PROPRIÉTÉS DE BIDUALITÉ DES ESPACES DE MODULES EN TERMES DE COHOMOLOGIE DE GROUPES

Valentin SAVIN

Je voudrais tout d'abord remercier Siegmund Kosarew pour avoir coordonné avec beaucoup de patience et de rigueur mathématique mes travaux pendant toutes ces années.

Günter Trautmann et Joseph Le Potier m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse, Chris Peters celui de participer à ce jury. Je tiens à les en remercier.

Je me réjouis de pouvoir exprimer ici ma reconnaissance à ceux qui ont guidé mes tout premiers pas en mathématiques, mes professeurs Vasile Tarciniu et Mihai Teodoru.

Je voudrais aussi remercier le personnel administratif de l'Institut Fourier toujours souriant, de bonne humeur et efficace.

Je remercie France Coeugniet. Son aide m'a été précieuse pour pouvoir finir cette thèse dans de bonnes conditions.

Mes remerciements vont également à mes collègues et à mes amis, tous ceux avec lesquels j'ai partagé une partie de ces dernières années, qu'ils soient loin ou à mes cotés : Michel, Xavier, Stéphane, Paolo, Anca, Renaud, Cécile, Sébastien, Pascale, Renaud, Ioana, Mihai, Louis, Monica, Marian, Cosmin, Mihai, Cornelia, Catalin, Mona, Geo, Traistaru, Cami, Gentiana.

Mes parents Marieana et Vasile, ma sœur Emilia, mon amie Sena, mon cousin Bogdan.

Table des matières

Introduction

Introduction

Avant propos

La théorie des déformations des fibrés vectoriels sur une variété algébrique (ou analytique) X, nous amène à la construction des espaces de modules de fibrés stables. Ces espaces de modules sont des variétés dont l'ensemble des points géométriques est un ensemble de classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels. Pour obtenir des variétés complètes il faut élargir la catégorie des fibrés vectoriels à celle des faisceaux cohérents sans torsion et remplacer la notion de stabilité par celle de semi-stabilité. Dans ce contexte, on obtient des espaces de modules dont l'ensemble des points géométriques est un ensemble de classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables.

La compréhension de ces espaces est un des objets d'étude centraux en géométrie algébrique. On a ainsi remarqué que beaucoup de propriétés de X se répercutent sur ces espaces, et que certaines variétés peuvent être reconstruites à partir de ces espaces de modules.

Si M est un bon espace de modules de fibrés stables, alors il est l'espace de paramètres d'une famille universelle, qu'on appelle aussi fibré de Poincaré

$$W \longrightarrow X \times M$$

Le thème central de cette thèse est l'étude des déformations des fibrés sur M, qu'on obtient en restreignant la famille universelle en les points de X.

Dans certains cas particuliers (lorsque X est une courbe projective [Na-Ra1], une surface $K3$ [M], ou une variété abélienne [Mu]) X est un espace universel de déformations pour ces fibrés. Par conséquent l'application d'évaluation

$$x \longmapsto W_x$$

identifie X à une composante connexe d'un certain espace de modules de fibrés vectoriels sur M. Un tel résultat peut être interprété comme un résultat de dualité, l'application ci-dessus s'identifiant à l'application biduale.

Dans le cas général, l'absence d'une famille universelle empêche la définition d'une application de bidualité. Une des possibilités de dépasser ce problème est de modifier le foncteur de déformation, en rigidifiant la situation. Pour cela, on fixe un point $a \in X$, et on considère l'espace de modules des couples (E, φ), où E est un fibré stable de rang r sur X et φ est un isomorphisme de $\mathbb{C}^r$ sur E_a. On peut voir facilement que ce nouvel espace de modules paramètre une famille universelle. On remarque aussi qu'on peut travailler avec des fibrés simples, mais on obtient un espace de modules qui n'est pas séparé.

Bien sûr, dans le cas général on ne peut pas s'attendre à la bijectivité de l'application biduale (il suffit de considérer des espaces de modules discrets). Néanmoins une question qui se pose naturellement, est sur la surjectivité de cette application. Plus précisément, on veut savoir si X est un espace complet de déformation, ce qui se traduit par la surjectivité de l'application de déformation infinitésimale (K-S) en chaque point de X. On remarque aussi, que pour montrer l'injectivité de l'application K-S, il suffit de construire une famille particulière vérifiant cette propriété (grace au caractère fonctoriel de cette l'application), ce qui n'est pas le cas lorsqu'on veut vérifier la surjectivité de cette application.

Description de la thèse

Cette thèse est divisée en deux parties. La première partie est algébrique et traite le cas des espaces de modules de fibrés vectoriels stables sur une courbe projective X. Nous travaillons sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, mais les résultats obtenus restent vrais, sans aucune modification, sur n'importe quel corps de caractéristique zéro, algébriquement clos. On dénotera par $U(r,\xi)$ l'espace de modules de fibrés stables sur X, de rang r et déterminant isomorphe à ξ, où ξ est un fibré en droites tel que $(r, \deg \xi) = 1$. Nous regardons $U(r,\xi)$ comme une variété duale de X. Le point de départ est un théorème de Narasimhan et Ramanan ([Na-Ra1]) qui peut être interprété comme suit

Théorème de Narasimhan et Ramanan - *Soit W une famille universelle paramétrée par l'espace de modules $U(r,\xi)$. Alors l'application d'évaluation*

$$x \longmapsto W_x$$

est un isomorphisme de X sur une composante connexe d'un espace de modules de fibrés vectoriels sur $U(r,\xi)$

Cela fait de l'application d'évaluation une application de bidualité, tel qu'on l'a expliqué auparavant. Pour avoir une bonne propriété de dualité il faut que les fibrés W_x, obtenus par la restriction de W en les points de X, soient stables. Puisque le groupe de Picard de $U(r,\xi)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, la notion de stabilité ne dépend pas d'une polarisation de $U(r,\xi)$. Nous obtenons le résultat suivant

Théorème 1.24. - *Si $U(r,\xi)$ contient des fibrés $(1,1)$-stables, alors W_x est stable sur $U(r,\xi)$, pour tout $x \in X$.*

L'idée de la démonstration est de regarder les restrictions de W_x sur certaines sous-variétés de $U(r,\xi)$. Ces sous-variétés sont en fait les Hecke-cycles de Naramsimhan et Ramanan ([Na-Ra2]), et elle sont obtenues par des transformations élémentaires de fibrés $(0,1)$-stables. Les restrictions de W_x à ces sous-variétés sont des fibrés semi-stables. Sous des conditions d'existence des fibrés $(1,1)$-stables, nous montrons que de telles sous-variétés "existent partout" dans $U(r,\xi)$ (i.e. pour tout fermé de codimension ≥ 2, il existe une telle sous-variété qui le coupe aussi en codimension ≥ 2). Nous en déduisons la stabilité de W_x. Avec les mêmes considérations nous obtenons aussi

THÉORÈME 1.25. - *Si $U(r,\xi)$ contient des fibrés $(1,1)$-stables alors le fibré adjoint ad_xW est semi-stable, pour tout $x \in X$.*

Un autre fibré qui apparaît naturellement sur $U(r,\xi)$ est le fibré de Picard, qui est par définition l'image directe de W par la deuxième projection

$$p : X \times U(r,\xi) \longrightarrow U(r,\xi)$$

Nous supposerons le degré de ξ suffisamment grand, de sorte que $R^0(p)_*W$ soit localement libre. La stabilité de ce fibré reste encore un problème ouvert. Nous appliquons les constructions antérieures au fibré de Picard, et nous obtenons la $(0,-1)$-stabilité de celui-là (en fait il s'agit d'une condition un peu plus forte, qui se situe entre la $(0,-1)$-stabilité et la stabilité) :

THÉORÈME 1.31. - *Si $U(r,\xi)$ contient des fibrés $(1,1)$-stables, alors le fibré de Picard $R^0(p)_*W$ est $(0,-1)$-stable sur $U(r,\xi)$.*

De plus, si $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau de $R^0(p)_*W$, avec quotient sans torsion, et tel que $\mu(\mathcal{F}) \geq \mu(R^0(p)_*W)$, alors $\mu(\mathcal{F}) = \frac{l}{r} degH$, où H est le générateur ample du groupe de Picard de $U(r,\xi)$.

La deuxième partie de la thèse est un travail analytique, qui traite les déformations du fibré de Poincaré en termes de cohomologie de groupes. On dénotera par X une variété complexe, lisse et compacte de dimension quelconque. Le point de départ est un théorème de S. Kosarew ([Kos]) qui montre qu'un espace de Stein peut être récupéré à partir de son $GL_r(\mathbb{C})$-spectrum.

THÉORÈME DE KOSAREW - *Soient r un entier ≥ 2 et U un espace de Stein complexe. Considérons l'application d'évaluation suivante :*

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & Mor_e(Mor(U, GL_r(\mathbb{C})), GL_r(\mathbb{C})) \\ x & \longmapsto & \phi_x : f \mapsto f(x) \end{array}$$

où $Mor(U, GL_r(\mathbb{C})) \overset{not}{=} G$ est le groupe topologique des applications holomorphes sur U à valeurs dans $GL_r(\mathbb{C})$, et $Mor_e(G, GL_r(\mathbb{C}))$ dénote l'ensemble des homomorphismes continues de groupes de G dans $GL_r(\mathbb{C})$, qui sont invariants par les actions (à gauche et à droite) de $GL_r(\mathbb{C})$ sur les deux groupes.

Alors, l'application d'évaluation ci-dessus est injective, et pour chaque élément $\lambda \in Mor_e(G, GL_r(\mathbb{C}))$ il existe
1. *un point $x_0 \in U$,*
2. *un homomorphisme continu de groupes $\delta : H^0(U, \mathcal{O}_U^*) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $\delta(c) = 1$ pour toute fonction c, localement constante,*
3. *un homomorphisme $\mu : G/G^0 \longrightarrow \mathbb{C}^*$, où G^0 dénote la composante connexe de l'unité de G; tels que :*

$$\lambda(f) = f(x_0) \cdot \delta(\det(f)) \cdot \mu(f \cdot G^0)$$

De plus, x_0, δ et μ sont uniquement déterminés par λ.

A l'aide de ce théorème nous identifions localement X à un ensemble de cohomologie de groupes. Cela est fait en considérant $\underline{\mathcal{U}} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement fini, avec des ouverts de Stein de X. D'autre part, les fibrés vectoriels de rang r trivialisés par $\underline{\mathcal{U}}$ sont classifiés par l'ensemble des Čech-cocycles

$$Z = Z^1(\underline{\mathcal{U}}, GL_r(\mathcal{O}_X))$$

et on a une opération par conjugaison, du groupe $G = C^0(\underline{\mathcal{U}}, GL_r(\mathcal{O}_X))$, qui correspond aux isomorphismes de fibrés vectoriels. Le quotient par cette opération sera dénoté par M. Afin de munir de Z d'une structure analytique, on doit considérer seulement les Čech-cocycles bornés par rapport à la norme induite par celle sur $M_r(\mathbb{C})$. Si on se restreint aussi aux cocycles représentant des fibrés simples (ou stables), M est l'espace de modules de fibrés simples (respectivement stables) sur X. Au dessus de $X \times Z$ il y a un G-fibré tautologique T, obtenu en recollant $U_i \times Z \times \mathbb{C}^r$. Pour le moment, on va supposer que T descend en une famille universelle W, paramétrée par M. On note aussi

$$A = \mathrm{Mor}(Z, GL_r(\mathbb{C}))$$

Nous montrons que les déformations de W_x sont paramétrées par l'ensemble de cohomologie de groupes $H^1(G, A)$, et que l'application d'évaluation correspond à l'application canonique

$$H^1(G, GL_r(\mathbb{C})) \longrightarrow H^1(G, A) \tag{0.1}$$

On remarque que si M est compact, alors $GL_r(\mathbb{C}) = A^G$. Nous voulons montrer que l'application ci-dessus est une surjection sur une certaine composante connexe. Si les ensembles cohomologiques ci-dessus, sont des *variétés* il suffit de montrer que toutes les applications tangentes sont surjectives, ce qui revient à un problème similaire, mais en cohomologie abélienne. Puisque ces ensembles cohomologiques ne sont pas généralemmet des variétés, nous remplaçons les ensembles cohomologiques par un foncteur cohomologique et nous donnons une description du foncteur tangent. On note par $H^1(-\times G, A)$ le foncteur cohomologique et par $TH^1(-\times G, A)$ son foncteur tangent. Pour un élément $\alpha \in Z^1(G, A)$, on dénote par $\mathfrak{a}_\alpha$ le G-module dont le groupe sous-jacent est l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A, et l'action de G est celle induite par l'action sur A conjuguée par α. On dénote aussi par π l'application canonique $TH^1(-\times G, A) \xrightarrow{\pi} H^1(-\times G, A)$. On utilisera des notations analogues pour le foncteur $Z^1(-\times G, A)$. Nous obtenons

THÉORÈME 2.10 - *Il existe des isomorphismes naturels :*

1. $\pi(p_0)^{-1}(\alpha) \cong Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$, *où* $p_0 = Spec(\mathbb{C})$
2. *Si* α *et* β *ont la même classe de cohomologie dans* $H^1(G, A)$, *alors* $H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha) \cong H^1(G, \mathfrak{a}_\beta)$ *et* $\pi(p_0)^{-1}([\alpha]) \cong H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$, *où* $[\alpha]$ *dénote la classe de cohomologie de* α.

Nous utilisons ce théorème pour décrire *l'application tangente* de 0.1. Nous obtenons une application

$$H^1(G, M_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}) \to H^1(G, \mathfrak{a}_{\alpha_x}) \tag{0.2}$$

où $\alpha_x \in H^1(G, GL_r(\mathbb{C}))$ est le cocycle d'évaluation en x. Cette application n'est rien d'autre que l'application Kodaira-Spencer en termes de cohomologie de groupes. Nous faisons le lien avec le point de vue classique en montrant la proposition suivante

PROPOSITION 2.14 - *Avec les notations ci-dessus, on a un isomorphisme canonique*

$$H^1(G, \mathfrak{a}_{\alpha_x}) \cong Ker\left(H^1(M, End(W_x)) \xrightarrow{\pi^*} H^1(Z, \mathcal{O}_Z(M_r))\right)$$

où π *dénote la projection canonique* $Z \xrightarrow{\pi} M$ *et* $\mathcal{O}_Z(M_r)$ *est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur* Z *à valeurs dans* $M_r(\mathbb{C})$.

Sachant que l'espace M ne paramètre pas toujours une famille universelle, nous introduisons la notion de fibré a-rigide : C'est un couple (E, φ), où E est un fibré de rang r sur X et φ est un isomorphisme de $\mathbb{C}^r$ sur E_a, a étant un point fixé de X. L'espace de modules de fibrés simples a-rigides sera noté par M_a. Il paramètre une famille universelle, dénotée par W. L'universalité de W induit une action de $\mathbb{P}GL_r(\mathbb{C})$ sur M_a, et le quotient de M_a par cette action est isomorphe à M. D'une manière analytique, M_a peut être construit comme le qutient de Z, par le groupe $G_a = \{g \in G \mid g(a) = I_r\}$. L'existence d'une famille universelle n'est pas l'unique avantage de M_a. Nous avons aussi une propriété très spéciale, satisfaite par le groupe G_a. Il peut être filtré par des sous-groupes distingués, dont les quotients successifs sont des groupes additifs. Sachant que la surjectivité de l'application 0.2, peut être exprimée par l'annulation d'un certain groupe de cohomologie de degré 1, nous devrons déformer le groupe G_a dans son groupe gradué associé, et utiliser l'annulation de la cohomologie de ce dernier. Nous pensons que la cohomologie des groupes additifs, agissant sans points fixes, est nulle. A présent, nous ne connaissons pas de tels théorèmes d'annulation, mais nous montrons que cela est vrai pour le groupe additif $\mathbb{C}$, et sous des conditions plus fortes, pour $M_r(\mathbb{C})$. Finalement, nous nous intéressons aux déformations des groupes filtrés. Nous considérons un groupe filtré G, qui est le groupe des unités d'une algèbre $\mathcal{G}$, et tel que la filtration sur G soit obtenue par une translation d'une filtration sur $\mathcal{G}$. En utilisant des techniques de déformations d'algèbres, nous montrons

THÉORÈME 2.29. - *Soient $\mathcal{G}$ une algèbre filtrée complète et G le groupe des unités, muni de la filtration translatée de celle sur $\mathcal{G}$*

$$G = G^0 \supset G^1 \supset G^2 \supset \cdots$$

Alors G^1 est peut être déformé dans le groupe gradué associé grG^1.

1. Dualité pour les surfaces de Riemann

1.1. Fibrés vectoriels sur une surface de Riemann

1.1.1. Préliminaires.

Tout au long de cette section X dénotera une courbe projective, irréductible et lisse de genre $g \geq 2$. Le corps de base sera $\mathbb{C}$, mais il peut être remplacé par tout corps de caractéristique zéro, algébriquement clos. $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, etc. dénoteront des faisceaux coherents ; les faisceaux localement libres seront identifiés au fibrés vectoriels et ils seront notés par E, F, G, etc. Le degré d'un fibré vectoriel E, sera sa première classe de Chern : $\deg(E) = c_1(E) \in H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, donc c'est un entier. La pente de E sera par définition

$$\mu(E) = \deg(E)/\mathrm{rg}(E) \in \mathbb{Q}$$

Un sous-fibré de E sera un sous-faisceau F tel que le quotient E/F soit localement libre. On remarque que tout sous-faisceau de E est localement libre, car sans torsion sur une variété de dimension 1. Le degré d'un faisceau coherent $\mathcal{E} \in \underline{Coh}(X)$ sera celui de son fibré déterminant, qu'on calcule à partir d'une résolution de $\mathcal{E}$ par des faisceaux localment libres.

Définition 1.1. — *On dit qu'un fibré vectoriel E sur X est semi-stable (respectivement stable) si pour tout sous-fibré vectoriel propre F de E on a*

$$\mu(F) \leq \mu(E) \quad (\textit{respectivement } \mu(F) < \mu(E))$$

Remarque. — Si E est un fibré (semi-)stable, alors $\mu(\mathcal{F})(\leq) < \mu(E)$ pour tout sous-faisceau $\mathcal{F}$ de E. En effet, considérons F le sous-fibré de E engendré par $\mathcal{F}$, qui est par définition le noyau de l'application

$$E \longrightarrow (E/\mathcal{F})/\mathcal{T}$$

où $\mathcal{T}$ est le sous-faisceau de torsion de $E/\mathcal{F}$. On obtient $\mu(E)(\geq) > \mu(F) = (\deg(\mathcal{F}) + \deg(\mathcal{T}))/r \geq \mu(\mathcal{F})$, sachant que E est (semi-)stable et que $\deg(\mathcal{T})$ est le nombre (fini) de points, comptés avec multiplicités, de son support.

Une première propriété importante des fibrés semi-stables, est la suivante

Proposition 1.2. — *Soient E et F deux fibrés semi-stables sur X. Alors*
(1) *Si $\mu(F) < \mu(E)$, on a $Hom(E, F) = 0$.*
(2) *Si E et F sont stables, et $\mu(F) = \mu(E)$, on a $Hom(E, F) = 0$ ou $E \cong F$.*
(3) *Si E est stable, E est simple, i.e. les seuls endomorphismes de E sont les homothéties.*

Démonstration. — (1) Soit $f : E \to F$, un morphisme non nul. Alors

$$\mu(\mathrm{Im}(f)) \leq \mu(F) < \mu(E)$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) \neq 0$ et $\mu(\mathrm{Ker}(f)) > \mu(E)$, ce qui contredit la semi-stabilité de E.

(2) Avec les notations de (a), puisque E est stable, on a $\mathrm{Ker}(f) = 0$, d'où $\mathrm{Im}(f) \cong E$. D'autre part, puisque F est stable, on obtient $\mathrm{Im}(f) = F$, donc f est un isomorphisme.

(3) Soit f un endomorphisme non nul de E. D'après (2), f est un isomorphisme. Soit x un point de X. Si λ est une valeur propre de f_x, $f - \lambda I_X$ n'est pas un isomorphisme, donc $f - \lambda I_X = 0$, et f est une homothétie. □

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.3. — *Si E est un fibré semi-stable, de rang r et degré d sur X, tels que $d > r(2g-1)$, alors*
(1) $h^1(X, E) = 0$
(2) *E est engendré par ses sections globales.*

Démonstration. — (1) Par dualité de Serre, il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}(E, \omega_X) = 0$, où ω_X est le fibré canonique de X. Cela est une conséquence de la proposition antérieure, compte tenu que $\mu(E) = d/r > 2g-2 = \mu(\omega_X)$.

(2) Soit $x \in X$. On a la suite exacte suivante

$$0 \to E \otimes L_x^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow E \otimes \mathcal{O}_x \to 0$$

où L_x désigne le fibré en droites associé au diviseur x. Compte tenu que $\mu(E \otimes L_x^{-1}) > 2g-2$, on trouve que $h^1(X, E \otimes L_x^{-1}) = 0$, et par la suite exacte longue associée à la suite exacte ci-dessus, on en déduit que l'application $H^0(X, E) \to E \otimes \mathcal{O}_x$ est surjective. Ceci démontre (2). □

Evidemment, tout fibré de rang $r = 1$ est stable. Dorénavant on supposera le rang $r \geq 2$. Il existe un espace de modules $U(r, d)$, de fibrés stables de rang r et de degré d. C'est une variété quasi-projective, lisse, de dimension $r^2(g-1)+1$ qui possède une complétion naturelle $U_{ss}(r, d)$, dont les points peuvent être vus comme classes d'équivalence de fibrés semi-stables. Lorsque r et d sont premiers entre eux, tout fibré vectoriel semi-stable est stable, la variété $U(r, d)$ est projective et paramètre une famille universelle, qu'on appelle aussi fibré de Poincaré,

$$W \longrightarrow X \times U(r, d)$$

vérifiant la propriété d'universalité suivante : *Pour toute famille* $E \longrightarrow X \times S$ *de fibrés vectoriels stables sur* X*, de rang* r *et de degré* d*, paramétrée par un schéma noetherien* S*, il existe un unique morphisme* $\varphi : S \longrightarrow U(r,d)$ *tel que* $E \cong \varphi^{\#}W \otimes (p_S)^*L$*, où* $\varphi^{\#} = (1_X \times \varphi)^*$*,* p_S *désigne la projection de* $X \times S$ *sur* S*, et* L *est un fibré en droites sur* S*.*

En particulier, on en déduit que le fibré de Poincaré est unique modulo tensorisation par l'image réciproque d'un fibré en droites sur $U(r,d)$. Soient $J^d(X)$ le jacobien des fibrés en droites de degré d sur X, $\det : U(r,d) \to J^d(X)$ l'application qui associe à chaque fibré de $U(r,d)$ son fibré déterminant, et $\xi \in J^d(X)$. On définit l'espace de modules de fibrés vectoriels stables sur X, de rang r et de déterminant isomorphe à ξ par $U(r,\xi) = \det^{-1}(\xi)$. C'est une variété de dimension $(r^2-1)(g-1)$. On utilisera la même notation W, pour la restriction du fibré de Poincare sur $X \times U(r,\xi)$. La proposition suivante montre que tout fibré vectoriel sur X peut être "approximé" par des fibrés stables.

PROPOSITION 1.4. — *Soit* $V = (V_t)_{t \in T}$ *une famille de fibrés vectoriels de rang* r *et degré* d *sur* X *paramétrée par* T*. Alors il existe une variété irréductible et lisse* $T^{'}$*, paramétrant une famille* $(V_{t'})_{t' \in T'}$ *qui contient tous les fibrés* $V_t, t \in T$ *et tous les fibrés stables de rang* r *et degré* d*. La variété* $T^{'}$ *peut être choisie telle que* $T^{'}_{\xi} = \left\{t^{'} \in T^{'} \mid \det(V_{t'}) \cong \xi\right\}$ *soit irréductible et lisse pour tout* $\xi \in J^d(X)$*.*

En particulier, l'ouvert $\left\{t^{'} \in T^{'} \mid V_{t'} \text{ est stable}\right\}$ *(respectivement l'ouvert* $\left\{t^{'} \in T^{'}_{\xi} \mid V_{t'} \text{ est stable}\right\}$*) est dense en* $T^{'}$ *(respectivement* $T^{'}_{\xi}$*).*

Démonstration. — En tensorisant par un fibré en droites on peut supposer que tous les fibrés $V_t, t \in T$, et tous les fibrés stables de rang r et degré d, contiennent un sous-fibré trivial de rang $r-1$. Soit P_d la famille universelle paramétrée par $J^d(X)$. Alors la famille de toutes les extensions de fibrés en droites de degré d, par le fibré trivial de rang $r-1$ (construite en utilisant P_d) contient les fibrés $V_t, t \in T$ et tous les fibrés stables de rang r et degré d. De plus, l'espace de paramètres est un fibré vectoriel sur $J^d(X)$ et possède les propiétés requises. □

DÉFINITION 1.5. — *Si* E *est un fibré vectoriel sur* X *et* $k \in \mathbb{Z}$ *on note* $\mu_k(E) = (\deg(E)+k)/(\mathrm{rg}(E))$*. Un fibré vectoriel* E *sur* X *est dit* (k,l)*-semi-stable (resp.* (k,l)*-stable) si pour tout sous-fibré propre* F *de* E *on a*

$$\mu_k(F) \leq \mu_{k-l}(E) \quad (\textit{resp. } \mu_k(F) < \mu_{k-l}(E)).$$

Si $k = l = 0$ *on retrouve la notion de (semi-)stabilité de la définition* 1.1.

Remarque. — (i) La condition ci-dessus est équivalente à
$$\mu_k(F) \le \mu_{-l}(E/F), \quad \text{ou} \quad \mu_{k-l}(E) \le \mu_{-l}(E/F)$$
(ii) Si E est (k,l)-stable et $L \in \mathrm{Pic}X$, alors $E \otimes L$ est (k,l)-stable.
(iii) Si E est (k,l)-stable alors E^* est (l,k)-stable.

PROPOSITION 1.6. — *Pour toute famille $V \longrightarrow X \times T$ de fibrés vectoriels sur X paramétrée par T l'ensemble $\{t \in T \mid V|_{X\times\{t\}}$ est $(k,l)-$ stable$\}$ est un ouvert de T.*

Démonstration. — Considérons le schema-Quot de V sur T (voir [Gr1] pour la définition). L'ensemble des points non-(k,l)-stables peut être décrit comme l'union des images des composantes du schema-Quot, dont les polynômes de Hilbert vérifient une inégalité qui les contraint à varier dans un ensemble fini. L'assertion s'ensuit, compte tenu que le schema-Quot avec polynôme de Hilbert fixé est propre sur T. □

PROPOSITION 1.7. — *Soit L un fibré en droites de degré d sur X.*

(i) *Il existe des fibrés $(0,1)$-stables (et $(1,0)$-stables) de rang r et déterminant isomorphe à L, sauf pour $g=2,\ d \equiv 1 mod(r)$.*

(ii) *Il existe des fibrés $(1,1)$-stables de rang r et déterminant isomorphe à L, sauf pour*

(a) $g=3, \quad r=2, \quad d$ *pair,*

(b) $g=2, \quad r \in \{2,3,4\}$,

(c) $g=2, \quad d \equiv 0, \ \pm 1 \ mod(r)$.

Démonstration. — Il suffit d'estimer la dimension de la sous-variété des points non-$(0,1)$-stables (resp. non-$(1,1)$-stables) de $U(r,L)$ pour montrer que c'est une sous-variété propre. Un tel fibré E, contient un sous-fibré propre F tel que :

$$\frac{\deg(F)}{\mathrm{rg}(F)} \ge \frac{\deg(E)-1}{\mathrm{rg}(E)} \quad (\text{resp. } \frac{\deg(F)+1}{\mathrm{rg}(F)} \ge \frac{\deg(E)}{\mathrm{rg}(E)})$$

Par la proposition 1.4 on peut supposer que F et E/F sont stables. La dimension d'une composante qui correspond à un rang s et degré δ de F est majorée par $\Delta = \dim(U(s,\delta)) + \dim(U(r-s, L \otimes (\det F)^{-1})) + \dim H^1(X, Hom(E/F,F)) - 1$. On a

$$\begin{array}{rcl} \dim U(s,\delta) & = & s^2(g-1)+1 \\ \dim U(r-s, L\otimes(\det F)^{-1})) & = & ((r-s)^2-1)(g-1) \end{array}$$

$Hom(E/F, F)$ est un fibré de rang $s(r-s)$ et degré $(r-s)\delta - s(d-\delta)$. Par le théorème de Riemann-Roch et compte tenu que $h^0(X, Hom(E/F, F)) = 0$ (E/F et F étant stables avec $\mu(E/F) > \mu(F)$) on obtient

$$\begin{gathered} h^1(X, Hom(E/F, F)) = s(r-s)(g-1) + sd - r\delta \\ \Delta = (r^2 - rs + s^2 - 1)(g-1) + ds - r\delta \end{gathered}$$

Pour montrer que $\Delta < \dim U(r, L) = (r^2-1)(g-1)$ il faut vérifier que $ds - r\delta < (g-1)s(r-s)$. Cela est une conséquence de l'inégalité $ds - r\delta \leq s$ dans le premier cas, et $\leq r$ dans le deuxième, compte tenu des exceptions de l'énoncé. $\square$

Remarque. — Une autre possibilité de démontrer cette proposition est de considérer $\mathcal{E} \to X \times S$ une famille complète paramétrant les points de $U(r, d)$ (voir [Se1] pour une construction), et $H = Hilb^{r-s, d-\delta}(\mathcal{E}/S)$ le schéma de Hilbert relatif, paramétrant les quotients de rang $r-s$ et degré $d-\delta$. Alors, l'ensemble des points non-$(0,1)$-stables de S s'identifie à l'image de l'application canonique $H \to S$. On peut également évaluer la dimension du conoyau de l'application tangente à celle-ci en un point E/F: c'est la dimension de $Ext^1(F, E/F)$. On en conclut avec le théorème de Riemann-Roch.

1.1.2. L'application de déformation infinitésimale.

Dans ce paragraphe N et Y seront deux variétés irréductibles et lisses avec Y projective. Soient $\mathcal{F} \in \underline{Coh}(N \times Y)$ un faisceau cohérent, plat sur l'espace de paramètres N, et $n \in N$. Soient $A = \mathcal{O}_{N,n}$ l'anneau local de N en n, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, et $N_1 = \mathrm{spec}(A/\mathfrak{m}^2)$ le voisinage infinitésimal d'ordre 1 de n. On dénote par $i : N_1 \to N$ l'inclusion de N_1 dans N, et par p_{N_1}, p_Y les projections de $N_1 \times Y$ sur N_1, respectivement Y. Sur N_1 on a une suite exacte de $A/\mathfrak{m}^2$-modules $0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow A/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow A/\mathfrak{m} \to 0$, et compte tenu de la platitude de $\mathcal{F}$ sur N, on obtient la suite exacte suivante, sur $N_1 \times Y$

$$0 \to p_{N_1}^*(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \otimes i^\#(\mathcal{F}) \longrightarrow i^\#(\mathcal{F}) \longrightarrow p_{N_1}^*(A/\mathfrak{m}) \otimes i^\#(\mathcal{F}) \to 0$$

Définition 1.8. — *En appliquant $(p_Y)_*$ à la suite exacte ci-dessus on obtient une suite exacte $0 \to \mathcal{F}_n \otimes T_n^* \longrightarrow \mathcal{F}_{N_1} \longrightarrow \mathcal{F}_n \to 0$ qui définit un élément $\rho_n \in Ext^1(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_n \otimes T_n^*) \cong Hom(T_n, Ext^1(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_n))$, où $\mathcal{F}_n$ dénote la restriction de $\mathcal{F}$ à $\{n\} \times Y$. ρ_n s'appelle l'application de déformation infinitésimale de $\mathcal{F}$ en n.*

Remarque. — Dans le cas où F est un fibré vectoriel sur $N \times Y$ on peut calculer l'application de déformation infinitésimale à partir de la suite exacte d'Atiyah (voir [At]) $0 \longrightarrow End(F) \longrightarrow Q \longrightarrow p_N^*(\Theta_N) \longrightarrow 0$, où Θ_N désigne le fibré tangent de N. Cela induit une application $\rho : \Theta_N \longrightarrow R^1(p_N)_*(EndF)$ et par restriction $\rho_n : T_n \longrightarrow H^1(Y, EndF_n) \cong Ext^1(F_n, F_n)$, qui est l'application de déformation infinitésimale en $n \in N$.

Les Propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition précédente.

Propriétés (1) Soit $f : M \longrightarrow N$ un changement de base. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} T_m \arrow[r, "d_m f"] \arrow[drr, "\rho_m"'] & T_{f(m)} \arrow[r, "\rho_{f(m)}"] & Ext^1(\mathcal{F}_{f(m)}, \mathcal{F}_{f(m)}) \arrow[d, equal] \\ & & Ext^1((f^{\#}\mathcal{F})_m, (f^{\#}\mathcal{F})_m) \end{tikzcd}$$

(2) Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$. On considère $\varphi^{\#}(\mathcal{F})$ comme une famille de faisceaux sur X paramétrée par N. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} T_n \arrow[r, "\rho_n"] \arrow[dr, "\rho_n'"'] & Ext^1(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_n) \arrow[d, "\phi^*"'] \\ & Ext^1((\varphi^{\#}\mathcal{F})_n, (\varphi^{\#}\mathcal{F})_n) \end{tikzcd}$$

La proposition suivante fait le lien avec les schémas de Hilbert.

Proposition 1.9. — *Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur Y, $Quot^P(\mathcal{E})$ le schéma de Hilbert paramétrisant les quotients de $\mathcal{E}$ avec polynôme de Hilbert égal à P, et $\mathcal{U} \in \underline{Coh}(Quot^P(\mathcal{E}) \times Y)$ la famille universelle avec la projection canonique $p_X^*(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{U} \to 0$. On a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow p_X^*(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow 0.$$

Soit $q \in Quot^P(\mathcal{E}) \overset{not}{=} Q$. L'espace tangent $T_q(Q)$ s'identifie à $Hom(\mathcal{V}_q, \mathcal{U}_q)$ et l'application de déformation infinitésimale de la famille $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) en q s'identifie à l'application cobord $T_q(Q) = Hom(\mathcal{V}_q, \mathcal{U}_q) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{U}_q, \mathcal{U}_q)$, (resp. à moins l'application $T_q(Q) = Hom(\mathcal{V}_q, \mathcal{U}_q) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{V}_q, \mathcal{V}_q)$) obtenue de la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{V}_q \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{U}_q \longrightarrow 0$, en appliquant le foncteur $Hom(-, \mathcal{U}_q)$ (resp. $Hom(\mathcal{V}_q, -)$).

Démonstration. — Si dans la suite exacte de l'énoncé on remplace chaque terme par la suite exacte qui correspond a son application de déformation infinitésimale, on obtient un diagramme 3×3, dont la suite du milieu est scindée (car elle correpond au faisceau $p_X^*(\mathcal{E})$). On en déduit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{V}_q \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & E \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}_q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{U}_q \otimes T_q^* \arrow[r] & \mathcal{U}_{Q_1} \arrow[r] & \mathcal{U}_q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où α donne, par transposition, l'identification canonique $T_q \xrightarrow{\sim} Hom(\mathcal{V}_q, \mathcal{U}_q)$ (voir [Gr1]). Si on applique le foncteur $Hom(-, T_q^* \otimes \mathcal{U}_q)$ au diagramme cidessus on trouve $\delta(\alpha) = -\rho_q$, où δ est l'application cobord obtenue de la première suite du diagramme et ρ_q est l'application de déformation infinitésimale de $\mathcal{U}$ en $q \in Q$ (d'après la définition, $-\rho_q$ est l'image de l'identité par le cobord de la deuxième suite du diagramme). L'énoncé s'ensuit, compte tenu de la propriété de α. □

COROLLAIRE 1.10. — *Si V est une famille de fibrés vectoriels sur Y, paramétrée par N, et M est l'espace de paramètres d'une déformation universelle de V_n, alors l'application de déformation infinitésimale en $n \in N$ s'identifie à l'application tangente en n, de l'application de classification $N \to M$.* □

Compte tenu de la propriété (1) (sur les changements de base) et de la proposition précédente on obtient :

PROPOSITION 1.11. — *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{U}$ deux faisceaux cohérents sur Y, et une suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow p_Y^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} p_Y^*(\mathcal{U}) \longrightarrow 0$, où p_Y dénote la projection de $N \times Y$ sur Y. En considérant π comme une application $\pi : N \longrightarrow H^0(Y, Hom(\mathcal{E}, \mathcal{U}))$ on obtient, par dérivation en un point $n \in N$, $(d\pi)_n : T_n \longrightarrow H^0(Y, Hom(\mathcal{E}, \mathcal{U}))$, ce qui donne par restriction une application $\zeta : T_n \longrightarrow H^0(Y, Hom(\mathcal{V}_n, \mathcal{U}))$. Alors, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} T_n \arrow[r, "\zeta"] \arrow[dr, "-\rho_n"'] & H^0(Y, Hom(\mathcal{V}_n, \mathcal{U})) \arrow[d, "\delta"] \\ & Ext^1(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n) \end{tikzcd}$$

où δ est le morphisme cobord obtenu à partir de la suite exacte ci-dessus, par restriction à $\{n\} \times Y$, et en appliquant le foncteur $Hom(\mathcal{V}_n, -)$. □

1.1.3. Transformations élémentaires.

Soient x un point fixé de X, et E un fibré vectoriel sur X. Alors tout élément $q \in E_x^*$ peut être interprété comme une application surjective $E \xrightarrow{q} \mathcal{O}_x \to 0$, dont le noyau est un faisceau localement libre (car sans torsion) et qui ne dépend que de la droite déterminée par q dans E_x^*. Par conséquent, on peut construire une famille de fibrés vectoriels sur X, paramétrée par $\mathbb{P}(E_x^*)$. Plus généralement :

Définition 1.12. — *Soit $V \longrightarrow X \times T$ une famille de fibrés vectoriels sur X, paramétrée par T. On appelle transformation élémentaire de V une nouvelle famille HV de fibrés vectoriels sur X, paramétrée par un fibré projectif $Q(V) \xrightarrow{\pi_V} T$, et qui est construite comme suit : Soient $E_V = V_x^* \longrightarrow T$ et $Q(V) = \mathbb{P}(E_V) \longrightarrow T$. Sur $X \times Q(V)$ on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow HV \longrightarrow \pi_V^{\#}V \xrightarrow{\beta_V} p_X^*(\mathcal{O}_x) \otimes p_{Q(V)}^*(\tau_V) \longrightarrow 0$$

où τ_V est le fibré ample tautologique sur $Q(V)$ et β_V est construit à partir de l'application canonique $\pi_V^{\#}V \otimes p_{Q(V)}^*(\tau_V^{-1}) \longrightarrow p_X^*(\mathcal{O}_x) \to 0$, par tensorisation avec $p_{Q(V)}^*(\tau_V)$. On définit $HV = \ker \beta_V$ et on notera par $KV = (HV)^*$ la famille duale.

Remarque : Quelques précisions sur l'application β_V. — On a la suite suivante d'isomorphismes :

$$\begin{array}{rcl}\beta_V & \in & H^0(Q(V) \times V, Hom(\pi_V^{\#}V, p_X^*(\mathcal{O}_x) \otimes p_{Q(V)}^*(\tau_V))) \\ & \overset{i_x^*}{\cong} & H^0(Q(V), i_x^* Hom(\pi_V^{\#}V, p_X^*(\mathcal{O}_x) \otimes p_{Q(V)}^*(\tau_V))) \\ & \cong & H^0(Q(V), Hom(\pi_V^* i_x^* V, \tau_V)) \cong H^0(Q(V), Hom(\pi_V^* E_V^*, \tau_V))\end{array}$$

où $i_x : Q(V) \hookrightarrow Q(V) \times X$, $q \mapsto (q, x)$. Alors β_V est l'unique élément de $H^0(Q(V) \times V, Hom(\pi_V^{\#}V, p_X^*(\mathcal{O}_x) \otimes p_{Q(V)}^*(\tau_V))$, tel que $i_x^*(\beta_V) = \alpha_V$, où α_V désigne le morphisme canonique $\alpha_V : \pi_V^* E_V^* \to \tau_V$.

Le but de ce paragraphe est de montrer que la famille HV est injectivement paramétrée en $x \in X$ (prop 1.14). La démonstration présentée est celle de [Na-Ra1], et elle fournit également une description du fibré $(HV)_x$. Une conséquence très importante est une partie du théorème de Narasimhan-Ramanan, dont nous donnons une démonstration raccourcie en utilisant l'existence des fibrés $(0, 1)$-stables. Nous commençons par le lemme suivant :

Lemme 1.13. — *Soient K^2V le fibré $K(KV)$, obtenu par deux transformations élémentaires duales successives, et L_x le fibré en droites sur X associé à $x \in X$. Alors*

(*i*) $\det(KV) \cong \det(\pi_V^{\#}V^*) \otimes p_X^* L_x$

(*ii*) $\det(K^2V) \cong (\pi_V \circ \pi_{KV})^{\#} \det V$

Démonstration. — Par la construction de KV on a

$$\det(KV)^* = \det HV = \det(\pi_V^{\#}V) \otimes \det(p_X^*(\mathcal{O}_x) \otimes p_{Q(V)}^*(\tau_V))^{-1}$$

Sur X, on a une suite exacte $0 \longrightarrow L_x^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_x \longrightarrow 0$. On en déduit que $\det(p_X^*(\mathcal{O}_x) \otimes p_{Q(V)}^*(\tau_V)) = p_X^*(L_x)$. L'affirmation (*i*) s'ensuit. (*ii*) est une simple conséquence de (*i*). $\square$

Proposition 1.14. — *Si on considère HV comme une famille de fibrés vectoriels sur $Q(V)$, paramétrée par X, alors l'application de déformation infinitésimale en $x \in X$ est injective.*

Démonstration. — Compte tenu du caractère fonctoriel de l'application de déformation infinitésimale on peut supposer que T est un point, donc V est un fibré vectoriel sur X. Soit N un voisinage de $x \in X$, tel que V soit trivial sur N, avec fibre $V_x = E_V^*$. Alors sur $N \times Q(V)$, $\pi_V^{\#}V = p_{Q(V)}^* \pi_V^*(E_V^*)$, et par l'image réciproque de α_{E_V}, on obtient une application

$$p_{Q(V)}^* \alpha_{E_V} : \pi_V^{\#}V = p_{Q(V)}^* \pi_V^*(E_V^*) \longrightarrow p_{Q(V)}^* \tau_V$$

Compte tenu que $i_x^* \beta_V = \alpha_{E_V}$ on a

$$\begin{array}{rcl} p_{Q(V)}^* \alpha_{E_V}(HV) & \subseteq & \ker(p_{Q(V)}^*(\tau_V) \to p_{Q(V)}^*(\tau_V) \otimes p_X^*(\mathcal{O}_x)) \\ & = & p_{Q(V)}^*(\tau_V) \otimes p_X^*(L_x^{-1}) \end{array}$$

et par conséquent on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & p^*_{Q(V)}(\tau_V) \otimes p^*_X(L_x^{-1}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & p^*_{Q(V)}(\tau_V) \otimes p^*_X(L_x^{-1}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & HV \arrow[r] \arrow[d, equal] & (p^*_{Q(V)}(\tau_V) \otimes p^*_X(L_x^{-1})) \oplus \pi_V^{\#}V \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & p^*_{Q(V)}(\tau_V) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & HV \arrow[r] & \pi_V^{\#}V \arrow[r] \arrow[d] & p^*_{Q(V)}(\tau_V) \otimes p^*_X(\mathcal{O}_x) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Puisque L_x^{-1} est trivial sur N, on peut interpréter η comme une application $\eta = (\eta_1, \eta_2) : N \longrightarrow H^0(Q(V), End\tau_V) \oplus H^0(Q(V), Hom(\pi_V^* E_V^*, \tau_V))$. Alors, avec les identifications faites, η_2 est constant ($= \alpha_{E_V}$) et η_1 est un paramètre local en x (d'après la suite verticale droite du diagramme ci-dessus), donc $d_x\eta_1$ est un isomorphisme. Si on restreint la suite exacte du milieu du diagramme, à $\{x\} \times Q$ et compte tenu que l'application $\tau_V \otimes L_x^{-1}/_x \longrightarrow \tau_V$ est nulle, on obtient $(HV)_x \cong \tau_V \otimes T_x^* \ \oplus \ \Omega^1_{Q(V)} \otimes \tau_V$. Par conséquent le morphisme ζ de la proposition 1.11 devient

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : T_x \longrightarrow H^0(Q(V), End\tau_V) \oplus H^0(Q(V), Hom(\Omega^1_{Q(V)} \otimes \tau_V, \tau_V))$$

où ζ_1 est un isomorphisme et $\zeta_2 = 0$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
T_x \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, equal] & H^0(Q(V), Hom((HV)_x, \tau_V)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^1(Q(V), End(HV)_x) \arrow[d] \\
T_x \arrow[r, "\zeta_1"'] & H^0(Q(V), End\tau_V) \arrow[r, "\varphi"'] & H^1(Q(V), Hom(\tau_V, (HV)_x))
\end{tikzcd}$$

où δ (respectivement φ) est l'application cobord qu'on obtient lorsqu'on applique le foncteur $\mathrm{Hom}(-, \tau_V)$ (respectivement $\mathrm{Hom}(\tau_V, -)$) sur la suite exacte du milieu du premier diagramme, restreinte à $\{x\} \times Q$. Il s'ensuit que $\mathrm{coker}\varphi \cong H^1(Q(V), Hom(\tau_V, \tau_V \oplus \pi_V^* E_V^*)) = 0$. Cela entraine que φ est un épimorphisme, et d'autre part, compte tenu de la description de $(HV)_x$, on trouve que $\dim H^0(Q(V), End\tau_V) = \dim H^1(Q(V), Hom(\tau_V, (HV)_x))$. Alors φ est un isomorphisme, et on en déduit que l'application de déformation infinitésimale $\rho_x = -(\delta \circ \zeta)$ (voir prop. 1.11) est injective. □

Remarque. — On retiendra aussi de cette démostration, que si V est un fibré vectoriel sur X, alors $(HV)_x \cong \tau_V \otimes T_x^* \ \oplus \ \Omega^1_{Q(V)} \otimes \tau_V$. D'autre part pour $y \neq x$, $(HV)_y$ est trivial (ce qui en résulte facilement de la suite exacte qui définit la famille HV).

Une conséquence très importante de cette proposition est le théorème suivant ([Na-Ra1]) :

Théorème 1.15. — *Soit $W \longrightarrow X \times U(r,\xi)$ un fibré de Poincaré. Si on considère W comme une famille de fibrés vectoriels sur $U(r,\xi)$, paramétrée par X, on a*

(1) *L'application de déformation infinitésimale*

$$\rho_x : T_x \longrightarrow H^1(U(r,\xi), EndW_x)$$

est injective en chaque point $x \in X$.

(2) *La famille W est injectivement paramétrée, i.e. $W_x \cong W_y \Leftrightarrow x = y$.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. D'après la proposition 1.7, il existe un fibré V sur X, $(0,1)$-stable, de rang r et déterminant isomorphe à $\xi \otimes L_x$. En effet, la seule exception possible est $g = 2$, $d \equiv 1 \mathrm{mod}(r)$, ce qui ne peut pas arriver dans notre cas, car $(r, \deg \xi) = 1$. Soit HV la famille des transformations élémentaires de V, paramétrée par $\mathbb{P}(V_x^*)$. Puisque V est un fibré $(0,1)$-stable , on en déduit que HV est une famille de fibrés stables sur X (voir lemme 1.16), de rang r et déterminant isomorphe à ξ. Par conséquent il existe une application $\varphi : \mathbb{P}(V_x^*) \longrightarrow U(r,\xi)$ et un fibré en droites $L \to \mathbb{P}(V_x^*)$, tels que $HV \cong \varphi^{\#}W \otimes p^*_{\mathbb{P}(V_x^*)}L$. On obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} T_x \arrow[r, "\rho_x"] \arrow[dr, "\rho_x'"'] & H^1(U(r,\xi), EndW_x) \arrow[d, "\varphi^*"] \\ & H^1(\mathbb{P}(V_x^*), End(HV)_x) \end{tikzcd}$$

L'injectivité de ρ_x s'ensuit d'après la proposition 1.14. Pour le deuxième point, il suffit de remarquer que s'il existe $y \neq x$, tels que $W_y \cong W_x$, alors $(HV)_y \cong (HV)_x$. Cela contredit la remarque qui précède le théorème. $\square$

1.2. Applications aux fibrés stables

1.2.1. Transformation élémentaire d'un fibré $(0,1)$-stable.

Dans la section précédente on a vu qu'une transformation élémentaire est injectivement paramétrée (i.e. l'application de déformation infinitésimale est injective) en le point $x \in X$. Une question qui se pose naturellement est si cette famille est aussi injectivement paramétrée par l'espace $Q(V)$? Le but de paragraphe est d'en donner une réponse affirmative, pour des fibrés V $(0,1)$-stables sur X.

Lemme 1.16. — *Soient $x \in X$ et $0 \to E^{'} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_x \to 0$ une suite exacte de faisceaux cohérents sur X. Si E est un fibré (k,l)-stable, alors $E^{'}$ est un fibré $(k,l-1)$-stable.*

Démonstration. — Soient $F^{'}$ un sous-fibré de $E^{'}$, et F le sous-fibré de E engendré par $F^{'} \longrightarrow E$. Alors $F^{'} \longrightarrow F$ est de rang maximal, donc $\deg F^{'} \leq \deg F$. On obtient $\mu_k(F^{'}) \leq \mu_k(F) \leq \mu_{k-l}(E) = \mu_{k-l+1}(E^{'})$. Par conséquent $E^{'}$ est $(k,l-1)$-stable. □

Lemme 1.17. — *Soient E un fibré $(0,1)$-stable et $E^{'}$ un fibré stable sur X, tels que $\mathrm{rg}E^{'} = \mathrm{rg}E$ et $\det E^{'} \cong \det E \otimes L_x^{-1}$. Alors, si $f : E^{'} \longrightarrow E$ est un morphisme non-nul, on a une suite exacte*

$$0 \to E^{'} \xrightarrow{f} E \longrightarrow \mathcal{O}_x \to 0$$

De plus, $\dim H^0(X, Hom(E^{'}, E)) \leq 1$.

Démonstration. — Compte tenu de la $(0,1)$-stabilité de E et la stabilité de $E^{'}$, on a $\mu_{-1}(E) \geq \mu(Im(f)) \geq \mu(E^{'}) = \mu_{-1}(E)$. On en déduit que toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités, et par conséquent f doit être de rang maximal. Alors l'application $\det f : \det E^{'} \longrightarrow \det E$ est non-nulle et elle peut s'annuler seulement en $x \in X$ avec multiplicité 1. Donc f est de rang maximal dans tous les points sauf x et de rang $(\mathrm{rg}E - 1)$ en x. Cela démontre la première partie du lemme. Considérons maintenant deux morphismes $f, g \in H^0(X, Hom(E^{'}, E))$. Pour $y \neq x$, f_y et g_y sont deux isomorphismes $E_y^{'} \longrightarrow E_y$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de $f_y^{-1} \circ g_y$. Alors $g - \lambda f$ est un morphisme singulier en y, et d'après la première partie on en déduit qu'il est le morphisme nul, donc $g = \lambda f$. □

Soit V un fibré $(0,1)$-stable sur X de rang r et déterminant isomorphe à $\xi \otimes L_x$. Soit HV la famille transformation élémentaire de V. C'est une famille de fibrés stables sur X, de rang r et déterminant isomorphe à ξ, paramétrée par $Q(V) = \mathbb{P}(V_x^*)$. On dénote par $\varphi : Q(V) \longrightarrow U(r,\xi)$ l'application de classification.

PROPOSITION 1.18. — *L'application φ est un plongement de $Q(V)$ dans l'espace de modules $U(r,\xi)$.*

Démonstration. — On démontre en deux étapes :
(1) Soit $q \in Q(V)$. L'application de déformation infinitésimale en q est injective. Il s'ensuit que $d_q\varphi$ est injective, donc φ est un plongement local.
(2) φ est injective.

(1) On commence par la remarque suivante : Soient $\mathbb{P}^{r-1}\mathbb{C}$ l'espace projectif complexe de dimension $r-1$, et $f : U \to \mathbb{C}^r$ une trivialization locale du fibré tautologique en droites $\mathcal{O}(-1)$ au dessus d'un ouvert $U \subset \mathbb{P}^{r-1}\mathbb{C}$, i.e. $f(q) \in q$, $\forall q \in U$ (ici q est vu comme une droite en $\mathbb{C}^r$). Alors, pour $z \in T_q$ on a $(d_qf)(z) \in q \Leftrightarrow z = 0$, où T_q dénote l'espace tangent en q à $\mathbb{P}^{r-1}\mathbb{C}$.
En effet, si on considère $U = \{q = [q_0 : q_1 : \cdots : q_{r-1}] \mid q_0 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^{r-1}$, f s'identifie à une application $\mathbb{C}^{r-1} \to \mathbb{C}^r$, $f(q_1, \cdots q_{r-1}) = (\alpha, \alpha q_1, \cdots, \alpha q_{r-1})$ où $\alpha = \alpha(q_1, \cdots, q_{r-1}) : \mathbb{C}^{r-1} \to \mathbb{C}^*$. Par dérivation on trouve

$$d_qf(z) = (\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\partial\alpha}{\partial q_i} z_i, (\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\partial\alpha}{\partial q_i} z_i)q_1 + \alpha(q)z_1, \cdots, (\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\partial\alpha}{\partial q_i} z_i)q_{r-1} + \alpha(q)z_{r-1})$$

Alors, s'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $d_qf(z) = (k, kq_1, \cdots, kq_{r-1})$ on en déduit que $z_1 = \cdots = z_{r-1} = 0$, compte tenu que $\alpha(q) \neq 0$.

Dans notre cas, on considère U un ouvert de trivialisation de τ_V^{-1} comme ci-dessus (quite à fixer une base dans V_x^*). Sur $X \times U$ on obtient une suite exacte $0 \longrightarrow HV \longrightarrow p_X^*(V) \xrightarrow{\beta_V} p_X^*\mathcal{O}_x \longrightarrow 0$. Alors β_V peut être interprété comme une application $\beta_V : U \to H^0(X, Hom(V, \mathcal{O}_x))$, et par l'identification canonique $H^0(X, Hom(V, \mathcal{O}_x)) \cong V_x^*$, β_V s'identifie à la trivialisation choisie de τ_V^{-1} au dessus de U. Soit $\zeta : T_q \longrightarrow H^0(X, Hom(H_q, \mathcal{O}_x))$ le morphisme obtenu à partir de $d_q\beta_V$ par restriction, donc $\zeta(z) = d_q\beta_V(z) \circ i_q$, où $0 \to H_q \xrightarrow{i_q} V \xrightarrow{q} \mathcal{O}_x \to 0$. Alors $\zeta(z) = 0 \Leftrightarrow d_q\beta_V(z) \in q$, et compte tenu de la remarque ci-dessus, on en déduit que ζ est injectif. D'autre part, en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(H_q, -)$ sur la suite exacte ci-dessus, on obtient la suite exacte longue

$$0 \to H^0(X, End(H_q)) \to H^0(X, Hom(H_q, V)) \to H^0(X, Hom(H_q, \mathcal{O}_x)) \to$$

$$\xrightarrow{\delta} H^1(X, End(H_q)) = Ext^1(H_q, H_q)$$

Puisque $h^0(X, Hom(H_q, V)) = 1$, on en déduit que l'application cobord δ est injective. Mais d'après la proposition 1.11 on sait que $\delta \circ \zeta = -\rho_q$, ce qui démontre l'injectivité de ρ_q.

(2) On considère $q \neq q' \in \mathbb{P}(V_x^*)$ et soit $f : H_q \xrightarrow{\sim} H_{q'}$ un isomorphisme. Alors $i_{q'} \circ f \in H^0(X, Hom(H_q, V))$ qui est un espace de dimension 1, donc il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $i_{q'} \circ f = k \cdot i_q$, d'où $q' \circ i_q = 0$. On en déduit que q et q' (vus comme éléments de V_x^*) ont le même noyau dans V_x et par conséquent ils déterminent la même droite dans V_x^*. On en conclut que φ est une application injective. □

1.2.2. Double stabilité du fibré de Poincaré.

Soit M une variété projective de dimension n, munie d'un fibré ample en droites H. Si E est un faisceau cohérent sans torsion de rang r sur M, le faisceau $\det E = (\wedge^r E)^{**}$ est reflexif de rang 1, donc c'est un fibré en droites sur M. On définit $c_1(E) = c_1(\det E)$, $\deg E = c_1(E)c_1(H)^{n-1} \in H^{2n}(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, et $\mu(E) = (\deg E)/r \in \mathbb{Q}$.

Définition 1.19. — *Un faisceau cohérent sans torsion E sur M est dit H-semi-stable, si pour tout sous-faisceau cohérent $0 \neq F \subseteq E$, on a $\mu(F) \leq \mu(E)$. Si de plus, pour tout sous-faisceau cohérent $0 \neq F \subset E$ tel que $0 < rgF < rgE$, on a $\mu(F) < \mu(E)$, alors E est dit H-stable. Lorsque H est sous-entendu (par exemple $PicM \cong \mathbb{Z}$) on dira tout simplement fibré semi-stable ou stable.*

Remarque : Définitions équivalentes. — Un faisceau cohérent sans torsion est semi-stable (resp. stable) si et seulement si

(i) Pour tout sous-faisceau cohérent $0 \neq F \subseteq E$ tel que le quotient E/F soit sans torsion on a $\mu(F) \leq \mu(E)$ (resp. $\mu(F) < \mu(E)$).

(ii) Pour tout quotient sans-torsion Q de E, on a $\mu(E) \leq \mu(Q)$ (resp. $\mu(E) < \mu(Q)$).

Normalement, il n'y a pas de lien entre la semi-stabilité d'un fibré sur une variété M, et la semi-stabilité de sa restriction à une sous-variété de M. Tout de même, c'est un fait bien connu que pour l'espace projectif $\mathbb{P}_n\mathbb{C}$, la semi-stabilité d'un fibré sur une droite générique, entraine la semi-stabilité du fibré sur $\mathbb{P}_n\mathbb{C}$. Le lemme suivant en est un analoque.

Lemme 1.20. — *Soit Y une variété projective de dimension n telle que $Pic(Y) \cong \mathbb{Z}$ et soit H le générateur ample de ce groupe. Soit E un fibré vectoriel sur Y, qui vérifie la propriété suivante :*

(*) *Pour tout fermé* $F \subset Y$, *de codimension* ≥ 2, *il existe* Z_F *une sous-variété lisse, fermée de* Y, *de dimension non nulle, telle que* $Z_F \cap F = \emptyset$ *et la restriction* $j^*E = E|_{Z_F}$ *soit un fibré* j^*H*-semi-stable, où* j *dénote l'inclusion de* Z_F *dans* Y.

Alors E *est semi-stable sur* Y.

Démonstration. — Soit $p_Q : E \to Q \to 0$ un quotient sans torsion de E. Le lieu singulier $S(Q)$ de Q, est un fermé de codimension ≥ 2, et soit Z_Q la sous-variété de Y, donnée par la propriété (*). Puisque $\mathrm{Pic}Y \cong \mathbb{Z}$, il existe $e, q \in \mathbb{Z}$ tels que $\det E \cong H^{\otimes e}$ et $\det Q \cong H^{\otimes q}$. Il faut donc vérifier que $e/\mathrm{rg}E \leq q/\mathrm{rg}Q$. Puisque $Z_Q \subseteq Y \setminus S(Q)$, on obtient que j^*Q est un quotient sans torsion de j^*E, et $\det(j^*Q) = j^*(\det Q) = (j^*H)^{\otimes q}$. Alors, $\deg(j^*Q) = q \deg(j^*H)$ et $\deg j^*E = e \deg(j^*H)$. Compte tenu du fait que j^*E est j^*H-semi-stable sur Z_Q, on en déduit que $e/\mathrm{rg}E \leq q/\mathrm{rg}Q$. Cela démontre la semi-stabilité de E. □

Revenons au fibré de Poincaré $W \longrightarrow X \times U(r, \xi)$. On veut appliquer le lemme ci-dessus aux fibrés W_x sur l'espace de modules $U(r, \xi)$. Pour cela il faut montrer que les fibrés W_x possèdent la propriété (*), mais aussi que l'espace de modules vérifie l'hypothèse du lemme. C'est un fait bien connu que $\mathrm{Pic}(U(r, \xi)) \cong \mathbb{Z}$ (pour une démonstration voir [Se2] ou [Ra]). On peut trouver un tel isomorphisme comme suit (voir [Ra] pour une démonstration)

Proposition 1.21. — *Soient* $0 < l < r$ *et* $0 \leq c < d$ *uniquement déterminés par la condition* $ld - cr = 1$. *Soient* $V^{'}, V^{''}$ *deux fibrés vectoriels stables sur* X, *de rang* l, $r - l$ *et degré* c, $d - c$ *(respectivement) et tels que* $\det V^{'} \otimes \det V^{''} \cong \xi$. *Alors*

(1) *Toute extension nontriviale* $0 \to V^{'} \longrightarrow E \longrightarrow V^{''} \to 0$ *donne naissance à un fibré vectoriel* E, *stable sur* X.

On obtient ainsi, une famille E *de fibrés vectoriels stables sur* X, *paramétrée par* $\mathbb{P} = \mathbb{P}H^1(X, Hom(V^{''}, V^{'}))$, *et par conséquent un morphisme de classification* $\varphi : \mathbb{P} \longrightarrow U(r, \xi)$.

(2) φ *est un plongement et l'application* $\varphi^* : Pic(U(r, \xi)) \longrightarrow Pic(\mathbb{P})$ *est un isomorphisme.* □

Remarque. — Par l'universalité de W, il existe un entier m tel que $\varphi^{\#}W \cong E \otimes p_{\mathbb{P}}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)$. D'autre part $E_y \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)^{\oplus l} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}^{\oplus (r-l)}$, $(\forall)\ y \in X$. Alors $\varphi^{\#}(\det W_y) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(mr + l)$. On obtient $\det W_y \cong H^{\otimes (mr+l)}$, où H est le générateur ample de $\mathrm{Pic}U(r, \xi)$. Puisque le fibré de Poincaré est déterminé modulo tensorisation par un fibré en droites sur $U(r, \xi)$, on peut "normaliser" W en demandant $\det W_y \cong H^{\otimes l}$. Dans ce cas $\varphi^{\#}W \cong E$ et $\deg W_y = l \deg H$.

Proposition 1.22. — *Si $U(r,\xi)$ contient des fibrés $(1,1)$-stables, alors W_y verifie la propriété $(*)$ du lemme ci-dessus, pour tout $y \in X$.*

Démonstration. — Soit $U = \{E \in U(r,\xi) \mid E \text{ est } (1,1)-\text{stable}\}$. On dénote par $\overline{W}$ la restriction $W|_{X\times U} \longrightarrow X \times U$. On fixe $x \neq y \in X$ et on considère $K\overline{W} \to X \times Q(\overline{W})$ la famille duale de la transformation élémentaire de $\overline{W}$, et $K^2\overline{W} \to X \times Q(K\overline{W})$ la famille duale de la transformation élémentaire de $K\overline{W}$. Par conséquent, on a $Q(\overline{W}) = \mathbb{P}(\overline{W}^*_x) \xrightarrow{\pi_{\overline{W}}} U$, et $Q(K\overline{W}) = \mathbb{P}(K\overline{W}^*_x) \xrightarrow{\pi_{K\overline{W}}} Q(\overline{W})$. Alors $K^2\overline{W}$ est une famille de fibrés stables sur X, de rang r et de déterminant isomorphe à ξ, paramétrée par $Q(K\overline{W})$ (lemme 1.16 et lemme 1.13). On obtient

$$\begin{array}{ccc} Q(K\overline{W}) & \xrightarrow{\varphi} & U(r,\xi) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{K\overline{W}}} & & \\ Q(\overline{W}) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\overline{W}}} & & \\ U & \hookrightarrow & U(r,\xi) \end{array}$$

où φ est l'application de classification.

Lemme 1.23. — *Soit f_φ une fibre de φ. Alors* $\dim f_\varphi \leq 2r-2$.

Preuve: Soit $q \in Q(K\overline{W})$. On note $\bar{q} = \pi_{K\overline{W}}(q)$ et $\bar{\bar{q}} = \pi_{\overline{W}}(\bar{q})$. Alors q est une droite dans $K\overline{W}^*_{(\bar{q},x)}$, $\bar{q}$ est une droite dans $\overline{W}^*_{(\bar{\bar{q}},x)}$, et on a

$$0 \to H(K\overline{W})_q \longrightarrow K\overline{W}_{\bar{q}} \xrightarrow{q} \mathcal{O}_x \to 0$$

$$0 \longrightarrow H\overline{W}_{\bar{q}} \longrightarrow \overline{W}_{\bar{\bar{q}}} \xrightarrow{\bar{q}} \mathcal{O}_x \longrightarrow 0$$

Si $q \in f_\varphi = \varphi^{-1}(V)$, $V \in U(r,\xi)$, alors $K\overline{W}_{\bar{q}} \in Ext^1(\mathcal{O}_x, V^*)$ et $\overline{W}_{\bar{\bar{q}}} \in Ext^1(\mathcal{O}_x, K\overline{W}^*_{\bar{q}})$. Puisque les familles de tansformations élémentaires paramétrées par $\mathbb{P}(W^*_{(\bar{\bar{q}},x)})$ et $\mathbb{P}(W^*_{(\bar{q},x)})$ sont injectives (prop. 1.18), on obtient que $\dim f_\varphi \leq \dim \mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_x, V^*) + \dim \mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_x, K\overline{W}^*_{\bar{q}}) - 2 = 2r-2$, car pour tout fibré V sur X, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_x, V) \cong \mathrm{Hom}(V, \mathcal{O}_x) \cong V^*_x$, par dualité de Serre. Le lemme ci dessus est donc démontré.

On considère maintenant un fermé $F \subset U(r,\xi)$ de codimension ≥ 2. On veut trouver une sous-variété Z_F qui vérifie la propiété $(*)$. D'après la proposition 1.18, φ est un plongement sur les fibres de $\pi_{K\overline{W}}$. Pour $\bar{q} \in Q(\overline{W})$ on a $\pi^{-1}_{K\overline{W}}(\bar{q}) = \mathbb{P}(HW_{(\bar{q},x)})$, et on note $\mathbb{P}(\bar{q}) = \varphi(\pi^{-1}_{K\overline{W}}(\bar{q}))$.

affirmation: Il existe $\bar{q} \in Q(\overline{W})$ tel que $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}(\bar{q})}(F \cap \mathbb{P}(\bar{q})) \geq 2$. En effet, supposons que $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}(\bar{q})}(F \cap \mathbb{P}(\bar{q})) \leq 1$, $(\forall)\bar{q} \in Q(\overline{W})$. Alors $\varphi^{-1}(F)$ coupe chaque fibre de $\pi_{K\overline{W}}$ sur un fermé de dimension $\geq r-2$. On obtient $\dim \varphi^{-1}(F) \geq \dim Q(\overline{W}) + r - 2 = (r^2-1)(g-1) + 2r - 3$. D'autre part $\dim \varphi^{-1}(F) \leq \dim F + \dim f_\varphi \leq (r^2-1)(g-1) - 2 + 2r - 2 = (r^2-1)(g-1) + 2r - 4$. Contadiction !
Il existe donc $\bar{q}$ tel que $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}(\bar{q})}(F \cap \mathbb{P}(\bar{q})) \geq 2$. Par conséquent, on peut trouver une droite $Z_F \subset \mathbb{P}(\bar{q})$, qui ne coupe pas F. L'énoncé s'ensuit, compte tenu que la restriction de W_y à $\mathbb{P}(\bar{q})$ est triviale modulo tensorisation par un fibré en droites (voir remarque page 27). □

THÉORÈME 1.24. — *Si $U(r,\xi)$ contient des fibrés $(1,1)$-stables, alors W_y est stable sur $U(r,\xi)$, pour tout $y \in X$.*

Démonstration. — On remarque d'abord que l'énoncé du théorème est valable dans tout les cas sauf pour $g = 2$, $d \equiv \pm 1 \mathrm{mod}(r)$, car les autres exceptions de la prop 1.7 ne peuvent pas arriver lorsque $(r,d) = 1$.

D'après le lemme 1.20 et la proposition 1.22, on en déduit que W_y est semi-stable. D'autre part, d'après la remarque de la page 32, $(\deg W_y, r) = 1$. La stabilité s'ensuit. □

THÉORÈME 1.25. — *Si $U(r,\xi)$ contient des fibrés $(1,1)$-stables, alors le fibré adjoint $\mathrm{ad}_y W$ est semi-stable, pour tout $y \in Y$.*

Démonstration. — On utilise la même constuction de la proposition 1.22 en remarquant que $\mathrm{ad}_y W$ est trivial sur $\mathbb{P}(\bar{q})$ pour tout $y \in Y$, $y \neq x$. □

Remarque. — Les exceptions provenant de l'existence des fibrés $(1,1)$-stables, peuvent être enlevées. En fait, dans leur article V. Balaji, L. Brambila Paz et P.E. Newstead (voir [Ba-BrP-Ne]) démontrent, en utilisant la théorie des courbes spectrales, la stabilité (respectivement semi-stabilité) du fibré de Poincaré (respectivement son fibré adjoint) pour tout $g \geq 2$ et $r \geq 2$.

1.2.3. Double universalité du fibré de Poincaré.

Dans ce paragraphe on montre (d'après Narasimhan-Ramanan [Na-Ra1]) que la courbe X est un espace universel de déformations pour les restrictions du fibré de Poincaré sur l'espace de modules $U(r,\xi)$. Plus précisément on a

THÉORÈME 1.26. — *Soit $U(W_y)$ la composante connexe de l'espace de modules de fibrés stables sur $U(r,\xi)$, qui contient le fibré W_y, $y \in X$. On* *suppose que $(g, r) \neq (2,2)$. Alors $X \cong U(W_y)$, l'isomorphisme étant donné par l'application d'évaluation $x \mapsto W_x$.*

Pour montrer ce théorème on a besoin de quelques préliminaires. On considère K^2W la famille obtenue par double transformation élémentaire duale de $W \to U(r, \xi)$, paramétrée par l'espace $Q(KW)$, et on dénote par $\Omega = \{q \in Q(KW) \mid K^2W_q$ est stable sur X$\}$. Evidemment $\Omega \supset Q(K\overline{W})$. Avec le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 1.7 on démontre

Proposition 1.27. — *Soit U l'ouvert des fibrés $(1,1)$-stables de $U(r, \xi)$. Alors $\mathrm{codim}_{U(r,\xi)}(U(r,\xi) - U) \geq 3$, sauf pour $g = 2$, ou $g = 3$ et $r \in \{2,3\}$, ou $g = 4$ et $r = 2$.*

En particulier, $\mathrm{codim}_{Q(KW)}(Q(KW) - \Omega) \geq 3$ sauf pour les exceptions ci-dessus. □

Remarque. — Il est clair que l'ouvert Ω est plus grand que $Q(K\overline{W}) = (\pi_W \circ \pi_{KW})^{-1}U$, car chaque fibre de π_{KW} contient des fibrés stables. En fait on peut montrer que (voir[Na-Ra1], prop.6.8)

$$\mathrm{codim}_{Q(KW)}(Q(KW) - \Omega) \begin{cases} \geq r \ \geq 2 \\ \geq 3 \text{ sauf pour } g = 2, r = 2 \\ \geq 4 \text{ sauf pour } g = 2, r = 2, 3 \text{ ou } g = 3, r = 2 \end{cases}$$

On note par $\varphi : \Omega \to U(r, \xi)$ l'application de classification de la famille $K^2W|_{X \times \Omega}$. Pour la démonstration de la proposition suivante voir [Na-Ra1].

Proposition 1.28. — *Il existe une application $\imath : \Omega \to Q(KW)$ relévant φ (i.e. telle que $\varphi = \pi_W \circ \pi_{KW} \circ \imath$), et qui vérifie les propriétés suivantes*
1. *$\imath(\Omega) \subset \Omega$ et $\imath^2 = I_\Omega$ ($\imath$ est une involution)*
2. *$\imath^*(\Theta_{\pi_{KW}}) \cong j^*\pi^*_{KW}(\Theta^*_{\pi_W})$, où Θ_π dénote le fibré tangent aux fibres de π, et j l'inclusion canonique de Ω dans $Q(KW)$.* □

On a donc, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, hook, "j"] & Q(KW) \arrow[d, "\pi_{KW}"] \\
& Q(W) \arrow[d, "\pi_W"] \\
\Omega \arrow[uu, "\imath"] \arrow[r, "\varphi"] & U(r, \xi)
\end{tikzcd}$$

On utilisera aussi le lemme suivant

Lemme 1.29. — *Soit E un fibré vectoriel de rang ≥ 2 sur une variété projective Y. On dénote par $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} Y$ le fibré projectif de E, τ_E le fibré ample tautologique sur $\mathbb{P}(E)$, et par Θ_π le fibré tangent aux fibres de π. Alors*

1. $R^i(\pi)_*(\tau_E) = 0$ *pour* $i \geq 1$, *et* $\pi_*(\tau_E) \cong E^*$
2. $R^i(\pi)_*(\Theta_\pi) = 0$ *pour* $i \geq 1$, *et* $\pi_*(\Theta_\pi) \cong adE$
3. $R^i(\pi)_*(\Theta_\pi^*) = 0$ *pour* $i \neq 1$, *et* $R^1(\pi)_*(\Theta_\pi^*) \cong \mathcal{O}_Y$.

Démonstration. — Sachant que la cohomologie du fibré tautologique sur les fibres de π est nulle en degré strictement positif et compte tenu des isomorphismes canoniques $H^0(\mathbb{P}(E_y), \tau_E) \cong E_y^*$, $y \in Y$, le premier point s'ensuit. Le deuxième point (respectivement troisième) s'obtient en appliquant le foncteur π_* sur la suite exacte (respectivement la suite duale) d'Euler

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \pi^* E \otimes \tau_E \longrightarrow \Theta_\pi \to 0$$

□

Démonstration du théorème 1.26. — D'après le théorème 1.15, l'application d'évaluation $X \longrightarrow U(W_y)$, $x \longmapsto W_x$, est un plongement de X dans l'espace de modules $U(W_y)$. Alors il suffit de montrer que l'espace tangent est de dimension 1 en chaque point $W_x \in U(W_y)$, ce qui revient à montrer que $\dim H^0(U(r,\xi), EndW_x) = 1$. Pour cela, si $i+2 \leq \mathrm{codim}_{Q(KW)}(Q(KW) - \Omega)$, on a la suite suivante d'isomorphismes (voir aussi le diagramme ci-dessus)

$$\begin{gathered} H^i(U(r,\xi), ad(W_x)) \overset{(1)}{\cong} H^i(Q(W), \Theta_{\pi_W}) \overset{(2)}{\cong} H^i(Q(KW), \pi_{KW}^* \Theta_{\pi_W}) \overset{(3)}{\cong} \\ H^i(\Omega, j^* \pi_{KW}^* \Theta_{\pi_W}) \overset{(4)}{\cong} H^i(\Omega, \Theta_{\pi_{KW}}^*) \overset{(5)}{\cong} H^i(Q(KW), \Theta_{\pi_{KW}}^*) \overset{(6)}{\cong} \\ H^{i-1}(Q(KW), \mathcal{O}_{Q(W)}) \overset{(7)}{\cong} H^{i-1}(U(r,\xi), \mathcal{O}_{U(r,\xi)}) \end{gathered}$$

où les isomorphismes $(1), (2), (6), (7)$ proviennent par la suite spectrale de Leray (pour (1) et (6) on tiendra compte aussi du lemme précedent), $(3), (5)$ proviennent du théorème sur le prolongement des classes de cohomologie en codim $\geq i+2$ (voir [Sch]) et (4) provient du fait que $j^* \pi_{KW}^* \Theta_{\pi_W} \cong \imath^* \Theta_{\pi_{KW}}^*$ et $\imath^2 = I_\Omega$ (voir proposition 1.28). Alors, compte tenu que la variété $U(r,\xi)$ est unirationnelle (cf. [Na-Ra4]), on a $\dim H^{i-1}(U(r,\xi), \mathcal{O}_{U(r,\xi)}) = 1$ (respectivement 0) pour $i = 1$ (respectivement $i \neq 1$) et le théorème s'ensuit.
□

1.2.4. Fibré de Picard.

Les faisceaux de Picard sont, par définition, les images directes $R^0(p)_*W$ et $R^1(p)_*W$, du fibré de Poincaré, où p dénote la projection de $X \times U(r,\xi)$ sur $U(r,\xi)$. Lorsque $d/r > 2g-2$ on a $h^1(X,E)=0$, pour tout fibré stable E, de rang r et degré d sur X (prop 1.3). On en déduit que $R^1(p)_*W=0$, et $R^0(p)_*W$ est un fibré sur $U(r,\xi)$ de rang $d+r(1-g)$, qu'on appellera fibré de Picard. Bien évidemment, tout cela s'applique aussi à l'espace de modules $U(r,d)$. Dans ce cas, on sait que le fibré de Picard est stable sur $U(r,d)$, par rapport au fibré ample correspondant au diviseur théta généralisé (voir [Li]). Un problème encore ouvert est la stabilité du fibré de Picard sur l'espace de modules $U(r,\xi)$. Dans ce paragraphe on considérera W un fibré de Poincaré normalisé (voir remarque page 31), H dénotera le générateur ample de Pic$U(r,\xi)$ et les entiers l,c seront ceux de la proposition 1.21. On supposera aussi que $d > r(2g-2)+1$.

Lemme 1.30. — *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$deg(R^0(p)_*W) = (c+l(1-g))\, degH$$

.

Démonstration. — On utilisera les notations de la proposition 1.21. Le fibré W étant supposé normalisé, on a $\varphi^{\#}W \cong E$. D'autre part, sur $X \times \mathbb{P}$ on a une suite exacte

$$0 \to p_X^* V' \otimes p_{\mathbb{P}}^* \tau \longrightarrow E \longrightarrow p_X^* V'' \to 0$$

où τ est le fibré ample tautologique sur $\mathbb{P}$. Puisque $d > r(2g-2)+1$, on trouve $c/l = d/r - 1/rl > 2g-2$, et par conséquent $h^1(X,V')=0$. Alors, en appliquant le focteur image directe sur la suite exacte ci-dessus, on obtient $(p_{\mathbb{P}})_*E \cong H^0(X,V') \otimes \tau \oplus H^0(X,V'') \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$. On en déduit que $\deg(p_{\mathbb{P}})_*E = h^0(X,V') = c + l(1-g)$. Compte tenu que φ est un plongement qui induit un isomorphisme entre les groupes de Picard, le lemme s'ensuit. □

Théorème 1.31. — *Si $U(r,\xi)$ contient des fibrés $(1,1)$-stables, alors le fibré de Picard $R^0(p)_*W$ est $(0,-1)$-stable sur $U(r,\xi)$.*

De plus, si $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau de $R^0(p)_*W$, avec quotient sans torsion, et tel que $\mu(\mathcal{F}) \geq \mu(R^0(p)_*W)$, alors $\mu(\mathcal{F}) = \dfrac{l}{r} degH$.

Démonstration. — Pour montrer la $(0,-1)$-stabilité du fibré de Picard, on utilisera (comme pour la stabilité du fibré de Poincaré) la construction de la proposition 1.22. On reprendra les mêmes notations. Il suffira d'étudier les restrictions de $K^2\overline{W}$ sur les fibres de $\pi_{K\overline{W}}$. Soit $\bar{q} \in Q(\overline{W})$. Alors $\pi^{-1}_{K\overline{W}}(\bar{q}) = Q(K\overline{W}_{\bar{q}})$, et sur $X \times Q(K\overline{W}_{\bar{q}})$ on a une suite exacte

$$0 \to H(K\overline{W}_{\bar{q}}) \longrightarrow p_X^* K\overline{W}_{\bar{q}} \longrightarrow p_X^*(\mathcal{O}_x) \otimes p^*_{Q(K\overline{W}_{\bar{q}})}(\tau) \to 0$$

Considérons maintenant la suite duale. Puisque $Ext^1(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X$, on obtient

$$0 \to p_X^* H\overline{W}_{\bar{q}} \longrightarrow K^2\overline{W}_{\bar{q}} \longrightarrow p_X^*(\mathcal{O}_x) \otimes p^*_{Q(K\overline{W}_{\bar{q}})}(\tau^{-1}) \to 0$$

Mais $H\overline{W}_{\bar{q}}$ est un fibré stable sur X, de degré $d-1 > r(2g-2)$, et par conséquent $h^1(X, H\overline{W}_{\bar{q}}) = 0$. Alors, en appliquant le foncteur image directe sur la suite exacte ci-dessus, on obtient

$$0 \to H^0(X, H\overline{W}_{\bar{q}}) \otimes \mathcal{O}_{Q(K\overline{W}_{\bar{q}})} \longrightarrow (p_{Q(K\overline{W}_{\bar{q}})})_* K^2\overline{W}_{\bar{q}} \longrightarrow \tau^{-1} \to 0$$

Compte tenu que $h^1(Q(K\overline{W}_{\bar{q}}), \tau) = 0$, l'extension ci-dessus est triviale, donc

$$(p_{Q(K\overline{W}_{\bar{q}})})_* K^2\overline{W}_{\bar{q}} \cong H^0(X, H\overline{W}_{\bar{q}}) \otimes \mathcal{O}_{Q(K\overline{W}_{\bar{q}})} \oplus \tau^{-1}$$

La $(0,-1)$-stabilité du fibré de Picard s'ensuit.

Considérons maintenant un sous-faisceau $\mathcal{F}$ de $R^0(p)_*W$. On supposera que le quotient $R^0(p)_*W/\mathcal{F}$ est sans torsion. On peut trouver $\bar{q} \in Q(\overline{W})$ et Z une droite en $\mathbb{P}(\bar{q}) = \varphi(Q(K\overline{W}_{\bar{q}}))$, qui ne coupe ni le lieu singulier de $\mathcal{F}$, ni celui de $R^0(p)_*W/\mathcal{F}$ (voir prop 1.22). Notons $\deg\mathcal{F} = \delta\deg H$ et $s = \mathrm{rg}\mathcal{F}$. Soient α, β des entiers tels que $H|_Z \cong \mathcal{O}_Z(\alpha)$ et $W|_{X\times Z} \cong K^2\overline{W}|_{X\times Z} \otimes \mathcal{O}_Z(\beta)$. Alors $\deg(\mathcal{F}|_Z) = \alpha\delta$, et $\mathcal{F}|_Z$ est un sous-fibré de

$$R^0(p)_*W|_Z \cong (H^0(X, H\overline{W}_{\bar{q}}) \otimes \mathcal{O}_{Q(K\overline{W}_{\bar{q}})} \oplus \tau^{-1}) \otimes \mathcal{O}_Z(\beta)$$

On en déduit que $\alpha\delta/s \leq \beta$. Mais, $\deg(R^0(p)_*W|_Z) = \alpha\deg(R^0(p)_*W)$, et $h^0(X, H\overline{W}_{\bar{q}}) = d-1+r(1-g)$. On trouve $(d+r(1-g))\beta - \alpha(c+l(1-g)) = 1$. Sachant que $(d+r(1-g))l - r(c+l(1-g)) = 1$, on obtient $\alpha = k(d+r(1-g))+r$, et $\beta = k(c+l(1-g)) + l$, avec $k \geq 0$. Supposons que $\mu(\mathcal{F}) \geq \mu(R^0p_*W)$. Alors

$$\frac{\beta}{\alpha} \geq \frac{\delta}{s} \geq \frac{c+l(1-g)}{d+r(1-g)}$$

d'où on trouve les deux inégalités suivantes

$$1 \geq \frac{\alpha}{s}((d+r(1-g))\delta-(c+l(1-g))s) \geq 0 \text{ et } 1 \geq \frac{d+r(1-g)}{s}(\beta s-\alpha\delta) \geq 0$$

Puisque $s = \mathrm{rg}(\mathcal{F}) < \mathrm{rg}(R^0(p)_*W) = d + r(1-g)$, la deuxième inégalité entraine que $\beta s - \alpha\delta = 0$. Alors $(d + r(1-g))\delta - (c + l(1-g))s \neq 0$, et la première inégalité entraine $s \geq \alpha$, d'où $k = 0$. Par conséquent $\alpha = r$ et $\beta = l$, donc $ls - r\delta = 0$. $\square$

Remarque. — On en déduit, du théorème précédent, que le fibré de Picard vérifie une condition plus forte que la $(0,-1)$-stabilité. En fait, pour tout sous-faisceau $\mathcal{F}$ de $R^0(p)_*W$, on a

$$\frac{\mathrm{deg}\mathcal{F}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}} \leq \frac{\mathrm{deg}(R^0(p)_*W) + 1/r}{\mathrm{rg}(R^0(p)_*W)}$$

2. Déformations du fibré de Poincaré en terme de cohomologie de groupes

2.1. Théorie générale

Dans cette section G dénotera un groupe, pas nécessairement abélien. L'opération de groupe sera notée multiplicativement.

DÉFINITION 2.1. — *On appelle G-module, un groupe abélien A, avec un morphisme de groupes $G \longrightarrow Aut(A)$. L'action de G sur A, induite par ce morphisme, sera notée multiplicativement. Un morphisme de G-modules sera un morphisme de groupes qui commute avec l'action de G.*

On dénote par $(G - mod)$ la catégorie des G-modules, et par (Ab) la catégorie des groupes abéliens. On remarque qu'un groupe abélien A peut être vu comme un G-module, en considérant que l'action de G sur A est triviale. Evidemment, les deux catégories sont des catégories abéliennes. Pour chaque G-module A, on considère A^G le sous-groupe de A, des éléments invariants par l'action de G : $A^G = \{a \in A \mid g \cdot a = a, \quad \forall g \in G\}$. Alors, l'association $A \longrightarrow A^G$ définit un foncteur covariant, noté $\Gamma^G : (G - mod) \longrightarrow (Ab)$.

DÉFINITION 2.2. — *Soient $R^n\Gamma^G$ les foncteurs dérivés à droite du foncteur Γ^G, et soit A un G-module. On définit $H^n(G, A) = R^n\Gamma^G(A)$.*

Remarque. — $H^0(G, A) = A^G$ car le foncteur Γ^G est exacte à gauche. Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte courte de G-modules, alors compte tenu des propriétés des foncteurs dérivés à droite, on obtient la suite exacte longue $0 \to A^G \to B^G \to C^G \to H^1(G, A) \to H^1(G, B) \to H^1(G, C) \to H^2(G, A) \to \cdots$

2.1.1. Résolution standard.

Soit $\mathbb{Z}[G]$ le $\mathbb{Z}$ module libre engendré par G. $\mathbb{Z}[G]$ est une $\mathbb{Z}$ algèbre augmentée (on a $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, défini par $\varepsilon(g) = 1$, $\forall g \in G$), ce qui nous permet de voir $\mathbb{Z}$ comme un $\mathbb{Z}[G]$-module.

Remarque. — G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}[G])^*$ (les unités de $\mathbb{Z}[G]$) qui vérifie la propiété d'universalité suivante : *Si R est un anneau et $f : G \to R^*$ un morphisme de groupes, alors il existe une unique extension de f à un morphisme d'anneaux $\overline{f} : \mathbb{Z}[G] \to R$.* On obtient alors l'isomorphisme suivant, appelé aussi "formule d'adjonction" :

$$\mathrm{Hom}_{anneau}(\mathbb{Z}[G], R) \simeq \mathrm{Hom}_{groupes}(G, R^*)$$

Alors, si A est un groupe abélien, un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}A$ correspond à un morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[G] \to \mathrm{End}A$, et par conséquent un G-module n'est rien d'autre qu'un $\mathbb{Z}[G]$-module "classique". De plus, si on considère $\mathbb{Z}$ et A comme $\mathbb{Z}[G]$-modules, on a $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) \simeq A^G$, donc $H^n(G, A)$ s'identifient aux groupes de cohomologie du complexe obtenu en appliquant le foncteur $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(-, A)$, sur une résolution projective de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$-modules.

DÉFINITION 2.3. — *Soit $F_n = \mathbb{Z}[G^{n+1}]$. On définit une action de G sur F_n par $g \cdot (g_0, g_1, \cdots, g_n) = (g \cdot g_0, g \cdot g_1, \cdots, g \cdot g_n)$. Alors, F_n devient un $\mathbb{Z}[G]$-module libre, et une base est formée avec les $(n+1)$-uplets dont le premier élément est égal à 1. On appelle résolution standard de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}[G]$, le complexe*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} F_2 \xrightarrow{\partial_1} F_1 \xrightarrow{\partial_0} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

où $\partial_n(g_0, g_1, \cdots, g_n) = \sum_{i=0}^{n}(g_0, \cdots, g_{i-1}, g_{i+1}, \cdots, g_n)$. On vérifie facilement que ce complexe est acyclique (voir [Be]).

On considère une base de F_n définie comme suit :

$$[g_1 \mid g_2 \mid \cdots \mid g_n] = (1, g_1, g_1g_2, \cdots, g_1 \cdots g_n)$$

$$\partial_n[g_1 \mid g_2 \mid \cdots \mid g_n] = g_1[g_2 \mid \cdots \mid g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1 \mid \cdots \mid g_ig_{i+1} \mid \cdots \mid g_n] +$$

$$(-1)^n[g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}]$$

Avec ces notations, $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(F_n, A)$ s'identifie à l'ensemble des applications $f : G^n \to A$, qui a une structure de groupe abélien induite par celle de A, et l'application cobord s'écrit

$$(\partial^n f)(g_1, \cdots, g_{n+1}) = g_1 f(g_2, \cdots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+1})$$

$$+ \ (-1)^{n+1} f(g_1, \cdots, g_n)$$

Remarque. — On en déduit que les 1-cocycles s'identifient aux applications $f : G \to A$ telles que $f(g_1g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1)$, et un 1-cocycle est cohomologiquement trivial, s'il existe $a \in A$ tel que $f(g) = ga - a, \ \ \forall g \in G$.

2.1.2. Suite spectrale d'une extension de groupes.

Soient H un sous-groupe distingué de G, et A un G-module. Puisque H est distingué en G on a une action par conjugaison de G sur H. En utilisant la description des groupes de cohomologie à l'aide des résolutions standards, on peut définir une action de G/H sur $H^n(H, A)$ comme suit : Soient $[f] \in H^n(H, A)$ représenté par un cocycle $f : H^n \to A$, et $\overline{g} \in G/H$. On définit $\overline{g}[f] = [gf]$, où $(gf)(h_1, \cdots, h_n) = g \cdot f(g^{-1}h_1 g, \cdots, g^{-1}h_n g)$. Le théorème suivant introduit la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre. Pour une démonstration voir Benson ([Be]).

THÉORÈME 2.4. — *Il existe une suite spectrale aboutissant à $H^n(G, A)$ et dont les termes initiaux sont $E_2^{pq} = H^p(G/H, H^q(H, A))$.* $\square$

En particulier, on a une suite exacte à 5 termes $0 \to H^1(G/H, A^H) \to$

$$H^1(G, A) \to H^1(H, A)^{G/H} \to H^2(G/H, A^H) \to H^2(G, A)$$

2.1.3. Cohomologie non-abélienne.

DÉFINITION 2.5. — *Soient A un groupe non-abélien. On dit que A est un G-groupe si on a une action (à droite) de G sur A. Comme dans le cas abélien, cela revient à donner un anti-morphisme de groupes (car l'action est a droite !) $\rho : G \to Aut(A)$. On notera $\rho(g)(a) = a^g$.*

Remarque. — On peut, bien sûr, considérer une action à gauche de G sur A, mais cela nous obligerait à utiliser des notations ${}^g a$, qui sont moins commodes.

On peut introduire la catégorie des G-groupes (les morphismes étant les morphismes de groupes qui commutent avec l'action de G), mais cette fois on n'obtient pas une catégorie abélienne, et par conséquent, définir des groupes de cohomologie en degré quelconque dans un cadre non-abelien devient beaucoup plus compliqué. Tout de même, il est possible de donner une définition en degré 1, qui imite celle du cas abélien, et qui nous permet de construire un ensemble cohomologique. Dans le cas non-abélien on n'obtient pas un groupe de cohomologie, mais un ensemble avec un point distingué. Plus précisément, on considère l'ensemble $Z^1(G, A)$ des 1-cocycles, définit par

$$Z^1(G, A) = \{f : G \to A \mid f(g_1 g_2) = f(g_1)^{g_2} f(g_2)\}$$

On a aussi une action (à gauche) de A sur $Z^1(G, A)$, définie comme suit : $(af)(g) = a^g f(g) a^{-1}, \ \forall a \in A, \ f \in Z^1(G, A), \ g \in G$. Si l'action de G sur

A est triviale, alors $Z^1(G, A)$ s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Hom}_{groupes}(G, A)$, et l'action de A est celle par conjugaison.

Définition 2.6. — *L'ensemble de cohomologie $H^1(G, A)$ est par définition le quotient de $Z^1(G, A)$ par l'action de A. Il contient un point distinqué qui est l'orbite du cocycle identité. Un 1-cocycle f est dit cohomologiquement trivial (ou tout simplement trivial), s'il est de la forme $f(g) = a^g a^{-1}$, pour un certain $a \in A$, i.e. il est dans l'orbite du cocycle identité.*

Considérons maintenant une suite exacte courte de G-groupes

$$1 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 1$$

On peut définir une application cobord $\delta : C^G \to H^1(G, A)$ comme suit : Soient $c \in C^G$ et $b \in B$, tels que $v(b) = c$. Alors $v(b^g b^{-1}) = 1$, donc il existe un unique $a_g \in A$, tel que $b^g b^{-1} = u(a_g)$. On définit $\delta(c)(g) = a_g$. On vérifie facilement la proposition suivante (pour une démonstation voir [Se]) :

Proposition 2.7. — *Pour une suite exacte courte de G-groupes, l'application cobord donne naissance a une suite exacte*

$$1 \to A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G, A) \longrightarrow H^1(G, B) \longrightarrow H^1(G, C)$$

De plus, si A est un G-module, la suite exacte ci-dessus, continue avec une application $H^1(G, C) \longrightarrow H^2(G, A)$. □

Considérons maintenant le cas d'un sous-groupe distingué $H \leq G$. Dans le cas abélien, cela donne naissance a la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre. Même si cette suite spectrale n'existe plus dans le cas non-abélien, on a toujours une suite exacte à 3 ou 4 termes. Plus précisément (voir [Se] pour une démonstration) :

Proposition 2.8. — *Si H est un sous-groupe distingué de G et A est un G-groupe, on une suite exacte*

$$1 \to H^1(G/H, A^H) \longrightarrow H^1(G, A) \longrightarrow H^1(H, A)^{G/H}$$

où l'action de G/H sur $H^1(H, A)$ est définie de le même manière que dans le cas abélien. De plus, si A^H est un sous-groupe central de A, la suite exacte ci-dessus, continue avec une application $H^1(H, A)^{G/H} \longrightarrow H^2(G/H, A^H)$. □

2.2. Théorie analytique

Dorénavant, on suposera le groupe G muni d'une structure analytique, y compris analytique-banachique. (An) désignera la catégorie des espaces analytique (y compris analytique-banachique) et tous les G-modules ou les G-groupes seront considérés munis également d'une structure analytique. De plus, les ensembles cohomologiques $H^i(G, A)$ seront, par définition, formés des i-cocycles analytiques $f : G^i \to A$. Toute la théorie développée dans la section précédente restera valable dans ce context analytique. Soient A un G-groupe et $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie. L'action de G sur A induit une action de G sur $\mathfrak{a}$, qui en fait un G-module. Le but de cette section est de décrire l'espace tangent de $H^1(G, A)$, à l'aide des 1-coycles à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. Cela nous permettrait de linéariser certains problèmes en cohomologie non-abélienne (comme par exemple, l'étude d'une application entre deux ensembles de cohomologie non-abélienne) par passage à l'espace tangent. Mais l'ensemble $H^1(G, A)$ n'est pas toujours muni d'une structure analytique, donc il ne s'agit pas à proprement parler d'un espace tangent. Pour contourner ce problème il faut remplacer l'ensemble cohomologique par un foncteur cohomologique, et considérer son foncteur tangent. Plus précisément on a

Définition 2.9. — *Si A est un G-groupe, on définit les deux foncteurs cohomologiques (contravariants) suivants*

$$Z^1(- \times G, A), H^1(- \times G, A) : (An) \longrightarrow (Ens)$$

$$\begin{array}{rcl} Z^1(S \times G, A) & = & \{f : S \times G \to A \mid f(s, g_1 g_2) = f(s, g_1)^{g_2} f(s, g_2)\} \\ H^1(S \times G, A) & = & Z^1(S \times G, A)/\sim \end{array}$$

où $f_1 \sim f_2$, s'il existe $a : S \to A$, telle que $f_1(s, g) = a(s)^g f_2(s, g) a(s)$. Autrement dit, $H^1(- \times G, A)$ est le foncteur quotient de $Z^1(- \times G, A)$ par le foncteur $Hom(-, A)$.

Remarque. — Les égalités de la définition précédente, ne sont pas seulement des égalités ensemblistes. Sachant que S n'est pas nécessairement réduit, elles doivent être regardées comme des égalités entre morphismes d'espaces annelés.

On dénotera par $p_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]/X^{i+1})$, pour $i \geq 0$. Considérons maintenant les foncteurs tangents, définis par

$$TZ^1(S \times G, A) = Z^1(S[p_1] \times G, A) \text{ et } TH^1(S \times G, A) = H^1(S[p_1] \times G, A)$$

où $S[p_1] = S \times p_1$. Si $Z^1(p_0 \times G, A) = Z^1(G, A)$ possède une structure analytique représentant le foncteur $Z^1(- \times G, A)$, alors le foncteur tangent sera représenté par $TZ^1(G, A)$ (et de même pour $H^1(G, A)$). On a aussi deux morphismes naturels

$$TZ^1(- \times G, A) \xrightarrow{\pi} Z^1(- \times G, A) \xrightarrow{i} TZ^1(- \times G, A)$$

et de même pour le functeur $H^1(- \times G, A)$. Pour un élément $\alpha \in Z^1(G, A)$, on dénote par $\mathfrak{a}_\alpha$ le G-module (à droite) dont le groupe sous-jacent est $\mathfrak{a}$, et l'action de G est donnée par $v \cdot g = \alpha(g)^{-1} v^g \alpha(g)$, où $v \in \mathfrak{a}, g \in G$ et v^g dénote l'action de G induite par celle sur A. Avec ces notations on a le

THÉORÈME 2.10. — *Il existe des isomorphismes naturels :*
(1) $\pi(p_0)^{-1}(\alpha) \cong Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$.
(2) *Si α et β ont la même classe de cohomologie dans $H^1(G, A)$, alors $H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha) \cong H^1(G, \mathfrak{a}_\beta)$, et $\pi(p_0)^{-1}([\alpha]) \cong H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$, où $[\alpha]$ dénote la classe de cohomologie de α.*

Démonstration. — (1) Soit $u \in \pi(p_0)^{-1}(\alpha)$, alors u peut être vu comme une application $u : p_1 \times G \to A$, telle que $u(*, g) = \alpha(g)$, $\forall g \in G$. En particulier, u induit une application $\overline{u} : G \to \mathrm{Hom}(p_1, A) = TA$ telle que $\overline{u}(g) \in T_{\alpha(g)}A$, et qui vérifie

$$\overline{u}(g_1 g_2) = \overline{u}(g_1)^{g_2} \alpha(g_2) + \alpha(g_1)^{g_2} \overline{u}(g_2)$$

On définit $\tilde{u}(g) = \alpha(g)^{-1} \overline{u}(g) \in \mathfrak{a}$. Compte tenu de l'égalité ci-dessus, on trouve $\tilde{u}(g_1 g_2) = \tilde{u}(g_1) \cdot g_2 + \tilde{u}(g_2)$, donc $\tilde{u} \in Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$. Evidemment, u peut être récupéré à partir de $\tilde{u}$, ce qui démontre que l'application $u \mapsto \tilde{u}$ est bijective.
(2) Soit $a \in A$ tel que $\beta(g) = a^g \alpha(g) a^{-1}$. On vérifie facilement que si $f \in Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$, alors $afa^{-1} \in Z^1(G, \mathfrak{a}_\beta)$. De plus l'application $f \longmapsto afa^{-1}$ passe au quotient et définit un isomorphisme entre les groupes de cohomologie respectifs.

On va vérifier maintenant le dernier isomorphisme. $H^1(p_1 \times G, A)$ est par définition, le quotient de $Z^1(p_1 \times G, A)$ par l'action de $\mathrm{Hom}(p_1, A) = TA$. Alors, il faut vérifier que l'action de TA sur $Z^1(p_1 \times G, A)$ correspond, par l'isomorphisme de (1), à celle de $\mathfrak{a}_\alpha$ sur $Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$. Reprenons les notations de (1), et considérons $v \in T_a A$. Soient $v(u)$ l'elément de $Z^1(p_1 \times G, A)$ obtenu par l'action de v sur u, et $\beta(g) = a^g \alpha(g) a^{-1}$. On a

$$\overline{v(u)}(g) = v^g \alpha(g) a^{-1} + a^g u(g) a^{-1} - a^g \alpha(g) a^{-1} v a^{-1} \in T_{\beta(g)} A$$

$$\widetilde{v(u)} = a[\alpha(g)^{-1}(a^{-1})^g v^g \alpha(g) + \alpha(g)^{-1}u(g) - a^{-1}v]a^{-1} \in Z^1(G, \mathfrak{a}_\beta)$$

qui correspond, par l'isomorphisme ci-dessus, à $\tilde{u}(g) + (a^{-1}v) \cdot g - (a^{-1}v) \in Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$. On en déduit que $[\widetilde{v(u)}] = [\tilde{u}]$ dans $H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$, donc l'isomorphisme de (1) descend en une application surjective

$$\pi(*)^{-1}([\alpha]) \to H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$$

Pour vérifier l'injectivité, considérons $u, u_1 \in Z^1(p_1 \times G, A)$, tels que $[\tilde{u}] = [\tilde{u}_1]$ dans $H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$. Alors il existe $v \in \mathfrak{a}_\alpha$, tel que $\tilde{u}_1(g) = \tilde{u}(g) + v \cdot g - v$, d'où $\overline{u}_1(g) = \overline{u}(g) + v^g\alpha(g) - \alpha(g)v$. On obtient $u_1 = v(u)$ et l'injectivité s'ensuit. $\square$

Remarque. — Plus généralement, pour $S \in (An)$ et $\alpha_S \in Z^1(S \times G, A)$, il existe des isomorphismes naturels

$$\pi(S)^{-1}(\alpha_S) \cong Z^1(S \times G, \mathfrak{a}_{\alpha_S}) \quad \text{et} \quad \pi(S)^{-1}([\alpha_S]) \cong H^1(S \times G, \mathfrak{a}_{\alpha_S})$$

La démonstration est la même que celle du théorème précédent, il faut juste remplacer G par $S \times G$.

2.3. Espaces de modules de fibrés vectoriels

Soit X une variété complexe, compacte, irréductible et lisse. On dénotera par $\mathcal{G}l_r$ le faisceau des germes de fonctions analytiques sur X, à valeurs dans $GL_r(\mathbb{C})$. L'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang r sur X, peut être identifié à l'ensemble cohomologique $H^1(X, \mathcal{G}l_r)$. Fixons $\underline{\mathcal{U}} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert, fini de X. Pour chaque $p \geq 0$ on dénote par I_p l'ensemble des $i = (i_0, \cdots, i_p)$, tels que $U_i = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \neq \emptyset$. La norme Euclidienne sur $\mathbb{C}^r$ induit une norme sur $M_r(\mathbb{C})$, l'algèbre des matrices complexes d'ordre r. Pour chaque famille $f = \{f_i : U_i \to M_r(\mathbb{C}) \mid i \in I_p\}$ on définit

$$\| f \| = \sup_{i \in I_p} \sup_{x \in U_i} \| f_i(x) \|$$

L'ensemble des f, tels que $\| f \| < \infty$, forme une algèbre de Banach complexe, qui sera notée par $C^p(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{O}^{r \times r})$. L'ensemble de ses éléments inversibles est un ouvert dénoté par $C^p(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$. On définit aussi les opérateurs suivants

$$\begin{array}{ll} \delta^0 : C^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) \times C^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) \to C^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r), & \delta^1 : C^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) \to C^2(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) \\ \delta^0(g, f)_{ij} = g_i f_{ij} g_j^{-1} & \delta^1(f)_{ijk} = f_{jk} f_{ik}^{-1} f_{ij} \end{array}$$

Soit $Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) = (\delta^1)^{-1}(Id)$ l'ensemble des 1-cocycles, où Id désigne l'élément identité. L'action de $C^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$ sur $C^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$, définie par δ^0, se restreint à une action sur $Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$. On définit

$$H^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) = Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) / C^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$$

Remarque. — Nos définitions de C^0, Z^1, H^1, sont différentes des définitions habituelles. Nous supposerons toujours que les cocycles considérés sont bornés par rapport à la norme définie ci-dessus.

Bien évidemment, si $\underline{\mathcal{U}}$ est un recouvrement suffisamment fin, on a une correspondance biunivoque entre les fibrés vectoriels de rang r sur X et les éléments de $Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$, et l'action de $C^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$ correspond aux isomorphismes de fibrés vectoriels. Par conséquent, $H^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$ est censé résoudre le problème de modules de fibrés vectoriels sur X. Mais pour que ce quotient existe dans la catégorie des espaces analytiques, il faut se restreindre aux 1-cocycles de $Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$, représentant des fibrés simples (ou stables par rapport à une certaine polarisation de X). Plus précisément on a le résultat suivant (voir [No], théorèmes 2 et 5, pour la démonstration) :

THÉORÈME 2.11. — *Il existe des recouvrements $\underline{\mathcal{U}}$ de X, arbitrairement fins, tels que le sous-ensemble $H^1_s(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) \subset H^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$, des fibrés vectoriels* *simples sur X, admet une structure d'espace analytique (pas nécessairement Hausdorff) vérifiant les propriétés habituelles d'un espace de modules grossier. De plus, si X est une variété projective et H est un fibré en droites ample, alors l'ensemble des fibrés stables par rapport à H est un ouvert de Hausdorff de $H^1_s(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$.* □

Dorénavant, on utilisera les notations: $Z = Z^1_s(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$, $G = C^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$ et $M = H^1_s(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) = Z/G$. L'indice "$s$" désigne le fait qu'il s'agit des 1-cocycles représentant des fibrés simples (ou stables, selon le contexte). L'espace Z paramètre un fibré tautologique, noté par T, qui est défini à l'aide du recouvrement $\{U_i \times Z \mid i \in I\}$ et du 1-cocycle

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} \times Z & \longrightarrow & GL_r(\mathbb{C}) \\ (x, (z_{ij})_{(i,j)\in I_1}) & \longmapsto & z_{ij}(x) \end{array}$$

On remarque que, pour $x \in X$ fixé, la restriction de T sur $\{x\} \times Z$ est un fibré trivial. On a aussi une action de G sur $U_i \times Z \times \mathbb{C}^r$ définie par

$$g \cdot (x, z, t) = (x, g_i z_{ij} g_j^{-1}, g_i(x)t), \quad g = (g_i) \in G, z = (z_{ij}) \in Z$$

Cette action est compatible avec le 1-cocycle qui définit le fibré tautologique, et par conséquent on obtient une action de G sur T. On remarque aussi que, les éléments de Z étant des fibrés simples, on a $\mathrm{Stab}_G(z) = \mathbb{C}^* I_r$, $\forall z \in Z$, mais l'action de $\mathbb{C}^* I_r$ sur T est celle par homothéties. Alors T ne descend pas en un fibré vectoriel sur M, mais tout de même, il descend en une famille locale W, qui donne une déformation universelle dans chaque point de M (pour cela il suffit de considérer des trivialisations locales de la fibration $Z \to H$; voir aussi [No]). S'il existe un fibré en droites L sur Z, muni d'une action de G, telle que l'action de $\mathbb{C}^* I_r$ sur L^{-1} soit celle par homothéties, alors W peut être représenté par un fibré sur M, qu'on appellera fibré de Poincaré (il suffit de considérer le fibré quotient $T \otimes L/G$).

2.3.1. Fibré de Poincaré.

Dorénavant on considérera $W = T \otimes L/G$ un fibré de Poincaré paramétré par M, où L est un fibré en droites sur Z avec une action (fixée) de G, telle que l'action de $\mathbb{C}^* I_r$ sur L^{-1} soit celle par homothéties. Par construction, le fibré W est une déformation universelle pour les fibrés sur X obtenus par restriction en un point de M. Une question qui apparaît naturellement est si la réciproque est vrai, c'est à dire, si W définit une déformation universelle pour pour les fibrés $W_x \to M$, $x \in X$. Même si cela est vrai lorsque X est une courbe projective (cf. premier chapitre) et dans certains cas pour les surfaces $K3$ (cf. [M]) et les variétés abéliennes ([Mu]), en général on ne peut pas s'attendre à un tel résultat (il suffit de considérer des espaces de modules discrets). Tout de même on peut espérer que, sous certaines conditions, la variété X soit un espace complet de déformations. On sait que X peut être récupérée à partir d'un groupe de cohomologie non-abélienne (cf. [Ko]). Le but de cette section est de décrire les déformations des fibrés W_x en termes de cohomologie de groupes. Cela nous permettra de voir l'application d'évaluation $x \mapsto W_x$, comme une application entre deux groupes de cohomologie non-abélienne. Alors l'application de déformation infinitésimale en un point $x \in X$ correspondra au passage aux espaces (foncteurs) tangents ; elle se traduira donc, en termes de cohomologie abélienne.

On dénote par π la projection $Z \xrightarrow{\pi} M$. Puisque le fibré $T_x \to Z$ est trivial, on obtient $\pi^* W_x \cong L^{\oplus r}$. On s'interessera aux déformations de W_x qui ont la même image réciproque sur Z. L'action à gauche de G sur Z, induit une action à droite de G sur $A = \mathrm{Mor}(Z, GL_r(\mathbb{C}))$. On a

Lemme 2.12. — *Soit F un fibré de rang r sur M tel que $\pi^* F \cong L^{\oplus r}$. Alors il existe un 1-cocycle $\alpha \in Z^1(G, A)$, qui définit une action de G sur $\mathcal{O}_Z^{\oplus r}$ telle que :*
1. *L'action de $\mathbb{C}^* I_r$ est celle par homothéties; par conséquent $\mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L$ est muni d'une action de G, telle que l'action de $\mathbb{C}^* I_r$ soit triviale.*
2. *F est isomorphe au quotient de $\mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L$ par cette action. On utilisera la notation $F \cong \mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L/_\alpha G$.*

Démonstration. — Fixons un isomorphisme $\varphi : \mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L \to \pi^* F$. Alors, pour $z \in Z$ et $g \in G$, on a

$$\mathbb{C}^r \otimes L_z \xrightarrow{\varphi_z} (\pi^* F)_z = (\pi^* F)_{gz} \xrightarrow{\varphi_{gz}^{-1}} \mathbb{C}^r \otimes L_{gz}$$

Compte tenu de l'action de G sur L, il existe $\alpha(g, z) \in GL_r(\mathbb{C})$ tel que $\varphi_{gz}^{-1} \circ \varphi_z(t, l) = (\alpha(g, z)t, gl)$. On vérifie facilement que $\alpha \in Z^1(G, A)$, et par construction on obtient $F \cong \mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L/_\alpha G$. $\square$

Remarque. — Bien sûr, le cocycle α n'est pas uniquement déterminé. On peut vérifier que $\mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L/_\alpha G \cong \mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L/_\beta G$, si et seulement si $[\alpha] = [\beta]$ dans $H^1(G, A)$. On peut donc considérer $H^1(G, A)$, comme l'espace de paramètres des déformations (avec image réciproque fixée) des fibrés W_x sur M.

Le groupe $GL_r(\mathbb{C})$ peut être vu comme le sous-groupe des morphismes constants de A. Dans ce cas, l'action de G sur $GL_r(\mathbb{C})$ est triviale et par conséquent $Z^1(G, GL_r(\mathbb{C})) = \mathrm{Mor}_{groupes}(G, GL_r(\mathbb{C}))$. Les cocycles qui définissent les fibrés $W_x \to M$ en font partie. En effet, pour $x \in X$, notons par

α_x le cocycle d'évaluation en x, définit comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \alpha_x : G & \longrightarrow & GL_r(\mathbb{C}) \\ g = (g_i)_{i \in I} & \longmapsto & g_j(x) \ , \quad \text{où } x \in U_j \end{array}$$

Alors, $W_x \cong \mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L/_{\alpha_x} G$

Remarque. — Si $x \in U_j \cap U_k$ alors les cocycles $g \mapsto g_j(x)$ et $g \mapsto g_k(x)$ ont la même classe ce cohomologie dans $H^1(G, A)$; autrement dit, ils ont la même image par l'application canonique $H^1(G, GL_r(\mathbb{C})) \to H^1(G, A)$. Pour montrer cela, il faut trouver $a \in A$ tel que $g_k(x) = a^g g_j(x) a_{-1}$. Il suffit de considérer $a(z) = z_{kj}(x)$.

On utilisera le théorème suivant de S. Kosarew (voir [Ko]) pour identifier localement la variété X à l'espace $H^1(G, GL_r(\mathbb{C}))$ (en fait, nous devrons remplacer le groupe $GL_r(\mathbb{C})$ par $SL_r(\mathbb{C})$. Cela sera fait dans le paragraphe suivant).

Théorème 2.13. — *Soient r un entier ≥ 2 et U un espace de Stein complexe. Considérons l'application d'évaluation suivante*

$$\begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & Mor_e(Mor(U, GL_r(\mathbb{C})), GL_r(\mathbb{C})) \\ x & \longmapsto & \phi_x : f \mapsto f(x) \end{array}$$

où $Mor(U, GL_r(\mathbb{C})) \stackrel{not}{=} G$ est le groupe topologique des applications holomorphes sur U à valeurs dans $GL_r(\mathbb{C})$, et $Mor_e(G, GL_r(\mathbb{C}))$ dénote l'ensemble des homomorphismes continues de groupes de G dans $GL_r(\mathbb{C})$, qui sont invariants par les actions (à gauche et à droite) de $GL_r(\mathbb{C})$ sur les deux groupes.

Alors, l'application d'évaluation ci-dessus est injective, et pour chaque élément $\lambda \in Mor_e(G, GL_r(\mathbb{C}))$ il existe

1. *un point $x_0 \in U$,*
2. *un homomorphisme de groupes continu $\delta : H^0(U, \mathcal{O}_U^*) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $\delta(c) = 1$ pour toute fonction c, localement constante,*
3. *un homomorphisme $\mu : G/G^0 \longrightarrow \mathbb{C}^*$, où G^0 dénote la composante connexe de l'unité de G; tels que :*

$$\lambda(f) = f(x_0) \cdot \delta(\det(f)) \cdot \mu(f \cdot G^0)$$

De plus, x_0, δ et μ sont uniquement déterminés par λ. □

Remarque. — Si U est un espace de Stein contractile, alors $G^0 = G$ et par conséquent μ est trivial. Si de plus, on remplace $GL_r(\mathbb{C})$ par $SL_r(\mathbb{C})$ dans le théorème ci-dessus, alors l'homomorphisme δ disparraît.

2.3.2. Identifications, reformulation du problème.

Afin d'identifier la variété X à un espace cohomologique, il faut d'abord remplacer le groupe $GL_r(\mathbb{C})$ par $SL_r(\mathbb{C})$. Cela peut être fait en considérant des fibrés vectoriels sur X avec le déterminant fixé. En effet, considérons $d = (d_{ij}) \in Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathbb{C}^*)$ un fibré en droites sur X. Alors, en termes de cocycles, les fibrés vectoriels sur X, de rang r et déterminant d, sont donnés par

$$Z(d) = \{z \in Z^1((\underline{\mathcal{U}}, GL_r(\mathbb{C})) \mid \det(z_{ij}) = d_{ij},\ \forall (i,j) \in I_1\}$$

et les isomorphismes entre ces fibrés correspondent à l'action du groupe $G' = C^0(\underline{\mathcal{U}}, SL_r(\mathbb{C}))$ sur $Z(d)$. Dorénavant, on supposera que le recouvrement $\underline{\mathcal{U}}$ est choisi tel que les ouverts U_i soient de Stein et contractiles, et que $Z(d)$ ne contient que les cocycles correspondants aux fibrés simples. On définit aussi

$$A(d) = \mathrm{Mor}(Z(d), SL_r(\mathbb{C}))$$

Alors, les déformations, à déterminant fixé, des restrictions du fibré de Poincaré sur l'espace de modules $M(d) = Z(d)/G'$, sont données par l'ensemble de cohomologie non-abélienne $H^1(G', A(d))$. Les fibrés W_x sont définis par les cocycles $\alpha_x : g \mapsto g(x)$, $SL_r(\mathbb{C})$ étant vu comme le sous-groupe des morphismes constants de $A(d)$. On remarque ausi que $\alpha_x|_{SL_r(\mathbb{C})} = I_{SL_r(\mathbb{C})}$. Par conséquent une déformation locale β, de α_x, donne naissance à une déformation locale $\beta|_{SL_r(\mathbb{C})}$, de $I_{SL_r(\mathbb{C})}$, qui est un automorphisme intérieur de $SL_r(\mathbb{C})$. On en déduit que β est conjugué à un cocycle dont la restriction sur $SL_r(\mathbb{C})$ est l'identité. Par le théorème de S. Kosarew, un tel cocycle est l'évaluation dans un point $y \in X$. Cela identifie un petit voisinage de x, disons U_i, quitte à considérer un recouvrement plus fin, à un voisinage de $\alpha_x \in H^1(G', SL_r(\mathbb{C}))$ (voir aussi la proposition 2.17). Alors, l'application $x \mapsto W_x$ se traduit localement par l'application canonique

$$H^1(G', SL_r(\mathbb{C})) \to H^1(G', A(d))$$

On dénotera par $sl_r(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie de $SL_r(\mathbb{C})$ et par $\mathfrak{a}(d)$ l'algèbre de Lie de $A(d)$. Compte tenu de la description du foncteur tangent pour la cohomologie de groupes, la question sur la complétude de la déformation locale de W_x, fournie par X, se traduit par :

L'application $H^1(G', sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}) \to H^1(G', \mathfrak{a}(d)_{\alpha_x})$ est-elle surjective ?

Bien que la motivation principale soit l'étude des déformations du fibré de Poincaré, on remarque que cette question peut être posée même dans l'absence de celui-la. On pourra donc regarder cette question comme une généralisation du théorème de Narasimhan-Ramanan, aussi bien aux variétés de dimension quelconque, qu'au contexte des espaces de modules grossiers. Bien entendu, certaines hypothèses devront être faites sur l'espace de modules $M(d)$ (il s'agit essentiellement d'hypothèses de compacité, comme par exemple, l'absence des fonctions holomorphes non-constantes). Ces hypothèse seront faites au fur et à mesure des besoins.

Remarque. — Si on veut étudier les déformations du fibré W_x sur l'espace de modules M, on est amené a étudier l'application

$$H^1(G, M_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}) \to H^1(G, \mathfrak{a}_{\alpha_x})$$

Il faut remarquer, que l'ensemble cohomologique $H^1(G, GL_r(\mathbb{C}))$ contient plus d'informations que la variété X.

Pour appuyer cette reformulation du problème, on va aussi démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.14. — *Avec les notations ci-dessus, on a un isomorphisme canonique*

$$H^1(G', \mathfrak{a}(d)_{\alpha_x}) \cong Ker\left(H^1(M(d), ad(W_x)) \xrightarrow{\pi^*} H^1(Z(d), \mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r))\right)$$

où π dénote la projection canonique $Z(d) \xrightarrow{\pi} M(d)$ et $\mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r)$ est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $Z(d)$ à valeurs dans $sl_r(\mathbb{C})$.
Pour l'espace de modules M, cet isomorphisme s'écrit

$$H^1(G, \mathfrak{a}_{\alpha_x}) \cong Ker\left(H^1(M, End(W_x)) \xrightarrow{\pi^*} H^1(Z, \mathcal{O}_Z(M_r))\right)$$

Pour montrer cette proposition on a besoin de savoir que la cohomologie d'un module induit est nulle.

DÉFINITION 2.15. — *Soient $\mathfrak{m}$ un G-module à droite, et $Mor(G, \mathfrak{m})$ l'ensemble des applications analytiques sur G à valeurs dans $\mathfrak{m}$. Pour $g \in G$ et $\gamma \in Mor(G, \mathfrak{m})$, on définit $(\gamma g)(h) = \gamma(gh)g$, $\forall h \in G$. Alors $Mor(G, \mathfrak{m})$ devient un G-module à droite, appelé G-module induit.*

LEMME 2.16. — *Avec les notations de la définition ci-dessus, on a*

$$H^1(G, Mor(G, \mathfrak{m})) = 0$$

Démonstration. — Soit $f : G \longrightarrow \mathrm{Mor}(G, \mathfrak{m})$ un 1-cocycle, donc f vérifie $f(g_1 g_2, h) = f(g_1, g_2 h) g_2 + f(g_2, h)$. On définit $\gamma \in \mathrm{Mor}(G, \mathfrak{m})$ par

$\gamma(h) = f(h,1)h^{-1}$. Alors $(\gamma g - \gamma)(h) = f(g,h)$ et par coséquent $[f] = 0$ dans $H^1(G, \mathrm{Mor}(G, \mathfrak{m}))$. $\square$

Démonstration de la proposition 2.14. — On dénotera par $\underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x}$ le faisceau sur $M(d)$, défini par $\Gamma(U, \underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x}) = Z^1(G', \mathrm{Mor}(\pi^{-1}(U), sl_r)_{\alpha_x})$, pour chaque ouvert $U \subset M(d)$. On a une application canonique

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, \pi_* \mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r)) & \longrightarrow & \Gamma(U, \underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x}) \\ \gamma & \longmapsto & (g \mapsto \gamma g - \gamma) \end{array}$$

L'application $\pi : Z(d) \to M(d)$ est une $G'/U(r)$ fibration principale, où $U(r)$ dénote le groupe des racines complexes d'ordre r de l'unité. Alors, si on considère U un ouvert de trivialisation de π, on a

$$\mathrm{Mor}(\pi^{-1}(U), sl_r)_{\alpha_x} \cong \mathrm{Mor}(G'/U(r), \mathrm{Mor}(U, sl_r)_{\alpha_x})$$

et par le lemme ci-dessus, sa $G'/U(r)$-cohomologie est nulle en degré 1. En utilisant la suite spectrale d'une extension de groupes, et compte tenu que l'action de $U(r)$ sur $\mathrm{Mor}(\pi^{-1}(U), sl_r)$ est triviale, on trouve

$$H^1(G', \mathrm{Mor}(\pi^{-1}(U), sl_r)_{\alpha_x}) = 0$$

On en déduit que l'application $\pi_* \mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r) \to \underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x}$ est surjective. D'autre part, le noyau de cette application s'identifie au fibré $ad(W_x)$ (ici on tient compte du fait que $W_x \cong \mathcal{O}_{Z(d)} \otimes L/_{\alpha_x} G'$) et par conséquent on obtient la suite exacte suivante

$$0 \to ad(W_x) \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r) \longrightarrow \underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x} \to 0$$

En considérant la suite exacte longue de cohomologie, et compte tenu que $H^0(\underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x}) = Z^1(G', \mathfrak{a}(d)_{\alpha_x})$, on obtient un isomorphisme

$$H^1(G', \mathfrak{a}(d)_{\alpha_x}) \cong Ker\left(H^1(M(d), ad(W_x)) \longrightarrow H^1(M(d), \pi_* \mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r))\right)$$

Il reste juste à remarquer que, par la suite spectrale de Leray, le noyau ci-dessus est le même que celui de l'énonce du théorème. $\square$

Remarque. — Cette proposition est une redémonstration du fait que $H^1(G', \mathfrak{a}(d)_{\alpha_x})$ paramètre les déformations infinitésimales de W_x, avec déterminant et image réciproque fixés. En même temps, elle fait le lien entre le point de vue s'appuyant sur la cohomologie de groupes et le point de vue classique, i.e considérer $H^1(M(d), ad(W_x))$ comme espace infinitésimal de paramètres.

On note par $G_i^{'} = \mathrm{Mor}(U_i, SL_r(\mathbb{C}))$, le groupe des applications holomorphes sur U_i à valeurs dans $SL_r(\mathbb{C})$. Fixons $j \in I$ tel que $x \in U_j$, donc le cocycle α_x est donné par $g \mapsto g_j(x)$. On définit $G_{-j}^{'} = \prod_{i \neq j} G_i^{'}$. Alors

$$G^{'} = \prod_{i \in I} G_i^{'} = G_j^{'} \times G_{-j}^{'}$$

Proposition 2.17. — *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$H^1(G_j^{'}, sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}) \cong H^1(G^{'}, sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x})$$

Démonstration. — On remarque que l'action de $G_{-j}^{'}$ sur $sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}$ est triviale. Alors, en utilisant la suite spectrale d'une extension de groupes, il suffit de montrer que

$$H^1(G_{-j}^{'}, sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x})^{G_j^{'}} = 0$$

Soit $[f] \in H^1(G_{-j}^{'}, sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x})$ invariant par l'action de $G_j^{'}$ (voir paragraphe 2.1.2 pour la définition de cette action). Alors f est un morphisme de groupes $f : G_{-j}^{'} \to sl_r(\mathbb{C})$, tel que $f(g) = h_j(x)^{-1} f(h_j g h_j^{-1}) h_j(x), \forall g \in G_{-j}^{'}, h_j \in G_j^{'}$. Puisque les sous-groupes $G_j^{'}$ et $G_{-j}^{'}$ commutent, on en déduit que $f(g)$ est dans le centre de $sl_r(\mathbb{C})$, donc $f(g) = 0$, pour tout $g \in G_{-j}^{'}$. □

Remarque. — On peut aussi montrer cette proposition, en vérifiant que l'application canonique $H^1(G_j^{'}, SL_r(\mathbb{C})) \to H^1(G^{'}, SL_r(\mathbb{C}))$ est un isomorphisme local en α_x. Pour cela, considérons β une déformation locale de α_x dans $H^1(G^{'}, SL_r(\mathbb{C}))$. Alors $\beta_j = \beta|_{G_j^{'}}$ est surjectif. D'autre part, β_j et $\beta_{-j} = \beta|_{G_{-j}^{'}}$ doivent commuter, car $G_j^{'}$ et $G_{-j}^{'}$ commutent. On en déduit que $Im(\beta_{-j}) \subset U(r)$, et par connexité on trouve $\beta_{-j} \equiv 1$, d'où $\beta = \beta_j$, ce qui démontre que l'application ci-dessus, est un isomorphisme local en α_x.

2.4. Espace de modules de fibrés a-rigides

Un des problèmes principaux qui apparaissent lorsqu'on veut définir une application de bidualité, est l'absence d'une famille universelle. Pour contourner ce problème on va rigidifier la situation, en fixant un point $a \in X$ et des isomorphismes $\varphi : \mathbb{C}^r \to E_a$, pour chaque fibré E sur X.

Définition 2.18. — *On appelle fibré vectoriel a-rigide sur X, un couple (E, φ), où E est un fibré vectoriel de rang r sur X, et $\varphi : \mathbb{C}^r \to E_a$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Par abus de langage, on dira tout simplement que E est un fibré vectoriel a-rigide sur X, φ étant dans ce cas sous-entendu.

Un morphisme entre deux couple (E, φ) et (F, ψ), est un morphisme de fibrés vectoriels $f : E \to F$, tel que $f_a \circ \varphi = \psi$.

Définition 2.19. — *Soit $S \in (An)$ un espace analytique complexe. On appelle famille de fibrés vectoriels a-rigides sur X, paramétrée par S, un couple (E, φ), où $E \to S \times X$ est un fibré vectoriel et φ est un isomorphisme*

$$\varphi : \mathcal{O}_S^{\oplus r} \longrightarrow E_a = E \mid_{S \times \{a\}}$$

Deux familles (E, φ) et (F, ψ) paramétrées par un espace analytique S, sont dites isomorphes s'il existe $f : E \to F$ un isomorphisme de fibrés vectoriels, tel que $f_a \circ \varphi = \psi$.

Si (E, φ) est une famille de fibrés vectoriels a-rigides et $\alpha : T \to S$ est un morphisme d'espaces analytiques complexes, on définit une nouvelle famille $(\alpha^{\#}E, \alpha^*\varphi)$, paramétrée par T. Cette construction s'appelle changement de base.

Notre but est de montrer qu'il existe un bon espace de modules de fibrés simples a-rigides sur X. Grace au changement de base, on peut définir un foncteur contravariant F, associant à chaque espace analytique S, l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles de fibrés simples a-rigides de rang fixé, paramétrées par S.

$$\begin{array}{rcl} F : (An) & \longrightarrow & (Ens) \\ S & \longmapsto & \{\text{familles } (E, \varphi) \text{ parametrées par } S\}/_{\text{isomorphismes}} \end{array}$$

Proposition 2.20. — *Le foncteur F, défini ci-dessus, est représentable par un epace analytique localement séparé.*

Pour montrer cette proposition on va utiliser le résultat suivant, dû à Schuster et Vogt ([Sc-Vo])

Proposition 2.21. — *Soit $F : (An) \to (Ens)$ un foncteur contravariant, vérifiant les propriétés suivantes*

(1) *F est de nature locale*

(2) *Pour tout élément $a_0 \in F(p_0)$, il existe un germe (S, s) et $a \in F(S)$, tels que $a_s = a_0$, et a soit une déformation formellement verselle pour chaque a_x, $x \in S$*

(3) *Si $S \in (An)$ et $a, b \in F(S)$, alors le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} N_S^F(a,b) : (An/_S) & \longrightarrow & (Ens) \\ T/_S & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{si Isom}_T(a_T, b_T) = \emptyset \\ \{\emptyset\} & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

est représentable par un sous-espace analytique localement fermé (respectivement fermé) de S.

Alors F est représentable (respectivement représentable par un espace analytique séparé). □

On utilisera aussi le lemme suivant

Lemme 2.22. — *Soient T un espace analytique et L un fibré en droites sur T, avec un morphisme $\theta : L \to \mathcal{O}_T^{\oplus r}$. Si $s \in H^0(T, \mathcal{O}_T^{\oplus r})$ est une section partout non nulle, alors l'ensemble $T^{'} = \{t \in T \mid s(t) \in \theta(L_t)\}$ est un sous-ensemble analytique localement fermé de T.*

Démonstration. — Soit D le sous-fibré trivial en droites de $\mathcal{O}_T^{\oplus r}$ engendré par s. On considère $t_0 \in T^{'}$, et U un ouvert de T qui contient t_0, et tel que $L\mid_U$ soit trivial. On considère aussi une décomposition

$$\mathcal{O}_U^{\oplus r} = D\mid_U \oplus D^{'}\mid_U$$

Soient $l_0 \in L_{t_0}$ tel que $\theta(l_0) = s(t_0)$, et φ une section partout non nulle de L au-dessus de U, telle que $\varphi(t_0) = l_0$. Alors il existe $a : U \to \mathbb{C}$, et b une section de $D^{'}$, avec $a(t_0) = 1$, $b(t_0) = 0$, et tels que $\theta(\varphi(t)) = a(t)s(t) + b(t)$, pour tout $t \in U$. De plus, quitte à resreindre U, on peut supposer que $a(t) \neq 0$ sur U.

Alors, on peut vérifier facilement que $T^{'} \cap U = b^{-1}(0)$, ce qui démontre que $T^{'}$ est un sous-ensemble localement fermé de T. □

Démonstration de la proposition 2.20. — La nature locale des F est une conséquence imédiate de la définition des fibrés simples a-rigides. Le point (2) est une conséquence du fait qu'il existe un espace de modules (grossier) de fibrés simples sur X, paramétrant une famille locale.

Nous allons montrer que la condition (3) du théorème est également vérifiée. Pour cela on considère (E,φ) et (F,ψ) deux familles paramétrées par un espace analytique S, et soit

$$S^{'} = \{s \in S \mid (E_s, \varphi_s) \cong (F_s, \psi_s)\}$$

Il faut montrer que $S^{'}$ est un sous-ensemble analytique localement fermé de S. On considère S_1 le sous-ensemble de S, définit comme suit

$$S_1 = \{s \in S \mid h^0(X, Hom(E_s, F_s)) = h^0(X, Hom(\det E_s, \det F_s)) = 1\}$$

Alors S_1 est un sous-ensemble analytique localement fermé de S et $S^{'} \subset S_1$. Il suffit donc de montrer que $S^{'}$ est localement fermé dans S_1.

On dénote par p_2 la projection de $X \times S_1$ sur S_1. Alors, l'image directe $(p_2)_* Hom(E,F)$ est un fibré en droites sur S_1, et la fibre en un point $s \in S_1$ s'identifie à $H^0(X, Hom(E_s, F_s))$. Par évaluation en a, on obtient un morphisme

$$\theta : (p_2)_* Hom(E,F) \longrightarrow Hom(E_a, F_a)$$

et on a aussi $\psi \circ \varphi^{-1} \in H^0(S, Hom(E_a, F_a))$ une section globale partout non nulle. En appliquant le lemme précédent, on en déduit que l'ensemble

$$S^{''} = \{s \in S_1 \mid \psi \circ \varphi^{-1}(s) \in \theta(H^0(X, Hom(E_s, F_s)))\}$$

est un sous-ensemble localement fermé de S_1. Finalement, il suffit de remarquer que $S^{'}$ est un ouvert de $S^{''}$. En effet, pour chaque $s \in S^{''}$ il existe $f_s \in H^0(X, Hom(E_s, F_s))$, tel que $f_{s,a} \circ \varphi_s = \psi_s$. Alors il faut montrer que la propriété de f_s d'être un isomorphisme, est une propriété ouverte en $S^{''}$. D'autre part, f_s est un isomorphisme si et seulement si $\det f_s$ l'est, c'est à dire si le fibré $\det E_s^* \otimes \det F_s$ est trivial (ici on tient compte du fait que f_s est un isomorphisme en a). Il suffit donc de montrer l'affirmation suivante :

Soient $L \to X \times S$ un fibré en droites, et $s_0 \in S$, tels que L_{s_0} soit trivial. Si $h^0(X, L_s) = 1$ pour tout $s \in S$, alors L_s est trivial pour tout s dans un certain voisinage de s_0.

On dénote par p_2 la projection de $X \times S$ sur S. Alors $(p_2)_* L$ est un fibré en droites sur S, et soit U un ouvert de trivialisation. Il existe $A : U \to (p_2)_* L$, $A(s) \in H^0(X, L_s)$, une section partout non nulle. Compte tenu que L_{s_0} est trivial, on en déduit que $A(s_0)$ ne s'annule pas sur X. Par conséquent, pour chaque $x \in X$, il existe un voisinage U_x de s_0, et un voisinage V_x de x, tels que A ne s'annule pas sur $U_x \times V_x$. Puisque X est compacte, on peut trouver $x_1, \cdots, x_n \in X$, tels que $X = \cup_{i=1}^n V_{x_i}$. On définit $U^{'} = \cap_{i=1}^n U_{x_i}$. Alors A est non nulle sur $U^{'} \times X$, et par conséquent L_s est trivial pour tout $s \in U^{'}$. Cela démontre l'affirmation ci-dessus et en même temps le théorème. $\square$

On dénotera par M_a l'espace de modules de fibrés simples a-rigides sur X, et par (W, ϕ) la famille universelle, où

$$W \longrightarrow X \times M_a \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{M_a}^{\oplus r} \xrightarrow{\phi} W_a$$

Soit $A \in GL_r(\mathbb{C})$. En considérant A comme un automorphisme de $\mathcal{O}_{M_a}^{\oplus r}$, on obtient une nouvelle famille $(W, \phi \circ A^{-1})$, paramétrée aussi par l'espace de modules M_a. Par l'universalité de M_a, on sait qu'il existe un automorphisme $\alpha_A : M_a \to M_a$, tel que $(W, \phi \circ A^{-1}) \cong (\alpha_A^{\#} W, \alpha_A^* \phi)$. Cela nous donne une action de $GL_r(\mathbb{C})$ sur M_a, définie par

$$A \cdot m = \alpha_A(m)$$

En remarquant que l'action de $\mathbb{C}^* I_r$ sur M_a est triviale, on obtient une action de $\mathbb{P}GL_r(\mathbb{C})$ sur M_a.

Proposition 2.23. — *Soient $m_1, m_2 \in M_a$. Alors les fibrés W_{m_1} et W_{m_2} sont isomorphes si et seulement si m_1 et m_2 sont dans la même orbite de $\mathbb{P}GL_r(\mathbb{C})$*

Démonstration. — Soit $f : W_{m_1} \to W_{m_2}$ un isomorphisme de fibrés vectoriels. On définit $A = \phi_{m_2,a}^{-1} \circ f_a \circ \phi_{m_1,a} \in GL_r(\mathbb{C})$. Alors, on vérifie facilement que $A \cdot m_1 = m_2$.

La réciproque est une conséquence imédiate de la définition de l'action de $\mathbb{P}GL_r(\mathbb{C})$ sur M_a. $\square$

Corollaire 2.24. — *Le quotient de M_a par l'action de $\mathbb{P}GL_r(\mathbb{C})$ est isomorphe à l'espace de modules M, de fibrés simples sur X.*

Remarque. — Si on remplace les fibrés simples par des fibrés stables, on obtient un bon espace de modules de fibrés stables a-rigides. Cet espace est une $\mathbb{P}GL_r(\mathbb{C})$-fibration au-dessus de l'espace de modules de fibrés stables. Par conséquent c'est un espace analytique séparé.

2.4.1. Construction analytique.

On reprend les notations de la section 2.3. L'espace de modules de fibrés simples (respectivement stables) y était construit comme le quotient d'un espace analytique banachique Z, par l'action d'un groupe G. On rappelle que Z est l'espace des 1-cocycles d'un recouvrement $\underline{\mathcal{U}} = \{U_i \mid i \in I\}$ ouvert de X, qui représentent des fibrés simples (respectivement stables). On fixe $i_0 \in I$, tel que $a \in U_{i_0}$. Par l'évaluation en a, on obtient un morphisme surjectif de groupes

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL_r(\mathbb{C}) \\ g = (g_i)_{i \in I} & \longmapsto & g_{i_0}(a) \end{array}$$

On dénotera par G_a le noyau de ce morphisme. Alors, l'espace de modules M_a s'identifie au quotient de Z par l'action de G_a. En même temps, compte tenu du fait que $\mathrm{stab}_{G_a}(z) = \{1\}$ pour tout $z \in Z$, le fibré tautologique T descend dans un fibré $W \to X \times M_a$. On obtient ainsi, le fibré universel du paragraphe précédent. Moyennant la cohomologie de groupes, l'application d'évaluation s'écrit dans ce contexte

$$H^1(G_a, GL_r(\mathbb{C})) \longrightarrow H^1(G_a, Mor(Z, GL_r(\mathbb{C})))$$

Si nous voulons montrer que cette application est une surjection sur une composante connexe du terme de droite, nous devons nous intéresser aux déformations infinitésimales. On remarque que W_a est un fibré trivial sur M_a, correspondant au cocycle trivial de $H^1(G_a, GL_r(\mathbb{C}))$. Par conséquent, l'application de déformation infinitésimale en a, devient

$$H^1(G_a, M_r(\mathbb{C})) \longrightarrow H^1(G_a, Mor(Z, M_r(\mathbb{C})))$$

Si on s'intéresse aux espaces de modules de fibrés sur X, avec déterminant fixé, on doit remplacer $M_r(\mathbb{C})$ par $sl_r(\mathbb{C})$.

2.4.2. Filtration du groupe G_a.

L'existence d'une famille universelle n'est pas l'unique avantage de l'espace de modules M_a. Nous avons aussi une propriété très spéciale, satisfaite par le groupe G_a. Il peut être filtré par des sous-groupes distingués, dont les quotients successifs sont des groupes additifs de matrices complexes. Plus précisément, considérons les sous-groupes de G_a, définis comme suit

$$G_a^k = \{g \in G_a \mid d_a^1 g_{i_0} = \cdots = d_a^k g_{i_0} = 0\}, \quad k \geq 0$$

où $d_a^k g_{i_0}$ dénote la k-ème différentielle de g en a. Bien évidemment, G_a^k sont des sous-groupes distingués de G_a. On obtient de cette manière une filtration

$$(G \supset) G_a = G_a^0 \supset G_a^1 \supset \cdots G_a^k \supset G_a^{k+1} \supset \cdots$$

Les quotients successifs de cette filtrations sont isomorphes aux groupes additifs des applications linéaires $\mathcal{L}(T_aX, M_r)$, où T_aX dénote l'espace tangent de X en a.

Dorénavant, nous nous placerons dans un contexte plus général : Etant donné un espace vectoriel V, muni d'une action d'un groupe G, nous voulons savoir sous quelles conditions, l'application de comparaison ci-dessous, est surjective ?

$$H^1(G, V^G) \longrightarrow H^1(G, V)$$

Si le groupe G est muni d'une filtration $G = G^0 \supset G^1 \supset G^2 \cdots$, nous devrons utiliser des techniques de la théorie des déformations, afin de déformer G dans le groupe gradué associé $grG = \prod_{k\geq 0} G^k/G^{k+1}$. Cela n'est pas toujours possible pour G, mais sous certaines conditions, lorsque G est le groupe des unités d'une algèbre $\mathcal{G}$, le groupe G^1 peut être déformé dans son groupe gradué (on remarque aussi l'analogie entre G^1 et G_a). Cette approche sera décrite dans le paragraphe suivant. Il nous faut aussi utiliser l'annulation de la cohomologie du groupe gradué et des arguments de semi-continuité. Nous pensons que la cohomologie des groupes additifs, agissant sans points fixes, est nulle. A présent, nous ne connaissons pas de tels résultats d'annulation; néanmoins, on peut montrer facilement la proposition suivante

Proposition 2.25. — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$. Si l'action de $\mathbb{C}$ est sans points fixes sur $V\backslash\{0\}$, alors*

$$H^1(\mathbb{C}, V) = 0$$

Démonstration. — On dénote par $\rho : \mathbb{C} \to Aut(V)$ le morphisme de groupes, induisant l'action de $\mathbb{C}$ sur V. Puisque cette action est sans points fixes, on en déduit que la dérivée $\rho'(a)$ est inversible pour tout $a \in \mathbb{C}$.

En effet, soient $a_0 \in \mathbb{C}$ et $v \in V$, tels que $\rho'(a_0)v = 0$. En dérivant l'égalité $\rho(a + b) = \rho(a)\rho(b)$, par rapport à a et à b, on obtient

$$\rho'(a + b) = \rho'(a)\rho(b) = \rho(a)\rho'(b) \tag{2.1}$$

On en déduit que $\rho'(a)v = 0$, pour tout $a \in \mathbb{C}$, et par conséquent l'application $a \mapsto \rho(a)v$ est constante sur $\mathbb{C}$. L'action de $\mathbb{C}$ étant sans poins fixes, on trouve $v = 0$, donc $\rho'(a_0)$ est inversible.

On considère maintenant un élément $f \in Z^1(\mathbb{C}, V)$. Donc, f est une application $f : \mathbb{C} \to V$, vérifiant

$$f(a + b) = \rho(b)f(a) + f(b)$$

En dérivant par rapport à a et à b, on obtient les deux égalités suivantes

$$f^{'}(a+b) = \rho(b)f^{'}(a) = \rho^{'}(b)f(a) + f^{'}(b) \tag{2.2}$$

$$f^{''}(a+b) = \rho^{'}(b)f^{'}(a) = \rho^{'}(a)f^{'}(b) \tag{2.3}$$

Compte tenu que $\rho(a)$ et $\rho(b)$ commutent, on en déduit que les dérivées $\rho^{'}(a)$ et $\rho^{'}(b)$ commutent également. Alors, l'égalité 2.3 entraine que le vecteur $v = \rho^{'}(a)^{-1}f^{'}(a)$ est indépendent de a. En multipliant l'egalité 2.2 par $(\rho(b)\rho^{'}(a))^{-1} = (\rho^{'}(b)\rho(a))^{-1}$ (voir l'égalité 2.1), on obtient

$$f(a) = \rho(a)v - v$$

On en déduit que tout 1-cocycle est une frontière, donc $H^1(\mathbb{C}, V) = 0$. □

Remarque. — Si on veut refaire la démonstration ci-dessus, en remplaçant $\mathbb{C}$ par le groupe matriciel M_r, les dérivées $f^{'}(a)$ devront être remplacer par $d_A f(A+X)$, $A, X \in M_r$. Alors, on devrait savoir qu'il existe $X \in M_r$ tel que $d_A f(A+X)$ soit inversible. Mais cette condition est plus forte que celle d'avoir une action sans points fixes. En effet, la multiplication par X induit un morphisme de groupes $\mathbb{C} \to M_r$, et par conséquence une action ρ_X de $\mathbb{C}$ sur V. Alors, la condition ci-dessus est satisfaite si et seulement si ρ_X est une action sans points fixes.

On peut formuler cela comme suit

PROPOSITION 2.26. — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action ρ du groupe matriciel $(M_r, +)$. S'il existe $X \in M_r$ tel que ρ_X soit une action sans points fixes, alors*

$$H^1(M_r, V) = 0$$

□

2.4.3. Déformations des groupes filtrés.

Dans ce paragraphe, par algèbre on comprendra une algèbre associative sur un corps quelconque K. Une algèbre filtrée sera une algèbre $\mathcal{G}$, munie d'une suite décroissante d'idéaux

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 \supset \mathcal{G}^1 \supset \mathcal{G}^2 \supset \cdots$$

telle que $\mathcal{G}^i\mathcal{G}^j \subset \mathcal{G}^{i+j}$, $i, j \geq 0$. G désignera le groupe des unités de $\mathcal{G}$. Il sera muni d'une filtration définie par

$$G^i = (1 + \mathcal{G}^i) \cap G$$

On dira que la filtration sur G est la translatée de celle sur $\mathcal{G}$.

Remarque. — G^i sont des sous-groupes distingués de G. En effet, pour $g_i, h_i \in G^i$ et $h \in G$, on a

$$\begin{array}{ll} g_i^{-1} - 1 = g_i^{-1}(1 - g^i) \in \mathcal{G}^i, & \text{donc } g_i^{-1} \in G^i \\ g_i h_i - 1 = g_i[(1 - g_i^{-1}) - (1 - h_i)] \in \mathcal{G}^i, & \text{donc } g_i h_i \in G^i \\ h g_i h^{-1} - 1 = h(g_i - 1)h^{-1} \in \mathcal{G}^i, & \text{donc } h_i g_i h_i^{-1} \in G^i \end{array}$$

On dénotera par $\mathcal{F}^{(i)} = \mathcal{G}^i/\mathcal{G}^{i+1}$ et $F^{(i)} = G^i/G^{i+1}$. On utilisera la même notation, p_i, pour désigner la projection canonique de $\mathcal{G}^i$ sur $\mathcal{F}^{(i)}$, ou de G^i sur $F^{(i)}$. L'algèbre graduée associée à $\mathcal{G}$, respectivement le groupe gradué associé à G, seront définis par des produits directs

$$\mathcal{F} = \prod_{i \geq 0} \mathcal{F}^{(i)}, \quad \text{respectivement} \quad F = \prod_{i \geq 0} F^{(i)}$$

On peut définir une multiplication sur $\mathcal{F}$ comme suit : Soient $a_i, b_i \in \mathcal{F}^{(i)}$ représentés par $x_i, y_i \in \mathcal{G}^i$. On définit $a_i b_i = p_{i+j}(x_i x_j)$.

Supposons que $\cap_{i \geq 0} \mathcal{G}^i = 0$. On définit sur $\mathcal{G}$ une topologie séparée, en considérant les idéaux $\mathcal{G}^i$ comme voisinages de zero. On dit que $\mathcal{G}$ est une algèbre filtrée complète, si $\mathcal{G}$ est complète dans cette topologie.

Dorénavant, on fixe $q_i : \mathcal{F}^{(i)} \to \mathcal{G}^i$, des application additives, telles que $p_i q_i = I$, où I dénote l'application identité. De plus, on supposera q_0 choisie telle que $q_0 p_0(1) = 1$. On dénotera aussi par $1 = p_0(1) \in \mathcal{F}^{(0)}$.

Remarque. — Ces applications existent, puisque $\mathcal{G}$ est une K-algèbre. Si on considère que $\mathcal{G}$ est muni seulement d'une structure d'anneau, on doit imposer l'existence des applications q_i. Un tel anneau s'appelle prédévélopable. Les résultats de ce paragraphe resteront valables lorsque $\mathcal{G}$ est un anneau dévélopable (i.e. prédévélopable et complet).

On définit aussi des applications additives $T_i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}^{(i)}$, par

$$T_0(x) = p_0(x), \; T_i(x) = p_i(I - q_{i-1}p_{i-1}) \cdots (I - q_0 p_0)(x)$$

et on pose $T_i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, $T(x) = (T_0(x), T_1(x), \cdots)$.

Proposition 2.27. — *L'application T est additive, injective et elle induit un homéomorphisme sur son image. T est surjective si et seulement si $\mathcal{G}$ est complète.*

Démonstration. — Compte tenu que chaque T_i est additif, T l'est aussi. Si $T(x) = 0$ on trouve, par récurrence sur i, que $x \in \cap_{i\geq 0}\mathcal{G}^i = 0$, donc T est injective.

Dénotons par $\mathcal{F}_{\geq i} = \mathcal{F}^{(i)} \times \mathcal{F}^{(i+1)} \times \cdots$. Compte tenu de la définition de T on a $T(\mathcal{G}^i) \subset \mathcal{F}_{\geq i}$ et $T^{-1}(\mathcal{F}_{\geq i}) \subset \mathcal{G}^i$. Cela démontre que T est un homéomorphisme.

Soit $a = (a_0, a_1, \cdots) \in \mathcal{F}$. On pose $x = q_0(a_0) + q_1(a_1) + \cdots$. Si $\mathcal{G}$ est complète cette somme converge et $T(x) = a$. On voit facilement que la complétude de $\mathcal{G}$ est aussi une condition nécessaire pour la surjectivité de T. $\square$

Sachant qu'en général $T(xy) \neq T(x)T(y)$, on va définir par la suite une nouvelle multiplication sur $\mathcal{F}$, pour laquelle T devient un isomorphisme multiplicatif. On dénotera par $\pi_{i,\lambda}$ la projection de $\mathcal{F}_{\geq i}$ sur $\mathcal{F}^{(i+\lambda)}$. On remarque que pour $x_i \in \mathcal{G}^i$ et $x_j \in \mathcal{G}^j$, on a $T(x_i x_j) - T(x_i)T(x_j) \in \mathcal{F}_{\geq i+j+1}$. Alors, pour $\lambda \geq 1$, on définit des applications bilinéaires $\bar{A}_\lambda : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ par

$$\bar{A}_\lambda(x_i, x_j) = \pi_{i+j,\lambda}[T(x_i x_j) - T(x_i)T(x_j)]$$

Cette définition s'étend par linéarité sur $\mathcal{G}$. Pour $a, b \in \mathcal{F}$ on définit $A_\lambda(a, b) = \bar{A}_\lambda(T^{-1}(a)T^{-1}(b))$. Ces applications sont bilinéaires. On introduit sur $\mathcal{F}$ une nouvelle multiplication, notée $\times$, par

$$a \times b = ab + A_1(a, b) + A_2(a, b) + \cdots$$

Compte tenu que $T(x_i x_j) = T(x_i)T(x_j) + \bar{A}_1(x_i, x_j) + \bar{A}_2(x_i, x_j) + \cdots$, on vérifie facilement la proposition suivante

Proposition 2.28. — *Si G est complète, l'application T induit un isomorphisme d'algèbres de $(\mathcal{G}, +, \cdot)$ dans $(\mathcal{F}, +, \times)$.* $\square$

Remarque. — Du point de vue de la théorie des déformations, cet énoncé dit qu'une algèbre filtrée est une déformation de l'algèbre graduée associée (on peut regarder $\times$ comme une déformation du produit $\cdot$ sur $\mathcal{F}$). De plus on peut montrer que les déformations de $\mathcal{F}$ sont en correspondance biunivoque avec certaines suites de cochaines $A_\lambda \in C^{2,\lambda}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ - ici on utilise la graduation de $\mathcal{F}$ pour définir une graduation sur $C^2(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ - pour les détail voir [Ger].

Nous revenons aux déformations des groupes filtrés. Par déformation d'un groupe nous entendons une déformation de la structure de groupe. Plus précisément, on dit qu'un groupe $(G, \times_1)$ peut être déformé dans un groupe $(G, \times_0)$ s'il existe une famille continue $\times_t$ de structures de groupe sur G (i.e.

une application continue $\times : K \times G \times G \to G$) telle que $(G, \times_1) \cong (G, \times_t)$, pour tout $t \in K$ non nul.

Notre but est de déformer un groupe filtré dans son groupe gradué associé. Pour cela, il faut trouver des isomorphismes avec deux groupes qui ont le même ensemble sous-jacent. Reprenons les notations antérieures. On remarque que si $\mathcal{G}$ est une algèbre complète, alors pour $x_i \in \mathcal{G}^i$, $i \geq 1$, la somme $1 - x_i + x_i^2 \cdots$ converge. Par conséquent $1 + x_i$ est un élément inversible de $\mathcal{G}$, et on obtient

$$G^i = 1 + \mathcal{G}^i$$

On définit $\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1} = \{(1, a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \mathcal{F}^{(i)}, i \geq 1\}$. Soient $a_i \in \mathcal{F}^{(i)}, i \geq 1$. On utilisera les notations suivantes

$$a = (0, a_1, a_2, \cdots) \in \mathcal{F}_{\geq 1} \quad \text{et} \quad \bar{a} = (1, a_1, a_2, \cdots) \in \overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$$

La multiplication $\times$ sur $\mathcal{F}$, induit une opération, notée $\times_1$, sur $\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$. Il est clair que $\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$ n'est pas stable par rapport à l'addition sur $\mathcal{F}$. Néanmoins, nous pouvons définir une opération sur $\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$, notée $\times_0$, en additionant seulement les composantes de degré ≥ 1. Avec ces notations, on a

$$\bar{a} \times_1 \bar{b} = T((1 + T^{-1}(a))(1 + T^{-1}(b))) = \bar{a} \times_0 \bar{b} + a \times b$$

On définit aussi les deux isomorphismes suivants

$$T^1 : G^1 \to (\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}, \times_1) \quad \text{et} \quad \Phi : grG^1 \to (\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}, \times_0)$$

L'isomorphisme T^1 est obtenu par la restriction de l'application T, définie antérieurement. Si $g_1 \in G^1$, alors $T_0(g_1) = p_0(g_1) = 1$, et par conséquent $T(G^1) \subset \overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$. Réciproquement, soit $\bar{a} \in \overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$. Puisque T est bijectif, il existe $x \in \mathcal{G}$, tel que $T(x) = \bar{a}$. Il s'ensuit que $p_0(x) = 1$, d'où $x - 1 \in \mathcal{G}^1$, et par conséquent $x \in G^1$.

Le deuxième isomorphisme est un isomorphisme de groupes gradués. On définie $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \cdots)$, où

$$\begin{array}{rcc} \Phi_i : F^{(i)} & \longrightarrow & \mathcal{F}^{(i)} \\ \alpha_i = p_i(g_i) & \longmapsto & p_i(g_i - 1) \end{array}$$

Si $p_i(g_i) = p_i(h_i)$, alors $(g_i - 1) - (h_i - 1) = g_i(1 - g_i^{-1} h_i) \in \mathcal{G}^{i+1}$. Cela démontre que Φ est bien définie. Φ est un morphisme de groupes, puisque $p_i(g_i h_i - 1) = p_i(g_i - 1) + p_i(h_i - 1)$. Cela est une conséquence du fait que $g_i h_i - g_i - h_i + 1 = (g_i - 1)(h_i - 1) \in \mathcal{G}^{i+i} \subset \mathcal{G}^{i+1}$. L'application Φ est évidemment injective. De plus, pour $x_i \in \mathcal{F}^{(i)}, i \geq 1$, on a $\Phi_i(1 + q_i(x_i)) = p_i q_i(x_i) = x_i$, et la surjectivité de Φ s'ensuit.

Nous avons le théorème suivant

THÉORÈME 2.29. — *Soient $\mathcal{G}$ une algèbre filtrée complète et G le groupe des unités, muni de la filtration translatée de celle sur $\mathcal{G}$*

$$G = G^0 \supset G^1 \supset G^2 \supset \cdots$$

Alors G^1 est peut être déformé dans le groupe gradué associé grG^1.

Démonstration. — Pour $t \in K$, $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$, on définit

$$\bar{a} \times_t \bar{b} = \bar{a} \times_0 \bar{b} + t(a \times b)$$

Compte tenu des isomorphismes ci-dessus, il suffit de démontrer que $\times_t$ définit une structure de groupe sur $\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$. On vérifie facilement que l'inverse d'un élément $\bar{a}$, par rapport à $\times_t$, est donné par $\bar{a}^{-1} = \frac{1}{t} T(x^{-1} T^{-1}(a))$, où $x = T^{-1}(\bar{a}) \in G^1$ $(t \neq 0)$.

On remarque aussi que pour $t \neq 0$, l'application $\bar{a} \mapsto \overline{ta}$, définit un isomorphisme de $(\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}, \times_t)$ dans $(\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}, \times_1)$. $\square$

Bibliographie

Références

[At] M. F. ATIYAH, *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 181-207.

[Ba-BrP-Ne] V. BALAJI, L. BRAMBILA PAZ, P. E. NEWSTEAD, *Stability of the Poincaré bundle*, Math. Nachr. 188 (1997), 5-15.

[Ba-Vi] V. BALAJI, P. A. VISHWANATH, *On the deformation theory of moduli spaces of vector bundles*, Vector bundles in algebraic geometry, Durham 1993, 1-14.

[Be] D. J. BENSON, *Representation et cohomology, I et II*, Cambridge Univ. Press, 1991.

[Dr-Na] J.-M. DREZET, M.S. NARASIMHAN, *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*, Invent. Math. 97 (1989), 53-94.

[Ger] M. GERSTENHABER, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. 79 (1964), 58-103.

[Gr1] A. GROTHENDIECK, *Techniques de constructions et théorèmes d'existance en géométrie algébrique, IV: Les schémas de Hilbert*, Séminaire Boubaki 1960/61, fascicule 2, exposé 221.

[Gr2] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. 9 (1957), 119-221.

[Ha] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[Hi] F. HIRZEBRUCH, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1966.

[Ko-Sp] K. KODAIRA, D. C. SPENCER, *On deformation of complex analytic structures* I, Ann. of Math. 67:2 (1958), 328-466.

[Kos] S. KOSAREW, *Nonabelian duality on Stein spaces*, Amer. J. Math. 120 (1998), 637-648.

[Kos-Ok] S. KOSAREW, C. OKONEK, *Global moduli spaces and simple holomorphic bundles*, Publ. RIMS, KyotoUniv. 25 (1989), 1-19.

[Li] Y. LI, *Picard bundles*, Internat. J. Math. 2 (1991), 525-550.

[M] S. Mukai, *On the moduli space of bundles on K3 surfaces*, Vector Bundles in Algebraic Varieties, Bombay 1884, 341-413.

[Mu] D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, 1974.

[Mu-Fo] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag 1982.

[Na-Ra1] M. S. Narasimhan, S. Ramanan, *Deformations of the moduli space of vector bundles over an algebraic curve*, Ann. of Math. 101 (1975), 391-417.

[Na-Ra2] M. S. Narasimhan, S. Ramanan, *Geometry of Hecke cycles I*, en : C. P. Ramanujam, A Tribute, Springer-Verlag, 1978.

[Na-Ra3] M. S. Narasimhan, S. Ramanan, *Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. 85 (1969), 14-51.

[Na-Ra4] M. S. Narasimhan, S. Ramanan, *Vector bundles on curves*, Algebraic Geometry, Papers presented at the Bombay Colloquium, 1968, Oxford Univ. Press, 1969.

[Ne] P. E. Newstead, *Introduction to the moduli problems and orbit spaces*, Tata Institut of Fundamental Research, Bombay, 1978.

[No] V. A. Norton, *Analytic moduli of complex vector bundles*, Ind. Univ. Math. J, 28 (1979), 365-387.

[Ok-Sc-Spi] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Birkhäuser, 1980.

[Po] J. Le potier, *Lecture on vector bundles*, Cambridge Univ. Press, 1997.

[Ra] S. Ramanan, *The moduli spaces of vector bundles over an algebraic curve*, Math. Ann. 200 (1973), 69-84.

[Sc-Vo] H. W. Schuster, A. Vogt, *The moduli of quotients of a compact complex space*, J. Reine Angew. Math. 364 (1986), 51-59.

[Sch] G. Scheja, *Prolongement de Riemann concernant les classes de cohomologie*, Compte Rendu de L'Ac. de Sc. Math. 251 (1960).

[Se] J. P. Serre *Cohomologie galoisienne*, L.N.M. 5, Springer-Verlag, 1994.

[Se1] C. S. Seshadri, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Astérisque 96 (1982).

[Se2] C. S. Seshadri, *Spaces of unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. 85 (1967), 303-336.

[Si] C. T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety* I,II, Publ. Math. I.H.E.S. 79/80 (1994/95).

[Ty] A. N. Tyurin, *The geometry of vector bundles*, Russ. Math. Surveys, 29:6 (1974), 57-88.

[Ve-Po] J. L. Verdier, J. Le potier, *Modules de fibrés stables sur les courbes algébriques*, Notes de l'E.N.S., printemps 1983.