

Ce travail n'aurait jamais pu se réaliser sans l'aide précieuse de certaines personnes que je tiens ici à remercier.

Il s'agit avant tout du Professeur Christine Laurent-Thiébaud qui a eu la gentillesse d'accepter de diriger ces travaux. Sa disponibilité et sa patience m'ont permis de les mener à bien ; chose qui n'était pas évidente. Elle a toujours été à mon écoute pour m'aider à surmonter les difficultés mathématiques, et matérielles, qui ont pu apparaître.

Le Professeur Chérif Badji, pour m'avoir initié au problème du $\bar{\delta}$, ainsi que tous ceux qui, à travers leur enseignement, m'ont permis de m'intéresser aux mathématiques doivent trouver à travers ces lignes ma reconnaissance.

Je remercie également les Professeurs C. Denson Hill et Jürgen Leiterer pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et les Professeurs Anne-Marie Chollet et Giuseppe Tomassini, qui pour avoir jugé ce travail digne d'intérêt, ont accepté d'être membres du jury.

Arlette Guttin-Lombard a saisi ce manuscrit et a su lui donner une bonne présentation typographique. Qu'elle trouve ici toute ma gratitude.

Je tiens à remercier tous les thésards avec lesquels j'ai emprunté le chemin de Condillac, et également tous ceux avec qui j'ai partagé le bureau.

Je tiens également à remercier l'Institut Fourier, pour m'avoir accueilli pour préparer cette thèse, et la coopération française, qui en la finançant par le canal de l'Ambassade de France au Sénégal, a rendu ce travail possible.

Je n'oublie pas dans mes remerciements ma petite famille, qui malgré le temps que je lui ai pris, m'a toujours soutenu.

C'est Hubert Pesce qui m'a mis en contact avec le Professeur Christine Laurent-Thiébaud. Mon seul regret est qu'il ne soit pas là aujourd'hui.

Sommaire

Introduction	7
I Préliminaires	9
II Résolution du $\bar{\partial}$ avec conditions de support – Applications aux courants prolongeables	13
1 Résolution du $\bar{\partial}$ avec conditions de support	13
2 Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables	18
III Invariance de la cohomologie pour les extensions q-concaves et q-convexes	27
IV Applications	37
A Application à l'étude de l'isomorphisme de Dolbeault dans les hypersurfaces réelles	37
B Annulation du r -ième groupe de cohomologie des formes différentielles à valeurs dans le faisceau des fonctions holomorphes qui ont une valeur au bord au sens des courants	39
C Application au $\partial\bar{\partial}$	41
Bibliographie	45

Introduction

Ce travail concerne l'étude de l'équation de Cauchy-Riemann pour les courants prolongeables. Soient X une variété analytique complexe, Ω un domaine de X , le travail se situe dans le cadre général de la recherche de l'existence de solution à l'équation $\bar{\partial}U = f$ où f est une forme différentielle ou un courant sur Ω . Ce problème n'a pas toujours une solution. La cohomologie de Dolbeault mesure l'obstruction à l'existence de solution pour le $\bar{\partial}$. On sait d'après l'isomorphisme de Dolbeault (cf. [10], théorème (4.1), chapitre V, voir aussi [6]) que sur les domaines où on sait résoudre le $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles, on sait résoudre le $\bar{\partial}$ pour les courants. La littérature sur l'existence de solution au problème du $\bar{\partial}$ est abondante et les méthodes de résolution variées. On peut se référer à [6] pour la méthode L_2 et à [8] pour des résultats par la théorie des représentations intégrales et quelques notes historiques ou des références bibliographiques. Cependant même si on parvient à résoudre le $\bar{\partial}$ (cf. [4], [6], [8], [13]), il se pose encore des problèmes d'existence de solutions définies jusqu'au bord pour une donnée qui est une forme différentielle définie jusqu'au bord. Si l'application naturelle entre le groupe de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles définies jusqu'au bord d'un domaine et celui des formes différentielles définies dans le domaine est un isomorphisme, les problèmes d'existence de solution et de solution définie jusqu'au bord sont équivalents. Les courants prolongeables sont pour les courants ce que sont les formes différentielles définies jusqu'au bord sont pour les formes différentielles définies dans un domaine. Il est donc naturel et intéressant de se demander si pour un courant prolongeable T , $\bar{\partial}$ -fermé défini sur un domaine, il existe un courant prolongeable U défini sur ce domaine solution de $\bar{\partial}U = T$. Ce travail est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous définissons différentes notions préliminaires et rappelons quelques résultats qui nous seront utiles par la suite. Le principal résultat étant la proposition 1 due à Martineau [15] et où on a la dualité entre l'espace des courants prolongeables et l'espace de certaines formes différentielles à support fixé.

Nous résolvons d'abord le $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles à support fixé dans le chapitre II. Comme conséquence de cette résolution à support fixé et de la dualité entre les formes à support fixé et les courants prolongeables, on a la résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables. On montre ainsi, cf. théorème II.1.1 ; sur une variété analytique complexe X de dimension n si Ω est un domaine complètement strictement q -convexe de X , $1 \leq q \leq n-1$, on sait résoudre le $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables de bidegré $(0, r)$ avec $1 \leq n-q \leq r \leq n$. C'est le cas convexe.

Dans le cas concave, cf. théorème II.1.6, on montre que si X est une variété de Stein et Ω un domaine à bord \mathcal{C}^∞ tels que X soit une extension q -convexe de $X \setminus \bar{\Omega}$, alors on sait résoudre le $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis sur Ω de bidegré $(0, r)$ avec $1 \leq r \leq q$ et $r \leq n-2$.

Dans le chapitre III, on considère un domaine D d'une variété analytique complexe de dimension n . Notons $\check{H}^{0,r}(D)$ le $(0, r)$ -ième groupe de cohomologie de Dolbeault pour les courants prolongeables définis sur D , $H_\infty^{0,r}(\bar{D})$ respectivement $H_\infty^{0,r}(D)$ le $(0, r)$ -ième groupe de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur \bar{D} respectivement sur D .

On s'intéresse alors à la comparaison entre les groupes de cohomologie de Dolbeault $\check{H}^{0,r}(D)$, $H_\infty^{0,r}(\bar{D})$, $H_\infty^{0,r}(D)$. Nous montrons que si le bord de D est strictement q -concave respectivement strictement q -convexe, l'application naturelle de $H_\infty^{0,r}(\bar{D}) \rightarrow \check{H}^{0,r}(D)$ est un isomorphisme si $0 \leq r \leq q-1$, respectivement $r > n-q$ et $H_\infty^{0,q}(\bar{D}) \rightarrow \check{H}^{0,q}(D)$ est injective respectivement $H_\infty^{0,n-q}(\bar{D}) \rightarrow \check{H}^{0,n-q}(D)$ est surjective.

La première application du quatrième chapitre concerne l'étude de l'isomorphisme de Dolbeault dans le cas hypersurface réelle. Soit S une hypersurface réelle d'une variété analytique complexe X de dimension n . Notons $H_\infty^{p,r}(S)$ respectivement $H_{\text{cour}}^{p,r}(S)$ le (p,r) -ième groupe de $\bar{\partial}_b$ -cohomologie pour les formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur S respectivement des courants. On s'intéresse à l'injectivité et à la surjectivité de l'application naturelle de $H_\infty^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$. On sait que l'application naturelle de $H_\infty^{0,r}(X) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(X)$ est un isomorphisme appelé isomorphisme de Dolbeault. Nous utilisons les résultats du chapitre III pour montrer entre autres que si la forme de Lévi de S a q -valeurs propres de même signe, l'application naturelle de $H_\infty^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est injective si $n-q+1 \leq r \leq q$ et est surjective si $n-q \leq r \leq q-1$. Ce type de problèmes a été étudié dans [7] et [12].

La deuxième application est une conséquence de la résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables dans le cas convexe. Soit Ω un domaine complètement strictement $(n-1)$ -convexe à bord \mathcal{C}^∞ d'une variété analytique complexe X de dimension n . Nous obtenons l'annulation du r -ième groupe de cohomologie des formes différentielles à valeurs dans le faisceau des fonctions holomorphes définies sur Ω , qui ont une valeur au bord au sens des courants pour $r \geq 1$.

C'est par une application au problème du $\partial\bar{\partial}$ que nous terminons ce chapitre. Soit Ω un domaine complètement strictement $(n-1)$ -convexe, à bord \mathcal{C}^∞ d'une variété analytique complexe X de dimension n . Nous montrons que l'équation $\partial\bar{\partial}U = f$, où f est une $(1,1)$ -forme différentielle définie sur Ω , d -fermée, avec valeur au bord au sens des courants admet une fonction U définie sur Ω qui a une valeur au bord au sens des courants comme solution. Ce résultat a été obtenu par Barletta [3] dans le cas où $X = \mathbb{C}^n$.

CHAPITRE I

Préliminaires

Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset X$ un domaine. Un courant T défini sur Ω est dit prolongeable, si T est la restriction à Ω d'un courant (non unique) \tilde{T} défini dans X .

Notons $\mathcal{D}^{p,r}(\overline{\Omega})$ respectivement $\mathcal{D}^{p,r}(\Omega)$, l'espace des (p,r) formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans $\overline{\Omega}$ respectivement dans Ω . Si Ω est relativement compact, $\mathcal{D}^{p,r}(\overline{\Omega})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme des formes différentielles et de toutes leurs dérivées sur $\overline{\Omega}$. Si Ω n'est pas relativement compact, soit K un compact de $\overline{\Omega}$, notons $\mathcal{D}_K^{p,r}(\overline{\Omega})$ le sous-espace de $\mathcal{D}^{p,r}(\overline{\Omega})$ des formes différentielles à support compact dans K . $\mathcal{D}_K^{p,r}(\overline{\Omega})$ est alors muni de la topologie de la convergence uniforme des formes différentielles et de toutes leurs dérivées sur K . On met sur $\mathcal{D}^{p,r}(\overline{\Omega}) = \bigcup_K \mathcal{D}_K^{p,r}(\overline{\Omega})$ la topologie d'espace vectoriel localement convexe la plus fine qui rende continues toutes les inclusions

$$\mathcal{D}_K^{p,r}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{D}^{p,r}(\overline{\Omega}), \quad K \text{ compact de } \overline{\Omega}.$$

Ainsi une suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}^{p,r}(\overline{\Omega})$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}^{p,r}(\overline{\Omega})$, s'il existe un compact K de $\overline{\Omega}$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in \mathcal{D}_K^{p,r}(\overline{\Omega})$ et la suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}_K^{p,r}(\overline{\Omega})$. Notons $\check{\mathcal{D}}_\Omega^{\prime p,r}(X)$ l'espace des courants de bidegré (p,r) définis sur Ω et prolongeables à X . Si $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \Omega$, on a d'après [15] la relation suivante entre $\check{\mathcal{D}}_\Omega^{\prime p,r}(X)$ et $\mathcal{D}^{p,r}(\overline{\Omega})$.

PROPOSITION 1. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et Ω un domaine de X tel que $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \Omega$. L'espace $\check{\mathcal{D}}_\Omega^{\prime p,r}(X)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}^{n-p,n-r}(\overline{\Omega})$.*

Démonstration. — Soit $T \in \check{\mathcal{D}}_\Omega^{\prime p,r}(X)$, nous allons montrer que T admet une unique extension à $\mathcal{D}^{n-p,n-r}(\overline{\Omega})$. Posons $D = X \setminus \overline{\Omega}$, $\overline{D} = X \setminus \Omega$, puisque $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \Omega$. Soient T_1 et T_2 deux extensions de T à X . $T_1 - T_2$ est un courant à support dans \overline{D} . Soient $f \in \mathcal{D}^{n-p,n-r}(\overline{\Omega})$ et $K \subset X$ un compact qui contient $\text{supp } f$, il existe une constante C_K et un entier k tels que :

$$|\langle T_1 - T_2, f \rangle| \leq C_K |f|_{k,K}, \quad \text{où } |\cdot|_{k,K} \text{ désigne la norme } C^k \text{ sur } K.$$

On va prouver qu'en fait $|\langle T_1 - T_2, f \rangle| \leq C_K |f|_{k,K \cap \overline{D}}$, car $T_1 - T_2$ est à support dans \overline{D} .

Soit ρ la fonction définissante de D . Posons $V_j = \{z \in X \mid \rho(z) < \frac{1}{j}\}$, $j \in \mathbb{N}^*$, $(V_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante pour l'inclusion de domaines de X et $\bigcap_j V_j = \overline{D}$. Associons à $(V_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur X , à valeurs dans $[0,1]$, à support dans V_j qui vaut 1 dans V_{j+1} . Comme $T_1 - T_2$ est à support dans \overline{D} et $\overline{D} \subset V_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|\langle T_1 - T_2, f \rangle| = |\langle \varphi_j(T_1 - T_2), f \rangle| \leq C_K |\varphi_j f|_{k,K}, \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}^*.$$

$$|\varphi_j f|_{k,K} = |\varphi_j f|_{k,K \cap V_j} \leq |f|_{k,K \cap V_j} \text{ car } \varphi_j \equiv 0 \text{ en dehors de } V_j \text{ et } 0 \leq \varphi_j \leq 1.$$

Donc $|\langle T_1 - T_2, f \rangle| \leq |f|_{k,K \cap V_j}$, pour tout j ; ce qui implique $|\langle T_1 - T_2, f \rangle| \leq C_K |f|_{k,K \cap \overline{D}}$ car $\overline{D} = \bigcap_j V_j$. Mais $|f|_{k,K \cap \overline{D}} = 0$ car $f \equiv 0$ sur \overline{D} , d'où $\langle T_1 - T_2, f \rangle = 0$ pour toute $f \in \mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})$. Donc $T_1 = T_2$ dans $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})$. On définit l'unique extension \tilde{T} de T à $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})$ par $\tilde{T} = T_1|_{\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})}$. Ainsi $\check{\mathcal{D}}_\Omega^{\prime p, r}(X) \subset [\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})]'$ dual topologique de $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})$. Soit $T \in [\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})]'$, T est un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(X)$, muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(X)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un opérateur $\tilde{T} : \mathcal{D}^{n-p, n-r}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ linéaire et continu qui étend T . Donc $T|_D$ est un courant prolongeable et $[\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})]' \subset \check{\mathcal{D}}_\Omega^{\prime p, r}(X)$. \square

REMARQUE 2. — Pour $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})$ et $T \in \check{\mathcal{D}}_\Omega^{\prime p, r}(X)$, $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi_j \rangle$, où $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite de formes différentielles dans $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\Omega)$ qui convergent vers φ dans $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\overline{\Omega})$.

Si Ω est relativement compact, on a en plus cf. [15], la caractérisation suivante des courants prolongeables définis sur Ω .

THÉORÈME 3. — *On a une équivalence entre les propriétés suivantes :*

- i) T est un courant prolongeable défini sur Ω ;
- ii) Le courant défini sur $X \setminus b\Omega$ par T sur Ω et 0 sur $\mathbb{C}\overline{\Omega}$ est prolongeable à X ;
- iii) Il existe une constante $C > 0$ et un entier m tels que : $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C |\varphi|_{m, \overline{\Omega}}$ pour toute forme différentielle φ de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω ;
- iv) Il existe un monôme de dérivation D et une forme différentielle continue g sur Ω , restriction d'une forme différentielle continue sur $\overline{\Omega}$, telle que $T = Dg$ sur Ω .

DÉFINITION 4. — Soit $\Omega \subset X$ un domaine à bord \mathcal{C}^∞ et de fonction définissante ρ . Pour $\varepsilon > 0$, posons $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega \mid \rho(z) < -\varepsilon\}$ et $\pi_\varepsilon : b\Omega_\varepsilon \rightarrow b\Omega$ un difféomorphisme qui tend vers l'identité quand ε tend vers 0. On dit qu'une (p, q) -forme différentielle ψ de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω admet une trace ou valeur au bord au sens des courants notée $\gamma(\psi)$, s'il existe un courant T de bidegré (p, q) défini sur $b\Omega$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{b\Omega_\varepsilon} \pi_\varepsilon^*(\varphi) \wedge \psi = \langle T, \varphi \rangle, \text{ pour toute } \varphi \in D^{2n-(p+q)-1}(b\Omega).$$

On sait d'après [14] qu'une forme différentielle qui a une valeur au bord au sens des courants sur $b\Omega$, définit un courant prolongeable sur Ω .

Nous allons maintenant donner quelques définitions pour préciser la situation géométrique dans laquelle nous aurons à résoudre le $\bar{\partial}$.

DÉFINITION 5. — Une fonction ρ de classe \mathcal{C}^∞ sur X est dite q -convexe, $1 \leq q \leq n$, si sa forme de Lévi possède au moins q -valeurs propres strictement positives ; ρ est dite q -concave si $-\rho$ est q -convexe.

DÉFINITION 6. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact de X . Ω est complètement strictement q -convexe, $0 \leq q \leq n-1$, s'il existe une fonction $(q+1)$ -convexe φ définie dans un voisinage $U_{\bar{\Omega}}$ de $\bar{\Omega}$ telle que $\Omega = \{z \in U_{\bar{\Omega}} \mid \varphi(z) < 0\}$. S'il existe une fonction φ $(q+1)$ -convexe dans un voisinage $U_{b\Omega}$ du bord de Ω , telle que $\Omega \cap U_{b\Omega} = \{z \in U_{b\Omega} \mid \varphi(z) < 0\}$, on dit alors que Ω est strictement q -convexe.

X est une extension q -convexe respectivement q -concave de Ω , $0 \leq q \leq n-1$, si :

i) Ω rencontre toutes les composantes connexes de X .

ii) Il existe une fonction $(q+1)$ -convexe, respectivement $(q+1)$ -concave, φ définie sur un voisinage U de $X \setminus \Omega$ telle que : $\Omega \cap U = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\}$ et pour tout réel α , $0 < \alpha < \sup_{z \in U} \varphi(z)$ l'ensemble $\{z \in U \mid 0 \leq \varphi(z) \leq \alpha\}$ est compact.

Soit $G \supset \Omega$ un domaine de X . G est une extension q -convexe respectivement q -concave stricte de Ω , si G est une extension q -convexe respectivement q -concave de Ω , $G \setminus \Omega$ est relativement compact dans X et il existe une fonction $(q+1)$ -convexe respectivement $(q+1)$ -concave $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ où U est un voisinage dans X de $\overline{G \setminus \Omega}$ telle que $\Omega \cap U = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\}$ et $G \cap U = \{z \in U \mid \varphi(z) < 1\}$.

REMARQUE 7. — Puisque si U est un voisinage de $X \setminus \Omega$, U est aussi un voisinage du bord de Ω , alors si X est une extension q -convexe de Ω , Ω est strictement q -convexe.

DÉFINITION 8. — Une configuration q -convexe de \mathbb{C}^n est la donnée d'un quadruplet $[U, \rho, \varphi, D]$ vérifiant :

i) U est un convexe de \mathbb{C}^n , $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe de classe C^2 telle que $D_2 = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\}$ est non vide et relativement compact dans U .

ii) $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction $(q+1)$ -convexe sans point critique.

iii) $d\rho(z) \wedge d\varphi(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$ avec $\rho(z) = \varphi(z) = 0$.

iv) $D = \{z \in U \mid \rho(z) < 0, \varphi(z) < 0\}$ et $\emptyset \neq D \neq \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\}$.

Soient A_1, A_2, V des domaines de X . Le triplet $[A_1, A_2, V]$ est dit élément d'extension q -convexe, $0 \leq q \leq n-1$, si :

i) $A_1 \subseteq A_2$,

ii) $A_2 \setminus A_1 \subset\subset V \subset\subset X$,

iii) Il existe deux configurations q -convexes $[U_j, \rho_j, \varphi_j, D_j]$, ($j = 1, 2$) de \mathbb{C}^n avec $U = U_1 = U_2$ et $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$ telles qu'il existe une application biholomorphe h de U vers un voisinage de \overline{V} pour laquelle on a :

$$V = h(\{z \in U \mid \varphi(z) < 0\}) \text{ et } V \cap A_j = h(D_j) \text{ pour } j = 1, 2.$$

Soient X une variété analytique complexe de dimension n et Ω un domaine de X . Notons $H_\infty^{p,r}(\Omega)$ le (p,r) -ième groupe de cohomologie de Dolbeault des (p,r) formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ définies dans Ω . Nous terminons ce chapitre en rappelant quelques propriétés.

THÉORÈME 9 (12-14, 12-16, 15-11 et 16-1 de [6]). — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact de X .*

a) *Si X est une extension q -convexe de Ω ($0 \leq q \leq n-1$), alors l'application induite par restriction de $H_\infty^{p,r}(X) \rightarrow H_\infty^{p,r}(\Omega)$ est un isomorphisme pour $n-q \leq r \leq n$.*

b) *Si X est une extension q -concave de X . Alors l'application induite par restriction de $H_\infty^{p,r}(X) \rightarrow H_\infty^{p,r}(\Omega)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$ et $H_\infty^{p,q}(X) \rightarrow H_\infty^{p,q}(\Omega)$ est injective.*

c) *Si Ω est strictement q -convexe, alors $\dim H_\infty^{p,r}(\Omega) < +\infty$ pour $n-q \leq r \leq n$.*

CHAPITRE II

Résolution du $\bar{\partial}$ avec conditions de support – Applications aux courants prolongeables

Pour pouvoir résoudre le $\bar{\partial}$, nous devons mettre des hypothèses géométriques sur Ω . Nous allons nous situer : soit dans le cas où Ω est un domaine complètement strictement q -convexe, cas que nous appelons *cas convexe*, soit dans le cas où $\bar{\Omega}$ est le complémentaire d'un domaine complètement strictement q -convexe ; c'est le *cas concave*.

1. Résolution du $\bar{\partial}$ avec conditions de support

1.1. Cas convexe

Soient X une variété analytique complexe de dimension n et Ω un domaine de X . Notons $H_c^{p,q}(\Omega)$ le (p,q) -ième groupe de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω et $H_\infty^{p,q}(\bar{\Omega})$ celui des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ dans $\bar{\Omega}$. On a

THÉORÈME II.1.1. — Soient $\Omega \subset\subset X$, un domaine à bord \mathcal{C}^∞ lisse et q un entier tel que $0 \leq q \leq n - 2$. On suppose que

i) $H_c^{p,q+1}(X) = 0$;

ii) Pour tout compact K de X , il existe un ouvert D tel que $\Omega \cup K \subset\subset D$ et l'application induite par restriction : $H_\infty^{p,q}(X \setminus \Omega) \rightarrow H_\infty^{p,q}(X \setminus D)$ soit injective.

Alors si $f \in \mathcal{D}^{p,q+1}(\bar{\Omega})$ est $\bar{\partial}$ -fermée, il existe $g \in \mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega})$ telle que $\bar{\partial}g = f$ sur X .

Démonstration. — Puisque $H_c^{p,q+1}(X) = 0$, il existe une (p,q) -forme différentielle h à support compact dans X , telle que $\bar{\partial}h = f$.

Soit K un compact qui contient le support de h , d'après l'hypothèse ii) du théorème, il existe un ouvert D tel que $\Omega \cup K \subset\subset D$ et l'application induite par restriction $H_\infty^{p,q}(X \setminus \Omega) \rightarrow H_\infty^{p,q}(X \setminus D)$ soit injective.

$\bar{\partial}h|_{X \setminus \Omega} = 0$, donc $h|_{X \setminus \Omega}$ est $\bar{\partial}$ -fermée. De plus $h|_{X \setminus D} = 0$, donc $h|_{X \setminus D}$ appartient à la classe nulle dans $H_{\infty}^{p,q}(X \setminus D)$.

Si $q = 0$, $h|_{X \setminus \bar{\Omega}}$ est holomorphe et s'annule en dehors du support de h . Donc $h|_{X \setminus \Omega} = 0$ grâce au principe du prolongement analytique. Si $q \geq 1$, d'après l'injectivité de l'application restriction de $H_{\infty}^{p,q}(X \setminus \Omega) \rightarrow H_{\infty}^{p,q}(X \setminus D)$, h appartient à la classe nulle dans $H_{\infty}^{p,q}(X \setminus \Omega)$. Il existe alors θ une $(p, q-1)$ -forme différentielle \mathcal{C}^{∞} sur $X \setminus \Omega$ telle que $\bar{\partial}\theta = h$ sur $X \setminus \Omega$. Soit $\tilde{\theta}$ une extension \mathcal{C}^{∞} de θ à X . Posons $g = h - \bar{\partial}\tilde{\theta}$. Alors g est une solution de $\bar{\partial}U = f$ et $g \in \mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega})$. \square

On peut déduire de ce théorème le corollaire suivant :

COROLLAIRE II.1.2. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine complètement strictement $(q+1)$ -convexe, $0 \leq q \leq n-2$, à bord \mathcal{C}^{∞} lisse alors si $f \in \mathcal{D}^{p,r}(\bar{\Omega})$ est $\bar{\partial}$ -fermée ($0 \leq p \leq n$), il existe $g \in \mathcal{D}^{p,r-1}(\bar{\Omega})$ telle que $\bar{\partial}g = f$ sur X pour $1 \leq r \leq q+1$.

Démonstration. — Soit ρ la fonction définissante de Ω . Il existe un voisinage ouvert U de $\bar{\Omega}$ pour lequel $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$ est $(q+2)$ -convexe, $d\rho(z) \neq 0$ si $z \in b\Omega$ et $\Omega = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit $\Omega' = \{z \in U \mid \rho(z) < \varepsilon\}$ est une extension $(q+1)$ -convexe de Ω et $H_c^{p,r}(\Omega') = 0$ pour $1 \leq r \leq q+1$ et $0 \leq p \leq n$ (cf. [6], th. 12-7).

Pour K un compact de Ω' , $\Omega \cup K \subset\subset \Omega'$. Il existe $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tel que :

$$D = \{z \in U \mid \rho(z) < \varepsilon_0\} \supset \Omega \cup K$$

$\Omega' \setminus \Omega$ est alors une extension $(q+1)$ -concave stricte de $\Omega' \setminus D$.

De l'invariance de la cohomologie pour les extensions $(q+1)$ -concaves, on a la restriction de $H_{\infty}^{p,r}(\Omega' \setminus \Omega) \rightarrow H_{\infty}^{p,r}(\Omega' \setminus D)$ qui est bijective si $0 \leq p \leq n$, $1 \leq r \leq q$, et en particulier elle est injective (cf. [6], th. 15-11 et 16-1).

Donc Ω' vérifie les hypothèses de X dans le théorème II.1.1 ce qui donne le corollaire. \square

Pour résoudre le $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables, on aura besoin de la caractérisation de $\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega})$ suivante :

THÉORÈME II.1.3. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n , $\Omega \subset\subset X$ un domaine à bord \mathcal{C}^{∞} lisse, p et q des entiers, $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n-1$. On suppose que :

i) $H_{\infty}^{n-p, n-q}(X)$ est séparé.

ii) Pour tout compact K de X , il existe un domaine D tel que $\Omega \cup K \subset\subset D$ et l'application restriction $H_{\infty}^{p,q}(X \setminus \Omega) \rightarrow H_{\infty}^{p,q}(X \setminus D)$ est injective.

Alors

$$\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega}) = \left\{ f \in \mathcal{D}^{p,q+1}(\bar{\Omega}) \mid \int_X f \wedge g = 0, \forall g \in Z_{\infty}^{n-p, n-q-1}(X) \right\}.$$

Démonstration. — À cause de l'hypothèse i) la dualité de Serre implique que si $f \in \mathcal{D}^{p,q+1}(\bar{\Omega})$ vérifie $\int_X f \wedge g = 0$ pour toute forme différentielle $g \in Z_{\infty}^{n-p, n-q-1}(X)$, il

existe h à support compact dans X telle que $\bar{\partial}h = f$ sur X . Donc on a : $f \in \bar{\partial}\mathcal{D}^{p,q}(X)$. D'après le théorème II.1.1, il existe $h \in \mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega})$ telle que $\bar{\partial}h = f$. D'où $\{f \in \mathcal{D}^{p,q+1}(\bar{\Omega}) \mid \int_X f \wedge g = 0\} \subset \bar{\partial}\mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega})$.

Il est clair que $\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{D}^{p,q+1}(\bar{\Omega})$. Pour $\bar{\partial}h \in \bar{\partial}\mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega})$ et $g \in Z_{\infty}^{n-p,n-q-1}(X)$, on a $\int_X \bar{\partial}h \wedge g = \int_X \bar{\partial}(h \wedge g) = 0$ car h est à support compact. D'où

$$\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega}) \subset \left\{ f \in \mathcal{D}^{p,q+1}(\bar{\Omega}) \mid \int_X f \wedge g = 0, \forall g \in Z_{\infty}^{n-p,n-q-1}(X) \right\}.$$

□

REMARQUE II.1.4. — L'hypothèse $\int_X f \wedge g = 0, \forall g \in Z_{\infty}^{n-p,n-q-1}(X)$ entraîne $\bar{\partial}f = 0$. En effet

$$\int_X \bar{\partial}f \wedge h = \int_X \bar{\partial}(f \wedge h) \pm \int_X f \wedge \bar{\partial}h,$$

$\int_X \bar{\partial}(f \wedge h) = 0$ car f est à support compact et $\int_X f \wedge \bar{\partial}h = 0$ à cause de l'hypothèse. $\int_X \bar{\partial}f \wedge h = 0$ pour toute forme différentielle h de classe \mathcal{C}^{∞} sur X , d'où $\bar{\partial}f = 0$.

On peut tirer du théorème II.1.3 le corollaire suivant :

COROLLAIRE II.1.5. — Soit X une variété analytique complexe de dimension n , $\Omega \subset\subset X$ un domaine strictement q -convexe, $0 \leq q \leq n-1$. Alors si $0 \leq r \leq q$ et $0 \leq p \leq n$

$$\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,r}(\bar{\Omega}) = \left\{ f \in \mathcal{D}^{p,r+1}(\bar{\Omega}) \mid \int_X f \wedge g = 0, \forall g \in Z_{\infty}^{n-p,n-r-1}(X) \right\}.$$

Démonstration. — Considérons $\Omega' = \Omega \cup \{z \in U \mid \rho(z) < \varepsilon\}$ où U est un voisinage de $b\Omega$ et ρ une fonction définissante $(q+1)$ -convexe de Ω . Pour ε assez petit, Ω' est une extension strictement q -convexe de Ω .

On a alors $H_{\infty}^{n-p,n-q}(\Omega')$ de dimension finie (cf. [6], théorème 12-16), d'où $H_{\infty}^{n-p,n-q}(\Omega')$ est séparé.

Puisque pour $r \leq q$, on a Ω strictement q -convexe entraîne Ω strictement r -convexe, $H_{\infty}^{n-p,n-r}(\Omega')$ est séparé.

Pour K compact de Ω' , $\Omega \cup K \subset\subset \Omega'$. Il existe $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ tel que

$$D = \Omega \cup \{z \in U \mid \rho(z) < \varepsilon_0\} \supset \Omega \cup K,$$

alors $\Omega' \setminus \Omega$ est une extension q -concave stricte de $\Omega' \setminus D$ et d'après [11], th. 3-1, $H_{\infty}^{p,r}(X \setminus \Omega) \rightarrow H_{\infty}^{p,r}(X \setminus D)$ est injective. D'après le théorème II.1.3, on a donc

$$\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,r}(\bar{\Omega}) = \left\{ f \in \mathcal{D}^{p,r+1}(\bar{\Omega}) \mid \int_X f \wedge g = 0, \forall g \in Z_{\infty}^{n-p,n-r-1}(X) \right\}.$$

□

1.2. Cas concave

Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $D \subset\subset X$ un domaine relativement compact à bord \mathcal{C}^∞ . Posons $\Omega = X \setminus \bar{D}$ et $\bar{\Omega} = X \setminus D$. Nous allons résoudre le $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles dans $\mathcal{D}^{p,r}(\bar{\Omega})$.

THÉORÈME II.1.6. — *Soient X une variété de Stein de dimension n , $D \subset\subset X$ un domaine relativement compact à bord \mathcal{C}^∞ de X tels que X soit une extension q -convexe de D , $1 \leq q \leq n - 1$. Alors*

- i) si $n - q + 1 \leq r \leq n - 1$, $\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,r-1}(\bar{\Omega}) = \mathcal{D}^{p,r}(\bar{\Omega}) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$.
- ii) $\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,n-1}(\bar{\Omega})$ est fermé dans $\mathcal{D}^{p,n}(\bar{\Omega})$.
- iii) si $r = n - q$ et $q \leq n - 2$, soit $f \in \mathcal{D}^{p,n-q}(\bar{\Omega}) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe $g_\varepsilon \in \mathcal{D}^{p,n-q-1}(X)$ tels que

$$\bar{\partial}g_\varepsilon = f \text{ et } |g_\varepsilon|_{\ell, \bar{D}} < \varepsilon.$$

Démonstration.

i) Soit $f \in \mathcal{D}^{p,r}(\bar{\Omega}) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$, $f \in \mathcal{D}^{p,r}(X) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$. Puisque X est de Stein, il existe $h \in \mathcal{D}^{p,r-1}(X)$, $1 \leq r \leq n - 1$, telle que $\bar{\partial}h = f$ sur X . Comme X est une extension q -convexe de D , D est strictement q -convexe dans une variété de Stein, donc complètement strictement q -convexe, cf. [6], théorème 5.14. Puisque $2 \leq n - q + 1 \leq r$, c'est-à-dire $1 \leq n - q \leq r - 1$ et $\bar{\partial}h = 0$ sur D complètement strictement q -convexe, il existe (cf. [13], théorème 2) θ une $(p, r - 2)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ sur \bar{D} telle que $\bar{\partial}\theta = h$ sur D . Soit $\tilde{\theta}$ une extension \mathcal{C}^∞ à support compact dans X de θ , $u = h - \bar{\partial}\tilde{\theta}$ convient.

ii) Pour montrer que $\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,n-1}(\bar{\Omega})$ est fermé dans $\mathcal{D}^{p,n}(\bar{\Omega})$, il suffit de montrer que :

$$\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,n-1}(\bar{\Omega}) = \left\{ f \in \mathcal{D}^{p,n}(\bar{\Omega}) \mid \int_X f \wedge g = 0, \text{ pour toute } (n-p)\text{-forme } g \text{ holomorphe dans } X \right\}.$$

D'après le théorème de Stokes,

$$\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,n-1}(\bar{\Omega}) \subset \left\{ f \in \mathcal{D}^{p,n}(\bar{\Omega}) \mid \int_X f \wedge g = 0, \text{ pour toute } (n-p)\text{-forme } g \text{ holomorphe dans } X \right\}.$$

Soit $f \in \mathcal{D}^{p,n}(\bar{\Omega})$ telle que $\int_X f \wedge g = 0$, pour toute $(n - p)$ -forme holomorphe g dans X . D'après la proposition 20.2 de [6] et la régularité du $\bar{\partial}$, cf. [10], chapitre 5, corollaire 4.5, il existe $h \in \mathcal{D}^{p,n-1}(X)$ telle que $\bar{\partial}h = f$. On termine alors comme dans i). Par conséquent $f \in \bar{\partial}\mathcal{D}^{p,n-1}(\bar{\Omega})$, d'où l'inclusion dans l'autre sens, ce qui donne l'égalité.

iii) Si $f \in \mathcal{D}^{p,n-q}(\bar{\Omega}) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$, alors $f \in \mathcal{D}^{p,n-q}(X) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$. Il existe $h \in \mathcal{D}^{p,n-q-1}(X)$ telle que :

$$\bar{\partial}h = f \text{ sur } X.$$

$\bar{\partial}h = 0$ sur $D = X \setminus \bar{\Omega}$ et h est une $(p, n - q - 1)$ -forme différentielle $\bar{\partial}$ -fermée sur D . On ne sait pas résoudre $\bar{\partial}U = h$ dans D .

Pour compléter *iii*) nous allons utiliser le lemme ci-dessous qui est une version \mathcal{C}^∞ du théorème 12.11 de [6].

LEMME II.1.7. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $D \subset\subset X$ un domaine strictement q -convexe tel que X soit une extension q -convexe de D , $0 \leq q \leq n - 1$. Alors pour tous $n - q - 1 \leq r \leq n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, l'image de l'application restriction de $Z_{0,r}^\ell(X) \rightarrow Z_{0,r}^\ell(\bar{D})$ est dense pour la norme $|\cdot|_{\ell, \bar{D}}$.

Démonstration. — Pour $\ell = 0$, ce lemme est le théorème (12-11) de [6]. Suivant Henkin et Leiterer, il suffit d'établir les assertions 1, 2, 3 ci-dessous correspondant à la version \mathcal{C}^ℓ des théorèmes (8-1) et (10-1) et du corollaire (12-5) de [6]. \square

Assertion 1.

Si $[U, \rho, \varphi, D]$ est une configuration q -convexe de \mathbb{C}^n ($0 \leq q \leq n - 1$) alors toute $(0, n - q - 1)$ forme différentielle de classe \mathcal{C}^ℓ , $\bar{\partial}$ -fermée dans un voisinage de \bar{D} , peut être approximée dans \bar{D}_β pour tout $\beta > 0$, par des $(0, n - q - 1)$ formes différentielles de classes \mathcal{C}^ℓ , $\bar{\partial}$ -fermées de \mathbb{C}^n pour la topologie de $|\cdot|_{\ell, \bar{D}_\beta}$, où $(D_\beta)_{\beta > 0}$ est une famille de domaines lisses contenus dans D et qui approchent D .

Démonstration de l'assertion 1. — Pour $q = n - 1$, d'après (8-2) de [6], toute fonction f holomorphe dans un voisinage de \bar{D} peut être approximée uniformément dans \bar{D} par des fonctions $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ holomorphes dans \mathbb{C}^n . D'après le théorème (4-1), chapitre I de [10], pour tout multi-indice α , $(D^\alpha f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha f$ dans \bar{D} . D'où l'assertion pour $q = n - 1$.

Le cas $q < n - 1$ se fait par récurrence comme dans [6]. $f = P^* f + \bar{\partial}T^* f$ dans D_β , où T^* est l'opérateur intégral de [13] et $P^* f$ un opérateur intégral résiduel obtenu en remplaçant dans la formule de Cauchy-Fantappiè l'opérateur \check{T} de [6] par celui de [13]; T^* . \square

Pour une configuration q -convexe $[U, \rho, \varphi, D]$ de \mathbb{C}^n , posons $D_\varepsilon = \{z \in D \mid \varphi(z) < -\varepsilon\}$ et $(D_{\varepsilon\beta})_{\beta > 0}$ une famille de domaines lisses contenus dans D_ε et qui l'approchent.

Assertion 2.

Soit $[U, \rho, \varphi, D]$ une configuration q -convexe de \mathbb{C}^n , $0 \leq q \leq n - 1$. Toute $(0, r)$ forme différentielle de classe \mathcal{C}^ℓ dans \bar{D}_β (avec $n \geq r \geq n - q - 1$) $\bar{\partial}$ -fermée peut être approximée dans $\bar{D}_{\varepsilon\beta}$ par des $(0, r)$ formes différentielles de classe \mathcal{C}^ℓ , $\bar{\partial}$ -fermées de \mathbb{C}^n pour la topologie \mathcal{C}^ℓ .

Démonstration de l'assertion 2. — Elle est identique à celle du théorème (10-1) de [6], les seuls changements se situent au niveau des formules (10-6), (10-8), (10-9), (10-11), (10-13) et la fin de la démonstration du théorème 10-1, où D est remplacé par D_β , \check{T} par T^* , \check{L} par P^* et le théorème (8-1) par l'assertion 1. \square

Nous allons considérer comme élément d'extension q -convexe, un triplet $[A_1, A_2, V]$ avec :

a) $A_1 \subset A_2$;

b) $A_2 \setminus A_1 \subset\subset V$;

c) il existe deux configurations $(U_j, \rho_j, \varphi_j, D_j)_{j=1,2}$ avec $U = U_1 = U_2$, $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, une application biholomorphe de U vers un voisinage de \bar{V} telle que $h(V) = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\}$ et quitte à modifier V , $h(V \cap A_j) = D_{j\beta}$ pour un β fixé.

On a l'analogie du corollaire (12-5) de [6] suivant :

Assertion 3.

a) Il existe un opérateur $T : Z_{0,r}^\ell(\overline{V \cap A_j}) \rightarrow C_{0,r}^{\ell+1/2}(\overline{V \cap A_j})$ pour $r \geq n - q$, linéaire et continu tel que pour $f \in Z_{0,r}^\ell(\overline{V \cap A_j})$, $\bar{\partial}Tf = f$.

b) L'application restriction de $Z_{0,r}^\ell(V) \rightarrow Z_{0,r}^\ell(\bar{A}_j \cap V)$, $n \geq r \geq n - q - 1$ est d'image dense pour la topologie d'espace de Fréchet de $Z_{0,r}^\ell(\bar{A}_j \cap V)$.

Démonstration de l'assertion 3.

a) C'est le théorème 2 de [13].

b) Pour $f \in Z_{0,r}^\ell(\bar{A}_j \cap V)$, $n \geq r \geq n - q - 1$, on a d'après l'assertion 2 que h^*f peut être approximée dans tout $\bar{D}_{j\beta} \subset \bar{D}_j$, $\beta > 0$ par des $(0,r)$ formes différentielles $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de classe \mathcal{C}^ℓ , $\bar{\partial}$ -fermées dans \mathbb{C}^n pour la topologie \mathcal{C}^ℓ . On considère la restriction de $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ à $h(V)$ que l'on note aussi $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ et la suite $(h_*f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ convient. \square

Fin de la démonstration de iii). — D'après le lemme II.1.7, il existe une famille $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de formes différentielles dans X , $\bar{\partial}$ -fermées qui convergent vers $h|_{\bar{D}}$ pour la topologie de la convergence uniforme des formes différentielles et de leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à ℓ sur \bar{D} . Puisque $q \leq n - 2$, il existe une famille $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de $(p, n - q - 2)$ formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur X telles que $\bar{\partial}\psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ sur X .

Soit χ une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(X)$ à support compact dans X qui vaut 1 dans \bar{D} . Posons $\theta_\varepsilon = \chi\psi_\varepsilon$ et $g_\varepsilon = h - \bar{\partial}\theta_\varepsilon$, alors $f = \bar{\partial}g_\varepsilon$ et g_ε est une $(p, n - q - 1)$ forme différentielle à support compact dans X avec $|g_\varepsilon|_{\ell, \bar{D}} < \varepsilon$. \square

Notons que pour prouver les assertions 1 et 2 il suffit que D soit complètement strictement q -convexe. Le fait que X soit une extension q -convexe de D ne sert que pour iii).

REMARQUE II.1.8. — Le théorème II.1.6 reste vrai sous les hypothèses légèrement plus faibles suivantes : X est une variété analytique complexe de dimension n et $D \subset\subset X$ est un domaine relativement compact à bord \mathcal{C}^∞ de X . On suppose que X est une extension q -convexe de D et qu'il existe un ouvert de Stein U tel que $D \subset\subset U \subset X$.

2. Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables

Comme conséquence de la résolution avec condition de support et de la dualité entre $\mathcal{D}'_{\Omega}{}^{p,r}(X)$ et $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\bar{\Omega})$, on a des résultats de résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables. C'est donc tout naturellement que l'on retrouve le cas convexe et le cas concave précédents.

2.1. Cas convexe

Pour résoudre le $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables, on procède par dualité et l'on a le théorème suivant :

THÉORÈME II.2.1. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n , $\Omega \subset\subset X$ un domaine complètement strictement q -convexe à bord \mathcal{C}^∞ lisse, $0 \leq q \leq n-1$. Alors, si T est un courant de bidegré $(0, r)$, prolongeable, $\bar{\partial}$ -fermé sur Ω , il existe un courant de bidegré $(0, r-1)$, prolongeable S sur Ω tel que $\bar{\partial}S = T$ sur Ω , si $1 \leq n-q \leq r \leq n$.*

Démonstration. — Considérons l'application

$$\begin{aligned} L_T : \bar{\partial}\mathcal{D}^{n, n-r}(\bar{\Omega}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \bar{\partial}\varphi &\mapsto \langle T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Si $\psi = \bar{\partial}\varphi$ et $\psi' = \bar{\partial}\varphi'$ sont telles que $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}\varphi'$, on a $\bar{\partial}(\varphi - \varphi') = 0$ et par conséquent $\varphi - \varphi'$ est une $(n, n-r)$ -forme différentielle $\bar{\partial}$ -fermée à support compact dans $\bar{\Omega}$. Pour $n-r \geq 1$, $\varphi - \varphi' = \bar{\partial}\theta$, $\theta \in \mathcal{D}^{n, n-r-1}(\bar{\Omega})$ (cf. corollaire II.1.2).

Puisque $\mathcal{D}^{n, n-r-1}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}^{n, n-r-1}(\bar{\Omega})$, il existe $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{n, n-r-1}(\Omega)$ telle que: $\bar{\partial}\theta_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\partial}\theta$ dans $\mathcal{D}^{n, n-r}(\bar{\Omega})$. Alors puisque T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}^{n, n-r}(\bar{\Omega})$ et $\bar{\partial}T = 0$ sur Ω ,

$$\langle T, \bar{\partial}\theta \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle T, \bar{\partial}\theta_j \rangle = 0.$$

Donc $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi' \rangle$. Ainsi $L_T(\bar{\partial}\varphi) = L_T(\bar{\partial}\varphi')$.

Pour $n = r$, si $\bar{\partial}(\varphi - \varphi') = 0$, $\varphi - \varphi'$ est une n -forme holomorphe à support compact dans $\bar{\Omega}$. D'après le principe du prolongement analytique, $\varphi - \varphi'$ ne peut être que nulle. Donc $\varphi = \varphi'$ et $L_T(\bar{\partial}\varphi) = L_T(\bar{\partial}\varphi')$. L_T est bien définie et est linéaire.

Pour montrer que L_T est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque par L_T d'un ouvert de \mathbb{C} est un ouvert de $\bar{\partial}\mathcal{D}^{n, n-r}(\bar{\Omega})$. Par définition de L_T , on a $L_T \circ \bar{\partial} = T$. Par ailleurs T est continu et $\bar{\partial} : \mathcal{D}^{n, n-r}(\bar{\Omega}) \rightarrow \bar{\partial}\mathcal{D}^{n, n-r}(\bar{\Omega})$ est une application linéaire continue surjective entre espaces de Fréchet donc ouverte. En effet, d'après le corollaire II.1.2,

$$\bar{\partial}\mathcal{D}^{n, n-r}(\bar{\Omega}) = \left\{ f \in \mathcal{D}^{n, n-r+1}(\bar{\Omega}) \mid \int_X f \wedge g = 0, \forall g \in Z_\infty^{0, r-1}(X) \right\},$$

ce qui implique que $\bar{\partial}\mathcal{D}^{n, n-r}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{D}^{n, n-r+1}(\bar{\Omega})$ est fermé; c'est donc un espace de Fréchet. Par conséquent si U est un ouvert de \mathbb{C} , $L_T^{-1}(U) = \bar{\partial}(T^{-1}(U))$ est un ouvert de $\bar{\partial}\mathcal{D}^{n, n-r}(\bar{\Omega})$. On peut donc étendre L_T en une application $\tilde{L}_T : \mathcal{D}^{n, n-r+1}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{C}$ qui est linéaire et continue. \tilde{L}_T appartient au dual topologique de $\mathcal{D}^{n, n-r+1}(\bar{\Omega})$ et peut être identifié à un courant prolongeable défini sur Ω ,

$$(-1)^r \langle \bar{\partial}\tilde{L}_T, \varphi \rangle = \langle \tilde{L}_T, \bar{\partial}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n, n-r+1}(\bar{\Omega}).$$

Donc $T = \bar{\partial}((-1)^r \tilde{L}_T)$. $(-1)^r \tilde{L}_T$ est solution de $\bar{\partial}S = T$ et est un courant prolongeable. \square

COROLLAIRE II.2.2. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n , $\Omega \subset\subset X$ un domaine complètement strictement pseudoconvexe. Si f est une $(0,1)$ -forme différentielle \mathcal{C}^∞ , $\bar{\partial}$ -fermée sur Ω , possédant une trace au sens des courants sur $b\Omega$, alors il existe une fonction g de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω possédant une trace au sens des courants sur $b\Omega$ telle que :

$$\bar{\partial}g = f \text{ sur } \Omega.$$

Démonstration. — Puisque f admet une trace au sens des courants, f est prolongeable en un courant F de bidegré $(0,1)$ à support compact dans $\bar{\Omega}$, (cf. [14], lemme I.1.1), donc f peut être vue comme un courant défini sur Ω qui est prolongeable et $\bar{\partial}$ -fermé.

Ω est complètement strictement $(n-1)$ -convexe donc d'après le théorème II.2.1, il existe un courant S de bidegré $(0,0)$ sur Ω tel que : $\bar{\partial}S = f$ et S est prolongeable.

Ω est une variété de Stein, il existe une solution U de classe \mathcal{C}^∞ de $\bar{\partial}U = f$ sur Ω .

On a alors $\bar{\partial}(S-U) = 0$. D'après le théorème 3.5 du chapitre III de [10], il existe une fonction holomorphe h sur Ω telle que

$$S - U = h.$$

D'où $S = U + h$ est une fonction \mathcal{C}^∞ sur Ω qui est prolongeable en tant que courant. \square

Le corollaire est alors une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME II.2.3. — Soient Ω un domaine à bord lisse de classe \mathcal{C}^∞ de X , f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω prolongeable au sens des courants telle que $\bar{\partial}f$ possède une trace au sens des courants sur $b\Omega$. Alors pour tout ouvert $U \subset X$ tel que $U \cap b\Omega \neq \emptyset$ la restriction de f à $U \cap \Omega$ possède une trace au sens des courants sur $U \cap b\Omega$.

Démonstration. — Le cas où $\bar{\partial}f = 0$ sur Ω est traité dans le paragraphe IV de [15]. Nous allons suivre la même méthode dans le cas où la $(0,1)$ -forme $g = \bar{\partial}f$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω et possède une trace au sens des courants sur $b\Omega$.

Supposons que $b\Omega$ est donné par $b\Omega = \{z \in V \mid \varphi(z) = 0\}$, où φ est une fonction \mathcal{C}^∞ définie sur un voisinage V de $b\Omega$ telle que $d\varphi(z) \neq 0$ pour tout $z \in b\Omega$. Nous devons prouver, par définition de la trace au sens des courants, qu'il existe un 0-courant $\gamma(f)$ assez régulier en φ tel que si $\hat{\gamma}(f) = \gamma(f)\delta(\varphi)\bar{\partial}\varphi$, où $\delta(\varphi)\bar{\partial}\varphi$ est la partie de bidegré $(0,1)$ du courant d'intégration sur $b\Omega$

$$\langle \hat{\gamma}(f), \psi \rangle = \langle \tilde{g}, \psi \rangle + \langle \tilde{f}, \bar{\partial}\psi \rangle$$

pour toute forme $\psi \in \mathcal{D}^{n,n-1}(U)$, où \tilde{g} et \tilde{f} sont respectivement des prolongements de $g = \bar{\partial}f$ et f nuls en dehors de $\bar{\Omega}$, i.e. $\hat{\gamma}(f) = \tilde{g} - \bar{\partial}\tilde{f}$.

Soit \tilde{f} un prolongement de f nul en dehors de $\bar{\Omega}$. Puisque $g = \bar{\partial}f$ est une forme \mathcal{C}^∞ sur Ω , $\bar{\partial}$ -fermée qui possède une trace $\gamma(g)$ au sens des courants sur $b\Omega$, il existe (cf. [14], lemme II.1.1) un prolongement \tilde{g} de g nul en dehors de $\bar{\Omega}$ qui vérifie

$$\bar{\partial}\tilde{g} = \gamma(g) \wedge \delta(\varphi)\bar{\partial}\varphi.$$

Posons $\omega = \tilde{g} - \bar{\partial} \tilde{f}$, c'est un $(0,1)$ -courant à support dans $b\Omega$. Nous cherchons une distribution $\gamma(f)$ assez régulière en φ telle que

$$\omega = \gamma(f) \delta(\varphi) \bar{\partial} \varphi + \bar{\partial} \theta,$$

où θ est un 0 -courant à support dans $b\Omega$. En effet, $\tilde{f}_1 = \tilde{f} + \theta$ est encore un prolongement de f nul en dehors de $\bar{\Omega}$ et

$$\gamma(f) \delta(\varphi) \bar{\partial} \varphi = \tilde{g} - \bar{\partial} \tilde{f}_1.$$

En utilisant une partition de l'unité (cf. [15]), on peut se ramener au cas où U est un voisinage arbitrairement petit d'un point de $b\Omega$. Sur un tel voisinage on peut écrire

$$(*) \quad \omega = \sum_{k=0}^n \omega_k \delta^{(k)}(\varphi),$$

où les ω_k sont des $(0,1)$ -courants indépendants de φ . Comme ω vérifie $\bar{\partial} \omega = \bar{\partial} \tilde{g} = \gamma(g) \wedge \delta(\varphi) \bar{\partial} \varphi$, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \omega_0 &= \gamma(g) \wedge \bar{\partial} \varphi \\ \bar{\partial} \omega_1 - \omega_0 \wedge \bar{\partial} \varphi &= 0 \\ &\vdots \\ \bar{\partial} \omega_N - \omega_{N-1} \wedge \bar{\partial} \varphi &= 0 \\ \omega_N \wedge \bar{\partial} \varphi &= 0. \end{aligned}$$

(**)

On peut alors trouver des 0 -courants $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ suffisamment réguliers en φ tels que

$$\begin{aligned} \omega_N &= \alpha_N \bar{\partial} \varphi \\ \omega_{k-1} &= \bar{\partial} \alpha_k + \alpha_{k-1} \bar{\partial} \varphi, \quad 1 \leq k \leq N \end{aligned}$$

en résolvant le système (**) à partir de la dernière équation, avec $\bar{\partial} \alpha_0 \wedge \bar{\partial} \varphi = \gamma(g) \wedge \bar{\partial} \varphi$, i.e. α_0 est solution de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle $\bar{\partial}_b \alpha = \gamma(g)$.

En remplaçant les ω_k par leur valeur dans (*), on obtient

$$\omega = \alpha_0 \delta(\varphi) \bar{\partial} \varphi + \bar{\partial} \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \delta^{k-1}(\varphi) \right)$$

d'où le résultat cherché en posant $\theta = \sum_{k=1}^N \alpha_k \delta^{k-1}(\varphi)$ et $\gamma(f) = \alpha_0$. □

2.2. Cas concave

Nous avons là aussi comme conséquence de la résolution avec conditions de support et de la dualité entre $\check{\mathcal{D}}_{\Omega}^{p,r}(X)$ et $\mathcal{D}^{n-p,n-r}(\bar{\Omega})$ le théorème suivant :

THÉORÈME II.2.4. — *Soient X une variété de Stein de dimension n , $D \subset\subset X$ un domaine relativement compact à bord \mathcal{C}^∞ de X tels que X soit une extension q -convexe de D , $1 \leq q \leq n-1$. Posons $\Omega = X \setminus \bar{D}$, alors,*

i) Pour $1 \leq r \leq q$ et $r \leq n - 2$,

$$\bar{\partial} \check{\mathcal{D}}_{\Omega}'^{p,r-1}(X) = \check{\mathcal{D}}_{\Omega}'^{p,r}(X) \cap \text{Ker } \bar{\partial}.$$

ii) Si $q = n - 1$,

$$\bar{\partial} \check{\mathcal{D}}_{\Omega}'^{p,n-2}(X) = \left\{ T \in \check{\mathcal{D}}_{\Omega}'^{p,n-1}(X) \mid \langle T, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-p,1}(\bar{\Omega}) \cap \text{Ker } \bar{\partial} \right\}.$$

Pour faire la démonstration du théorème, on a besoin de deux lemmes :

LEMME II.2.5. — *Sous les hypothèses de la remarque II.1.8, soit K un compact d'intérieur non vide de $U \setminus D$. Si T est un courant de bidegré (p, r) sur $U \setminus \bar{D}$, $\bar{\partial}$ -fermé et prolongeable à U , il existe un courant $S^{(K)}$ défini dans $U \setminus \bar{D}$ prolongeable à U tel que $\bar{\partial} S^{(K)} = T$ dans $\overset{\circ}{K}$, pour $1 \leq r \leq q$ et $r \leq n - 2$.*

Si $q = n - 1$, pour tout $T \in \{F \in \check{\mathcal{D}}_{U \setminus \bar{D}}'^{p,n-1}(U) \mid \langle F, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-p,1}(U \setminus D) \cap \text{ker } \bar{\partial}\}$, il existe un courant $S^{(K)}$ défini dans $U \setminus \bar{D}$ prolongeable à U tel que $\bar{\partial} S^{(K)} = T$ dans $\overset{\circ}{K}$.

Démonstration du lemme. — D'après la remarque II.1.8, $\bar{\partial} \mathcal{D}^{n-p,n-r}(U \setminus D)$ est fermé dans $\mathcal{D}^{n-p,n-r+1}(U \setminus D)$ pour $2 \leq n - q + 1 \leq n - r + 1 \leq n$, c'est-à-dire $1 \leq r \leq q$.

Donc si $1 \leq r \leq q$, pour un compact K de $U \setminus D$, notons $\mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D)$ le sous-espace des formes différentielles appartenant à $\mathcal{D}^{n-p,n-r+1}(U \setminus D)$ et qui ont leur support dans K .

$\mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}^{n-p,n-r}(U \setminus D)$ est fermé dans $\mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D)$ qui est un espace de Fréchet, c'est donc un espace de Fréchet.

$\mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}^{n-p,n-r}(U \setminus D) = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} \left(\mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}_{K_v}^{n-p,n-r}(U \setminus D) \right)$, où $(K_v)_{v \in \mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts de $U \setminus D$. Il existe v_0 tel que $\mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}_{K_{v_0}}^{n-p,n-r}(U \setminus D)$ soit de deuxième catégorie de Baire. L'opérateur $\bar{\partial}$ est alors un opérateur fermé de domaine de définition $\{\varphi \in \mathcal{D}_{K_{v_0}}^{n-p,n-r}(U \setminus D) \mid \bar{\partial} \varphi \in \mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D)\}$ entre les espaces de Fréchet $\mathcal{D}_{K_{v_0}}^{n-p,n-r}(U \setminus D)$ et $\mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}^{n-p,n-r}(U \setminus D)$ dont l'image est de seconde catégorie de Baire. Le théorème de l'application ouverte implique alors que cet opérateur est surjectif et ouvert. Donc

$$\bar{\partial} \mathcal{D}_{K_{v_0}}^{n-p,n-r}(U \setminus D) \cap \mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D) = \mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}^{n-p,n-r}(U \setminus D).$$

Posons $\tilde{K} = K_{v_0}$. L'application

$$L_T^K : \mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus D) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}_{\tilde{K}}^{n-p,n-r}(U \setminus D) \rightarrow \mathbb{C} \\ \bar{\partial} \varphi \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

est bien définie. En effet, si $\bar{\partial} \varphi = \bar{\partial} \varphi'$, on a $\bar{\partial}(\varphi - \varphi') = 0$. $\varphi - \varphi'$ est une $(n - p, n - r)$ forme différentielle, $\bar{\partial}$ -fermée à support compact dans \tilde{K} , en particulier dans $U \setminus D$.

* Si $r \leq q - 1$, d'après *i*) du théorème II.1.6 et la remarque II.1.8 du paragraphe 1, il existe $\theta \in \mathcal{D}^{n-p, n-r-1}(U \setminus D)$ tel que $\varphi - \varphi' = \bar{\partial}\theta$ car $n-r \geq n-q+1$. Par densité de $\mathcal{D}^{n-p, n-r-1}(U \setminus \bar{D})$ dans $\mathcal{D}^{n-p, n-r-1}(U \setminus D)$, il existe une suite $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}^{n-p, n-r-1}(U \setminus \bar{D})$ qui converge uniformément vers θ dans $\mathcal{D}^{n-p, n-r-1}(U \setminus D)$ et par conséquent $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi' \rangle + \langle T, \bar{\partial}\theta \rangle = \langle T, \varphi' \rangle$ car T étant $\bar{\partial}$ -fermé, $\langle T, \bar{\partial}\theta \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle T, \bar{\partial}\theta_j \rangle = 0$. Donc

$$L_T^K(\bar{\partial}\varphi) = L_T^K(\bar{\partial}\varphi').$$

** Si $r = q$ et $r \leq n - 2$, soit \tilde{T} une extension de T à U . $\bar{\partial}\tilde{T}$ est un courant à support compact sur \bar{D} , donc $\bar{\partial}\tilde{T}$ est d'ordre fini ℓ . Puisque $\varphi - \varphi' \in \mathcal{D}^{n-p, n-q}(U \setminus D) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a, d'après *iii*) du théorème II.1.6 et la remarque II.1.8, une $(n-p, n-q-1)$ -forme différentielle h_ε de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans U telle que $\varphi - \varphi' = \bar{\partial}h_\varepsilon$ et $|h_\varepsilon|_{\ell, \bar{D}} \leq \varepsilon$.

$$|\langle \tilde{T}, \bar{\partial}h_\varepsilon \rangle| = |\langle \bar{\partial}\tilde{T}, h_\varepsilon \rangle| \leq c|h_\varepsilon|_{\ell, \bar{D}}.$$

Donc $|\langle \tilde{T}, \bar{\partial}h_\varepsilon \rangle| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, d'où $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi' \rangle$ et ainsi $L_T^K(\bar{\partial}\varphi) = L_T^K(\bar{\partial}\varphi')$.

*** Si $q = n - 1$ et $T \in \{F \in \check{\mathcal{D}}'_{U \setminus \bar{D}}{}^{p, n-1}(U) \mid \langle F, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-p, 1}(U \setminus D) \cap \text{Ker } \bar{\partial}\}$, $\varphi - \varphi' \in \mathcal{D}^{n-p, 1}(U \setminus D) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$ et d'après l'hypothèse sur T , $\langle T, \varphi - \varphi' \rangle = 0$, d'où $L_T^K(\bar{\partial}\varphi) = L_T^K(\bar{\partial}\varphi')$.

L'application L_T^K est linéaire, mais également continue comme composée de deux applications continues :

$$T : \mathcal{D}_{\check{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus D) \rightarrow \mathbb{C}$$

et

$$\delta : \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus D) \cap \bar{\partial}\mathcal{D}_{\check{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus D) \rightarrow \mathcal{D}_{\check{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus D)$$

qui vérifie $\bar{\partial} \circ \delta = I$ et qui est obtenue par application du théorème de l'application ouverte appliqué à

$$\begin{aligned} \bar{\partial} : \{\varphi \in \mathcal{D}_{\check{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus D) \mid \bar{\partial}\varphi \in \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus D)\} &\subset \mathcal{D}_{\check{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus D) \\ &\rightarrow \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus D) \cap \bar{\partial}\mathcal{D}_{\check{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus D). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut étendre L_T^K en une application $\tilde{L}_T^K : \mathcal{D}_{\check{K}}^{n-p, n-r+1}(U \setminus D) \rightarrow \mathbb{C}$ qui est linéaire et continue. Donc \tilde{L}_T^K est un courant prolongeable défini dans $U \setminus \bar{D}$ et $\bar{\partial}\tilde{L}_T^K = (-1)^{p+r}T$ sur \mathring{K} car si $\text{supp } \varphi \subset K$, $\bar{\partial}\varphi \in \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus D)$ et $\langle \tilde{L}_T^K, \bar{\partial}\varphi \rangle = (-1)^{p+r}\langle T, \varphi \rangle$. On pose $S^{(K)} = (-1)^{p+r}\tilde{L}_T^K$. \square

LEMME II.2.6. — *Sous les hypothèses du théorème II.2.4, soient K_1, K_2, K_3 trois compacts d'intérieur non vide tels que $\mathring{K}_1 \subset \mathring{K}_2 \subset \mathring{K}_3$ et $\mathring{K}_i \cup \bar{D} = \{z \in X \mid \rho(z) < \eta_i\}$, $i = 1, 2, 3$, où ρ est une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique qui existe du fait que X est de Stein. Soit T un courant prolongeable sur Ω tel qu'il existe S_2 et S_3 deux $(p, r - 1)$ courants définis sur \mathring{K}_2 et \mathring{K}_3 et prolongeables à X tels que, pour tout indice $i = 2, 3$, $\bar{\partial}S_i = T$ sur \mathring{K}_i et soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un courant prolongeable \tilde{S}_3 défini sur \mathring{K}_3 tel que : $\bar{\partial}\tilde{S}_3 = T$ sur \mathring{K}_3 et*

$$i) \quad \tilde{S}_3|_{\mathring{K}_1} = S_2|_{\mathring{K}_1} \text{ si } 2 \leq r \leq q;$$

$$ii) \quad |\langle \tilde{S}_3 - S_2, \varphi \rangle| < \varepsilon |\varphi|_{0, \mathring{K}_1}, \text{ pour toute } \varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n}(\mathring{K}_1 \cup bD) \text{ si } r = 1.$$

Démonstration du lemme.

i) Comme $\bar{\partial}S_2 = T$ sur \mathring{K}_2 et $\bar{\partial}S_3 = T$ sur \mathring{K}_3 , $\bar{\partial}(S_2 - S_3) = 0$ sur \mathring{K}_2 . Puisque sur \mathring{K}_2 , on peut résoudre le $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles à support compact dans $\mathring{K}_2 \cup bD$ de bidegré (p, r) avec $2 \leq n - q + 1 \leq r \leq n - 1$ et $\bar{\partial}\mathcal{D}^{n-p, n-1}(\mathring{K}_2 \cup bD)$ est fermé dans $\mathcal{D}^{n-p, n}(\mathring{K}_2 \cup bD)$, cf. Remarque II.1.8, on a d'après le lemme II.2.5 et pour K un compact tel que $\mathring{K}_1 \subset\subset K \subset\subset \mathring{K}_2$ un courant $S^{(K)}$ sur \mathring{K} prolongeable à $\mathring{K}_2 \cup \bar{D}$ tel que $S_2 - S_3 = \bar{\partial}S^{(K)}$ sur \mathring{K} .

Soient χ une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(X)$ à support compact dans $\mathring{K} \cup \bar{D}$ qui vaut 1 dans \mathring{K}_1 et $\tilde{S}^{(K)}$ une extension de $S^{(K)}$ à X

$$S_3 + \bar{\partial}(\chi\tilde{S}^{(K)}) = S_2 - \bar{\partial}((1 - \chi)\tilde{S}^{(K)}) \text{ sur } \mathring{K}_1.$$

On pose

$$\tilde{S}_3 = S_3 + \bar{\partial}(\chi\tilde{S}^{(K)}).$$

ii) Si $r = 1$, comme $\bar{\partial}S_2 = T$ sur \mathring{K}_2 et $\bar{\partial}S_3 = T$ sur \mathring{K}_3 , $\bar{\partial}(S_2 - S_3) = 0$ sur \mathring{K}_2 . Il existe θ une p -forme holomorphe sur \mathring{K}_2 telle que $S_3 - S_2 = \theta$ sur \mathring{K}_2 .

$\mathring{K}_2 \cup \bar{D}$ est une variété de Stein, \bar{D} est un compact de $\mathring{K}_2 \cup \bar{D}$ et $\mathring{K}_2 = (\mathring{K}_2 \cup \bar{D}) \setminus \bar{D}$ est connexe. Par le phénomène de Hartogs, toute p -forme holomorphe sur \mathring{K}_2 se prolonge holomorphiquement à $\mathring{K}_2 \cup \bar{D}$. Soit $\tilde{\theta}$ un tel prolongement de θ à $\mathring{K}_2 \cup \bar{D}$. Il existe alors (cf. [8], théorème 5.2.8) une suite $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de p -formes holomorphes dans $\mathring{K}_3 \cup \bar{D}$ qui converge uniformément vers $\tilde{\theta}$ sur $\mathring{K}_1 \cup \bar{D}$. On peut donc trouver j_0 tel que $\sup_{\mathring{K}_1 \cup \bar{D}} |\theta_{j_0} - \tilde{\theta}| < \varepsilon$.

Posons $\tilde{S}_3 = S_3 - \theta_{j_0}$, on a $|\langle \tilde{S}_3 - S_2, \varphi \rangle| \leq \varepsilon \sup_{\mathring{K}_1 \cup \bar{D}} |\varphi|$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n}(\mathring{K}_1 \cup bD)$. \square

Démonstration du théorème. — Considérons une suite exhaustive $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de compacts de $X \setminus D$. Supposons que $\mathring{K}_j \cup \bar{D} = \{z \in X \mid \rho(z) < \eta_j\}$ où $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont des réels tels que $\eta_j < \eta_{j+1}$ et ρ est une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique de X . Pour $2 \leq r \leq q$, on associe à $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ grâce aux lemmes II.2.5 et II.2.6 une suite de courants $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définis dans K_j et prolongeables à X telle que $\bar{\partial}S_j = T$ sur \mathring{K}_j et si $j, j+1, j+2$ sont trois indices consécutifs, $S_{j+2} = S_{j+1}$ sur \mathring{K}_j .

La suite $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers un courant S défini sur Ω et prolongeable. De plus, S est solution de l'équation $\bar{\partial}U = T$ dans Ω .

Pour $r = 1$, soit $\varepsilon > 0$, il existe d'après les lemmes II.2.5 et II.2.6, une solution \tilde{S}_3 de $\bar{\partial}S = T$ dans \mathring{K}_3 , une solution S_2 de $\bar{\partial}S = T$ dans \mathring{K}_2 telles que $|\langle \tilde{S}_3 - S_2, \varphi \rangle| \leq \varepsilon |\varphi|_{0, \mathring{K}_1}$, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n}(\mathring{K}_1 \cup bD)$. On construit ainsi une suite $(\tilde{S}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de courants définis sur \mathring{K}_j et prolongeables à X tels que si $j, j+1, j+2$ sont trois indices consécutifs, $|\langle \tilde{S}_{j+2} - \tilde{S}_{j+1}, \varphi \rangle| < \frac{\varepsilon}{2^j} |\varphi|_{0, \mathring{K}_j}$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n}(\mathring{K}_j \cup bD)$. La suite $(\tilde{S}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la

topologie faible. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p,n}(X \setminus D)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset \mathring{K}_N \cup bD$ et pour tout $m > N$ et $p > 0$

$$|\langle \tilde{S}_{m+p} - \tilde{S}_m, \varphi \rangle| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{m+p-1}} \right) |\varphi|_{0, K_N},$$

par conséquent $\langle \tilde{S}_{m+p} - \tilde{S}_m, \varphi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. Donc $(\tilde{S}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers S . S est linéaire. En effet, soient $\varphi, \psi \in \mathcal{D}^{n-p,n}(X \setminus D)$. $\varphi + \psi \in \mathcal{D}^{n-p,n}(X \setminus D)$. Il existe K_N tel que $\text{supp } \varphi, \text{supp } \psi, \text{supp }(\varphi + \psi)$ soient inclus dans K_N .

$$\langle S, \varphi + \psi \rangle = \lim_{j > N} \langle S_j, \varphi + \psi \rangle = \lim_{j > N} \langle S_j, \varphi \rangle + \lim_{j > N} \langle S_j, \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle + \langle S, \psi \rangle.$$

Soit $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}^{n-p,n}(X \setminus D)$ avec $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$ dans $\mathcal{D}^{n-p,n}(X \setminus D)$. Il existe un compact K_N tel que pour tout ν , $\text{supp } \varphi_\nu \subset K_N$. $|\langle S, \varphi_\nu \rangle| = |\lim_{j > N} \langle S_j, \varphi_\nu \rangle|$ et

$$|\langle S_j, \varphi_\nu \rangle| \leq \varepsilon \sum_{k=N}^{j-1} \frac{1}{2^k} |\varphi_\nu|_{0, K_N} + |\langle S_{N+1}, \varphi_\nu \rangle|.$$

S_{N+1} est un courant donc $\langle S_{N+1}, \varphi_\nu \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$ et par hypothèse $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$, donc $|\varphi_\nu|_{0, K_N} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$. D'où $\langle S_j, \varphi_\nu \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$. S est alors continu et est un courant prolongeable solution de l'équation $\bar{\partial}U = T$ dans $X \setminus \bar{D}$. \square

REMARQUE II.2.7. — Si $2 \leq q-1$, le résultat du théorème II.2.4 reste vrai si l'hypothèse plus faible D est un domaine complètement strictement q -convexe car la démonstration n'utilise que le i) du théorème II.1.6 du paragraphe 1.

COROLLAIRE II.2.8. — Soient X une variété de Stein de dimension n , $n \geq 3$ et $D \subset\subset X$ un domaine à bord \mathcal{C}^∞ de X . Supposons que X est une extension 2-convexe de D . Posons $\Omega = X \setminus \bar{D}$. Alors pour toute $(0,1)$ forme différentielle $f \in \mathcal{C}^\infty$ sur Ω , $\bar{\partial}$ -fermée avec une valeur au bord au sens des courants, il existe une fonction $S \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ qui admet une valeur au bord au sens des courants telle que $\bar{\partial}S = f$ sur Ω . Toute autre solution v est une fonction \mathcal{C}^∞ qui admet une valeur au bord au sens des courants.

Démonstration. — Puisque f admet une valeur au bord au sens des courants, on a d'après [14] f qui est prolongeable au sens des courants. f est donc un courant de bidegré $(0,1)$ défini sur Ω , $\bar{\partial}$ -fermé et prolongeable. D'après le théorème II.2.4, il existe un courant S défini sur Ω prolongeable tel que $\bar{\partial}S = f$. De même puisque X est une extension 2-convexe de D , on a X qui est une extension 2-concave de Ω . De l'invariance de la cohomologie de Dolbeault pour les extensions 2-concaves, on a l'application induite par restriction de : $H_\infty^{p,r}(X) \rightarrow H_\infty^{p,r}(\Omega)$ qui est un isomorphisme pour $r \leq 1$.

Donc $H_\infty^{0,1}(X) \cong H_\infty^{0,1}(\Omega)$ et puisque X est une variété de Stein, $H_\infty^{0,1}(\Omega) = 0$. Il existe alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\bar{\partial}u = f$ sur Ω , $\bar{\partial}(u - S) = 0$ sur Ω . Il existe alors une fonction h holomorphe sur Ω telle que $S - u = h$. Ainsi $S = u + h$. S est donc une fonction \mathcal{C}^∞ sur Ω , prolongeable et $\bar{\partial}S = f$ admet une valeur au bord au sens des courants. D'après le lemme II.2.3, S admet une valeur au bord au sens des courants.

Soit v une autre solution de $\bar{\partial}u = f$ sur Ω , $\bar{\partial}(S - v) = 0$. Il existe une fonction holomorphe h' sur Ω telle que $v - S = h'$. Par le phénomène de Hartogs, h' est la restriction à Ω d'une fonction holomorphe sur X .

$v = S + h'$ est alors \mathcal{C}^∞ sur Ω et est la somme de deux fonctions qui ont une valeur au bord au sens des courants. Donc v a une valeur au bord au sens des courants. \square

CHAPITRE III

Invariance de la cohomologie pour les extensions q -concaves et q -convexes

Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X . On note $H_{\text{cour}}^{p,r}(D)$ le (p,r) -ième groupe de cohomologie de Dolbeault des courants dans D .

Si $\check{Z}^{p,r}(D)$ désigne l'espace des courants de bidegré (p,r) sur D prolongeables, $\bar{\partial}$ -fermés et $\check{E}^{p,r}(D) = \bar{\partial}\check{\mathcal{D}}_D^{p,r-1}(X)$, alors on note

$$\check{H}^{p,r}(D) = \frac{\check{Z}^{p,r}(D)}{\check{E}^{p,r}(D)},$$

le (p,r) -ième groupe de cohomologie de Dolbeault des courants prolongeables définis sur D .

Nous étudions dans ce paragraphe l'injectivité et la surjectivité de l'application induite par restriction :

$$\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D).$$

DÉFINITION III.1. — Un domaine $D \subset X$ est dit à bord strictement q -convexe, respectivement q -concave, si :

- i) bD rencontre toutes les composantes connexes de X .
- ii) Il existe un voisinage U de bD , une fonction $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(q+1)$ -convexe, respectivement $(q+1)$ -concave, tels que

$$D \cap U = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}.$$

X est dit extension q -convexe généralisée, respectivement q -concave généralisée, de D si :

- 1) D rencontre toutes les composantes connexes de X .
- 2) Il existe une application $\rho : [0, +\infty[\times U \rightarrow \mathbb{R}$, où U est un voisinage de $X \setminus D$ telle que :
 - a) Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\rho(t, \cdot)$ est $(q+1)$ -convexe, respectivement $(q+1)$ -concave.
 - b) Pour tout $z \in U$, $\rho(\cdot, z)$ est une fonction décroissante.
 - c) L'application $t \mapsto \rho(t, \cdot)$ est continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$.
 - d) $D \cap U = \{z \in U \mid \rho(0, z) < 0\}$ et pour tout $t > 0$, $\{z \in U \mid \rho(t, z) < 0\} \cap \bar{\mathbb{C}D}$ est relativement compact dans X .

Soit G un domaine de X . Supposons que G est une extension q -concave généralisée de D , $1 \leq q \leq n-1$. On a d'après [9] les résultats suivants : l'application induite par restriction

$\mathcal{S} : H_{\infty}^{0,r}(G) \rightarrow H_{\infty}^{0,r}(D)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$, (théorème 1.1.3).

$\mathcal{S} : H_{\infty}^{0,q}(G) \rightarrow H_{\infty}^{0,q}(D)$ est injective pour $1 \leq q \leq n-1$, (théorème 1.1.4).

De plus, pour tout domaine Ω de X , l'application naturelle de $H_{\infty}^{0,r}(\Omega) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(\Omega)$, $0 \leq r \leq n$, est un isomorphisme appelé isomorphisme de Dolbeault. On en déduit l'équivalent pour les courants de l'invariance de la cohomologie pour les extensions q -concaves suivant : l'application induite par restriction

$\mathcal{S}' : H_{\text{cour}}^{0,r}(G) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$,

$\mathcal{S}' : H_{\text{cour}}^{0,q}(G) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(D)$ est injective.

Dans le cas convexe, on a l'analogie suivant du lemme 1.1.2 de [9].

LEMME III.2. — Soit $\rho : [0, +\infty[\times X \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant les propriétés suivantes :

- a) Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\rho(t, \cdot)$ est $(q+1)$ -convexe.
- b) Pour tout $z \in X$, $\rho(\cdot, z)$ est une fonction décroissante.
- c) L'application $t \rightarrow \rho(t, \cdot)$ est continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathcal{C}^{\infty}(X, \mathbb{R})$.
- d) ρ n'a pas de point critique dégénéré.

Posons $D_{\alpha} = \{z \in X \mid \rho(\alpha, z) < 0\}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et on suppose qu'il existe α_0 tel que $\alpha < \alpha_0$, $\alpha' < \alpha_0$, $\alpha' < \alpha$ et $D_{\alpha} \setminus \overline{D_{\alpha'}}$ est relativement compact dans X . Il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout α, β vérifiant $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \varepsilon$, il existe un nombre fini de domaines $(A_i)_{i=0}^N$ tels que : $D_{\alpha} = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_N = D_{\beta}$ et pour tout j , $1 \leq j \leq N$, A_j se déduit de A_{j-1} à l'aide d'un élément d'extension q -convexe de X .

Démonstration. — Elle est identique à celle de [9], on définit A_k par

$$A_k = \{z \in X \mid \rho(\alpha, z) - (\rho(\beta, z) - \rho(\alpha, z)) \sum_{j=1}^k \chi_j < 0\}$$

où χ_j est comme dans la démonstration du lemme 12.3 de [6]. □

En utilisant le lemme III.2, le lemme 12.4 de [6] et en procédant comme dans le paragraphe 12 de [6], on a

THÉORÈME III.3. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n , q un entier, $0 \leq q \leq n-1$ et D un domaine de X . On suppose que X est une extension q -convexe généralisée de D . Alors l'application induite par restriction :

$$\mathcal{S} : H_{\infty}^{0,r}(X) \rightarrow H_{\infty}^{0,r}(D) \text{ est un isomorphisme si } r > n - q$$

et

$$\mathcal{S} : H_{\infty}^{0,n-q}(X) \rightarrow H_{\infty}^{0,n-q}(D), \text{ est surjective.}$$

Si D est relativement compact, alors $\mathcal{S} : H_{\infty}^{0,n-q}(X) \rightarrow H_{\infty}^{0,n-q}(D)$, est en plus injective.

Dans le cas compact le théorème III.3 correspond au théorème 12.14 de [6].

THÉORÈME III.4. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n , D un domaine à bord \mathcal{C}^∞ de X . Supposons que :

a) bD est strictement q -concave, $1 \leq q \leq n - 1$, alors l'application induite par restriction

$$\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D) \text{ est un isomorphisme pour } 0 \leq r \leq q - 1$$

et

$$\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,q}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(D) \text{ est injective.}$$

b) bD est strictement q -convexe, $1 \leq q \leq n - 1$, l'application induite par restriction

$$\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D) \text{ est un isomorphisme si } r > n - q$$

et

$$\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,n-q}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(D), \text{ est surjective.}$$

Si de plus D est relativement compact, on a : $\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,n-q}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(D)$ qui est en plus injective.

Démonstration.

a) Soient ρ une fonction définissante de D et $(K_v)_{v \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de X . Considérons une fonction $\chi_1 \in \mathcal{D}(X)$ à support dans $\overset{\circ}{K}_2$ qui vaut 1 dans K_1 . Il existe $t_1 > 0$ tel que $\rho_1 = \rho - t_1 \chi_1$ soit $(q+1)$ -concave dans un voisinage de $\{\rho_1 = 0\}$.

Posons $D_1 = D \cup \{\rho_1 < 0\}$. D_1 est un domaine de X à bord \mathcal{C}^∞ strictement q -concave. $D_1 \setminus D = \{0 \leq \rho < t_1 \chi_1\}$ est relativement compact et D_1 est une extension q -concave généralisée de D .

Soit $\chi_2 \in \mathcal{D}(X)$ à support dans $\overset{\circ}{K}_3$ qui vaut 1 dans K_2 . Il existe $t_2 > 0$ tel que $\rho_2 = \rho_1 - t_2 \chi_2$ soit $(q+1)$ -concave dans un voisinage de $\{\rho_2 = 0\}$. $D_2 = D_1 \cup \{\rho_2 < 0\}$ est un domaine à bord \mathcal{C}^∞ strictement q -concave, $D_2 \setminus D_1 = \{0 \leq \rho_1 < t_2 \chi_2\}$ est relativement compact et D_2 est une extension q -concave généralisée de D_1 . On construit ainsi une suite de domaines $(D_v)_{v \in \mathbb{N}}$ avec $D_0 = D$, $D_v \subset D_{v+1}$, $D_{v+1} \setminus D_v$ est relativement compact et D_{v+1} est une extension q -concave généralisée de D_v . $\tilde{D} = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} D_v \supset \bar{D}$ et est une extension q -concave généralisée de D .

• **Surjectivité de $\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $0 \leq r \leq q - 1$.**

Nous voulons montrer que pour tout $[T] \in H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, il existe $[\check{T}] \in \check{H}^{0,r}(D)$ tel que $\check{\mathcal{J}}[\check{T}] = [T]$. Si $1 \leq r \leq q - 1$, cela revient à montrer qu'il existe \check{T} un courant $\bar{\partial}$ -fermé sur D , prolongeable et θ un $(0, r - 1)$ courant dans D tels que :

$$\check{T} = T + \bar{\partial}\theta \text{ dans } D.$$

De la surjectivité de l'application $\mathcal{S}' : H_{\text{cour}}^{0,r}(\tilde{D}) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $0 \leq r \leq q - 1$, il existe un courant T' défini dans \tilde{D} , $\bar{\partial}$ -fermé et θ' un $(0, r - 1)$ courant dans D tels que :

$$T' - T = \bar{\partial}\theta' \text{ dans } D \text{ pour } 1 \leq r \leq q - 1.$$

Il suffit de choisir $\check{T} = T'|_D$ d'où la surjectivité de $\check{\mathcal{J}}$ pour $1 \leq r \leq q - 1$. De même

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}' : H_{\text{cour}}^{0,0}(\check{D}) & \rightarrow & H_{\text{cour}}^{0,0}(D) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{O}(\check{D}) & & \mathcal{O}(D) \end{array} \quad \text{est surjective,}$$

où $\mathcal{O}(D)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans D . Si $T \in \mathcal{O}(D)$, T est la restriction d'une fonction holomorphe T' définie dans \check{D} . On pose là aussi $\check{T} = T'|_D$.

Ainsi $\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$ est surjective pour $0 \leq r \leq q - 1$.

• **Injectivité de $\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $0 \leq r \leq q$.**

Pour $r = 0$, $\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,0}(D) \rightarrow \mathcal{O}(D)$. Soit $[\check{T}] \in \check{H}^{0,0}(D)$ tel que $\check{\mathcal{J}}[\check{T}] = 0$ dans $D \cdot \check{T}|_D = 0$ et est un courant prolongeable. \check{T} appartient au dual topologique de $\mathcal{D}^{n,n}(\bar{D})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}^{n,n}(\bar{D})$, il existe une suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{n,n}(D)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}^{n,n}(\bar{D})$.

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \lim_{j \rightarrow 0} \langle \check{T}, \varphi_j \rangle = 0 \quad \text{car } \check{T}|_D = 0.$$

Ainsi $\langle \check{T}, \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n,n}(\bar{D})$, d'où $\check{T} = 0$. Donc $\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,0}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,0}(D)$ est injective.

Pour montrer l'injectivité de $\check{\mathcal{J}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$ pour $1 \leq r \leq q$, nous avons besoin de deux lemmes.

LEMME III.5. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine à bord \mathcal{C}^∞ strictement q -concave. Pour tout $\xi \in bD$, il existe un voisinage θ de ξ , tel que pour tout domaine D_1 à bord \mathcal{C}^∞ suffisamment proche de D au sens de la topologie \mathcal{C}^2 et pour tout $\check{T} \in \check{D}'_{D_1}{}^{0,r}(X) \cap \ker \bar{\partial}, \bar{\partial}$ -exact dans D_1 , avec $1 \leq r \leq q$, il existe un courant $S \in \check{\mathcal{D}}^{0,r-1}(D_1 \cap \theta)$ tel que $\bar{\partial}S = \check{T}$ dans $D_1 \cap \theta$.

Avant de faire la démonstration du lemme donnons d'abord une définition.

DÉFINITION III.6. — Un domaine local q -concave dans \mathbb{C}^n ($1 \leq q \leq n - 1$), cf. [11], est un triplet $[U, D, \rho]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- i) $U \subset \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert convexe.
- ii) ρ est une fonction réelle de classe \mathcal{C}^∞ définie dans un voisinage de U qui est strictement convexe par rapport aux $(q + 1)$ premières coordonnées $z_1 \cdots z_{q+1}$ de $z \in U$.
- iii) $\{\rho < 0\} \neq \emptyset$ et $\{\rho < 1\} \subset \subset U$.
- iv) $D = \{0 < \rho < 1\}$ et $d\rho(z) \neq 0$ pour tout $z \in bD$.
- v) ρ est strictement convexe sur un voisinage de $\{\rho \geq 1\}$.

Démonstration du lemme. — Puisque D est à bord strictement q -concave, pour tout $1 \leq r \leq q$, D est aussi à bord strictement r -concave. Il suffit de faire la démonstration pour q .

D'après le lemme 2.1.4 de [11], il existe un système de coordonnées (W, h) autour de ξ , un domaine local q -concave $[U, \tilde{D}, \rho]$ tels que :

a) $h(W) = U, \{\rho < 0\} \subset h(W \cap \{\varphi < 0\})$ où φ est une fonction définissante de $X \setminus \overline{D}_1$.

b) Il existe un voisinage $V \subset U$ de $h(\xi)$ pour lequel on a $V \cap \{\rho < 0\} = h(W \cap \{\varphi < 0\})$.

Posons $\tilde{\rho} = \rho \circ h, \Delta = \{0 < \tilde{\rho} < 1\} = h^{-1}(\tilde{D})$ vérifie les hypothèses du théorème II.2.4. Posons $S_0 = \{\tilde{\rho} = 0\}$ le bord intérieur de Δ et $S_1 = \{\tilde{\rho} = 1\}$ le bord extérieur de Δ . Soient $\Omega = \{\tilde{\rho} < 1\}$ et $V_1 \subset\subset V_2 \subset\subset V_3 \subset\subset V_4 \subset\subset V_5$ des voisinages dans Ω de ξ tels que $V_5 \cap \mathbb{C}D_1 \subset\subset \{\tilde{\rho} < 0\}$. Considérons une fonction χ de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω , à valeurs dans $[0, 1]$ qui vaut 1 dans $V_3 \setminus \overline{V}_2$ et 0 dans $V_5 \setminus (V_4 \setminus \overline{V}_1)$. Pour ε suffisamment petit, $\tilde{\rho} - \varepsilon\chi$ est $(q+1)$ -convexe dans un voisinage de S_0 et $\tilde{\rho} - \varepsilon\chi = \rho$ dans un voisinage de S_1 .

$\Delta' = \{0 < \tilde{\rho} - \varepsilon\chi < 1\} \subset \Delta$ vérifie encore les hypothèses du théorème II.2.4.

Puisque $\tilde{T} \in \check{D}'_{D_1}(X) \cap \ker \bar{\partial}$ et \tilde{T} est $\bar{\partial}$ -exacte dans D_1 , il existe un courant γ défini dans D_1 tel que $\tilde{T} = \bar{\partial}\gamma$ dans D_1 . Soient $D_2 \subset D_1$ un domaine de X et χ_1 une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support dans D_1 qui vaut 1 dans D_2 . Posons $\tilde{T}' = \tilde{T} - \bar{\partial}(\chi_1\gamma)$. \tilde{T}' est un $(0, q)$ courant défini sur D_1 prolongeable, $\bar{\partial}$ -fermé et à support dans $D_1 \setminus D_2$. Choisissons D_2 suffisamment proche de D_1 de sorte que $(D_1 \setminus D_2) \cap \Delta'$ ait deux composantes connexes.

$$T' = \begin{cases} \tilde{T}' & \text{sur } \Delta' \cap D_1 \cap V_3 \\ 0 & \text{sur } \Delta' \setminus (D_1 \cap V_2) \end{cases}$$

est un $(0, q)$ courant défini sur Δ' , nul au voisinage de S_1 , prolongeable à Ω et $\bar{\partial}$ -fermé.

Si $q \leq n-2$, d'après le théorème II.2.4, il existe un courant w défini dans Δ' prolongeable à Ω tel que $T' = \bar{\partial}w$ dans Δ' .

Si $q = n-1$, posons $S'_0 = \{\tilde{\rho} - \varepsilon\chi = 0\}$. D'après le théorème II.2.4, ii),

$$\bar{\partial}\check{\mathcal{D}}_{\Delta'}^{0, n-2}(\Omega) = \{T \in \check{\mathcal{D}}_{\Delta'}^{0, n-1}(\Omega) \mid \langle T, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n, 1}(\Delta' \cup S'_0) \cap \ker \bar{\partial}\}.$$

Donc pour montrer que $T' \in \bar{\partial}\check{\mathcal{D}}_{\Delta'}^{0, n-2}(\Omega)$, il suffit de montrer que $\langle T', \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n, 1}(\Delta' \cup S'_0) \cap \ker \bar{\partial}$.

Considérons T_0 une extension de T' à Ω . Puisque T' est nul au voisinage de S_1 , T_0 est à support compact dans Ω . Il appartient au dual des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω . Puisque T' est $\bar{\partial}$ -fermé dans Δ' , on a $\bar{\partial}T_0$ qui est à support dans $\Omega \setminus \Delta'$. $\bar{\partial}T_0$ est d'ordre fini ℓ . Soit $\varphi \in \mathcal{D}^{n, 1}(\Delta' \cup S'_0) \cap \ker \bar{\partial}$, $\varphi \in \mathcal{D}^{n, 1}(\Omega) \cap \ker \bar{\partial}$ et Ω est complètement strictement $(n-1)$ -convexe. Donc il existe $\alpha \in \mathcal{D}^{n, 0}(\Omega)$ telle que $\varphi = \bar{\partial}\alpha$ où $\alpha|_{\Omega \setminus \Delta'}$ est une n -forme \mathcal{C}^∞ dans $\Omega \setminus \Delta'$, holomorphe dans $\Omega \setminus \overline{\Delta}'$. Puisque Ω est une extension q -convexe de $\Omega \setminus \overline{\Delta}'$, il existe une suite $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de n -formes holomorphes définies dans Ω qui converge pour la topologie \mathcal{C}^ℓ vers α dans $\Omega \setminus \Delta'$.

$$|\langle T', \varphi \rangle| = |\langle T_0, \varphi \rangle| = |\langle \bar{\partial}T_0, \alpha - \alpha_j \rangle| \leq C|\alpha - \alpha_j|_{\ell, \Omega \setminus \Delta'}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. D'où $\langle T', \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n, 1}(\Delta' \cup S'_0) \cap \ker \bar{\partial}$. Il existe donc $w \in \check{\mathcal{D}}_{\Delta'}^{0, n-2}(\Omega)$ tel que $\bar{\partial}w = T'$ dans Δ' . On pose $\theta = V_1$. Pour tout $q, 1 \leq q \leq n-1$, $\tilde{T}' = \bar{\partial}(\chi\gamma + w)$ dans $D_1 \cap \theta$ et $\chi\gamma + w$ est un courant prolongeable défini sur $D_1 \cap \theta$. \square

LEMME III.7. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine à bord \mathcal{C}^∞ strictement q -concave ($1 \leq q \leq n-1$). Soient \check{T} un $(0, r)$ courant, $1 \leq r \leq q$, $\bar{\partial}$ -exact dans D , prolongeable et S un compact de bD . Il existe un courant v_1 défini sur D , prolongeable, un courant T_1 défini dans $D \cup W_S$, $\bar{\partial}$ -fermé, où W_S est un voisinage de S dans X tels que :

$$\check{T} = \bar{\partial}v_1 + T_1 \text{ dans } D.$$

Démonstration du lemme. — Soit Γ un fermé de S . On dit que Γ satisfait à la condition Ex , s'il existe $U \in \check{\mathcal{D}}_D^{0, r-1}(X)$ tel que $\check{T} - \bar{\partial}U$ admet une extension $\bar{\partial}$ -fermée à $D \cup W_\Gamma$, où W_Γ est un voisinage de Γ dans X .

Notons que d'après le lemme III.5, si $\xi \in bD$, il existe $\Gamma \subset bD$ tel que Γ satisfait à la condition Ex . En effet, soit $\Gamma \subset \subset \theta \cap bD$, où θ est comme dans le lemme III.5. Si χ_1 est une fonction \mathcal{C}^∞ sur V_2 à support compact qui vaut 1 dans un voisinage de $\bar{\theta}$, $U = \chi\gamma + \chi_1 w$ est un courant défini dans D qui est prolongeable. $\check{T} - \bar{\partial}U$ admet une extension $\bar{\partial}$ -fermée à $D \cup \theta$.

Pour faire la démonstration du lemme, il suffit de montrer que S satisfait à la condition Ex . Puisque S est compact, il suffit de montrer que pour tout $\xi \in bD$, il existe Λ un voisinage de ξ dans X tel que si $\Gamma \subset S$ satisfait à la condition Ex , alors $\Gamma \cup (\bar{\Lambda} \cap S)$ satisfait aussi à la condition Ex .

Fixons $\xi \in S$ et choisissons deux voisinages Λ et θ de ξ , $\Lambda \subset \subset \theta$, où θ est comme dans le lemme III.5. Soit $\Gamma \subset S$ qui vérifie la condition Ex . Il existe v un courant prolongeable défini sur D , un voisinage W_Γ de Γ dans X tels que $\check{T} - \bar{\partial}v$ admet une extension \check{T} , $\bar{\partial}$ -fermée dans $D \cup W_\Gamma$. On choisit D_1 suffisamment proche de D au sens du lemme III.5 tel que $D \subset D_1$, $\Gamma \subset \subset D_1 \subset \subset D \cup W_\Gamma$. D'après le lemme III.5, il existe w un courant prolongeable défini sur $D_1 \cap \theta$ tel que $\check{T} = \bar{\partial}w$ dans $D_1 \cap \theta$.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(X)$ à support dans θ et $\chi \equiv 1$ dans un voisinage U_Λ de $\bar{\Lambda}$. Posons $U = v + \chi w$ sur D . U est un courant prolongeable, $\check{T} - \bar{\partial}U$ est nul dans un voisinage U_Λ de $\bar{\Lambda}$. $\check{T} - \bar{\partial}U = (\check{T} - \bar{\partial}v) - \bar{\partial}(\chi w)$ admet un prolongement $\bar{\partial}$ -fermé dans un voisinage $D_1 \cup U_\Lambda$ de $\Gamma \cup \bar{\Lambda}$. \square

Comme conséquence du lemme III.7, nous allons montrer que si sous les hypothèses du lemme III.7, il existe un domaine D_1 de X à bord \mathcal{C}^∞ strictement q -concave tel que : $D \cup S \subset D_1 \subset D \cup W_S$ et D_1 est une extension q -concave généralisée de D , alors il existe un courant U_1 défini dans D_1 tel que $\check{T} = \bar{\partial}U_1$ dans D .

D'après le lemme III.7, il existe un courant U défini sur D prolongeable tel que $\check{T} - \bar{\partial}U = \check{T}$ dans D où \check{T} est un courant $\bar{\partial}$ -fermé défini dans $D \cup W_S$. $\check{T}|_{D_1} \in Z_{\text{cour}}^{0, r}(D_1)$ et puisque par hypothèses $\check{T} = \bar{\partial}\psi$ dans D , $\check{T} = \bar{\partial}(\psi - U)$ dans D . Donc \check{T} représente la classe nulle dans $H_{\text{cour}}^{0, r}(D)$. De l'injectivité de l'application induite par restriction $\mathcal{S}' : H_{\text{cour}}^{0, r}(D_1) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0, r}(D)$, $0 \leq r \leq q$, on déduit que \check{T} représente la classe nulle dans $H_{\text{cour}}^{0, r}(D_1)$. Il existe $\tilde{\psi}$ un courant dans D_1 tel que $\check{T} = \bar{\partial}\tilde{\psi}$. Ainsi $\check{T} = \bar{\partial}(U + \tilde{\psi}|_D)$. Il suffit de poser $u_1 = \tilde{u} + \tilde{\psi}$, où \tilde{u} est une extension de U à D_1 .

Fin de la démonstration de la partie a) du théorème. — Soit $[\check{T}] \in \check{H}^{0, r}(D)$ tel que $\check{\mathcal{S}}[\check{T}] = 0$ dans $H_{\text{cour}}^{0, r}(D)$. Pour montrer l'injectivité de $\check{\mathcal{S}} : \check{H}^{0, r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0, r}(D)$, $1 \leq r \leq q$, on va construire une suite $(D_j, T_j)_{j \in \mathbb{N}}$, où D_j est un domaine de X tel que $D_{j+1} \supset D_j$, D_{j+1} est une

extension q -concave généralisée de D_j , $D_{j+1} \setminus D_j$ est relativement compact, $\tilde{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} D_j \supset \bar{D}$ et T_j est un courant défini sur D_j , prolongeable, $\bar{\partial}$ -exact dans D_j tel que $T_{j+1} = T_j$ dans D_j .

Supposons que la suite $(D_j, T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ construite. $\tilde{T} = \lim_j T_j$ est un courant défini dans \tilde{D} , $\bar{\partial}$ -fermé et $\tilde{T} = \check{T}$ dans D . Puisque par hypothèses \check{T} est $\bar{\partial}$ -exact dans D , \tilde{T} représente la classe nulle dans $H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$. Par invariance de la cohomologie pour les extensions q -concaves généralisées, \tilde{T} représente la classe nulle dans $H_{\text{cour}}^{0,r}(\tilde{D})$. Il existe donc un courant $\tilde{\psi}$ défini dans \tilde{D} tel que $\tilde{T} = \bar{\partial}\tilde{\psi}$ dans \tilde{D} . $\check{T} = \bar{\partial}(\tilde{\psi}|_D)$, d'où $[\check{T}] = 0$ dans $\check{H}^{0,r}(D)$ pour $0 \leq r \leq q$.

Construction de la suite $(D_j, T_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Considérons une suite exhaustive $(S_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ de compacts de bD . Posons $D_0 = D$ et $T_0 = \check{T}$. Supposons (D_k, T_k) construit pour $k \leq j$, D_j est un domaine à bord \mathcal{C}^∞ strictement q -concave. T_j est un courant défini sur D_j , prolongeable à travers bD_j et $\bar{\partial}$ -exact dans D_j . Soit S'_{j+1} un compact de bD_j tel que :

$$bD_j \setminus S'_{j+1} = bD \setminus S_{j+1}.$$

D'après le lemme III.7 appliqué à S'_{j+1} , D_j et T_j , il existe un courant v_{j+1} défini dans D_j prolongeable, un courant T'_j défini dans $D_j \cup W_{S'_{j+1}}$ (où $W_{S'_{j+1}}$ est un voisinage dans X de S'_{j+1}), $\bar{\partial}$ -fermé tels que $T_j = \bar{\partial}v_{j+1} + T'_j$ dans D_j . Considérons D_{j+1} et D'_{j+1} deux domaines de X , obtenus par une déformation C^2 de la fonction définissante de D_j . Supposons que D_{j+1} et D'_{j+1} vérifient : $D_j \cup S'_{j+1} \subset D_{j+1} \subset D'_{j+1} \subset D_j \cup W_{S'_{j+1}}$, D'_{j+1} est une extension q -concave généralisée de D_{j+1} , D_{j+1} est une extension q -concave généralisée de D_j , $D'_{j+1} \setminus D_{j+1}$ et $D_{j+1} \setminus D_j$ sont relativement compacts.

$T'_j|_{D'_{j+1}} \in Z_{\text{cour}}^{0,r}(D'_{j+1})$. Puisque $T_j = \bar{\partial}\psi_j$ dans D_j , $T'_j = \bar{\partial}(\psi_j - v_{j+1})$ dans D_j . T'_j représente la classe nulle dans $H_{\text{cour}}^{0,r}(D_j)$ d'où T'_j représente la classe nulle dans $H_{\text{cour}}^{0,r}(D'_{j+1})$ ([9], théorème (1-1-3) et l'isomorphisme de Dolbeault). Il existe un courant v'_j dans D'_{j+1} tel que $T'_j = \bar{\partial}v'_j$ dans D'_{j+1} . On pose $T_{j+1} = \bar{\partial}((v'_j + v'_{j+1})|_{D_{j+1}})$ où v'_{j+1} est une extension de v_{j+1} à D'_{j+1} ce qui donne (D_{j+1}, T_{j+1}) avec les propriétés requises.

Démonstration de b). — C'est une répétition de la démarche de la démonstration de la partie a); du théorème III.3 et de l'isomorphisme de Dolbeault, on a une version courant du théorème III.3 d'où l'on déduit la surjectivité de $\check{\mathcal{Y}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $n - q \leq r \leq n$. Pour l'injectivité de $\check{\mathcal{Y}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $r > n - q$, respectivement $r \geq n - q$ si D est relativement compact, on remplace le lemme III.5 par le lemme suivant :

LEMME III.8. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X à bord \mathcal{C}^∞ strictement q -convexe. Soit \check{T} un courant sur D , prolongeable et $\bar{\partial}$ -exact dans D . Pour tout $\xi \in bD$, il existe un voisinage θ de ξ dans X , un courant \check{U} sur $\theta \cap D$, prolongeable tel que $\check{T} = \bar{\partial}\check{U}$ dans $\theta \cap D$.

Démonstration du lemme. — Puisque bD est strictement q -convexe, D est localement biholomorphe à un domaine linéairement q -convexe. Pour tout $\xi \in bD$, on choisit un ouvert de coordonnées (U, h) autour de ξ , où U est biholomorphe à un convexe de \mathbb{C}^n . $U \cap D$

est un domaine complètement strictement q -convexe. Par les fonctions \max_β de [6], on peut construire un domaine $D_1 \subset U \cap D$, complètement strictement q -convexe à bord \mathcal{C}^∞ tel que $\xi \in bD_1$. $\check{T}|_{D_1}$ est un courant prolongeable, $\bar{\partial}$ -fermé. D'après le théorème 4.1 de [18], il existe \check{U} un courant prolongeable sur D_1 solution de $\bar{\partial}S = \check{T}$ dans D_1 . Il suffit de choisir θ tel que $\overline{\theta \cap D} \subset \bar{D}_1$. \square

Dans le cas des formes différentielles on a la relation suivante entre $H_\infty^{0,r}(\bar{D})$ et $H_\infty^{0,r}(D)$:

THÉORÈME III.9. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X à bord \mathcal{C}^∞ . Supposons que :

a) bD est strictement q -concave, alors l'application induite par restriction :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : H_\infty^{0,r}(\bar{D}) &\rightarrow H_\infty^{0,r}(D) \text{ est un isomorphisme si } 0 \leq r \leq q-1 \\ \mathcal{P} : H_\infty^{0,q}(\bar{D}) &\rightarrow H_\infty^{0,q}(D) \text{ est injective.} \end{aligned}$$

b) Si bD est strictement q -convexe, alors l'application induite par restriction

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : H_\infty^{0,r}(\bar{D}) &\rightarrow H_\infty^{0,r}(D) \text{ est un isomorphisme si } n-q < r \leq n \\ \mathcal{P} : H_\infty^{0,n-q}(\bar{D}) &\rightarrow H_\infty^{0,n-q}(D) \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

Démonstration. — C'est une répétition de la démonstration du théorème III.4. Pour l'injectivité de $\mathcal{P} : H_\infty^{0,r}(\bar{D}) \rightarrow H_\infty^{0,r}(D)$, $1 \leq r \leq q$ dans a) on utilise le lemme 3.2 de [11]. Pour l'injectivité de $\mathcal{P} : H_\infty^{0,r}(\bar{D}) \rightarrow H_\infty^{0,r}(D)$, $n-q < r \leq n$ dans b), on remplace dans le lemme III.8 le courant \check{T} par une forme différentielle $f \in Z_\infty^{0,r}(\bar{D})$, $\bar{\partial}$ -exacte dans D et le théorème 4.1 de [18] par le théorème 2 de [13]. \square

COROLLAIRE III.10. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X à bord \mathcal{C}^∞ . Supposons que :

a) bD est strictement q -concave. Alors l'application naturelle de :

$$\begin{aligned} H_\infty^{0,r}(\bar{D}) &\rightarrow \check{H}^{0,r}(D) \text{ est un isomorphisme si } 0 \leq r \leq q-1 \\ H_\infty^{0,q}(\bar{D}) &\rightarrow \check{H}^{0,q}(D) \text{ est injective.} \end{aligned}$$

b) bD est strictement q -convexe. Alors l'application naturelle de :

$$\begin{aligned} H_\infty^{0,r}(\bar{D}) &\rightarrow \check{H}^{0,r}(D) \text{ est un isomorphisme si } r > n-q \\ H_\infty^{0,n-q}(\bar{D}) &\rightarrow \check{H}^{0,n-q}(D) \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

Démonstration.

a) C'est une conséquence de l'isomorphisme de Dolbeault et des théorèmes III.4, a), et III.9, a). Pour $r = q$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^{0,q}(D) & \hookrightarrow & H_{\text{cour}}^{0,q}(D) \\ \uparrow & & \uparrow \wr \\ H_\infty^{0,q}(\bar{D}) & \hookrightarrow & H_\infty^{0,q}(D) . \end{array}$$

D'où $H_\infty^{0,q}(\bar{D}) \rightarrow \check{H}^{0,q}(D)$ est injective.

b) C'est une conséquence de l'isomorphisme de Dolbeault et des théorèmes III.4, *b)* et III.9, *b)*. Pour $r = n - q$, \tilde{D} un voisinage de \bar{D} qui est en plus une extension q -convexe généralisée de D , on a d'après le lemme 3 de [7], la surjectivité de l'application restriction de : $H_\infty^{0,n-q}(\tilde{D}) \rightarrow H_\infty^{0,n-q}(\bar{D})$. Du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_\infty^{0,n-q}(\tilde{D}) & \rightarrow & H_\infty^{0,n-q}(\bar{D}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ H_{\text{cour}}^{0,n-q}(\tilde{D}) & \rightarrow & \check{H}^{0,n-q}(D) , \end{array}$$

on a la surjectivité de l'application naturelle de : $H_\infty^{0,n-q}(\bar{D}) \rightarrow \check{H}^{0,n-q}(D)$. □

CHAPITRE IV

Applications

A. Application à l'étude de l'isomorphisme de Dolbeault dans les hypersurfaces réelles

Nous allons utiliser dans cette partie les relations entre la $\bar{\partial}$ -cohomologie et la $\bar{\partial}_b$ -cohomologie établies par [1], [2] pour les formes différentielles et [16], [2] pour les courants afin d'étudier l'isomorphisme de Dolbeault dans les hypersurfaces réelles. On sait que l'application naturelle de $H_\infty^{0,r}(X) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(X)$ est un isomorphisme appelé isomorphisme de Dolbeault. Si S est une hypersurface réelle, nous allons nous intéresser à l'application naturelle de $H_\infty^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$, où $H_\infty^{0,r}(S)$, respectivement $H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$, est le $(0,r)$ -ième groupe de $\bar{\partial}_b$ -cohomologie des formes différentielles \mathcal{C}^∞ définies sur S , respectivement des courants définis sur S .

THÉORÈME IV.A.1. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et S une hypersurface réelle de classe \mathcal{C}^∞ de X . Si la forme de Lévi de S admet en chaque point de S ;

i) q valeurs propres de même signe, $q \geq \frac{n+1}{2}$, l'application naturelle de

et $H_\infty^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est surjective si $n - q \leq r \leq q - 1$
 $H_\infty^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est injective si $n - q + 1 \leq r \leq q$.

ii) q paires de valeurs propres de signe contraire, $1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$, l'application naturelle de :

$H_\infty^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est un isomorphisme si $0 \leq r \leq q - 1$ et
 $n - q + 1 \leq r \leq n - 1$,

$H_\infty^{0,q}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(S)$ est injective

et

$H_\infty^{0,n-q}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(S)$ est surjective.

Remarque. — Le cas ii) correspond au cas de la codimension 1 dans [12].

Démonstration. — Quitte à restreindre X , on peut supposer que S partage X en deux composantes connexes X^+ et X^- .

i) On peut supposer sans perte de généralité que X^- se situe du côté concave de S . D'après le corollaire III.10, a), l'application naturelle de :

$$\begin{aligned} & H_\infty^{0,r}(\overline{X}^-) \rightarrow \check{H}^{0,r}(X^-) \text{ est un isomorphisme si } 0 \leq r \leq q-1 \\ \text{et} & H_\infty^{0,q}(\overline{X}^-) \rightarrow \check{H}^{0,q}(X^-) \text{ est injective.} \end{aligned}$$

D'après le corollaire III.10, b), l'application naturelle de :

$$\begin{aligned} & H_\infty^{0,r}(\overline{X}^+) \rightarrow \check{H}^{0,r}(X^+) \text{ est un isomorphisme si } r > n-q \\ \text{et} & H_\infty^{0,n-q}(\overline{X}^+) \rightarrow \check{H}^{0,n-q}(X^+) \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

On applique ces informations au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_\infty^{0,r}(X) & \rightarrow & H_\infty^{0,r}(\overline{X}^+) \oplus H_\infty^{0,r}(\overline{X}^-) & \rightarrow & H_\infty^{0,r}(S) & \rightarrow & H_\infty^{0,r+1}(X) & \rightarrow \\ & \downarrow c_r & & \downarrow a_r & & \downarrow b_r & & \downarrow c_{r+1} & \\ \rightarrow & H_{\text{cour}}^{0,r}(X) & \rightarrow & \check{H}^{0,r}(X^+) \oplus \check{H}^{0,r}(X^-) & \rightarrow & H_{\text{cour}}^{0,r}(S) & \rightarrow & H_{\text{cour}}^{0,r+1}(X) & \rightarrow \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \rightarrow H^{0,r+1}(\overline{X}^+) \oplus H_\infty^{0,r+1}(\overline{X}^-) \rightarrow \dots \\ & & & & & & & & \downarrow a_{r+1} \\ & & & & & & & & \rightarrow \check{H}^{0,r+1}(X^+) \oplus \check{H}^{0,r+1}(\overline{X}^-) \rightarrow \dots \end{array}$$

où les flèches verticales sont les applications naturelles.

Pour $q-1 \geq r \geq n-q+1$, a_r , c_r , c_{r+1} sont des isomorphismes et a_{r+1} injective. D'après le lemme des quatre, b_r est un isomorphisme.

De même, pour $r = q$, a_q est injective, c_q et c_{q+1} sont des isomorphismes. Par le lemme des quatre, b_q est injective.

Pour $r = n-q$, c_{n-q} , c_{n-q+1} , a_{n-q+1} sont des isomorphismes et a_{n-q} est surjective. b_{n-q} est surjective par le lemme des quatre.

ii) Si la forme de Lévi de S admet q paires de valeurs propres de signe contraire, alors

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{P}} : \check{H}^{0,r}(X^\pm) & \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(X^\pm) \text{ est un isomorphisme pour } 0 \leq r \leq q-1 \text{ et} \\ & n-q+1 \leq r \leq n, \\ \check{\mathcal{P}} : \check{H}^{0,q}(X^\pm) & \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(X^\pm) \text{ est injective et} \\ \check{\mathcal{P}} : \check{H}^{0,n-q}(X^\pm) & \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(X^\pm) \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : H_\infty^{0,r}(\overline{X}^\pm) & \rightarrow H_\infty^{0,r}(X^\pm) \text{ est un isomorphisme pour } 0 \leq r \leq q-1 \text{ et} \\ & n-q+1 \leq r \leq n, \\ \mathcal{P} : H_\infty^{0,q}(\overline{X}^\pm) & \rightarrow H_\infty^{0,q}(X^\pm) \text{ est injective et} \\ \mathcal{P} : H_\infty^{0,n-q}(\overline{X}^\pm) & \rightarrow H_\infty^{0,n-q}(X^\pm) \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

Donc l'application naturelle de :

$$H_{\infty}^{0,r}(\overline{X}^+) \oplus H_{\infty}^{0,r}(\overline{X}^-) \rightarrow \check{H}^{0,r}(X^+) \oplus \check{H}^{0,r}(X^-) \text{ est un isomorphisme pour } 0 \leq r \leq q-1 \\ \text{et } n-q+1 \leq r \leq n,$$

$$H_{\infty}^{0,q}(\overline{X}^+) \oplus H_{\infty}^{0,q}(\overline{X}^-) \rightarrow \check{H}^{0,q}(X^+) \oplus \check{H}^{0,q}(X^-) \text{ est injective et} \\ H_{\infty}^{0,n-q}(\overline{X}^+) \oplus H_{\infty}^{0,n-q}(\overline{X}^-) \rightarrow \check{H}^{0,n-q}(X^+) \oplus \check{H}^{0,n-q}(X^-) \text{ est surjective.}$$

On conclut alors par l'utilisation du lemme des quatre comme dans *i*). \square

COROLLAIRE IV.A.2. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et S une hypersurface réelle de classe \mathcal{C}^{∞} de X . Supposons que pour tout $z \in S$, la forme de Lévi de S à ℓ valeurs propres d'un même signe et q paires de valeurs propres de signes opposés avec $q \leq \ell$. Alors,

i) Si $\ell \leq \frac{n}{2}$, l'application naturelle de : $H_{\infty}^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$ et $n-q+1 \leq r \leq n-1$, est injective si $r = q$ et est surjective si $r = n-q$.

ii) Si $\ell = \frac{n+1}{2}$, l'application naturelle de : $H_{\infty}^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$ et $n-q+1 \leq r \leq n-1$, injective si $r = q$ et ℓ , surjective si $r = n-\ell$ et $n-q$.

iii) Si $\ell \geq \frac{n}{2} + 1$, l'application naturelle de : $H_{\infty}^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$, $n-\ell+1 \leq r \leq \ell-1$ et $n-q+1 \leq r \leq n-1$. Elle est injective si $r = q$ et ℓ , surjective si $r = n-\ell$ et $n-q$.

B. Annulation du r -ième groupe de cohomologie des formes différentielles à valeurs dans le faisceau des fonctions holomorphes qui ont une valeur au bord au sens des courants

Soient X une variété analytique complexe, $\Omega \subset X$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord \mathcal{C}^{∞} .

On considère le faisceau sur X des courants prolongeables défini par la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{D}'_{X \setminus \Omega}{}^{0,r} \rightarrow \mathcal{D}'^{0,r} \rightarrow \check{\mathcal{D}}'^{0,r}_{\Omega}(X) \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{D}'_{X \setminus \Omega}{}^{0,r}$ est le faisceau des courants de bidegré $(0,r)$ à support dans $X \setminus \Omega$ et $\mathcal{D}'^{0,r}$ le faisceau des courants de bidegré $(0,r)$ sur X .

Notons par $\check{\mathcal{D}}'^{0,r}_{\Omega} |_{\overline{\Omega}}$ le faisceau induit sur $\overline{\Omega}$ par $\check{\mathcal{D}}'^{0,r}_{\Omega}(X)$. C'est un faisceau de $\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}$ -modules.

Notons aussi $\check{\mathcal{C}}_{\Omega}$ le faisceau sur $\overline{\Omega}$ des fonctions holomorphes sur Ω possédant une trace au sens des courants sur $b\Omega$.

On a la proposition suivante :

PROPOSITION IV.B.1. — $(\check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,r} |_{\bar{\Omega}}, \bar{\partial})$ est une résolution acyclique de $\check{\mathcal{C}}_\Omega$ et par conséquent :

$$H^q(\Omega, \check{\mathcal{C}}_\Omega) \cong \frac{\text{Ker}(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,q} |_{\bar{\Omega}} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,q+1} |_{\bar{\Omega}}))}{\text{Im}(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,q-1} |_{\bar{\Omega}} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,q} |_{\bar{\Omega}}))}.$$

Démonstration. — Nous avons à montrer que :

$$0 \rightarrow \check{\mathcal{C}}_\Omega \rightarrow \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,0} |_{\bar{\Omega}} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,n} |_{\bar{\Omega}} \rightarrow 0$$

est exacte.

Soit U un ouvert de X et $T \in \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,0}(U \cap \bar{\Omega})$ tel que $\bar{\partial}T = 0$ sur U , d'après le théorème 3.5 du chapitre III de [10], T est un courant défini sur U par une fonction holomorphe h . Puisque h est prolongeable, alors h admet une valeur au bord au sens des courants d'après le lemme II.2.3, donc $h \in \check{\mathcal{C}}_\Omega(U \cap \bar{\Omega})$. On a donc prouvé que

$$\text{Ker}(\check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,0} |_{\bar{\Omega}} \rightarrow \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,1} |_{\bar{\Omega}}) = \check{\mathcal{C}}_\Omega.$$

Pour montrer l'exactitude du reste de la suite, on a besoin d'un lemme de Dolbeault.

Pour un ouvert V de $\bar{\Omega}$ et $T \in \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,j}(V \cap \Omega)$ tel que $\bar{\partial}T = 0$ sur V , il existe $U \subset V$ tel que $T|_U$, soit $\bar{\partial}$ -exact. Si $V \cap b\Omega = \emptyset$, c'est le lemme de Dolbeault classique, il suffit de prendre pour U un ouvert complètement strictement pseudoconvexe contenu dans V . Pour V tel que $V \cap b\Omega \neq \emptyset$, puisque Ω est strictement pseudoconvexe à bord \mathcal{C}^∞ , il existe un ouvert $U \subset V \cap \Omega$ à bord lisse, complètement strictement pseudoconvexe tel que $bU \cap b\Omega \neq \emptyset$. $T|_U$ est $\bar{\partial}$ -exact d'après le théorème II.2.1.

Par conséquent, pour tout j , $1 \leq j \leq n$

$$\text{Im}(\check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,j-1} |_{\bar{\Omega}} \xrightarrow{\bar{\partial}} \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,j} |_{\bar{\Omega}}) = \text{Ker}(\check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,j} |_{\bar{\Omega}} \xrightarrow{\bar{\partial}} \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,j+1} |_{\bar{\Omega}}).$$

Ce qui donne l'exactitude de la suite.

L'isomorphisme

$$H^q(\Omega, \check{\mathcal{C}}_\Omega) \cong \frac{\text{Ker}(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,q} |_{\bar{\Omega}} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,q+1} |_{\bar{\Omega}}))}{\text{Im}(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,q-1} |_{\bar{\Omega}} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,q} |_{\bar{\Omega}}))};$$

résulte alors de la théorie classique de la cohomologie des faisceaux. \square

On peut déduire de cette proposition le corollaire suivant :

COROLLAIRE IV.B.2. — Soit Ω un domaine complètement strictement pseudoconvexe à bord lisse d'une variété analytique complexe X , alors pour tout $r \geq 1$

$$H^r((\Omega, \check{\mathcal{C}}_\Omega) = 0.$$

Démonstration. — D'après le théorème II.2.1, on peut résoudre le $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables sur Ω . Donc

$$\frac{\text{Ker}(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,r} |_{\bar{\Omega}} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,r+1} |_{\bar{\Omega}}))}{\text{Im}(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,r-1} |_{\bar{\Omega}} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}_\Omega'^{0,r} |_{\bar{\Omega}}))} = 0$$

et $H^r(\Omega, \check{\mathcal{C}}_\Omega) = 0$ grâce à la proposition IV.B.1. \square

C. Application au $\partial\bar{\partial}$

Soit Ω un domaine strictement pseudoconvexe à bord \mathcal{C}^∞ lisse d'une variété analytique complexe X .

Soit \mathfrak{I}_2 le faisceau défini sur $\bar{\Omega}$ de la manière suivante : pour $V \subset \bar{\Omega}$ un ouvert, $f \in \Gamma(V, \mathfrak{I}_2)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) f est une 2-forme différentielle sur V , d -fermée.

ii) f admet une valeur au bord $\gamma(f)$ sur $V' = V \cap b\Omega$, pour tout $V \subset \bar{\Omega}$ tel que $V \cap b\Omega \neq \emptyset$.

Soient \mathfrak{I}_0 et \mathfrak{I}_1 les faisceaux sur $\bar{\Omega}$ définis comme suit : pour tout ouvert $V \subset \bar{\Omega}$ et $i = 0, 1$, $h \in \Gamma(V, \mathfrak{I}_i)$, si h est une i -forme différentielle sur V telle que $\gamma(h)$ et $\gamma(dh)$ existent sur $V' = V \cap b\Omega$ pour $V \cap b\Omega \neq \emptyset$.

Du lemme de Poincaré pour les formes différentielles d -fermée avec valeur au bord au sens des courants (voir lemme 2 de [3]), la suite

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{d} \mathfrak{I}_1 \xrightarrow{d} \mathfrak{I}_2 \rightarrow 0$$

est exacte.

Notons $H^2(\Omega, \mathbb{C})$ le deuxième groupe de cohomologie De Rham à valeur dans \mathbb{C} , on a en conséquence

$$H^2(\bar{\Omega}, \mathbb{C}) = H^2(\Omega, \mathbb{C}) = \frac{\Gamma(\bar{\Omega}, \mathfrak{I}_2)}{d\Gamma(\bar{\Omega}, \mathfrak{I}_1)}.$$

Soit ρ la fonction définissante de Ω . Notons $(,)$ une métrique hermitienne sur X , (il en existe toujours dès que X est paracompacte). On suppose que $\|\partial\rho\|^2 = \frac{1}{2}$ sur $b\Omega$.

$\mathcal{E}^{p,q}(X)$ désigne l'espace des (p, q) -formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur X et $\mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) = L(\mathcal{E}^{p,q}(X))$ où L est l'opérateur restriction à $b\Omega$, est l'espace des (p, q) -formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur $b\Omega$. On note $\overline{\mathcal{N}}^{p,q}(b\Omega) = \{\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) \mid \alpha = \varphi \wedge \bar{\partial}\rho \text{ sur } b\Omega\}$, $q \geq 1$ et $\overline{\mathcal{T}}^{p,q}(b\Omega) = \{\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) \mid (\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in \mathcal{N}^{p,q}(b\Omega)\}$. Pour tout $\phi \in \mathcal{E}^{p,q}(b\Omega)$, on a la décomposition

$$\phi = \overline{N} \lrcorner (\bar{\partial}\rho \wedge \phi) + \bar{\partial}\rho \wedge (\overline{N} \lrcorner \phi),$$

où \overline{N} est le champ de vecteurs dual à $\bar{\partial}\rho$. Ainsi

$$\mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) = \overline{\mathcal{N}}^{p,q}(b\Omega) \oplus \overline{\mathcal{T}}^{p,q}(b\Omega).$$

Notons $\mathcal{N}^{p,q}(b\Omega) = \{\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) \mid \alpha = \varphi \wedge \partial\rho \text{ sur } b\Omega\}$, $p \geq 1$ et $\mathcal{T}^{p,q}(b\Omega) = \{\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) \mid (\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in \mathcal{N}^{p,q}(b\Omega)\}$. On a aussi la décomposition suivante :

$$\mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) = \mathcal{N}^{p,q}(b\Omega) \oplus \mathcal{T}^{p,q}(b\Omega).$$

$\overline{\tau} : \mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) \rightarrow \overline{\mathcal{T}}^{p,q}(b\Omega)$ respectivement $\tau : \mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) \rightarrow \mathcal{T}^{p,q}(b\Omega)$ désigne la seconde projection. On a $\partial_b = \tau \circ \partial$ et $\bar{\partial}_b = \overline{\tau} \circ \bar{\partial}$ et on pose

$$\delta_b = (\partial_b + \bar{\partial}_b), \quad * \delta_b = (\overline{\tau} \partial_b + \tau \bar{\partial}_b), \quad \delta_b^c = i(\bar{\partial}_b - \partial_b).$$

Par calcul direct (cf. [4]),

$$\begin{aligned} \tau \bar{\tau}(\bar{\partial}\partial h) &= \tau(\bar{\partial}_b \partial_b h) + 2N(h)\tau(\bar{\partial}_b \partial \rho) \\ \text{et} \\ -\tau \bar{\tau}(\bar{\partial}\partial h) &= \bar{\tau}(\partial_b \bar{\partial}_b h) - 2\bar{N}(h)\tau(\bar{\partial}_b \partial \rho) \end{aligned}$$

où $N(h) = (\partial h, \partial \rho)$ et $\bar{N}(h) = (\bar{\partial} h, \bar{\partial} \rho)$.

On obtient en soustrayant les deux égalités

$$(\#\#) \quad 2i\tau \bar{\tau}(\bar{\partial}\partial h) + \delta_b \delta_b^c h = i2[N(h) + \bar{N}(h)]\tau(\bar{\partial}_b \partial \rho).$$

Si ρ n'est pas Lévi-plat, on peut (cf. [4]) "diviser" ($\#\#$) par $i\tau(\bar{\partial}_b \partial \rho)$. Pour obtenir des opérateurs $R : \mathcal{E}^{0,0}(b\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^{0,0}(b\Omega)$ et $A : \mathcal{E}^{1,1}(b\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^{0,0}(b\Omega)$ tels que $N(h) + \bar{N}(h) = R(h) + A(\bar{\partial}\partial h)$. On définit un opérateur $w : \mathcal{E}^{0,0}(b\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^{1,0}(b\Omega)$ par $w(h) = \partial_b h + [N(h) - \bar{N}(h)]\partial \rho + R(h)\partial \rho$ et $B : \mathcal{E}^{1,1}(b\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^{1,1}(b\Omega)$ par $B(h) = -\bar{\tau}(h) + \bar{\partial}_b(A(h)\partial \rho)$.

Si U est une solution avec une valeur au bord au sens des courants $\gamma(U)$ de $\partial\bar{\partial}U = f$ sur Ω , alors $\gamma(U)$ vérifie les conditions de compatibilité de bord pour le $\partial\bar{\partial}$.

$$\begin{aligned} w(\gamma(u)) &= \partial u - A(\bar{\partial}\partial u)\partial \rho \text{ sur } b\Omega \\ \bar{\partial}_b(w(\gamma(u))) &= \bar{\partial}_b(\partial u + A(\bar{\partial}\partial u)\partial \rho) \\ &= \bar{\tau}(\bar{\partial}\partial u) + \bar{\partial}_b(A(\bar{\partial}\partial u)\partial \rho) \\ &= -\tau(f) + \bar{\partial}_b(A(f)\partial \rho) = B(f). \end{aligned}$$

Nous avons comme dernière application la proposition suivante :

PROPOSITION IV.C.1. — *Soit $\Omega \subset\subset X$, un domaine complètement strictement pseudoconvexe à bord \mathcal{C}^∞ lisse d'une variété analytique complexe de dimension n tel que $H^2(\Omega, \mathbb{C}) = 0$. Si f est une $(1,1)$ -forme différentielle d -fermée sur Ω avec une valeur au bord au sens des courants, on a pour tout $g \in \mathcal{D}'(b\Omega)$ qui vérifie $\bar{\partial}_b \omega(g) = B(f)$, une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ avec une valeur au bord au sens des courants $\gamma(u)$ qui vérifie*
$$\begin{cases} \partial\bar{\partial}u = f & \text{sur } \Omega \\ \gamma(u) = g. \end{cases}$$

Démonstration. — Comme $H^2(\Omega, \mathbb{C}) = 0$; si $f \in \mathcal{E}^{1,1}(\Omega) \cap \text{Ker } d$, il existe h une 1-forme différentielle sur Ω avec valeurs au bord au sens des courants telle que

$$dh = f.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que h et f sont des formes différentielles réelles. Donc, $h = V + \bar{V}$ où V est une $(1,0)$ -forme différentielle et \bar{V} son conjugué et

$$dh = dV + d\bar{V} = \partial V + \bar{\partial}V + \bar{\partial}V + \partial\bar{V} = f.$$

Puisque ∂V est une $(2,0)$ -forme différentielle et $\bar{\partial}\bar{V}$ une $(0,2)$ -forme différentielle on a : $\bar{\partial}\bar{V} = \partial V = 0$ et par conséquent

$$\bar{\partial}V + \partial\bar{V} = f.$$

De plus \bar{V} est une $(0,1)$ -forme différentielle $\bar{\partial}$ -fermée avec une valeur au bord au sens des courants sur $b\Omega$. D'après le Corollaire II.2.2, il existe donc une solution \bar{w} avec valeur au bord au sens des courants de l'équation $\bar{\partial}U = \bar{V}$.

On a donc $\bar{\partial}\bar{w} = \bar{V}$ d'où $\partial w = V$, ce qui implique

$$\partial\bar{\partial}(\bar{w} - w) = \bar{\partial}\partial w + \partial\bar{\partial}\bar{w} = f .$$

Ainsi $\bar{w} - w$ est solution avec valeur au bord au sens des courants de $\partial\bar{\partial}u = f$. $\bar{w} - w$ vérifie la condition de compatibilité du bord pour le $\partial\bar{\partial}$. Donc $\bar{\partial}_b w(\gamma(\bar{w} - w)) = B(f)$.

On a $\bar{\partial}_b \omega(\gamma(\bar{w} - w) - g) = 0$. Il existe (cf. proposition 3.6 de [5]) une fonction pluriharmonique ℓ (c'est-à-dire telle que $\partial\bar{\partial}\ell = 0$) qui a $\gamma(\bar{w} - w) - g$ pour valeur au bord au sens des courants.

Posons $u' = \bar{w} - w - \ell$, alors u' vérifie
$$\begin{cases} \partial\bar{\partial}u' = f \\ \gamma(u') = g . \end{cases} \quad \square$$

Bibliographie

- [1] ANDREOTTI A., HILL D.C., *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy Problem I*, Ann. norm. super. Pisa (1972), 325–363.
- [2] ANDREOTTI A., HILL D.C., LOJASIEWICZ S. and MACKICHAN B., *Complexes of differential operators: the Mayer-Vietoris sequence*, Inventiones Math. **26** (1976), 43–86.
- [3] BARLETTA E., *Un problema di Cauchy per operatore $\bar{\partial}\bar{\partial}$* , Boll. Un. Mat. Ital. VI, Ser. **B5** (1986), 329–344.
- [4] DE BARTOLOMEIS P., *“Hardy-Like” estimates for the $\bar{\partial}$ operator and scripture theorems for functions in \mathcal{H}^p in strictly pseudo-convex domains*, B.U.M.I. (3), **16-B** (1979), 430–450.
- [5] DE BARTOLOMEIS P. and TOMASSINI G., *Traces of pluriharmonic functions*, Lectures notes, **798** (1979), 10–17.
- [6] HENKIN G.M., LEITERER J., *Andreotti-Grauert theory by integrals formulas*, Birkhäuser, 1986.
- [7] HILL C.D., NACINOVICH M., *On the Cauchy problem in complexe analysis*, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CLXXI (1996), 159–179.
- [8] HORMANDER L., *Introduction to analysis of several complex variables*, (IV edition) North-Holland company Publishing (1973).
- [9] LAURENT-THIÉBAUT CH., *Phénomène de Hartogs-Bochner relatif dans une hypersurface réelle 2-concave d’une variété analytique complexe*, Math. Z. **212** (1993), 511–523.
- [10] LAURENT-THIÉBAUT CH., *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, Inter-Editions et CNRS Editions, 1997.
- [11] LAURENT-THIÉBAUT CH. et LEITERER J., *Andreotti-Vesentini separation theorem with C^k estimates and extension of CR forms*, Mathematical Notes, **38**, Princeton University (1993), 416–436.
- [12] LAURENT-THIÉBAUT CH. et LEITERER J., *Dolbeault isomorphism for CR manifolds*, Prépublication de l’Institut Fourier n° 521, Grenoble (2000).
- [13] LIEB I., RANGE R.M., *Lösungoperatoren für den Cauchy-Riemann komplex mit C^k Abschätzungen*, Math. Ann. **253** (1980), 145–165.
- [14] LOJASIEWICZ S., TOMASSINI G., *Valeurs au bord des formes holomorphes*, Several complex variables, 1978. Proceedings of international conferences. Cortonna, Italy (1976–1977), Scuola normale superiore Pisa, 222–246.
- [15] MARTINEAU A., *Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes*, Strasbourg RCP **25** (1966).
- [16] NACINOVICH M., VALLI G., *Tangential Cauchy-Riemann complexes on distributions*, Ann. di Matematica pura ed applicata (IV) vol. CXLVI (1987), 123–160.
- [17] RUDIN W., *Analyse fonctionnelle*, Ediscience international, 1995.
- [18] SAMBOU S., *Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courant prolongeables*, Prépublication de l’Institut Fourier n° 486, Grenoble (1999), à paraître aux Math. Nachrichten.
- [19] SAMBOU S., *Équation de Cauchy-Riemann pour les courants prolongeables - Applications*, C.R.A.S. Paris, **332**, Série I (2001), 497–500.