisé sur X. Notons M ce faisceau. Soit F un G-faisceau cohérent sur

X. Par théorème, il existe un entier n tel que $F \otimes M^{\otimes n}$ est engendré pas ses sections globales. Alors G agit naturellement sur $\Gamma(X, F \otimes M^{\otimes n})$ et le morphisme de G-faisceaux :

$$\mathscr{O}_X \otimes \Gamma(X, F \otimes M^{\otimes n}) \longrightarrow F \otimes M^{\otimes n}$$

$$a \otimes s \longrightarrow as$$

est surjectif. D'où la surjection

$$\Gamma(X, F \otimes M^{\otimes n}) \otimes M^{\otimes(-n)} \longrightarrow F.$$

En répétant autant de fois que nécessaire ce procédé en remplaçant F par le noyau de ce morphisme, on obtient une résolution de F par des G-faisceaux cohérents localement libres. Or d'après le lemme 5.1.1, la catégorie G-Coh(X) est de dimension homologique finie, donc cette itération s'arête et F admet une résolution libre finie par des objets de $\mathscr{L}$. □

On utilise maintenant le lemme [Har66, I.4.6] et la proposition [Har66, I.4.8] de Hartshorne qui s'expriment dans ce contexte comme suit.

Lemme 5.1.4 *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Soit $\mathcal{L}$ un sous-ensemble d'objets de $\mathcal{A}$ tel que pour tout objet A de $\mathcal{A}$ il existe $L \in \mathcal{L}$ se projetant sur A. Alors pour tout complexe $A^{\cdot}$ borné supérieurement d'objets de $\mathcal{A}$, il existe un complexe borné supérieurement d'objets de $\mathscr{L}$ quasi-isomorphe à $A^{\cdot}$.*

Proposition 5.1.5 *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{A}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$. Si pour tout objet A de $\mathcal{A}'$ il existe un objet $\mathcal{A}$-projectif appartenant à $\mathcal{A}'$ se projetant A, alors on a l'équivalence de catégories*

$$\mathcal{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{D}^-(\mathcal{A}').$$

En appliquant cette proposition à $\mathcal{A}' = G\text{-Coh}(X) \subset G\text{-Qco}(X) = \mathcal{A}$, comme le lemme 5.1.3 démontre en particulier que les hypothèses de la proposition sont vérifiées, on obtient l'équivalence

$$\mathcal{D}^{-,G}(X) \simeq \mathcal{D}^-(G\text{-Coh}(X)).$$

On peut donc supposer que F est un complexe borné supérieurement de G-faisceaux cohérents. D'après le lemme 5.1.3, les hypothèses de lemme 5.1.4 sont vérifiées. Ainsi, il existe un complexe borné supérieurement L d'objets de $\mathscr{L}$ quasi-isomorphe à F. On a bien démontré l'équivalence

$$\mathcal{D}^{-,G}(X) \simeq \mathscr{M}^-.$$

Supposons maintenant que F est borné. L'objet donné par le lemme 5.1.4 est construit par récursivité sur le degré de la façon suivante : Si L^0, L^{-1}, $\ldots L^{-n}$ sont construits, on choisit L^{-n-1} comme étant un objet de $\mathscr{L}$ admettant une surjection vers

$$\ker(L^{-n} \longrightarrow L^{-n+1}) \times^{F^{-n}} F^{-n-1}.$$

Or, pour n assez grand, F^{-n} est nul. Soit m est le plus petit entier tel que $F^m \neq 0$. Par construction, le complexe L est une résolution de $\ker(L^m \longrightarrow L^{m+1})$ par des objets de

$\mathcal{L}$ en degrés inférieurs à m. En particulier, G-Coh(X) étant de dimension homologique finie, on peut choisir cette résolution finie.

On a donc bien construit un complexe $L \in \mathscr{M}$ qui est quasi-isomorphe à F, d'où l'équivalence

$$\mathcal{D}^G(X) \simeq \mathscr{M}.$$

□

5.1.2 Cas d'une action libre

Dans le cas où l'action de G est libre sur X, on trouve dans [Mum74, p.70] la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 5.1.6 *Lorsque G agit librement sur un schéma X de façon à ce que X soit G-admissible, les foncteurs π_*^G : G-Coh$(X) \longrightarrow$ Coh(X/G), qui envoie un G-faisceau sur la partie G-invariante de son image directe par π, et π^* : Coh$(X/G) \longrightarrow G$-Coh(X) induisent une équivalence de catégories :*

$$G\text{-Coh}(X) \simeq \text{Coh}(X/G).$$

Si de plus X est lisse sur $\mathbb{C}$, alors le quotient l'est également et on en déduit le résultat suivant.

Proposition 5.1.7 *Si G agit librement sur un schéma X lisse sur $\mathbb{C}$, le foncteur*

$$\pi^* : \mathcal{D}(X/G) \longrightarrow \mathcal{D}^G(X)$$

est une équivalence de catégories.

Preuve : Il s'agit de démontrer que π^* est essentiellement surjectif. Soit $F \in \mathcal{D}^G(X)$. On démontre par récurrence sur l'amplitude homologique de F qu'il existe $E \in \mathcal{D}(X/G)$ tel que $\pi^*(E)$ est quasi-isomorphe à F.

Si F est de dimension homologique nulle, c'est la proposition 5.1.6. Si F est de dimension homologique n, on peut supposer que $H^i(F) = 0$ si $i \notin [0, n]$. Considérons alors le triangle

$$\ker(\partial^0) \longrightarrow F \longrightarrow \sigma_{>0}F,$$

où $\ker(\partial^0)$ est vu comme complexe concentré en degré zéro et

$$\sigma_{>0}F = \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{im}(\partial^0) \longrightarrow F^1 \longrightarrow F^2 \longrightarrow \ldots,$$

de telle sorte que $\sigma_{>0}F$ est de dimension homologique $n-1$.

On se ramène ainsi à démontrer le lemme suivant.

Lemme 5.1.8 *Soient E un faisceau cohérent sur X/G et F un objet de $\mathcal{D}(X/G)$. On peut considérer E comme étant un complexe concentré en degré 0. Si $\alpha : \pi^*F \longrightarrow \pi^*E$ est un morphisme dans $\mathcal{D}^G(X)$, alors $\alpha = \pi^*\beta$ pour un certain morphisme $\beta \in \mathcal{D}(X/G)$.*

Preuve : D'après le théorème 5.1.2 on peut remplacer F par un complexe L de faisceaux localement libres et par exactitude de π^*, π^*L est alors une résolution de π^*F. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} H^i(\mathscr{H}om(\pi^*F, \pi^*E)) &= H^i(\mathscr{H}om(\pi^*L, \pi^*E)) \\ &= \mathscr{E}xt^i(\pi^*L, \pi^*E) \\ &= 0, \text{ pour i} \neq 0, \end{aligned}$$

car π^*L est localement libre. On est donc ramené à des morphismes de faisceaux et on peut utiliser la proposition 5.1.6 :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\pi^*F, \pi^*E) &= \mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathrm{Coh}(X)}(\pi^*L^0, \pi^*E) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}(X/G)}(L^0, E) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(X/G)}(L, E) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(X/G)}(F, E). \end{aligned}$$

□□

Remarque : La proposition 5.1.7 est une généralisation d'un résultat de Bridgeland et Maciocia dans le cas d'un groupe cyclique ([BM98, proposition 2.5]). Ils démontrent en effet que si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ agit librement sur un schéma X lisse sur $\mathbb{C}$, alors un objet F de la catégorie dérivée $\mathcal{D}(X)$ se descend en un objet de $\mathcal{D}(X/G)$ si et seulement si il existe un isomorphisme $g^*F \cong F$, où g est un générateur de G. Dans le cas d'un groupe cyclique c'est équivalent à dire que F est G-linéarisé, c'est à dire $F \in \mathcal{D}^G(X)$.

5.1.3 Cas de l'action triviale

Supposons maintenant que le groupe G agit trivialement sur le schéma X. Cela ne nous empêche pas de définir la catégorie des G-faisceaux, ni a fortiori la catégorie dérivée $\mathcal{D}^{*,G}(X)$. Nous allons voir que dans ce cas, cette catégorie se décompose en le sens suivant :

Définition 5.1.9 *On dit qu'une catégorie additive $\mathscr{A}$ se décompose en $\oplus\mathscr{A}_i$ si pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$, il existe $A_i \in \mathscr{A}_i$ tels que $A = \oplus A_i$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_i, A_j) = 0$ si $i \neq j$.*

Lemme 5.1.10 *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne qui se décompose en $\mathscr{A} = \oplus_{i\in I}\mathscr{A}_i$, où I est fini. Supposons que $\mathscr{A}$ admet assez de projectifs. Alors la catégorie dérivée $\mathcal{D}^-(\mathscr{A})$ se décompose en $\oplus_{i\in I}\mathcal{D}^-(\mathscr{A}_i)$. Si de plus $\mathscr{A}$ et chaque $\mathscr{A}_i$ sont de dimension homologique finie, alors $\mathcal{D}(\mathscr{A})$ se décompose en $\oplus_{i\in I}\mathcal{D}(\mathscr{A}_i)$.*

Preuve : Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}^-(\mathscr{A}))$. On peut clairement écrire $X = \oplus X_i$ où chaque complexe X_i est formé d'objets de $\mathscr{A}_i$. Soient maintenant X_i et X_j des complexes formés respectivement d'objets de $\mathscr{A}_i$ et $\mathscr{A}_j$. Soit P un complexe borné supérieurement formé de projectifs et quasi-isomorphe au complexe X_j. On peut écrire P comme une somme de complexes $P = \oplus P_i$ où chaque complexe P_i est formé d'objets de $\mathscr{A}_i$. De plus, les objets formant les complexes P_i sont également projectifs, car facteur direct d'un objet projectif ; et la flèche $P \longrightarrow X_j$ se réduit à $P_j \longrightarrow X_i$, les autres flèches étant nulles. Il existe donc un complexe P_j formé d'objets projectifs de $\mathcal{A}_j$ qui est quasi-isomorphe à X_j. Ainsi,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-(\mathscr{A})}(X_i, X_j) = \mathrm{Hom}_{K^-(\mathscr{A})}(X_i, P_j) = 0.$$

On a bien une décomposition de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^-(\mathscr{A})$. Dans le cas borné, la même preuve s'applique. □

On applique ce lemme à la catégorie G-Qco(X) des G-faisceaux quasi-cohérents sur X, dans le cas où G agit trivialement sur X.

Proposition 5.1.11 *Si G agit trivialement sur le schéma X, on a une décomposition de G-Qco(X) suivant les représentations irréductibles de G, dont chaque facteur est isomorphe à* Qco(X) *: tout G-faisceau se décompose en une somme directe $\oplus_{\rho\in \mathrm{Irr}(G)} E_\rho \otimes \rho$, où les E_ρ sont des faisceaux quasi-cohérents sur X (sans action de G).*

Preuve : Pour commencer, démontrons la décomposition pour les G-faisceaux cohérents. Le cas quasi-cohérent s'en déduira par limite inductive. Pour tout ρ, représentation irréductible de G, et pour tout G-faisceau cohérent F, notons

$$F_\rho = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X - G}(\mathscr{O}_X \otimes \rho, F).$$

F_ρ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent (sans action de G) et on a un morphisme naturel

$$\begin{aligned} \oplus_{\rho\in \mathrm{Irr}(G)}(F_\rho \otimes \rho) &\xrightarrow{\varphi} F \\ f \otimes v &\longrightarrow f(1 \otimes v). \end{aligned}$$

Montrons que φ est un isomorphisme.

Dans un premier temps, supposons F localement libre. Alors le problème étant local, on peut se placer sur un ouvert où F est libre et alors pour toute représentation ρ irréductible de G, F_ρ est libre. Sur chaque fibre φ est un morphisme de $(G\text{-}\mathscr{O}_{X,x})$-modules libres de type fini qui est un isomorphisme lorsqu'on passe au quotient par l'idéal maximal. En effet, cette décomposition est connue pour les représentation linéaires de dimension finie. D'après le lemme de Nakayama, φ induit donc un isomorphisme sur chaque fibre. Cela implique que φ est un isomorphisme.

Maintenant, soit F un G-faisceau cohérent quelconque et soit $L_1 \to L_0 \to F \to 0$ une présentation libre de F. Si on applique le foncteur $F \longrightarrow \oplus_{\rho\in \mathrm{Irr}(G)}(F_\rho \otimes \rho)$ à cette suite exacte, on obtient une suite exacte car le foncteur $F \longrightarrow F_\rho$ est exact à droite. En effet, $\mathscr{O}_X \otimes \rho$ est un $(\mathscr{O}_X\text{-}G)$-module projectif car il est libre. Puis, d'après le lemme des cinq, on obtient l'isomorphisme pour le faisceau F, et la proposition est démontrée pour les faisceaux cohérents..

Montrons maintenant la décomposition dans le cas quasi-cohérent. Soit F un G-faisceau quasi-cohérent. Localement, F est un $(A\text{-}G)$-module. Montrons qu'il est limite inductive de $(A\text{-}G)$-modules de type fini. Comme G est fini, pour tout $x \in F$, x appartient à un sous-$(A\text{-}G)$-module de type fini, par exemple celui engendré par les éléments de l'orbite de x. On a donc bien : $F = \mathrm{limind}(M)$, pour M sous-$(A\text{-}G)$-module de type fini. On écrit alors $F = \mathrm{limind}(\oplus M_\rho \otimes \rho)$, et comme une somme directe est une limite inductive sur une catégorie discrète, limite inductive et somme directe commutent, de sorte que l'on a $F = \oplus_{\rho\in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{limind}(M_\rho) \otimes \rho$ qui est bien une décomposition de la forme attendue. Le caractère fonctoriel de la construction locale assure que les modules ainsi obtenus se recollent pour former des faisceaux de $(\mathscr{O}_X\text{-}G)$-modules F_ρ tels que

$$F = \oplus_{\rho\in \mathrm{Irr}(G)} F_\rho \otimes \rho.$$

□

Les hypothèses du lemme 5.1.10 étant vérifiées, on a une décomposition de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^*(G\text{-Qco}(X))$, qui par restriction aux complexes de faisceaux à homologie cohérente donne :

Corollaire 5.1.12 *Si G agit trivialement sur le schéma X, on a une décomposition*

$$\mathcal{D}^{*,G}(X) = \oplus_{\rho\in \mathrm{Irr}(G)} \mathcal{D}^{*,\rho}(X),$$

où pour tout ρ, le foncteur $\mathcal{D}^*(X) \xrightarrow{\otimes\rho} \mathcal{D}^{*,\rho}(X)$ est une équivalence de catégories. Ainsi, un objet $F \in \mathcal{D}^{*,G}(X)$ est image réciproque d'un objet de $\mathcal{D}^*(X/G) = \mathcal{D}^*(X)$ si et seulement si il appartient à la composante $\mathcal{D}^{*,\rho_0}(X)$ correspondante à la représentation triviale de G.

5.2 Théorème de Beĭlinson G-équivariant

Soit $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathfrak{V})$ où $\mathfrak{V}$ est un espace vectoriel de dimension $(n+1)$. Soit $S = S(\mathfrak{V})$ l'algèbre symétrique sur $\mathfrak{V}$ et $\Lambda = \Lambda(\mathfrak{V})$ l'algèbre extérieure. On cherche une description de la catégorie dérivée bornée G-équivariante $\mathcal{D}(\mathbb{P}^n)$ des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}^n$ en termes de modules sur Λ ou sur S.

Pour $A = S$ ou Λ, notons $M_A^G([0,n])$ la catégorie des $(A\text{-}G)$-modules gradués, libres et de type fini dans la catégorie des A-modules, dont les générateurs sont de degrés compris entre 0 et n. Soit $K_A^G([0,n])$ la catégorie triangulée des complexes d'objets de $M_A^G([0,n])$ à homotopie près. Comme dans l'article [Beĭ79] de Beĭlinson pour décrire la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathbb{P}^n)$ on construit des foncteurs

$$F_A : K_A^G([0,n]) \longrightarrow \mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n).$$

Dans ce paragraphe, nous adaptons la démarche de Beĭlinson pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.2.1 *Les foncteurs F_S et F_Λ sont des équivalences de catégories.*

Pour démontrer chacune de ces deux équivalences, on va mettre en bijection des objets des deux catégories, qui forment des familles génératrices au sens suivant : La plus petite sous-catégorie triangulée pleine de $K_A^G([0,n])$ (respectivement $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$) contenant cette classe d'objet est la catégorie entière. Rappelons alors le lemme utile suivant sur lequel s'appuie la preuve de Beĭlinson (voir [Beĭ79] pour l'énoncé, et par exemple [Hap87] pour une preuve).

Lemme 5.2.2 *Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories triangulées, et $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un foncteur triangulé. Si X_i est une famille génératrice d'objets de $\mathscr{C}$ telle que $F(X_i)$ est une famille génératrice de $\mathscr{D}$, si pour tout (i,j) et pour tout l :*

$$F : \mathrm{Hom}^l(X_i, X_j) \longrightarrow \mathrm{Hom}^l(F(X_i), F(X_j))$$

est un isomorphisme, alors F est une équivalence de catégorie.

Pour appliquer ce lemme, il suffit donc de déterminer une famille génératrice $\{X_i\}$ de $K_A^G([0,n])$ et un foncteur $F : K_A^G([0,n]) \longrightarrow \mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$ vérifiant les hypothèses et tel que $\{F(X_i)\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$.

5.2.1 Théorème de structure des (A-G)-modules libres gradués de type fini sur une $\mathbb{C}$-algèbre graduée A de type fini

Dans ce paragraphe, A est une $\mathbb{C}$-algèbre graduée sur laquelle agit un groupe fini G. Un (A-G)-module gradué est un (A-G)-module gradué en tant que A-module et tel que l'action de G respecte le degré.

Proposition 5.2.3 *Soit M un (A-G)-module gradué libre de type fini sur A dont les générateurs sont de degrés compris entre 0 et n. Alors il existe des représentations $V_\alpha \in R(G)$ telles que*

$$M = \oplus_{\alpha=0}^{n} V_\alpha \otimes A(-\alpha),$$

où $A(-\alpha)$ est l'anneau gradué obtenu en décalant la graduation de A de α : $A(-\alpha)_i = A_{i-\alpha}$

Preuve : Soit $\{e_i, i \in I\}$ une famille de générateurs de M. On peut partitionner I en $\sqcup_{\alpha\in[O,n]} I_\alpha$ de telle sorte que pour tout $i \in I_\alpha$, le générateur e_i soit de degré α. Pour tout g dans G et pour tout α, si $i \in I_\alpha$ alors $g \cdot e_i$ est de degré α, donc :

$$g \cdot e_i = \sum_{j\in I_\alpha} r_{j,i} e_j + \sum_{j\in I_{\alpha-1}} r_{j,i} e_j + \ldots + \sum_{j\in I_0} r_{j,i} e_j$$

où $r_{j,i}$ est de degré $\alpha - \deg(e_j)$. Il s'agit de démontrer que l'on peut choisir la base $\{e_i\}_{i\in I}$ telle que pour tout g dans G, pour tout α, et pour tout $i \in I_\alpha$,

$$g \cdot e_i = \sum_{j\in I_\alpha} r_{j,i} e_j.$$

Soient $\alpha_0 = \max\{\alpha \mid I_\alpha \neq 0\}$, $J = \sqcup_{\alpha<\alpha_0} I_\alpha$ et $N = \oplus_{j\in J} A e_j$. Pour tout $g \in G$, $g \cdot N \subset N$, de sorte que N est un sous-(A-G)-module de M.

On va démontrer qu'il existe un sous-(A-G)-module gradué N' de M, dont les générateurs sont de degré α_0 et tel que $M = N \oplus N'$.

Le A-module M peut être vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, car A est une $\mathbb{C}$-algèbre graduée ($A_0 = \mathbb{C}$). Comme la caractéristique du corps de base ne divise pas l'ordre du groupe G, les représentations de dimension finie de G sont semi-simples. Or en tant que représentation de G, $M = \oplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$, où M_n est la partie de M de degré n :

$$M_n = \oplus_{\alpha\leq n} \oplus_{i\in I_\alpha} A_{n-\alpha} e_i.$$

Comme M est de type fini sur A, I_α est fini, et chaque A_i étant une représentation de dimension finie de G, M_n est une représentation de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Remarquons que M_n est stable par G car l'action respecte la graduation). Ainsi, en tant que somme directe de représentations semi-simples, M est semi-simple.

En particulier, la suite exacte de ($\mathbb{C}$-G)-modules

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

est scindée. Ainsi, la (A-G)-base $\{\bar{e}_i, i \in I_{\alpha_0}\}$ de M/N se relève en $\{e'_i, i \in I_{\alpha_0}\}$ dans M, de telle façon que $g \cdot e'_i = \sum_{j\in I_{\alpha_0}} r_{j,i} e'_j$. Le A-module engendré par la famille $\{e'_i, i \in I_{\alpha_0}\}$

est donc un sous-(A-G)-module de M. Cependant, il n'est pas gradué a priori. On a pour tout $i \in I_{\alpha_0}$,

$$e'_i = e_i + \sum_{j \in J} \lambda_{i,j} e_j.$$

Posons

$$e''_i = [e'_i]_{\alpha_0} = e_i + \sum_{\alpha < \alpha_0} \sum_{j \in I_\alpha} [\lambda_{i,j}]_{\alpha_0 - \alpha} e_j.$$

Pour tout $i \in I_{\alpha_0}$, e''_i est un antécédent de $\bar{e}_i \in M/N$ de degré α_0 et on a :

$$\begin{array}{rcll} g \cdot e''_j & = & g \cdot [e'_i]_{\alpha_0} & \\ & = & [\sum_{j \in I_{\alpha_0}} r_{j,i} e'_j]_{\alpha_0} & \\ & = & \sum_{j \in I_{\alpha_0}} r_{j,i} [e'_j]_{\alpha_0} & \text{(les } r_{j,i} \text{ sont de degré nul)} \\ & = & \sum_{j \in I_{\alpha_0}} r_{j,i} e''_j. & \end{array}$$

Soit N' le A-module engendré par la famille $\{e''_i, i \in I_{\alpha_0}\}$. Alors N' est un sous-(A-G)-module de M supplémentaire de N. De plus, on a $N' = V_{\alpha_0} \otimes A(-\alpha_0)$ où $V_{\alpha_0} = \oplus_{i \in I_{\alpha_0}} \mathbb{C} e_i$ est la représentation de G de dimension finie définie par l'action de G sur la base $\{e''_1, i \in I_{\alpha_0}\}$. En effet, $A(-\alpha_0)$ est le module libre de dimension 1 sur A avec un générateur en degré α_0.

On peut recommencer le raisonnement en remplaçant M par N. Par récurrence descendante sur le degré maximal des générateurs de M, on obtient le résultat :

$$M = \oplus_{\alpha=0}^n V_\alpha \otimes A(-\alpha).$$

□

Remarque : On pourrait aussi décomposer M/A_+M en représentations irréductibles

$$M/A_+M = \oplus_\alpha V_\alpha(-\alpha) \ ;$$

puis, appliquer le lemme de Nakayama gradué à des relèvements des $V_\alpha(-\alpha)$ dans M.

5.2.2 Démonstration du théorème 5.2.1

D'après la proposition 5.2.3, la famille $\{V \otimes A(-i), V \in \mathrm{Irr}(G), i \in [0,n]\}$ engendre la catégorie $M_A^G([0,n])$. Si on la considère comme une famille de complexes (où les faisceaux sont vus comme des complexes concentrés en degré nul), cette famille engendre la catégorie triangulée $K_A^G([0,n])$.

Considérons le foncteur additif suivant.

$$F_A : \qquad M_A^G([0,n]) \longrightarrow G\text{-Coh}(\mathbb{P}^n)$$

$$M = \oplus_{\alpha=0}^n V_\alpha \otimes A(-\alpha) \longrightarrow \begin{cases} \oplus_{\alpha=0}^n V_\alpha \otimes \mathscr{O}(-\alpha) \text{ si } A = S \\ \oplus_{\alpha=0}^n V_\alpha \otimes \Omega^\alpha(\alpha) \text{ si } A = \Lambda \end{cases}$$

Il se prolonge à la catégorie triangulée des complexes $K_A^G([0,n])$, et quitte à composer avec le foncteur de localisation, on peut voir F comme étant un foncteur de $K_A^G([0,n])$ dans $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$. Le lemme 5.2.5 est la version G-équivariante du lemme classique ci après.

Lemme 5.2.4 ([BGG79]) *Pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et n,*

1. $\mathrm{Hom}^l_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^n)}(\mathscr{O}(-i),\mathscr{O}(-j)) = \begin{cases} O \text{ si } l \neq 0 \\ S_{i-j} \text{ sinon.} \end{cases}$
2. *(Théorème de Bott)*
$\mathrm{Hom}^l_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^n)}(\Omega^i(i),\Omega^j(j)) = \begin{cases} O \text{ si } l \neq 0 \\ \Lambda_{i-j} \text{ sinon.} \end{cases}$

Lemme 5.2.5 *Pour tout triplet (V,W,l), on a*

$$\mathrm{Hom}^l_{K^G_S([0,n])}(V\otimes S(-i), W\otimes S(-j)) \cong \mathrm{Hom}^l_{\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)}(V\otimes\mathscr{O}(-i), W\otimes\mathscr{O}(-j)),$$

$$\mathrm{Hom}^l_{K^G_\Lambda([0,n])}(V\otimes \Lambda(-i), W\otimes\Lambda(-j)) \cong \mathrm{Hom}^l_{\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)}(V\otimes\Omega^i(i), W\otimes\Omega^j(j)).$$

Preuve : On démontre le lemme pour $A = S$. Sous la condition du théorème de Bott énoncé ci-avant, la preuve pour $A = \Lambda$ est analogue. Soient (V,W) un couple de représentations irréductibles et (i,j) un couple d'entiers entre 1 et n. Alors d'après le lemme de Schur, $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos (de sorte que pour toute représentation irréductible V de G, $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C}$), on a

$$\mathrm{Hom}(V\otimes S(-i), W\otimes S(-j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i, \\ 0 & \text{si } i = j \text{ et } V \neq W, \\ \mathbb{C} & \text{si } i = j \text{ et } V = W, \\ \mathbb{C}^m & \text{si } j < i \text{ et } m(V, S_{i-j}\otimes W) = m, \end{cases}$$

où $m(V,E)$ est la multiplicité de la représentation irréductible V dans la représentation de dimension finie E. Puis, pour $l \neq 0$, comme les morphismes de $K_S([0,n])$ sont des morphismes de complexes, il n'y a pas de morphisme non nul de $V\otimes S(-i)$ vers $W\otimes S(-j)$ décalé de l car ils sont concentrés en des degrés distincts.

$$\mathrm{Hom}^l(V\otimes S(-i), W\otimes S(-j)) = 0.$$

Calculons maintenant le terme de droite. Pour $l = 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V\otimes\mathscr{O}(-i), W\otimes\mathscr{O}(-j)) &\cong \mathrm{Hom}(V\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}, W\otimes\mathscr{O}(i-j)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(V, \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(i-j)\otimes W)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(V, \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(i-j))\otimes W). \end{aligned}$$

D'où, d'après le lemme de Schur,

$$\mathrm{Hom}(V\otimes\mathscr{O}(-i), W\otimes\mathscr{O}(-j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i, \\ 0 & \text{si } i = j \text{ et } V \neq W, \\ \mathbb{C} & \text{si } i = j \text{ et } V = W, \\ \mathbb{C}^m & \text{si } j < i \text{ et } m(V, S_{i-j}\otimes W) = m. \end{cases}$$

Pour $l \neq 0$, il s'agit de démontrer que $\mathrm{Ext}^l_G(V\otimes\mathscr{O}(-i), W\otimes\mathscr{O}(-j)) = 0$. Or d'après [Gro57], il s'agit de l'aboutissement de la suite spectrale de terme initial

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = H^p(G, \mathrm{Ext}^q(V\otimes\mathscr{O}(-i), W\otimes\mathscr{O}(-j))).$$

Or l'ordre du groupe G est inversible dans $\mathbb{C}$, de sorte qu'il n'y a pas de cohomologie des groupes, donc on a

$$\mathrm{Ext}^l_G(V\otimes\mathscr{O}(-i),W\otimes\mathscr{O}(-j))=\mathrm{Ext}^l(V\otimes\mathscr{O}(-i),W\otimes\mathscr{O}(-j))^G.$$

Il suffit donc de démontrer que $\mathrm{Ext}^l(V\otimes\mathscr{O}(-i),W\otimes\mathscr{O}(-j))=0$. Or il s'agit de l'aboutissement de la suite spectrale de terme initial

$$\mathrm{E}_2^{p,q}=H^p(\mathbb{P}^n,\mathscr{E}xt^q(V\otimes\mathscr{O}(-i),W\otimes\mathscr{O}(-j))).$$

Comme $\mathscr{O}(-i)\otimes V$ est localement libre, les Ext locaux sont triviaux pour $q\neq 0$, donc étant donné que $i-j>-n-1$, on a

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Ext}^l(V\otimes\mathscr{O}(-i),W\otimes\mathscr{O}(-j)) &=& H^l(\mathbb{P}^n,\mathscr{H}om(V\otimes\mathscr{O}(-i),W\otimes\mathscr{O}(-j)))\\ &=& H^l(\mathbb{P}^n,V^*\otimes W\otimes\mathscr{O}(i-j))\\ &=& H^l(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}(i-j))\otimes V^*\otimes W\\ &=& 0.\end{array}$$

Ainsi, pour tout $V,W\in R(G)$ et pour tout $i,j\in[0,n]$, on a

$$\mathrm{Hom}_{K_S^G([0,n])}(V\otimes S(-i),W\otimes S(-j))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)}(F(V\otimes S(-i)),F(W\otimes S(-j))).$$

Pour appliquer le lemme 5.2.2, il reste à démontrer la proposition suivante :

Proposition 5.2.6 *La famille* $\{V\otimes\mathscr{O}(-i),V\in\mathrm{Irr}(G),i\in[0,n]\}$, *respectivement* $\{V\otimes\Omega^i(-i),V\in\mathrm{Irr}(G),i\in[0,n]\}$, *engendre la catégorie* $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$.

Preuve : Comme dans [Beĭ79], on considère la résolution de la diagonale par le complexe de Koszul :

$$0\longrightarrow p_1^*\Omega^n(n)\otimes p_2^*\mathscr{O}(-n)\longrightarrow\ldots\ p_1^*\Omega^1(1)\otimes p_2^*\mathscr{O}(-1)\longrightarrow\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n}\longrightarrow\mathscr{O}_\Delta\longrightarrow 0.$$

La diagonale Δ est un sous-G-schéma de $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$, donc $\mathscr{O}_\Delta$ est un G-faisceau et la résolution étant composée de G-faisceaux, il s'agit d'une résolution dans la catégorie G-$\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n)$ de $\mathscr{O}_\Delta$ par des G-faisceaux localement libres donc projectifs.

Considérons les foncteurs

$$p_1^*\ :G\text{-}\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)\longrightarrow G\text{-}\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n),$$

$$\otimes\mathscr{O}_\Delta\ :G\text{-}\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n)\longrightarrow G\text{-}\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n),$$

$$\text{et } p_{2,*}\ :G\text{-}\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n)\longrightarrow G\text{-}\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n).$$

La composition de ces trois foncteurs est l'identité de G-$\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)$, de sorte qu'en dérivant on obtient :

$$\forall M\in\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n),\ M=\mathbf{R}p_{2,*}(\mathscr{O}_\Delta\otimes^L p_1^*(M)).$$

Or, d'après la résolution de la diagonale par des complexes $\otimes$-acycliques, on sait calculer le complexe $\mathscr{O}_\Delta\otimes^L p_1^*(M)$. En degré $-\alpha$, on trouve le faisceau

$$\oplus_{d=0}^n p_2^*\mathscr{O}(-d)\otimes p_1^*\Omega^d(d)\otimes p_1^*(M)^{d-\alpha}.$$

Puis, comme p_1^* est exact et commute au produit tensoriel, $p_1^*\Omega^d(d) \otimes p_1^*(M)^{d-\alpha} = p_1^*(\Omega^d(d) \otimes M^{d-\alpha})$. Ainsi, le complexe $\mathscr{O}_\Delta \otimes^L p_1^*(M)$ appartient à la sous-catégorie triangulée engendrée par les faisceaux du type : $p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*(N)$, où N est un G-faisceau sur $\mathbb{P}^n$.

Alors, comme les triangles sont conservés par les foncteurs dérivés, on peut obtenir M par une suite de triangles débutant par des objets du type $\mathbf{R}p_{2,*}(p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*(N))$, où $N \in G\text{-Coh}(\mathbb{P}^n)$. Or, d'après la formule de projection,

$$\mathbf{R}p_{2,*}(p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*(N)) = \mathscr{O}(-d) \otimes \mathbf{R}p_{2,*}(p_1^*(N)).$$

Il suffit donc de démontrer que ces objets appartiennent à la sous-catégorie triangulée engendrée par la famille $\mathcal{C} = \{V \otimes \mathscr{O}(-i), V \in \mathrm{Irr}(G), i \in [0,n]\}$. Notons $< \mathcal{C} >$ cette catégorie. D'après le lemme 5.2.7 ci-après, il suffit de démontrer que les faisceaux d'homologie de $\mathbf{R}p_{2,*}(p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*(N))$ appartiennent à $< \mathcal{C} >$.

Or, pour tout i, le faisceau $R^i p_{2,*}(p_1^*(N)) = H^i(\mathbf{R}p_{2,*}(p_1^*(N)))$ est le faisceau associé au préfaisceau constant $V \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^n \times V, p_1^*(N)_{|\mathbb{P}^n \times V}) = H^i(\mathbb{P}^n, N)$. C'est donc le faisceau constant égal à $H^i(\mathbb{P}^n, N)$ qui est une représentation de G. Ainsi, les faisceaux d'homologie de $\mathbf{R}p_{2,*}(p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*(N))$ sont de la forme $V \otimes \mathscr{O}(-i)$, où V est une représentation de G. Ils appartiennent donc à $< \mathcal{C} >$, d'où le résultat pour $A = S$.

En considérant la formule de projection

$$\mathbf{R}p_{1,*}(p_1^*\Omega^d(d) \otimes p_2^*(N)) = \Omega^d(d) \otimes \mathbf{R}p_{1,*}(p_2^*(N)),$$

on obtient le résultat pour le foncteur F_Λ. □

Lemme 5.2.7 *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, $\mathscr{C}$ une classe d'objets de $\mathscr{A}$ et $< \mathscr{C} >$ la sous catégorie triangulée de $\mathcal{D}^b(\mathscr{A})$ engendrée par $\mathscr{C}$. Si $M \in \mathcal{D}^b(\mathscr{A})$ a tous ses faisceaux d'homologie dans $< \mathscr{C} >$, alors $M \in < \mathscr{C} >$.*

Preuve : On démontre ce lemme par récurrence sur l'amplitude homologique de M. Si elle est nulle, il n'existe qu'un faisceau d'homologie non nul $H^k(M)$, et M est quasi-isomorphe au complexe $H^k(M)[-k]$. Puis, comme $< \mathscr{C} >$ est stable par triangles, elle l'est en particulier par quasi-isomorphisme, donc $M \in < \mathscr{C} >$.

Supposons le lemme démontré pour tout complexe d'amplitude homologique inférieure ou égale à d. Soit $M \in \mathcal{D}^b(\mathscr{A})$ un complexe d'amplitude $d+1$ dont les faisceaux d'homologie appartiennent à $< \mathscr{C} >$. Soit $k_0 = \min\{k \text{ tel que } H^k(M) \neq 0\}$. Considérons le complexe

$$\sigma_{>k_0} M := \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\partial^{k_0}) \longrightarrow M_{k_0+1} \longrightarrow \ldots$$

On a alors le triangle exact suivant dans $\mathcal{D}^b(\mathscr{A})$ ([Har66, I.7]).

$$\ker(\partial^{k_0})(M) \longrightarrow M \longrightarrow \sigma_{>k_0} M$$

Le premier terme appartient à $< \mathscr{C} >$ par hypothèse et le troisième par hypothèse de récurrence, car $\tau^{>k_0} M$ est d'amplitude homologique d et ses faisceaux d'homologie sont ceux de M, donc appartiennent à $< \mathscr{C} >$ par hypothèse. Ainsi, comme $< \mathscr{C} >$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{D}^b(\mathscr{A})$, $M \in < \mathscr{C} >$. □

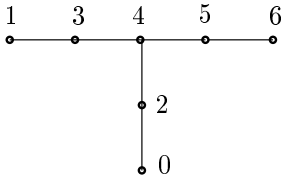
On peut donc appliquer le lemme 5.2.2, et on obtient le théorème 5.2.1. □

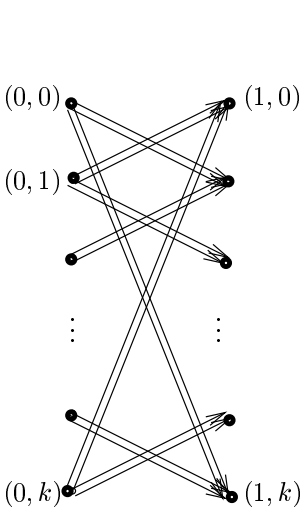
5.2.3 Version Bernstein-Gel'fand-Gel'fand

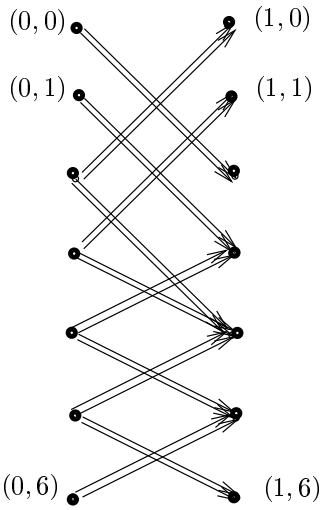
On a vu que la catégorie dérivée $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$ est engendrée par une famille exceptionnelle forte, c'est à dire une famille $\{E_1, \dots E_k\}$ telle que pour tout $i \geq 1$, $\mathrm{Hom}^i(E_l, E_m) = 0$. D'après le théorème de Bondal [Bon90, 6.2], la catégorie dérivée $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$ est équivalente à la catégorie dérivée de la catégorie de modules à gauche d'une algèbre de chemins d'un carquois avec relations $A = \mathrm{Hom}(\bigoplus E_i, \bigoplus E_i)$.

Dans le cas particulier de $\mathbb{P}^1$, il n'y a pas de relations. L'algèbre A est l'algèbre des chemins du carquois défini de la façon suivante : les sommets sont les $E_{i,l}$ indexés par $i \in \{0,1\}$ et $j \in \{0,k\}$, où $\{\rho_0, \dots, \rho_k\}$ sont les représentations irréductibles de G et entre les sommets $E_{i,j}$ et $E_{i',j'}$ il n'y a aucune flèche si $i \leq i'$ et $2m(V_{\rho_j}, V_{\rho_{j'}} \otimes S_1)$ flèches si $i = 0$ et $i' = 1$.

Par exemple, dans le cas du groupe cyclique agissant sur $\mathbb{P}^1 = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x,y])$ par $x \mapsto \eta x$, $y \mapsto \eta^{-1} y$, le carquois est le suivant, à gauche, où le sommet indexé par (i,j) représente $\mathcal{O}(i) \otimes V_j$. Dans le cas du groupe tétraédral, le carquois est celui de droite ci-après. On l'obtient grace au diagramme complété de McKay, qui est le système de racines E_6 complété :







Dans le cas général, A est une algèbre de Koszul, et si B est son algèbre duale, alors d'après [Pol94], B est une algèbre de Frobenius. De plus, il y a une équivalence de catégories

$$\underline{B\text{−Mod}} \simeq \mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$$

où $\underline{B\text{−Mod}}$ est la catégorie obtenue à partir de la catégorie des B-modules à gauche en factorisant modulo les morphismes qui factorisent par un module projectif.

5.3 Critère de descente d'un objet de la catégorie dérivée G-équivariante

Dans cette deuxième partie, nous évaluons la distance qui sépare les catégories $\mathcal{D}^{*,G}(X)$ et $\mathcal{D}^*(X/G)$. Autrement dit, nous déterminons l'obstruction pour un objet de $\mathcal{D}^{*,G}(X)$ à être l'image par π^* d'un objet de $\mathcal{D}^*(X/G)$.

On a vu dans le théorème 5.1.2 que $\mathcal{D}^{*,G}(X) \simeq \mathscr{M}^*$, mais $\mathscr{M}^*$ n'est pas la catégorie dérivée bornée de la catégorie $\mathscr{L}$ des G-faisceaux cohérents localement libres sur X.

Dans un premier paragraphe, on traite malgré cela le problème sur $\mathscr{L}$.

On se ramène alors à ce cas en démontrant qu'un objet de $\mathscr{M}^*$ est image par π^* d'un objet de $\mathcal{D}^*(X/G)$ si et seulement si chacun des faisceaux de $\mathscr{L}$ qui le compose est image par π^* d'un faisceau de $\mathrm{Coh}(X/G)$. Cela résout le problème de la descente d'un objet de $\mathcal{D}^{*,G}(X)$.

5.3.1 Descente d'un G-faisceau localement libre

On commence par raisonner dans le cas local. On suppose que X est un schéma projectif lisse sur un corps k algébriquement clos. La proposition suivante traite le cas de la descente d'un G-faisceau localement libre au voisinage d'un point fermé de X.

Proposition 5.3.1 *Soit R une $\mathbb{C}$-algèbre locale d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k. Soit $\mathrm{L}_G(R)$ la catégorie des $(R$-$G)$-modules libres et $\mathrm{R}_G(k)$ la catégorie des représentations de G. Il existe des foncteurs*

$$F_1 : \mathrm{L}_G(R) \xrightarrow{\otimes k} \mathrm{R}_G(k) \text{ et } F_2 : \mathrm{R}_G(k) \xrightarrow{\otimes R} \mathrm{L}_G(R).$$

Alors $F_1 \circ F_2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{R}_G(k)}$ et F_2 est essentiellement surjectif.

Preuve : On a clairement

$$\forall V \in \mathrm{R}_G(k),\ (V \otimes_k R) \otimes_R k = V \otimes_k R/\mathfrak{m} \cong V.$$

Montrons alors que

$$\forall M \in \mathrm{L}_G(R),\ M/\mathfrak{m}M \otimes_k R \cong M \text{ dans } \mathrm{L}_G(R).$$

Soit donc M un $(R$-$G)$-module libre. Comme M est la limite inductive de ses sous-$(R$-$G)$-modules de types finis, on peut supposer M de type fini. En effet, si $M = \mathrm{limind}(N)$, alors

$$(M \otimes k) \otimes R = (\mathrm{limind}(N) \otimes k) \otimes R = \mathrm{limind}(N \otimes k) \otimes R = \mathrm{limind}((N \otimes k) \otimes R)$$

car les limites inductives commutent aux foncteurs adjoints à gauches, donc en particulier aux produits tensoriels.

Soit $V = M \otimes k = M/\mathfrak{m}M$. On veut démontrer que $M \cong V \otimes R$ en tant que $(R$-$G)$-module. V étant une représentation de dimension finie de G, on peut en choisir une base $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$, où les e_i sont dans M et $\overline{e_i}$ est la classe modulo $\mathfrak{m}$. Soit W le sous-$(k$-$G)$-module de M engendré par les e_i. C'est le sous-espace vectoriel engendré par les e_i et

leurs transformés par G. Il est de dimension finie car G est fini. Soit V_1 le quotient de W par un supplémentaire de V en tant que k-espace vectoriel. La surjection $W \longrightarrow V_1 \cong V$, est un morphisme de ($k$-$G$)-modules par construction. Soit V' son noyau. On a

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

Comme toute représentation de dimension finie, W est semi-simple. Il existe donc un (k-G)-module $V_2 \cong V$ telle que $W = V_2 \oplus V'$. Notons le encore V. On a alors un morphisme naturel de (R-G)-modules

$$V \otimes_k R \xrightarrow{\varphi} M.$$

D'après le lemme de Nakayama, il est surjectif, et comme il s'agit d'une surjection entre R-modules libres de même rang, c'est un isomorphisme. □

On en déduit le résultat suivant, déjà connu dans le cadre plus général où G est un groupe algébrique réductif agissant sur X, de sorte qu'il existe un bon quotient X/G (lemme de descente de Kempf, voir [DN89]).

Corollaire 5.3.2 *Soit E un G-faisceau localement libre sur X. Il existe un faisceau $F \in \mathrm{Qco}(X/G)$ tel que $E = \pi^*(F)$ si et seulement si en chacun des points fermés x de X de stabilisateur non trivial G_x, la représentation $i_x^*(E) = E_x/\mathfrak{m}_x E_x$ de G_x est triviale. De plus, ce faisceau peut alors être choisi localement libre, et ce de manière unique à isomorphisme près.*

Preuve : Soit E un G-faisceau localement libre de type fini sur X. Le morphisme $\pi^*\pi_*^G(E) \longrightarrow E$ est un isomorphisme si et seulement si c'est un isomorphisme sur chacune des fibres au-dessus des points fermés.

En tout point où G agit librement, il s'agit bien d'un isomorphisme d'après le paragraphe 5.1.2. Soit x un point fermé de X de stabilisateur non trivial G_x. Si il existe $F \in \mathrm{Qco}(X/G)$ tel que $E = \pi^*(F)$, alors $E_x = F_{\pi(x)}$, de sorte que $i_x^*(E)$ est triviale. Réciproquement, supposons que $V = i_x^*(E)$ est triviale. D'après la proposition 5.3.1, on a

$$E_x \cong \mathscr{O}_{X,x} \otimes V.$$

Dans un premier temps, supposons que $\mathscr{O}_{X,x}$ est complet. Alors, $(\pi_*^G(E))_{\pi(x)} = E_x^{G_x} = \mathscr{O}_{X,x}^{G_x} \otimes V = \mathscr{O}_{X/G,\pi(x)} \otimes V$ est un $\mathscr{O}_{X/G,\pi(x)}$-module libre. En particulier, le faisceau cohérent $\pi_*^G(E)$ est localement libre (voir [Har77, Exercice II.5.7]).

Ainsi,

$$\begin{aligned}(\pi^*\pi_*^G(E))_x &\cong (\pi_*^G(E))_{\pi(x)} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}^{G_x}} \mathscr{O}_{X,x} \\ &\cong (\mathscr{O}_{X,x}^{G_x} \otimes V) \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}^{G_x}} \mathscr{O}_{X,x} \\ &\cong V \otimes \mathscr{O}_{X,x}.\end{aligned}$$

Le morphisme $\pi^*\pi_*^G(E) \longrightarrow E$ induit donc un isomorphisme sur la fibre en x.

Si $\mathscr{O}_{X,x}$ n'est pas complet, on se ramène à ce cas car le complété $\widehat{\mathscr{O}_{X,x}}$ est fidèlement plat sur $\mathscr{O}_{X,x}$. Enfin, remarquons que si F est un faisceau localement libre tel que $\pi^*(F) = E$, alors $\pi_*^G(\pi^*(F)) \cong F$, d'où l'unicité. □

Remarque : Dans la catégorie dérivée, nous verrons que lorsqu'il existe, l'antécédent par $\mathbf{L}\pi^*$ est unique.

Dans le cas général, les points de stabilisateur non trivial ne sont pas isolés. On peut alors construire une stratification du lieu des points de stabilisateur non trivial indexée par les sous-groupes de G de la façon suivante. Pour tout sous-groupe H de G, notons Δ_H l'ensemble des points de stabilisateur H et X^H le schéma des points fixes par H :

$$\Delta_H = \{x \in X \mid G_x = H\},\ X^H = \{x \in X \mid Hx = x\} = \bigsqcup_{H \subset K \subset G} \Delta_K.$$

X^H est lisse sur $\mathbb{C}$ car il s'agit du sous-schéma des points fixes sous l'action du sous-groupe H de G.

On considère alors le sous-schéma fermé $\overline{\Delta}_H$ de X muni de sa structure réduite, et on note $i_H : \overline{\Delta}_H \hookrightarrow X$ l'inclusion fermée.

Lemme 5.3.3 *$\overline{\Delta}_H$ est lisse sur $\mathbb{C}$.*

Preuve : Notons $X^H = \sqcup_{\alpha \in I} X^H_\alpha$ les composantes irréductibles de X^H. Alors $\Delta_H = \sqcup_{\alpha \in I} \Delta_H \cap X^H_\alpha$. Puis, si $J \subset I$ est le sous-ensemble (non vide si Δ_H est non vide) formé des indices α tels que $\Delta_H \cap X^H_\alpha$ est non vide, alors $\Delta_H = \sqcup_{\alpha \in J} \Delta_H \cap X^H_\alpha$ et

$$\overline{\Delta}_H = \sqcup_{\alpha \in J} X^H_\alpha.$$

En effet, l'adhérence d'un sous-ensemble non vide d'une composante irréductible X^H_α est X^H_α entier. Ainsi, $\overline{\Delta}_H$ est la réunion de certaines composantes connexes de X^H qui est lisse sur $\mathbb{C}$, donc il est lisse sur $\mathbb{C}$. □

Remarquons que H agit trivialement sur $\overline{\Delta}_H \subset X_H$. Ainsi, d'après le paragraphe 5.1.3 on a une décomposition :

$$H\text{-Qco}(\overline{\Delta}_H) = \oplus_{\rho \in R(H)} \text{Qco}^\rho(\overline{\Delta}_H)$$

Proposition 5.3.4 *Soit E un G-faisceau localement libre sur X. Pour tout H sous-groupe de G, $i_H^*(E) = E_H$ est un H-faisceau localement libre sur $\overline{\Delta}_H$. Alors E est l'image réciproque d'un faisceau localement libre sur X/G si et seulement si pour tout sous-groupe H de G, $i_H^*(E)$ appartient à la composante correspondant à la représentation triviale de H dans la décomposition de H-Qco$(\overline{\Delta}_H)$.*

Preuve : Soit H un sous-groupe de G. Si Δ_H est vide, on conviendra que $i_H^*(E)$ est trivial dans le sens ci-dessus. Sinon, soit $x \in \Delta_H$. En particulier, x est un point de stabilisateur non trivial. D'après le corollaire 5.3.2, E provient du quotient si et seulement si pour tout $x \in Fix(X)$, $i_x^*(E)$ est une représentation triviale du stabilisateur de x. Considérons le morphisme $i_x^H : \text{Spec}(k(x)) \longrightarrow \overline{\Delta}_H$ d'image x. Alors $i_x = i_H \circ i_x^H$, de sorte que si $i_H^*(E)$ appartient à la composante correspondant à la représentation triviale de H dans la décomposition de H-Qco$(\overline{\Delta}_H)$, alors $i_x^*(E) = i_x^{H*} \circ i_H^*(E)$ est une représentation triviale de H. D'où la condition suffisante.

Réciproquement, supposons que $E = \pi^*(F)$ où F est un faisceau localement libre sur X/G. Alors E est un G-faisceau trivial sur X en ce sens que l'action de G sur E est diagonale. En effet, pour tout ouvert $U \subset X$, le $(G\text{-}\mathscr{O}_X(U))$-module $E(U)$ vérifie $g.(ae) = (g.a)e$ pour tout $(g, a, e) \in G \times \mathscr{O}_X(U) \times E(U)$. Ainsi, comme l'action de H est triviale sur $\overline{\Delta}_H$, elle l'est également sur $i_H^*(E)$, de sorte que $i_H^*(E)$ appartient à la composante correspondant à la représentation triviale de H dans la décomposition de H-Qco$(\overline{\Delta}_H)$. □

On va maintenant démontrer que la restriction du foncteur π^* à la sous-catégorie des faisceaux localement libres de $\mathrm{Coh}(X/G)$ est pleinement fidèle : tout morphisme G-équivariant dans G-$\mathrm{Coh}(X)$ entre image réciproques de faisceaux localement libres provient d'un morphisme entre ces faisceaux. Localement, il s'agit du lemme suivant.

Lemme 5.3.5 *Soit A un anneau local avec action de G. Soient V et W deux représentations triviales de dimension finie du groupe G et $V \otimes A \xrightarrow{\phi} W \otimes A$ un morphisme de A-modules commutant à l'action de G. Alors ϕ est l'image réciproque d'un morphisme*

$$V \otimes A^G \longrightarrow W \otimes A^G.$$

Preuve : Soit $(e_1, \ldots, e_N)$ une base de V et $(f_1, \ldots, f_M)$ une base de W. On a : $\phi(\sum_{i=1}^N a_i e_i) = \sum_{i=1}^N a_i \phi(e_i) = \sum_{i=1}^N a_i \sum_{i=1}^M \phi_{j,i} f_j$ où l'application A-linéaire ϕ est représentée par la matrice $((\phi_{j,i})) \in \mathscr{M}_{M,N}(A)$.

Alors le fait que ϕ commute à l'action de G s'écrit de la manière suivante (compte tenu du fait que G agit trivialement sur V et W, et donc que les bases sont invariantes)

$$\begin{array}{lrcl} \forall g \in G, & g \cdot \phi(\sum_{i=1}^N a_i e_i) & = & \sum_{i=1}^N g \cdot a_i \sum_{i=1}^M g \cdot \phi_{j,i} f_j \quad = \\ & \phi(g \cdot \sum_{i=1}^N a_i e_i) & = & \sum_{i=1}^N g \cdot a_i \sum_{i=1}^M \phi_{j,i} f_j. \end{array}$$

De sorte que ϕ commute à l'action de G revient à dire que ϕ est G-invariant, en ce sens qu'il provient d'un morphisme $V \otimes A^G \longrightarrow W \otimes A^G$. □

Proposition 5.3.6 *Soit $L_1 = \pi^*(E_1) \xrightarrow{\phi} L_2 = \pi^*(E_2)$ un G-morphisme de G-faisceaux localement libres de type fini sur X images réciproques de faisceaux sur X/G. Alors ϕ provient d'un morphisme unique $E_1 \longrightarrow E_2$ dans* $\mathrm{Coh}(X/G)$.

Preuve : L'identité $\pi_*^G \circ \pi^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{Coh}(X/G)}$ entraine que s'il existe, ce morphisme est nécessairement $\pi_*^G(L_1) = E_1 \xrightarrow{\pi_*^G(\phi)} \pi_*^G(L_2) = E_2$. Par ailleurs, l'adjonction de π^* et π_*^G fournit un morphisme canonique $\pi^* \circ \pi_*^G \xrightarrow{\eta} \mathrm{Id}_{G\text{-}\mathrm{Coh}(X)}$ d'où le diagrame :

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{\pi^*(\pi_*^G(\phi))} & L_2 \\ {\scriptstyle \eta(L_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta(L_2)} \\ L_1 & \xrightarrow{\phi} & L_2 \end{array}$$

Il s'agit donc de démontrer que $\eta(L_i) = \mathrm{Id}_{L_i}$, pour $i = 1, 2$ et que $\phi = \pi^*(\pi_*^G(\phi))$.

On peut raisonner localement, et donc se placer sur un ouvert affine $\mathrm{Spec}(A)$, où A est local. Comme L_1 et L_2 sont localement libres, la proposition 5.3.1 s'applique et donc $L_i = V_i \otimes A$, où V_i est une représentation de G. Alors l'hypothèse que les L_i proviennent du quotient se traduit par le fait que ces représentations sont triviales. Par ailleurs, ϕ étant un morphisme de G-faisceaux, il commute à l'action de G et on peut appliquer le lemme 5.3.5. Ainsi, ϕ est G-invariante.

Or dans le cas affine, $\mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}(B)$, où $B = A^G$, l'opération π_*^G revient à considérer un A-module comme B-module et prendre sa partie G invariante, de sorte que le complexe $V_1 \otimes A \xrightarrow{\phi} V_2 \otimes A$ est transformé en $V_1 \otimes A^G \xrightarrow{\phi^G = \phi} V_2 \otimes A^G$, puis π^*

revient à tensoriser par A au-dessus de A^G, de telle sorte qu'on retrouve le complexe $V_1 \otimes A \xrightarrow{\phi} V_2 \otimes A$. On a donc $\pi^*\pi_*^G\phi = \phi$. Autrement dit, ϕ provient du morphisme $\pi_*^G\phi : E_1 \longrightarrow E_2$. □

5.3.2 Critère de descente

En appliquant les résultats obtenus pour les faisceaux localement libres, on démontre qu'un complexe de faisceaux cohérents localement libres provient du quotient, si et seulement si chaque faisceau qui le compose provient du quotient.

On démontre alors un critère de descente au quotient pour un objet de la catégorie dérivée G-équivariante, et on identifie la catégorie dérivée du quotient comme sous-catégorie de celle-ci.

Proposition 5.3.7 *Soit L un complexe de G-faisceaux localement libres. Alors L est image réciproque d'un objet de $\mathcal{D}^*(X/G)$ si et seulement si pour tout i, L_i est image réciproque d'un faisceau de* Coh(X/G).

Preuve : La partie directe est évidente. Réciproquement, si L est un complexe du type :

$$\ldots \xrightarrow{\phi_{j-1}} \pi^*(E_j) \xrightarrow{\phi_j} \pi^*(E_{j+1}) \ldots \xrightarrow{\phi_{r-1}} \pi^*(E_r) \longrightarrow 0$$

où chaque ϕ_i est un morphisme de G-faisceaux, alors en appliquant la proposition 5.3.6 on obtient que chaque morphisme provient du quotient. Comme les G-faisceaux localement libres sont π^* acycliques, on a

$$\ldots \xrightarrow{\pi^*(\psi_{j-1})} \pi^*(E_j) \xrightarrow{\pi^*(\psi_j)} \pi^*(E_{j+1}) \ldots \xrightarrow{\pi^*(\psi_{r-1})} \pi^*(E_r) \longrightarrow 0 = \mathbf{L}\pi^*(E, \psi)$$

□

D'après le paragraphe 5.1.3, pour tout sous-groupe H de G et tout schéma Δ_H associé, on a une décomposition de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^{*,H}(\overline{\Delta}_H)$ suivant les représentations irréductibles de H.

Théorème 5.3.8 *Un objet $E \in \mathcal{D}^{-,G}(X)$ est l'image par $\mathbf{L}\pi^*$ d'un objet de $\mathcal{D}^-(X/G)$ si et seulement si pour tout sous-groupe H de G, la restriction $\mathbf{L}i_H^*(E)$ du complexe à l'adhérence du sous-schéma des points de stabilisateur H appartient à la composante correspondant à la représentation triviale dans la décomposition de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^{-,H}(\overline{\Delta_H})$. Autrement dit, la flèche*

$$\mathcal{D}^{-,G}(X) \xrightarrow{\oplus_H \mathbf{L}i_H^*} \oplus_H \mathcal{D}^{-,H}(\overline{\Delta}_H)$$

est à but dans $\oplus_H \mathcal{D}^{-,\rho_0}(\overline{\Delta}_H)$.

Si le quotient X/G est lisse sur $\mathbb{C}$, alors π est plat, et $\mathbf{L}\pi^* = \pi^*$ envoie $\mathcal{D}(X/G)$ dans $\mathcal{D}^G(X)$. Le critère pour qu'un objet de $\mathcal{D}^G(X)$ provienne du quotient est le même que dans le cas borné supérieurement.

Preuve : Le but de ce théorème est de déterminer sous quelles conditions le complexe E est quasi-isomorphe au complexe $\mathbf{L}\pi^*(\pi_*^G(E))$.

D'après le paragraphe 5.1.1 il existe un complexes de G-faisceaux cohérents localement libres L quasi-isomorphe à E. Alors $\pi_*^G(L)$ est quasi-isomorphe à $\pi_*^G(E)$ et il est formé de faisceaux localement libres. Comme la classe des faisceaux localement libres est π^*-acylique, on a $\mathbf{L}\pi^*(\pi_*^G(E)) \simeq \pi^*(\pi_*^G(L))$. Il suffit donc de déterminer à quelle condition sur E le complexe L est quasi-isomorphe au complexe $\pi^*(\pi_*^G(L))$.

D'après le paragraphe 5.3.1 un complexe de faisceaux localement libres se descend si et seulement si chacun des faisceaux se descend. Alors en appliquant la proposition 5.3.4, on obtient que E provient du quotient si et seulement si pour tout sous-groupe H de G et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $i_H^*(L_k)$ est un H-faisceau cohérent sur $\overline{\Delta}_H$ appartenant à la composante correspondant à la représentation triviale dans la décomposition de H-$\mathrm{Coh}(\overline{\Delta}_H)$. Or les faisceaux localement libres sont i_H^*-acycliques, donc cette condition s'écrit encore (d'après le paragraphe 5.1.3) $\mathbf{L}i_H^*(E) \in \mathcal{D}^{-,\rho_0}(\overline{\Delta}_H)$. □

Lemme 5.3.9 *Le foncteur $\mathbf{L}\pi^* : \mathcal{D}(X/G) \longrightarrow \mathcal{D}^{*,G}(X)$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\pi_*^G : \mathcal{D}^{*,G}(X) \longrightarrow \mathcal{D}^*(X/G)$.*

Preuve : Par construction, le foncteur $\pi_*^G : G\text{-}\mathrm{Qco}(X) \longrightarrow \mathrm{Qco}(X/G)$ est la composé du foncteur $\pi_* : G\text{-}\mathrm{Qco}(X) \longrightarrow G\text{-}\mathrm{Qco}(X/G)$ avec le foncteur Γ^G envoyant un objet de G-$\mathrm{Qco}(X/G)$ sur sa partie G-invariante dans $\mathrm{Qco}(X/G)$. Ces foncteurs admettent respectivement pour adjoint à gauche le foncteur π^* et l'inclusion $\mathrm{Qco}(X/G) \subset G\text{-}\mathrm{Qco}(X/G)$, qui à un faisceau associe ce même faisceau vu en tant que G-faisceau avec action triviale ; de sorte que $\pi^* : \mathrm{Qco}(X/G) \longrightarrow G\text{-}\mathrm{Qco}(X)$ et $\pi_*^G : G\text{-}\mathrm{Qco}(X) \longrightarrow \mathrm{Qco}(X/G)$ sont adjoints.

Étant donné qu'il n'y a pas de cohomologie des groupes en caractéristique nulle, le foncteur Γ^G est exact, ainsi que son adjoint. Il n'est donc pas nécessaire de les dériver, et on peut affirmer qu'ils restent adjoints dans les catégories dérivées.

Par ailleurs, la preuve de Hartshorne ([Har66, corollaire II.5.11]) dans le cas non-équivariant s'adapte parfaitement pour démontrer que $\pi_* : \mathcal{D}^G(X) \longrightarrow \mathcal{D}^G(X/G)$ et $L\pi^* : \mathcal{D}^G(X/G) \longrightarrow \mathcal{D}^G(X)$ sont adjoints. Par composition, on a le résultat. □

Notons $\mathcal{D}^{*,G}(X)^{\mathrm{s.o.}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}^{*,G}(X)$ dont les objets sont les complexes F sans obstruction à la descente, c'est à dire tels que $\mathbf{L}i_H^*(F) \in \mathcal{D}^{*,\rho_0}(\overline{\Delta}_H)$, pour tout sous-groupe H de G.

Proposition 5.3.10 *La restriction du foncteur π_*^G à $\mathcal{D}^{*,G}(X)^{\mathrm{s.o.}}$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathcal{D}^{*,G}(X)^{\mathrm{s.o.}} \simeq \mathcal{D}^*(X/G).$$

Preuve : D'après le théorème 5.3.8, la catégorie $\mathcal{D}^{*,G}(X)^{\mathrm{s.o.}}$ est l'image essentielle du foncteur $\mathbf{L}\pi^* : \mathcal{D}^*(X/G) \longrightarrow \mathcal{D}^{*,G}(X)$. Il suffit donc de démontrer que $\mathbf{L}\pi^*$ est pleinement fidèle pour voir que $\mathbf{L}\pi^*$ induit une équivalence de catégorie. Alors, π_*^G étant son adjoint à droite il s'agit de son quasi-inverse.

Soient E_1 et E_2 deux objets de $\mathcal{D}^*(X/G)$, et soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{*,G}(X)}(\mathbf{L}\pi^*(E_1), \mathbf{L}\pi^*(E_2))$. D'après le paragraphe 5.1.1, on peut supposer que les complexes $F_i = \mathbf{L}\pi^*(E_i)$ sont formés de faisceaux localement libres. Il existe donc $F \in \mathcal{D}^{*,G}(X)$ quasi-isomorphe à $\mathbf{L}\pi^*(E_1)$ et un morphisme de complexes $F \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \mathbf{L}\pi^*(E_2)$ qui représente ϕ. Soit L un complexe de faisceaux localement libres quasi-isomorphe à F :

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & & \vdots q & & \\ F_1 = \mathbf{L}\pi^*(E_1) & \overset{\text{qis}}{\dashleftarrow} & F & \xrightarrow{\widetilde{\phi}} & \mathbf{L}\pi^*(E_2) = F_2. \end{array}$$

Les critères d'obstructions étant homologiques, les complexes F et L appartiennent eux aussi à $\mathcal{D}^{*,G}(X)^{\text{s.o.}}$, de sorte que $\mathbf{L}\pi^*\pi_*^G(F) \cong F$, et de même pour L. Le morphisme ϕ est alors également représenté par $F_1 \dashleftarrow L \xrightarrow{\widetilde{\phi}\circ q} F_2$, où $\phi' = \widetilde{\phi}\circ q$ est un morphisme de complexes de faisceaux localement libres, qui se descendent tous au quotient d'après la proposition 5.3.7. Chaque morphisme $\phi'_i : L_i \longrightarrow F_{2,i}$ se descend de manière unique d'après la proposition 5.3.6, de sorte que ϕ' se descend de manière unique ; c'est à dire qu'il existe un unique morphisme $\psi : \pi_*^G(L) \longrightarrow \pi_*^G(F_2) = E_2$ tel que $\mathbf{L}\pi^*(\psi) = \phi'$. Puis, comme π_*^G transforme un quasi-isomorphisme en un quasi-isomorphisme, le morphisme

$$E_1 \overset{\text{qis}}{\dashleftarrow} \pi_*^G(L) \xrightarrow{\psi} E_2$$

est dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^*(X/G)}(E_1, E_2)$, et il s'envoie sur $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{*,G}(X)}(\mathbf{L}\pi^*(E_1), \mathbf{L}\pi^*(E_2))$. De plus, par unicité de ψ, le morphisme est unique dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}^*(X/G)$; de sorte que $\mathbf{L}\pi^*$ est pleinement fidèle. □

Remarques : Grâce à l'équivalence de catégories ci-dessus, le critère d'obstruction du théorème 5.3.8 caractérise la catégorie dérivée $\mathcal{D}^*(X/G)$ en tant que sous-catégorie de $\mathcal{D}^{*,G}(X)$.

Une application possible serait de calculer ainsi des catégories dérivées de certaines variétés quotients, en les considérant comme sous-catégorie d'une catégorie dérivée G-équivariante. Par exemple, les espaces projectifs avec poids peuvent être étudiée en tant que quotient par un groupe fini d'un espace projectif classique. Comme nous connaissons la catégorie dérivée G-équivariante de $\mathbb{P}^n$ (théorème 5.2.1), l'étude de la catégorie dérivée d'un espace projectif avec poids se ramène à celle des complexes sans obstruction dans $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$.

Inversement, modulo une généralisation des théorèmes de reconstruction d'une variété à partir de sa catégorie dérivée de Bondal et Orlov (voir [BO01]), ce critère pourrait permettre d'identifer des quotients.

Par exemple, soit E est une courbe elliptique, et $A \subset E^{n+1}$, définie par $\sum e_i = 0$. Si l'on exhibe dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(A)$ une famille exceptionnelle forte $\{E_0, \ldots, E_n\}$ de complexes sans obstruction à la descente et ayant les mêmes caractéristiques homologiques que la famille $\{\mathcal{O}, \ldots, \mathcal{O}(n)\}$ de $\mathbb{P}^n$ alors l'image de $\mathcal{D}(A/\mathfrak{S}_{n+1})$

dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(A)$ contient la catégorie dérivée de $\mathbb{P}^n$. Si de plus tout objet de $\mathcal{D}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(A)$ orthogonal à cette famille a des obstructions à la descente, alors $A/\mathfrak{S}_{n+1}$ a exactement la même catégorie dérivée que $\mathbb{P}^n$. Ce serait un moyen de redémontrer le théorème de Loojenga par une méthode homologique.

Annexe A

Autour des groupes de Weyl en dimension trois

Soit R un système de racines réel de rang trois. On note Q le réseau engendré par R, W le groupe de Weyl de R et W_+ le sous-groupe formé des produits pairs de réflexions.

Définition A.0.11 ([McK81]) *Soit V une représentation de dimension finie d'un groupe fini G. Notons* $\mathrm{Irr}(G)$ *l'ensemble des représentations irréductibles de G, et V_0 la représentation triviale. On définit le carquois de McKay de V comme étant le carquois dont les sommets sont indexés par* $\mathrm{Irr}(G) \setminus \{V_0\}$ *et le nombre de flèches entre les sommets V_i et V_j est égal à la multiplicité de V_i dans $V \otimes V_j$.*

Si V est auto-dual, alors ce carquois est symétrique et on appelle diagramme de McKay de la représentation V de G le graphe sous-jacent.

Dans ce chapitre, on calcule le diagramme de McKay de la représentation $V = Q \otimes \mathbb{C}$ de W_+. Pour cela, on a besoin des tables de caractères des groupes W_+. Plus précisément, on va utiliser des tables de représentations irréductibles définies de la façon suivante.

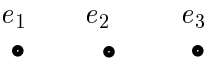
Fixons $F(W_+)$ une famille de représentants des classes de conjugaisons de W_+. Pour chaque représentation irréductible $\rho : W_+ \longrightarrow \mathrm{Gl}(V)$, fixons une base B_ρ, et exprimons les matrices des applications ρ_f, pour $f \in F$ dans cette base. On appelle table des représentations irréductibles de W_+ relative à (F, B) la table des matrices ainsi obtenues.

Définition A.0.12 *On appelle alors V_ρ-base toute base de V dans laquelle les applications ρ_f sont représentées par ces matrices.*

Ces tables de représentations irréductibles servent également lors de la recherche de la fibre du schéma de Hilbert W_+-Hilb(A) au-dessus des points singuliers de A/W_+, images des points de A de stabilisateur W_+ (chapitres 2 et 3).

A.1 $\mathbf{A_1 \times A_1 \times A_1}$

Soit $\mathrm{R} = A_1 \times A_1 \times A_1$ le système de racines $\mathrm{R} = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\} \subset \mathbb{R}^3$. Il a pour système générateur $\{e_1, e_2, e_3\}$, et le système de racines R est donc le suivant.



Le groupe de Weyl $W(\mathrm{R})$ est le produit direct $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Chaque facteur agissant sur la composante correspondante de $Q = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3$ en envoyant e_i sur son opposé. Soit W_+ le sous-groupe des produits pairs de réflexions de W.

$$W_+ = \{(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

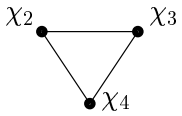
Les classes de conjugaisons sont $F(W_+) = W_+$, mais les représentations $W_+ \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V)$ sont entièrement déterminées par $\rho_{(0,1)}$ et $\rho_{(1,0)}$. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ possède quatre représentations irréductibles de rang 1 :

	$(0,1)$	$(1,0)$
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	-1	1
χ_4	-1	-1

La représentation $Q \otimes \mathbb{C}$ de W_+ est $V \cong V_{\chi_2} \oplus V_{\chi_3} \oplus V_{\chi_4}$ de sorte que

$$\begin{cases} V \otimes V_{\chi_1} \cong V_{\chi_2} \oplus V_{\chi_3} \oplus V_{\chi_4}, \\ V \otimes V_{\chi_2} \cong V_{\chi_1} \oplus V_{\chi_4} \oplus V_{\chi_3}, \\ V \otimes V_{\chi_3} \cong V_{\chi_4} \oplus V_{\chi_1} \oplus V_{\chi_2}, \\ V \otimes V_{\chi_4} \cong V_{\chi_3} \oplus V_{\chi_2} \oplus V_{\chi_1}. \end{cases}$$

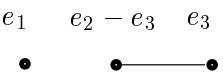
En particulier, le diagramme de McKay associé à W_+ est le suivant.



A.2 $\mathbf{A_1 \times A_2}$

On définit le système de racines $\mathrm{R} = A_1 \times A_2$ dans $\mathbb{R}^4$ comme étant l'union de $\{\pm e_1\}$ avec l'ensemble de tous les vecteurs de longueur $\sqrt{2}$ et appartenant à l'intersection de l'hyperplan $\{(x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ avec le réseau $e_2\mathbb{Z} \oplus e_3\mathbb{Z} \oplus e_4\mathbb{Z}$. Ainsi

$\mathrm{R} = \{\pm e_1\} \cup \{e_i - e_j,\ 2 \leq i \neq j \leq 4\}$, et on peut prendre $e_1,\ e_2 - e_3,\ e_3 - e_4$ comme système générateur, de sorte que le système de racines R est le suivant.



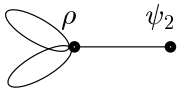
Alors $W(\mathrm{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_3$. Le premier facteur agit sur $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}(e_2 - e_3) \oplus \mathbb{Z}(e_3 - e_4)$ par multiplication par (-1) sur le premier facteur, le deuxième facteur agit en permutant e_2, e_3 et e_4. Le sous-groupe W_+ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3 =< r, s >$, où s est d'ordre deux et r d'ordre trois. Toute représentation de W_+ est déterminée par l'action des générateurs r et s. On choisit la table suivante pour table de représentations de W_+.

	r	s
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ρ	$\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La représentation $Q \otimes \mathbb{C}$ de W_+ est $V = V_{\psi_2} \oplus V_\rho$, de sorte que

$$\begin{cases} V \otimes V_{\psi_1} & \cong & V_{\psi_2} \oplus V_\rho \\ V \otimes V_{\psi_2} & \cong & V_{\psi_1} \oplus V_\rho \\ V \otimes V_\rho & \cong & V_{\psi_1} \oplus V_{\psi_2} \oplus V_\rho \oplus V_\rho \end{cases}$$

En particulier le diagramme de McKay associé à W_+ est le suivant.



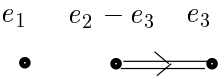
En effet, soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de V telle que e_1 est une V_{ψ_1}-base, et $\{e_2, e_3\}$ est une V_ρ-base. Alors

- si ε est une V_{ψ_1}-base, $e_1 \otimes \varepsilon$ est une V_{ψ_2}-base et $\{e_2 \otimes \varepsilon, e_3 \otimes \varepsilon\}$ est une V_ρ-base,
- si ε est une V_{ψ_2}-base, $e_1 \otimes \varepsilon$ est une V_{ψ_1}-base et $\{e_2 \otimes \varepsilon, -e_3 \otimes \varepsilon\}$ est une V_ρ-base,
- si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une V_ρ-base, $\{e_1 \otimes \varepsilon_1, -e_1 \otimes \varepsilon_2\}$ est une V_ρ-base, $e_3 \otimes \varepsilon_1 + e_2 \otimes \varepsilon_2$ est une V_{ψ_1}-base, $e_3 \otimes \varepsilon_1 - e_2 \otimes \varepsilon_2$ est une V_{ψ_2}-base, et $\{e_3 \otimes \varepsilon_2, e_2 \otimes \varepsilon_1\}$ est une V_ρ-base.

A.3 $\mathbf{A_1 \times B_2}$

Considérons le système de racines $\mathrm{R} = A_1 \times B_2$, dans $\mathbb{R}^3$, défini comme l'union de $\{\pm e_1\}$ et $\{\pm e_2, \pm e_3, \pm e_2 \pm e_3\}$. On peut prendre comme système générateur $(e_1, e_2 - e_3, e_3)$

et le système de racines est le suivant.



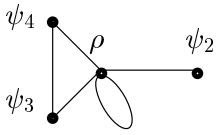
Alors $W(\mathrm{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2)$. Le premier facteur agit sur $Q = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3$ par multiplication par (-1) sur le premier facteur, le deuxième facteur agit en échangeant e_2 et e_3 et les deux derniers en multipliant respectivement e_2 et e_3 par (-1). Soit W_+ le sous-groupe des produits pairs de réflexions de W. Alors W_+ est isomorphe à $\mathbb{D}_4 =< r, s >$, où $r = (1, (-1, (-1, 1)))$ et $s = (-1, (-1, (1, 1)))$. Ainsi, on peut choisir pour table de représentations irréductibles la table suivante.

	r	s
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	-1	1
ψ_4	-1	-1
ρ	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La représentation $Q \otimes \mathbb{C}$ de W_+ est $V = V_{\psi_2} \oplus V_\rho$, de sorte que

$$\begin{cases} V \otimes V_{\psi_1} & \cong & V_{\psi_2} \oplus V_\rho \\ V \otimes V_{\psi_2} & \cong & V_{\psi_1} \oplus V_\rho \\ V \otimes V_{\psi_3} & \cong & V_{\psi_4} \oplus V_\rho \\ V \otimes V_{\psi_4} & \cong & V_{\psi_3} \oplus V_\rho \\ V \otimes V_\rho & \cong & V_{\psi_1} \oplus V_{\psi_2} \oplus V_{\psi_3} \oplus V_{\psi_4} \oplus V_\rho \end{cases}$$

En particulier le diagramme de McKay associé à W_+ est



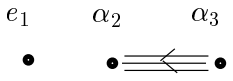
En effet, soit e_1 une V_{ψ_2}-base et $\{e_2, e_3\}$ une V_ρ-base, alors

– si ε est une V_{ψ_1}-base, $e_1 \otimes \varepsilon$ est une V_{ψ_2}-base et $\{e_2 \otimes \varepsilon, e_3 \otimes \varepsilon\}$ est une V_ρ-base,

- si ε est une V_{ψ_2}-base, $e_1 \otimes \varepsilon$ est une V_{ψ_1}-base et $\{e_3 \otimes \varepsilon, -e_2 \otimes \varepsilon\}$ est une V_ρ-base,
- si ε est une V_{ψ_3}-base, $e_1 \otimes \varepsilon$ est une V_{ψ_4}-base et $\{e_3 \otimes \varepsilon, e_2 \otimes \varepsilon\}$ est une V_ρ-base,
- si ε est une V_{ψ_4}-base, $e_1 \otimes \varepsilon$ est une V_{ψ_3}-base et $\{e_2 \otimes \varepsilon, -e_3 \otimes \varepsilon\}$ est une V_ρ-base,
- si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une V_ρ-base, $\{e_1 \otimes \varepsilon_2, -e_1 \otimes \varepsilon_1\}$ est une V_ρ-base, $e_2 \otimes \varepsilon_1 + e_3 \otimes \varepsilon_2$ est une V_{ψ_1}-base, $e_2 \otimes \varepsilon_1 - e_3 \otimes \varepsilon_2$ est une V_{ψ_4}-base, $e_2 \otimes \varepsilon_2 + e_3 \otimes \varepsilon_1$ est une V_{ψ_3}-base, et $e_2 \otimes \varepsilon_2 - e_3 \otimes \varepsilon_1$ est une V_{ψ_2}-base.

A.4 $\mathbf{A_1 \times G_2}$

Considérons le système de racines $\mathrm{R} = A_1 \times G_2$, défini dans $\mathbb{R}^4$ comme l'union du système de racines $A_1 = \{\pm e_1\}$, dont un système générateur est e_1, et du système G_2 formé des deux ou six-racines de l'intersection de l'hyperplan $V = \{\xi_1 e_2 + \xi_2 e_3 + \xi_3 e_4 \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}$ avec $\mathbb{Z}^3$. Ainsi, $G_2 = \{\pm(e_2 - e_3), \pm(e_2 - e_4), \pm(e_3 - e_4), \pm(2e_2 - e_3 - e_4), \pm(2e_3 - e_2 - e_4), \pm(2e_4 - e_2 - e_3)\}$. Une base de G_2 est $\alpha_1 = e_2 - e_3,\ \alpha_2 = 2e_2 - e_3 - e_4$, avec $(\alpha_1, \alpha_2) = 3$. Finalement le système de racines $\mathrm{R} = A_1 \times G_2$ est le suivant.



Alors $W(\mathrm{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{D}_6$. Le premier facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $Q = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2$ par multiplication par (-1) sur le premier facteur, le deuxième facteur $\mathbb{D}_6 =< s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}, s_{\alpha_1} >=< r_1, s_1 >$ agit comme le groupe des isométries de l'hexagone. Soit W_+ le sous-groupe des produits pairs de réflexions de W. Alors W_+ est isomorphe à $\mathbb{D}_6 =< r, s >$, où $r = (1, r_1)$ et $s = (-1, s_1)$.

Ainsi, sa table de représentations irréductibles est la suivante.

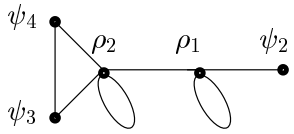
	r	s
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	-1	1
ψ_4	-1	-1
ρ_1	$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
ρ_2	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^{-2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

où $\omega = e^{i\pi/3}$, racine primitive sixième de l'unité.

La représentation $Q \otimes \mathbb{C}$ de W_+ est $V = V_{\psi_2} \oplus V_{\rho_1}$, de sorte que

$$\begin{cases} V \otimes V_{\psi_1} & \cong & V_{\psi_2} \oplus V_{\rho_1} \\ V \otimes V_{\psi_2} & \cong & V_{\psi_1} \oplus V_{\rho_1} \\ V \otimes V_{\psi_3} & \cong & V_{\psi_4} \oplus V_{\rho_2} \\ V \otimes V_{\psi_4} & \cong & V_{\psi_3} \oplus V_{\rho_2} \\ V \otimes V_{\rho_1} & \cong & V_{\psi_1} \oplus V_{\psi_2} \oplus V_{\rho_1} \oplus V_{\rho_2} \\ V \otimes V_{\rho_2} & \cong & V_{\psi_3} \oplus V_{\psi_4} \oplus V_{\rho_3} \oplus V_{\rho_4}. \end{cases}$$

En particulier le diagramme de McKay associé à W_+ est le suivant.



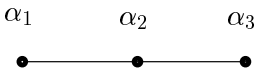
En effet, soit e_1 une V_{ψ_2}-base et $\{e_2, e_3\}$ une V_{ρ_1}-base, alors

- si ε est une V_{ψ_1}-base, $e_1 \otimes \varepsilon$ est une V_{ψ_2}-base et $\{e_2 \otimes \varepsilon, e_3 \otimes \varepsilon\}$ est une V_{ρ_1}-base,
- si ε est une V_{ψ_2}-base, $e_1 \otimes \varepsilon$ est une V_{ψ_1}-base et $\{e_2 \otimes \varepsilon, -e_3 \otimes \varepsilon\}$ est une V_{ρ_1}-base,
- si ε est une V_{ψ_3}-base, $e_1 \otimes \varepsilon$ est une V_{ψ_4}-base et $\{e_3 \otimes \varepsilon, e_2 \otimes \varepsilon\}$ est une V_{ρ_2}-base,
- si ε est une V_{ψ_4}-base, $e_1 \otimes \varepsilon$ est une V_{ψ_3}-base et $\{e_3 \otimes \varepsilon, -e_2 \otimes \varepsilon\}$ est une V_{ρ_2}-base,

- si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une V_{ρ_1}-base, $\{e_1 \otimes \varepsilon_1, -e_1 \otimes \varepsilon_2\}$ est une V_{ρ_1}-base, $\{e_2 \otimes \varepsilon_1, e_3 \otimes \varepsilon_2\}$ est une V_{ρ_2}-base, $e_2 \otimes \varepsilon_2 + e_3 \otimes \varepsilon_1$ est une V_{ψ_1}-base, et $e_2 \otimes \varepsilon_2 - e_3 \otimes \varepsilon_1$ est une V_{ψ_2}-base,
- si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une V_{ρ_2}-base, $\{e_1 \otimes \varepsilon_1, -e_1 \otimes \varepsilon_2\}$ est une V_{ρ_2}-base, $\{e_3 \otimes \varepsilon_1, e_2 \otimes \varepsilon_2\}$ est une V_{ρ_1}-base, $e_2 \otimes \varepsilon_1 + e_3 \otimes \varepsilon_2$ est une V_{ψ_3}-base, et $e_2 \otimes \varepsilon_1 - e_3 \otimes \varepsilon_2$ est une V_{ψ_4}-base.

A.5 A_3

On définit le système de racines $\mathrm{R} = A_3$ comme étant l'ensemble de tous les vecteurs de longueur $\sqrt{2}$ et appartenant à l'intersection de $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ avec le réseau $e_1\mathbb{Z} \oplus e_2\mathbb{Z} \oplus e_3\mathbb{Z} \oplus e_4\mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{R} = \{e_i - e_j, 1 \leq i \neq j \leq 4\}$, et on peut prendre $\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3,\ \alpha_3 = e_3 - e_4$ comme système générateur, de sorte que le système de racines A_3 est le suivant.



Le groupe $W(\mathrm{R}) = \mathfrak{S}_4$ agit sur $Q = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \mathbb{Z}\alpha_3$ par permutation des e_i. Soit W_+ le sous-groupe des produits pairs de réflexions de W. Alors W_+ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ de sorte que $F(W_+) = \{1,\ (12)(34),\ (123),\ (132)\}$ est un système de représentants des classes de conjugaisons de W_+ et sa table de représentations irréductibles est la suivante.

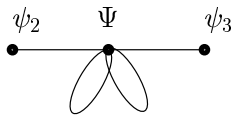
	$(12)(34)$	(123)	(132)
ψ_1	1	1	1
ψ_2	1	j	j^2
ψ_3	1	j^2	j
Ψ	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

où $j = e^{2i\pi/3}$ est une racine primitive troisième de l'unité.

La représentation $Q \otimes \mathbb{C}$ de W_+ est V_Ψ, de sorte que

$$\begin{cases} V \otimes V_{\psi_1} & \cong & V_\Psi \\ V \otimes V_{\psi_2} & \cong & V_\Psi \\ V \otimes V_{\psi_3} & \cong & V_\Psi \\ V \otimes V_\Psi & \cong & V_{\psi_1} \oplus V_{\psi_2} \oplus V_{\psi_3} \oplus V_\Psi \oplus V_\Psi. \end{cases}$$

En particulier le diagramme de McKay associé à W_+ est le suivant.



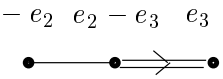
En effet, soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une V_Ψ-base, alors
- si ε est une V_{ψ_1}-base, $\{e_1 \otimes \varepsilon, e_2 \otimes \varepsilon, e_3 \otimes \varepsilon, \}$ est une V_Ψ-base,
- si ε est une V_{ψ_2}-base, $\{e_1 \otimes \varepsilon, je_2 \otimes \varepsilon, j^2 e_3 \otimes \varepsilon, \}$ est une V_Ψ-base,
- si ε est une V_{ψ_3}-base, $\{e_1 \otimes \varepsilon, j^2 e_2 \otimes \varepsilon, je_3 \otimes \varepsilon, \}$ est une V_Ψ-base,
- si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une V_Ψ-base, $\{e_2 \otimes \varepsilon_3, e_3 \otimes \varepsilon_1, e_1 \otimes \varepsilon_2\}$ est une V_Ψ-base, $\{e_3 \otimes \varepsilon_2, e_1 \otimes \varepsilon_3, e_2 \otimes \varepsilon_1\}$ est une V_Ψ-base, $e_1 \otimes \varepsilon_1 + e_2 \otimes \varepsilon_2 + e_3 \otimes \varepsilon_3$ est une V_{ψ_1}-base, $e_1 \otimes \varepsilon_1 + j^2 e_2 \otimes \varepsilon_2 + je_3 \otimes \varepsilon_3$ est une V_{ψ_2}-base, et $e_1 \otimes \varepsilon_1 + j^2 e_2 \otimes \varepsilon_2 + je_3 \otimes \varepsilon_3$ est une V_{ψ_3}-base.

A.6 B_3

On définit $\mathrm{R} = B_3$ comme étant l'ensemble des vecteurs de longueurs 1 ou $\sqrt{2}$ de $\mathbb{R}^3$ appartenant au réseau standard $e_1\mathbb{Z} \oplus e_2\mathbb{Z} \oplus e_3\mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{R} = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j, 1 \leq i \neq j \leq 3\}$, et on peut prendre

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3,\ \alpha_3 = e_3$$

comme système générateur, de sorte que le système de racines est le suivant.



Le groupe $W(R) = \mathfrak{S}_3 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ agit sur $Q = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \mathbb{Z}\alpha_3$ par permutation des e_i pour la première composante et multiplication par (-1) pour la deuxième.

A.6.1 Identification de $W_+(B_3)$ et $\mathfrak{S}_4$.

Rappelons que W_+ est défini comme étant le sous-groupe des permutations paires de $W = \mathfrak{S}_3 \rtimes (\mathbb{Z}/2)^3$. Ce sont les couples $(\sigma, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3))$ avec σ paire et $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$ ou σ impaire et $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$.

On peut identifier $W_+(B_3)$ à $\mathfrak{S}_4$ comme suit.

$I_{\mathfrak{S}_4} \leftrightarrow (I_{\mathfrak{S}_3}, (1,1,1))$

$(12) \leftrightarrow ((23), (-1,1,1))$
$(13) \leftrightarrow ((13), (1,-1,1))$
$(14) \leftrightarrow ((12), (1,1,-1))$
$(23) \leftrightarrow ((12), (-1,-1,-1))$
$(24) \leftrightarrow ((13), (-1,-1,-1))$
$(34) \leftrightarrow ((23), (-1,-1,-1))$

$(123) \leftrightarrow ((132), (-1,1,-1))$
$(132) \leftrightarrow ((123), (1,-1,-1))$
$(124) \leftrightarrow ((123), (-1,-1,1))$
$(142) \leftrightarrow ((132), (1,-1,-1))$
$(134) \leftrightarrow ((132), (-1,-1,1))$
$(143) \leftrightarrow ((123), (-1,1,-1))$
$(234) \leftrightarrow ((123), (1,1,1))$
$(243) \leftrightarrow ((132), (1,1,1))$

$(12)(34) \leftrightarrow (I, (1,-1,-1))$
$(13)(24) \leftrightarrow (I, (-1,1,-1))$
$(14)(23) \leftrightarrow (I, (-1,-1,1))$

$(1234) \leftrightarrow ((13), (1,1,-1))$
$(1432) \leftrightarrow ((13), (-1,1,1))$
$(1324) \leftrightarrow ((23), (1,1,-1))$
$(1423) \leftrightarrow ((23), (1,-1,1))$
$(1243) \leftrightarrow ((12), (1,-1,1))$
$(1342) \leftrightarrow ((12), (-1,1,1))$

A.6.2 Représentations irréductibles de $W_+ = \mathfrak{S}_4$.

Le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède deux représentations irréductibles de degré 1 : V_0 la représentation triviale et V_ε la signature, une représentation de degré 2 : V_θ et deux représentations de degré 3 : V_ψ et $V_{\varepsilon\psi}$. $F(W_+) = \{I, (12),\ (12)(34),\ (123),\ (1234)\}$ est un système de représentants des classes de conjugaisons de W_+ et on prendra la table suivante pour table de représentations de W_+.

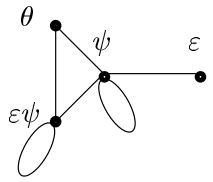
i	(12)	$(12)(34)$	(123)	(1234)
0	1	1	1	1
ε	-1	1	1	-1
θ	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
ψ	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\varepsilon\psi$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A.6.3 Diagramme de McKay

La représentation $Q \otimes \mathbb{C}$ de W_+ est $V = V_{\varepsilon\psi}$, de sorte que

$$\begin{cases} V \otimes V_0 & \cong & V_{\varepsilon\psi} \\ V \otimes V_\varepsilon & \cong & V_\psi \\ V \otimes V_\theta & \cong & V_\psi \oplus V_{\varepsilon\psi} \\ V \otimes V_\psi & \cong & V_\varepsilon \oplus V_\theta \oplus V_\psi \oplus V_{\varepsilon\psi} \\ V \otimes V_{\varepsilon\psi} & \cong & V_0 \oplus V_\theta \oplus V_\psi \oplus V_{\varepsilon\psi} \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de McKay associé à W_+ est le suivant.



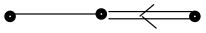
En effet, soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une $V_{\varepsilon\psi}$-base, alors

- si ε est une V_0-base, $\{e_1 \otimes \varepsilon, e_2 \otimes \varepsilon, e_3 \otimes \varepsilon\}$ est une $V_{\varepsilon\psi}$-base,
- si ε est une V_ε-base, $\{e_1 \otimes \varepsilon, e_2 \otimes \varepsilon, e_3 \otimes \varepsilon, \}$ est une V_ψ-base,
- si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une V_θ-base, $\{e_1 \otimes (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), -e_2 \otimes \varepsilon_1, -e_3 \otimes \varepsilon_2\}$ est une $V_{\varepsilon\psi}$-base, et $\{e_1 \otimes (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), e_2 \otimes (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1), -e_3 \otimes (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\}$ est une V_ψ-base,
- si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une V_ψ-base, $e_1 \otimes \varepsilon_1 + e_2 \otimes \varepsilon_2 + e_3 \otimes \varepsilon_3$ est une V_ε-base, $\{-(e_3 \otimes \varepsilon_3 + e_1 \otimes \varepsilon_1), (e_2 \otimes \varepsilon_2 + e_1 \otimes \varepsilon_1)\}$ est une V_θ-base, $\{e_3 \otimes \varepsilon_2 + e_2 \otimes \varepsilon_3, e_1 \otimes \varepsilon_3 + e_3 \otimes \varepsilon_1, e_1 \otimes \varepsilon_2 + e_2 \otimes \varepsilon_1\}$ est une $V_{\varepsilon\psi}$-base, et $\{e_2 \otimes \varepsilon_3 - e_3 \otimes \varepsilon_2, e_3 \otimes \varepsilon_1 - e_1 \otimes \varepsilon_3, e_1 \otimes \varepsilon_2 - e_2 \otimes \varepsilon_1\}$ est une V_ψ-base.
- si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une $V_{\varepsilon\psi}$-base, $e_1 \otimes \varepsilon_1 + e_2 \otimes \varepsilon_2 + e_3 \otimes \varepsilon_3$ est une V_0-base, $\{-(e_3 \otimes \varepsilon_3 - e_1 \otimes \varepsilon_1), (e_2 \otimes \varepsilon_2 - e_1 \otimes \varepsilon_1)\}$ est une V_θ-base, $\{e_3 \otimes \varepsilon_2 + e_2 \otimes \varepsilon_3, e_1 \otimes \varepsilon_3 + e_3 \otimes \varepsilon_1, e_1 \otimes \varepsilon_2 + e_2 \otimes \varepsilon_1\}$ est une V_ψ-base, et $\{e_2 \otimes \varepsilon_3 - e_3 \otimes \varepsilon_2, e_3 \otimes \varepsilon_1 - e_1 \otimes \varepsilon_3, e_1 \otimes \varepsilon_2 - e_2 \otimes \varepsilon_1\}$ est une $V_{\varepsilon\psi}$-base.

A.7 C_3

Le système de racines C_3 est dual du système B_3.

$$e_1 - e_2 \quad e_2 - e_3 \quad 2e_3$$



Ils ont donc même groupe de Weyl et même sous-groupe W_+. Le réseau est le réseau dual, mais l'action sur le $\mathbb{C}$ espace vectoriel $V = Q \otimes \mathbb{C}$ est la même, de sorte que le diagramme de McKay est identique à celui de $W_+(B_3)$.

Annexe B

Singularités affines associées à un système de racines en dimension deux

En dimension deux, les singularités affines associées à un système de racines sont des revêtement doubles du plan. Il s'agit donc des singularités de Klein, ou encore connues sous la classification *A-D-E*. On va ici voir la correspondance entre cette terminologie et le système de racine associé à la singularité, puis on verra comment ces singularités sont résolues par la Méthode de Klein et par le schéma de Hilbert.

B.1 Terminologie

$\mathbf{A_1 \times A_1}$ Le système de racines $A_1 \times A_1$ a pour groupe de Weyl $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et $W_+ = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{(1,1),(-1,-1)\}$ agissant sur $\mathbb{A}^2$. La singularité $X_{A_1 \times A_1}$ est donc la singularité de Klein de type A_1.

$\mathbf{A_2}$ Le système de racines A_2 a pour groupe de Weyl $\mathfrak{S}_3$, de sorte que $W_+ = \mathfrak{A}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Ainsi, la singularité X_{A_2} est la singularité de Klein de type A_2.

$\mathbf{B_2}$ Le système de racines B_2 a pour groupe de Weyl $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, de sorte que $W_+ = \{(1,(1,1)),(1,(-1,-1)),(\tau,(-1,1)),(\tau,(1,-1))\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, car $(\tau,(-1,1))$ est d'ordre 4. Ainsi, la singularité X_{B_2} est la singularité de Klein de type A_3.

B.2 Résolution par la méthode de Jung

D'après le théorème de Horikawa, les singularités de Klein peuvent toutes être résolues par la méthode de Jung. Nous donnons ici les détails des calculs, car il seront utiles pour vérifier que l'on a bien résolu globalement les singularités dans le cas global (chapitre 3).

$\mathbf{A_1 \times A_1}$ Le lieu de branchement du revêtement double $X_{A_1 \times A_1}$ est donnée par l'équation reliant l'anti-invariant $\Delta = x_1 x_2$ et les monômes générateurs des W-invariants

$u = x_1^2$ et $v = x_2^2$. On a

$$X_{A_1 \times A_1} = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[u, v, \Delta]/(\Delta^2 - uv) \longrightarrow \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[u, v]).$$

En particulier le lieu de branchement B a pour équation $uv = 0$ dans $\mathbb{A}^2$. Cette singularité se résout en un éclatement de l'origine, ce qui fait apparaître un diviseur exceptionnel $E_1 \cong \mathbb{P}^1$. Lors du revêtement double de $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^2)$ avec pour lieu de branchement la transformée stricte de B, l'image réciproque de E_1 est un revêtement étale de E_1, de sorte qu'il est lui même isomorphe à $\mathbb{P}^1$.

$\mathbf{A_2}$ Le lieu de branchement du revêtement double X_{A_2} est donnée par l'équation reliant l'anti-invariant $\Delta = z^3 - y^3$ et les monômes générateurs des W-invariants $u = yz$, $v = y^3 + z^3$. On a

$$X_{A_2} = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[u, v, \Delta]/(\Delta^2 - v^2 + 4u^3) \longrightarrow \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[u, v]).$$

En particulier le lieu de branchement B a pour équation $v^2 - 4u^3 = 0$ dans $\mathbb{A}^2$. Pour résoudre cette singularité, on éclate $\mathbb{A}^2$ en $(0, 0)$.

- Dans la carte $U_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v/u]$, le diviseur exceptionnel a pour équation $E_1 \cap U_1 : u = 0$, la transformée stricte de B est $B_1 \cap U_1 : v_1^2 - 4u = 0$ est lisse. De plus, son intersection avec E_1 a pour équation un carré.
- Dans la carte $U_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u/v, v])$, on a $E_1 \cap U_2 : v = 0$ et $B_1 \cap U_2 : 1 - 4u = 0$ est lisse et ne rencontre pas E_1.

On a résolu la singularité du lieu de branchement en un éclatement de l'origine, ce qui fait apparaître un diviseur exceptionnel $E_1 \cong \mathbb{P}^1$. Lors du revêtement double de $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^2)$ avec pour lieu de branchement B_1, l'image réciproque de E_1 se scinde en deux branches isomorphes à $\mathbb{P}^1$ et se rencontrant en un point.

$\mathbf{B_2}$ Le lieu de branchement du revêtement double X_{B_2} est donnée par l'équation reliant l'anti-invariant $\Delta = yz(y^2 - z^2)$ et les monômes générateurs des W-invariants $u = y^2 + z^2$, $v = y^2 z^2$. On a

$$X_{A_2} = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[u, v, \Delta]/(\Delta^2 - u^2 v + 4v^2) \longrightarrow \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[u, v]).$$

En particulier le lieu de branchement B a pour équation $v(u^2 - 4v) = 0$ dans $\mathbb{A}^2$. Pour résoudre cette singularité, on éclate $\mathbb{A}^2$ en $(0, 0)$.

- Dans la carte $U_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v/u]$, le diviseur exceptionnel a pour équation $E_1 \cap U_1 : u = 0$, la transformée stricte de B est $B_1 \cap U_1 : v_1(u - 4v_1) = 0$. C'est le lieu de branchement d'une singularité associé à un système de racines $A_1 \times A_1$. Elle se résout en un éclatement.
- Dans la carte $U_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u/v, v])$, on a $E_1 \cap U_2 : v = 0$ et $B_1 \cap U_2 : u_2^2 v - 4 = 0$ est lisse et ne rencontre pas E_1.

Pour déterminer la fibre au-dessus de l'origine après la résolution du lieu de branchement, écrivons les équations de des diviseurs exceptionnels après le deuxième éclatement.

- Dans la carte $V_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v/u]$, E_1 n'a pas de trace, et le deuxième diviseur exceptionnel a pour équation $E_2 \cap V_1 : u = 0$, la transformée stricte de B_1 est $B_2 \cap V_1 : v_1(1 - 4v_1) = 0$. Elle est lisse et l'équation de $E_2 \cap B_1 \cap V_1$ n'est pas un carré.
- Dans la carte $V_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u/v, v])$, on a $E_1 \cap V_2 : u = 0$ et $E_2 \cap V_2 : v = 0$. La transformée stricte du lieu de branchement a pour équation $B_2 \cap U_2 : u - 4 = 0$. En particulier, elle est lisse et ne rencontre pas E_1.

Finalement, lors du revêtement double de l'éclaté de $\mathbb{A}^2$ avec pour lieu de branchement B_2, l'image réciproque F_2 de E_2 est un revêtement étale de E_2, de sorte qu'il est lui même isomorphe à $\mathbb{P}^1$, et l'image réciproque de E_1 se scinde en deux branches isomorphes à $\mathbb{P}^1$, rencontrant chacune F_2 en un point, et ne se rencontrant pas l'une l'autre.

B.3 Résolution par le schéma de Hilbert

D'après le théorème de Ito et Nakamura, le schéma de Hilbert W_+-équivariant donne la résolution minimale des singularités de Klein. En particulier, on a ici coïncidence entre la résolution par le schéma de Hilbert et par la méthode de Jung.

Annexe C

Sur les singularités

Dans cette annexe, nous donnons le vocabulaire de base utilisé dans la thèse sur les singularités et leurs résolutions ; et nous énonçons les théorèmes d'existence de résolutions crépantes en dimension trois.

C.1 Définitions

C.1.1 Singularités

Définition C.1.1 *Un schéma X est dit régulier en $x \in X$ si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, c'est à dire si $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$, où $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Si X n'est pas régulier en x, il est singulier en x.*

Proposition C.1.2 ([Har77]) *Soit X une variété et S le lieu singulier de X. Alors S est un sous espace fermé propre de X.*

Définition C.1.3 *Soit X un schéma et G un groupe agissant sur X. On dit que X est G-admissible si il existe un recouvrement d'ouverts affines $\cup_{i\in I}U_i$ de X tel que U_i est G-stable pour tout $i \in I$.*

Définition et proposition C.1.4 *Soit X un schéma et G un groupe fini d'automorphismes de X, agissant de telle sorte que X est G-admissible. Alors il existe un schéma quotient X/G et un morphisme $X \xrightarrow{\pi} X/G$ par lequel factorisent tous les morphismes $X \longrightarrow Y$ qui sont G-invariants.*

Remarque : Localement, il donnée par $\mathrm{Spec}(A)/G = \mathrm{Spec}(A^G)$.

Définition C.1.5 *On appelle orbifold complexe une variété X de dimension n localement isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n/G$ pour $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, au sens de la topologie étale (voir [Mum83]).*

Définition C.1.6 *Soit X une orbifold complexe. Pour tout point x de X, il existe un sous-groupe G_x de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ unique à conjugaison près tel que des voisinages ouverts de $x \in X$ et de $0 \in \mathbb{C}^n/G_x$ sont homéomorphes. On appelle G_x le groupe orbifold de X en x.*

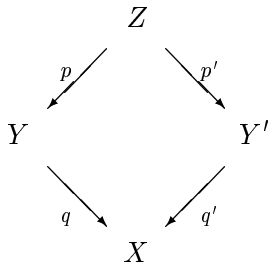
Exemple : Si $Y = X/G$ est un schéma quotient d'une variété X, alors Y est une orbifold. Les groupes orbifolds de Y sont des sous-groupes de G : ce sont les stabilisateurs de points de x sous l'action de G.

C.1.2 Résolutions

Définition C.1.7 *Soit X un schéma normal singulier. Une résolution des singularités de X est la donnée d'un schéma lisse Y et d'un morphisme birationnel propre $Y \xrightarrow{q} X$.*

Définition C.1.8 *Soit $Y \xrightarrow{q} X$ une résolution de singularités. Le lieu exceptionnel E de q est l'ensemble des points e de Y tel que $\dim(q^{-1}q(e)) \geq 1$. Généralement, $E = q^{-1}(S)$, où S est le lieu singulier de X.*

Théorème C.1.9 (Hironaka,[Hir64]) *Soit X une variété normale sur k, corps de caractéristique nulle. Alors il existe une résolution de singularités $q : Y \longrightarrow X$ dont le lieu exceptionnel E est un diviseur à croisements normaux. De plus, q peut être obtenu comme produit d'éclatements de centres lisses, et si $q' : Y' \longrightarrow X$ est une autre résolution, il existe un carré commutatif*



où p et p' sont des produits d'éclatements de centres lisses.

Soit X une variété (normale) singulière et $Y \xrightarrow{q} X$ une résolution des singularités de X. On peut définir un faisceau divisoriel ω_X par $\omega_X = j_*\omega_{X_0}$, où $X_0 \xhookrightarrow{j} X$ est le lieu régulier de X. On définit le diviseur de Weil K_X comme celui vérifiant $\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$.

Définition C.1.10 *Une résolution $Y \xrightarrow{q} X$ est dite crépante si ω_X est inversible (X est de Gorenstein) et vérifie l'égalité*

$$\omega_Y = q^*\omega_X.$$

Définition C.1.11 *Soit X une variété de Gorenstein et $q : Y \longrightarrow X$ une résolution de singularités. Le diviseur $\Delta = K_Y - q^*K_X$ s'appelle diviseur de discrépance de la résolution. On a $\Delta = \sum a_i D_i$, où $\cup D_i = E$, le diviseur exceptionnel de q. Alors X admet des singularités canoniques si les a_i sont tous positifs ou nuls, et terminales si ils sont strictement positifs.*

On peut démontrer que ces définitions sont indépendantes de la résolution.
Remarque : Une singularité admettant une résolution crépante est canonique. Une singularité terminale n'admet pas de résolution crépante. Reid démontre qu'une singularité de type $\mathbb{C}^n/G$, où G est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est terminale, si et seulement si l'âge de chaque élément du groupe est différent de 1.

C.2 Résolutions de singularités en dimension deux et trois

Théorème C.2.1 *Une surface complexe X a des singularités canoniques en x si et seulement si (X, x) est isomorphe à $(\mathbb{A}^2/G, 0)$, où G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Ces singularités sont de Gorenstein et admettent une unique résolution minimale, qui est crépante.*

Théorème C.2.2 ([Roa96], ...) *Si G est un sous groupe fini de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$, alors la singularité quotient $\mathbb{C}^3/G$ admet une résolution crépante*

Théorème C.2.3 *Si X est une orbifold de Gorenstein complexe de dimension trois tel que les groupes orbifolds sont dans $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$, alors X admet une résolution crépante.*

Remarque : En dimension quatre, il existe des orbifolds qui n'admettent pas de résolution crépante. Par exemple, d'après le critère de Reid, la singularité $\mathbb{C}^4/\{\pm 1\}$ est terminale. Elle n'admet donc pas de résolution crépante.

Bibliographie

[Ati57] M. F. Atiyah. Vector bundles over an elliptic curve. *Proc. London Math. Soc.*, 7 : pages 414–452, 1957.

[Beĭ79] A. A. Beĭlinson. Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problem of linear algebra. *Funct. Anal. Appl*, 12 : pages 214–216, 1979.

[BGG79] J. Bernstein, I. Gel'fand, et S. Gel'fand. Algebraic bundles over $\mathbb{P}^n$ and problem of linear algebra. *Funct. Anal. Appl*, 12 : pages 212–214, 1979.

[BK90] A. Bondal et M. Kapranov. Representable functors, Serre functors, and mutations. *Math. USSR, Izv.*, 35 : pages 519–541, 1990.

[BKR01] T. Bridgeland, A. King, et M. Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Am. Math. Soc.*, 14 (No.3) : pages 535–554, 2001.

[BM94] J. Bertin et D. Markushevich. Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Calabi-Yau. *Math. Ann.*, 299 : pages 105–116, 1994.

[BM98] T. Bridgeland et A. Maciocia. Fourier-Mukai transforms for quotient varieties. AG/9811101, 1998.

[BO01] A. Bondal et D. Orlov. Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences. *Compos. Math.*, 125 (No.3) : pages 327–344, 2001.

[BO02] A. Bondal et D. Orlov. Derived categories of coherent sheaves. *Proceedings of the international congress of mathematicians,ICM 2002, Beijing, China*, II : pages 47–56, 2002.

[Bon90] A.I. Bondal. Representation of associative algebras and coherent sheaves. *Math. USSR, Izv.*, 34 (No.1) : pages 23–42, 1990.

[Bou81] Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie*, volume Chapitres 4, 5 et 6. Masson, Élements de mathématiques, 1981.

[Bri02] T. Bridgeland. Flops and derived categories. *Invent. Math.*, 147 (No.3) : pages 613–632, 2002.

[BS79] J. Bernstein et O.V. Shvartsman. Chevalley's theorem for complex crystallographic coxeter groups. *Funct. Anal. Appl*, 12 (No.4) : pages 308–310, 1979.

[BS95] C. Bouvier et G. Gonzalez Sprinberg. Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G-désingularisations de variétés toriques. *Tôhoku Math. J.*, II. Ser. 47 No.1 : pages 125–149, 1995.

[Che55] C. Chevalley. Invariants of finite groups generated by reflections. *Amer. J. Math.*, 77 : pages 778–782, 1955.

[DN89] J.-M. Drezet et M.S. Narasimhan. Groupe de picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques. *Invent. Math.*, 97 (No.1) : pages 53–94, 1989.

[Eis95] D. Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.* Springer-Verlag, 1995.

[FMW97] R. Friedman, J. W. Morgan, et E. Witten. Vector bundles and F theory. *Commun. Math. Phys.*, 187 (No.3) : pages 679–743, 1997.

[FMW98] R Friedman, J W Morgan, et E Witten. Principal G-bundles over elliptic curves. *Math. Res. Lett.*, 5 (No.1-2) : pages 97–118, 1998.

[Fog68] J. Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface. *Am. J. Math.*, 90 : pages 511–521, 1968.

[GNS00] Y. Gomi, I. Nakamura, et K.-I. Shinoda. Hilbert schemes of G-orbits in dimension three. *Asian J. Math.*, 4 (No.1) : pages 51–70, 2000.

[Gro57] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J.*, 9 : pages 119–221, 1957.

[GSV83] G. Gonzalez-Sprinberg et J.L. Verdier. Construction géométrique de la correspondance de McKay. *Ann. Sci. École Normale Sup.*, 16 : pages 409–449, 1983.

[Hap87] D. Happel. On the derived category of a finite-dimensional algebra. *Comment. Math. Helv*, 62 : pages 339–389, 1987.

[Har66] R. Hartshorne. *Residues and duality.* Lect. Notes Math. **20**. Springer-Verlag, 1966.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1977.

[Hir64] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. Math.* , 79 (No.2) : pages 109–203 et 205–326, 1964.

[Hor75] E. Horikawa. On deformations of quintic surfaces. *Invent. Math.*, 31, 1975.

[Hum90] J.E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29. Cambridge University Press., 1990.

[IN96] Y. Ito et I. Nakamura. McKay correspondance and Hilbert schemes. *Proc. Japan Acad.*, Ser. A 72 (No.7) : pages 135–138, 1996.

[IN99] Y. Ito et I. Nakamura. Hilbert schemes and simple singularities. *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.*, 264 : pages 151–233, 1999. Hulek, Klaus (ed.) et al., New trends in algebraic geometry. Selected papers presented at the Euro conference, Warwick, UK, July 1996.

[IN00] Y. Ito et H. Nakajima. McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three. *Topology*, 39 (No.6) : pages 1155–1191, 2000.

[IR94] Y. Ito et M. Reid. The McKay correspondance for finite subgroup of $SL(3, \mathbb{C})$. *Andreatta, Marco (ed.) et al., Higher dimensional complex varieties. Proceedings of the international conference, Trento, Italy, June 15–24*, 1994.

[Ive70] B. Iversen. *Linear determinants with applications to the Picard scheme of a family of algebraic curves.* Lect. Notes Math. 174. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Joy00] D. Joyce. *Compact manifolds with special holonomy.* Oxford mathematical monographs, 2000.

[Løn83] K. Lønsted. On G-linebundles and $K_G^{\cdot}(X)$. *J. Math. Kyoto Univ*, 23 (No.4) : pages 775–793, 1983.

[Loo76] E. Looijenga. Root system and elliptic curves. *Invent. Math*, 38 : pages 17–32, 1976.

[McK81] J. McKay. Cartan matrices, finite groups of quaternions, and Kleinian singularities. *Proc. Am. Math. Soc. 81*, pages 153–154, 1981.

[Mum66] D. Mumford. On the equations defining abelian varieties. I-III. *Invent. Math.*, 1 : pages 215–244, 1966.

[Mum74] D. Mumford. *Abelian variety.* Oxford Univesity Press, 1974.

[Mum83] *Arithmetic and geometry. Papers dedicated to I. R. Shafarevich on the occasion of his sixtieth birthday.* volume ii. geometry. Progress in mathematics (36), pages 271–328. Birkhauser, 1983.

[Mum88] D. Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358. Springer, Lecture notes in mathematics, 1988.

[Nak99] H. Nakajima. *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces.* University Lecture Series 18. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS)., 1999.

[Nak01] I. Nakamura. Hilbert schemes of abelian group orbits. *J. Algebr. Geom.*, 10 (No.4) : pages 757–779, 2001.

[Nev02] T. Nevins. Descent of coherent sheaves and complexes to geometric invariant theory quotients. math.AG/0206297, 2002.

[Pol94] A.E. Polishchuk. Bernshtein Gel'fand Gel'fand equivalence for triangulated categories generated by helixes. *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, 43 (No.1) : pages 127–140, 1994.

[Rei87] M. Reid. Young person's guide to canonical singularities. *Proc. Symp. Pure Math.*, 46 : pages 345–414, 1987.

[Rei02] M. Reid. La correspondance de McKay. *Société Mathématique de France, Asterisque*, Séminaire Bourbaki 1999/2000. Exposés 865-879 (276) : pages 53–72, 2002.

[Roa96] S.S. Roan. Minimal resolutions of Gorenstein orbifolds in dimension three. *Topology*, 35 (No.2) : pages 489–508, 1996.

[Rud90] A.N. Rudakov et al. *Helices and vector bundles*, volume 148. Cambridge University Press, London mathematical society lecture note series, 1990.

[Ser67] J.P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Collection méthodes, 1967.

[Ser86] E. Sernesi. *Topics on families of projective schemes*, volume 073. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, 1986.

[Ste64] R. Steinberg. Differential equations invariant under finite reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 112 : pages 392–400, 1964.

[Tér02] S. Térouanne. Sur la catégorie $\mathcal{D}^G(X)$ pour l'action d'un groupe fini avec quotient lisse. Prépublication de l'Institut Fourier No.569, Avril 2002, math.AG/0206144.

[Tér03] S. Térouanne. Sur la catégorie $\mathcal{D}^{b,G}(X)$ pour G réductif fini. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 336 (No.6) : pages 483–486, 2003.