Remerciements

Christine Laurent-Thiébaut m'a «prise sous son aile» dès la fin de la maîtrise lorsque je suis venue lui demander de diriger mon stage de magistère. C'est à elle que je dois mes premiers contacts avec la recherche, et le fait d'avoir poursuivi dans cette voie. Malgré les nombreuses charges qui lui incombent, elle a toujours su se rendre disponible pour répondre à mes doutes et mes questions. Je la remercie de tout cœur pour tout cela, pour avoir guidé mes travaux ainsi que pour ses encouragements.
Je tiens à remercier aussi Jürgen Leiterer qui m'a accueilli pendant six mois à l'Université Humboldt de Berlin. Son aide et ses conseils ont été précieux. Je tiens aussi à le remercier de faire partie du jury.
Vielen Dank, Herr Leiterer !
Anne Cumenge et Joachim Michel ont accepté de bien vouloir lire mes travaux en étant rapporteurs et d'être membre du jury, j'en suis très honorée et les en remercie. J'ai rencontré souvent Eric Amar lors de conférences depuis le début de ma thèse. Je suis heureuse de le retrouver à la fin et je le remercie d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je tiens à remercier le personnel de l'Institut Fourier, tout particulièrement Arlette, Myriam et Françoise pour leur efficacité et leur sympathie. Leur travail est pour beaucoup dans le bon fonctionnement du labo et donc dans nos bonnes conditions de travail.

Je veux aussi formuler des remerciements mathématiques à quelques uns de mes «collègues», en tout premier lieu ceux qui ont partagé mon bureau et mon domaine de recherche depuis le début de ma thèse : Judith, Farid, Torsten et Salomon. Un grand merci aussi à Sophie et Matthieu pour leurs conseils «faisceautiques» et algébriques.

Mes premiers contacts avec les mathématiques me viennent des enseignants que j'ai croisé tout au long de ma scolarité et de mes études. Ils m'ont transmis leur passion pour cette matière. Aussi, il me semble important de leur faire un petit clin d'œil aujourd'hui.

Comme une thèse n'est pas uniquement faite de mathématiques, je veux avoir une pensée pour tous ceux que j'ai côtoyé pendant ces trois années, ceux avec qui je partage les doutes et les angoisses mais aussi les joies liées à la recherche et à l'enseignement. Sans les citer tous, je remercie tout particulièrement Sophie, Barbara, Matthieu, Costia, Paolo, Torsten, Farid, Guillaume, Pierre-Emmanuel... ainsi que les moniteurs du stage du gouroudoudou.

Mes parents m'ont soutenu dans le choix de mes études bien qu'il ait pu paraître un peu fou à leurs yeux (et ceux des autres!). Je leur en suis très reconnaissante. Je tiens à les remercier vivement pour leur aide tout au long de ces années ainsi que toute ma famille et «jolie-famille».

Enfin, Nicolas, comment ne pas te remercier... Depuis plus de cinq ans maintenant, nous partageons tout et ton soutien m'est précieux. Merci de supporter les moments d'absences lorsque je pars dans la galaxie des mathématiques, d'être là pour soutenir mes angoisses et mes «je n'y arriverai pas». Aujourd'hui, je veux partager avec toi le bonheur de l'accomplissement de ce travail.

Ma dernière pensée sera pour Benjamin, mon ami, je lui dédie cette thèse.

Financement

L'auteur a bénéficié pendant sa thèse d'une bourse EURODOC de la Région Rhone-Alpes ainsi que d'aides financières du Réseau Européen «ANACOGA», T.M.R. ERBFMX-CT 98-0163. Ces supports financiers lui ont permis de séjourner dans plusieurs laboratoire européens et d'assister à de nombreuses conférences pendant la durée de sa thèse.

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons principalement à l'étude de deux équations classiques en Analyse Complexe :

• l'équation de Cauchy-Riemann dans certains domaines de $\mathbb{C}^n$:
Sachant que f est une forme différentielle $\bar{\partial}$-fermée sur un domaine D dans $\mathbb{C}^n$, existe-t-il u définie sur D telle que $\bar{\partial}u = f$? Par ailleurs, peut-on trouver une solution u dont la régularité sur D soit comparable à celle de f ?

• l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle dans certains domaines d'une sous-variété CR générique q-concave :
Soit D un domaine inclus dans M. Si f est $\bar{\partial}_b$-fermée sur D, existe-t-il u définie sur D telle que $\bar{\partial}_b u = f$? De même, peut-on trouver une solution u dont la régularité sur D soit comparable à celle de f ?

La formulation de ces questions et en particulier les hypothèses seront précisées par la suite, cependant, on peut déjà noter que l'objectif est d'obtenir des solutions u ayant des propriétés de régularité jusqu'au bord des domaines considérés. L'étude liée à chaque équation consiste dans un premier temps à obtenir des résultats de résolution locale (Chapitres 1 et 2). Ensuite, on en déduit des résultats globaux d'annulation, de finitude ou de séparation des groupes de cohomologie, ces résultats sont présentés au Chapitre 3 pour l'équation de Cauchy-Riemann et au Chapitre 4 pour l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle.

Pour effectuer les études locales, on utilise principalement deux théories classiques distinctes. Dans le cadre complexe, la méthode de résolution consiste à construire explicitement une solution grâce à la théorie des représentations intégrales, théorie dont l'essor date des années 70 grâce aux résultats de H. Grauert, G.M. Henkin, I. Lieb et E. Ramirez (voir [He]). Dans le cadre CR, la résolution se déduit des résultats obtenus dans le cas complexe grâce à des outils d'algèbre homologique et de théorie des faisceaux découlant en particulier de travaux de A. Andreotti, G. Fredericks, C.D. Hill et M. Nacinovich (voir [An], [Ai/He], [An/Fr/Na] et [Na]).
Les résultats globaux découlent ensuite de la résolution locale en particulier

grâce à une méthode due à H. Grauert, appelée «Beulenmethode» ou «méthode des bosses» qui consiste à agrandir le domaine en lui ajoutant une bosse possédant de bonnes propriétés de résolution pour l'opérateur considéré.

• Les résultats principaux du Chapitre 1 (Théorème 1.0.2 et Théorème 1.0.3) donnent la résolution avec estimation $\mathcal{C}^k$ jusqu'au bord dans le cas de domaines à coins q-convexes et q-concaves locaux.
Le cadre géométrique est le suivant : considérons un domaine D dans $\mathbb{C}^n$ défini par N fonctions $\rho_1, \dots, \rho_N$ de classe $\mathcal{C}^d$, avec $d \geq 2$ définies sur $U \subset\subset \mathbb{C}^n$ et à valeurs réelles :

$$D = \bigcap_{i=1}^{N} \{z \in U | \rho_i(z) < 0\}$$

On suppose que les intersections sont transverses et que l'ensemble $E := \{z \in U | \rho_1(z) = \dots \rho_N(z) = 0\}$ n'est pas vide.
Soit $\xi \in E$, on s'intéresse à la résolution du $\bar{\partial}$ sur D au voisinage de ξ, ainsi, pour $R > 0$, on note $B(\xi, R)$ la boule de centre ξ et de rayon R dans $\mathbb{C}^n$ et on pose

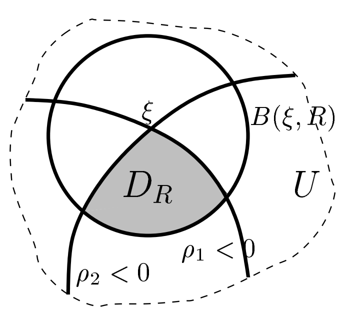
$$D_R = D \cap B(\xi, R)$$

On définit alors les conditions suivantes :

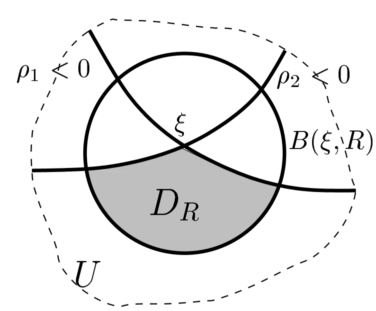
(cas q-convexe) Pour toute combinaison linéaire $\rho_\lambda := \lambda_1\rho_1 + \dots + \lambda_N\rho_N$, à coefficients positifs avec $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$, des applications $\rho_1, \dots, \rho_N$ et pour tout point $z \in U$, il existe un espace vectoriel de dimension $q + 1$ sur lequel la forme de Levi de ρ_λ au point z est définie positive.

(cas q-concave) Pour toute combinaison linéaire $\rho_\lambda := \lambda_1\rho_1 + \dots + \lambda_N\rho_N$, à coefficients positifs avec $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$, des applications $\rho_1, \dots, \rho_N$ et pour tout point $z \in U$, il existe un espace vectoriel de dimension $q + 1$ sur lequel la forme de Levi de ρ_λ au point z est définie négative.

Il faut noter que dans ces conditions, l'espace vectoriel dépend de $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.
On est ainsi dans les configurations suivantes :



cas q-convexe



cas q-concave

La théorie des représentations intégrales a consisté dans un premier temps, notamment avec la formule de Bochner-Martinelli (1943), à généraliser au cas de plusieurs variables complexes la formule de Cauchy connue pour les fonctions holomorphes en une seule variable. Elle voit surtout sa renaissance dans les années 70 grâce à des idées contenues dans les travaux de J. Leray (1956) et de P. Lelong (1953). Celles-ci ont conduit H. Grauert, G.M. Henkin, I. Lieb et E. Ramirez en 1969 (voir [He]) à la construction d'une bonne formule intégrale permettant de résoudre l'équation de Cauchy-Riemann sur un domaine D strictement pseudoconvexe, i.e D est défini par une fonction dont la forme de Levi est définie positive ($q = n - 1$ dans le cas q-convexe). Depuis, cette théorie s'est beaucoup développée, ainsi elle a permis de résoudre de nouveaux problèmes mais aussi de retrouver, en les précisant, de nombreux résultats connus.
Ne pouvant évidemment citer tous ceux qui ont apporté leur contribution à cette théorie, nous ne donnerons que quelques références qui sont à la base des travaux présentés ici. Des rappels historiques plus complets peuvent être trouvés dans [He], voir aussi [He/Le 1] et [Ra].
En 1973, R.M. Range et Y.T. Siu ont obtenu (voir [Ra/Si]), des estimations uniformes dans le cas d'un domaine D qui est l'intersection transverse de domaines strictement pseudoconvexes à bord $\mathcal{C}^d$. En 1980, dans [Li/Ra], I. Lieb et R.M. Range ont obtenu des estimations $\mathcal{C}^k$ lorsque D est strictement pseudoconvexe à bord lisse. En combinant les techniques employées dans ces articles et en utilisant des pseudocoordonnées, J. Michel (avec une condition de transversalité complexe) et M. Perotti/J. Michel, dans [Mi] et [Mi/Pe], ont obtenu des estimations $\mathcal{C}^k$ lorsque D est strictement pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^d$ par morceaux.
Il faut remarquer que les résultats cités ci-dessus, ne sont pas des résultats de résolution locale mais globale, contrairement au cadre de notre étude. En effet, les quatre articles cités concernent des domaines pseudoconvexes ou des intersections de domaines pseudoconvexes sur lesquels on peut construire les solutions globalement sur tout le domaine.
Cependant, on ne peut utiliser les mêmes méthodes pour $q < n-1$ et $N > 1$ car la section de Leray dépend non-linéairement du coefficient λ, alors que dans le cas pseudoconvexe, la dépendance linéaire en λ permettait d'éliminer explicitement λ par une intégration. Suivant une idée de G.M. Henkin (voir l'introduction de [L-T/Le 1]), C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer ont démontré, dans [L-T/Le 1] et [L-T/Le 2], des théorèmes de résolution locale dans les cas q-convexes et q-concaves avec des estimations uniformes. Ils les ont obtenus sans effectuer l'intégration en λ mais en l'estimant de façon adéquate.

Les résultats principaux du Chapitre 1 sont basés sur ces idées. Ainsi, le Théorème 1.0.2 donne dans le cas q-convexe, l'existence d'un opérateur intégral R_r pour $n - q \leq r \leq n$ tel que si f est une $(0, r)$-forme différentielle

$\bar{\partial}$-fermée sur D_R alors $\bar{\partial} R_r f = f$ sur D_R avec des estimations $\mathcal{C}^k$ jusqu'au bord.
De manière analogue, le Théorème 1.0.3 traite du cas q-concave, ici, il faut tenir compte du fait que la convexité de $B(\xi, R)$ est opposée à celle des applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ ce qui impose de faire varier le rayon, on a ainsi pour $1 \leq r \leq q - N$ et pour $r = q - N + 1$ avec des conditions supplémentaires, la résolution locale du $\bar{\partial}$ sur $D_{R'}$ pour des formes définies sur D_R avec $R' < R$.

Il faut enfin noter que le Théorème 1.0.2, i.e. le cas q-convexe, a été annoncé et partiellement démontré par M.Y. Barkatou, dans [Ba 2], il a obtenu de meilleures estimations $\mathcal{C}^k$, en utilisant des noyaux de sa fabrication, dans le cas où les applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ vérifient une hypothèse plus forte que l'hypothèse du cas q-convexe, où l'on impose que l'espace où la forme de Levi est définie positive est le même pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$.

• Le Chapitre 2 traite de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle sur des sous-variétés CR génériques de $\mathbb{C}^n$. Si M est une sous-variété réelle de $\mathbb{C}^n$ de codimension N et de classe $\mathcal{C}^d$, alors pour $\xi \in M$, il existe un voisinage U de ξ dans $\mathbb{C}^n$ et N applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ définies sur U, de classe $\mathcal{C}^d$ et à valeurs réelles telles que :

$$M = \{z \in U | \rho_1(z) = \rho_2(z) = \cdots = \rho_N(z) = 0\}$$

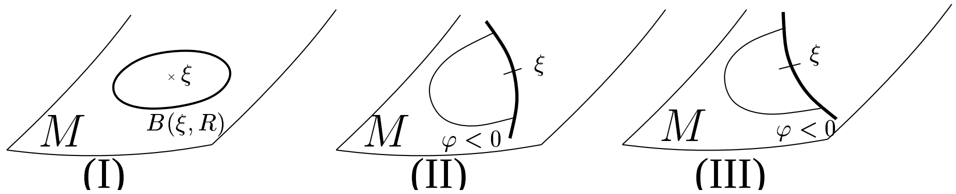
de plus $d\rho_1 \wedge \cdots \wedge d\rho_N \neq 0$ sur U.
On dira que M est CR générique si $\bar{\partial}\rho_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\rho_N \neq 0$ sur U (voir les définitions de la partie 2.1 pour plus de précisions).
De plus, on dira que M est q-concave, si pour tout système de fonctions définissantes $\rho_1, \ldots, \rho_N$, et pour tout $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, la forme de Levi de $x_1\rho_1 + \cdots + x_N\rho_N$ admet q valeurs propres strictement positives sur l'espace tangent complexe à M en tout point de M.

Les résultats principaux de ce chapitre (Théorème 2.2.10 et Théorème 2.3.2) traitent de la résolution locale de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle sur une sous-variété CR générique q-concave pour des formes de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec régularité jusqu'au bord, dans trois types de domaines, localement au voisinage d'un point ξ de M :

(I) sur $M \cap B(\xi, R)$ pour $R > 0$ assez petit ;

(II) sur $\{z \in U \cap M | \varphi(z) < 0\} \cap B(\xi, R)$, où $R > 0$ est assez petit, $\varphi(\xi) = 0$ et φ vérifie des conditions de q-convexité compatibles avec les applications définissant M (voir la Définition 2.2.8) ;

(III) sur $\{z \in U \cap M | \varphi(z) < 0\} \cap B(\xi, R)$, où $R > 0$ est assez petit, $\varphi(\xi) = 0$ et φ vérifie des conditions de q-concavité compatibles avec les applications définissant M (voir la Définition 2.3.1).



Le cas (I) a été traité grâce à des méthodes de théorie des faisceaux et d'algèbre homologique en codimension quelconque par M. Nacinovich dans [Na] en 1984, il a obtenu un Lemme de Poincaré pour des (n, r)-formes lorsque $1 \leq r \leq q-1$ ou $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$. Les résultats de M. Nacinovich sont redémontrés dans ce travail, avec des méthodes analogues à celles déjà employées par l'auteur, en obtenant pour le cas convexe (i.e. lorsque $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$) des résultats de régularité jusqu'au bord de $B(\xi, R)$.
Ce sont les cas (II) et (III) qui semblent nouveaux. Le cas (II) correspond à ce qu'on appelle le «cas convexe», avec une résolution dans les «grands degrés», voir le Théorème 2.2.10. Le cas (III) correspond quant à lui au «cas concave», avec une résolution dans les «petits degrés», voir le Théorème 2.3.2.
Le cas où M est une hypersurface, i.e. $N = 1$, a été traité par C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer en 1995, voir [L-T/Le 4]. Ils ont obtenu des solutions avec estimations uniformes jusqu'au bord grâce à leurs résultats locaux dans $\mathbb{C}^n$ pour les domaines à coins q-convexes et q-concave. Ils ont utilisé une méthode classique initiée par A. Andreotti et C.D. Hill consistant à représenter une forme différentielle f sur M comme le saut de deux formes définies respectivement «au-dessus» et «au-dessous» de M.
Cette formule de saut n'a plus de sens en codimension supérieure, en effet, dans ce cas M ne déconnecte plus $\mathbb{C}^n$. Aussi, le rôle qu'elle joue dans le cas des hypersurfaces est remplacé par des complexes simpliciaux définis par rapport à des objets appelés *sections de Whitney*. On utilise ensuite des outils de théorie des faisceaux et en particulier une correspondance entre les cohomologies pour les formes différentielles et pour les sections de Whitney. Ces techniques proviennent de travaux de A. Andreotti, G. Fredericks et M. Nacinovich en 1981 dans [An/Fr/Na], elles sont étendus dans ce travail aux cas de formes régulières jusqu'au bord.

• Le Chapitre 3 présente quelques applications des résultats du premier chapitre, on en trouve principalement trois.
Tout d'abord on démontre un théorème de résolution locale avec régularité jusqu'au bord, sur le complémentaire W d'un domaine q-convexe, D, à bord $\mathcal{C}^d$ par morceaux, il s'agit du Théorème 3.1.6.
On se place ainsi dans le cadre suivant :
Soit $U \subset\subset \mathbb{C}^n$, et D un domaine défini par

$$D = \{z \in U | \forall i \in \{1, \dots, N\}\ r_i(z) < 0\}$$

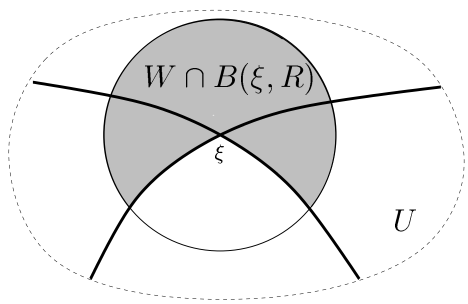
avec les propriétés suivantes :

(i) pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, r_i est de classe $\mathcal{C}^d$ sur U, avec d assez grand

(ii) pour tout $I = (j_1, \ldots, j_l)$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq N$:
$dr_{j_1}(z) \wedge \cdots \wedge dr_{j_l}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \{\zeta \in U | r_{j_1}(\zeta) = \cdots = r_{j_l}(\zeta) = 0\}$

(iii) pour tout $I = (j_1, \ldots, j_l)$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq N$, et tout $(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_l})$ famille de réels positifs tels que $\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_l} = 1$, la forme de Levi de l'application $\lambda_{j_1} r_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_l} r_{j_l}$ admet au moins $q+1$ valeurs propres strictement positives en tout point de U

On pose $W = U \setminus D$. Soit $\xi \in \partial D$, on s'intéresse à la résolution de $\bar\partial$ sur $W \cap B(\xi, R)$ pour $R > 0$ assez petit. Comme dans le cas q-concave, on obtient un résultat de résolution avec réduction du rayon.



Le théorème obtenu généralise le Corollaire 0.2 dans [L-T/Le 2], qui donne aussi une résolution sur ce type d'ouvert. C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer ont obtenu en effet des résultats pour des formes continues, avec des solutions continues, mais sans régularité jusqu'au bord de W.
Par ailleurs, H. Grauert, dans [Gr], a obtenu une résolution plus globale sans réduction du domaine pour des formes lisses définies sur W mais en supposant que les applications $r_1, \ldots, r_N$ vérifient la condition (iii') suivante à la place de la condition (iii) :

(iii') Il existe un sous-espace fixé T de $\mathbb{C}^n$ de dimension $q+1$ tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, la forme de Levi de r_j est définie positive sur T en tout point de U.

Sous cette hypothèse, il a montré qu'il existe une base de voisinages de Stein V de $\xi \in \partial D$ telle que si f est définie sur $W \cap V$, il existe u telle que $\bar\partial u = f$ sur $W \cap V$.

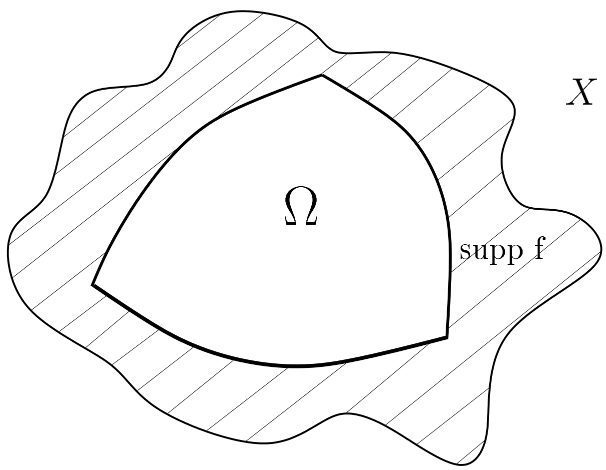
La deuxième application est un résultat global, on se place dans une variété complexe X et on considère un domaine Ω qui est q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, (voir la Définition 3.2.3). On suppose de plus que X possède certaines propriétés d'exhaustion par rapport à Ω.
En effet, on suppose que pour tout voisinage V de $\overline{\Omega}$, il existe un fermé K avec $\Omega \subset\subset K \subset V$ et une fonction ρ définie sur un voisinage U de $\overline{X \setminus K}$ telle que ρ est une fonction d'exhaustion et telle que pour tout $\xi \in U$ et tout

système de coordonnées holomorphe au voisinage de ξ, la matrice de Levi de ρ possède $q+1$ valeurs propres strictement positives.

Ces hypothèses sont en particulier réalisées dans le cas suivant (plus simple que le cadre réel du résultat obtenu dans le Chapitre 3) :
$\Omega \subset\subset X$ est un ouvert tel qu'il existe U, voisinage de $\overline{X \setminus \Omega}$ dans X et des applications $\rho_1, \dots, \rho_N$ définies sur U et à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que :

1. $\Omega = \bigcap_{i=1}^N \{\rho_i < 0\}$;
2. $d\rho_1 \wedge \cdots \wedge d\rho_N \neq 0$ sur un voisinage de $\partial\Omega$;
3. pour tout $\xi \in U$, pour toute combinaison linéaire $\rho_\lambda := \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_N\rho_N$, à coefficients positifs avec $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, des applications $\rho_1, \dots, \rho_N$, et pour tout système de coordonnées holomorphe au voisinage de ξ, la matrice de Levi de ρ_λ admet $(q+1)$ valeurs propres positives.

On obtient alors le résultat suivant : soit f une $(0,r)$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{X \setminus \Omega}$, à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe E sur X avec $1 \leq r \leq q-1$ ou $1 \leq r \leq q$ si $q \leq n-2$. Alors si f est à support compact dans $\overline{X \setminus \Omega}$ et $\bar\partial$-fermée, il existe u de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{X \setminus \Omega}$, à support compact dans $\overline{X \setminus \Omega}$ telle que $\bar\partial u = f$.



On peut trouver une démonstration de ce résultat dans [He/Le 2] pour le cas des domaines lisses ($N = 1$) et sans régularité jusqu'au bord. Par ailleurs, ce théorème a été démontré par C. Laurent-thiébaut et J. Leiterer dans [L-T/Le 1] pour un domaine lisse ($N = 1$) avec régularité jusqu'au bord pour des formes de classe $\mathcal{C}^k$. Dans ce travail, la méthode employée est différente de celle utilisée dans [L-T/Le 1], on utilise une méthode du type «méthode des bosses» de H. Grauert.

Enfin, ce résultat conduit à la démonstration d'un théorème de séparation analogue au résultat obtenu par A. Andreotti et E. Vesentini en 1965.

Ce théorème permet alors d'affirmer que le groupe de cohomologie de degré $(0,q)$ sur $\overline{X \setminus \Omega}$ est séparé, il s'agit du Théorème 3.2.11.
Dans [An/Ve], A. Andreotti et E. Vesentini ont obtenu ce résultat pour un domaine à bord lisse ($N = 1$) et sans régularité jusqu'au bord de Ω. Plus tard, C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer ont démontré le théorème avec régularité $\mathcal{C}^k$ jusqu'au bord, toujours pour un domaine à bord lisse, (voir [L-T/Le 1]). Le résultat présenté ici concerne les formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ jusqu'au bord sur le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux (avec $N \geq 1$).

• Le dernier chapitre présente des résultats globaux d'annulation et de finitude pour les groupes de cohomologie du complexe de Cauchy-Riemann tangentiel sur une sous-variété CR générique q-concave en codimension quelconque. Ils sont déduits des résultats du Chapitre 2 en mettant en place une méthode des bosses de Grauert.
Il s'agit ici de généraliser la théorie d'Andreotti-Grauert établie en 1962 pour les variétés complexes q-convexes et q-concaves au cas des variétés CR.
Dans [An/Gr], A. Andreotti et H. Grauert ont utilisé principalement la théorie des faisceaux analytiques cohérents, mais on peut en trouver une démonstration utilisant le point de vu des représentations intégrales dans [He/Le 2]. Dans le cas des hypersurfaces, elle a été établie par C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer en 1993 dans [L-T/Le 1] dans le cas continu avec régularité jusqu'au bord. Il faut aussi noter que certains des résultats, en particulier les Théorèmes 4.1.13 et 4.2.9, qui présentent l'annulation ou la finitude de la cohomologie sur un domaine D présentant de bonnes propriétés de q-convexité ou de q-concavité, ont été obtenus dans le cas de la codimension quelconque pour des formes lisses par C.D. Hill et M. Nacinovich dans [Hi/Na] et [Hi/Na 2] en 1993 et 1995 mais sans résultat de régularité jusqu'au bord.

Chapitre 1

Résolution locale de l'équation de Cauchy-Riemann pour des domaines à coins dans $\mathbb{C}^n$

Le but de ce chapitre est l'étude de la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann pour des formes différentielles définies sur des domaines à coins q-convexes locaux d'une part (voir la Définition 1.3.1) et des domaines à coins q-concaves locaux d'autre part (voir la Définition 1.4.1). En travaillant avec des noyaux intégraux, on obtient des estimations $\mathcal{C}^k$ jusqu'au bord.

Définition 1.0.1 *Une collection $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ est appelée* configuration q-convexe *(resp.* configuration q-concave*) de classe $\mathcal{C}^d$ dans $\mathbb{C}^n$ avec $d \geq 2$ (resp. $d \geq 3$), si $U \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine convexe et $\rho_1, \ldots, \rho_N$ sont des applications à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^d$ sur U vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $E = \{z \in U \big| \rho_1(z) = \cdots = \rho_N(z) = 0\} \neq \varnothing$.

(ii) $d\rho_1(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_N(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in U$.

(iii) *Pour tout $I = (j_1, \ldots, j_l) \subset \{1, \ldots, N\}$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq N$, et toute famille $(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_l})$ de réels positifs tels que $\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_l} = 1$, la forme de Levi de l'application $\lambda_{j_1}\rho_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_l}\rho_{j_l}$ admet au moins $q+1$ valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) en tout point de U.*

On peut maintenant donner les deux théorèmes principaux de ce chapitre. Le Théorème 1.0.2 et le Théorème 1.0.3 énoncent respectivement les résultats pour des domaines définis par des configurations q-convexes et q-concaves. Dans ces énoncés, on peut remplacer les domaines D_R par des domaines à coins q-convexes locaux, respectivement q-concaves locaux, qui sont plus généraux. Cependant, les Définitions 1.3.1 et 1.4.1 étant plus techniques et moins explicites que la définition ci-dessus, on a préféré énoncer les théorèmes de la façon suivante :

Théorème 1.0.2 *Supposons que $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ est une configuration q-convexe de classe $\mathcal{C}^d$ dans $\mathbb{C}^n$, avec $d \geq 2$.*
Pour tout $\xi \in E$, il existe $R > 0$, que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ (ce qui entraîne de petites perturbations de ξ), tel que si on note $G = \cap_{i=1}^N \{z \in U | \rho_i(z) < 0\}$ et $D_R = G \cap B(\xi, R)$, alors :
(i) Si $n - q \leq r \leq n$, il existe un opérateur linéaire

$$R_r : \mathcal{C}^0_{0,r}(\overline{D_R}) \to \mathcal{C}^0_{0,r-1}(D_R)$$

tel que si f est une $(0, r)$-forme différentielle sur D_R, continue sur $\overline{D_R}$ avec $\bar\partial f = 0$ on a :

1. *$\bar\partial R_r f = f$ sur D_R.*
2. *Si $f \in \mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{D_R})$, $s \in \mathbb{N}^*$, pour tout $0 \leq \delta_0 < \frac{1}{2}$:*

$$\|R_r f\|_{s-1+\delta_0, D_R} \leq C_{\delta_0} \|f\|_{s, D_R}$$

Théorème 1.0.3 *Supposons que $d \geq 3$ et que $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ est une configuration q-concave de classe $\mathcal{C}^d$ dans $\mathbb{C}^n$.*
Pour tout $\xi \in E$, il existe $R > 0$, que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$, tel que si on note $G = \cap_{i=1}^N \{z \in U | \rho_i(z) < 0\}$ et $D_R = G \cap B(\xi, R)$, alors :
(i) Si $1 \leq r \leq q - N$, il existe $R' > 0$ avec $R' < R$ que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ et un opérateur linéaire

$$T_r : \mathcal{C}^0_{0,r}(\overline{D_R}) \to \mathcal{C}^0_{0,r-1}(D_{R'})$$

tels que si f est une $(0, r)$-forme différentielle sur D_R, continue sur $\overline{D_R}$ avec $\bar\partial f = 0$ on a :

1. *$\bar\partial T_r f = f$ sur $D_{R'}$.*
2. *Si $f \in \mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{D_R})$, $s \in \{1, \ldots, d-2\}$, pour tout $0 \leq \delta_0 < \frac{1}{2}$:*

$$\|T_r f\|_{s-1+\delta_0, D_{R'}} \leq C_{\delta_0} \|f\|_{s, D_R}$$

(ii) Il existe un opérateur linéaire

$$T_{q-N+1} : \mathcal{C}^0_{0,q-N+1}(\overline{D_R}) \to \mathcal{C}^0_{0,q-N}(D_R)$$

tel que si f est une $(0, q-N+1)$-forme différentielle sur D_R, continue sur $\overline{D_R}$ avec $\bar\partial f = 0$ telle que $\operatorname{supp} f \subset\subset \overline{G} \cap B(\xi, R)$, vérifiant la condition :
(C1) *Si $q = n - 1$,*

$$\int_{S_{(1,\ldots,N)}} f(\zeta) \wedge g(\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n = 0, \text{ pour tout } g \in \mathcal{O}(B(\xi, R)).$$

alors :

1. *$\bar\partial T_{q-N+1} f = f$ sur D_R.*
2. *Si $f \in \mathcal{C}^s_{0,q-N+1}(\overline{D_R})$, $s \in \{1, \ldots, d-2\}$, alors pour tout $0 \leq \delta_0 < \frac{1}{2}$:*

$$\|T_{q-N+1} f\|_{s-1+\delta_0, D_R} \leq C_{\delta_0} \|f\|_{s, D_R}$$

1.1 Préliminaires et notations

1.1.1 – Pour $z \in \mathbb{C}^n$, on note $z_1, \ldots, z_n$ les coordonnées complexes canoniques de z. Pour $(z, w) \in \mathbb{C}^n$, on note $< z, w >= z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n$ et $|z| =< z, z >^{\frac{1}{2}}$.

1.1.2 – Si ρ est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, on note $\mathcal{L}_\rho(\zeta)$ la forme de Levi de ρ au point $\zeta \in U$, on note de plus $F_\rho(z,\zeta)$ le polynôme de Levi de ρ au point $\zeta \in U$ appliqué en $z \in \mathbb{C}^n$, i.e. pour tout $\zeta \in U$, tout $z \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\rho^{\mathbb{C}^n}(\zeta)(z) &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_j \partial \zeta_k} \overline{z}_j z_k \\
F_\rho^{\mathbb{C}^n}(\zeta, z) &= 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(\zeta)}{\partial \zeta_j}(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k}(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k)
\end{aligned}$$

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on notera $\mathcal{L}_\rho(\zeta)(z)$ et $F_\rho(\zeta, z)$ à la place de $\mathcal{L}_\rho^{\mathbb{C}^n}(\zeta)(z)$ et $F_\rho^{\mathbb{C}^n}(\zeta, z)$.
Alors d'après la formule de Taylor à l'ordre 2, on a

$$\operatorname{Re} F_\rho(\zeta, z) = \rho(\zeta) - \rho(z) + \mathcal{L}_\rho(\zeta)(\zeta - z) + o(|\zeta - z|^2) \tag{1.1.1}$$

1.1.3 – Pour $h \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{aligned}
P(h) &= \left\{ I = (j_1, \ldots, j_l) \middle| 1 \leq l \leq h, \forall i \in \{1, \ldots, l\}, j_i \in \{1, \ldots, h\} \right\} \\
P'(h) &= \left\{ I = (j_1, \ldots, j_l) \middle| 1 \leq l \leq h, 1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq h \right\} \\
P'(h, *) &= \left\{ I = (j_1, \ldots, j_l) \middle| (j_1, \ldots, j_{l-1}) \in P'(h), j_l = * \right\}
\end{aligned}$$

1.1.4 – Pour $I \in P'(N+1)$ et $0 \leq \delta \leq 1$ on note :

$$\begin{aligned}
\Delta_I &= \left\{ (\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}) \in [0,1]^{N+2} \middle| \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k = 1, \lambda_i = 0 \ \forall i \notin I \right\} \\
\Delta_{0I} &= \left\{ (\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}) \in [0,1]^{N+2} \middle| \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k = 1, \lambda_i = 0 \ \forall i \notin I \cup \{0\} \right\} \\
\Delta_{0I}^\delta &= \left\{ (\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}) \in \Delta_{0I} \middle| 0 \leq \lambda_0 \leq \delta \right\}
\end{aligned}$$

1.1.5 – Si $I = (j_1, \ldots, j_l)$ est une collection ordonnée d'entiers, et si $\nu \in \{1, \ldots, l\}$, on note $I(\widehat{\nu}) = (j_1, \ldots, j_{\nu-1}, j_{\nu+1}, \ldots, j_l)$.
Si $\lambda \in \Delta_{0(1,\ldots,N+1)}$, avec $\lambda_0 \neq 1$, on note

$$\overset{\circ}{\lambda} = \left(0, \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0}, \ldots, \frac{\lambda_{N+1}}{1 - \lambda_0} \right) \in \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$$

si $\lambda \in \Delta_{0(1,\ldots,N+1)}$, avec $\lambda_{N+1} \neq 1$, on note

$$\overset{*}{\lambda} = \left(\frac{\lambda_0}{1-\lambda_{N+1}}, \ldots, \frac{\lambda_N}{1-\lambda_{N+1}}, 0\right) \in \Delta_{0(1,\ldots,N)}$$

et si $\lambda \in \Delta_{0(1,\ldots,N+1)}$, avec $\lambda_{N+1} + \lambda_0 \neq 1$, on pose

$$\overset{\circ *}{\lambda} = \left(0, \frac{\lambda_1}{1-\lambda_0-\lambda_{N+1}}, \ldots, \frac{\lambda_N}{1-\lambda_0-\lambda_{N+1}}, 0\right) \in \Delta_{(1,\ldots,N)}$$

1.1.6 – Pour $j \in \{0, \ldots, N+1\}$, on note $\tau^j = (\tau_0^j, \ldots, \tau_{N+1}^j) \in \Delta_{0(1,\ldots,N+1)}$ défini par $\tau_j^j = 1$.

1.1.7 – Soit χ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $\chi(t) = 0$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{8}$ et $\chi(t) = 1$ si $\frac{1}{4} \leq t \leq 1$.

1.1.8 – Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$, on dit que D est une *intersection de classe* $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, s'il existe un voisinage $U_{\overline{D}}$ de $\overline{D}$ et un nombre fini de fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^k$, $\rho_1, \ldots, \rho_{N+1}$ définies sur un voisinage de $U_{\overline{D}}$ telles que

$$D = \left\{z \in U_{\overline{D}} \middle| \forall i \in \{1, \ldots, N+1\}, \rho_i(z) < 0\right\}$$

et telles que pour tout $I = (j_1, \ldots, j_l)$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq N+1$:
$d\rho_{j_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_{j_l}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \{\zeta \in \partial D | \rho_{j_1}(\zeta) = \cdots = \rho_{j_l}(\zeta) = 0\}$.
On dit alors que $(U_{\overline{D}}, \rho_1, \ldots, \rho_{N+1})$ est un *cadre de classe* $\mathcal{C}^k$ pour D.

1.1.9 – Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ une intersection de classe $\mathcal{C}^1$, pour laquelle on pose $\rho_* = \rho_{N+1}$. Pour $I = (j_1, \ldots, j_l) \in P(N+1)$ on pose :

$$S_I = \{z \in \partial D | \forall i \in I, \rho_i(z) = 0\}$$

si les éléments de I sont deux à deux distincts, $S_I = \varnothing$ sinon.
On oriente S_I par récurrence sur le nombre d'éléments de I de manière antisymétrique en les éléments de I, de la façon suivante :
si $j \in \{1, \ldots, N+1\}$, S_j est orienté de manière à avoir

$$\partial D = \sum_{j=1}^{N+1} S_j \tag{1.1.2}$$

si S_I est orienté, on oriente les S_{Ij} pour avoir

$$\partial S_I = \sum_{j=1}^{N+1} S_{Ij} \tag{1.1.3}$$

où, si $I=(j_1,\dots,j_l)$, S_{Ij} désigne $S_{(j_1,\dots,j_l,j)}$.
Si $I=(j_1,\dots,j_l)\in P'(N+1)$ contient l'indice $*$, i.e. $j_l=N+1$, alors on notera parfois :

$$S_I = S_{J*} \text{ avec } J=(j_1,\dots,j_{l-1})$$

1.1.10 – Soit $D\subset\subset\mathbb{C}^n$ une intersection de classe $\mathcal{C}^1$, pour laquelle on pose $\rho_*=\rho_{N+1}$. On définit pour $\varepsilon_0>0$ assez petit :

$$D_0=\left\{z\in U_{\overline{D}}\middle|\forall i\in\{1,\dots,N+1\},\rho_i(z)<\varepsilon_0\right\}$$

Si $\varepsilon_0>0$ est assez petit, D_0 est une intersection de classe $\mathcal{C}^1$ et on pose alors, pour $I=(j_1,\dots,j_l)\in P(N+1)$:

$$S_I^0=\{z\in\partial D_0|\forall i\in I,\rho_i(z)=\varepsilon_0\}$$

$$R_I=\{z\in U_{\overline{D}}|\forall i\in I, 0\le\rho_{j_1}(z)=\dots=\rho_{j_l}(z)\le\varepsilon_0,\ \rho_j(z)\le\rho_{j_1}(z) \text{ si } j\notin I\}$$

si les éléments de I sont deux à deux distincts, $S_I^0=R_I=\varnothing$ sinon.
On oriente les S_I^0 comme les S_I et les R_I par récurrence sur le nombre d'éléments de I de manière antisymétrique en les éléments de I, de la façon suivante :
si $j\in\{1,\dots,N+1\}$, R_j est orienté de manière à avoir

$$\overline{D_0}\setminus D=\sum_{j=1}^{N+1}R_j \tag{1.1.4}$$

si R_I est orienté, on oriente les R_{Ij} pour avoir

$$\partial R_I=-\sum_{j=1}^{N+1}R_{Ij}-S_I+S_I^0 \tag{1.1.5}$$

où, si $I=(j_1,\dots,j_l)$, R_{Ij} désigne $R_{(j_1,\dots,j_l,j)}$.

On a alors la relation suivante :

$$\begin{aligned}\partial\left(\sum_{I\in P'(N+1)}(-1)^{|I|}R_I\times\Delta_{0I}\right)&=-\sum_{I\in P'(N+1)}R_I\times\Delta_I+(\overline{D}_0\setminus D)\times\Delta_0\\&+\sum_{I\in P'(N+1)}(-1)^{|I|}S_I^0\times\Delta_{0I}-\sum_{I\in P'(N+1)}(-1)^{|I|}S_I\times\Delta_{0I}\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

1.1.11 – Soient V un ouvert borné de $\mathbb{C}^n\equiv\mathbb{R}^{2n}$, $s\in\mathbb{N}$ et $0<\lambda<1$. Pour $\alpha\in\mathbb{N}^{2n}$, $(x_1,\dots,x_{2n})$ un point de V, on note

$$|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_{2n}$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{2n}^{\alpha_{2n}}}$$

$\mathcal{C}^s_{p,q}(V)$ désigne l'espace des (p,q)-formes différentielles telles que chaque coefficient est s fois continûment dérivable sur V et $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(V)$ celui des (p,q)-formes différentielles telles que chaque coefficient est continûment dérivable à tout ordre. De plus $\mathcal{C}^s_{p,q}(\overline{V})$ désigne l'espace des (p,q)-formes différentielles telles que chaque coefficient est s fois continûment dérivable sur un voisinage de $\overline{V}$ et $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(\overline{V})$ celui des (p,q)-formes différentielles telles que chaque coefficient est continûment dérivable à tout ordre sur un voisinage de $\overline{V}$. Soit $f : V \to \mathbb{C}$, une application, on note :

$$\|f\|_{s,V} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{2n} \\ |\alpha| \leq s}} \sup_{x \in V} |D^\alpha f(x)|$$

$$\|f\|_{s+\lambda,V} = \|f\|_{s,V} + \sup \left\{ \left| \frac{D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)}{|x-y|^\lambda} \right|,\ (x,y) \in V^2,\ \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, |\alpha| = s \right\}$$

Pour les formes différentielles sur V, on définit ces normes comme la borne supérieure sur tous les coefficients des normes précédentes.

1.1.12 – Si D est un domaine borné à bord $\mathcal{C}^t$ par morceaux, $t \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, inclus dans $\mathbb{C}^n$, si $\mathcal{V}$ est un voisinage de $\overline{D}$, il existe un opérateur linéaire E, appelé *opérateur de Seeley*, voir [Se], tel que, si α est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ alors $E\alpha$ est $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\mathbb{C}^n$ avec $E\alpha \equiv \alpha$ sur $\overline{D}$ et supp $(\mathrm{E}\alpha) \subset \mathcal{V}$.
De plus, si $\alpha \in \mathcal{C}^s_{(0,r)}(\overline{D})$ alors $E\alpha \in \mathcal{C}^s_{(0,r)}(\mathcal{V})$ et il existe une constante C_s telle que

$$\|E\alpha\|_{s,\mathcal{V}} \leq C_s \|\alpha\|_{s,D}$$

1.2 Opérateurs solutions

Soit D une intersection de classe $\mathcal{C}^2$, définie avec les notations du paragraphe 1.1.8. $\mathfrak{Diag}$ désigne la diagonale de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.
Supposons qu'il existe une fonction

$$\begin{aligned} \omega\ : \Big(\Big(\big(U_{\overline{D}} \setminus D\big) \times \overline{D}\Big) \setminus \mathfrak{Diag}\Big) \times \Delta_{0(1,\dots,N+1)} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\zeta, z, \lambda) &\longmapsto (\omega_1(\zeta,z,\lambda), \dots, \omega_n(\zeta,z,\lambda)) \end{aligned}$$

telle que :

1. ω est $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à λ.
2. Pour tout $(\zeta, z) \in \Big(\big(U_{\overline{D}} \setminus D\big) \times \overline{D}\Big) \setminus \mathfrak{Diag}$, pour tout $\lambda \in \Delta_{0(1,\dots,N+1)}$

$$< \omega(\zeta,z,\lambda), \zeta - z >= 1$$

Une telle application ω sera appelée *section de Leray* associée à D. On suppose de plus :

3. Pour tout $(\zeta, z) \in \big((U_{\overline{D}} \setminus D) \times \overline{D}\big) \setminus \mathfrak{Diag}$,

$$\omega(\zeta, z, (1, 0, \ldots, 0)) = \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^2}$$

Remarque. Si, pour $I \in P'(N+1)$ et $\lambda \in \Delta_I$, on pose $\omega_I(\zeta, z, \lambda) = \omega(\zeta, z, \lambda)$, alors, on retrouve la définition de sections de Leray donnée dans [L-T/Le 1].

Nous allons maintenant suivre la construction de R.M. Range et Y.T. Siu dans [Ra/Si], voir aussi [Mi] et [Mi/Pe], et utiliser leurs conventions de calculs (i.e. dz_ν commute avec $d\zeta_\mu$ ainsi qu'avec $d\lambda_j$), pour obtenir un opérateur linéaire donnant une solution à l'équation de Cauchy-Riemann pour certains types de domaines.
Posons, lorsque cela est défini

$$\eta(\zeta, z, \lambda) = < \omega(\zeta, z, \lambda), d\zeta >$$

et

$$D_{n,r}(\zeta, z, \lambda) = \frac{(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \binom{n-1}{r} \eta \bigwedge^{r} \bar{\partial}_z \eta \bigwedge^{n-r-1} \bar{\partial}_{\zeta,\lambda} \eta \qquad (1.2.1)$$

où $\bar{\partial}_{\zeta,\lambda} = \bar{\partial}_\zeta + d_\lambda$.

Remarque. Si $\lambda \in \Delta_0$, le noyau défini ci-dessus multiplié par $(-1)^r$ est la partie de bidegré $(0, r)$ en z du noyau de Bochner-Martinelli tel qu'il est défini par exemple dans [He/Le 2].

Nous allons maintenant énoncer la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman avec les notations utilisées ci-dessus. Le lecteur pourra par exemple en trouver la démonstration dans [Ra/Si].

Proposition 1.2.1 [formule de Bochner-Martinelli-Koppelman] *Soit f une $(0, r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar{\partial} f$ est continue sur $\overline{D}$. Alors*

$$\begin{aligned} f(z) = \int_{\partial D \times \Delta_0} f(\zeta) \wedge D_{n,r}(\zeta, z, \lambda) - \int_{D \times \Delta_0} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge D_{n,r}(\zeta, z, \lambda) \\ - \bar{\partial}_z \int_{D \times \Delta_0} f(\zeta) \wedge D_{n,r-1}(\zeta, z, \lambda) \end{aligned}$$

En utilisant un raisonnement classique (voir par exemple [Ra/Si]), on peut alors établir la formule suivante : si f est une $(0, r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ avec $\bar\partial f$ continue sur $\overline{D}$

$$\begin{aligned}
f(z) = &-\int_{D\times\Delta_0} \bar\partial f \wedge D_{n,r} - \sum_{I\in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \int_{S_I\times\Delta_{0I}} \bar\partial_\zeta f \wedge D_{n,r} \\
&-\bar\partial_z \int_{D\times\Delta_0} f \wedge D_{n,r-1} - \sum_{I\in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \bar\partial_z \int_{S_I\times\Delta_{0I}} f \wedge D_{n,r-1} \\
&+ \sum_{I\in P'(N+1)} \int_{S_I\times\Delta_I} f \wedge D_{n,r}
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Posons ainsi pour h $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar\partial h$ est continue sur $\overline{D}$

$$\widetilde{T}_r h(z) = -\int_{D\times\Delta_0} h \wedge D_{n,r-1} - \sum_{I\in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \int_{S_I\times\Delta_{0I}} h \wedge D_{n,r-1}$$

$$L_r h(z) = \sum_{I\in P'(N+1)} \int_{S_I\times\Delta_I} h \wedge D_{n,r}$$

Ainsi, si f est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ avec $\bar\partial f$ continue sur $\overline{D}$

$$\begin{array}{ll}
f(z) = \bar\partial \widetilde{T}_r f(z) + \widetilde{T}_{r+1}(\bar\partial f)(z) + L_r f(r) & \text{si } r \geq 1 \\
f(z) = \widetilde{T}_1(\bar\partial f)(z) + L_0 f(z) & \text{si } r = 0
\end{array} \tag{1.2.3}$$

Cette formule est appelée *formule de Cauchy-Fantappié*, nous renvoyons le lecteur à [L-T/Le 1] pour les commentaires d'ordre historique sur cette équation.

1.3 Le cas q-convexe

Le but de cette partie est de démontrer le Théorème 1.0.2. On note $G(n,q)$ la variété grassmannienne complexe des sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ de dimension q et $MO(n,q)$ la variété complexe de toutes les matrices complexes $n \times n$ qui définissent une projection orthogonale de $\mathbb{C}^n$ sur un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ de dimension q.

Définition 1.3.1 *On dit que $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ est un* domaine à coins q-convexe local, $0 \leq q \leq n-1$ *si D est une intersection de classe $\mathcal{C}^2$ (voir le paragraphe 1.1.8) pour laquelle on peut trouver un cadre $(U_{\overline{D}}, \rho_1, \ldots, \rho_L)$ vérifiant la propriété suivante :*
Il existe une application $\mathcal{C}^\infty$, $Q : \Delta_{(1,\ldots,L)} \to MO(n, n-q-1)$ et des constantes α, $A > 0$ telles que

$$\operatorname{Re} F_{\rho_\lambda}(\zeta,z) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \alpha|\zeta - z|^2 - A|Q(\lambda)(\zeta - z)|^2$$

pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_L) \in \Delta_{(1,\ldots,L)}$, $\rho_\lambda := \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_L\rho_L$ et $(\zeta, z) \in U^2_{\overline{D}}$.

Remarque. Cette définition est similaire à la Définition 2.3 dans [L-T/Le 1], avec une condition de transversalité plus faible donnée par la définition d'une intersection de classe $\mathcal{C}^2$ (voir le paragraphe 1.1.8). En effet, dans ce travail, on a besoin que les sous-variétés S_I, R_I, et S_I^0, pour un réel $\varepsilon > 0$ assez petit, soient lisses, et cette condition est suffisante pour cela. On changera de la même manière la définition des domaines à coins q-concaves (voir la Définition 1.4.1). Ces changements permettent d'avoir éventuellement des points critiques pour les applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ à l'intérieur de D.

Soit $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ une configuration q-convexe de classe $\mathcal{C}^d$, $d \geq 2$, dans $\mathbb{C}^n$. Soit $\xi \in E$, pour $R > 0$ on note $\rho_*(z) = \rho_{N+1}(z) = |\xi - z|^2 - R^2$ et

$$D_R = \bigcap_{j=1}^{N} \{z \in U | \rho_i(z) < 0\} \cap B(\xi, R)$$

Si R' assez petit, alors pour tout $R < R'$, D_R est une intersection de classe $\mathcal{C}^d$ avec $U_{\overline{D_R}} = B(\xi, R')$.
Par ailleurs, l'application ρ_* est de classe $\mathcal{C}^\infty$, sa forme de Levi est définie positive en tout point de U, de plus, elle ne dépend pas de R. Donc, pour tout $\lambda \in \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$, la forme de Levi de

$$\rho_\lambda = \lambda_1 \rho_1 + \cdots + \lambda_{N+1} \rho_{N+1}$$

admet q+1 valeurs propres strictement positives en tout point de U et ne dépend pas de R.

On peut alors énoncer la proposition suivante qui est démontrée dans [L-T/Le 1] (il s'agit du Lemme 2.4) :

Proposition 1.3.2 *Si $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ est une configuration q-convexe de classe $\mathcal{C}^d$, $d \geq 2$, dans $\mathbb{C}^n$ et si $\xi \in E$.*
Alors, il existe $R_0 > 0$, que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ tel que pour tout $R > 0$ avec $R \leq R_0$, D_R est un domaine à coins q-convexe local. De plus les constantes A et α données par la Définition 1.3.1, peuvent être choisies indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \ldots, \rho_N, \rho_{N+1}$.

1.3.1 Construction d'une section de Leray associée à un domaine à coins q-convexe local

On reprend maintenant les étapes d'une construction classique d'une section de Leray associée à D, où D est un domaine à coins q-convexe local et $(U_{\overline{D}}, \rho_1, \ldots, \rho_{N+1})$ le cadre donné par la Définition 1.3.1, cette construction est détaillée en particulier dans [L-T/Le 1].

Comme les applications $\rho_1, \ldots, \rho_{N+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$, il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, a_{kj}^ν, $(1 \leq \nu \leq N+1,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n)$ sur $U_{\overline{D}}$ telles que

$$\left| a_{kj}^\nu(\zeta) - \frac{\partial^2 \rho_\nu(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} \right| \leq \frac{\alpha}{2n^2}, \quad \forall \zeta \in U_{\overline{D}}$$

On pose pour tout $\lambda \in \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$, $a_{kj}^\lambda = \lambda_1 a_{kj}^1 + \cdots + \lambda_{N+1} a_{kj}^{N+1}$, alors

$$\left| a_{kj}^\lambda(\zeta) - \frac{\partial^2 \rho_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} \right| \leq \frac{\alpha}{2n^2}, \quad \forall \zeta \in U_{\overline{D}}$$

Posons, pour $(\zeta, z) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^n$

$$\widetilde{F}_{\rho_\lambda}(\zeta, z) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta_j}(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^n a_{kj}^\lambda(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k)$$

D'après la Définition 1.3.1, pour tout $(\zeta, z) \in U_{\overline{D}}^2$, on a

$$\operatorname{Re} \widetilde{F}_{\rho_\lambda}(\zeta, z) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 - A|Q(\lambda)(\zeta - z)|^2$$

On note $Q(\lambda)^{kj}$ les coefficients de la matrice $Q(\lambda)$: $Q(\lambda) = \left(Q(\lambda)^{kj}\right)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ (k est l'indice de la colonne).
On pose alors pour $(\zeta, z, \lambda) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^n \times \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$:

$$\begin{cases} w_j(\zeta, z, \lambda) = 2\frac{\partial \rho_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta_j} - \sum_{k=1}^n a_{kj}^\lambda(\zeta)(\zeta_k - z_k) + A \sum_{k=1}^n \overline{Q(\lambda)^{kj}(\zeta_k - z_k)} \\ w(\zeta, z, \lambda) = (w_1(\zeta, z, \lambda), \ldots, w_n(\zeta, z, \lambda)) \\ \varphi(\zeta, z, \lambda) = < w(\zeta, z, \lambda), \zeta - z > \end{cases}$$

On a, pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^n \times \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$,

$$\varphi(\zeta, z, \lambda) = \widetilde{F}_{\rho_\lambda}(\zeta, z) + A|Q(\lambda)(\zeta - z)|^2$$

et si $(\zeta, z, \lambda) \in U_{\overline{D}}^2 \times \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$

$$\operatorname{Re} \varphi(\zeta, z, \lambda) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 \tag{1.3.1}$$

En particulier, $\varphi(\zeta, z, \lambda)$ n'est pas nul lorsque
$(\zeta, z, \lambda) \in \left(\left(U_{\overline{D}} \setminus D\right) \times \overline{D}\right) \setminus \mathfrak{Diag} \times \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$.

Avec les notations des paragraphes 1.1.5 et 1.1.7, posons, lorsque cela est défini :

$$\omega(\zeta, z, \lambda) = \chi(\lambda_0) \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^2} + (1 - \chi(\lambda_0)) \frac{w(\zeta, z, \mathring{\lambda})}{\varphi(\zeta, z, \mathring{\lambda})} \tag{1.3.2}$$

Alors ω est une section de Leray associée à D suivant la définition donnée dans la partie précédente.

Définition 1.3.3 *Une application f définie sur une variété complexe X est dite s-holomorphe si pour tout point $\zeta \in X$, il existe des coordonnées holomorphes $h_1, \dots, h_n$ dans un voisinage de ζ telles que f soit holomorphe par rapport à $h_1, \dots, h_s$.*

Lemme 1.3.4

1. *Pour tout $(\zeta, \lambda) \in U_{\overline{D}} \times \Delta_{(1,\dots,N+1)}$ fixé, les applications $w(\zeta, z, \lambda)$ et $\varphi(\zeta, z, \lambda)$ sont $(q+1)$-holomorphes en $z \in \mathbb{C}^n$.*
2. *Pour tout $K \in P'(N+1)$ et tout $(\zeta, \lambda) \in (U_{\overline{D}} \setminus D) \times \Delta_K$ fixé, l'application $\omega(\zeta, z, \lambda)$ est $(q+1)$-holomorphe en $z \in D$.*

Démonstration : La démonstration de ce lemme est la même que celle du Lemme 3.3 dans [L-T/Le 1]. □

1.3.2 Retour aux opérateurs solutions

Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine à coins q-convexe local. Soit f une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar{\partial} f$ est continue sur $\overline{D}$.

Proposition 1.3.5

(i) Si $\lambda \in \Delta_{(1,\dots,N+1)}$, et si $s \geq n-q$, alors pour tout $(\zeta, z) \in (U_{\overline{D}} \setminus D) \times D$,

$$D_{n,s}(\zeta, z, \lambda) = 0$$

(ii) Si $\lambda \in \Delta_{(1,\dots,N+1)}$, alors pour tout $(\zeta, z) \in (U_{\overline{D}} \setminus D) \times D$,

$$\bar{\partial}_z D_{n,n-q-1}(\zeta, z, \lambda) = 0$$

Démonstration : D'après le Lemme 1.3.4, $\eta(\zeta, z, \lambda)$ est $(q+1)$-holomorphe en z si $\lambda_0 = 0$ ce qui impose *(i)* et *(ii)*. □

Alors, si $r \geq n-q$, d'après *(i)*, on a :

$$L_r f(z) = \sum_{I \in P'(N+1)} \int_{S_I \times \Delta_I} f \wedge D_{n,r} = 0$$

Donc si f est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar{\partial} f = 0$, avec $r \geq n-q$, on a

$$f = \bar{\partial} \widetilde{T}_r f$$

Nous utilisons maintenant une idée de I. Lieb et R.M. Range voir [Li/Ra], et aussi [Mi] et [Mi/Pe], pour obtenir un noyau de la régularité cherchée. Elle consiste à utiliser l'opérateur de prolongement de Seeley.
Considérons $g \in C^0_{0,r}(D_0)$ avec supp g $\subset\subset$ D$_0$, et posons

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_1 g &= \widetilde{T}_1(g|_D) - \textstyle\sum_{I \in P'(N+1)} \int_{R_I \times \Delta_I} g \wedge D_{n,0} && \text{si } r = 1 \\ \widetilde{R}_r g &= \widetilde{T}_r(g|_D) + \textstyle\sum_{I \in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \bar{\partial} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} g \wedge D_{n,r-2} && \text{si } r \geq 2 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

D'après la proposition précédente, *(ii)*, si $r = 1 \geq n - q$, on a

$$\sum_{I \in P'(N+1)} \bar{\partial} \int_{R_I \times \Delta_I} g \wedge D_{n,0} = 0$$

Donc pour tout $r \geq n - q$, $\widetilde{R}_r g - \widetilde{T}_r g$ est $\bar{\partial}$-fermé.

Si f est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$, on peut la prolonger grâce à l'opérateur de Seeley défini au paragraphe 1.1.12 par une forme à support dans D_0. Ainsi, si on pose $R_r f = \widetilde{R}_r(Ef)$ et si $\bar{\partial} f = 0$ on obtient un autre opérateur solution :

$$\text{si } n - q \leq r \leq n, \quad f(z) = \bar{\partial} R_r f(z) \tag{1.3.4}$$

Par ailleurs, en utilisant la formule de Stokes et l'équation (1.1.6) on montre que si $f \in \mathcal{C}^1_{0,r}(\overline{D})$, $r \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_r(f) = &- \int_{D_0 \times \Delta_0} Ef \wedge D_{n,r-1} + \sum_{I \in P'(N+1)} \int_{R_I \times \Delta_I} Ef \wedge D_{n,r-1} \\
&+ \sum_{I \in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar{\partial}(Ef) \wedge D_{n,r-1} \\
&- \sum_{I \in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \bar{\partial} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} Ef \wedge D_{n,r-2}
\end{aligned}$$

avec $D_{n,-1} := 0$.

Alors, d'après la proposition précédente, si $r \geq n - q$, on a pour tout $I \in P'(N+1)$

$$\int_{R_I \times \Delta_I} Ef \wedge D_{n,r-1} = 0$$

Donc, si $f \in \mathcal{C}^1_{0,r}(\overline{D})$ avec $r \geq n - q$:

$$R_r f(z) = - \int_{D_0 \times \Delta_0} Ef \wedge D_{n,r-1} + \sum_{I \in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar{\partial}(Ef) \wedge D_{n,r-1}$$

Nous allons maintenant commencer le raisonnement qui mènera aux estimations de l'opérateur $R_r f$, pour une forme différentielle $f \in \mathcal{C}^k_{0,r}(\overline{D})$, $k > 0$. Les estimations pour l'opérateur de Bochner-Martinelli-Koppelman étant connues, il reste à voir pour $I \in P'(N+1)$:

$$\int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar{\partial} g \wedge D_{n,r-1}$$

où $g \in \mathcal{C}^k_{0,r}(\overline{D_0})$, pour $k > 0$ et $r > 0$, avec $\bar{\partial} g = 0$ sur D.

1.3.3 Simplification de l'écriture de l'opérateur

Contrairement au cas strictement pseudoconvexe, la section de Leray associée à D ne dépend pas linéairement de λ (voir [Mi] et [Mi/Pe]), on ne peut donc effectuer directement l'intégration en λ. Nous allons ici suivre une idée de C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer, voir [L-T/Le 1], pour majorer l'opérateur (ou ses dérivées). Pour cela, nous devons tout d'abord en donner une expression plus explicite. Soient $I \in P'(N+1)$ et g une $(0,r)$ forme $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{D_0}$.

Comme $\dim R_I = 2n - |I| + 1$ et $\dim \Delta_{0I} = |I|$, la forme que l'on intègre doit être de bidegrés :

$$\begin{aligned} (0, r-1) &\text{ en } z \\ (n, n-|I|+1) &\text{ en } \zeta \\ |I| &\text{ en } \lambda \end{aligned}$$

$\bar{\partial} g$ étant de bidegré $(0, r+1)$ en ζ, la partie de $D_{n,r-1}$ qui entre en compte dans l'intégrale est proportionnelle (indépendamment de z, ζ et λ) à

$$K_I(\zeta,z,\lambda) = \eta(\zeta,z,\lambda) \bigwedge^{r-1} \left(\bar{\partial}_z \eta(\zeta,z,\lambda)\right) \bigwedge^{n-|I|-r} \left(\bar{\partial}_\zeta \eta(\zeta,z,\lambda)\right) \bigwedge^{|I|} \left(d_\lambda \eta(\zeta,z,\lambda)\right)$$

Or

$$\eta(\zeta,z,\lambda) = \chi(\lambda_0) \frac{< \overline{\zeta - z}, d\zeta >}{|\zeta - z|^2} + (1-\chi(\lambda_0)) \frac{< w(\zeta,z,\mathring{\lambda}), d\zeta >}{\varphi(\zeta,z,\mathring{\lambda})}$$

pour simplifier l'écriture, notons : $\mu_0 =< \overline{\zeta - z}, d\zeta >$, $\mu =< w(\zeta,z,\mathring{\lambda}), d\zeta >$ et $\varphi = \varphi(\zeta,z,\mathring{\lambda})$, alors

$$\bar{\partial}_z \eta(\zeta,z,\lambda) = \chi(\lambda_0) \bar{\partial}_z \left(\frac{\mu_0}{|\zeta - z|^2}\right) + (1-\chi(\lambda_0)) \bar{\partial}_z \left(\frac{\mu}{\varphi}\right) \tag{1.3.5}$$

$$\bar{\partial}_\zeta \eta(\zeta,z,\lambda) = \chi(\lambda_0) \bar{\partial}_\zeta \left(\frac{\mu_0}{|\zeta - z|^2}\right) + (1-\chi(\lambda_0)) \bar{\partial}_\zeta \left(\frac{\mu}{\varphi}\right) \tag{1.3.6}$$

$$\begin{aligned} d_\lambda \eta(\zeta,z,\lambda) &= \chi'(\lambda_0) d\lambda_0 \wedge \frac{\mu_0}{|\zeta - z|^2} - \chi'(\lambda_0) d\lambda_0 \wedge \frac{\mu}{\varphi} + (1-\chi(\lambda_0)) d_\lambda \left(\frac{\mu}{\varphi}\right) \\ &= \chi'(\lambda_0) d\lambda_0 \wedge \frac{\mu_0}{|\zeta - z|^2} - \chi'(\lambda_0) d\lambda_0 \wedge \frac{\mu}{\varphi} \\ &\quad + (1-\chi(\lambda_0)) \frac{d_\lambda \mu}{\varphi} + (1-\chi(\lambda_0)) \frac{\mu \wedge d_\lambda \varphi}{\varphi^2} \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

En utilisant le fait que si v est une 1-forme, $v \wedge v = 0$, on peut écrire

$K_I(\zeta,z,\lambda)$ comme une combinaison linéaire de termes de la forme suivante :

$$K_I^1 = (\chi(\lambda_0))^{\alpha_0}\,(1-\chi(\lambda_0))^{\alpha_1-1}\,\chi'(\lambda_0)\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\wedge\left(\bar\partial_z\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)^{k_0}\wedge\left(\bar\partial_z\frac{\mu}{\varphi}\right)^{k_1}$$
$$\wedge\left(\bar\partial_\zeta\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)^{m_0}\wedge\left(\bar\partial_\zeta\frac{\mu}{\varphi}\right)^{m_1}\wedge\left(d\lambda_0\wedge\frac{\mu}{\varphi}\right)\wedge\left(\frac{d_\lambda\mu}{\varphi}\right)^{|I|-1}$$

$$K_I^2 = (\chi(\lambda_0))^{\alpha_0-1}\,(1-\chi(\lambda_0))^{\alpha_1}\,\chi'(\lambda_0)\frac{\mu}{\varphi}\wedge\left(\bar\partial_z\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)^{k_0}\wedge\left(\bar\partial_z\frac{\mu}{\varphi}\right)^{k_1}$$
$$\wedge\left(\bar\partial_\zeta\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)^{m_0}\wedge\left(\bar\partial_\zeta\frac{\mu}{\varphi}\right)^{m_1}\wedge\left(d\lambda_0\wedge\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)\wedge\left(\frac{d_\lambda\mu}{\varphi}\right)^{|I|-1}$$
$$K_I^3 = (\chi(\lambda_0))^{\alpha_0}\,(1-\chi(\lambda_0))^{\alpha_1}\,\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\wedge\left(\bar\partial_z\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)^{k_0}\wedge\left(\bar\partial_z\frac{\mu}{\varphi}\right)^{k_1}$$
$$\wedge\left(\bar\partial_\zeta\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)^{m_0}\wedge\left(\bar\partial_\zeta\frac{\mu}{\varphi}\right)^{m_1}\wedge\left(\frac{\mu\wedge d_\lambda\varphi}{\varphi^2}\right)\wedge\left(\frac{d_\lambda\mu}{\varphi}\right)^{|I|-1}$$
$$K_I^4 = (\chi(\lambda_0))^{\alpha_0}\,(1-\chi(\lambda_0))^{\alpha_1}\,\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\wedge\left(\bar\partial_z\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)^{k_0}\wedge\left(\bar\partial_z\frac{\mu}{\varphi}\right)^{k_1}$$
$$\wedge\left(\bar\partial_\zeta\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)^{m_0}\wedge\left(\bar\partial_\zeta\frac{\mu}{\varphi}\right)^{m_1}\wedge\left(\frac{d_\lambda\mu}{\varphi}\right)^{|I|}$$
$$K_I^5 = (\chi(\lambda_0))^{\alpha_0-1}\,(1-\chi(\lambda_0))^{\alpha_1+1}\,\frac{\mu}{\varphi}\wedge\left(\bar\partial_z\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)^{k_0}\wedge\left(\bar\partial_z\frac{\mu}{\varphi}\right)^{k_1}$$
$$\wedge\left(\bar\partial_\zeta\frac{\mu_0}{|\zeta-z|^2}\right)^{m_0}\wedge\left(\bar\partial_\zeta\frac{\mu}{\varphi}\right)^{m_1}\wedge\left(\frac{d_\lambda\mu}{\varphi}\right)^{|I|}$$

Avec $k_0+k_1=r-1$, $m_0+m_1=n-|I|-r$, $\alpha_0=1+k_0+m_0\geq 1$ et $\alpha_1=k_1+m_1+|I|\geq 1$.
En utilisant à nouveau le fait que si v est une 1-forme alors $v\wedge v=0$, on démontre, voir aussi [Bo] :

Proposition 1.3.6 *Si v est une 1-forme, ψ une fonction qui ne s'annule pas, l un entier et D est un opérateur différentiel d'ordre 1, alors*

$$v\wedge(D\frac{v}{\psi})^l=\frac{v\wedge(Dv)^l}{\psi^l}$$

On note pour $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{N}^3$, $\mathcal{A}(\lambda_0,\alpha,\beta,\gamma)=(\chi(\lambda_0))^\alpha\,(1-\chi(\lambda_0))^\beta\,(\chi'(\lambda_0))^\gamma$.
Dans tous les cas précédents, le coefficient $\mathcal{A}(\lambda_0,\alpha,\beta,\gamma)$ s'annule à l'ordre infini si $\lambda_0>\frac{1}{4}$, on peut donc se restreindre à intégrer sur $R_I\times\Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$. On désigne maintenant par $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\lambda_0)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ en λ_0 sur $[0,1]$ qui s'annule à l'ordre ∞ pour $\lambda_0\geq\frac{1}{4}$.

Ce qui nous permet d'écrire :

$$K_I^1 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \mu \wedge \left(\bar{\partial}_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar{\partial}_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \mu_0\right)^{m_0} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge d\lambda_0 \wedge \left(d_\lambda \mu\right)^{|I|-1}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1}}$$

$$K_I^2 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \mu \wedge \left(\bar{\partial}_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar{\partial}_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \mu_0\right)^{m_0} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge d\lambda_0 \wedge \left(d_\lambda \mu\right)^{|I|-1}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1}}$$

$$K_I^3 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \mu \wedge \left(\bar{\partial}_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar{\partial}_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \mu_0\right)^{m_0} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge d_\lambda\varphi \wedge \left(d_\lambda \mu\right)^{|I|-1}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1+1}}$$

$$K_I^4 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \left(\bar{\partial}_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \mu_0\right)^{m_0}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}} \wedge \left(\bar{\partial}_z \frac{\mu}{\varphi}\right)^{k_1} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \frac{\mu}{\varphi}\right)^{m_1} \wedge \left(\frac{d_\lambda \mu}{\varphi}\right)^{|I|}$$

$$K_I^5 = \mathcal{A}\frac{\mu \wedge \left(\bar{\partial}_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge \left(d_\lambda \mu\right)^{|I|}}{\varphi^{\alpha_1+1}} \wedge \left(\bar{\partial}_z \frac{\mu_0}{|\zeta - z|^2}\right)^{k_0} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \frac{\mu_0}{|\zeta - z|^2}\right)^{m_0}$$

Par ailleurs, $\left(\bar{\partial}_z \frac{\mu}{\varphi}\right)^{k_1} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \frac{\mu}{\varphi}\right)^{m_1} \wedge \left(\frac{d_\lambda \mu}{\varphi}\right)^{|I|}$ est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\frac{(\bar{\partial}_z \mu)^{k_1} \wedge (\bar{\partial}_\zeta \mu)^{m_1} \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{\varphi^{\alpha_1}},$$

$$\frac{\mu \wedge \bar{\partial}_z \varphi \wedge (\bar{\partial}_z \mu)^{k_1-1} \wedge (\bar{\partial}_\zeta \mu)^{m_1} \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{\varphi^{\alpha_1+1}}, \text{si } k_1 \geq 1,$$

$$\frac{\mu \wedge \bar{\partial}_\zeta \varphi \wedge (\bar{\partial}_z \mu)^{k_1} \wedge (\bar{\partial}_\zeta \mu)^{m_1-1} \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{\varphi^{\alpha_1+1}}, \text{si } m_1 \geq 1.$$

Et de la même manière, $\left(\bar{\partial}_z \frac{\mu_0}{|\zeta - z|^2}\right)^{k_0} \wedge \left(\bar{\partial}_\zeta \frac{\mu_0}{|\zeta - z|^2}\right)^{m_0}$ est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\frac{(\bar{\partial}_z \mu_0)^{k_0} \wedge (\bar{\partial}_\zeta \mu_0)^{m_0}}{|\zeta - z|^{2(\alpha_0-1)}},$$

$$\frac{\mu_0 \wedge \bar{\partial}_z(|\zeta - z|^2) \wedge (\bar{\partial}_z \mu_0)^{k_0-1} \wedge (\bar{\partial}_\zeta \mu_0)^{m_0}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}}, \text{ si } k_0 \geq 1,$$

$$\frac{\mu_0 \wedge \bar{\partial}_\zeta(|\zeta - z|^2) \wedge (\bar{\partial}_z \mu_0)^{k_0} \wedge (\bar{\partial}_\zeta \mu_0)^{m_0-1}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}}, \text{ si } m_0 \geq 1.$$

On peut donc écrire K_I comme combinaison linéaire de termes de la forme suivante :

$$I_I^1 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \mu \wedge \left(\bar\partial_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar\partial_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu_0\right)^{m_0} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge d\lambda_0 \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|-1}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1}}$$

$$I_I^2 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \mu \wedge \left(\bar\partial_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar\partial_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu_0\right)^{m_0} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge d_\lambda \varphi \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|-1}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1+1}}$$

$$I_I^3 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \left(\bar\partial_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar\partial_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu_0\right)^{m_0} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1}}$$

$$I_I^4 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \mu \wedge \bar\partial_z\varphi \wedge \left(\bar\partial_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar\partial_z \mu\right)^{k_1-1} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu_0\right)^{m_0} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1+1}}$$

$$I_I^5 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \mu \wedge \bar\partial_\zeta\varphi \wedge \left(\bar\partial_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar\partial_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu_0\right)^{m_0} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu\right)^{m_1-1} \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1+1}}$$

$$I_I^6 = \mathcal{A}\frac{\mu \wedge \left(\bar\partial_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar\partial_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu_0\right)^{m_0} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{|\zeta - z|^{2(\alpha_0-1)}\varphi^{\alpha_1+1}}$$

$$I_I^7 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \mu \wedge \bar\partial_z(|\zeta - z|^2) \wedge \left(\bar\partial_z \mu_0\right)^{k_0-1} \wedge \left(\bar\partial_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu_0\right)^{m_0} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1+1}}$$

$$I_I^8 = \mathcal{A}\frac{\mu_0 \wedge \mu \wedge \bar\partial_\zeta(|\zeta - z|^2) \wedge \left(\bar\partial_z \mu_0\right)^{k_0} \wedge \left(\bar\partial_z \mu\right)^{k_1} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu_0\right)^{m_0-1} \wedge \left(\bar\partial_\zeta \mu\right)^{m_1} \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1+1}}$$

où I_I^4, I_I^5, I_I^7 et I_I^8 ne sont définis respectivement que si $k_1 \geq 1$, $m_1 \geq 1$, $k_0 \geq 1$ et $m_0 \geq 1$.

On désigne maintenant par $f_\nu^s = f_\nu^s(\zeta, z, \lambda)$ une forme différentielle ne dépendant pas de g, de classe $\mathcal{C}^s$ sur $\overline{D_0} \times \overline{D} \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$, de classe $\mathcal{C}^s$ en ζ sur $\overline{D_0}$, réelle analytique suivant z, de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (z, λ) sur $\overline{D} \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$ pour tout ζ fixé, qui s'annule à l'ordre ν en $\zeta = z$.

Remarque. f_ν^s est réelle analytique suivant la variable z donc si D_z^j désigne un opérateur différentiel d'ordre j en z, $D_z^j f_\nu^s = f_{\nu-j}^s$

Alors on peut écrire K_I comme combinaison linéaire de termes de la forme suivante :

$$J_I^1 = \mathcal{A}\frac{\mu \wedge f_1^{d-2}(\zeta, z, \lambda) \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|-1}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1}}$$

$$J_I^2 = \mathcal{A}\frac{\mu \wedge f_1^{d-2}(\zeta, z, \lambda) \wedge d_\lambda \varphi \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|-1}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1+1}}$$

$$J_I^3 = \mathcal{A}\frac{f_1^{d-2}(\zeta, z, \lambda) \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1}}$$

$$J_I^4 = \mathcal{A}\frac{\mu \wedge f_2^{d-2}(\zeta, z, \lambda) \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|}}{|\zeta - z|^{2\alpha_0}\varphi^{\alpha_1+1}}$$

Proposition 1.3.7 *Sur $R_I \times D \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$, on a*

$$\mu \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|-1} = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_t)\subset I\\ 0\leq t\leq |I|}} f_{|I|-t}^{\infty}(\zeta, z, \lambda) \wedge \mu_{\nu_1}(\zeta, z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_t}(\zeta, z) \tag{1.3.8}$$

$$\mu \wedge d_\lambda\varphi \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|-1} = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_t)\subset I\\ 0\leq t\leq |I|}} f_{|I|-t+1}^{d-1}(\zeta, z, \lambda) \wedge \mu_{\nu_1}(\zeta, z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_t}(\zeta, z) + \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_t)\subset I\\ 0\leq t\leq |I|}} f_{|I|-t+2}^{d-1}(\zeta, z, \lambda) \wedge \mu_{\nu_1}(\zeta, z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_t}(\zeta, z) \tag{1.3.9}$$

$$(d_\lambda \mu)^{|I|} = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_t)\subset I\\ 0\leq t\leq |I|}} f_{|I|-t}^{\infty}(\zeta, z, \lambda) \wedge \mu_{\nu_1}(\zeta, z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_t}(\zeta, z) \tag{1.3.10}$$

$$\mu \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|} = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_t)\subset I\\ 0\leq t\leq |I|}} f_{|I|-t+1}^{\infty}(\zeta, z, \lambda) \wedge \mu_{\nu_1}(\zeta, z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_t}(\zeta, z) \tag{1.3.11}$$

Démonstration : Pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in U_{\frac{2}{D}} \times \Delta_{0(1,\dots,N+1)}^{\frac{1}{4}}$:

$$\begin{aligned}\mu(\zeta, z, \mathring{\lambda}) &= \sum_{j=1}^{n} w_j(\zeta, z, \mathring{\lambda})d\zeta_j\\ &= 2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho_{\mathring{\lambda}}(\zeta)}{\partial\zeta_j}d\zeta_j - \sum_{j,k=1}^{n} a_{kj}^{\mathring{\lambda}}(\zeta)(\zeta_k - z_k)d\zeta_j + A\sum_{j,k=1}^{n}\overline{Q(\mathring{\lambda})^{kj}(\zeta_k - z_k)}d\zeta_j\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=1}^{N+1} \overset{\circ}{\lambda}_\nu \mu_\nu(\zeta,z) + A \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\left(Q(\overset{\circ}{\lambda})^{kj} - \sum_{\nu=1}^{N+1} \overset{\circ}{\lambda}_\nu Q_\nu^{kj}\right)(\zeta_k - z_k)} d\zeta_j \\
&= \sum_{\nu=1}^{N+1} \overset{\circ}{\lambda}_\nu \mu_\nu(\zeta,z) + f_1^\infty(\zeta,z,\lambda) \qquad (1.3.12)
\end{aligned}
$$

où on pose $\mu_\nu(\zeta,z) = \mu(\zeta,z,\tau^\nu)$ et $Q_\nu = Q(\tau^\nu)$ avec les notations du paragraphe 1.1.6.
On peut de plus remarquer ici que $d_\lambda f_1^\infty(\zeta,z,\lambda)$ reste de la forme $f_1^\infty(\zeta,z,\lambda)$.
Ainsi

$$
d_\lambda \mu(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda}) = \sum_{\nu=1}^{N+1} \frac{1}{1-\lambda_0} d\lambda_\nu \wedge \mu_\nu(\zeta,z) + \sum_{\nu=1}^{N+1} \frac{\lambda_\nu}{(1-\lambda_0)^2} d\lambda_0 \wedge \mu_\nu(\zeta,z) + f_1^\infty(\zeta,z,\lambda) \qquad (1.3.13)
$$

De même, si $(\zeta,z,\lambda) \in U_D^2 \times \Delta_{0(1,\ldots,N+1)}^{\frac{1}{4}}$,

$$
\begin{aligned}
\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda}) &= \sum_{j=1}^{n} w_j(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})(\zeta_j - z_j) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho_{\overset{\circ}{\lambda}}(\zeta)}{\partial \zeta_j}(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^{n} a_{kj}^{\overset{\circ}{\lambda}}(\zeta)(\zeta_k - z_k)(\zeta_j - z_j) \\
&\qquad + A \sum_{j,k=1}^{n} \overline{Q(\overset{\circ}{\lambda})^{kj}(\zeta_k - z_k)(\zeta_j - z_j)} \\
&= \sum_{\nu=1}^{N+1} \overset{\circ}{\lambda}_\nu \varphi_\nu(\zeta,z) + A < \overline{\left(Q(\overset{\circ}{\lambda}) - \sum_{\nu=1}^{N+1} \overset{\circ}{\lambda}_\nu Q_\nu\right)(\zeta - z)}, \zeta - z > \\
&= \sum_{\nu=1}^{N+1} \overset{\circ}{\lambda}_\nu \varphi_\nu(\zeta,z) + f_2^\infty(\zeta,z,\lambda) \qquad (1.3.14)
\end{aligned}
$$

où $\varphi_\nu(\zeta,z) = \varphi(\zeta,z,\tau^\nu)$ avec les notations du paragraphe 1.1.6.
De même, dans ce cas, $d_\lambda f_2^\infty(\zeta,z,\lambda)$ reste de la forme $f_2^\infty(\zeta,z,\lambda)$. De plus, pour tout $\nu \in \{1,\ldots,N+1\}$, $\varphi_\nu(\zeta,z)$ est de la forme $f_1^{d-1}(\zeta,z,\lambda)$.
Ainsi

$$
d_\lambda \varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda}) = \sum_{\nu=1}^{N+1} \frac{1}{1-\lambda_0} d\lambda_\nu \wedge \varphi_\nu(\zeta,z) + \sum_{\nu=1}^{N+1} \frac{\lambda_\nu}{(1-\lambda_0)^2} d\lambda_0 \wedge \varphi_\nu(\zeta,z) + f_2^\infty(\zeta,z,\lambda) \qquad (1.3.15)
$$

Alors, d'après (1.3.12) et (1.3.13), sur $R_I \times D \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$, on a

$$\mu \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|-1} = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_t)\subset I \\ 0\leq t\leq |I|}} f^\infty_{|I|-t}(\zeta,z,\lambda) \wedge \mu_{\nu_1}(\zeta,z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_t}(\zeta,z)$$

$$(d_\lambda \mu)^{|I|} = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_t)\subset I \\ 0\leq t\leq |I|}} f^\infty_{|I|-t}(\zeta,z,\lambda) \wedge \mu_{\nu_1}(\zeta,z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_t}(\zeta,z)$$

$$\mu \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|} = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_t)\subset I \\ 0\leq t\leq |I|}} f^\infty_{|I|-t+1}(\zeta,z,\lambda) \wedge \mu_{\nu_1}(\zeta,z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_t}(\zeta,z)$$

en utilisant de plus (1.3.14), (1.3.15) et les remarques effectuées à propos des φ_ν, on obtient :

$$\mu \wedge d_\lambda\varphi \wedge (d_\lambda \mu)^{|I|-1} = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_t)\subset I \\ 0\leq t\leq |I|}} f^{d-1}_{|I|-t+1}(\zeta,z,\lambda) \wedge \mu_{\nu_1}(\zeta,z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_t}(\zeta,z) + \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_t)\subset I \\ 0\leq t\leq |I|}} f^{d-1}_{|I|-t+2}(\zeta,z,\lambda) \wedge \mu_{\nu_1}(\zeta,z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_t}(\zeta,z)$$

ce qui termine la démonstration. □

La Proposition 1.3.7 et les expressions de J_I^1, J_I^2, J_I^3 et J_I^4, permettent d'affirmer que $\int_{R_I\times\Delta_{0I}} \bar\partial(g)\wedge D_{n,r-1}$, s'écrit comme une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\int_{R_I\times\Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}\frac{c(\zeta)\wedge\Theta_J(\zeta,z)\wedge f^{d-2}_{l-l'+1}(\zeta,z,\lambda)}{|\zeta-z|^{2\alpha_0}\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})^{\alpha_1}}$$

$$\int_{R_I\times\Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}\frac{c(\zeta)\wedge\Theta_J(\zeta,z)\wedge f^{d-2}_{l-l'+2}(\zeta,z,\lambda)}{|\zeta-z|^{2\alpha_0}\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})^{\alpha_1+1}}$$

$$\int_{R_I\times\Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}\frac{c(\zeta)\wedge\Theta_J(\zeta,z)\wedge f^{d-2}_{l-l'+3}(\zeta,z,\lambda)}{|\zeta-z|^{2\alpha_0}\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})^{\alpha_1+1}}$$

où

$$|I| = l,\ J = (\nu_1,\dots,\nu_{l'}) \subset I,\ |J| = l',$$

$$\Theta_J(\zeta,z) = \mu_{\nu_1}(\zeta,z)\wedge\cdots\wedge\mu_{\nu_{l'}}(\zeta,z),$$

$$\alpha_0 \geq 1,\ \alpha_1 \geq |I| \geq 1, \alpha_0+\alpha_1 = n,$$

$c(\zeta)$ est un coefficient de $\bar\partial g$.

On note

$$J^+(\nu, J, a_0, a_1) = \int_{R_I \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \Theta_J(\zeta, z) \wedge f_\nu^{d-2}(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2a_0} \varphi(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})^{a_1}}$$

On remarque que si f est du type $f_{l-l'+3}^{d-2}$, alors f est du type $f_{l-l'+2}^{d-2}$, donc pour estimer l'opérateur, il suffit d'estimer $J^+(l - l' + 1, J, \alpha_0, \alpha_1)$ et $J^+(l - l' + 2, J, \alpha_0, \alpha_1 + 1)$ et leurs dérivées par rapport à z.

Soit D^p un opérateur différentiel en z d'ordre p. Si on applique D^p, à $J^+(\nu, J, a_0, a_1)$, on obtient une combinaison linéaire finie de termes de la forme suivante :

$$\int_{R_I \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}} \mathcal{A} c(\zeta) \wedge D^{p_1} \left(\frac{1}{\varphi(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})^{a_1}} \right) \wedge D^{p_2} \left(\Theta_J(\zeta, z) \right) \wedge D^{p_3} \left(\frac{f_\nu^{d-2}(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2a_0}} \right)$$

avec $p_1 + p_2 + p_3 = p$.
Ce qui donne une combinaison linéaire finie d'intégrales de la forme suivante :

$$\mathcal{J}^+(\upsilon, J, L, b_0, b_1)(z) = \int_{R_I \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \Theta_L(\zeta, z) \wedge f_\upsilon^{d-2}(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2b_0} \varphi(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$

où

1. $L \subset J \subset I$, $|L| = m = max(l' - p_2, 0)$, $L = (l_1, \ldots, l_m)$.
2. $a_0 \leq b_0 \leq a_0 + p_3$
   $a_1 \leq b_1 \leq a_1 + p_1$
3. $2b_0 - \upsilon \leq 2a_0 + p_3 - \nu$

Remarque. Si $p = 0$, alors, on a $J^+(\nu, J, a_0, a_1) = \mathcal{J}^+(\nu, J, J, a_0, a_1)$

1.3.4 Une estimation auxiliaire

Cette sous-partie reprend des résultats obtenus par C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer dans [L-T/Le 1], ceux-ci vont permettre d'estimer l'intégration en λ afin de pouvoir ensuite utiliser des méthodes d'estimation employées par R.M. Range et Y.T. Siu dans [Ra/Si], par J. Michel dans [Mi] ainsi que par J. Michel et A. Perotti dans [Mi/Pe].

Soient $h \geq 2$, un entier et $K = (k_1, \ldots, k_s) \in P'(h)$, on pose $d\lambda_K = d\lambda_{k_2} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{k_s}$. Soient de plus C_*, δ et ε des constantes positives, $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ des nombres complexes tels que

$$\text{Re } \varphi_j \geq \delta + \varepsilon \tag{1.3.16}$$

Si $i, j \in \{1, \ldots, h\}$ avec $i \neq j$, ∇_j^i représente la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial \lambda_j}$ en considérant λ_j dans le système de coordonnées $(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_i}, \ldots, \lambda_h)$ sur $\Delta_{(1,\ldots,h)}$ et on note

$$\nabla_{j_1 \ldots j_t}^{i_1 \ldots i_t} = \nabla_{j_1}^{i_1} \ldots \nabla_{j_t}^{i_t}$$

pour $t \geq 2$, et $1 \leq i_\nu, j_\nu \leq h$, avec $i_\nu \neq j_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, t)$.
Soient γ et Γ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Delta_{(1,\ldots,h)}$ telles que

$$|\gamma(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{1.3.17}$$

$$|\nabla^{i_1\ldots i_t}_{j_1\ldots j_t}\gamma(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{1.3.18}$$

$$|\Gamma(\lambda)| \leq C_* \tag{1.3.19}$$

$$|\nabla^{i_1\ldots i_t}_{j_1\ldots j_t}\Gamma(\lambda)| \leq C_* \tag{1.3.20}$$

pour tout $\lambda \in \Delta_{(1,\ldots,h)}$, $1 \leq t \leq h+2$, $1 \leq i_\nu, j_\nu \leq h$, avec $i_\nu \neq j_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, t)$.

Rappelons alors le Théorème 6.1 dans [L-T/Le 1] :

Théorème 1.3.8 *Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $C_p = (3p)!2^{7p}$, alors*

1. *pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left| \int_{\Delta_{(1,\ldots,h)}} \frac{\Gamma(\lambda) d\lambda_{(1,\ldots,h)}}{\left(\sum_{j=1}^h \lambda_j \varphi_j + \gamma(\lambda)\right)^p} \right| \leq \frac{C_p C_*}{(\delta+\varepsilon)^p}$$

2. *pour tout $K \in P'(h)$ et tout $p \geq |K|+1$*

$$\left| \int_{\Delta_{(1,\ldots,h)}} \frac{\Gamma(\lambda) d\lambda_{(1,\ldots,h)}}{\left(\sum_{j=1}^h \lambda_j \varphi_j + \gamma(\lambda)\right)^p} \right| \leq \frac{C_p C_*}{\prod_{j\in K} |\varphi_j| (\delta+\varepsilon)^{p-|K|}}$$

On donne maintenant la définition d'une famille de sommets admissibles correspondant à la Définition 7.3 dans [L-T/Le 1] :

Définition 1.3.9 *Soit α la constante donnée par la Définition 1.3.1. Une* famille de sommets admissibles *est une famille ordonnée $(\lambda^1, \ldots, \lambda^l)$ de points de $\Delta_{(1,\ldots,N+1)}$ telle que :*

(i) il existe $K = (k_1, \ldots, k_l) \in P'(N+1)$ tel que $\lambda^j \in \Delta_K$, pour $j = 1, \ldots, l$;

(ii) $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^l$;

(iii) pour tout $(\zeta, z, \tau) \in \mathbb{C}^n \times U_{\overline{D}} \times \Delta_{(1,\ldots,l)}$ la fonction γ définie par

$$\gamma(\zeta, z, \tau) = \varphi(\zeta, z, \sum_{j=1}^l \tau_j \lambda^j) - \sum_{j=1}^l \tau_j \varphi(\zeta, z, \lambda^j)$$

vérifie les relations suivantes :

$$|\gamma(\zeta, z, \tau)| \leq \frac{\alpha}{8}|\zeta - z|^2 \tag{1.3.21}$$

$$|\nabla^{i_1\ldots i_t}_{j_1\ldots j_t}\gamma(\zeta, z, \tau)| \leq \frac{\alpha}{8}|\zeta - z|^2 \tag{1.3.22}$$

pour tout $1 \leq t \leq l+2$, $1 \leq i_\nu, j_\nu \leq l$, avec $i_\nu \neq j_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, t)$.

Si $(\lambda^1, \ldots, \lambda^l)$ est une famille de sommets admissibles, alors, on note

$$\Delta(\lambda^1, \ldots, \lambda^l) = \left\{ \sum_{j=1}^{l} \tau_j \lambda^j, \tau \in \Delta(1, \ldots, l) \right\}$$

On dit alors qu'un simplexe Δ est *admissible* s'il existe une famille de sommets admissibles, $(\lambda^1, \ldots, \lambda^l)$, telle que $\Delta = \Delta(\lambda^1, \ldots, \lambda^l)$.

On peut maintenant énoncer le lemme suivant, dont on trouve aussi la démonstration dans [L-T/Le 1] :

Lemme 1.3.10 *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $K = (k_1, \ldots, k_l) \in P'(N+1)$ et $\lambda^1, \ldots, \lambda^l \in \Delta_K$ sont des vecteurs linéairement indépendants avec*

$$|\lambda^i - \lambda^j| < \varepsilon, \; (1 \leq i, j \leq l)$$

alors $(\lambda^1, \ldots, \lambda^l)$ est une famille de sommets admissibles.

1.3.5 Pseudocoordonnées

Dans cette sous-partie, nous construisons des pseudocoordonnées analogues à celles de J. Michel (voir par exemple [Mi]), qui nous permettront d'intégrer dans de bonnes directions pour obtenir les estimations cherchées. Soient $z \in D$, $\zeta_0 \in R_I$ et soient $\lambda^1, \ldots, \lambda^l \in \Delta_I$, des vecteurs linéairement indépendants (comme vecteurs de $\mathbb{R}^l$).

L'indépendance des vecteurs $\lambda^1, \ldots, \lambda^l$ permet d'affirmer qu'il existe un voisinage $U(\zeta_0)$ de ζ_0 et un système de coordonnées de classe $\mathcal{C}^{d-1}$ sur $U(\zeta_0)$:

$$\begin{aligned} x(\zeta) &= (x_1, \ldots, \; x_{2n}) \\ &= (x_1, \ldots, x_{2n-l}, \; \rho_{\lambda^1}(\zeta) - \rho_{\lambda^1}(z), \rho_{\lambda^2}(\zeta) - \rho_{\lambda^1}(z), \; \ldots, \; \rho_{\lambda^l}(\zeta) - \rho_{\lambda^1}(z)) \end{aligned}$$

On pose :

$$y = x(z) = (0, \ldots, \; 0, \; 0, \; \rho_{\lambda^2}(z) - \rho_{\lambda^1}(z), \ldots, \; \rho_{\lambda^l}(z) - \rho_{\lambda^1}(z))$$

$$x' = (x_1, \ldots, x_{2n-l}), \; t(\zeta) = \rho_{\lambda^1}(\zeta) \text{ et } x'' = (x_{2n-l+2}, \ldots, x_{2n})$$

On pose pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, et pour $(\zeta, z) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^n$

$$u_j(\zeta, z) = \operatorname{Im} \varphi(\zeta, z, \lambda^j)$$

Notons $\mathcal{E}^s_\nu(\zeta, z)$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^s$ définie sur $(U_{\overline{D}} \backslash D) \times \overline{D}$ indépendante de g et qui s'annule à l'ordre ν en $\zeta = z$ et $\mathcal{E}^s_\nu(\zeta, z, \lambda)$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^s$ définie sur $(U_{\overline{D}} \setminus D) \times \overline{D} \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$ indépendante de g et qui s'annule à l'ordre ν en $\zeta = z$.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, on effectue le développement de Taylor de u_j à l'ordre 2, centré en z, il vient

$$u_j(\zeta, z) = \sum_{\nu=1}^{2n} d_{j,\nu}(y)(x_\nu - y_\nu) + \sum_{\nu,\mu=1}^{2n} d'_{j,\nu,\mu}(y)(x_\nu - y_\nu)(x_\mu - y_\mu) + \mathcal{E}^{d-1}_2(\zeta, z)$$

On pose alors

$$p_j(x,y) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq 2n-l+1}}^{2n} d_{j,\nu}(y)(x_\nu - y_\nu) + \sum_{\substack{\nu,\mu=1 \\ \nu,\mu\neq 2n-l+1}}^{2n} d'_{j,\nu,\mu}(y)(x_\nu - y_\nu)(x_\mu - y_\mu)$$
$$q_j(x,y) = p_j(x,y) + d_{j,2n-l+1}(y)(t(\zeta) - \rho_{\lambda^1}(z))$$

On a donc $u_j(\zeta) = p_j(x,y) + d_{j,2n-l+1}(y)(t(\zeta) - \rho_{\lambda^1}(z)) + \mathcal{E}_2^{d-1}(\zeta,z)$.
Ainsi

$$d_\zeta u_j(\zeta) = d_x p_j(x,y) + d_{j,2n-l+1}(y)dt(\zeta) + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta,z) \qquad (1.3.23)$$

On a par ailleurs

$$d_\zeta u_j(\zeta) = \frac{1}{2i}\left(d_\zeta\varphi(\zeta,z,\lambda^j) - d_\zeta\overline{\varphi(\zeta,z,\lambda^j)}\right)$$

Or

$$\varphi(\zeta,z,\lambda^j) = < w(\zeta,z,\lambda^j), \zeta - z >$$

donc, par définition de w et comme les ρ_i sont réels, on a

$$\begin{cases} d_\zeta\varphi(\zeta,z,\lambda^j) = 2\partial_\zeta\rho_{\lambda^j}(\zeta) + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta,z) \\ d_\zeta\overline{\varphi(\zeta,z,\lambda^j)} = 2\overline{\partial}_\zeta\rho_{\lambda^j}(\zeta) + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta,z) \\ \qquad\qquad\qquad = 2d_\zeta\rho_{\lambda^j}(\zeta) - 2\partial_\zeta\rho_{\lambda^j}(\zeta) + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta,z) \end{cases} \qquad (1.3.24)$$

D'où

$$d_\zeta u_j(\zeta) = \frac{1}{2i}\left(4\partial_\zeta\rho_{\lambda^j}(\zeta) - 2d_\zeta\rho_{\lambda^j}(\zeta) + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta,z)\right)$$

De plus

$$\mu(\zeta,z,\lambda^j) = 2\partial_\zeta\rho_{\lambda^j}(\zeta) + \mathcal{E}_1^{\infty}(\zeta,z)$$

par ailleurs, sur R_I, $d_\zeta\rho_{\lambda^j}(\zeta) = d_\zeta\rho_{\lambda^1}(\zeta) = dt$, on a donc, sur $R_I \cap U(\zeta_0)$:

$$d_\zeta u_j(\zeta) = \frac{1}{2i}\left(2\mu(\zeta,z,\lambda^j) - 2dt + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta,z)\right)$$

Ce que l'on peut aussi écrire

$$\mu(\zeta,z,\lambda^j) = id_\zeta u_j(\zeta) + dt + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta,z)$$

Et en utilisant l'équation (1.3.23), on obtient sur $R_I \cap U(\zeta_0)$

$$\mu(\zeta,z,\lambda^j) = id_x p_j(x) + (1 + id_{j,2n-l+1}(y))dt + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta,z) \quad (1.3.25)$$

Proposition 1.3.11 *Si $L \subset I$, $L = (l_1, \dots, l_m)$, pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in (R_I \cap U(\zeta_0)) \times D \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$, on a*

$$\begin{aligned}\Theta_L(\zeta, z) \wedge f_v^{d-2}(\zeta, z, \lambda) = \\ &\mathcal{E}_v^{d-2}(\zeta, z, \lambda) \wedge d_x p_{l_1} \wedge \cdots \wedge d_x p_{l_m} \wedge dt \\ &+ \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_s) \subset (l_1, \dots, l_m) \\ s<m}} \mathcal{E}_{v+m-s-1}^{d-2} \wedge d_x p_{m_1} \wedge \cdots \wedge d_x p_{m_s} \wedge dt\end{aligned}$$

Démonstration : Soit $(\zeta, z, \lambda) \in (R_I \cap U(\zeta_0)) \times D \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$.
Avec les notations du paragraphe 1.1.6, on a

$$\Theta_L(\zeta, z) = \mu_{l_1}(\zeta, z) \wedge \cdots \wedge \mu_{l_m}(\zeta, z) = \mu(\zeta, z, \tau^{l_1}) \wedge \cdots \wedge \mu(\zeta, z, \tau^{l_m})$$

Comme $(\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^l$, et que $(\tau^{l_1}, \dots, \tau^{l_m})$ peut être vue comme une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^l$, pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, il existe $c_1^j, \dots, c_l^j$ tels que

$$\tau^{l_j} = \sum_{k=1}^{l} c_k^j \lambda^k$$

de plus, ρ_λ dépend linéairement de λ, donc, pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$,

$$\partial_\zeta \rho_{\tau^{l_j}} = \sum_{k=1}^{l} c_k^j \partial_\zeta \rho_{\lambda^k}$$

donc

$$\begin{aligned}\mu(\zeta, z, \tau^{l_j}) &= 2\partial_\zeta \rho_{\tau^{l_j}} + \mathcal{E}_1^\infty(\zeta, z) \\ &= \sum_{k=1}^{l} c_k^j 2\partial_\zeta \rho_{\lambda^k} + \mathcal{E}_1^\infty(\zeta, z) \\ &= \sum_{k=1}^{l} c_k^j \mu(\zeta, z, \lambda^k) + \mathcal{E}_1^\infty(\zeta, z)\end{aligned}$$

Alors

$$\Theta_L(\zeta, z) \wedge f_v^{d-2}(\zeta, z, \lambda) = \sum_{(s_1, \dots, s_p) \subset (l_1, \dots, l_m)} \mathcal{E}_{v+m-p}^{d-2}(\zeta, z, \lambda) \wedge \mu(\zeta, z, \lambda^{s_1}) \wedge \cdots \wedge \mu(\zeta, z, \lambda^{s_p})$$

L'équation (1.3.25) nous permet alors d'écrire, en utilisant le raisonnement effectué dans [Mi], que si $(s_1, \dots, s_p) \subset (l_1, \dots, l_m)$, on a

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}^{d-2}_{v+m-p}(\zeta,z,\lambda)\wedge\mu(\zeta,z,\lambda^{s_1})\wedge\cdots\wedge\mu(\zeta,z,\lambda^{s_p})\\
&\qquad=\sum_{(m_1,\dots,m_s)\subset(s_1,\dots,s_p)}\mathcal{E}^{d-2}_{(v+m-p)+p-s}(\zeta,z,\lambda)\wedge d_xp_{m_1}\wedge\cdots\wedge d_xp_{m_s}\\
&\qquad+\sum_{\substack{(m_1,\dots,m_s)\subset(s_1,\dots,s_p)\\ s<p}}\mathcal{E}^{d-2}_{(v+m-p)+p-s-1}(\zeta,z,\lambda)\wedge d_xp_{m_1}\wedge\cdots\wedge d_xp_{m_s}\wedge dt\\
&\qquad=\mathcal{E}^{d-2}_{v+m-p}(\zeta,z,\lambda)\wedge d_xp_{s_1}\wedge\cdots\wedge d_xp_{s_p}\wedge dt\\
&\qquad+\sum_{\substack{(m_1,\dots,m_s)\subset(s_1,\dots,s_p)\\ s<p}}\mathcal{E}^{d-2}_{v+m-s-1}\wedge d_xp_{m_1}\wedge\cdots\wedge d_xp_{m_s}\wedge dt
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a

$$
\begin{aligned}
&\Theta_L(\,\zeta\,,z)\wedge f^{d-2}_v(\zeta,z,\lambda)=\\
&\qquad\sum_{(s_1,\dots,s_p)\subset(l_1,\dots,l_m)}\mathcal{E}^{d-2}_{v+m-p}(\zeta,z,\lambda)\wedge d_xp_{s_1}\wedge\cdots\wedge d_xp_{s_p}\wedge dt\\
&\qquad+\sum_{(s_1,\dots,s_p)\subset(l_1,\dots,l_m)}\ \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_s)\subset(s_1,\dots,s_p)\\ s<p}}\mathcal{E}^{d-2}_{v+m-s-1}\wedge d_xp_{m_1}\wedge\cdots\wedge d_xp_{m_s}\wedge dt
\end{aligned}
$$

Ce qui permet d'établir la proposition. □

On peut alors écrire l'énoncé de la proposition précédente en fonction des q_i, il vient :

$$
\begin{aligned}
&\Theta_L(\zeta,z)\wedge f^{d-2}_v(\zeta,z,\lambda)=\\
&\qquad\mathcal{E}^{d-2}_v(\zeta,z,\lambda)\wedge d_xq_{l_1}\wedge\cdots\wedge d_xq_{l_m}\wedge dt\\
&\qquad+\sum_{\substack{(m_1,\dots,m_s)\subset(l_1,\dots,l_m)\\ s<m}}\mathcal{E}^{d-2}_{v+m-s-1}\wedge d_xq_{m_1}\wedge\cdots\wedge d_xq_{m_s}\wedge dt
\end{aligned}
\tag{1.3.26}
$$

1.3.6 Estimations

Intégration en fonction de λ

On peut supposer sans perdre de généralité que $I=(1,\dots,l)$.
Rappelons que

$$\mathcal{J}^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)=\int_{R_I\times\Delta^{\frac14}_{0I}}\mathcal{A}\frac{c(\zeta)\wedge\Theta_L(\zeta,z)\wedge f^{d-2}_v(\zeta,z,\lambda)}{|\zeta-z|^{2b_0}\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$

Si $\lambda^1,\dots,\lambda^l$ est une famille de sommets admissible, on pose

$$\widetilde{\Delta}=\left\{\lambda\in\Delta^{\frac14}_{0I}\middle|\overset{\circ}{\lambda}\in\Delta(\lambda^1,\dots,\lambda^l)\right\}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{J}}^{+}(v,J,L,b_0,b_1)(z)=\int_{R_I\times\widetilde{\Delta}}\mathcal{A}\frac{c(\zeta)\wedge\Theta_L(\zeta,z)\wedge f_v^{d-2}(\zeta,z,\lambda)}{|\zeta-z|^{2b_0}\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$

D'après le Lemme 1.3.10, on peut diviser Δ_I en un nombre fini de simplexes admissibles. Donc il suffit de prouver les estimations pour $\widetilde{\mathcal{J}}^{+}$.

Soit $\lambda^1,\dots,\lambda^l$ une famille de sommets admissible fixée. Comme dans [Mi/Pe], on recouvre maintenant R_I par un ensemble fini de voisinages $U(\zeta_0)$ sur lequel on peut définir des pseudocoordonnées. L'égalité (1.3.26) et le raisonnement sur les pseudocoordonnées montrent que $\widetilde{\mathcal{J}}^{+}(v,J,L,b_0,b_1)$ est une combinaison linéaire d'intégrales de formes suivantes :

$$A^{+}\,(v,J,L,b_0,b_1)(z)=$$
$$\int_{(R_I\cap U(\zeta_0))\times\widetilde{\Delta}}\mathcal{A}\frac{c(\zeta)\wedge\mathcal{E}_v^{d-2}(\zeta,z,\lambda)\wedge d_xq_{l_1}\wedge\cdots\wedge d_xq_{l_m}\wedge dt\wedge d\lambda_{0I}}{|\zeta-z|^{2b_0}\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$
$$B^{+}\,(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)=$$
$$\int_{(R_I\cap U(\zeta_0))\times\widetilde{\Delta}}\mathcal{A}\frac{c(\zeta)\wedge\mathcal{E}_{v+m-s-1}^{d-2}(\zeta,z,\lambda)\wedge d_xq_{m_1}\wedge\cdots\wedge d_xq_{m_s}\wedge dt\wedge d\lambda_{0I}}{|\zeta-z|^{2b_0}\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$

où

1. $d\lambda_{0I}=d\lambda_0\wedge d\lambda_2\wedge\cdots\wedge d\lambda_l$
2. $\mathcal{E}_{\dots}^{d-2}$ a les propriétés définies dans la sous-partie 1.3.5 et $c(\zeta)$ provient de $\bar\partial(Ef)$.
3. $M\subset L\subset J\subset I$, $|J|=l'$, $|L|=m=max(l'-p_2,0)$, $L=(l_1,\dots,l_m)$, $M=(m_1,\dots,m_s)$ et $s<m$.
4. $a_0\le b_0\le a_0+p_3$
$a_1\le b_1\le a_1+p_1$
5. $2b_0-v\le 2a_0+p_3-\nu$

et ce pour $(\nu=l-l'+1,a_0=\alpha_0,a_1=\alpha_1)$
et $(\nu=l-l'+2,a_0=\alpha_0,a_1=\alpha_1+1)$,
avec $\alpha_0\ge1$, $\alpha_1\ge|I|$ et $\alpha_0+\alpha_1=n$ et $l'\le l$.

On peut supposer sans perdre de généralité que $J=(1,\dots,l')$, $L=(1,\dots,m)$ et $M=(1,\dots,s)$, pour $s<m$.
Sur $R_I\cap U(\zeta_0)$, on choisit comme coordonnées $t,q_1,\dots,q_m,\sigma_{m+1},\dots,\sigma_{2n-l}$ (resp. $t,q_1,\dots,q_s,\sigma_{s+1},\dots,\sigma_{2n-l}$) et on note $\sigma^2=\sigma_{m+1}^2+\cdots+\sigma_{2n-l}^2$ (resp.

$\sigma^2 = \sigma_{s+1}^2 + \cdots + \sigma_{2n-l}^2$). Alors

$$A^+(v, J, L, b_0, b_1)(z) =$$
$$\int_{(R_I \cap U(\zeta_0)) \times \widetilde{\Delta}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \mathcal{E}_v^{d-2} \wedge dq_{1\ldots m} \wedge dt \wedge d\sigma_{m+1\ldots 2n-l} \wedge d\lambda_{0I}}{|\zeta - z|^{2b_0} \varphi(\zeta, z, \mathring{\lambda})^{b_1}}$$
$$B^+(v, J, L, M, b_0, b_1)(z) =$$
$$\int_{(R_I \cap U(\zeta_0)) \times \widetilde{\Delta}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \mathcal{E}_{v+m-s-1}^{d-2} \wedge dq_{1\ldots s} \wedge dt \wedge d\sigma_{s+1\ldots 2n-l} \wedge d\lambda_{0I}}{|\zeta - z|^{2b_0} \varphi(\zeta, z, \mathring{\lambda})^{b_1}}$$

où on reprend les notations précédentes et on pose pour $j \in \{1, \ldots, 2n-l\}$: $d\sigma_{j\ldots 2n-l} = d\sigma_j \wedge \cdots \wedge d\sigma_{2n-l}$, $dq_{1\ldots j} = dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_j$

On va procéder comme dans [L-T/Le 1] pour majorer l'intégration en λ. Considérons

$$\begin{aligned} \psi : [0, \tfrac{1}{4}] \times \Delta_I &\longrightarrow \widetilde{\Delta} \\ (\tau, \vartheta) &\longmapsto \left(\tau, (1-\tau) \textstyle\sum_{j=1}^l \vartheta_j \lambda_1^j, \ldots, (1-\tau) \sum_{j=1}^l \vartheta_j \lambda_l^j\right) \end{aligned}$$

ψ est un difféomorphisme, notons $a(\tau)$, la fonction telle que

$$(1-\tau)^{l-1} d\tau \wedge \left(\sum_{j=1}^l \lambda_2^j d\vartheta_j\right) \wedge \ldots, \wedge \left(\sum_{j=1}^l \lambda_l^j d\vartheta_j\right) = a(\tau) d\tau \wedge d\vartheta_I$$

avec $d\vartheta_I = d\vartheta_2 \wedge \cdots \wedge d\vartheta_l$.
Posons, pour $(\zeta, z, \tau, \vartheta) \in R_I \times D \times [0, \frac{1}{4}] \times \Delta_I$

$$\begin{aligned} \Gamma_v(\zeta, z, \tau, \vartheta) &= a(\tau) \mathcal{A} \mathcal{E}_v^{d-2}(\zeta, z, \psi(\tau, \vartheta)), \\ \Gamma'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, \vartheta) &= a(\tau) \mathcal{A} \mathcal{E}_{v+m-s-1}^{d-2}(\zeta, z, \psi(\tau, \vartheta)), \\ \gamma(\zeta, z, \vartheta) &= \varphi(\zeta, z, \sum_{j=1}^l \vartheta_j \lambda^j) - \sum_{j=1}^l \vartheta_j \varphi(\zeta, z, \lambda^j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Omega_v(\zeta, z, \tau, b_1) &= \int_{\vartheta \in \Delta_I} \frac{\Gamma_v(\zeta, z, \tau, \vartheta) d\vartheta_I}{\left(\sum_{j=1}^l \vartheta_j \varphi(\zeta, z, \lambda^j) + \gamma(\zeta, z, \vartheta)\right)^{b_1}} \\ \Omega'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, b_1) &= \int_{\vartheta \in \Delta_I} \frac{\Gamma'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, \vartheta) d\vartheta_I}{\left(\sum_{j=1}^l \vartheta_j \varphi(\zeta, z, \lambda^j) + \gamma(\zeta, z, \vartheta)\right)^{b_1}} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$| A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)| \leq \tag{1.3.27}$$
$$\int_{R_I\cap U(\zeta_0)} \max_{0\leq\tau\leq\frac14} |\Omega_v(\zeta,z,\tau,b_1)| \frac{|c(\zeta)||dq_{1\ldots m}\wedge dt\wedge d\sigma_{m+1\ldots 2n-l}|}{|\zeta-z|^{2b_0}}$$
$$| B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)| \leq \tag{1.3.28}$$
$$\int_{R_I\cap U(\zeta_0)} \max_{0\leq\tau\leq\frac14} |\Omega'_{v+m-s-1}(\zeta,z,\tau,b_1)| \frac{|c(\zeta)||dq_{1\ldots s}\wedge dt\wedge d\sigma_{s+1\ldots 2n-l}|}{|\zeta-z|^{2b_0}}$$

Nous allons maintenant vérifier que l'on peut utiliser le Théorème 1.3.8 pour majorer Ω_v et $\Omega'_{v+m-s-1}$. Soit $(\zeta,z,\tau)\in U(\zeta_0)\times D\times[0,\frac14]$. D'après les définitions de a et $\mathcal{A}$ et d'après les propriétés de $\mathcal{E}_v^{d-2}$ et $\mathcal{E}_{v+m-s-1}^{d-2}$, il existe une constante $C_1>0$ indépendante de (ζ,z,τ) telle que, pour tout $\vartheta\in\Delta_I$ et tout $1\leq h\leq l+2$, $1\leq i_\nu,j_\nu\leq l$, avec $i_\nu\neq j_\nu$ $(\nu=1,\ldots,h)$:

$$|\Gamma_v(\zeta,z,\tau,\vartheta)|\leq C_1|\zeta-z|^v \tag{1.3.29}$$
$$|\nabla^{i_1\ldots i_h}_{j_1\ldots j_h}\Gamma_v(\zeta,z,\tau,\vartheta)|\leq C_1|\zeta-z|^v \tag{1.3.30}$$
$$|\Gamma'_{v+m-s-1}(\zeta,z,\tau,\vartheta)|\leq C_1|\zeta-z|^{v+m-s-1} \tag{1.3.31}$$
$$|\nabla^{i_1\ldots i_h}_{j_1\ldots j_h}\Gamma'_{v+m-s-1}(\zeta,z,\tau,\vartheta)|\leq C_1|\zeta-z|^{v+m-s-1} \tag{1.3.32}$$

$(\lambda^1,\ldots,\lambda^l)$ étant une famille de sommets admissibles, on sait d'après la Définition 1.3.9 que, pour tout $\vartheta\in\Delta_I$ et tout $1\leq h\leq l+2$, $1\leq i_\nu,j_\nu\leq l$, avec $i_\nu\neq j_\nu$ $(\nu=1,\ldots,h)$:

$$|\gamma(\zeta,z,\vartheta)|\leq\frac{\alpha}{8}|\zeta-z|^2 \tag{1.3.33}$$
$$|\nabla^{i_1\ldots i_h}_{j_1\ldots j_h}\gamma(\zeta,z,\vartheta)|\leq\frac{\alpha}{8}|\zeta-z|^2 \tag{1.3.34}$$

Par ailleurs, pour tout $j\in\{1,\ldots,l\}$, on a

$$\mathrm{Re}\ \varphi(\zeta,z,\lambda^j)\geq\rho_{\lambda^j}(\zeta)-\rho_{\lambda^j}(z)+\frac{\alpha}{2}|\zeta-z|^2$$

Or, il existe une constante $C>0$ telle que si on note $\delta(z)=d(z,\partial D)$, alors pour tout $z\in D$, on a

$$-\rho_{\lambda^j}(z)\geq C\delta(z) \tag{1.3.35}$$

de plus, si $\zeta\in R_I$, $\rho_{\lambda^j}(t)=t(\zeta)$.
Ainsi

$$\mathrm{Re}\ \varphi(\zeta,z,\lambda^j)\geq c(\delta(z)+t(\zeta))+\frac{\alpha}{2}|\zeta-z|^2 \tag{1.3.36}$$

On peut donc appliquer le Théorème 1.3.8 pour Ω_v en posant :

$$\begin{aligned}
C_* &= C_1|\zeta - z|^v \\
\delta &= c(\delta(z) + t(\zeta)) \\
\varepsilon &= \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 \\
\varphi_j &= \varphi(\zeta, z, \lambda^j) \\
\gamma(\vartheta) &= \gamma(\zeta, z, \vartheta) \\
\Gamma(\vartheta) &= \Gamma_v(\zeta, z, \tau, \vartheta)
\end{aligned}$$

et on obtient, pour tout $K \subset I$, tel que $|K| \leq b_1 - 1$

$$\begin{aligned}
|\Omega_v(\zeta, z, \tau, b_1)| &\leq \frac{C_{b_1} C_*}{\prod_{j\in K} |\varphi_j| (\delta + \varepsilon)^{b_1 - |K|}} \\
&\leq \frac{C_{b_1} C_1 |\zeta - z|^v}{\prod_{j\in K} |\varphi(\zeta, z, \lambda^j)| (c(\delta(z) + t(\zeta)) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2)^{b_1 - |K|}}
\end{aligned} \tag{1.3.37}$$

De même, on peut appliquer le Théorème 1.3.8 pour $\Omega'_{v+m-s-1}$ en posant

$$\begin{aligned}
C_* &= C_1|\zeta - z|^{v+m-s-1} \\
\delta &= c(\delta(z) + t(\zeta)) \\
\varepsilon &= \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 \\
\varphi_j &= \varphi(\zeta, z, \lambda^j) \\
\gamma(\vartheta) &= \gamma(\zeta, z, \vartheta) \\
\Gamma(\vartheta) &= \Gamma'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, \vartheta)
\end{aligned}$$

et on obtient pour tout $K \subset I$, tel que $|K| \leq b_1 - 1$

$$\begin{aligned}
|\Omega'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, b_1)| &\leq \frac{C_{b_1} C_*}{\prod_{j\in K} |\varphi_j| (\delta + \varepsilon)^{b_1 - |K|}} \\
&\leq \frac{C_{b_1} C_1 |\zeta - z|^{v+m-s-1}}{\prod_{j\in K} |\varphi(\zeta, z, \lambda^j)| (c(\delta(z) + t(\zeta)) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2)^{b_1 - |K|}}
\end{aligned} \tag{1.3.38}$$

Quelques relations supplémentaires

Nous allons citer dans ce paragraphe quelques relations utiles pour obtenir les estimations. Le lecteur pourra trouver la démonstration de (1.3.39) dans [Mi/Pe], par exemple.

1. Si $g \in \mathcal{C}^k_{0,r}(\overline{D_0})$, $k > 0$, avec $\bar\partial g = 0$ sur D, il existe une constante $C > 0$, indépendante de g telle que pour tout $\zeta \in R_I$
$$|c(\zeta)| \leq C\|g\|_{k,D_0} t(\zeta)^{k-1} \tag{1.3.39}$$
2. D'après les relations (1.3.35) et (1.3.36), il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(\zeta, z) \in (R_I \cap U(\zeta_0)) \times D$ et pour tout $j \in I$,
$$|\varphi(\zeta, z, \lambda^j)| \geq C(|q_j| + t(\zeta) + \delta(z) + |\zeta - z|^2) \tag{1.3.40}$$
$$|\zeta - z| \geq C(|q_1| + \cdots + |q_l| + t(\zeta) + \delta(z) + |x'|) \tag{1.3.41}$$
3. $l' - m = \min(p_2, l')$

Pour toute la suite, C désigne une constante positive indépendante de g.

Estimations pour $g \in \mathcal{C}^k_{0,r}(\overline{D_0})$, $k > 0$

On suppose que $g \in \mathcal{C}^k_{0,r}(\overline{D_0})$ avec $k > 0$ et que $\bar\partial g = 0$ sur D.
D'après le Lemme 4 dans [He/Ro] (voir aussi [Ra/Si]) et la définition des normes hölderiennes (cf paragraphe 1.1.11), il suffit d'étudier les cas où $p = k - 1$ et $p = k$ en obtenant des majorations de la forme suivante :
$$|\widetilde{\mathcal{J}}^+(\upsilon, J, L, b_0, b_1)(z)| \leq C\|g\|_{k,D_0}, \text{ pour p = k} - 1$$
$$|\widetilde{\mathcal{J}}^+(\upsilon, J, L, b_0, b_1)(z)| \leq C_\alpha\|g\|_{k,D_0}\delta(z)^{-\alpha}, \text{ pour p = k et } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1$$
Remarque. Ici, $\alpha = 1 - \delta_0$ où δ_0 est défini dans le Théorème 1.0.2. Par ailleurs, comme $\overline{D}$ est compact, si $\alpha \geq \varepsilon \geq 0$, il existe $C_\alpha > 0$ telle que pour tout $z \in D$, $\delta(z)^{-\varepsilon} \leq C_\alpha \delta(z)^{-\alpha}$.

1.3.6.1 – L'intégrale $A^+(\upsilon, J, L, b_0, b_1)$.
(α) Si $b_1 = |I| = l = m$, dans ce cas, on a $a_1 = \alpha_1 = l$ et $J = L = I$, et donc, $\nu = 1$, on peut utiliser l'équation (1.3.37), avec $K = (1, \ldots, l - 1)$, alors, pour tout $z \in D$,
$$\left|A^+(\upsilon, I, I, b_0, l)(z)\right| \leq C \int_{R_I \cap U(\zeta_0)} \frac{|\zeta - z|^\upsilon |c(\zeta)||dq_{1\ldots l} \wedge dt \wedge d\sigma_{l+1\ldots 2n-l}|}{\prod_{j=1}^{l-1} |\varphi(\zeta, z, \lambda^j)|(\delta(z) + t + |\zeta - z|^2)|\zeta - z|^{2b_0}}$$
avec
1. $\alpha_0 \leq b_0 \leq \alpha_0 + p_3$
2. $2b_0 - \upsilon \leq 2\alpha_0 + p_3 - 1$

Alors, d'après les relations (1.3.39) et (1.3.40), en effectuant de plus un passage en coordonnées polaires en fonction des coordonnées $\sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_{2n-l}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&| \ A^+ \ (\upsilon, I, I, b_0, l)(z)| \\
&\quad \leq \ C\|g\|_{k,D_0} \int_{t,q_i,\sigma} \frac{t^{k-1}\sigma^{2n-2l-1}|dq_{1\ldots l} \wedge dt \wedge d\sigma|}{\prod_{j=1}^{l-1}(|q_j| + t + \delta(z) + |\zeta - z|^2)(\delta(z) + t + |\zeta - z|^2)|\zeta - z|^{2b_0-\upsilon}}
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait que $2b_0 - \upsilon \leq 2\alpha_0 + p_3 - 1$ et en intégrant par rapport aux variables $q_1, \ldots, q_l$, on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit,

$$
\left|A^+(\upsilon, I, I, b_0, l)(z)\right| \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}\sigma^{2n-2l-1}dtd\sigma}{(\delta(z) + t + |\zeta - z|^2)^{1+\varepsilon}|\zeta - z|^{p_3+2\alpha_0-1}}
$$

or $\alpha_0 = n - \alpha_1 = n - l$ d'où

$$
\left|A^+(\upsilon, I, I, b_0, l)(z)\right| \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}dtd\sigma}{(\delta(z) + t + \sigma^2)^{1+\varepsilon}|\zeta - z|^{p_3}}
$$

et d'après l'inégalité (1.3.41),

$$
\left|A^+(\upsilon, I, I, b_0, l)(z)\right| \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}dtd\sigma}{(\delta(z) + t + \sigma^2)^{1+\varepsilon}(t + \delta(z) + \sigma)^{p_3}}
$$

Comme $|L| = \max(|J| - p_2, 0)$, on a $p_2 = 0$ et donc $p = p_1 + p_3$, avec $p = k - 1$ ou k.

- Si $p = k - 1$,

$$
\begin{aligned}
\left|A^+(\upsilon, I, I, b_0, l)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{p_1+p_3}|dt \wedge d\sigma|}{(\delta(z) + t + \sigma^2)^{1+\varepsilon}(t + \delta(z) + \sigma)^{p_3}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dtd\sigma}{(\delta(z) + t + \sigma^2)^{1+\varepsilon}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}
\end{aligned}
$$

- Si $p = k$,

1. si $p_3 > 0$

$$
\begin{aligned}
\left|A^+(\upsilon, I, I, b_0, l)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{p_3-1}|dt \wedge d\sigma|}{(\delta(z) + t + \sigma^2)^{1+\varepsilon}(t + \delta(z) + \sigma)^{p_3-1+1}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dtd\sigma}{(\delta(z) + t + \sigma^2)^{1+\varepsilon}(t + \delta(z) + \sigma)} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \delta^{-2\varepsilon}
\end{aligned}
$$

2. si $p_3 = 0$, alors $p_1 - 1 = k - 1 \geq 0$ et

$$
\begin{aligned}
\left|A^+(\upsilon, I, I, b_0, l)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dtd\sigma}{(\delta(z) + t + \sigma^2)^{1+\varepsilon}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}
\end{aligned}
$$

(β) Si $b_1 > |I|$, alors, on peut utiliser l'équation (1.3.37) pour $K = L$, et il vient

$$\left|A^+(\upsilon, J, L, b_0, l)(z)\right| \leq C \int_{R_I \cap U(\zeta_0)} \frac{|\zeta - z|^{\upsilon} |c(\zeta)| |dq_{1\ldots m} \wedge dt \wedge d\sigma_{m+1\ldots 2n-l}|}{\prod_{j=1}^m |\varphi(\zeta, z, \lambda^j)| (\delta(z) + t + |\zeta - z|^2)^{b_1 - m} |\zeta - z|^{2b_0}}$$

où

1. $L \subset J \subset I$ avec $I = (1, \ldots, l)$, $J = (1, \ldots, l')$, $L = (1, \ldots, m)$ et $m = \max(l' - p_2, 0)$
2. $a_0 \leq b_0 \leq a_0 + p_3$
3. $a_1 \leq b_1 \leq a_1 + p_1$
4. $2b_0 - \upsilon \leq 2a_0 + p_3 - \nu$

On raisonne alors comme dans le cas précédent, et on obtient pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit

$$\begin{aligned}
\left|A^+(\upsilon, J, L, b_0, b_1)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} \sigma^{2n-l-m-1} |dt \wedge d\sigma|}{(\delta(z) + t + |\zeta - z|^2)^{b_1 - m + \varepsilon} |\zeta - z|^{2b_0 - \upsilon}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} \sigma^{2n-l-m-1} dt d\sigma}{(\delta(z) + t + |\zeta - z|^2)^{p_1 + \varepsilon + a_1 - m} |\zeta - z|^{p_3 + 2a_0 - \nu}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} \sigma^{2n-l-m-1} dt d\sigma}{(\delta(z) + t + \sigma^2)^{p_1 + \varepsilon} |\zeta - z|^{p_3 + 2(a_0 + a_1) - 2m - \nu}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} dt d\sigma}{(\delta + t + \sigma^2)^{p_1 + \varepsilon} (\delta + t + \sigma)^{p_3 + 2(a_0 + a_1 - n) - m + l + 1 - \nu}}
\end{aligned}$$

Posons $\Pi_1 = p_3 + 2(a_0 + a_1 - n) - m + l + 1 - \nu$.

$$\left|A^+(\upsilon, J, L, b_0, b_1)(z)\right| \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} dt d\sigma}{(\delta + t + \sigma^2)^{p_1 + \varepsilon} (\delta + t + \sigma)^{\Pi_1}}$$

Si $T = (l - l' + 1, \alpha_0, \alpha_1)$, $\Pi_1 = p_3 + l' - m \leq p_3 + p_2$, alors

$$\left|A^+(\upsilon, J, L, b_0, b_1)(z)\right| \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} dt d\sigma}{(\delta + t + \sigma^2)^{p_1 + \varepsilon} (\delta + t + \sigma)^{p_3 + p_2}}$$

et on trouve comme dans [Mi/Pe] que, si $p_1 + p_2 + p_3 = k - 1$ ou k

$$\left|A^+(\upsilon, J, L, b_0, b_1)(z)\right| \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}$$

Si $T = (l - l' + 2, \alpha_0, \alpha_1 + 1)$, $\Pi_1 = p_3 + l' - m + 1 \leq p_3 + p_2 + 1$, alors

$$\left|A^+(\upsilon, J, L, b_0, b_1)(z)\right| \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} dt d\sigma}{(\delta + t + \sigma^2)^{p_1 + \varepsilon} (\delta + t + \sigma)^{p_3 + p_2 + 1}}$$

- Si $p_1 + p_2 + p_3 = k - 1$,

$$\begin{aligned}\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dtd\sigma}{(\delta+t+\sigma^2)^\varepsilon(\delta+t+\sigma)} \\ &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}\end{aligned}$$

- Si $p_1 + p_2 + p_3 = k$,

1. avec $p_2 + p_3 \geq 1$, alors

$$\begin{aligned}\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dtd\sigma}{(\delta+t+\sigma^2)^\varepsilon(\delta+t+\sigma)^2} \\ &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}\delta^{-2\varepsilon}\end{aligned}$$

2. avec $p_2 + p_3 = 0$, alors $p_1 - 1 = k - 1 \geq 0$ donc

$$\begin{aligned}\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dtd\sigma}{(\delta+t+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(\delta+t+\sigma)} \\ &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}\delta^{-2\varepsilon}\end{aligned}$$

1.3.6.2 – L'intégrale $B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)$.

Comme $|M| < |I|$, on a toujours $b_1 \geq |M| + 1$, on peut donc appliquer (1.3.38) pour $K = M$, et on a

$$|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)| \leq C \int_{R_I\cap U(\zeta_0)} \frac{|c(\zeta)||\zeta - z|^{v+m-s-1}|dq_{1\ldots s}\wedge dt\wedge d\sigma_{s+1\ldots 2n-l}|}{\prod_{j=1}^s |\varphi(\zeta,z,\lambda^j)|(\delta(z)+t|\zeta-z|^2)^{b_1-s}|\zeta-z|^{2b_0}}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, en intégrant par rapport aux variables $q_1,\ldots,q_s$, en utilisant la relation (1.3.39) et en passant en coordonnées polaires par rapport à $\sigma_{s+1},\ldots,\sigma_{2n-l}$, on a

$$\begin{aligned}&|B^+(v,J\ ,L,M,b_0,b_1)(z)| \\ &\qquad\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}|\zeta-z|^{v+m-s-1}\sigma^{2n-l-s-1}dtd\sigma}{(t+\delta+|\zeta-z|^2)^{b_1-s+\varepsilon}|\zeta-z|^{2b_0}} \\ &\qquad\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}\sigma^{2n-l-s-1}dtd\sigma}{(t+\delta+|\zeta-z|^2)^{p_1+1+\varepsilon+a_1-s-1}|\zeta-z|^{p_3+2a_0-\nu-m+s+1}} \\ &\qquad\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}\sigma^{2n-l-s-1}dtd\sigma}{(t+\delta+|\zeta-z|^2)^{p_1+1+\varepsilon}|\zeta-z|^{p_3+2(a_0+a_1-1)-\nu-m-s+1}} \\ &\qquad\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+|\zeta-z|^2)^{p_1+1+\varepsilon}|\zeta-z|^{p_3+2(a_0+a_1-1-n)-\nu-m+l+3}}\end{aligned}$$

Notons $\Pi_2 = p_3 + 2(a_0 + a_1 - 1 - n) - \nu - m + l + 3$.
Alors,

$$\begin{aligned}&|B^+(v,J\ ,L,M,b_0,b_1)(z)| \\ &\qquad\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+|\zeta-z|^2)^{p_1+1+\varepsilon}|\zeta-z|^{\Pi_2}}\end{aligned}$$

(α) Si $T = (l - l' + 1, \alpha_0, \alpha_1)$, $\Pi_2 = p_3 + l' - m \leq p_3 + p_2$, donc

$$\begin{aligned}
&|B^+(v, J\ , L, M, b_0, b_1)(z)| \\
&\qquad \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} \sigma dt d\sigma}{(t + \delta + \sigma^2)^{p_1+1+\varepsilon}(t + \delta + \sigma)^{p_3+p_2}}
\end{aligned}$$

- Si $p_1 + p_2 + p_3 = k - 1$, on a

$$\begin{aligned}
|B^+(v, J, L, M, b_0, b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{\sigma dt d\sigma}{(t + \delta + \sigma^2)^{1+\varepsilon}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}
\end{aligned}$$

- Si $p_1 + p_2 + p_3 = k$

1. avec $p_2 + p_3 \geq 1$, alors

$$\begin{aligned}
|B^+(v, J, L, M, b_0, b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{\sigma dt d\sigma}{(t + \delta + \sigma^2)^{1+\varepsilon}(t + \delta + \sigma)} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dt d\sigma}{(t + \delta + \sigma^2)^{1+\varepsilon}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}
\end{aligned}$$

2. avec $p_2 + p_3 = 0$, alors

$$\begin{aligned}
|B^+(v, J, L, M, b_0, b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{\sigma dt d\sigma}{(t + \delta + \sigma^2)^{2+\varepsilon}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \delta^{-\varepsilon}
\end{aligned}$$

(β) Si $T = (l - l' + 2, \alpha_0, \alpha_1 + 1)$, $\Pi_2 = p_3 + l' - m + 1 \leq p_3 + p_2 + 1$, donc

$$\begin{aligned}
&|B^+(v, J\ , L, M, b_0, b_1)(z)| \\
&\qquad \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} \sigma dt d\sigma}{(t + \delta + \sigma^2)^{p_1+1+\varepsilon}(t + \delta + \sigma)^{p_3+p_2+1}}
\end{aligned}$$

- Si $p_1 + p_2 + p_3 = k - 1$, on a

$$\begin{aligned}
|B^+(v, J, L, M, b_0, b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{\sigma dt d\sigma}{(t + \delta + \sigma^2)^{1+\varepsilon}(t + \delta + \sigma)} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dt d\sigma}{(t + \delta + \sigma^2)^{1+\varepsilon}} \\
&\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}
\end{aligned}$$

- Si $p_1+p_2+p_3=k$

1. avec $p_2+p_3\geq 1$, alors

$$\begin{aligned}|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(t+\delta+\sigma)^2}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(t+\delta+\sigma)}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\delta^{-2\varepsilon}\end{aligned}$$

2. avec $p_2+p_3=0$, alors

$$\begin{aligned}|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{2+\varepsilon}(t+\delta+\sigma)}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{2+\varepsilon}}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\delta^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 1.0.2.

1.4 Le cas q-concave

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 1.0.3. Le plan de la démonstration est analogue à celui du Théorème 1.0.2, les principales différences sont dues au fait que dans ce cas, ρ_{N+1} a des propriétés de convexité opposées à celles des applications $\rho_1,\dots,\rho_N$.
Soit $(U,\rho_1,\dots,\rho_N)$ une configuration q-concave de classe $\mathcal{C}^d$, avec $d\geq 3$. Soit $\xi\in E$. Pour $R>0$, on note $\rho_{N+1}(z)=\rho_*(z)=|\xi-z|^2-R^2$ et :

$$\begin{aligned}G &= \bigcap_{j=1}^{N}\{z\in U|\rho_j(z)<0\}\\ D_R &= \bigcap_{j=1}^{N}\{z\in U|\rho_j(z)<0\}\cap B(\xi,R)\\ E_R &= \{z\in U|\rho_1(z)=\cdots=\rho_N(z)=0\}\cap B(\xi,R)\end{aligned}$$

Comme dans le cas convexe, un configuration q-concave est en fait un cas particulier de domaine à coins q-concave défini de la manière suivante :

Définition 1.4.1 *On dit que (E,D) est un* domaine à coins q-concave local *si $D\subset\subset\mathbb{C}^n$ est une intersection de classe $\mathcal{C}^3$ pour laquelle on peut trouver un cadre $(U_{\overline{D}},\rho_1,\dots,\rho_N,\rho_*)$ où $E=\{z\in U_{\overline{D}}|\rho_1(z)=\cdots=\rho_N(z)=0,\rho_*(z)<0\}$ et vérifiant la propriété suivante :*

Il existe une application $\mathcal{C}^\infty$, $Q : \Delta_{(1,\dots,N)} \to MO(n, n-q-1)$ et des constantes α, $A > 0$ telles que

$$-\mathrm{Re}\ F_{\rho_\lambda}(\zeta, z) \geq \rho_\lambda(z) - \rho_\lambda(\zeta) + \alpha|\zeta - z|^2 - A|Q(\lambda)(\zeta - z)|^2$$

pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Delta_{(1,\dots,N)}$, $\rho_\lambda := \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_N\rho_N$ et $(\zeta, z) \in U^2_{\overline{D}}$.

Le Lemme 2.3 dans [L-T/Le 2], dont la démonstration est identique à celle du Lemme 2.4 dans [L-T/Le 1] permet alors d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.4.2 *Si $(U, \rho_1, \dots, \rho_N)$ est une configuration q-concave de classe $\mathcal{C}^d$, avec $d \geq 3$ et si $\xi \in E$. Il existe $R_0 > 0$ que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \dots, \rho_N$ tel que pour tout $R < R_0$, (D_R, E_R) est un domaine à coins q-concave local et les constantes α et A de la Définition 1.4.1 peuvent être choisies indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de $\rho_1, \dots, \rho_N$.*

Remarque. Dans la suite de ce chapitre, nous continuerons à travailler avec une configuration q-concave, mais tout peut-être démontré avec un domaine à coins q-concave local. La construction de la section de Leray est alors identique, (voir par exemple [L-T/Le 3]), cependant, l'inégalité (1.4.1) est valable pour $(\zeta, z) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^n$ avec $|\zeta - z| \leq \varepsilon$ pour ε assez petit. et non plus sur $U^2_{\overline{D}}$. En réalité, ceci est suffisant pour étudier les singularités du noyau (voir le Lemme 1.4.8). Il faut noter enfin que les variations de R correspondent à des changements de niveau de la fonction ρ_* et que ceci peut aussi être fait indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \dots, \rho_N$.

1.4.1 Construction d'une section de Leray associée à une configuration q-concave

Considérons donc une configuration q-concave, $(U, \rho_1, \dots, \rho_N)$. On reprend maintenant les étapes d'une construction classique d'une section de Leray pour une configuration q-concave, voir par exemple [L-T/Le 2]. On construit d'abord une application associée à ρ_* et on utilise la même construction que dans la partie 1.3.1 pour obtenir une application associée à $\rho_\lambda = \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_N\rho_N$ avec $\lambda \in \Delta_{(1,\dots,N)}$ en échangeant les variables z et ζ. Ceci nous permet ensuite de définir une section de Leray vérifiant les trois propriétés demandées dans la partie 1.2.
Pour $R > 0$, on définit

$$\begin{aligned} w_*(\zeta, z) &= 2\left(\tfrac{\partial\rho_*(\zeta)}{\partial\zeta_1}, \dots, \tfrac{\partial\rho_*(\zeta)}{\partial\zeta_n}\right) \\ \Phi_*(\zeta, z) &= < w_*(\zeta, z), \zeta - z > \end{aligned}$$

Alors, comme w_* et Φ_* ne dépendent pas de R, on peut choisir $R_1 > 0$ tel qu'il existe $\widetilde{\gamma} > 0$ vérifiant pour tout $R \leq R_1$:

$$\forall (\zeta, z) \in B(\xi, R)^2, \quad \text{Re } \Phi_*(\zeta, z) \geq \rho_*(\zeta) - \rho_*(z) + \widetilde{\gamma}|\zeta - z|^2 \quad (1.4.1)$$

Soit R_0 donné par la Proposition 1.4.2, on suppose de plus que $R_0 \leq R_1$ et soit $R < R_0$, on note maintenant D à la place de D_R et $U_{\overline{D}} = B(\xi, R_0)$.

Comme $\rho_1, \ldots, \rho_N$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^3$, il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, $\left(a_{kj}^1\right)_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq k\leq n}}, \ldots, \left(a_{kj}^N\right)_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq k\leq n}}$ telles que, si on pose $a_{kj}^\lambda = \lambda_1 a_{kj}^1 + \cdots + \lambda_N a_{kj}^N$ pour tout $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq n$, on a

$$\left| a_{kj}^\lambda(\zeta) - \frac{\partial^2 \rho_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} \right| \leq \frac{\alpha}{2n^2}, \quad \forall \zeta \in U_{\overline{D}}$$

On pose alors pour $(\zeta, z) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^n$

$$\widetilde{F}_{\rho_\lambda}(\zeta, z) = 2\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta_j}(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^n a_{kj}^\lambda(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k)$$

On a donc, pour tout $(\zeta, z) \in U_{\overline{D}}^2$

$$-\text{Re } \widetilde{F}_{\rho_\lambda}(\zeta, z) \geq \rho_\lambda(z) - \rho_\lambda(\zeta) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 - A|Q(\lambda)(\zeta - z)|^2$$

Comme précédemment, on note $Q(\lambda)^{kj}$ les coefficients de la matrice $Q(\lambda)$: $Q(\lambda) = \left(Q(\lambda)^{kj}\right)_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq k\leq n}}$ (k est l'indice de la colonne).
On pose alors, pour $(\zeta, z, \lambda) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^n \times \Delta_{(1,\ldots,N)}$:

$$\begin{cases} v_j(\zeta, z, \lambda) = 2\frac{\partial \rho_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta_j} - \sum_{k=1}^n a_{kj}^\lambda(\zeta)(\zeta_k - z_k) - A\sum_{k=1}^n \overline{Q(\lambda)^{kj}(\zeta_k - z_k)} \\ v(\zeta, z, \lambda) = (v_1(\zeta, z), \ldots, v_n(\zeta, z)) \\ \varphi(\zeta, z, \lambda) = < v(\zeta, z), \zeta - z > \end{cases}$$

On a, pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^n \times \Delta_{(1,\ldots,N)}$,

$$\varphi(\zeta, z, \lambda) = \widetilde{F}_{\rho_\lambda}(\zeta, z) - A|Q(\lambda)(\zeta - z)|^2$$

Alors pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in U_{\overline{D}}^2 \times \Delta_{(1,\ldots,N)}$

$$-\text{Re } \varphi(\zeta, z) \geq \rho_\lambda(z) - \rho_\lambda(\zeta) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2$$

Pour finir, on pose pour $z \in U_{\overline{D}},\ \zeta \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \Delta_{(1,\ldots,N)}$

$$\begin{cases} w_j(\zeta, z, \lambda) = v_j(z, \zeta, \lambda) \\ w(\zeta, z, \lambda) = (w_1(\zeta, z, \lambda), \ldots, w_n(\zeta, z, \lambda)) \\ \Phi(\zeta, z, \lambda) = -\varphi(z, \zeta, \lambda) =< w(\zeta, z, \lambda), \zeta - z > \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in U^2_{\overline{D}} \times \Delta_{(1,\dots,N)}$,

$$\text{Re } \Phi(\zeta, z, \lambda) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 \tag{1.4.2}$$

Avec les notations des paragraphes 1.1.5 et 1.1.7, posons, lorsque cela est défini :

$$\begin{aligned}\omega(\zeta, z, \lambda) = \chi(\lambda_0)\frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^2} &+ (1 - \chi(\lambda_0))(1 - \chi(\lambda_{N+1}))\frac{w(\zeta, z, \overset{\circ *}{\lambda})}{\Phi(\zeta, z, \overset{\circ *}{\lambda})} \\ &+ (1 - \chi(\lambda_0))\chi(\lambda_{N+1})\frac{w_*(\zeta, z)}{\Phi_*(\zeta, z)}\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Alors ω est une section de Leray associée à D satisfaisant les propriétés demandées dans la partie 1.2. Comme pour le cas q-convexe, en inversant les rôles de z et ζ, on obtient :

Lemme 1.4.3

1. *Pour tout $(z, \lambda) \in U_{\overline{D}} \times \Delta_{(1,\dots,N)}$ fixé, les applications $w(\zeta, z, \lambda)$ et $\varphi(\zeta, z, \lambda)$ sont $(q+1)$-holomorphes en $\zeta \in \mathbb{C}^n$.*
2. *Pour tout $K \in P'(N)$ et tout $(z, \lambda) \in D \times \Delta_K$ fixé, l'application $\omega(\zeta, z, \lambda)$ est $(q+1)$-holomorphe en $\zeta \in U_{\overline{D}} \setminus D$.*

Une formule d'homotopie

Proposition 1.4.4 *Si f est une $(0, r)$-forme différentielle sur D, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar\partial f$ est continue sur $\overline{D}$, alors :*

1. *si $r = 0$, avec $q \geq N$,*
$$f(z) = \widetilde{T}_1(\bar\partial f)(z) + L_0^* f(z)$$
2. *si $1 \leq r \leq q - N$,*
$$f(z) = \bar\partial \widetilde{T}_r f(z) + \widetilde{T}_{r+1}(\bar\partial f)(z) + L_r^* f(z)$$
3. *si $r = q - N + 1 = 0$,*
$$f(z) = \widetilde{T}_1(\bar\partial f)(z) + L_0^* f(z) + L_0^N f(z)$$
4. *si $r = q - N + 1 \geq 1$,*
$$f(z) = \bar\partial \widetilde{T}_r f(z) + \widetilde{T}_{r+1}(\bar\partial f)(z) + L_r^* f(z) + L_r^N f(z)$$

où si h est une $(0, r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar\partial h$ est continue sur $\overline{D}$, $\widetilde{T}_r h$ est donné par l'équation (1.2.3) et

$$L_r^*\, h\,(z) = \sum_{I \in P'(N)} \int_{S_{I*} \times \Delta_{I*}} h \wedge D_{n,r}$$

$$L_r^N\, h\,(z) = \int_{S_{(1,\dots,N)} \times \Delta_{(1,\dots,N)}} h \wedge D_{n,r}$$

Démonstration : D'après l'équation (1.2.3), il suffit de montrer que si f est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$, pour de bonnes valeurs de r, les intégrales

$$\int_{S_I\times\Delta_I} f\wedge D_{n,r}$$

sont nulles pour tout $I\in P'(N)$, sauf peut-être si $I=(1,\ldots,N)$.

Soit $I\in P'(N)$, $\dim S_I=2n-|I|$, comme f est une $(0,r)$-forme, le seul terme pouvant apporter une contribution non nulle dans la première intégrale est la partie de $D_{n,r}$ qui est de bidegré $(n,n-|I|-r)$ en ζ. Or d'après le Lemme 1.4.3, l'application $\omega(\zeta,z,\lambda)$ est $(q+1)$-holomorphe en ζ, pour tout $(z,\lambda)\in D\times\Delta_I$.

Donc si $n-|I|-r>n-q-1$, l'intégrale est nulle.

Alors, si f est une $(0,r)$-forme différentielle sur D, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar\partial f$ est continue sur $\overline{D}$, telle que

- $r\le q-N$, alors pour tout $I\in P'(N)$, $n-|I|-r>n-q-1$ et donc

$$\sum_{I\in P'(N+1)}\int_{S_I\times\Delta_I} f\wedge D_{n,r}=\sum_{I\in P'(N)}\int_{S_{I*}\times\Delta_{I*}} f\wedge D_{n,r}$$

- $r=q-N+1$, alors pour tout $I\in P'(N)$, sauf si $I=(1,\ldots,N)$, $n-|I|-r>n-q-1$ et donc

$$\sum_{I\in P'(N+1)}\int_{S_I\times\Delta_I} f\wedge D_{n,r}=\sum_{I\in P'(N)}\int_{S_{I*}\times\Delta_{I*}} f\wedge D_{n,r}+\int_{S_{(1,\ldots,N)}\times\Delta_{(1,\ldots,N)}} f\wedge D_{n,r}$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition. □

Considérons $g\in\mathcal{C}^0_{0,r}(D_0)$, $r\ge 1$ avec supp g $\subset\subset$ D$_0$, posons maintenant,

$$T'_r g=\widetilde{T}_r(g|_D)+\sum_{I\in P'(N+1)}(-1)^{|I|}\bar\partial\int_{R_I\times\Delta_{0I}} g\wedge D_{n,r-2} \tag{1.4.4}$$

avec $D_{n,-1}:=0$.

Il est clair que $T'_r g-\widetilde{T}_r(g)$ est $\bar\partial$-fermé.

Par ailleurs, la $(q+1)$-holomorphie de la section de Leray permet d'affirmer que si $r\le q-N+1$, on a :

$$\sum_{I\in P'(N+1)}\int_{R_I\times\Delta_I} Ef\wedge D_{n,r-1}=\sum_{I\in P'(N)}\int_{R_{I*}\times\Delta_{I*}} Ef\wedge D_{n,r-1} \tag{1.4.5}$$

Alors un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas q-convexe, permet d'affirmer que si $f \in C^1_{0,r}(\overline{D})$, on a

$$T_r f := T'_r E f = -\int_{D_0\times\Delta_0} Ef \wedge D_{n,r-1} + \sum_{I\in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \int_{R_I\times\Delta_{0I}} \bar\partial(Ef)\wedge D_{n,r-1}$$
$$+ \sum_{I\in P'(N)} \int_{R_{I*}\times\Delta_{I*}} Ef\wedge D_{n,r-1}$$

Revenons pour l'instant aux formules d'homotopies données par la Proposition 1.4.4.

1.4.2 Les termes linéaires

1.4.2.1 – Si $r = q - N + 1$.
Soient $R_2 > 0$ et $\beta > 0$ avec $R_2^2 - \beta > 0$, assez petits pour que $(U, -\rho_1 - \beta, \dots, -\rho_N - \beta)$ soit une configuration q-convexe et que $\cap_{i=1}^N \{z \in U | -\rho_i < \beta\} \cap B(\xi, R_2)$ soit une intersection de classe $\mathcal{C}^d$.
Quitte à diminuer R, on peut supposer que

$$\begin{cases} 1. & B(\xi, R) \subset\subset \bigcap_{i=1}^N \{z \in U | -\rho_i(z) < \beta\} \cap B(\xi, R_2) \\ 2. & R^2 \ < \ R_2^2 - \beta \end{cases}$$

On remarque ici que R_2 et donc R peuvent être choisis indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \dots, \rho_N$.

Soit f une $(0,r)$-forme différentielle, continue sur $\overline{D}$ et telle que $\bar\partial f = 0$, supp $f \subset\subset \overline{G} \cap B(\xi, R)$, et f vérifie la condition (C1).

La condition de support imposée à f implique que $L^*_{q-N+1} f = 0$. Montrons maintenant, par une méthode similaire à celle de C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer dans [L-T/Le 3], qu'il en est de même pour $L^N_{q-N+1} f$.

Définition 1.4.5 *Soit X une variété complexe de dimension n, on dit que X est une* extension q-convexe, $1 \le q \le n-1$, *de K où K est un fermé inclus dans X, s'il existe c, C, avec $-\infty < c < C \le +\infty$ et une fonction $r : U \to (-\infty, C[$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs réelles telle que pour tout $\zeta \in U$, la forme de Levi de r au point ζ admette au moins $(q+1)$ valeurs propres strictement positives, où U est un voisinage de $\overline{X \setminus K}$, tels que :*

(i) $K \cap U \subset \{r \le c\}$

(ii) $\{c \le r \le t\}$ est compact pour tout $t < C$.

Soit $\varepsilon > 0$, on construit une fonction θ_ε définie sur $\mathbb{R}$, convexe et $\mathcal{C}^\infty$ qui coïncide avec la fonction valeur absolue sur $]-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty[$. On peut ainsi supposer que :

(i) $\theta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \ge \varepsilon$, $\theta_\varepsilon(t) = |t|$

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\theta''_\varepsilon(t) \geq 0$

(iv) $\forall t \in [-\varepsilon, 0]$, $-1 \leq \theta'_\varepsilon(t) \leq 0$

(v) $\forall t \in [0, \varepsilon]$, $0 \leq \theta'_\varepsilon(t) \leq 1$

Définition 1.4.6 *Soient h et g deux fonctions définies sur $U \subset\subset \mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^k$, à valeurs réelles, on définit le* maximum généralisé, de h et g, *$m_\varepsilon(h,g)$ de la manière suivante :*

$$\forall z \in U, \quad m_\varepsilon(h,g)(z) = \frac{1}{2}\left[h(z) + g(z) + \theta_\varepsilon(h(z) - g(z))\right]$$

On remarque que si h et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors $m_\varepsilon(h,g)$ est classe $\mathcal{C}^k$. On a de plus la proposition suivante.

Proposition 1.4.7 *Si $k \geq 2$, et si on suppose que pour tout λ_1, $\lambda_2 \geq 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, la forme de Levi de $\lambda_1 h + \lambda_2 g$ admet au moins $q+1$ valeurs propres positives alors la forme de Levi de $m_\varepsilon(h,g)$ admet au moins $q+1$ valeurs propres positives.*

Démonstration : h et g étant à valeurs réelles, de simples calculs montrent que, pour $\zeta \in U$ et $w \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{m_\varepsilon(h,g)}(\zeta)(w) = \frac{1}{2}\Big[&\left(1 + \theta'_\varepsilon(h(\zeta) - g(\zeta))\right)\mathcal{L}_h(\zeta)(w) \\ &+ \left(1 - \theta'_\varepsilon(h(\zeta) - g(\zeta))\right)\mathcal{L}_g(\zeta)(w) \\ &+ \theta''_\varepsilon(h(\zeta) - g(\zeta))\,|\partial(h-g)(\zeta)(w)|^2\Big]\end{aligned}$$

D'après la définition de θ_ε, le dernier terme est positif, ainsi, la forme de Levi de $m_\varepsilon(h,g)$ en un point $\zeta \in U$ est la somme d'une forme quadratique positive et d'une forme ayant au moins $q+1$ valeurs propres positives, ce qui permet de conclure. $\square$

Considérons les applications $r_i = -\rho_i$, pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $r_{N+1}(z) = |\xi - z|^2 - R_2^2 + \beta$ (alors $B(\xi, R_2) = \{z \in U | r_{N+1}(z) < \beta\}$, et $B(\xi, R) \subset\subset \{z \in U | r_{N+1}(z) < 0\}$), on définit pour $z \in U$:

$$\begin{cases} \eta_1(z) = r_1(z) \\ \eta_k(z) = m_\varepsilon(\eta_{k-1}, r_k)(z) \quad \forall k \in \{2, \ldots, N+1\} \end{cases}$$

D'après les propriétés des applications $r_1, \ldots, r_{N+1}$ et la proposition précédente, pour tout $k \in \{1, \ldots, N+1\}$, la forme de Levi de η_k admet au moins $q+1$ valeurs propres strictement positives.
Si $0 < \beta' \leq \beta$, on note $F^\varepsilon_{\beta'} = \{z \in U | \eta_{N+1}(z) < \beta'\}$. Alors on peut choisir $\varepsilon > 0$ pour que les inclusions suivantes soient vraies :

$$B(\xi, R) \subset\subset F^\varepsilon_\beta \subset\subset U \tag{1.4.6}$$

Par ailleurs, pour tout $0 < \beta' < \beta$, F_β^ε est une extension q-convexe de $F_{\beta'}^\varepsilon$.

On va maintenant démontrer que $L_{q-N+1}^N f$ est nul en tout point $z \in D$. Soit $z \in D$ et soit $\beta' \in]0;\beta[$ assez petit tel que pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$, $r_i(z) > 2\beta'$.
Soit $\mathcal{G}$ un voisinage de z tel que

$$\mathcal{G} \subset\subset D \cap \{\zeta \in U | \forall i \in \{1,\ldots,N\}\ r_i(\zeta) > 2\beta'\}$$

On remarque que pour ε assez petit, comme $B(\xi,R) \subset\subset \{z \in U | r_{N+1}(z) < 0\}$, on a

$$S_{(1,\ldots,N)} \subset\subset F_{\beta'}^\varepsilon \tag{1.4.7}$$

et

$$\mathcal{G} \subset U \setminus F_{\beta'}^\varepsilon \tag{1.4.8}$$

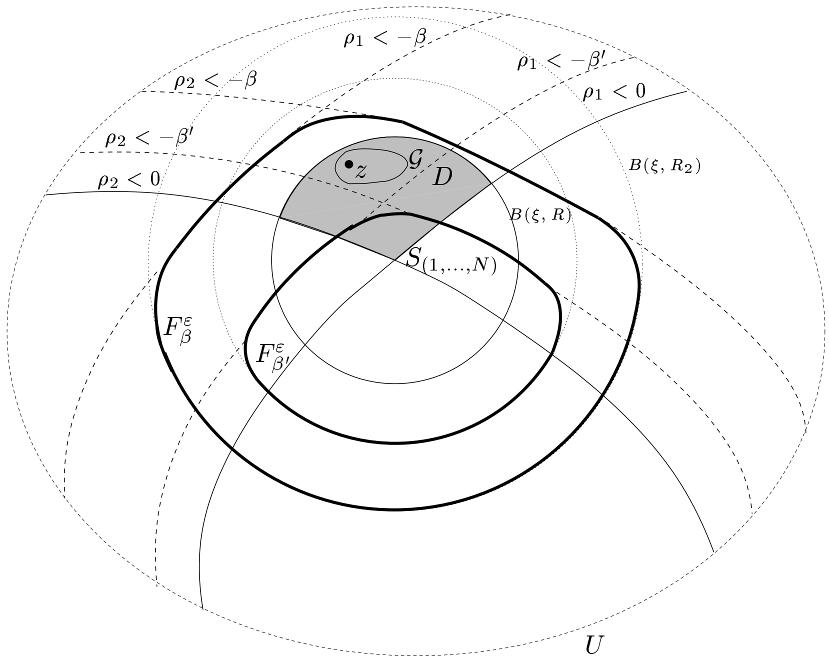
La partie de $D_{n,r}(\zeta,z,\lambda)$ qui intervient dans l'intégrale est de bidegré $(n, n-q-1)$ en ζ. Or d'après le Lemme 1.4.3, elle est $\bar\partial$-fermée en ζ sur $F_{\beta'}^\varepsilon$ et ce pour tout $(z,\lambda) \in \mathcal{G} \times \Delta_{(1,\ldots,N)}$. De plus F_β^ε est une extension q-convexe de $F_{\beta'}^\varepsilon$, alors d'après le Théorème 12.11 dans [He/Le 2], on peut trouver une suite $(g_p(z,\lambda))_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $Z_{n,n-q-1}^0(F_\beta^\varepsilon)$ qui converge uniformément vers $D_{n,r}(\cdot,z,\lambda)$ quand p tend vers $+\infty$.
La convergence étant uniforme, on a

$$L_{q-N+1}^N f(z) = \lim_{p\to+\infty} \int_{(\zeta,\lambda)\in S_{(1,\ldots,N)}\times\Delta_{(1,\ldots,N)}} u(\zeta) \wedge g_p(z,\lambda)(\zeta) \tag{1.4.9}$$

Si $q = n-1$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \Delta_{(1,\ldots,N)}$, $g_p(z,\lambda)$ est une $(n,0)$-forme $\bar\partial$-fermée dans F_β^ε donc sur $B(\xi,R)$, alors la condition (C1) implique que le terme de droite dans l'égalité (1.4.9) est nul et donc $L_{q-N+1}^N f = 0$.
Si $q \le n-2$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \Delta_{(1,\ldots,N)}$, $g_p(z,\lambda) \in Z_{n,n-q-1}^0(F_\beta^\varepsilon)$, considérons leurs restrictions à $B(\xi,R)$, $B(\xi,R)$ étant pseudoconvexe, il existe $h_p(z,\lambda) \in \mathcal{C}_{n,n-q-2}^0(B(\xi,R))$ telle que $\bar\partial_\zeta h_p(z,\lambda) = g_p(z,\lambda)$. On utilise alors le théorème de Stokes :

$$\begin{aligned}
\int_{S_{(1,\ldots,N)}\times\Delta_{(1,\ldots,N)}} & f(\zeta)\wedge g_p(z,\lambda)(\zeta) \\
&\overset{Fubini}{=} \int_{\Delta_{(1,\ldots,N)}} \int_{S_{(1,\ldots,N)}} f(\zeta) \wedge g_p(z,\lambda)(\zeta) \\
&= \int_{\Delta_{(1,\ldots,N)}} \int_{\zeta\in S_{(1,\ldots,N)}} f(\zeta) \wedge \bar\partial h_p(z,\lambda)(\zeta) \\
&= \int_{\Delta_{(1,\ldots,N)}} \int_{\zeta\in S_{(1,\ldots,N)}} d_\zeta(f(\zeta) \wedge h_p(z,\lambda))(\zeta) \\
&\overset{Stokes}{=} \int_{\Delta_{(1,\ldots,N)}} \int_{\partial S_{(1,\ldots,N)}} f(\zeta) \wedge h_p(z,\lambda)(\zeta)
\end{aligned}$$

or $\partial S_{(1,\dots,N)} = S_{(1,\dots,N,*)}$ et f est nulle sur $S_{(1,\dots,N,*)}$, donc le terme de droite dans l'égalité (1.4.9) est nul.



<u>*Illustration de la démonstration de l'annulation du terme*</u> $L^N_{q-N+1} f_-$

1.4.2.2 – Si $r \leq q - N$.

Soit f une $(0, r)$-forme différentielle sur D, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar{\partial} f$ est continue sur $\overline{D}$, on veut étudier

$$L^*_r f(z) = \sum_{I \in P'(N)} \int_{S_{I*} \times \Delta_{I*}} f(\zeta) \wedge D_{n,r}(\zeta, z, \lambda)$$

Lemme 1.4.8 *Il existe R_4 que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de $\rho_1, \dots, \rho_N$ tel que si f est une $(0, r)$-forme différentielle sur D, avec $r \leq q - N$, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar{\partial} f$ est continue sur $\overline{D}$, alors $L^*_r f$ est de classe $\mathcal{C}^{d-2}$ sur $\overline{B(\xi, R_4)}$.*
De plus si $f \in \mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{D})$, $s \in \{0, \dots, d-2\}$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de f telle que

$$\|L^*_r f\|_{s, B(\xi, R_4)} \leq C \|f\|_{s, D} \tag{1.4.10}$$

Démonstration : Soit $R' > 0$ tel que $R' < R$ et $B(\xi, R') \subset\subset U$.
Pour tout $I \in P(N, *)$, on a $S_I \subset S_*$ donc pour tout couple $(\zeta, z) \in S_I \times B(\xi, R')$,

$$|\zeta - z|^2 \geq (R - R')^2 \tag{1.4.11}$$

Les applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ étant continues et nulles au point ξ, et l'ensemble $\Delta_{(1,\ldots,N)}$ étant compact, il existe un réel $R_3 > 0$, que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de $\rho_1, \ldots, \rho_N$, tel que $R_3 < R$ et pour tout $J \in P'(N)$ et tout $(z, \lambda) \in B(\xi, R_3) \times \Delta_J$

$$\rho_\lambda(z) < \frac{\alpha}{4}(R - R')^2$$

Alors, d'après (1.4.2), pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in S_I \times B(\xi, R_3) \times \Delta_I$ tels que $\lambda_0 + \lambda_{N+1} \neq 1$, on a

$$\text{Re } \Phi(\zeta, z, \overset{\circ *}{\lambda}) \geq -\rho_{\overset{\circ *}{\lambda}}(z) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 \geq \frac{\alpha}{4}(R - R')^2$$

De plus, $R_3 < R$ donc, d'après (1.4.1), pour tout $(\zeta, z) \in S_I \times B(\xi, R_3)$, on a

$$\text{Re } \Phi_*(\zeta, z) \geq -\rho_*(z) + \widetilde{\gamma}|\zeta - z|^2 \geq \widetilde{\gamma}(R - R')^2$$

Ainsi, pour tout $I \in P'(N, *)$, les dénominateurs qui entrent en compte dans le noyau $D_{n,r}$ sont non nuls et leurs parties réelles sont minorées par une constante strictement positive pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in S_I \times B(\xi, R_3) \times \Delta_I$, de plus, $\omega(\zeta, z, \lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^{d-1}$ en z sur $B(\xi, R_3) \subset U$. Donc le noyau $D_{n,r}$ est de classe $\mathcal{C}^{d-2}$.
On peut alors utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale, pour montrer que, pour tout $I \in P'(N, *)$, $z \mapsto \int_{\zeta \in S_I \times \Delta_I} f(\zeta) \wedge D_{n,r}(\zeta, z, \lambda)$ est une application de classe $\mathcal{C}^{d-2}$ sur $B(\xi, R_3)$. Soit $R_4 < R_3$, alors, $L_r^* f$ est de classe $\mathcal{C}^{d-2}$ sur $\overline{B(\xi, R_4)}$. Donc R_4 convient.
Pour démontrer (1.4.10), il suffit de remarquer que chaque composante de $D_{n,r}$ est de classe $\mathcal{C}^s$ sur $\overline{B(\xi, R_4)}$. Ainsi, si l'on applique un opérateur différentiel d'ordre inférieur ou égal à s à $L_r^* f$, on a une combinaison linéaire finie de termes majorés à une constante près par la norme infinie de f, celle-ci étant inférieure à la norme $\mathcal{C}^s$, cela démontre l'inégalité cherchée. □

On utilise maintenant l'opérateur T défini par le Corollaire 1.12.2 dans [He/Le 1], avec la section de Leray associée à $\mathcal{D} = B(\xi, R_4)$ (voir la Définition 2.1.2 et le Corollaire 2.1.4 dans [He/Le 1]), on a alors :

$$\forall z \in B(\xi, R_4),\ L_r^* f(z) = \bar{\partial} T L_r^* f(z) + T \bar{\partial} L_r^* f(z) \tag{1.4.12}$$

De plus, d'après les propriétés du noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman et la construction de T (voir [He/Le 1]) on a la proposition suivante :

Proposition 1.4.9 *Si $g \in \mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{\mathcal{D}})$, si $\mathcal{D}' \subset\subset \mathcal{D}$, alors pour tout $0 < \delta < 1$, il existe une constante C_δ indépendante de g telle que*

$$\|Tg\|_{s+\delta, \mathcal{D}'} \leq C_\delta \|g\|_{s, \mathcal{D}} \tag{1.4.13}$$

On choisit $R_5 < R_4$, et on pose $\mathcal{D}' = B(\xi, R_5)$. Alors, on peut établir la formule d'homotopie suivante :

Proposition 1.4.10 *Si f est une $(0,r)$-forme différentielle sur D, avec $r \leq q-N-1$, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar{\partial} f$ est continue sur $\overline{D}$, alors pour tout $z \in \mathcal{D}'$, on a :*

– *si $r = 0$*

$$f(z) = \widetilde{T}_1(\bar{\partial} f)(z) + TL_1^*(\bar{\partial} f)(z) + \bar{\partial} TL_0^* f(z)$$

– *si $r \geq 1$*

$$f(z) = \widetilde{T}_{r+1}(\bar{\partial} f)(z) + TL_{r+1}^*(\bar{\partial} f)(z) + \bar{\partial}\widetilde{T}_r f(z) + \bar{\partial} TL_r^* f(z)$$

Démonstration : - Supposons que $r = 0$. Soit $z \in \mathcal{D}'$.
D'après la Proposition 1.4.4, comme $r \leq q - N$, on a :

$$f(z) = \widetilde{T}_1(\bar{\partial} f)(z) + L_0^* f(z)$$

En appliquant l'opérateur de Cauchy-Riemann à cette équation, il vient :

$$\bar{\partial} f(z) = \bar{\partial}\widetilde{T}_1(\bar{\partial} f)(z) + \bar{\partial} L_0^* f(z)$$

Par ailleurs, comme $r + 1 \leq q - N$, on peut appliquer la Proposition 1.4.4 à la fonction $\bar{\partial} f$, ce qui donne :

$$\bar{\partial} f(z) = \bar{\partial}\widetilde{T}_1(\bar{\partial} f)(z) + L_1^*(\bar{\partial} f)(z)$$

En identifiant, on obtient alors :

$$\bar{\partial} L_0^* f(z) = L_1^*(\bar{\partial} f)(z)$$

Ainsi, l'équation (1.4.12) devient :

$$L_0^* f(z) = \bar{\partial} TL_0^* f(z) + TL_1^* \bar{\partial} f(z)$$

Ce qui donne le résultat pour $r = 0$ en utilisant une nouvelle fois la Proposition 1.4.4.
- Supposons que $r \geq 1$, soit $z \in \mathcal{D}'$.
D'après la Proposition 1.4.4, comme $r \leq q - N$, on a :

$$f(z) = \bar{\partial}\widetilde{T}_r f(z) + \widetilde{T}_{r+1}(\bar{\partial} f)(z) + L_r^* f(z)$$

En appliquant l'opérateur de Cauchy-Riemann à cette équation, il vient :

$$\bar{\partial} f(z) = \bar{\partial}\widetilde{T}_{r+1}(\bar{\partial} f)(z) + \bar{\partial} L_r^* f(z)$$

Par ailleurs, comme $r+1 \leq q-N$, la Proposition 1.4.4 appliquée à la fonction $\bar{\partial} f$ donne :

$$\bar{\partial} f(z) = \bar{\partial}\widetilde{T}_{r+1}(\bar{\partial} f)(z) + L_{r+1}^*(\bar{\partial} f)(z)$$

En identifiant, on obtient alors :

$$\bar{\partial} L_r^* f(z) = L_{r+1}^*(\bar{\partial} f)(z)$$

On peut alors conclure en utilisant l'équation (1.4.12) ainsi que la Proposition 1.4.4. □

Par ailleurs, on a :

Lemme 1.4.11 *Si f est une $(0,r)$-forme différentielle sur D, avec $r \leq q - N$, continue sur $\overline{D}$ et telle que $\bar{\partial} f = 0$, alors $\bar{\partial} L_r^* f = 0$ sur D.*

Démonstration : Il s'agit ici d'appliquer l'opérateur de Cauchy-Riemann aux équations données par la Proposition 1.4.4 et d'annuler $\bar{\partial} f$. □

On peut maintenant résumer les résultats de ce paragraphe dans la proposition suivante :

Proposition 1.4.12 *Supposons que $N \leq q$.*
Il existe $R_5 > 0$ que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de $\rho_1, \ldots, \rho_N$ tel que si f est une $(0,r)$-forme différentielle sur D, avec $r \leq q - N$, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar{\partial} f = 0$ sur $\overline{D}$, alors on a :

- *si $r = 0$, c'est-à-dire que f est une fonction holomorphe sur D, continue sur $\overline{D}$, alors f se prolonge holomorphiquement à $B(\xi, R_5)$.*
- *si $r \geq 1$, pour tout $z \in D \cap B(\xi, R_5)$, on a*

$$f(z) = \bar{\partial} \widetilde{T}_r f(z) + \bar{\partial} T L_r^* f(z) \tag{1.4.14}$$

Si de plus $f \in \mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{D})$, $s \in \{0, \ldots, d-2\}$, alors pour tout $0 < \delta < 1$, il existe une constante C_δ indépendante de f telle que

$$\|T L_r^* f\|_{s+\delta, D \cap B(\xi, R_5)} \leq C_\delta \|f\|_{s,D} \tag{1.4.15}$$

Démonstration : Il reste à traiter le cas où $r = q - N$, d'après la Proposition 1.4.4, on a :

- si $r = 0$, $f(z) = L_0^* f(z) = \bar{\partial} T L_0^* f(z) + T \bar{\partial} L_0^* f(z)$, or $\bar{\partial} L_0^* f(z) = 0$ d'après le lemme précédent.
- si $r \geq 1$, $f(z) = \bar{\partial} \widetilde{T}_r f(z) + L_r^* f(z) = \bar{\partial} \widetilde{T}_r f(z) + \bar{\partial} T L_r^* f(z)$ car $\bar{\partial} L_r^* f = 0$ d'après le lemme précédent. □

En utilisant maintenant l'opérateur T_r à la place de l'opérateur $\widetilde{T}_r$, on obtient, si $f \in \mathcal{C}^1_{0,r}(\overline{D})$, $1 \leq r \leq q - N$, et pour tout $z \in D \cap B(\xi, R_5)$:

$$f(z) = \bar{\partial} T_r f(z) + \bar{\partial} T L_r^* f(z) \tag{1.4.16}$$

On va maintenant donner les estimations $\mathcal{C}^k$, $k > 0$ pour $T_r f$.

1.4.3 Estimations de $T_r f$

Soit f une $(0,r)$ forme différentielle continue sur $\overline{D}$ et telle que $\bar\partial f = 0$, on rappelle que pour tout $z \in D$

$$\begin{aligned} T_r f(z) = &- \int_{D_0\times\Delta_0} Ef(\zeta)\wedge D_{n,r-1}(\zeta,z,\lambda) \\ &+ \sum_{I\in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \int_{R_I\times\Delta_{0I}} \bar\partial(Ef)(\zeta)\wedge D_{n,r-1}(\zeta,z,\lambda) \\ &+ \sum_{I\in P'(N)} \int_{R_{I*}\times\Delta_{I*}} Ef\wedge D_{n,r-1} \end{aligned}$$

L'estimation du premier terme est déjà connue car il s'agit du noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman. Il reste à considérer les deux derniers termes. Ici encore, on doit séparer le cas où $*\in I$, c'est-à-dire le cas où le bord délimité par $B(\xi,R)$ apparaît dans l'intégrale.
On écrit donc :

$$T_r f(z) = -\int_{D_0\times\Delta_0} Ef(\zeta)\wedge D_{n,r-1}(\zeta,z,\lambda) + T_r^1 f(z) + T_r^2 f(z)$$

avec

$$\begin{aligned} T_r^1 f(z) = &\sum_{I\in P'(N)} (-1)^{|I|+1} \int_{R_{I*}\times\Delta_{0I*}} \bar\partial(Ef)(\zeta)\wedge D_{n,r-1}(\zeta,z,\lambda) \\ &+ \sum_{I\in P'(N)} \int_{R_{I*}\times\Delta_{I*}} Ef\wedge D_{n,r-1} \end{aligned}$$

et

$$T_r^2 f(z) = \sum_{I\in P'(N)} (-1)^{|I|} \int_{R_I\times\Delta_{0I}} \bar\partial(Ef)(\zeta)\wedge D_{n,r-1}(\zeta,z,\lambda)$$

On remarque tout d'abord que dans le cas où $r = q-N+1$, les conditions supplémentaires sur f annulent le terme $T_r^1 f$.
Si $1\le r\le q-N$, soit R_5 donné par la Proposition 1.4.12. Le même raisonnement que celui effectué pour démontrer le Lemme 1.4.8 permet d'affirmer que si $f\in\mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{D})$, avec $s\in\{1,\dots,d-3\}$ et si $0\le\delta\le 1$ alors il existe une constante $C_{s,\delta}$ indépendante de f telle que

$$\|T_r^1 f\|_{s-1+\delta,B(\xi,R_5)\cap D} \le C_{s,\delta}\|f\|_{s,D}$$

Il reste donc à estimer $T_r^2 f$. Ce qui s'effectue comme dans le cas q-convexe avec quelques nuances apportées par l'inversion des variables z et ζ.

Ainsi, le même type de calcul que dans la sous-partie 1.3.3 permet d'affirmer que $T_r^2 f$ se décompose comme une combinaison linéaire finie d'intégrales de la forme suivante :

$$J^-(\nu, J, a_0, a_1) = \int_{R_I \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \Theta_J(\zeta, z) \wedge h_\nu^{d-2}(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2a_0} \Phi(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})^{a_1}}$$

où $h_\nu^s = h_\nu^s(\zeta, z, \lambda)$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^s$ sur $\overline{D_0} \times \overline{D} \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$, de classe $\mathcal{C}^s$ en z, réelle analytique en ζ, $\mathcal{C}^\infty$ en (ζ, λ) et qui s'annule à l'ordre ν en $\zeta = z$,

$$|I| = l, \; J = (\nu_1, \ldots, \nu_{l'}) \subset I, \; |J| = l',$$

$$\Theta_J(\zeta, z) = \mu_{\nu_1}(\zeta, z) \wedge \cdots \wedge \mu_{\nu_{l'}}(\zeta, z), \text{ avec } \mu_{\nu_s}(\zeta, z) = < w(\zeta, z, \tau^{\nu_s}), d\zeta >$$

$$\alpha_0 \geq 1, \; \alpha_1 \geq |I| \geq 1, \alpha_0 + \alpha_1 = n,$$

$$c(\zeta) \text{ est un coefficient de } \bar{\partial}(Ef).$$

Comme dans le cas q-convexe, il suffit d'estimer $J^-(l - l' + 1, J, \alpha_0, \alpha_1)$, $J^-(l - l' + 2, J, \alpha_0, \alpha_1 + 1)$ et leurs dérivées par rapport à z. On remarque de plus que la seule différence avec le cas q-convexe vient du fait que h_ν^s, contrairement à f_ν^s n'est plus $\mathcal{C}^\infty$ en z, c'est pour cela qu'on doit limiter supérieurement l'ordre pour lequel on estime le noyau. Notons D^p un opérateur différentiel en z d'ordre $p = p_1 + p_2 + p_3$, avec $p \leq d - 2$. Si on applique D^p à $J^-(\nu, J, a_0, a_1)$, on obtient une combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$\mathcal{J}^-(v, J, L, b_0, b_1)(z) = \int_{R_I \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \Theta_L(\zeta, z) \wedge h_v^{d-2-p}(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2b_0} \Phi(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$

où

1. $L \subset J \subset I$, $|L| = m = max(l' - p_2, 0)$, $L = (l_1, \ldots, l_m)$.
2. $a_0 \leq b_0 \leq a_0 + p_3$
3. $a_1 \leq b_1 \leq a_1 + p_1$
4. $2b_0 - v \leq 2a_0 + p_3 - \nu$

Comme dans le cas précédent, lorsque $p = 0$,
on a $J^-(\nu, J, a_0, a_1) = \mathcal{J}^-(\nu, J, J, a_0, a_1)$.

L'estimation de $\mathcal{J}^-(v, J, L, b_0, b_1)$ s'effectue ensuite comme celle de $\mathcal{J}^+(v, J, L, b_0, b_1)$, il reste seulement à vérifier que malgré l'inversion de z et de ζ, on peut établir des pseudocoordonnées analogues à celles de J. Michel (voir [Mi] et la sous-partie 1.3.5).
Pour des vecteurs linéairement indépendants $\lambda^1, \ldots, \lambda^l \in \Delta_I$, on définit

comme dans la sous-partie 1.3.5 le système de coordonnées $x(\zeta)$ au voisinage d'un point ζ_0, ainsi que y, x', x'' et $t(\zeta) = \rho_{\lambda^1}(\zeta)$.
On pose aussi pour $j \in \{1, \ldots, l\}$, et pour $(\zeta, z) \in U_D^2$

$$u_j(\zeta, z) = \mathrm{Im}\Phi(\zeta, z, \lambda^j)$$

$\mathcal{E}_\nu^s(\zeta, z)$, resp. $\mathcal{E}_\nu^s(\zeta, z, \lambda)$, désigne une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^s$ sur $(U_{\overline{D}} \setminus D) \times \overline{D}$, resp. $(U_{\overline{D}} \setminus D) \times \overline{D} \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$, indépendante de u et qui s'annule à l'ordre ν en $\zeta = z$.
L'équation (1.3.23) est encore vérifiée, cependant le système (1.3.24) est modifié, il devient :

$$\begin{cases} d_\zeta \Phi(\zeta, z, \lambda^j) = 2\partial_\zeta \rho_{\lambda^j}(z) + \mathcal{E}_1^\infty(\zeta, z) \\ d_\zeta \overline{\Phi(\zeta, z, \lambda^j)} = 2\overline{\partial}_\zeta \rho_{\lambda^j}(z) + \mathcal{E}_1^\infty(\zeta, z) \\ \qquad\qquad\qquad = 2d_\zeta \rho_{\lambda^j}(z) - 2\partial_\zeta \rho_{\lambda^j}(z) + \mathcal{E}_1^\infty(\zeta, z) \end{cases} \tag{1.4.17}$$

On obtient donc,

$$d_\zeta u_j(\zeta) = \frac{1}{2i}\left(4\partial_\zeta \rho_{\lambda^j}(z) - 2d_\zeta \rho_{\lambda^j}(z) + \mathcal{E}_1^\infty(\zeta, z)\right)$$

De plus

$$\mu(\zeta, z, \lambda^j) = 2\partial_\zeta \rho_{\lambda^j}(z) + \mathcal{E}_1^\infty(\zeta, z)$$

Les applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ étant de classe $\mathcal{C}^d$, avec $d \geq 3$, on a pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$

$$d_\zeta \rho_{\lambda^j}(z) - d_\zeta \rho_{\lambda^j}(\zeta) = \mathcal{E}_1^{d-1}(\zeta, z)$$

par ailleurs, sur R_I, $d_\zeta \rho_{\lambda^j}(\zeta) = d_\zeta \rho_{\lambda^1}(\zeta) = dt$, on a alors :

$$d_\zeta u_j(\zeta) = \frac{1}{2i}\left(2\mu(\zeta, z, \lambda^j) - 2dt + \mathcal{E}_1^{d-1}(\zeta, z)\right)$$

Ce que l'on peut aussi écrire

$$\mu(\zeta, z, \lambda^j) = i d_\zeta u_j(\zeta) + dt + \mathcal{E}_1^{d-1}(\zeta, z)$$

Et en utilisant l'équation (1.3.23), on obtient, sur $R_I \cap U(\zeta_0)$

$$\mu(\zeta, z, \lambda^j) = i d_x p_j(x) + (1 + i d_{j,2n-l+1}(y))dt + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta, z) \tag{1.4.18}$$

Cette équation est la même que l'équation (1.3.25), donc, on peut démontrer une proposition analogue à la Proposition 1.3.11, en remplaçant dans les notations les f par des h. Ceci termine de justifier que l'on peut utiliser les pseudocoordonnées pour estimer le noyau T_r^2 et achève la démonstration du Théorème 1.0.3.

Chapitre 2

Résolution locale dans des sous-variétés CR

Le but de ce chapitre est d'étudier la résolution locale de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle pour des formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ jusqu'au bord dans plusieurs types de domaines inclus dans une sous-variété CR q-concave de $\mathbb{C}^n$ de codimension k, avec $1 < k \leq n$.
Comme dans [L-T/Le 4], on considère les formes de bidegré (n, r). Ceci permet de travailler avec de véritables formes différentielles et non des classes d'équivalence, de plus, l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel est alors la restriction de la différentielle extérieure usuelle d sur M (voir aussi le Chapitre II.1 dans [Tr]). Le fait d'étudier uniquement ces bidegrés ne constitue pas une véritable restriction car on travaille localement. En effet, on pourra par la suite travailler avec des formes à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe que l'on supposera trivial au-dessus des ensembles que l'on considère ici.

Soit M une sous-variété CR de $\mathbb{C}^n$ de codimension k, q-concave (voir les définitions de la partie 2.1). Il est bien connu qu'il y a un saut dans les degrés pour lesquels on sait résoudre l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle, ainsi, notre étude est séparée en deux : la résolution pour les «grands» degrés, c'est-à-dire pour $n - q - k + 1 \leq r \leq n - k$, appelé *«cas convexe»* et la résolution pour les «petits» degrés, c'est-à-dire pour $1 \leq r \leq q - 2$, appelé *«cas concave»*.

2.1 Définitions et notations

2.1.1 Sous-variétés de Cauchy-Riemann

Soit M une sous-variété réelle de classe $\mathcal{C}^d$, $d \geq 2$ et de codimension $k \leq n$ incluse dans $\mathbb{C}^n$. Nous allons rappeler quelques définitions concernant les sous-variétés CR, pour plus de détails, voir par exemple [Bo] ou [L-T 2]. Pour $p \in M$, on note $T_p^{\mathbb{C}}M$ l'espace tangent complexe à M en p.

Soit $\xi \in M$, on peut représenter M au voisinage de ξ de la façon suivante :

$$M \cap U = \{z \in U | \widehat{\rho}_1(z) = \cdots = \widehat{\rho}_k(z) = 0\} \tag{2.1.1}$$

où les applications $\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_k$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage ouvert U de ξ dans $\mathbb{C}^n$ et à valeurs réelles avec $d\widehat{\rho}_1 \wedge \cdots \wedge d\widehat{\rho}_k \neq 0$ sur U.
Une telle famille $(\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_k)$ est appelée *système local de fonctions définissantes.*

Si M est représentée par un tel système, alors pour tout $p \in M \cap U$,

$$T_p^{\mathbb{C}}M = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n \,|\, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widehat{\rho}_\nu}{\partial z_j}(p)\zeta_j = 0,\ \nu = 1, \ldots, k \right\} \tag{2.1.2}$$

et $\dim_{\mathbb{C}} T_p^{\mathbb{C}}M \geq n - k$.

Définition 2.1.1 *On dit que M est une* sous-variété de Cauchy-Riemann *ou* sous-variété CR de $\mathbb{C}^n$ *si le nombre* $\dim_{\mathbb{C}} T_p^{\mathbb{C}}M$ *ne dépend pas du point $p \in M$, et on dit que M est* générique *si la dimension de $T_p^{\mathbb{C}}M$ est minimale, i.e.* $\dim_{\mathbb{C}} T_p^{\mathbb{C}}M = n - k$ *pour tout $p \in M$.*

En représentation locale, M est *CR générique* si et seulement si pour tout système local de fonctions définissantes $\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_k$, on a

$$\bar{\partial}\widehat{\rho}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\widehat{\rho}_k \neq 0 \text{ sur } M$$

Définition 2.1.2 *Soit M une sous-variété CR de $\mathbb{C}^n$, on dit que M est* q-concave, *$1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$, si pour tout $\xi \in M$, pour toute représentation locale de M de type (2.1.1) au voisinage de ξ et tout $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, la forme quadratique sur $T_\xi^{\mathbb{C}}M$ définie par*

$$\mathcal{L}_{\widehat{\rho}_x}^M(\xi)(\zeta) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \widehat{\rho}_x}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(\xi)\zeta_i\overline{\zeta}_j \tag{2.1.3}$$

où $\widehat{\rho}_x = x_1\widehat{\rho}_1 + \cdots + x_k\widehat{\rho}_k$ et $\zeta \in T_\xi^{\mathbb{C}}M$, admet au moins q valeurs propres strictement négatives.

2.1.2 Notations

2.1.2.1 – Dans ce chapitre, on s'intéresse aux formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$. On reprend les notations du chapitre précédent pour désigner les

espaces de formes différentielles sur $\mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ (voir le paragraphe 1.1.11). Par exemple, si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$:
• $\mathcal{C}^\infty_{n,r}(U \cap M)$ désigne l'espace des formes différentielles de bidegré (n, r) sur $\mathbb{C}^n$ dont les coefficients sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $M \cap U$ dans $\mathbb{C}^n$ et sont restreints à $M \cap U$,
• $\mathcal{C}^\infty_{n,r}(\overline{U})$ désigne l'espace des formes différentielles de bidegré (n, r) sur $\mathbb{C}^n$ dont les coefficients sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\overline{U}$.

Par ailleurs, si W est un ouvert de M, on note $[\mathcal{C}^\infty_s]_M(W)$, resp. $[\mathcal{C}^\infty_s]_M(\overline{W})$, l'espace des formes différentielles de degré s sur M, à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(W)$, resp. $\mathcal{C}^\infty(\overline{W})$.

2.1.2.2 – On désigne par $\mathcal{E}^{*,*}_{\mathbb{C}^n}$ le faisceau des germes de formes différentielles à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n$, par $\mathcal{E}^{n,r}_{\mathbb{C}^n}$ le sous-faisceau des germes de (n, r)-formes.

Remarque. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ alors d'après la théorie des faisceaux, on peut identifier l'espace des sections de $\mathcal{E}^{n,r}_{\mathbb{C}^n}$ au-dessus de U avec $\mathcal{C}^\infty_{n,r}(U)$. Quelques rappels de théorie des faisceaux sont fait dans l'Annexe A, pour plus de détails, voir par exemple [Go] ou [Gu/Ro].

2.1.3 Définition des formes de bidegré (n, r) sur M

Soit M une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ et W un sous-ensemble ouvert de M.
$[\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(W)$ désigne l'espace des formes de degré $n + r$ sur M qui sont la restriction à W d'une forme de bidegré (n, r) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de W dans $\mathbb{C}^n$.
On définit de manière analogue $[\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(\overline{W})$ et $[\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(\overline{W_1} \cap W_2)$ où W_1 et W_2 sont des ouverts de M à bord Lipschitz.

Autrement dit, si $j : M \to \mathbb{C}^n$ est l'inclusion, on a

$$\begin{aligned}[\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(W) = \{f \in [\mathcal{C}^\infty_{n+r}]_M(W) \mid \exists V \overset{\text{ouvert}}{\subseteq} \mathbb{C}^n, W \subseteq V \cap M,\\ \exists \widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(V),\ j^*\widetilde{f} = f \text{ sur } W\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(\overline{W}) = \{f \in [\mathcal{C}^\infty_{n+r}]_M(\overline{W}) \mid \exists V \overset{\text{ouvert}}{\subseteq} \mathbb{C}^n, W \subset\subset V \cap M,\\ \exists \widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(V),\ j^*\widetilde{f} = f \text{ sur } \overline{W}\}\end{aligned}$$

Comme la différentielle extérieure commute avec l'opération de restriction, l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel coïncide avec la différentielle extérieure. Ainsi si $f \in [\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(W)$, (resp. $f \in [\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(\overline{W})$), $df = j^*(d\widetilde{f})$.

Dans la suite, nous travaillerons avec des formes définies sur des sous-ensembles de M qui sont l'intersection transverse de domaines de classe $\mathcal{C}^2$, la proposition suivante donne une description des espaces de (n,r)-formes lisses sur de tels domaines :

Proposition 2.1.3 *Soient W_1 et W_2 deux ouverts dans M qui sont des intersections transverses d'un nombre fini d'ouverts dont le bord est de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose de plus que W_1 et W_2 se coupent transversalement.*
Alors si V_1 et V_2 sont des ouverts de $\mathbb{C}^n$ à bord $\mathcal{C}^2$ par morceaux, qui intersectent M transversalement et tels que, pour $i = 1,2$, $V_i \cap M = W_i$, on a les égalités suivantes :

$$[\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(W_1) = \{f \in [\mathcal{C}^\infty_{n+r}]_M(W_1) | \exists \widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(V_1),\ j^*\widetilde{f} = f\}$$
$$\left[\mathcal{C}^\infty_{n,r}\right]_M(\overline{W_1}) = \{f \in [\mathcal{C}^\infty_{n+r}]_M(\overline{W_1}) | \exists \widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(\overline{V_1}),\ j^*\widetilde{f} = f\}$$
$$\left[\mathcal{C}^\infty_{n,r}\right]_M(\overline{W}_1 \cap W_2) = \{f \in [\mathcal{C}^\infty_{n+r}]_M(\overline{W}_1 \cap W_2) | \exists \widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(\overline{V}_1 \cap V_2),\ j^*\widetilde{f} = f\}$$

Démonstration : Si V est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$, notons

$$[\mathcal{E}_{n,r}]_M(V) = \{f \in [\mathcal{C}^\infty_{n+r}]_M(V \cap M) | \exists \widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(V),\ j^*\widetilde{f} = f\}$$

Démontrons tout d'abord la première égalité.
Il est clair que $[\mathcal{E}_{n,r}]_M(V_1) \subseteq [\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(W_1)$, montrons donc l'inclusion inverse. Soit $f \in [\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(W_1)$, considérons V ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(V)$ tels que $W_1 \subset V \cap M$ et $j^*\widetilde{f} = f$ sur W_1. Alors

$$\widetilde{f} = \sum_{|I|=r} \widetilde{f}_I dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_I$$

où chaque $\widetilde{f}_I$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V.
Considérons pour tout I la restriction de $\widetilde{f}_I$ à M, notée $\widetilde{f}_I\big|_M$, alors $\widetilde{f}_I\big|_M \in \mathcal{C}^\infty(V_1 \cap M)$, on peut donc l'étendre à V_1, notons g_I cette extension et considérons

$$g = \sum_{|I|=r} g_I dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_I$$

Alors $g \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(V_1)$ et $j^*g = \sum_{|I|=r} g_I\big|_M j^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_I) = j^*\widetilde{f} = f$.
Ce qui termine la démonstration de la première égalité.

Démontrons maintenant la deuxième égalité. Soit $f \in [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{V_1})$, alors, il existe $g \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(\overline{V_1})$ telle que $j^*g = f$ sur $M \cap \overline{V_1} = \overline{W_1}$. Comme le bord de V_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, il existe un voisinage V de $\overline{V_1}$ sur lequel on peut prolonger g, donc $[\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{V_1}) \subset [\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(\overline{W_1})$, montrons l'inclusion inverse.

Soit $f \in [\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(\overline{W_1})$. Soit V un ouvert de $\mathbb{C}^n$ tel que $\overline{W_1} \subset V \cap M$ et qu'il existe $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(V)$ avec $j^*\widetilde{f} = f$. Quitte à restreindre V, on peut supposer que $V \subset\subset \mathbb{C}^n$.
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ tel que $V_1 \cup V \subset\subset U$. Soit χ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U dont le support est inclus dans V et qui vaut 1 sur un voisinage de $\overline{W_1}$, alors $g = \chi\widetilde{f}$ vérifie toujours $j^*g = f$ sur $\overline{W_1}$ et de plus $g \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(U)$, donc $g \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(\overline{V_1})$, ce qui démontre l'inclusion inverse.

Considérons maintenant la dernière égalité. Un raisonnement analogue à celui utilisé pour l'égalité précédente permet de montrer que
$[\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{V_1} \cap V_2) \subseteq [\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(\overline{W_1} \cap W)$.
Soit $f \in [\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(\overline{W_1} \cap W_2)$ et soit V un ouvert de $\mathbb{C}^n$ tel que $\overline{W_1} \cap W_2 \subseteq V$ et qu'il existe $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(V)$ telle que $j^*\widetilde{f} = f$ sur $\overline{W_1} \cap W_2$. Alors

$$\widetilde{f} = \sum_{|I|=r} \widetilde{f}_I dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_I$$

où chaque $\widetilde{f}_I$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V.
Considérons la restriction de chaque coefficient de $\widetilde{f}$ à $V \cap M$, notons la g_I. Alors pour tout I, g_I est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{W_1} \cap W_2$, mais comme l'intersection entre W_1 et W_2 est transverse, on peut l'étendre en une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $W_2 = V_2 \cap M$. Pour tout I, on peut ensuite étendre cette application en une application, notée $\widetilde{g}_I$ telle que $\widetilde{g}_I \in \mathcal{C}^\infty(V_2)$, alors en particulier, pour tout I, $\widetilde{g}_I \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V_1} \cap V_2)$ et si on pose

$$\widetilde{g} = \sum_{|I|=r} \widetilde{g}_I dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_I$$

On a bien $j^*\widetilde{g} = f$ sur $\overline{W_1} \cap W_2$. Ce qui démontre l'inclusion inverse. $\square$

Ainsi, cette proposition permet d'affirmer que si V est un ouvert, un fermé ou l'intersection transverse d'un fermé et d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dont le bord est assez régulier, l'espace $[\mathcal{E}_{n,r}]_M(V)$ ne dépend que de la trace de V sur M. Par la suite, on utilisera les deux notations, $[\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(.)$ ou $[\mathcal{E}_{n,r}]_M(.)$, suivant si on considère un sous-ensemble de M ou un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, pour un sous-ensemble V de $\mathbb{C}^n$, suffisamment régulier, on note indifféremment $[\mathcal{E}_{n,r}]_M(V)$ ou $[\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(V \cap M)$ l'espace des (n,r)-formes sur M lisses sur $M \cap V$.

De même, si φ est une application définie sur M, la proposition précédente permet d'affirmer que si $V \subset U$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ qui intersecte de manière transverse $\{z \in M | \varphi(z) = 0\}$, alors l'espace
$[\mathcal{E}_{n,r}]_M(V \cap \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) \leq 0\})$ ne dépend pas de l'extension de classe $\mathcal{C}^2$, $\widetilde{\varphi}$, de φ choisie mais seulement de φ et de l'intersection de V et M, on le notera aussi :

$$[\mathcal{E}_{n,r}]_{M\cap\{\varphi\leq 0\}}(V) \qquad \text{ou} \qquad [\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_{M\cap\{\varphi\leq 0\}}(V \cap M)$$

2.2 Étude du cas convexe

Soit M une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $\xi \in M$, dans cette partie, on s'intéresse à la résolution de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel avec régularité jusqu'au bord pour des formes différentielles dans $[\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{V})$ dans les deux cas suivants :

(I) $V = B(\xi, R)$, pour R assez petit,

(II) $V = \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) < 0\} \cap B(\xi, R)$, pour R assez petit et où $\widetilde{\varphi}$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage U de ξ dans $\mathbb{C}^n$ qui est le prolongement à U d'une fonction φ possédant de bonnes propriétés de convexité (voir la Définition 2.2.8) avec $\varphi(\xi) = 0$.

La démarche est la même dans les deux cas. Dans un premier temps, on démontre que les groupes de cohomologie pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur $V \cap M$ pour des formes lisses sur $\overline{V} \cap M$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie pour les sections de Whitney. Cet isomorphisme a été prouvé sans régularité jusqu'au bord et pour des ouverts quelconques dans [An/Fr/Na], A. Andreotti, G. Fredericks et M. Nacinovich ont obtenu des isomorphismes de faisceaux alors que dans cette partie, nous raisonnons pour V fixé.
Dans un second temps, on démontre l'annulation des groupes de cohomologie pour les sections de Whitney en utilisant les résultats du Chapitre 1.

2.2.1 Une autre définition de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel

Dans cette sous-partie, on définit l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel pour des formes qui sont lisses sur $M \cap \overline{V}$, où V est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ assez petit qui est l'intersection transverse d'un nombre fini d'ouverts à bord $\mathcal{C}^2$ tel que $\partial V \cap M$ est transverse. Pour cela, on reprend la construction classique, voir [An], [An/Fr/Na], [An/Hi] et [Na], adaptée aux formes lisses jusqu'au bord.

M est une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$, donc d'après le Lemme 1 de la partie 7.2 dans [Bo], il existe un voisinage U de ξ et un changement linéaire complexe de coordonnées, $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, qui envoie ξ à l'origine et tel que

$$M \cap U = \{(x + iy, w) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} | y = h(x, w)\} \qquad (2.2.1)$$

où $h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 0$.
On note $z = x + iy$.

Si on note $j : M \to \mathbb{C}^n$, l'inclusion de M dans $\mathbb{C}^n$, on a, à l'origine :

$$\begin{aligned} j^*(dw_j) &= dw_j, \quad 1 \leq j \leq n-k \\ j^*(d\overline{w}_j) &= d\overline{w}_j, \quad 1 \leq j \leq n-k \\ j^*(dx_j) &= dx_j, \quad 1 \leq j \leq k \\ j^*(dy_j) &= 0, \quad 1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Alors $(dx_1, \dots, dx_k, dy_1, \dots, dy_k, dw_1, \dots, dw_{n-k}, d\overline{w}_1, \dots, d\overline{w}_{n-k})$ forme une base de l'espace cotangent de $\mathbb{C}^n$, au voisinage de 0.
De plus, un système de fonctions définissantes pour M est donné par $(\widehat{\rho}_1, \dots, \widehat{\rho}_k)$ avec $\widehat{\rho}_j(z,w) = y_j - h_j(x,w)$ et on a $\bar{\partial}\widehat{\rho}_j(0) = -\frac{1}{2i}d\overline{z}_j$.
Ainsi $(dx_1, \dots, dx_k, \bar{\partial}\widehat{\rho}_1, \dots, \bar{\partial}\widehat{\rho}_k, dw_1, \dots, dw_{n-k}, d\overline{w}_1, \dots, d\overline{w}_{n-k})$ forme une base de l'espace cotangent de $\mathbb{C}^n$ au voisinage de 0.
De plus, $(j^*(dx_1), \dots, j^*(dx_k), j^*(dw_1), \dots, j^*(dw_{n-k}), j^*(d\overline{w}_1), \dots, j^*(d\overline{w}_{n-k}))$ est une famille libre au voisinage de 0. Notons U_ξ un tel voisinage. Le lecteur peut se reporter à la partie 8.3 dans [Bo] pour plus de détails.

Dans ce travail, nous effectuons une étude locale, aussi, nous supposerons que V vérifie $V \subset\subset U_\xi$, ce qui simplifie les démonstrations (en particulier celle de la Proposition 2.2.2), mais, on pourrait se passer de cette hypothèse en utilisant des partitions de l'unité.
Démontrons en premier lieu une proposition décrivant les fonctions qui s'annulent sur M :

Proposition 2.2.1 *Si W est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ relativement compact, si $\rho_1, \dots, \rho_k$ est un système de fonctions définissantes pour M sur un ouvert contenant $\overline{W}$ et si $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{W})$ s'annule sur $M \cap \overline{W}$, alors il existe des fonctions $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{W})$ telles que, sur $\overline{W}$, on ait*

$$f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \rho_j$$

Démonstration : Soit $z \in \overline{W}$.
Si $z \notin M$, il existe j_0 et $R_z > 0$ tels que sur $\overline{W} \cap B(z, R_z)$, ρ_{j_0} ne s'annule pas. Posons alors $\alpha^z_{j_0} = \frac{f}{\rho_{j_0}}$ et pour $j \neq j_0$, $\alpha^z_j = 0$, alors

$$\forall \zeta \in B(z, R_z) \cap \overline{W},\ f(\zeta) = \sum_{j=1}^{k} \alpha^z_j(\zeta)\rho_j(\zeta)$$

Si $z \in M \cap W$, alors le Lemme 3 p. 21 dans [Bo] permet d'obtenir aussi une telle décomposition. Si $z \in M \cap \partial W$, on utilise le fait qu'il existe un difféomorphisme $\chi : U \to \chi(U) \subset \mathbb{R}^{2n}$ où U est un voisinage de $\overline{W}$ tel que $\chi(M \cap W)$ est un voisinage ouvert de l'origine dans
$\{t = (t_1, \dots, t_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} | t_{2n-k} \geq 0,\ t_{2n-k+1} = \dots = t_{2n} = 0\}$ et on applique

la preuve du Lemme 3 p. 21 dans [Bo] avec cette application χ.
Ainsi on obtient une décomposition au voisinage de tout point de $\overline{W}$, on utilise ensuite le fait que $\overline{W}$ est compact et une partition de l'unité pour démontrer la proposition. $\square$

On peut maintenant construire le complexe de Cauchy-Riemann tangentiel sur $V \cap M$ pour des formes régulières sur $\overline{V} \cap M$. Le complexe de Dolbeault est donné par :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty}_{n,0}(\overline{V}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^{\infty}_{n,1}(\overline{V}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{C}^{\infty}_{n,n}(\overline{V}) \longrightarrow 0 \tag{2.2.2}$$

De plus, on définit l'idéal suivant :

$$\mathcal{I}^{n,r}_M(\overline{V}) = \sum_{j=1}^{k} \widehat{\rho}_j \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V}) + \sum_{j=1}^{k} d\widehat{\rho}_j \wedge \mathcal{C}^{\infty}_{n,r-1}(\overline{V})$$

Il faut noter qu'à cause de la Proposition 2.2.1, l'idéal $\mathcal{I}^{n,r}_M(\overline{V})$ ne dépend pas du système de fonctions définissantes choisi pour M, (voir [An/Hi], Part. I).
Comme $d\mathcal{I}^{n,r}_M(\overline{V}) \subset \mathcal{I}^{n,r+1}_M(\overline{V})$, on a le complexe suivant :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{n,0}_M(\overline{V}) \xrightarrow{d} \mathcal{I}^{n,1}_M(\overline{V}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{I}^{n,n}_M(\overline{V}) \longrightarrow 0 \tag{2.2.3}$$

On peut ainsi définir le complexe quotient, posons pour $r \in \{0, \ldots, n\}$

$$\mathcal{Q}^{n,r}_M(\overline{V}) = \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V}) / \mathcal{I}^{n,r}_M(\overline{V})$$

on a alors

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}^{n,0}_M(\overline{V}) \xrightarrow{d} \mathcal{Q}^{n,1}_M(\overline{V}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{Q}^{n,n}_M(\overline{V}) \longrightarrow 0 \tag{2.2.4}$$

On vérifie maintenant la cohérence des deux définitions, en fait, il suffit de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.2.2 *Pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$, la suite :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{n,r}_M(\overline{V}) \xrightarrow{\quad i \quad} \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V}) \xrightarrow{\quad j^* \quad} [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{V}) \longrightarrow 0$$

où i est l'inclusion et $j : M \to \mathbb{C}^n$ est celle de M dans $\mathbb{C}^n$, est exacte. Alors pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathcal{Q}^{n,r}_M(\overline{V}) \simeq [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{V})$ et les opérateurs de Cauchy-Riemann tangentiels définis précédemment coïncident.

Démonstration : Soit $r \in \{0, \ldots, n\}$, par définition de $[\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{V})$, l'application j^* est surjective de $\mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V})$ dans $[\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{V})$. Alors pour démontrer l'isomorphisme, il reste à prouver que Ker $j^* = \mathcal{I}^{n,r}_M(\overline{V})$.

Par définition de l'idéal et grâce au fait que la différentielle extérieure commute avec j^*, il est clair que si $g \in \mathcal{I}_M^{n,r}(\overline{V})$, alors $j^*g = 0$.
Considérons maintenant $g \in \mathrm{Ker}\, j^*$.
Si g est une fonction, i.e. $r = 0$, alors $j^*g = g \circ j$ donc la Proposition 2.2.1 permet de conclure. Supposons donc que $r \geq 1$.
Comme $V \subset\subset U_\xi$, le raisonnement effectué au début de cette partie montre qu'il existe des formes différentielles sur $\mathbb{C}^n$ à coefficients lisses sur $\overline{V}$, $h_1, \dots, h_k$ et g_K pour $K = (j_1, \dots, j_r)$, $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n-k$ telles que

$$g = \sum_{|K|=r} g_K dx_{(1,\dots,k)} \wedge dw_{(1,\dots,n-k)} \wedge d\overline{w}_K + \sum_{i=1}^{k} \bar{\partial}\widehat{\rho}_i \wedge h_i$$

où $(dx_1, \dots, dx_k, \bar{\partial}\widehat{\rho}_1, \dots, \bar{\partial}\widehat{\rho}_k, dw_1, \dots, dw_{n-k}, d\overline{w}_1, \dots, d\overline{w}_{n-k})$ est la base de l'espace cotangent de $\mathbb{C}^n$ construite à partir de la représentation (2.2.1).

Comme $g \in \mathcal{C}^\infty_{n,r}(\overline{V})$, pour tout K, tel que $|K| = r$, g_K est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{V}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $h_i \in \mathcal{C}^\infty_{n,r-1}(\overline{V})$. Alors,

$$g = \sum_{|K|=r} g_K dx_{(1,\dots,k)} \wedge dw_{(1,\dots,n-k)} \wedge d\overline{w}_K + \sum_{i=1}^{k} d\widehat{\rho}_i \wedge h_i$$

Alors, comme j^* et d commutent, on a

$$j^*g = \sum_{|K|=r} (g_K \circ j)\ j^*(dx_{(1,\dots,k)} \wedge dw_{(1,\dots,n-k)} \wedge d\overline{w}_K)$$

Alors le fait que $j^*g = 0$ et les propriétés des x_j et w_j impliquent que pour tout K avec $|K| = r$, $g_K \circ j = 0$, c'est-à-dire que g_K s'annule sur $M \cap \overline{V}$.
D'après la Proposition 2.2.1, on peut décomposer g_K en fonction des applications $\widehat{\rho}_1, \dots, \widehat{\rho}_k$. Ainsi, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, formes différentielles de bidegré (n, r) sur $\mathbb{C}^n$ lisses sur $\overline{V}$ et $h_1, \dots, h_k$ formes différentielles de bidegré $(n, r-1)$ sur $\mathbb{C}^n$ lisses sur $\overline{V}$, telles que

$$g = \sum_{j=1}^{k} \widehat{\rho}_j \alpha_j + \sum_{j=1}^{k} d\widehat{\rho}_j \wedge h_i$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

Notons, pour $r \in \{0, \dots, n\}$, $H^{n,r}_\infty(\overline{V})$, les groupes de cohomologie du complexe (2.2.2), $H^{n,r}_\infty(M \cap \overline{V})$, les groupes de cohomologie du complexe (2.2.4) et $H^r(\overline{V}, \mathcal{I}_M^{n,*})$, les groupes de cohomologie du complexe (2.2.3).

2.2.2 Complexe de sections de Whitney

Définition

On donne tout d'abord la définition des sections de Whitney dans le cas général, le lecteur pourra se reporter par exemple à l'article [Na] de M.

Nacinovich.
Soit X une variété différentiable lisse et E un fibré vectoriel $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Étant donné un ouvert Ω de X, on note $\Gamma(\Omega, E)$ l'espace des sections lisses de E sur Ω.
Si $x \in \Omega$, on dit que $f \in \Gamma(\Omega, E)$ est *plate en* x si pour tout choix de coordonnées locales en x, les composantes de f s'annulent ainsi que toutes leurs dérivées partielles en x.
Si A est un fermé dans Ω, on note $\mathcal{F}_A(\Omega, E)$ l'espace des sections $f \in \Gamma(\Omega, E)$ qui sont plates en tout point de A.
L'espace $W(A, E)$ des sections de Whitney de E sur un fermé A de Ω est alors défini par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_A(\Omega, E) \longrightarrow \Gamma(\Omega, E) \longrightarrow W(A, E) \longrightarrow 0 \tag{2.2.5}$$

Pour A fermé dans X, on remarque que

$$U \to \Gamma(U, E), \qquad U \to \mathcal{F}_{A\cap U}(U, E), \qquad U \to W(A \cap U, E) = W_A(U, E)$$

sont des faisceaux et que la suite (2.2.5) induit une suite exacte de faisceaux.

Définition 2.2.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, deux sous-ensembles fermés A et B de Ω sont dits* régulièrement situés *s'ils vérifient une des deux propriétés suivantes :*

(i) $A \cap B = \varnothing$

(ii) pour tout $x_0 \in A \cap B$, il existe un voisinage V de x_0 dans Ω et des constantes α, $C > 0$ tels que pour tout $x \in V$

$$dist(x, A) + dist(x, B) \geq C\ dist(x, A \cap B)^\alpha$$

Le fait que A et B soient régulièrement situés est équivalent à l'exactitude de la suite suivante, appelée suite de Mayer-Vietoris, pour tout fibré vectoriel E sur Ω :

$$0 \longrightarrow W(A \cup B, E) \longrightarrow W(A, E) \oplus W(B, E) \longrightarrow W(A \cap B, E) \longrightarrow 0 \tag{2.2.6}$$

Soit X une variété différentiable $\mathcal{C}^\infty$ et E un fibré vectoriel $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Soit $\mathcal{U} = \{A_0, \dots, A_\eta\}$ une famille de fermés de X, on dit que $\mathcal{U}$ est un *système régulièrement situé* si pour tout $0 \leq i_0, \dots, i_t \leq \eta$ et $0 \leq j_0, \dots, j_s \leq \eta$, $0 \leq t, s \leq \eta$, les fermés $A_{i_0} \cap \dots \cap A_{i_t}$ et $A_{j_0} \cap \dots \cap A_{j_s}$ sont régulièrement situés.

Proposition 2.2.4 *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\rho_1, \dots, \rho_{N+1}$ des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur U telles que pour tout $I = (j_1, \dots, j_l)$ avec $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N+1$, pour tout $z \in \{\zeta \in U | \rho_{j_1}(\zeta) = \dots = \rho_{j_l}(\zeta) = 0\}$, $d\rho_{j_1}(z) \wedge \dots \wedge d\rho_{j_l}(z) \neq 0$.*
Alors si on note pour $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\Omega_j = \{z \in U | \rho_j(z) \leq 0\} \cap \{z \in U | \rho_*(z) \leq 0\}$$

La famille $(\Omega_1, \ldots, \Omega_N)$ est régulièrement située, et on peut choisir l'exposant α de la Définition 2.2.3 égal à 1.

Démonstration : Soient $1 \leq i_0 < \cdots < i_t \leq N$ et $1 \leq j_0 < \cdots < j_s \leq N$, notons $I_1 = (i_0, \ldots, i_t)$, $I_2 = (j_0, \ldots, j_s)$, $\Omega_1 = \Omega_{i_0} \cap \cdots \cap \Omega_{i_t}$ et
$\Omega_2 = \Omega_{j_0} \cap \cdots \cap \Omega_{j_s}$.
Soit $x_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.
Il est clair que si $x_0 \in (\Omega_1 \overset{\circ}{\cap} \Omega_2)$, alors il existe un voisinage V de x_0 inclus dans $(\Omega_1 \overset{\circ}{\cap} \Omega_2)$ qui convient avec $\alpha = 1$.
Supposons que $x_0 \in \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.
Les propriétés de transversalité imposées aux fonctions $\rho_1, \ldots, \rho_{N+1}$ impliquent qu'il existe un difféomorphisme χ défini sur un voisinage convexe U_{x_0} de x_0 tel que

$$\chi(\Omega_1 \cap U_{x_0}) = \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \chi(U_{x_0}) \subset \mathbb{R}^{2n} | x_{i_0} \leq 0, \ldots, x_{i_t} \leq 0\} = A_1$$
$$\chi(\Omega_2 \cap U_{x_0}) = \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \chi(U_{x_0}) \subset \mathbb{R}^{2n} | x_{j_0} \leq 0, \ldots, x_{j_s} \leq 0\} = A_2$$

Il est alors facile de voir que les ensembles A_1 et A_2 sont régulièrement situés au point $\chi(x_0) = 0$ (c'est-à-dire que la proposition (ii) de la Définition 2.2.3 est vraie pour $x_0 = 0$), avec $\alpha = 1$. En effet, il s'agit de comparer entre elles des distances à des espaces vectoriels du type $\{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} | x_{k_1} = \cdots = x_{k_l} = 0\}$, pour des sous-ensembles $(k_1, \ldots, k_l)$ de $I_1 \cup I_2$, au voisinage de 0.
On utilise ensuite le fait que la proposition (ii) de la Définition 2.2.3 est stable par difféomorphisme, avec le même α, (voir [Ło]), pour conclure. □

On note $C^s(\mathcal{U}, W(E))$, $0 \leq s \leq \eta$, l'espace des chaînes de la forme :

$$f = (f_{j_0 \ldots j_s}) \quad \text{avec} \quad f_{j_0 \ldots j_s} \in W(A_{j_0} \cap \cdots \cap A_{j_s}, E)$$

On définit l'opérateur cobord

$$\delta : C^s(\mathcal{U}, W(E)) \to C^{s+1}(\mathcal{U}, W(E))$$

en posant

$$(\delta f)_{j_0 \ldots j_{s+1}} = \sum_{h=0}^{s+1} (-1)^h f_{j_0 \ldots, \widehat{j}_h, \ldots, j_{s+1}}|_{A_{j_0} \cap \cdots \cap A_{j_{s+1}}}$$

Alors on a le complexe suivant :

$$C^0(\mathcal{U}, W(E)) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, W(E)) \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} C^\eta(\mathcal{U}, W(E)) \longrightarrow 0 \quad (2.2.7)$$

On pose de plus pour tout $s \in \{0, \ldots, \eta\}$

$$Z^s(\mathcal{U}, W(E)) = \{f \in C^s(\mathcal{U}, W(E)) | \delta f = 0\}$$

Alors, les suites de Mayer-Vietoris (2.2.6) et le Théorème de prolongement de Whitney, voir [Na], permettent de démontrer :

Proposition 2.2.5 *Si $\mathcal{U}$ est un système régulièrement situé de fermés de X, alors le complexe (2.2.7) est acyclique, de plus pour toute chaîne $f \in Z^0(\mathcal{U}, W(E))$, il existe une unique $g \in W(A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_\eta, E)$ telle que $g|_{A_j} = f_j$, pour tout $j \in \{0, \ldots, \eta\}$.*

Dans ce qui suit, on travaille avec $E = E^{p,r}$ le fibré des (p,r)-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour $X = \mathbb{C}^n$, alors pour un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, $\Gamma(\Omega, E^{p,r}) = \mathcal{C}^\infty_{p,r}(\Omega)$, de plus si A est un fermé de Ω, on note :
$\mathcal{F}^{p,r}_{A\cap U}(U) := \mathcal{F}_{A\cap U}(U, E^{p,r}), W^{p,r}_A(U) := W_A(U, E^{p,r}), W^{p,r}(A) := W(A, E^{p,r})$,
$C^s(\mathcal{U}, W^{p,r}) := C^s(\mathcal{U}, W(E^{p,r}))$...

Par ailleurs, on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.6 *Si A est un fermé inclus dans U et vérifiant $\overline{\mathring{A}} = A$ alors, pour tout $(p,r) \in \{0, \ldots, n\}^2$:*

$$W^{p,r}(A) = \mathcal{C}^\infty_{p,r}(A)$$

Démonstration : On doit montrer que si $\overline{\mathring{A}} = A$, alors

$$\mathcal{F}^{p,r}_A(U) = \{f \in \mathcal{C}^\infty_{p,r}(U) | f_{|_A} = 0\}$$

L'inclusion directe est évidente, considérons donc $f \in \mathcal{C}^\infty_{p,r}(U)$ telle que f s'annule sur A.
Si $x \in \mathring{A}$, il est évident que f est plate au point x.
Soit $x \in A \setminus \mathring{A}$. Par hypothèse, x est limite d'une suite (x_n) de points de $\mathring{A}$.
Soit g une fonction dérivée de f, g est continue et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = 0$, donc $g(x) = 0$, ce qui termine la démonstration. □

Complexe induit par la différentielle extérieure

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et soit A un fermé de U, on a alors le complexe de Cauchy-Riemann :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{n,0}(U) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^\infty_{n,1}(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{C}^\infty_{n,n}(U) \longrightarrow 0 \qquad (2.2.8)$$

Par ailleurs, $d\mathcal{F}^{n,r}_A(U) \subset \mathcal{F}^{n,r+1}_A(U)$ donc on a le complexe induit :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{n,0}_A(U) \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{n,1}_A(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{n,n}_A(U) \longrightarrow 0 \qquad (2.2.9)$$

et par passage au quotient, le complexe des sections de Whitney :

$$0 \longrightarrow W^{n,0}(A) \xrightarrow{d} W^{n,1}(A) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} W^{n,n}(A) \longrightarrow 0 \qquad (2.2.10)$$

On peut alors définir la différentielle d'une chaîne de sections de Whitney en appliquant d terme à terme pour un élément de $C^s(\mathcal{U}, W^{n,r})$, il est clair que la différentielle et le cobord commutent.

Replaçons-nous maintenant dans notre contexte, soient U et V des ouverts de $\mathbb{C}^n$ à bord Lipschitz tels que $V \subset\subset U$ et tels que leur bord intersecte M transversalement. On considère le complexe (2.2.10) avec $A = M \cap \overline{V}$. On a, pour $0 \leq r \leq n$, la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{n,r}_{M\cap\overline{V}}(U) \to \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(U) \to W^{n,r}(M \cap \overline{V}) \to 0 \tag{2.2.11}$$

Cependant, pour démontrer l'isomorphisme cherché, il est intéressant de définir les sections de Whitney comme le quotient de formes lisses sur $\overline{V}$ par des formes plates et non à partir de formes lisses sur U. Posons :

$$\mathcal{F}^{n,r}_M(\overline{V}) = \{f \in \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V}) | f \text{ est plate sur } M \cap \overline{V}\}$$

Comme $d\mathcal{F}^{n,r}_M(\overline{V}) \subset \mathcal{F}^{n,r+1}_M(\overline{V})$, on a le complexe suivant :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{n,0}_M(\overline{V}) \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{n,1}_M(\overline{V}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{n,n}_M(\overline{V}) \longrightarrow 0 \tag{2.2.12}$$

On pose pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\mathcal{W}^{n,r}_M(\overline{V}) = \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V}) / \mathcal{F}^{n,r}_M(\overline{V})$$

et on a un complexe induit :

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}^{n,0}_M(\overline{V}) \xrightarrow{d} \mathcal{W}^{n,1}_M(\overline{V}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{W}^{n,n}_M(\overline{V}) \longrightarrow 0 \tag{2.2.13}$$

Il reste alors à montrer que le complexe (2.2.13) est isomorphe au complexe (2.2.10) pour $A = M \cap \overline{V}$.

Comme V est un ouvert à bord Lipschitz relativement compact dans U, on a la suite exacte suivante, pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$:

$$0 \longrightarrow I^{n,r}_{\overline{V}}(U) \to \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(U) \to \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V}) \longrightarrow 0$$

où $I^{n,r}_{\overline{V}}(U)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(U)$ tel que tous les coefficients de f s'annulent sur $\overline{V}$. Cependant, comme V est un ouvert dans U le fait de s'annuler sur V est équivalent au fait de s'annuler à l'ordre infini sur V, donc $I^{n,r}_{\overline{V}}(U) = \mathcal{F}^{n,r}_{\overline{V}}(U)$.
De même, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow I^{n,r}_{\overline{V}}(U) \to \mathcal{F}^{n,r}_{M\cap\overline{V}}(U) \to \mathcal{F}^{n,r}_M(\overline{V}) \longrightarrow 0$$

On a ainsi le diagramme commutatif et exact suivant, pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & I^{n,r}_{\overline{V}}(U) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathcal{F}^{n,r}_{\overline{V}}(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^{n,r}_{M\cap\overline{V}}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(U) \arrow[r] \arrow[d] & W^{n,r}(M\cap\overline{V}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^{n,r}_{M}(\overline{V}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{W}^{n,r}_{M}(\overline{V}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ce qui termine le raisonnement.

Notons $H^r(M\cap\overline{V}, \mathcal{W}^{n,*}_M)$, pour $r \in \{0, \ldots, n\}$, les groupes de cohomologie du complexe (2.2.13) et $H^r(\overline{V}, \mathcal{F}^{n,*}_M)$, pour $r \in \{0, \ldots, n\}$, les groupes de cohomologie du complexe (2.2.12).

2.2.3 Isomorphisme des groupes de cohomologie

Pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$, on a les deux suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{n,r}_M(\overline{V}) \to \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V}) \to [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{V}) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{n,r}_M(\overline{V}) \to \mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V}) \longrightarrow \mathcal{W}^{n,r}_M(\overline{V}) \longrightarrow 0$$

de plus, comme $\mathcal{F}^{n,r}_M(\overline{V}) \subset \mathcal{I}^{n,r}_M(\overline{V})$, il existe une application naturelle $\mathcal{W}^{n,r}_M(\overline{V}) \to [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{V})$, celle-ci induit pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$, une application de $H^r(M \cap \overline{V}, \mathcal{W}^{n,*}_M)$ dans $H^{n,r}_{\infty}(M \cap \overline{V})$, nous allons démontrer que ces applications sont des isomorphismes. Pour cela, on utilise le même type de raisonnement que dans [An/Fr/Na], mais en se plaçant dans $\mathcal{C}^{\infty}_{n,r}(\overline{V})$.

Chacune des deux suites exactes ci-dessus induisent une suite exacte longue de cohomologie, ainsi, on a le diagramme commutatif suivant, pour tout $r \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\begin{tikzcd}
H^r(\overline{V}, \mathcal{F}^{n,*}_M) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n,r}_{\infty}(\overline{V}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^r(M\cap\overline{V}, \mathcal{W}^{n,*}_M) \arrow[r] \arrow[d] & H^{r+1}(\overline{V}, \mathcal{F}^{n,*}_M) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n,r+1}_{\infty}(\overline{V}) \arrow[d, equal] \\
H^r(\overline{V}, \mathcal{I}^{n,*}_M) \arrow[r] & H^{n,r}_{\infty}(\overline{V}) \arrow[r] & H^{n,r}_{\infty}(M\cap\overline{V}) \arrow[r] & H^{r+1}(\overline{V}, \mathcal{I}^{n,*}_M) \arrow[r] & H^{n,r+1}_{\infty}(\overline{V})
\end{tikzcd} \tag{2.2.14}$$

Pour démontrer que les applications $H^r(M \cap \overline{V}, \mathcal{W}_M^{n,*}) \to H_\infty^{n,r}(M \cap \overline{V})$ sont des isomorphismes, il suffit de démontrer grâce au Lemme des cinq (voir l'Annexe A) que les applications $H^r(\overline{V}, \mathcal{F}_M^{n,*}) \to H^r(\overline{V}, \mathcal{I}_M^{n,*})$ en sont. Ceci résulte comme dans [An/Fr/Na] d'un théorème de Cauchy-Kowalewski formel dont la démonstration est analogue à celle de la Proposition 3 dans [An/Fr/Na] en considérant des formes lisses sur $\overline{V}$:

Théorème 2.2.7 *Le complexe*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_M^{n,0}(\overline{V})/\mathcal{F}_M^{n,0}(\overline{V}) \xrightarrow{d} \mathcal{I}_M^{n,1}(\overline{V})/\mathcal{F}_M^{n,1}(\overline{V}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{I}_M^{n,n}(\overline{V})/\mathcal{F}_M^{n,n}(\overline{V}) \longrightarrow 0 \tag{2.2.15}$$

est acyclique.

2.2.4 Résolution locale

Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$. Soit $\xi \in M$ et considérons un système local de fonctions définissantes $(\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_k)$ donnant sur U, voisinage de ξ dans $\mathbb{C}^n$, une représentation de type (2.1.1), avec $\bar{\partial}\widehat{\rho}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\widehat{\rho}_k \neq 0$ sur U.
Posons

$$\rho_j = \widehat{\rho}_j + C \sum_{i=1}^{k} \widehat{\rho}_i^2 \quad \text{pour tout } j \in \{1, \ldots, k\}$$
$$\rho_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \widehat{\rho}_i + C \sum_{i=1}^{k} \widehat{\rho}_i^2$$

où C est une constante positive.

Notons $\partial\Delta_{(1,\ldots,k+1)}$ la frontière du simplexe $\Delta_{(1,\ldots,k+1)}$ (avec les notations du Chapitre 1). Si C est assez grande, et si on note pour $\lambda \in \partial\Delta_{(1,\ldots,k+1)}$, $\rho_\lambda = \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_{k+1}\rho_{k+1}$, alors la forme de Levi $\mathcal{L}_{\rho_\lambda}^{\mathbb{C}^n}(\xi)$ de ρ_λ admet au moins $q + k$ valeurs propres strictement positives.
De plus, pour tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq k+1$, $\bar{\partial}\rho_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\rho_{j_k} \neq 0$ sur U, et si on note $\Omega_\nu = \{z \in U | \rho_\nu(z) < 0\}$, pour $\nu = 1, \ldots, k+1$, on a, si U est assez petit :

$$\begin{aligned} M \cap U &= \bigcap_{\nu=1}^{k+1} \overline{\Omega}_\nu \\ U \setminus M &= \bigcup_{\nu=1}^{k+1} \Omega_\nu \\ U &= \bigcup_{\nu=1}^{k+1} \overline{\Omega}_\nu \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Afin de pouvoir considérer V dans le cas (II) du début de cette partie, on donne la définition suivante :

Définition 2.2.8 *Soient M une sous-variété de $\mathbb{C}^n$ de codimension k et de classe $\mathcal{C}^2$, $\xi \in M$ et q un entier tel que $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur M. On dira que φ est $(q+k)$-*convexe au point *ξ s'il existe un voisinage U de ξ dans $\mathbb{C}^n$ et des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$, $\widetilde{\varphi}, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}$ définies sur U ayant les propriétés suivantes :*

- *$\widetilde{\varphi} = \varphi$ sur $U \cap M$;*
- *pour tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq k+1$, $(\rho_{j_1}, \ldots, \rho_{j_k})$ est un système de fonctions définissantes pour M sur U ;*
- *pour tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq k+1$, $d\rho_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\rho_{j_k} \neq 0$ sur U ;*
- *les fonctions $\rho_1, \ldots, \rho_{k+1}$ vérifient les égalités (2.2.16) ;*
- *pour tout $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{k+1}) \in \Delta_{(0,1,\ldots,k+1)}$ tel qu'il existe $j \in \{1, \ldots, k+1\}$ avec $\lambda_j = 0$, et pour tout $z \in U$, la forme $\mathcal{L}^{\mathbb{C}^n}_{\lambda_0\widetilde{\varphi}+\lambda_1\rho_1+\cdots+\lambda_{k+1}\rho_{k+1}}(z)$ admet au moins $q+k$ valeurs propres strictement positives.*

*De plus, on dira que φ est $(q+k)$-*convexe sur *M si elle est $(q+k)$-convexe en tout point $\xi \in M$.*

En utilisant les applications $\rho_1, \ldots, \rho_{k+1}$ construites ci-dessus, on peut démontrer la proposition suivante de la même manière que la Proposition 2.3, $(ii) \Rightarrow (i)$ dans [L-T/Le 4] :

Proposition 2.2.9 *Soient M une sous-variété CR générique q-concave ($1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$) de classe $\mathcal{C}^2$, $\xi \in M$ et $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que pour toute extension ψ de φ à un voisinage de ξ dans $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{L}^M_\psi(\xi)$ admet au moins q valeurs propres positives. Alors φ est $(q+k)$-convexe au point ξ.*

Remarque. Si φ est une fonction sur M vérifiant $d\varphi(\xi) \neq 0$ et si $r_1, \ldots, r_k$ est un système de fonctions définissantes pour M au voisinage de ξ, alors, il existe un voisinage de ξ dans $\mathbb{C}^n$ sur lequel les applications $\widetilde{\varphi}, r_1, \ldots, r_k$ vérifient les conditions de transversalité définies au paragraphe 1.1.8.

On peut maintenant énoncer le premier résultat important de ce chapitre, il concerne la résolution dans le cas convexe :

Théorème 2.2.10 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et soit $\xi \in M$.*
(i) Il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout $0 < R \leq R_0$, et tout $n-q-k+1 \leq r \leq n$,

$$H^{n,r}_\infty(M \cap \overline{B(\xi, R)}) = 0$$

(ii) Soit φ une fonction $(q+k)$-convexe au point ξ telle que $d\varphi(\xi) \neq 0$, alors il existe $R_0 > 0$ que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de φ, tel que pour tout $0 < R \leq R_0$, et tout $n-q-k+1 \leq r \leq n$,

$$H^{n,r}_\infty(\{z \in M | \varphi(z) \leq 0\} \cap \overline{B(\xi, R)}) = 0$$

Démonstration : (i) Si $r > n-k$, $[\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M = 0$ donc c'est évident.
Supposons $n-q-k+1 \leq r \leq n-k$.
Grâce à l'isomorphisme établi dans la partie 2.2.3, il suffit de raisonner avec les sections de Whitney.
Notons pour $j \in \{1,\dots,k+1\}$ et pour $R > 0$

$$A_j^R = \overline{\Omega_j \cap B(\xi,R)}$$

Comme les intersections des Ω_i sont transverses, il existe $R_0 > 0$, tel que pour tout $R < R_0$, pour tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k+1$ avec $l \leq k+1$,

$$A_{j_1}^R \cap \cdots \cap A{j_l}^R = \overline{\Omega}_{j_1} \cap \cdots \cap \overline{\Omega}_{j_l} \cap \overline{B(\xi,R)} \overset{\text{si } l \leq k+1}{=} \overline{\Omega_{j_1} \cap \cdots \cap \Omega_{j_l} \cap B(\xi,R)}$$

et, d'après la Proposition 2.2.4, la famille $\mathcal{A}^R = (A_1^R,\dots,A_{k+1}^R)$ est régulièrement située.

Ainsi si R_0 est assez petit, pour tout $R < R_0$ et tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k+1$ avec $l \leq k$, $A_{j_1}^R \cap \cdots \cap A{j_l}^R$ est l'adhérence d'un domaine à coins $(q+k-1)$-convexe (voir la Proposition 1.3.2). Ainsi, grâce à la Proposition 2.2.6 et aux résultats du Chapitre 1 (en considérant des formes à valeurs dans un fibré holomorphe trivial au-dessus de $B(\xi,R)$, pour obtenir des formes de bidegré (n,r) à la place de formes de bidegré $(0,r)$), on peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 2.2.11 *Pour tout $r \geq n-q-k+1$ et $0 \leq s \leq k-1$, si $f \in C^s(\mathcal{A}^R, W^{n,r})$ avec $df = 0$, il existe $g \in C^s(\mathcal{A}^R, W^{n,r-1})$ telle que $dg = f$.*

De plus, on a, grâce aux égalités (2.2.16) :

$$A_1^R \cap \cdots \cap A_{k+1}^R = M \cap \overline{B(\xi,R)} \tag{2.2.17}$$
$$A_1^R \cup \cdots \cup A_{k+1}^R = \overline{B(\xi,R)} \tag{2.2.18}$$

Soit $f \in \mathcal{W}_M^{n,r}(\overline{B(\xi,R)})$ telle que $df = 0$. Alors d'après les considérations ci-dessus, $f \in C^k(\mathcal{A}^R, W^{n,r})$ avec $df = 0$ et $\delta f = 0$.
D'après la Proposition 2.2.5, il existe $f^{k-1} \in C^{k-1}(\mathcal{A}^R, W^{n,r})$ telle que $\delta f^{k-1} = f$. Par ailleurs, comme d et δ commutent, $\delta(df^{k-1}) = 0$.
On peut alors construire par récurrence une suite $(f^{k-j})_{j=1,\dots,k}$ telle que :
(i) pour tout $j \in \{1,\dots,k\}$, $f^{k-j} \in C^{k-j}(\mathcal{A}^R, W^{n,r+j-1})$
(ii) pour tout $j \in \{2,\dots,k\}$, $\delta f^{k-j} = df^{k-j+1}$

En effet, $\delta(df^{k-1}) = 0$ donc d'après la Proposition 2.2.5, il existe $f^{k-2} \in C^{k-2}(\mathcal{A}^R, W^{n,r+1})$ telle que $\delta f^{k-2} = df^{k-1}$, ce qui initie la récurrence. L'hérédité provient ensuite des mêmes arguments.

Considérons f^0, on a $f^0 \in C^0(\mathcal{A}^R, W^{n,r+k-1})$, $(r+k-1 \leq n-1)$ avec $\delta(df^0) = 0$, alors, d'après la Proposition 2.2.5,
il existe $g \in W^{n,r+k}(A_1^R \cup \cdots \cup A_{k+1}^R)$ telle que pour tout $j \in \{1,\dots,k+1\}$, $g|_{A_j^R} = (df^0)_j$.

D'après la Proposition 2.2.6 et l'égalité (2.2.18), $g \in \mathcal{C}^\infty_{n,r+k}(\overline{B(\xi,R)})$ et $dg = 0$. Ainsi, il existe une forme $g^0 \in \mathcal{C}^\infty_{n,r+k-1}(\overline{B(\xi,R)})$ telle que $dg^0 = g$.
Notons encore g^0 la chaîne de sections de Whitney définie par :
$g^0 = (g^0_j) \in C^0(\mathcal{A}^R, W^{n,r+k-1})$ avec pour tout j, $g^0_j = g^0|_{A^R_j}$
Alors il est clair que $\delta g^0 = 0$ et $dg^0 = df^0$.
Posons $h^0 = f^0 - g^0$, alors $\delta h^0 = df^1$ et $dh^0 = 0$.

Nous allons maintenant construire par récurrence une suite $(h^j)_{j=0,\dots,k-1}$ telle que pour tout $j \in \{0,\dots,k-1\}$, $h^j \in C^j(\mathcal{A}^R, W^{n,r+k-j-1})$, $\delta h^j = \delta f^j$ et $dh^j = 0$.
Supposons la suite construite jusqu'au rang $j_0 \leq k-2$.
$dh^{j_0} = 0$, donc d'après le Lemme 2.2.11, il existe $g^{j_0} \in C^{j_0}(\mathcal{A}^R, W^{n,r+k-j_0-2})$ telle que $dg^{j_0} = h^{j_0}$, posons $h^{j_0+1} = f^{j_0+1} - \delta g^{j_0}$.
Alors $h^{j_0+1} \in C^{j_0+1}(\mathcal{A}^R, W^{n,r+k-j_0-2})$, $\delta h^{j_0+1} = \delta f^{j_0+1}$ et
$dh^{j_0+1} = df^{j_0+1} - \delta(dg^{j_0}) = df^{j_0+1} - \delta h^{j_0} = 0$.
Ce qui achève l'hérédité de la récurrence.

$h^{k-1} \in C^{k-1}(\mathcal{A}^R, W^{n,r})$ vérifie $dh^{k-1} = 0$ et $\delta h^{k-1} = f$. D'après le Lemme 2.2.11, il existe $g^{k-1} \in C^{k-1}(\mathcal{A}^R, W^{n,r-1})$ telle que $dg^{k-1} = h^{k-1}$.
Posons $g = \delta g^{k-1}$, alors $g \in C^k(\mathcal{A}^R, W^{n,r-1})$, c'est-à-dire $g \in W^{n,r-1}_M(\overline{B(\xi,R)})$ et $dg = d(\delta g^{k-1}) = \delta(dg^{k-1}) = f$.
Ce qui termine la démonstration de *(i)*.
La démonstration du point (ii) est analogue, en considérant $\{\widetilde{\varphi} \leq 0\} \cap \overline{B(\xi,R)}$ à la place de $\overline{B(\xi,R)}$, où $\widetilde{\varphi}$ est l'application dont l'existence est donnée par la Définition 2.2.8. En effet, de part cette définition et d'après la remarque précédent le Théorème 2.2.10, si on pose

$$A^R_j = \overline{\Omega}_j \cap \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) \leq 0\} \cap \overline{B(\xi,R)}$$

si R est assez petit, alors l'intersection d'un nombre fini des A^R_j est l'adhérence d'un domaine à coins $(q+k-1)$-convexe.
On peut donc effectuer exactement le même raisonnement pour conclure. $\square$

2.3 Étude du cas concave

On se donne la définition suivante :

Définition 2.3.1 *Soient M une sous-variété de $\mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension $1 < k \leq n$, $\xi \in M$ et q un entier tel que $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur M, à valeurs réelles. On dira que φ est $(q+k)$-*concave au point $\xi \in M$ *si $-\varphi$ est $(q+k)$-convexe au point ξ.*
*De même, on dira que φ est $(q+k)$-*concave sur M *si elle est $(q+k)$-concave en tout point de M.*

Supposons dans cette partie que M est une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient $\xi \in M$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur M,

à valeurs réelles et $(q+k)$-concave au point ξ, avec $d\varphi(\xi) \neq 0$, on suppose pour simplifier les notations que $\varphi(\xi) = 0$.
On s'intéresse à la résolution locale de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle, avec régularité jusqu'au bord, sur un domaine V de la forme suivante :

(III) $V = \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) < 0\} \cap B(\xi, R)$ pour $R > 0$ assez petit et pour $\widetilde{\varphi}$ une extension de φ.

Contrairement au cas convexe traité précédemment, les résultats locaux obtenus dans $\mathbb{C}^n$ au Chapitre 1 ne permettent pas de conserver le même rayon R lors des résolutions successives, on ne peut donc pas fixer V. Il faut aussi noter que la régularité qui nous intéresse est celle jusqu'au bord délimité par φ dans M. Ainsi on va démontrer un Lemme de Poincaré au point ξ par rapport à la variété à bord $\widetilde{M}$ où

$$\widetilde{M} = M \cap \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) \leq 0\}$$

On va donc raisonner avec des complexes de faisceaux. Le principe est alors similaire à ce qui a été fait pour le cas convexe : on démontre un isomorphisme avec le complexe de faisceaux des sections de Whitney et on démontre le Lemme de Poincaré en utilisant les résultats du Chapitre 1 avec des sections de Whitney.

2.3.1 Complexes de faisceaux

On redonne brièvement les définitions des complexes de Cauchy-Riemann tangentiel et de Whitney en adoptant cette fois le point de vu et le vocabulaire de la théorie des faisceaux, (voir [An/Fr/Na] et [Na]).
Notons

$$X = \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) \leq 0\}$$

Comme $d\varphi(\xi) \neq 0$, on peut supposer quitte à réduire U que
$d\widetilde{\varphi}(z) \wedge d\widehat{\rho}_1 \wedge \cdots \wedge d\widehat{\rho}_k \neq 0$ sur $\{z \in U \cap M | \varphi(z) = 0\}$ pour tout système local de fonctions définissantes pour M, $(\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_k)$.
Ainsi, X et $\widetilde{M}$ sont des variétés à bord.
On désigne par $\mathcal{E}_X^{*,*}$ le faisceau des germes de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sur X et $\mathcal{E}_X^{n,r}$ le sous-faisceau des germes de (n,r)-formes.

On a alors le complexe de Dolbeault :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_X^{n,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^{n,1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^{n,n} \longrightarrow 0 \tag{2.3.1}$$

Il s'agit d'une suite de faisceaux mous (voir l'annexe A).
On définit le faisceau $\mathcal{J}_{\widetilde{M}}$ des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X qui s'annulent

sur $\widetilde{M}$ et $\mathcal{I}^{*,*}_{\widetilde{M}}$ le faisceau de $\mathcal{E}^{*,*}_X$-modules engendré par $\mathcal{J}_{\widetilde{M}}$ et $\bar{\partial}\mathcal{J}_{\widetilde{M}}$. On pose alors $\mathcal{I}^{n,r}_{\widetilde{M}} = \mathcal{I}^{*,*}_{\widetilde{M}} \cap \mathcal{E}^{n,r}_X$. On a ainsi le complexe induit :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{n,0}_{\widetilde{M}} \xrightarrow{d} \mathcal{I}^{n,1}_{\widetilde{M}} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{I}^{n,n}_{\widetilde{M}} \longrightarrow 0 \tag{2.3.2}$$

Par définition, si $\widetilde{W}$ est un ouvert de X, il existe un ouvert W dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\widetilde{W} = W \cap \{\widetilde{\varphi} \leq 0\}$ et, comme M est générique, l'espace des sections de $\mathcal{I}^{n,r}_{\widetilde{M}}$ au-dessus de $\widetilde{W}$ est donné par :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{n,r}_{\widetilde{M}}(\widetilde{W}) &= \sum_{j=1}^{k} \widehat{\rho}_j \mathcal{E}^{n,r}_X(\widetilde{W}) + \sum_{j=1}^{k} d\widehat{\rho}_j \wedge \mathcal{E}^{n,r-1}_X(\widetilde{W}) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \widehat{\rho}_j \mathcal{C}^\infty_{n,r}(W \cap \{\widetilde{\varphi} \leq 0\}) + \sum_{j=1}^{k} d\widehat{\rho}_j \wedge \mathcal{C}^\infty_{n,r-1}(W \cap \{\widetilde{\varphi} \leq 0\})\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

où $\mathcal{E}^{n,r}_X(\widetilde{W})$ désigne l'espace des sections de $\mathcal{E}^{n,r}_X$ au-dessus de $\widetilde{W}$ et $(\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_k)$ est un système de fonctions définissantes pour M. Comme précédemment, cette écriture ne dépend pas du système de fonctions définissantes choisi.
De plus, $\mathcal{I}^{n,r}_{\widetilde{M}}$ est un faisceau fin.

On désigne par $[\mathcal{E}^{n,*}_{\widetilde{M}}]$ le faisceau quotient. On a alors le complexe de Cauchy-Riemann tangentiel induit par le passage au quotient :

$$0 \longrightarrow [\mathcal{E}^{n,0}_{\widetilde{M}}] \xrightarrow{d} [\mathcal{E}^{n,1}_{\widetilde{M}}] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} [\mathcal{E}^{n,n}_{\widetilde{M}}] \longrightarrow 0 \tag{2.3.4}$$

Comme il s'agit d'un quotient de faisceaux fins, l'espace des sections de $[\mathcal{E}^{n,r}_{\widetilde{M}}]$ au-dessus d'un ouvert $\widetilde{W}$ est :

$$[\mathcal{E}^{n,r}_{\widetilde{M}}](\widetilde{W}) = \mathcal{E}^{n,r}_X(\widetilde{W}) / \mathcal{I}^{n,r}_{\widetilde{M}}(\widetilde{W})$$

Cette égalité permet de vérifier comme dans la Proposition 2.2.2 que les (n, r)-formes ainsi définies correspondent bien à la restriction de formes différentielles définies au voisinage de M. Ainsi en reprenant les notations de la partie 2.1.3, on a, si $\widetilde{W}$ est un ouvert de X, alors il existe W, ouvert de $\mathbb{C}^n$ tel que $\widetilde{W} = W \cap \{\widetilde{\varphi} \leq 0\}$ et :

$$[\mathcal{E}^{n,r}_{\widetilde{M}}](\widetilde{W}) = [\mathcal{E}_{n,r}]_M\big(W \cap \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) \leq 0\}\big)$$

Par ailleurs, la Proposition 2.1.3 permet d'affirmer que si le bord de W est assez régulier, alors l'espace ci-dessus ne dépend que de φ et de $W \cap M$, alors les notations de la partie 2.1.3, on a

$$[\mathcal{E}^{n,r}_{\widetilde{M}}](\widetilde{W}) = [\mathcal{E}_{n,r}]_{M \cap \{\varphi \leq 0\}}(W) = [\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_{M \cap \{\varphi \leq 0\}}(W \cap M)$$

On définit de manière analogue le faisceau des germes de sections de Whitney en quotientant par le faisceau fin de $\mathcal{E}_X^{n,r}$-modules libre $\mathcal{F}_{\widetilde{M}}^{n,r}$ engendré par

$$\mathcal{F}_{\widetilde{M}}^{n,r}(\widetilde{W}) = \mathcal{F}_{\widetilde{M}\cap\widetilde{W}}(\widetilde{W}, E^{n,r})$$

avec les notations de la sous-partie 2.2.2. On note $\mathcal{W}_{\widetilde{M}}^{n,r}$ le faisceau des germes de sections de Whitney et on a le complexe de faisceaux suivant :

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}_{\widetilde{M}}^{n,0} \xrightarrow{d} \mathcal{W}_{\widetilde{M}}^{n,1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{W}_{\widetilde{M}}^{n,n} \longrightarrow 0 \tag{2.3.5}$$

De manière analogue, l'espace des sections au-dessus de $\widetilde{W}$ est donné par le quotient des espaces de sections.
On a alors les deux suites exactes de faisceaux suivantes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\widetilde{M}}^{n,r} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{n,r} \longrightarrow [\mathcal{E}_{\widetilde{M}}^{n,r}] \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{\widetilde{M}}^{n,r} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{n,r} \longrightarrow \mathcal{W}_{\widetilde{M}}^{n,r} \longrightarrow 0$$

et un théorème de Cauchy-Kowalewski formel (voir [An/Fr/Na]) permet à nouveau de démontrer que les faisceaux des groupes de cohomologie associés aux complexes (2.3.4) et (2.3.5) sont isomorphes.

Lemme de Poincaré

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau au-dessus d'un espace topologique Y, on note pour $z \in Y$, $\mathcal{F}_z$, la *fibre au-dessus de z* (voir Annexe A).

On dit que le Lemme de Poincaré est valide en dimension $j \geq 1$ pour le complexe $\mathcal{F}^\bullet$ au point $z \in Y$ si la suite :

$$\mathcal{F}_z^{j-1} \xrightarrow{d^{j-1}} \mathcal{F}_z^j \xrightarrow{d^j} \mathcal{F}_z^{j+1}$$

est exacte.

Alors d'après l'isomorphisme qu'il y a entre les groupes de cohomologie, le Lemme de Poincaré est valide pour le complexe (2.3.4) en dimension j si et seulement si il est valide pour le complexe (2.3.5) en dimension j.

Par ailleurs, par définition des limites inductives, le Lemme de Poincaré est valide au point z pour un complexe $\mathcal{F}^\bullet$ en dimension j si et seulement si pour tout voisinage W_0 de z, il existe un voisinage W_1 de z tel que si $f \in \mathcal{F}^j(W_0)$ avec $d^j f = 0$ alors il existe $g \in \mathcal{F}^{j-1}(W_1)$ tel que $d^{j-1}g = f$ dans $\mathcal{F}^j(W_1)$.

2.3.2 Résolution locale

On peut maintenant énoncer le second résultat important de ce chapitre, il concerne le cas concave. *(i)* redonne un résultat dû à M. Nacinovich dans [Na], alors que *(ii)* semble nouveau car il donne la régularité jusqu'au bord :

Théorème 2.3.2 *Soient M une sous-variété CR générique q-concave de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de codimension k dans $\mathbb{C}^n$ avec $1 < k \leq n$ et $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$ et $\xi \in M$.*
(i) Si $R_0 > 0$, il existe $R_1 > 0$ avec $R_1 \leq R_0$ tel que :
si $f \in [\mathcal{E}_{n,r}]_M(B(\xi, R_0))$, $1 \leq r \leq q-1$, avec $df = 0$, il existe $g \in [\mathcal{E}_{n,r-1}]_M(B(\xi, R_1))$ telle que $dg = f$.
(ii) Soit $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une application $(q+k)$-concave au point ξ, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $d\varphi(\xi) \neq 0$.
Alors, si R_0 est un réel positif, il existe R_1 avec $0 < R_1 \leq R_0$ que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de φ tel que :
si $f \in [\mathcal{E}_{n,r}]_{M \cap \{\varphi \leq 0\}}(B(\xi, R_0))$, $1 \leq r \leq q-2$, avec $df = 0$, il existe $g \in [\mathcal{E}_{n,r-1}]_{M \cap \{\varphi \leq 0\}}(B(\xi, R_1))$ telle que $dg = f$.

Démonstration : (i) Ici, il n'y a pas de bord, on utilise donc l'isomorphisme de faisceaux connu (voir [An/Fr/Na]) pour affirmer qu'il suffit de démontrer que le Lemme de Poincaré est valide en dimension r pour $1 \leq r \leq q-1$ pour les sections de Whitney au point $\xi \in M$.
Pour cela, on travaille avec les fonctions $\rho_1, \ldots, \rho_{k+1}$ construites au début de la partie 2.2.4 et vérifiant les égalités (2.2.16). On pose pour $j \in \{1, \ldots, k+1\}$, $r_j = -\rho_j$, alors les fonctions $r_1, \ldots, r_{k+1}$ vérifient aussi les égalités (2.2.16) et de plus, si R est assez petit, alors pour tout $(j_1, \ldots, j_l) \in P'(k+1)$ avec $l \leq k$,

$$\bigcap_{s=1}^{l} \{z \in U | r_s(z) < 0\} \cap B(\xi, R)$$

est un domaine à coins $(q+k-1)$-concave local défini par une configuration ayant l applications.
Posons, pour $j \in \{1, \ldots, k+1\}$ et pour $R > 0$, $\Omega_j = \{z \in U | r_j(z) < 0\}$ et

$$A_j^R = \overline{B(\xi, R)} \cap \overline{\Omega}_j$$

Soit $R_0 > 0$ assez petit pour que : pour tout $R < R_0$, pour tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k+1$ avec $l \leq k+1$,

$$\begin{aligned} A_{j_1}^R \cap \cdots \cap A{j_l}^R &= \overline{\Omega}_{j_1} \cap \cdots \cap \overline{\Omega}_{j_l} \cap \overline{B(\xi, R)} \\ &\overset{\text{si } l \leq k+1}{=} \overline{\Omega_{j_1} \cap \cdots \cap \Omega_{j_l} \cap B(\xi, R)} \end{aligned}$$

et la famille $\mathcal{A}^R = (A_1^R, \ldots, A_{k+1}^R)$ est régulièrement située. On effectue alors le même raisonnement que dans la démonstration du Théorème 2.2.10 en utilisant le Théorème 1.0.3 transcrit pour les sections de Whitney en diminuant R un nombre fini de fois, c'est-à-dire dès que l'on résout l'équation de

Cauchy-Riemann. Il faut encore s'assurer que l'on travaille bien avec les bons degrés, pour cela on reprend les notations de la démonstration du Théorème 2.2.10 en modifiant uniquement les rayons des boules sur lesquelles on se place.
La résolution de l'équation de Cauchy-Riemann apparaît une première fois lorsqu'on a $g \in \mathcal{C}^\infty_{n,r+k}(\overline{B(\xi,R)})$ avec $dg = 0$, ici, d'après le Corollaire 1.12.2 dans [He/Le 1], il existe une forme $g^0 \in \mathcal{C}^\infty_{n,r+k-1}(\overline{B(\xi,R)})$ telle que $dg^0 = g$ si $r + k \leq n$ i.e. $r \leq n - k$, ce qui est le cas car $q \leq \frac{n-k}{2}$.
On utilise ensuite la résolution du $\bar\partial$ dans la construction de la suite (h^j) :
on a pour tout $j \in \{0, \dots, k-1\}$, $h^j \in C^j(\mathcal{A}^{R_j}, W^{n,r+k-j-1})$ avec
$dh^j = 0$, alors d'après le Théorème 1.0.3, il existe R_{j+1} et $g^j \in C^j(\mathcal{A}^{R_{j+1}}, W^{n,r+k-j_0-2})$ telle que $dg^{j_0} = h^{j_0}$, si $r + k - j - 1 \leq (q + k - 1) - (j + 1)$ i.e. $r \leq q - 1$.
La démonstration se termine alors comme celle du Théorème 2.2.10.

(ii) La situation est analogue à celle du *(i)*, sauf qu'ici on utilise l'isomorphisme de faisceaux pour la variété à bord $\widetilde{M}$. Il suffit ainsi de démontrer que le Lemme de Poincaré est valide en dimension r pour $1 \leq r \leq q-2$ pour les sections de Whitney au point ξ.
Considérons les fonctions $\rho_1, \dots, \rho_{k+1}$ données par la Définition 2.2.8, et $\widetilde{\varphi}$, l'extension de φ telle que $-\widetilde{\varphi}$ est l'extension de $-\varphi$ donnée par la Définition 2.2.8.
Posons pour tout $j \in \{1, \dots, k+1\}$, $r_j = -\rho_j$, et pour $j \in \{1, \dots, k+1\}$, $\Omega_j = \{z \in U | r_j(z) < 0\}$, alors $\Omega_1, \dots, \Omega_{k+1}$ vérifient les égalités (2.2.16).
Posons pour $R > 0$ et $j \in \{1, \dots, k+1\}$,

$$A_j^R = \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) \leq 0\} \cap \overline{B(\xi,R)} \cap \overline{\Omega}_j$$

Soit $R_0 > 0$ assez petit pour que :
pour tout $R < R_0$, pour tout $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k+1$ avec $l \leq k+1$,

$$\begin{aligned} A_{j_1}^R \cap \dots \cap A{j_l}^R &= \overline{\Omega}_{j_1} \cap \dots \cap \overline{\Omega}_{j_l} \cap \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) \leq 0\} \cap \overline{B(\xi,R)} \\ &\overset{\text{si } l \leq k+1}{=} \overline{\Omega_{j_1} \cap \dots \cap \Omega_{j_l} \cap \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) < 0\} \cap B(\xi,R)} \end{aligned}$$

et d'après la Proposition 2.2.4, la famille $\mathcal{A}^R = (A_1^R, \dots, A_{k+1}^R)$ est régulièrement située. De plus, si R_0 est assez petit, pour tout $R < R_0$ et tout $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k+1$ avec $l \leq k$, $A_{j_1}^R \cap \dots \cap A{j_l}^R$ est l'adhérence d'un domaine à coins $(q+k-1)$-concave défini par une configuration $(q+k-1)$-concave avec $l+1$ éléments.

Le raisonnement est alors le même que dans *(i)* sauf que les domaines à coins considérés ont un bord supplémentaire, ainsi on doit utiliser le Théorème 1.0.3 pour construire g^0 ce qui convient si $r+k \leq q+k-2$, i.e. $r \leq q-2$, et de plus, pour construire (h^j), on doit avoir pour tout $j \in \{0, \dots, k-1\}$, $r + k - j - 1 \leq (q + k - 1) - (j + 2)$, i.e. $r \leq q - 2$. $\square$

Nous allons maintenant terminer ce chapitre avec un résultat de prolongement des formes CR de bidegré $(n, 0)$.

Théorème 2.3.3 *Soient M une sous-variété CR générique q-concave de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de codimension k dans $\mathbb{C}^n$ avec $1 < k \leq n$ et $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$ et $\xi \in M$.*
Soit $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une application $(q+k)$-concave au point ξ, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $d\varphi(\xi) \neq 0$.
Alors, si R_0 est un réel positif, il existe R_1 avec $0 < R_1 \leq R_0$ que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de φ tel que :
si $f \in [\mathcal{E}_{n,0}]_{M\cap\{\varphi\leq 0\}}(\overline{B(\xi,R_0)})$, avec $df = 0$, il existe $\widetilde{f} \in [\mathcal{E}_{n,0}]_M(\overline{B(\xi,R_1)})$ avec $d\widetilde{f} = 0$ qui prolonge f.

Démonstration : Si $R > 0$ est assez petit, les isomorphismes :

$$H^0(M \cap \overline{\{\varphi < 0\} \cap B(\xi,R)}, \mathcal{W}_M^{n,*}) \xrightarrow{\simeq} H_\infty^{n,0}(M \cap \overline{\{\varphi < 0\} \cap B(\xi,R)})$$

et

$$H^0(M \cap \overline{B(\xi,R)}, \mathcal{W}_M^{n,*}) \xrightarrow{\simeq} H_\infty^{n,0}(M \cap \overline{B(\xi,R)})$$

permettent d'affirmer qu'il suffit de démontrer le résultat pour les sections de Whitney. Le raisonnement est alors analogue à celui utilisé précédemment.
Soit $f \in \mathcal{W}_M^{n,0}(\overline{\{\varphi < 0\} \cap B(\xi,R_0)})$.
On suppose que R_0 est assez petit pour que la famille $\mathcal{A}^R$, $R \leq R_0$ soit régulièrement située (avec les notations du *(ii)* de la démonstration précédente) et que pour tout $R < R_0$ et tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k+1$ avec $l \leq k$, $A_{j_1}^R \cap \cdots \cap A{j_l}^R$ est l'adhérence d'un domaine à coins $(q+k-1)$-concave défini par une configuration $(q+k-1)$-concave avec $l+1$ éléments.
On construit alors comme précédemment les suites $(f^s), (g^s)$ et (h^s) (voir la démonstration du Théorème 2.2.10), en réduisant les rayons des boules sur lesquelles on se place.
Alors il existe $R' > 0$ avec $R' < R_0$ tel que $h^{k-1} \in C^{k-1}(\mathcal{A}^{R'}, W^{n,0})$ avec $dh^{k-1} = 0$ et $\delta h^{k-1} = f$. Pour tout $1 \leq j_0 < \cdots < j_{k-1} \leq k+1$, $h_{j_0\cdots j_{k-1}}^{k-1} \in W^{n,0}(A_{j_0} \cap \cdots \cap A_{j_{k-1}})$, comme $k \leq q+k-1$, d'après la Proposition 1.4.12, il existe $R_1 \leq R'$ tel que chaque $h_{j_0\cdots j_{k-1}}^{k-1}$ se prolonge holomorphiquement sur $\overline{B(\xi,R_1)}$ en $\widetilde{h}_{j_0\cdots j_{k-1}}^{k-1}$.
Ces sections de Whitney définissent une chaîne $\widetilde{h} \in C^{k-1}(\mathcal{B}, W^{n,0})$, où $\mathcal{B}$ est la famille de $k+1$ copies de $\overline{B(\xi,R_1)}$, telle que $d\widetilde{h} = 0$.
Alors $\delta\widetilde{h}$ prolonge f holomorphiquement. □

Remarque. En réalité, on a montré qu'une $(n,0)$-forme CR se prolonge holomorphiquement sur un voisinage de ξ dans $\mathbb{C}^n$, en effet, la forme $\delta\widetilde{h}$ est fermée sur $B(\xi,R_1)$ et lisse sur $\overline{B(\xi,R_1)}$.

Chapitre 3

Applications pour l'équation de Cauchy-Riemann

Ce chapitre présente principalement des résultats globaux obtenus grâce aux résolutions locales avec régularité jusqu'au bord qui ont été démontrées dans le Chapitre 1.
Il est divisé en deux parties, dans un premier temps, nous démontrons la résolution locale avec régularité jusqu'au bord sur le complémentaire d'un domaine défini par une configuration q-convexe (voir la Définition 1.0.1). Ensuite, nous nous plaçons dans une variété complexe X de dimension n pour démontrer des résultats globaux de résolution pour des formes à support compact ainsi qu'un théorème de séparation du type théorème d'Andreotti-Vesentini.

3.1 Un résultat local sur le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux

Dans cette partie, on résout le $\bar\partial$ avec régularité jusqu'au bord sur le complémentaire d'un domaine q-convexe, au voisinage d'un point du bord de ce domaine. Pour cela, nous allons dans un premier temps donner un autre théorème de résolution de l'équation de Cauchy-Riemann pour une configuration q-concave dans le cas limite où $r = q - N + 1$.

3.1.1 Un théorème de résolution à support compact dans le cas limite pour une configuration q-concave

Soit N un entier avec $N \leq n$. Soient $U, \rho_1, \dots, \rho_N$ tels que $(U, \rho_1, \dots, \rho_N)$ soit une configuration q-concave de classe $\mathcal{C}^d$, $d \geq 3$ dans $\mathbb{C}^n$, avec les notations de la Définition 1.0.1.

Comme dans le Chapitre 1, on note, pour $R > 0$ et pour $\xi \in \{z \in U | \rho_1(z) = \cdots = \rho_N(z) = 0\}$

$$G = \bigcap_{i=1}^{N} \{z \in U | \rho_i(z) < 0\}$$
$$D_R = G \cap B(\xi, R)$$

On va maintenant établir un théorème de résolution avec régularité jusqu'au bord pour des formes dont le support est relativement compact dans $\overline{G} \cap B(\xi, R'')$, pour $R'' > 0$ assez petit, avec une solution dont le support est du même type.

Le fait que les réels R et R' donnés par le Théorème 1.0.3 puissent être choisis indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ peut s'énoncer de la façon suivante :

Proposition 3.1.1 *Soit $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ une configuration q-concave de classe $\mathcal{C}^d$, $d \geq 3$ dans $\mathbb{C}^n$, soit $\xi \in E$. Il existe $\varepsilon > 0$, V voisinage de ξ, ainsi que $R_\xi > 0$ tels que si $R < R_\xi$, il existe $R' < R$ vérifiant :*
pour toutes $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N$, fonctions de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec :

$$\forall j \in \{1, \ldots, N\} \quad \|\rho_j - \widetilde{\rho}_j\|_{2,U} < \varepsilon \tag{3.1.1}$$

$(U, \widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N)$ est une configuration q-concave, de plus,

$$V \cap \left\{z \in U \middle| \widetilde{\rho}_1(z) = \cdots = \widetilde{\rho}_N(z) = 0\right\} \neq \varnothing$$

et pour tout $\widetilde{\xi} \in V \cap \left\{z \in U \middle| \widetilde{\rho}_1(z) = \cdots = \widetilde{\rho}_N(z) = 0\right\}$, R et R' vérifient les propriétés du Théorème 1.0.3 par rapport aux applications $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N$ et à $\widetilde{\xi}$.

On peut alors donner le théorème suivant :

Théorème 3.1.2 *Soit $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ une configuration q-concave de classe $\mathcal{C}^d$, $d \geq 5$, dans $\mathbb{C}^n$, $1 \leq N \leq q \leq n-1$, soit $\xi \in E$ et soit R_ξ donné par la proposition précédente. Soit R tel que $0 < R < R_\xi$, (on note D à la place de D_R), alors il existe R_0 avec $0 < R_0 < R$, tel que*
pour tout R' avec $0 < R' < R_0$, il existe $R'' > 0$ avec $0 < R'' < R'$ ayant les propriétés suivantes :
si $f \in \mathcal{C}^m_{0,q-N+1}(\overline{D})$, avec $3 \leq m \leq d-2$ est telle que :

1. *$\bar{\partial} f = 0$;*
2. supp $f \subset\subset \left\{z \in U \middle| \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \rho_i(z) \leq 0\right\} \cap \{z \in U | |\xi - z| < R''\}$;
3. *f vérifie la condition* (C1) *du Théorème 1.0.3, rappelée ci-dessous :*

   (C1) *Si $q = n-1$,*
   $$\int_{S_{(1,\ldots,N)}} f(\zeta) \wedge g(\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n = 0, \text{ pour tout } g \in \mathcal{O}(B(\xi, R)).$$

alors il existe $u \in \mathcal{C}^{m-3}_{0,q-N}(\overline{D})$ telle que :

1. $\bar\partial u = f$ *sur* D *;*

2. supp $u \subset\subset \{z \in U | \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \rho_i(z) \leq 0\} \cap \{z \in U | |\xi - z| < R'\}$.

Démonstration : Soient ε_0, V_0 et R_ξ donnés par la Proposition 3.1.1. Soient $R > 0$ avec $R < R_\xi$ et R_2 avec $R_2 < \frac{1}{2}R$ correspondant au R' de la proposition précédente par rapport à $\frac{1}{2}R$.
Soient $R_0 > 0$ et $R' > 0$ tels que $4R_0 < R_2$ et $B(\xi, R_0) \subset V_0$ et $0 < R' < R_0$. Alors, si $R'' < R'$ est assez petit, on peut construire des applications $\widetilde\rho_1, \ldots, \widetilde\rho_N$, telles que :

1. supp $(\widetilde\rho_j - \rho_j) \subset\subset B(\xi, R')$, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$;
2. $\|\widetilde\rho_j - \rho_j\|_{2,U} < \varepsilon_0$, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$;
3. $\widetilde\rho_j(z) \geq \rho_j(z)$, pour tout $z \in U$ et tout $j \in \{1, \ldots, N\}$;
4. $\widetilde\rho_j(z) > \rho_j(z)$ pour $z \in \overline{B(\xi, R'')}$ et tout $j \in \{1, \ldots, N\}$.

En particulier, les applications $\widetilde\rho_1, \ldots, \widetilde\rho_N$ vérifient les hypothèses de la Proposition 3.1.1. Soit $\widetilde\xi \in V_0 \cap \{z \in U | \widetilde\rho_1(z) = \cdots = \widetilde\rho_N(z) = 0\}$, alors $\widetilde\xi \in B(\xi, R')$.
Soit R_1 tel que $\dfrac{1}{2}R < R_1 < \dfrac{3}{4}R$ alors $B(\xi, R_0) \subset\subset B(\widetilde\xi, R_1) \subset\subset B(\xi, R)$, on pose

$$\widetilde D = \{z \in U | \widetilde\rho_i(z) < 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, N\}\} \cap B(\widetilde\xi, R_1)$$

on remarque que, comme $R_1 > \dfrac{R}{2}$, R_2 vérifie le premier point du Théorème 1.0.3 par rapport à $\widetilde D$. De plus, on a $\widetilde D \subset D$.

Soit $f \in \mathcal{C}^m_{0,q-N+1}(\overline{D})$, vérifiant les hypothèses énoncées ci-dessus, alors d'après le Théorème 1.0.3, il existe $v \in \mathcal{C}^{m-1}_{0,q-N}(\overline{D})$ telle que $\bar\partial v = f$ sur D.

Si $q - N = 0$, v est une fonction holomorphe, alors, d'après la Proposition 1.4.12, elle se prolonge en une fonction $w \in \mathcal{C}^\infty_{0,0}(B(\widetilde\xi, R_2))$. Remarquons que $B(\xi, R') \subset\subset B(\widetilde\xi, R_2)$. On pose pour tout $z \in D \cap B(\widetilde\xi, R_2)$, $u = v - w$, alors supp $u \subset \overline{D} \cap B(\xi, R')$, on prolonge ensuite u par 0 à D. u convient.

Si $q - N \geq 1$, comme $v \in \mathcal{C}^{m-1}_{0,q-N}(\overline{\widetilde D})$ est $\bar\partial$-fermée, d'après le Théorème 1.0.3, il existe $w \in \mathcal{C}^{m-2}_{0,q-N-1}(\overline{\widetilde D \cap B(\widetilde\xi, R_2)})$ tels que $\bar\partial w = v$ sur $\widetilde D \cap B(\widetilde\xi, R_2)$. On prolonge alors w à $\overline{D \cap B(\widetilde\xi, R_2)}$ de manière $\mathcal{C}^{m-2}$, et on pose pour tout $z \in D \cap B(\widetilde\xi, R_2)$, $u = v - \bar\partial w$ alors supp $u \subset \overline{D} \cap B(\xi, R')$, on prolonge ensuite u par 0 à D. Alors $u \in \mathcal{C}^{m-3}_{0,q-N}(\overline{D})$ convient. $\square$

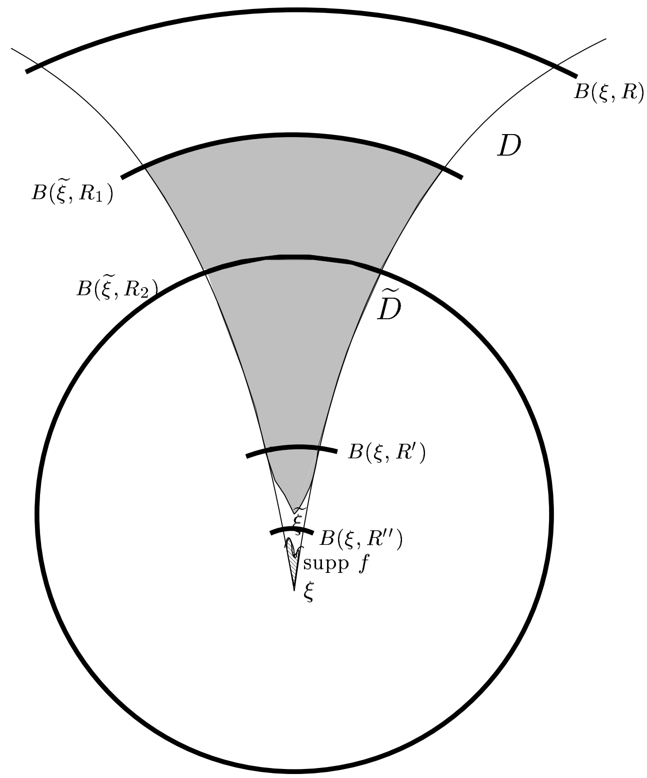


Illustration de la démonstration du Théorème 3.1.2

3.1.2 Retour sur le complexe de chaîne de sections de Whitney

Comme dans le chapitre précédent, on va utiliser des sections de Whitney. Cependant, ici, nous raisonnons avec des formes de classe $\mathcal{C}^m$, et non plus uniquement avec des formes lisses. On rappelle donc brièvement leur construction, qui est analogue au cas $\mathcal{C}^\infty$ décrit dans la partie 2.2.2.
Soit X une variété différentiable lisse et E un fibré vectoriel $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Étant donné un ouvert Ω de X, on note $\Gamma^m(\Omega, E)$ l'espace des sections de classe $\mathcal{C}^m$ de E sur Ω.
Si $x \in \Omega$, on dit que $f \in \Gamma^m(\Omega, E)$ est *m-plate en* x si pour tout choix de coordonnées locales en x, les composantes de f s'annulent ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre m en x. Si A est un fermé dans Ω, on note $\mathcal{F}^m_A(\Omega, E)$ l'espace des sections $f \in \Gamma^m(\Omega, E)$ qui sont m-plates en tout point de A.
L'espace $W^m(A, E)$ des sections de Whitney de classe $\mathcal{C}^m$ de E sur un fermé A de Ω est alors défini, comme dans le cas lisse, par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^m_A(\Omega, E) \longrightarrow \Gamma^m(\Omega, E) \longrightarrow W^m(A, E) \longrightarrow 0 \qquad (3.1.2)$$

Pour obtenir un complexe acyclique, nous avons besoin de suites du type suite de Mayer-Vietoris (voir la suite (2.2.6)) pour $W^m(\,.\,, E)$, celles-ci sont exactes de manière triviale pour $m = 0$ et, lorsque $0 < m < +\infty$, l'exactitude de ces suites est équivalente à ce que les fermés A et B vérifient une condition plus forte que la notion de fermés régulièrement situés (voir la Définition 2.2.3), comme cela est démontré dans [To]. On donne ainsi la définition suivante :

Définition 3.1.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, deux sous-ensembles fermés A et B de Ω sont dits* fortement régulièrement situés *s'ils vérifient une des deux propriétés suivantes :*

(i) $A \cap B = \varnothing$

(ii) pour tout $x_0 \in A \cap B$, il existe un voisinage V de x_0 dans Ω et une constante $C > 0$ tels que pour tout $x \in V$

$$dist(x, A) + dist(x, B) \geq C \; dist(x, A \cap B)$$

Soit $\mathcal{U} = \{A_0, \ldots, A_\eta\}$ une famille de fermés de X, on dit que $\mathcal{U}$ est un *système fortement régulièrement situé*, si pour tout $0 \leq i_0, \ldots, i_t \leq \eta$ et $0 \leq j_0, \ldots, j_s \leq \eta$, $0 \leq t, s \leq \eta$, les fermés $A_{i_0} \cap \cdots \cap A_{i_t}$ et $A_{j_0} \cap \cdots \cap A_{j_s}$ sont fortement régulièrement situés.

Considérons le fibré vectoriel $E^{p,q}$ sur $\mathbb{C}^n$ des (p,q)-formes différentielles sur U, on a alors $\Gamma^m(U, E^{p,q}) = \mathcal{C}^m_{p,q}(U)$, le faisceau des (p,q)-formes $\mathcal{C}^m$ sur U et on note $W^m(A, E^{p,q}) = W^m_{p,q}(A)$, pour tout A fermé dans U, on a alors l'identification suivante :

Proposition 3.1.4 *Si A est un fermé vérifiant $\overline{\mathring{A}} = A$, alors on a :*

$$\mathcal{C}^m_{p,q}(A) \simeq W^m_{p,q}(A) \tag{3.1.3}$$

Comme dans le cas lisse, on définit l'espace des chaînes de section de Whitney $C^s(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q})) = C^s(\mathcal{U}, W^m_{p,q})$, de la manière suivante :

$$f = (f_{j_0 \ldots j_s}) \quad \text{avec} \quad f_{j_0 \ldots j_s} \in W^m_{p,q}(A_{j_0} \cap \cdots \cap A_{j_s})$$

On définit l'opérateur cobord $\delta : C^s(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q})) \to C^{s+1}(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q}))$ et le complexe associé.
On pose de plus pour tout $s \in \{0, \ldots, \eta\}$

$$Z^s(\mathcal{U}, W^m_{p,q}) = \{f \in C^s(\mathcal{U}, W^m_{p,q}) | \delta f = 0\}$$

On a alors la même propriété d'acyclicité :

Proposition 3.1.5 *Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{U}$ est un système fortement régulièrement situé de fermés de X, alors le complexe de chaînes de sections de Whitney de classe $\mathcal{C}^m$ est acyclique, de plus pour tout $f \in Z^0(\mathcal{U}, W^m_{p,q})$, il existe une unique $g \in W^m_{p,q}(A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_\eta)$ telle que $g|_{A_j} = f$, pour tout $j \in \{0, \ldots, \eta\}$.*

On notera par la suite $W^{\infty}_{p,q}(A)$ à la place de $W^{p,q}(A)$ afin de ne pas séparer le cas où $m = +\infty$ dans les notations.

On peut ensuite définir l'opérateur de Cauchy-Riemann pour les chaînes de sections de Whitney de classe $\mathcal{C}^m$, $m > 0$ qui commute trivialement avec le cobord.

– Si $m = +\infty$, voir le paragraphe 2.2.2
– Si $m \in \mathbb{N}^*$, et si pour tout $0 \leq j_0 < \dots j_s \leq \eta$, $\overline{\overset{\circ}{(A_{j_0} \cap \dots \cap A_{j_s})}} = A_{j_0} \cap \dots \cap A_{j_s}$, on pose pour $h \in C^s(\mathcal{U}, W^m_{p,q})$,

$$\bar{\partial} h = \big((\bar{\partial} h)_{j_0 \dots j_s}\big) \in C^s(\mathcal{U}, W^{m-1}_{p,q+1})$$

où $(\bar{\partial} h)_{j_0 \dots j_s} \in \mathcal{C}^{m-1}_{p,q+1}(A_{j_0} \cap \dots \cap A_{j_s})$

3.1.3 Le théorème de résolution

On se place dans la situation suivante. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $r_1, \dots, r_N : U \to \mathbb{R}$ des applications. On suppose que :

(i) Les applications $r_1, \dots,\ r_N$ sont de classe $\mathcal{C}^d$, avec d assez grand.

(ii) Pour tout $I \in P'(N)$, $I = (j_1, \dots, j_l)$, $dr_{j_1}(z) \wedge \dots \wedge dr_{j_l}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \{\zeta \in U | r_{j_1}(\zeta) = \dots = r_{j_l}(\zeta) = 0\} =: E_I$.

(iii) Pour tout $I \in P'(N)$, et tout $\lambda \in \Delta_I$, la forme de Levi de l'application $\lambda_{j_1} r_{j_1} + \dots + \lambda_{j_l} r_{j_l}$ admet au moins $q+1$ valeurs propres strictement positives.

On pose

$$D = \{z \in U | \forall i \in \{1, \dots, N\},\ r_i(z) < 0\}$$

$$W = \bigcup_{i=1}^{N} \{z \in U | r_i(z) > 0\} = U \setminus \overline{D}$$

On va montrer le résultat suivant :

Théorème 3.1.6 *Soit $\xi \in \partial D$*

(i) Si $1 \leq r \leq q-1$, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de ξ dans $\mathbb{C}^n$ tel que si $f \in \mathcal{C}^m_{0,r}\left(\overline{W}\right)$, avec $2N-1 \leq m \leq d-2$, est $\bar{\partial}$-fermée, alors il existe une forme différentielle $u \in \mathcal{C}^M_{0,r-1}\left(\overline{W \cap \mathcal{W}}\right)$, avec $M \geq m - 2N + 1$, telle que $\bar{\partial} u = f$ sur $W \cap \mathcal{W}$.

(ii) Si on suppose de plus que $q \leq n-2$ et $D \subset\subset U$, si $\alpha > 0$ vérifie :

$$D_\alpha = \bigcap_{j=1}^{N} \{z \in U | r_j(z) < \alpha\} \subset\subset U \tag{3.1.4}$$

alors, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de ξ dans $\mathbb{C}^n$ tel que si $f \in \mathcal{C}^m_{0,q}(D_\alpha \setminus D)$, $4N \leq m \leq d-2$, à support compact, est $\bar{\partial}$-fermée, alors il existe une *forme différentielle* $u \in \mathcal{C}^{M'}_{0,q-1}(\overline{(D_\alpha \setminus D) \cap \mathcal{W}})$, *avec* $M' \geq m-4N$ *telle que* $\bar\partial u = f$ *sur* $\left(D_\alpha \setminus \overline{D}\right) \cap \mathcal{W}$.

Démonstration du Théorème 3.1.6, (i) : Soit $\xi \in \partial D$, soit $I \in P'(N)$, maximal tel que $\xi \in E_I$, pour simplifier les notations, on va supposer que $I = (1, \ldots, l)$, on note aussi pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, $\rho_j = -r_j$.
Posons, pour $R > 0$ et pour $j \in I$,

$$C_j^R = \left\{z \in U \middle| r_j(z) \geq 0\right\} \cap \overline{B(\xi, R)}$$

$$\mathcal{U}^R = \left\{C_1^R, \ldots, C_l^R\right\}$$

Alors, il existe $R_\xi > 0$, avec $B(\xi, R_\xi) \subset\subset U$ tel que pour tout $J = (j_1, \ldots, j_k) \subset I$, $k \leq q$, R_ξ vérifie les propriétés de la Proposition 3.1.1 par rapport à la configuration q-concave $(U, \rho_{j_1}, \ldots, \rho_{j_k})$. De plus, la Proposition 2.2.4 implique que pour tout R, avec $0 < R < R_\xi$, $\mathcal{U}^R$ est un système fortement régulièrement situé.

Soient R_0 tel que $0 < R_0 < R_\xi$ et $B(\xi, R_0) \subset\subset U$.
Soit $f \in \mathcal{C}^m_{0,r}(C_1^{R_0} \cup \cdots \cup C_l^{R_0})$, avec $2N - 1 \leq m \leq d - 2$ et $0 \leq r \leq q - 1$, $\bar\partial$-fermée.
L'isomorphisme (3.1.3) permet d'affirmer que $\widetilde{f} = (f_j)_{j=1,\ldots,l}$ définie par

$$f_j = f|_{C_j^{R_0}} \quad \text{avec} \quad j \in \{1, \ldots, l\}$$

vérifie $\widetilde{f} \in C^0(\mathcal{U}^{R_0}, W^m(E^{0,r}))$, $\delta\widetilde{f} = 0$ et $\bar\partial\widetilde{f} = 0$.
La démonstration de la première partie du théorème s'effectue en considérant deux cas distincts, d'abord celui où $l \leq r \leq q - 1$ (ce cas peut être vide si $l \geq q$), puis le cas où $0 \leq r \leq \min(l - 1, q - 1)$.

- Si $l \leq r \leq q - 1$.

On construit par récurrence les suites $(R_j)_{j=1,\ldots,l}$ et $(g^j)_{j=1,\ldots,l}$ ayant les propriétés suivantes :
la suite $(R_j)_{j=1,\ldots,l}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs, pour tout $k \in \{1, \ldots, l\}$, $g^k \in C^{k-1}(\mathcal{U}^{R_k}, W^{m-k}(E^{0,r-k}))$ et la suite $(g^k)_{k=1,\ldots,l}$ vérifie :

(i) $\bar\partial g^1 = \widetilde{f}$.

(ii) Pour tout $k \in \{2, \ldots, l\}$ $\bar\partial g^k = \delta g^{k-1}$ si on se restreint à $\mathcal{U}^{R_k}$.

On détermine d'abord les premiers termes, R_1, g^1, R_2 et g^2, afin d'amorcer la récurrence :
d'après le Théorème 1.0.3 transposé pour les sections de Whitney, comme $m - 1 > 0$, il existe R_1 tel que $0 < R_1 \leq R_0$
et $g^1 \in C^0(\mathcal{U}^{R_1}, W^{m-1}(E^{0,r-1}))$ tels que $\bar\partial g^1 = \widetilde{f}$. Or d'après sa définition, g^1 vérifie

$$\bar\partial(\delta g^1) = \delta(\bar\partial g^1) = \delta\widetilde{f} = 0$$

donc $\delta g^1 \in C^1(\mathcal{U}^{R_1}, W^{m-1}(E^{0,r-1}))$ est $\bar{\partial}$-fermée. D'après le Théorème 1.0.3, comme $m-2>0$, il existe R_2 avec $0 < R_2 \leq R_1$ et $g^2 \in C^1(\mathcal{U}^{R_2}, W^{m-2}(E^{0,r-2}))$ tels que $\bar{\partial} g^2 = \delta g^1$ dans $C^1(\mathcal{U}^{R_2}, W^{m-1}(E^{0,r-1}))$.

Supposons maintenant les suites (R_j) et (g^j) construites jusqu'au rang $s \in \{2, \ldots, l-1\}$, on a :

$$\bar{\partial}(\delta g^s) = \delta(\bar{\partial} g^s) = \delta\delta g^{s-1} = 0$$

alors d'après le Théorème 1.0.3, comme $m-s-1>0$, il existe R_{s+1} avec $0 < R_{s+1} < R_s$ et $g^{s+1} \in C^s(\mathcal{U}^{R_{s+1}}, W^{m-(s+1)}(E^{0,r-s-1}))$ tels que $\bar{\partial} g^{s+1} = \delta g^s$ dans $C^s(\mathcal{U}^{R_s}, W^{m-s}(E^{0,r-s}))$. On achève ainsi l'hérédité de la récurrence et la construction des deux suites.

On va maintenant modifier la suite (g^k) en une suite $(\widetilde{g}^k)$ de manière à avoir pour tout $k \in \{1, \ldots, l\}$, $\bar{\partial}\widetilde{g}^k = \bar{\partial} g^k$ et $\delta\widetilde{g}^k = 0$.
Pour cela, on effectue une récurrence décroissante construisant des suites $(h^k)_{k=2,\ldots,l}$ et $(\widetilde{g}^k)_{k=1,\ldots,l}$ telles que,
pour tout $s \in \{2, \ldots, l\}$, $h^s \in C^{s-2}(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-2l+s}(E^{0,r-s}))$,
pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, $\widetilde{g}^j \in C^{j-1}(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-2l+j}(E^{0,r-j}))$ et :

(i) $\delta h^l = g^l$ et $\widetilde{g}^l = g^l$

(ii) Pour tout $k \in \{1, \ldots, l-1\}$, $\widetilde{g}^{l-k} = g^{l-k} - \bar{\partial} h^{l-k+1}$ et, si de plus $k \leq l-2$, $\delta h^{l-k} = \widetilde{g}^{l-k}$.

Construisons d'abord h^l et $\widetilde{g}^l$:
$g^l \in C^{l-1}(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-2l+l}(E^{0,r-l}))$, donc elle s'écrit $g^l = (g^l_{1\ldots l})$ avec $g^l_{1\ldots l} \in \mathcal{C}^{m-l}_{0,r-l}(C_1^{R_l} \cap \cdots \cap C_l^{R_l})$ d'où $\delta g^l = 0$. Le complexe de chaînes étant acyclique, il existe $h^l \in C^{l-2}(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-l}(E^{0,r-l}))$ telle que $\delta h^l = g^l$. On pose alors $\widetilde{g}^l = g^l$.
Posons maintenant $\widetilde{g}^{l-1} = g^{l-1} - \bar{\partial} h^l$, on a $\widetilde{g}^{l-1} \in C^{l-2}(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-l-1}(E^{0,r-l+1}))$, de plus, par construction $\bar{\partial}\widetilde{g}^{l-1} = \bar{\partial} g^{l-1}$ et $\delta\widetilde{g}^{l-1} = \delta g^{l-1} - \bar{\partial}(\delta h^l) = 0$.
La Proposition 2.2.5, pour le cas $\mathcal{C}^\infty$, et la Proposition 3.1.5, si $m < +\infty$, permettent alors de définir $h^{l-1} \in C^{l-3}(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-l-1}(E^{0,r-l+1}))$ telle que $\delta h^{l-1} = \widetilde{g}^{l-1}$.
Supposons maintenant que les deux suites (h^s) et $(\widetilde{g}^s)$ sont construites du rang l jusqu'au rang $l-k$ pour $k \in \{1, \ldots, l-2\}$, on pose $\widetilde{g}^{l-k-1} = g^{l-k-1} - \bar{\partial} h^{l-k}$, alors $\delta\widetilde{g}^{l-k-1} = 0$ donc d'après les Propositions 2.2.5 et 3.1.5, on peut définir $h^{l-k-1} \in C^{l-k-3}(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-l-k-1}(E^{0,r-l+k+1}))$ telle que $\delta h^{l-k-1} = \widetilde{g}^{l-k-1}$, on a ainsi construit le rang $l-k-1$ des deux suites.
On termine la récurrence décroissante en posant $\widetilde{g}^1 = g^1 - \bar{\partial} h^2$.
Considérons maintenant le terme $\widetilde{g}^1$.
$\widetilde{g}^1 \in Z^0(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-2l+1}(E^{0,r-1}))$, donc, d'après les Propositions 2.2.5 et 3.1.5, il existe $g \in \mathcal{C}^{m-2l+1}(C_1^{R_l} \cup \cdots \cup C_l^{R_l})$ telle que pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$

$$g|_{C_j^{R_l}} = \widetilde{g}^1_j$$

Soit g une telle fonction, comme $\bar{\partial}\widetilde{g}^1 = \widetilde{f}$, g vérifie $\bar{\partial}g = f$ sur $C_1^{R_l} \cup \cdots \cup C_l^{R_l}$.

- Si $0 \leq r \leq l-1$.

Dans cette situation, on ne peut construire les suites (R_k) et (g^k) jusqu'au rang l mais seulement jusqu'au rang r, alors contrairement au cas précédent, le dernier terme de la suite (g^k) n'est pas automatiquement de cobord nul, ce qui est gênant pour modifier la suite comme on l'a fait précédemment. On va donc procéder comme suit.
Dans un premier temps on construit les suites $(R_k)_{k=1,\dots,r}$ et $(g^k)_{k=1,\dots,r}$ de la même façon. Considérons maintenant le terme g^r.
On a $\bar{\partial}g^r = \delta g^{r-1}$ mais a priori, $\delta g^r \neq 0$, on va donc chercher à modifier g^r au moyen d'une chaîne de fonctions holomorphes dont dont le cobord est égal à celui de g^r.
$g^r \in C^{r-1}(\mathcal{U}^{R_r}, W^{m-r}(E^{0,0}))$ et vérifie $\bar{\partial}\delta g^r = 0$, donc δg^r est une chaîne composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $C_{j_0}^{R_r} \cap \cdots \cap C_{j_r}^{R_r}$, $(j_0, \dots, j_r) \subset \{1, \dots, l\}$, qui sont holomorphes, elle sont donc $\mathcal{C}^\infty$. Or les ensembles de la formes $C_{j_0}^{R_r} \cap \cdots \cap C_{j_r}^{R_r}$, $(j_0, \dots, j_r) \subset \{1, \dots, l\}$ sont des domaines à coins q-concaves, alors d'après le Théorème 5.7 dans [L-T/Le 2] ou la Proposition 1.4.12, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de ξ dans $\mathbb{C}^n$ (on peut le prendre inclus dans $B(\xi, R_r)$), tel que toute fonction holomorphe sur $C_{j_0}^{R_r} \cap \cdots \cap C_{j_r}^{R_r}$, $(j_0, \dots, j_r) \subset \{1, \dots, l\}$, se prolonge holomorphiquement sur $\mathcal{V}$. Quitte à réduire un peu $\mathcal{V}$, on peut supposer que les prolongements sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\mathcal{V}}$.
On note pour tout $(j_0, \dots, j_r) \subset \{1, \dots, l\}$, $h_{j_0 \dots j_r}$ le prolongement holomorphe de la fonction $(\delta g^r)_{j_0 \dots j_r}$ sur $\mathcal{V}$.
On note de plus $\mathcal{U}' = \left\{C_1^{R_r} \cap \mathcal{V}, \dots, C_l^{R_r} \cap \mathcal{V}\right\}$.
Si $r = l-1$, alors, il n'y a qu'un seul $(r+1)$-uplet : $(j_0, \dots, j_r) = (1, \dots, l)$.
On pose :

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_{1 \dots l-1} &= h_{1 \dots l} \quad \text{sur} \ \left(C_1^{R_r} \cap \overline{\mathcal{V}}\right) \cap \cdots \cap \left(C_{l-1}^{R_r} \cap \overline{\mathcal{V}}\right) \\ \widetilde{h}_{j_0 \dots j_{r-1}} &= 0 \quad \text{si} \ (j_0, \dots, j_{r-1}) \neq (1, \dots, l-1) \end{aligned}$$

Alors $\widetilde{h} \in C^{r-1}(\mathcal{U}', W^\infty(E^{0,0}))$, elle est holomorphe et $\delta\widetilde{h} = \delta g^r$.
On pose alors $\widetilde{g}^r = g^r - \widetilde{h}$. On peut ainsi conclure en effectuant une récurrence décroissante pour créer la suite $(\widetilde{g}^k)_{k=1,\dots,r}$ de la même manière que dans le cas précédent.
Si $r < l-1$, alors pour tout $(j_0, \dots, j_r, j_{r+1}) \subset \{1, \dots, l\}$ on a :

$$\sum_{s=0}^{r+1} (-1)^s h_{j_0 \dots \widehat{j}_s \dots j_{r+1}} \big|_{C_{j_0}^{R_r} \cap \cdots \cap C_{j_{r+1}}^{R_r} \cap \mathcal{V}} = 0$$

Or, les $h_{j_0 \dots \widehat{j}_s \dots j_{r+1}}$ sont holomorphes, donc le principe du prolongement analytique des fonctions holomorphes permet d'affirmer que les sommes ci-dessus sont nulles sur tout $\mathcal{V}$. On a donc sur $\mathcal{V}$:

$$\sum_{s=0}^{r+1}(-1)^s h_{j_0\dots\widehat{j}_s\dots j_{r+1}} = 0 \tag{3.1.5}$$

On note $\mathfrak{V}$ la famille de l copies de $\overline{\mathcal{V}}$, c'est un système de fermés régulièrement situé, de plus $h = (h_{j_0\dots j_r})$ est un élément de $C^r(\mathfrak{V}, W^\infty(E^{0,0}))$ dont le cobord est nul d'après les équations (3.1.5). D'après les Propositions 2.2.5, le complexe de chaînes est acyclique donc il existe $\widetilde{h}^0 \in C^{r-1}(\mathfrak{V}, W^\infty(E^{0,0}))$ tel que $\delta\widetilde{h}^0 = h$. Alors, par définition du cobord, $\widetilde{h}^0$ est solution du système linéaire défini sur $\overline{\mathcal{V}}$, par les équations suivantes :
Pour tout $(j_0, \dots, j_r) \subset \{1, \dots, l\}$

$$h_{j_0\dots j_r} = \sum_{s=0}^{r}(-1)^s k_{j_0\dots\widehat{j}_s\dots j_r} \tag{3.1.6}$$

Ainsi pour tout $(i_0, \dots, i_{r-1}) \subset \{1, \dots, l\}$, $\widetilde{h}^0_{i_0\dots i_{r-1}}$ est combinaison linéaire sur $\mathcal{V}$ des éléments de h qui sont holomorphes, donc $\bar\partial\widetilde{h}^0 = 0$.
On considère pour chaque $(i_0, \dots, i_{r-1}) \subset \{1, \dots, l\}$, la restriction de $\widetilde{h}^0_{i_0\dots i_{r-1}}$ à $\left(C^{R_r}_{i_0} \cap \overline{\mathcal{V}}\right) \cap \dots \cap \left(C^{R_r}_{i_{r-1}} \cap \overline{\mathcal{V}}\right)$, cela donne un élément, noté $\widetilde{h}$, de $C^{r-1}(\mathcal{U}', W^\infty(E^{0,0}))$ ayant les propriété suivantes :

$$\bar\partial\widetilde{h} = 0 \qquad \delta\widetilde{h} = h = \delta g^r$$

On pose alors $\widetilde{g}^r = g^r - \widetilde{h}$. On peut ainsi conclure en effectuant une récurrence décroissante pour créer la suite $(\widetilde{g}^k)_{k=1,\dots,r}$ de la même manière que dans le cas précédent. $\square$

Démonstration du Théorème 3.1.6, (ii) :
Si $\gamma \in \mathbb{R}$, on note :

$$D_\gamma = \{z \in U | \forall i \in \{1, \dots, N\}\ r_i(z) < \gamma\}$$

on remarque si $|\gamma|$ est assez petite, $D_\gamma \subset\subset U$.
L'idée principale de cette démonstration consiste à modifier le support de f pour pouvoir utiliser le Théorème 3.1.2 de manière analogue au cas précédent (voir l'illustration à la fin de cette démonstration).
Soit $\xi \in \partial D$, soit $I \in P'(N)$, maximal tel que $\xi \in E_I$, pour simplifier les notations, on va supposer que $I = (1, \dots, l)$, pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$, on pose $\rho_i = -r_i$.

Soit $R > 0$ tel que $B(\xi, R) \subset\subset D_\alpha$ et tel que si on note $\rho_*(z) = |\xi - z|^2 - R^2$ et si on pose, pour $j \in \{1, \dots, l\}$:

$$W_j^R = \left\{z \in U \middle| \rho_j(z) < 0\right\} \cap \overline{B(\xi, R)}$$

alors, pour tout $(j_0,\dots,j_s)\in\{1,\dots,l\}$, $W^R_{j_0}\cap\cdots\cap W^R_{j_s}$ est un domaine à coins q-concave.
Soit $\varepsilon>0$ et V donnés par la Proposition 3.1.1, si $\widetilde{\rho}_1,\dots,\widetilde{\rho}_l$, $\widetilde{\xi}$ vérifient les hypothèses de ce lemme, on note

$$\widetilde{W}^R_j=\big\{z\in U\big|\widetilde{\rho}_j(z)<0\big\}\cap\overline{B(\widetilde{\xi},R)}$$

Comme le réel R_0 dont l'existence est donné par le Théorème 3.1.2 dépend de manière semi-continue des normes $\mathcal{C}^2$ des applications ρ_i, si ε est assez petit, on peut choisir R_0, $0<R_0<R$ tel que R_0 vérifie les propriétés données par le Théorème 3.1.2, pour tout $\widetilde{W}^R_{j_0}\cap\cdots\cap\widetilde{W}^R_{j_s}$, avec $\widetilde{\rho}_1,\dots,\widetilde{\rho}_l$, $\widetilde{\xi}$ vérifiant les hypothèses de la Proposition 3.1.1, pour tout $(j_0,\dots,j_s)\in\{1,\dots,l\}$ avec $s\leq$.
On en déduit qu'il existe une suite finie, strictement décroissante, de réels strictement positifs $(R_j)_{j\in\{1,\dots,l+1\}}$ telle que pour tout $i\in\{1,\dots,l+1\}$, $R_j<R$ et si $\widetilde{\rho}_1,\dots,\widetilde{\rho}_l$, $\widetilde{\xi}$ vérifient les hypothèses de la Proposition 3.1.1 alors :
pour tout $(j_1,\dots,j_s)\in\{1,\dots,l\}$, avec $1\leq s\leq\min(l,q)$, pour tout $i\in\{1,\dots,l\}$,
si $f\in\mathcal{C}^m_{0,q-s+1}(\overline{\widetilde{W}^R_{j_1}\cap\cdots\cap\widetilde{W}^R_{j_s}})$, avec $m\geq 3N$, $\bar\partial$-fermée et telle que supp $f\subset\overline{\widetilde{W}^R_{j_1}\cap\cdots\cap\widetilde{W}^R_{j_s}}\cap B(\widetilde{\xi},R_{i+1})$ alors, il existe $u\in\mathcal{C}^{m-3}_{0,q-s}(\overline{\widetilde{W}^R_{j_1}\cap\cdots\cap\widetilde{W}^R_{j_s}})$ telle que $\bar\partial u=f$ et supp $u\subset\overline{\widetilde{W}^R_{j_1}\cap\cdots\cap\widetilde{W}^R_{j_s}}\cap B(\widetilde{\xi},R_i)$.
Soit $\eta>0$ assez petit pour que $0<R_{l+1}-\eta<R_{l+1}+\eta<R$.
Considérons maintenant des fonctions $\widetilde{\rho}_1,\dots,\widetilde{\rho}_l$, de classe $\mathcal{C}^d$ sur U et vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour tout $j\in\{1,\dots,l\}$, $\|\rho_j-\widetilde{\rho}_j\|_{2,U}<\varepsilon$;
2. pour tout $j\in\{1,\dots,l\}$, supp $(\rho_j-\widetilde{\rho}_j)\subset B(\xi,R_{l+1}+\eta)\setminus\overline{B(\xi,R_{l+1}-\eta)}$;
3. pour tout $j\in\{1,\dots,l\}$ et tout $z\in U$ $\rho_j(z)\leq\widetilde{\rho}_j(z)$;
4. il existe $\gamma>0$, tel que pour tout $j\in\{1,\dots,l\}$ et tout $z\in(\overline{D_\gamma}\setminus D)\cap(\overline{B(\xi,R_{l+1}+\frac{\eta}{2})}\setminus B(\xi,R_{l+1}-\frac{\eta}{2}))$, $\rho_j(z)<\widetilde{\rho}_j(z)$.

Soit γ', avec $0<\gamma'<\gamma$. Soit $f\in\mathcal{C}^m_{0,q}(D_\alpha\setminus D)$, avec $d-2\geq m\geq 4N$, $\bar\partial$-fermée, à support compact.
Comme cela a déjà été remarqué, pour tout $\vartheta>0$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $||t|-\theta_\vartheta(t)|\leq\vartheta$, ainsi, si on pose avec les notations du paragraphe 1.4.2.1, pour $z\in U$:

$$\begin{cases}\eta^\vartheta_1(z)=r_1(z)\\ \eta^\vartheta_k(z)=m_\vartheta(\eta_{k-1},r_k)(z)\quad\forall k\in\{2,\dots,N\}\end{cases}$$

il existe un réel positif $\vartheta_0>0$ tel que pour tout $0<\vartheta<\vartheta_0$, on a :

$$\text{supp } f\subset\{z\in U|\eta^\vartheta_N(z)<\alpha\}\setminus D$$

et

$$B(\xi, R) \subset\subset \{z \in U | \eta_N^\vartheta(z) < \alpha\}$$

Pour $\vartheta \in]0, \vartheta_0[$, notons

$$\mathcal{D}_{\alpha,\vartheta} = \{z \in U | \eta_N^\vartheta(z) < \alpha\}$$

Quitte à diminuer ϑ_0, on peut supposer que pour tout $\vartheta \in]0, \vartheta_0[$, on a $\eta_N^\vartheta(z) = \max_{i=1,\dots,N} r_i(z)$ pour tout $z \in (D_\gamma \setminus D) \cap \Big(B(\xi, R_{l+1} + \eta) \setminus \overline{B(\xi, R_{l+1} - \eta)}\Big)$.
Si on note

$$\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta} = \{z \in U | \eta_N^\vartheta(z) < \nu\}$$

on peut choisir $\vartheta \in]0, \vartheta_0[$ tel que $D \subset\subset \mathcal{D}_{\gamma',\vartheta} \subset\subset \mathcal{D}_{\alpha,\vartheta}$, alors, par construction des fonctions $\widetilde{\rho}_i$, on a pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$, $\widetilde{\rho}_i > 0$ sur $\big(\overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}} \setminus \overline{D}\big) \cap \Big(\overline{B(\xi, R_{l+1} + \frac{\eta}{2})} \setminus B(\xi, R_{l+1} - \frac{\eta}{2})\Big)$.
De plus, $\mathcal{D}_{\alpha,\vartheta}$ est une extension q-convexe de $\overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}}$, comme le support de f est compact dans $\mathcal{D}_{\alpha,\vartheta} \setminus D$, d'après le Théorème 16.1 dans [He/Le 2] et l'isomorphisme de Dolbeault, il existe $v \in \mathcal{C}^m_{0,q-1}(\mathcal{D}_{\alpha,\vartheta} \setminus \overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}})$ telle que $\bar\partial v = f$ sur $\mathcal{D}_{\alpha,\vartheta} \setminus \overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}}$.
Alors D_γ est un voisinage de $\overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$, $\widetilde{\rho}_i > 0$ sur $(\overline{D_\gamma} \setminus D) \cap (\overline{B(\xi, R_{l+1} + \frac{\eta}{2})} \setminus B(\xi, R_{l+1} - \frac{\eta}{2}))$.
Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur D_α telle que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de $D_\alpha \setminus D_\gamma$ et $\chi \equiv 0$ sur un voisinage de $\overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}}$. On note $f' = f - \bar\partial(\chi v)$, f' est de classe $\mathcal{C}^{m-1}$, $\bar\partial$-fermée et on a supp $f' \subset\subset (D_\gamma \setminus D)$. On considère la restriction de f' à $\Big((D_\gamma \setminus D) \setminus (\bigcap_{i=1}^l \{z \in U | \widetilde{\rho}_i(z) > 0\})\Big)$, on note encore f' cette restriction et on la prolonge par 0 à $D_\alpha \setminus (\bigcap_{i=1}^l \{z \in U | \widetilde{\rho}_i(z) > 0\})$, on note aussi f' ce prolongement.
Alors $f' \in \mathcal{C}^{m-1}_{0,q}(\cup_{j=1}^l \overline{\widetilde{W}_j^R})$, de plus, on a

$$\text{supp } f' \subset\subset B(\xi, R_{l+1}) \cap \Big(\cup_{j=1}^l \overline{W_j^R}\Big)$$

On peut alors utiliser le Théorème 3.1.2, pour effectuer le même type de raisonnement par récurrence que pour (i) en prenant garde à ce que les formes (g^k) que l'on construit aient leur support inclus dans $B(\xi, R_{l-k+1})$ afin de pouvoir appliquer de nouveau le Théorème 3.1.2. On montre ainsi qu'il existe un voisinage $\mathcal{W} \subset\subset B(\xi, R_{l+1} - \eta)$ de ξ dans $\mathbb{C}^n$, indépendant de f' et une forme différentielle $g' \in \mathcal{C}^{M'}_{0,q-1}(\overline{(\mathcal{W} \setminus D)})$ avec $M' = m - 4\min(l, r) \geq m - 4N$ telle que $\bar\partial g' = f'$ sur $\mathcal{W} \setminus \overline{D}$.
Posons maintenant $u = \chi v + g'$, alors $u \in \mathcal{C}^{M'}_{0,q-1}(\overline{(\mathcal{W} \setminus D)})$, de plus comme $\mathcal{W} \subset\subset B(\xi, R) \subset\subset D_\alpha$, on a $u \in \mathcal{C}^{M'}_{0,q-1}(\overline{\mathcal{W} \cap (D_\alpha \setminus D)})$
$\bar\partial u = \bar\partial(\chi v) + \bar\partial g' = \bar\partial(\chi v) + f' = f$ sur $\mathcal{W} \cap (D_\alpha \setminus \overline{D})$.
Ce qui achève la démonstration du Théorème 3.1.6. $\square$

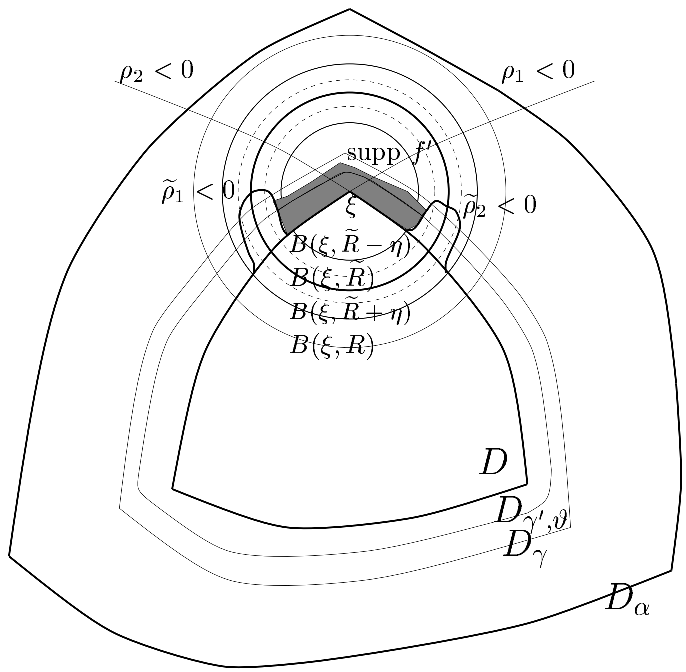


Illustration de la démonstration du Théorème 3.1.6 (ii)

3.2 Résolution de l'équation de Cauchy-Riemann pour des formes à support compact sur le complémentaire d'un domaine q-convexe par morceaux

Soit X une variété complexe de dimension n et soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X. On donne les définitions suivantes :

Définition 3.2.1 *Une* fonction q-convexe, *$1 \leq q \leq n$, sur X est une fonction ρ de classe $\mathcal{C}^2$ sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $\zeta \in X$ et pour tout système de coordonnées holomorphes $(z_1, \ldots, z_n)$ dans un voisinage de ζ, la matrice de Levi de ρ au point ζ admet au moins q valeurs propres strictement positives.*

Définition 3.2.2 *On dit que X est une* extension q-convexe généralisée *de K, où K est un fermé de X si pour tout voisinage ouvert V de K dans X, il existe un fermé K_0 à bord $\mathcal{C}^\infty$ tel que $K \subset K_0 \subset V$ et que X soit une extension q-convexe de K_0 (voir la Définition 1.4.5).*

Remarque. Lorsque le bord de K est de classe $\mathcal{C}^\infty$, le fait que X soit une extension q-convexe de K implique trivialement que X est une extension q-convexe généralisée de K.

Définition 3.2.3 $\Omega \subset\subset X$ *est* un domaine strictement q-convexe à bord $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, par morceaux *s'il existe* $N \geq 2$, *des ouverts* $U_1, \dots, U_N$ *de* X *et des applications* $\rho_i : U_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ *de classe* $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$ *tels que*

1. $\partial\Omega \subset U_1 \cup \cdots \cup U_N$.
2. *Un point* $z \in U_1 \cup \cdots \cup U_N$ *appartient à* Ω *si et seulement si, pour tout* $k \in \{1, \dots, N\}$ *tel que* $z \in U_k$, $\rho_k(z) < 0$.
3. *Pour toute collection d'indices* $1 \leq k_1 < \cdots < k_l \leq N$, *on a* $d\rho_{k_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_{k_l}(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in U_{k_1} \cap \cdots \cap U_{k_l}$.
4. *Pour tout* $I = (i_1, \dots, i_l) \in P'(N)$ *et tout* $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_l}) \in \Delta_I$, *la fonction* $\lambda_{i_1}\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_l}\rho_{i_l}$ *est* $(q+1)$*-convexe sur* $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_l}$.

Pour un tel domaine Ω *et pour* $I = (i_1, \dots, i_l) \in P'(N)$, *on note*

$$E_I := \{z \in \partial\Omega \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_l} | \rho_{i_1}(z) = \cdots = \rho_{i_l}(z) = 0\}$$

Remarque. Si Ω est un domaine strictement q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux défini par des applications $\rho_1, \dots, \rho_N$ que l'on suppose définies sur un voisinage U de $\overline{X \setminus \Omega}$, alors, grâce aux propriétés du maximum généralisé, X est une extension q-convexe généralisée de $\overline{\Omega}$.

Dans cette partie, nous démontrons dans un premier temps un théorème de résolution du $\bar{\partial}$ pour des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, nous utilisons ensuite ce résultat pour démontrer un théorème du type théorème de séparation d'Andreotti-Vesentini.

3.2.1 Résolution à support compact

Nous allons mettre en place un raisonnement du type «Beulenmethode» (ou «méthode des bosses») de Grauert, voir dans [L-T 1] pour les ouverts strictement pseudoconvexes ou [He/Le 2] pour les domaines q-convexes et q-concaves à bord lisse. Celui-ci nous permettra de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.4 *Soit* $\Omega \subset\subset X$ *un domaine* q*-convexe à bord* $\mathcal{C}^\infty$ *par morceaux tel que* X *soit une extension* q*-convexe généralisée de* $\overline{\Omega}$. *On note* $W = X \setminus \overline{\Omega}$. *On a le résultat suivant :*
si $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(\overline{W}, E)$ *avec* $1 \leq r \leq q-1$ *ou, si* $q \leq n-2$, $1 \leq r \leq q$, *à support compact,* $\bar{\partial}$*-fermée, alors il existe* $u \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{W}, E)$, *à support compact telle que* $\bar{\partial}u = f$ *sur* W.

La démonstration de ce théorème s'effectue en plusieurs étapes qui sont représentées par les différents lemmes suivants.

Lemme 3.2.5 *Soit* $\Omega \subset\subset X$ *un domaine* q*-convexe à bord* $\mathcal{C}^\infty$ *par morceaux, soit* $\xi \in \partial\Omega$. *Soit* V^0 *un voisinage ouvert de* ξ *dans* X.

Alors, il existe un réel $\varepsilon > 0$ *et des voisinages ouverts de* ξ *dans* X, V^1, V^2 *tels que :*
1. $V^2 \subset\subset V^1 \subset\subset V^0$ *;*
2. pour toutes applications $\widetilde{\rho}_i : U_i \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *telles que*

$$\forall i \in \{1, \dots, N\},\ \|\rho_i - \widetilde{\rho}_i\|_{2,U_i} < \varepsilon \tag{3.2.1}$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, N\},\ \forall z \in U_i,\ \rho_i(z) \leq \widetilde{\rho}_i(z) \tag{3.2.2}$$

si on définit $\widetilde{\Omega}$ *par les points 1, 2 et 3 de la Définition 3.2.3 par rapport aux applications* $\widetilde{\rho}_1, \dots, \widetilde{\rho}_N$*, alors* $\widetilde{\Omega}$ *est inclus dans* Ω *et c'est un domaine* q*-convexe à bord* $\mathcal{C}^\infty$ *par morceaux et de plus, si on note* $\widetilde{W} = X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}$*, on a :*

(i) pour $i = 0, 1$*, si* $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(\overline{\widetilde{W} \cap V^i}, E)$*, avec* $1 \leq r \leq q-1$*,* $\bar\partial$*-fermée, il existe* $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{\widetilde{W} \cap V^{i+1}}, E)$ *telle que* $\bar\partial v = f$ *sur* $\widetilde{W} \cap V^{i+1}$ *;*

(ii) si $q \leq n-2$*, pour toute* $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(\overline{\widetilde{W}}, E)$*,* $\bar\partial$*-fermée, à support compact, il existe* $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(\overline{\widetilde{W} \cap V^1}, E)$ *telle que* $\bar\partial v = f$ *sur* $\widetilde{W} \cap V^1$*.*

Si $(\varepsilon, V^2, V^1, V^0)$ *vérifie les propriétés ci-dessus pour un domaine à coins* q*-convexe* Ω *donné, on dit qu'il est* adapté à Ω.

Démonstration : Comme Ω est un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, le point *4* de la Définition 3.2.3 est vérifié donc $\widetilde{\Omega}$ est aussi un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. Soit $I = (j_1, \dots, j_l) \in P'(N)$ maximal pour l'inclusion tel que $\xi \in E_I$, on remarque que si $U \subset\subset U_{j_1} \cap \dots \cap U_{j_l}$ est un voisinage de ξ, alors quitte à diminuer ε, il existe $\widetilde{\xi} \in U \cap \partial\widetilde{\Omega}$ tel que $\widetilde{\xi} \in \widetilde{E}_I := \{z \in U_{j_1} \cap \dots \cap U_{j_l} | \widetilde{\rho}_j(z) = 0\ \forall j \in I\}$ et tel que I soit aussi maximal pour l'inclusion, de plus si $\widetilde{\varsigma} \in U \cap \partial\widetilde{\Omega}$, alors pour tout J tel que $\widetilde{\varsigma} \in \widetilde{E}_J$, on a $J \subset I$. On peut supposer sans perdre de généralité que $I = \{1, \dots, l\}$.
Quitte à diminuer V^0, on peut supposer que $V^0 \subset\subset U_1 \cap \dots \cap U_l$, que E est holomorphiquement trivial au dessus de V^0 et qu'il existe des coordonnées holomorphes $h : V^0 \to \mathbb{C}^n$ telles que $h(V^0) = U^0$ avec $U^0 \subset\subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert convexe.
Posons pour $i \in I$, $r_i = \rho_i \circ h^{-1}$ et pour toutes applications $\widetilde{\rho}_i : U_i \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ vérifiant (3.2.1) posons pour tout $i \in I$, $\widetilde{r}_i = \widetilde{\rho}_i \circ h^{-1}$. Alors

1. pour tout $i \in I$, $\widetilde{r}_i = \widetilde{\rho}_i \circ h^{-1}$ est définie sur U^0 ;
2. $(U^0, \widetilde{r}_1, \dots, \widetilde{r}_l)$ est une configuration q-convexe.

On note

$$\widetilde{D} = \bigcap_{i=1}^{l} \{z \in U^0 | \widetilde{r}_i(z) < 0\}$$

Par ailleurs, il est clair qu'il existe $C > 0$ tel que, si $\widetilde{\rho}_1, \dots, \widetilde{\rho}_N$ vérifient les équations (3.2.1), alors, $\widetilde{r}_1, \dots, \widetilde{r}_l$ vérifient :

$$\forall i \in \{1, \dots, l\},\ \|r_i - \widetilde{r}_i\|_{2,U^0} < C\varepsilon \tag{3.2.3}$$

Soient $\varepsilon' > 0$, $U_{h(\xi)}$ voisinage de $h(\xi)$ dans $\mathbb{C}^n$ (avec $U_{h(\xi)} \subset U^0$) et $R_{h(\xi)}$ donnés par la Proposition 3.1.1 par rapport aux configurations q-concaves $(U^0, -r_{j_1}, \ldots, -r_{j_k})$ avec $(j_1, \ldots, j_k) \subset I$, $k \leq q$ et à $h(\xi)$. Le nombre d'ensemble $(j_1, \ldots, j_k) \subset I$ étant fini, de tels $\varepsilon' > 0$, $U_{h(\xi)}$ et $R_{h(\xi)}$ existent.
On suppose de plus que $C\varepsilon \leq \varepsilon'$. On peut alors reprendre la démonstration du Théorème 3.1.6 en utilisant les mêmes suites (R_j) et le même réel $\gamma > 0$ (où γ est celui utilisé dans la démonstration, voir aussi l'illustration) pour toutes les configurations q-convexes $(U^0, \widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_l)$ définies à partir d'applications $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N$ vérifiant les inégalités (3.2.1) et (3.2.2) et pour tout $h(\widetilde{\xi}) \in U_{h(\xi)} \cap \partial \widetilde{D}$. On peut donc affirmer qu'il existe $R^1 > 0$, avec $R^1 < R_{h(\xi)}$ tel que $\widetilde{\mathcal{W}} = B(h(\widetilde{\xi}), R^1)$ est un voisinage de $h(\widetilde{\xi})$ qui vérifie les propriétés du Théorème 3.1.6, en ajoutant dans *(ii)*, l'hypothèse que les formes sont à support dans $\widetilde{D}_\gamma \setminus \widetilde{D}$.

En effet, il faut remarquer ici que $\widetilde{D}$ n'est pas relativement compact dans U^0, aussi, on doit travailler avec des formes à support compact dans $\widetilde{D}_\gamma \setminus \widetilde{D}$, car on ne peut pas utiliser le Théorème 16.1 dans [He/Le 2] pour restreindre le support. La restriction du support de $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(\overline{\widetilde{W}}, E)$ se fera directement dans X, avant de passer en coordonnées locales.

On peut maintenant construire V^1 :
supposons, quitte à diminuer ε et $U_{h(\xi)}$ que $U_{h(\xi)} \subset\subset B(h(\xi), \frac{R^1}{2})$, ainsi, pour tout $\widetilde{\xi} \in h^{-1}(U_{h(\xi)})$, on a $U_{h(\xi)} \subset\subset B(h(\widetilde{\xi}), R^1)$.
Soit U^1 un ouvert tel que

$$U_{h(\xi)} \subset\subset U^1 \subset\subset B(h(\xi), \frac{R^1}{2}) \subset\subset \bigcap_{\widetilde{\xi} \in h^{-1}(U_{h(\xi)})} B(h(\widetilde{\xi}), R^1)$$

Posons alors $V^1 = h^{-1}(U^1)$. Montrons alors qu'un tel ouvert convient pour vérifier *(i)* si $i = 0$ et *(ii)*.
Montrons tout d'abord que *(i)* est vérifié pour $i = 0$, soit $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(\overline{\widetilde{W} \cap V^0}, E)$, avec $1 \leq r \leq q-1$, $\bar\partial$-fermée et posons $g = (h^{-1})^* f$. D'après le raisonnement précédent, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}\left(\overline{(\mathbb{C}^n \setminus \widetilde{D}) \cap B(h(\widetilde{\xi}), R^1)}, E\right)$ telle que $\bar\partial u = g$, alors considérons la restriction de u à U^1 et posons $v = h^* u$, alors $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{\widetilde{W} \cap V^1}, E)$ convient.
Montrons maintenant que *(ii)* est vérifié, soit $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(\overline{\widetilde{W}}, E)$, $\bar\partial$-fermée, à support compact.
Pour $\alpha > 0$, assez petit, on note Ω_α, (resp. $\widetilde{\Omega}_\alpha$) le domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux dans X défini par les applications $\rho_1 - \alpha, \ldots, \rho_N - \alpha$, (resp. $\widetilde{\rho}_1 - \alpha, \ldots, \widetilde{\rho}_N - \alpha$). Supposons de plus que $\alpha < \gamma$.
Quitte à diminuer de nouveau ε et $U_{h(\xi)}$, on peut supposer que $\Omega \subset\subset \widetilde{\Omega}_\alpha$.
Comme X est une extension q-convexe généralisée de $\overline{\Omega}$, il existe $\mathcal{D} \subset\subset \widetilde{\Omega}_\alpha$ tel que X est une extension q-convexe de $\overline{\mathcal{D}}$ et que $\Omega \subset\subset \mathcal{D}$ alors,

$\widetilde{\Omega} \subset\subset \mathcal{D} \subset\subset \widetilde{\Omega}_\alpha$. D'après le Théorème 3.1 dans [L-T/Le 3], il existe w, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact telle que $\bar\partial w = f$ sur $X \setminus \overline{\mathcal{D}}$, soit χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, positive, telle que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de $X \setminus \widetilde{\Omega}_\alpha$ et $\chi \equiv 0$ sur un voisinage de $\mathcal{D}$. On pose $f' = f - \bar\partial(\chi w)$, alors, si on restreint f' à $\overline{V^0}$, $f' \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(\overline{\widetilde{\Omega}_\alpha \setminus \widetilde{\Omega} \cap V^0}, E)$, est $\bar\partial$-fermée et à support compact. Posons $g' = (h^{-1})^* f'$, d'après ce qui précède, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(\overline{(\widetilde{D}_\alpha \setminus \widetilde{D}) \cap B(h(\widetilde{\xi}), R^1)}, E)$ telle que $\bar\partial u = g'$ sur $(\widetilde{D}_\alpha \setminus \widetilde{D}) \cap B(h(\widetilde{\xi}), R^1)$. Considérons la restriction de u à U^1 et posons $v = h^* u$, comme
$V^1 \subset\subset h^{-1}(B(h(\widetilde{\xi}), R_{h(\xi)}))$, on a $(\widetilde{\Omega}_\alpha \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V^1 = (X \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V^1$. Alors la forme différentielle $v' = v + \chi w$ convient.

Il reste maintenant à construire V^2 vérifiant *(i)* pour $i = 1$. Soit $R' > 0$ tel que $B(h(\xi), 2R') \subset U^1$. Alors quitte à réduire encore ε et $U_{h(\xi)}$, on peut supposer que $U_{h(\xi)} \subset\subset B(h(\xi), R')$, et on a :

$$\bigcup_{\widetilde{\xi} \in h^{-1}(U_{h(\xi)})} B(h(\widetilde{\xi}), R') \subset\subset U^1$$

On effectue alors le même raisonnement que précédemment en remplaçant $R_{h(\xi)}$ par R', ce qui donne l'existence de $R^2 > 0$ avec $R^2 < R'$ tel que $\widetilde{\mathcal{W}} = B(h(\widetilde{\xi}), R^1)$ est un voisinage de $h(\widetilde{\xi})$ qui vérifie les propriétés du Théorème 3.1.6 par rapport aux configurations q-convexes $(U^1, \widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_l)$.
On construit ensuite V^2 exactement de la même manière que V^1 en utilisant R^2 à la place de R^1. □

Définition 3.2.6 *Soit Ω un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. On dit que $[\Omega, \widetilde{\Omega}, \varepsilon, V_1, V_2, V_3, V_4]$ est un* élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux *si*

(i) ε est un réel strictement positif et V_1, V_2, V_3 et V_4 sont des voisinages ouverts d'un point $\xi \in \partial\Omega$ dans X tels que :

$$V_1 \subset\subset V_2 \subset\subset V_3 \subset\subset V_4 \subset\subset \bigcap_{i \in I} U_i$$

il existe des coordonnées holomorphes $h : V_4 \to \mathbb{C}^n$ au voisinage de ξ et E est holomorphiquement trivial au dessus de V_4.

(ii) $(\varepsilon, V_2, V_3, V_4)$ est adapté à Ω

(iii) $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ est défini par les points 1, 2 et 3 de la Définition 3.2.3 par rapport à des applications $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $U_1, \ldots, U_N$ dans $\mathbb{R}$ telles que, si $I \in P'(N)$ est maximal pour l'inclusion tel que $\xi \in E_I$:

(a) $\forall i \in I$, supp $(\rho_i - \widetilde{\rho}_i) \subset\subset V_1$;

(b) $\forall i \notin I$, $\widetilde{\rho}_i \equiv \rho_i$;

(c) $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, $\|\rho_i - \widetilde{\rho}_i\|_{2,U_i} < \varepsilon$.

Si $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ sont des domaines q-convexes à bord lisse par morceaux, on dit que $\widetilde{\Omega}$ peut être obtenu de Ω par un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux s'il existe ε, V_1, V_2, V_3 et V_4 tels que $[\Omega, \widetilde{\Omega}, \varepsilon, V_1, V_2, V_3, V_4]$ est un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe.

Lemme 3.2.7 *Soit Ω un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, et pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on définit Ω_ε grâce aux points 1, 2 et 3 de la Définition 3.2.3 par rapport aux fonctions $\rho_1 - \varepsilon, \dots, \rho_N - \varepsilon$, si $|\varepsilon|$ est assez petit, Ω_ε est un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $-\varepsilon_0 \leq \beta_0 \leq 0 \leq \beta_1 \leq \varepsilon_0$, on peut trouver un nombre fini de domaines $\theta_0, \dots, \theta_K$ tels que*

$$\Omega_{\beta_1} = \theta_0 \supseteq \theta_1 \supseteq \cdots \supseteq \theta_K = \Omega_{\beta_0}$$

et pour tout $j \in \{0, \dots, K-1\}$, θ_{j+1} peut être obtenu de θ_j par un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux.

Démonstration : Comme $\partial\Omega$ est compact, on peut extraire un recouvrement fini de $\partial\Omega$ par des ouverts $\left(V_1^j\right)_{j\in\{1,\dots,K\}}$ tels que, pour tout $j \in \{1, \dots, K\}$, il existe $\varepsilon^j > 0$, V_2^j, V_3^j et V_4^j tels que $V_1^j \subset\subset V_2^j \subset\subset V_3^j \subset\subset V_4^j \subset\subset X$, $(\varepsilon^j, V_2^j, V_3^j, V_4^j)$ est adapté à Ω et il existe des coordonnées holomorphes $h_j : V_4^j \to \mathbb{C}^n$. On suppose de plus que si $\xi \in \partial\Omega \cap V_4^j$, alors pour tout i tel que $\xi \in U_i$, $V_4^j \subset\subset U_i$, ce qui est le cas dans la construction que l'on a effectué pour démontrer le Lemme 3.2.5.
On pose $\widetilde{\varepsilon} = \min_{j\in\{1,\dots,K\}} \varepsilon^j$.
Soit $\varepsilon' > 0$ tel que

$$\overline{\Omega}_{\varepsilon'} \setminus \Omega_{-\varepsilon'} \subset\subset \bigcup_{j=1}^{K} V_1^j$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, K\}$, considérons χ_j, une application positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que supp $\chi_j \subset\subset V_1^j$ avec $\sum_{j=1}^K \chi_j \equiv 1$ sur $\overline{\Omega}_{\varepsilon'} \setminus \Omega_{-\varepsilon'}$ et $\sum_{j=1}^K \chi_j \leq 1$ sur X.
On pose $\gamma = \max_{j\in\{1,\dots,K\}} \|\chi_j\|_{2,X}$.
Soit maintenant $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon_0 \leq \varepsilon'$ et $\varepsilon_0 \leq \min\left(\frac{\widetilde{\varepsilon}}{4\gamma}, \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2(1+K\gamma)}\right)$ et soient β_0, β_1 tels que $-\varepsilon_0 \leq \beta_0 \leq 0 \leq \beta_1 \leq \varepsilon_0$.
Soient $\rho_1, \dots, \rho_N$ des fonctions définissant Ω par la Définition 3.2.3.
On définit pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, θ_k par les points *1*, *2* et *3* de la Définition 3.2.3 par rapport aux applications $\widetilde{\rho}_{k,1}, \dots, \widetilde{\rho}_{k,N}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U_1, \dots, U_N$ définies par :

$$\widetilde{\rho}_{k,i}(z) = \rho_i(z) - \beta_1 - (\beta_0 - \beta_1) \sum_{j=1}^{k} \chi_j(z)$$

on a bien $\theta_0 = \Omega_{\beta_1}$, $\theta_K = \Omega_{\beta_0}$ de plus pour tout $j \in \{0, \ldots, K-1\}$, $[\theta_j, \theta_{j+1}, \frac{\varepsilon^j}{2}, V_1^j, V_2^j, V_3^j, V_4^j]$ est un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux, en effet :
soient $j \in \{0, \ldots, K-1\}$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$

$$\begin{aligned}
\text{supp }(\widetilde{\rho}_{j,i} - \widetilde{\rho}_{j+1,i}) &\subset \text{supp } \chi_j \subset\subset V_1^j \\
\|\widetilde{\rho}_{j,i} - \widetilde{\rho}_{j+1,i}\|_{2,U_i} &= (\beta_1 - \beta_0)\|\chi_{j+1}\|_{2,U_i} \\
&\leq 2\varepsilon_0\gamma \\
&\leq \frac{\varepsilon^j}{2}
\end{aligned}$$

De plus, pour $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{1, \ldots, K\}$, on a

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\rho}_{j,i} - \rho_i\|_{2,U_i} &\leq \beta_1 + (\beta_1 - \beta_0)j\gamma \\
&\leq \varepsilon_0(1 + K\gamma) \\
&\leq \frac{\varepsilon^j}{2}
\end{aligned}$$

et comme $(\varepsilon^j, V_2^j, V_3^j, V_4^j)$ est adapté à Ω, il est immédiat de voir que $(\frac{\varepsilon^j}{2}, V_2^j, V_3^j, V_4^j)$ est adapté à θ_j, ce qui termine de justifier le fait que $[\theta_j, \theta_{j+1}, \frac{\varepsilon^j}{2}, V_1^j, V_2^j, V_3^j, V_4^j]$ est un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. $\square$

Ceci permet de démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.2.8 *Soit Ω un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, et soit $\alpha > 0$ assez petit pour que Ω_α soit un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux avec les notations utilisées dans la démonstration précédente.*
Alors, il existe un nombre fini d'éléments d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux, $[\Omega^i, \Omega^{i+1}, \varepsilon^i, V_1^i, V_2^i, V_3^i, V_4^i]$, $0 \leq i \leq p$ tel que

$$\Omega_\alpha = \Omega^0 \supseteq \Omega^1 \supseteq \cdots \supseteq \Omega^{p+1} = \Omega$$

Démonstration : Cette démonstration est classique, on peut la trouver par exemple dans [L-T 1].
Considérons l'ensemble B des points $\beta \in [0, \alpha]$, tels qu'il existe un nombre fini d'éléments d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe permettant de passer de Ω à Ω_β, c'est-à-dire vérifiant les conclusions du lemme en remplaçant α par β.
Montrons que $\sup B = \alpha$.
Tout d'abord, il est clair d'après le Lemme 3.2.7 que B est non vide et qu'il existe $\beta_1 > 0$ appartenant à B, en effet il suffit de considérer le cas où $\beta_0 = 0$ dans l'énoncé.
Notons $\beta^0 = \sup B$, alors $\beta^0 > 0$, supposons que $\beta^0 < \alpha$, alors Ω_{β^0} est un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, soit donc $\varepsilon_1 > 0$ défini par le

Lemme 3.2.7. Choisissons alors $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \varepsilon_1$ tel que $\beta^0 - \varepsilon \in B$, alors $\beta^0 + \varepsilon$ appartient aussi à B d'après le Lemme 3.2.7, ce qui contredit le fait que β^0 est la borne supérieure de B, donc $\beta^0 = \alpha$.
Par ailleurs, en appliquant le Lemme 3.2.7 pour $\Omega = \Omega_\alpha$ avec $\beta_1 = 0$ et β_0 assez proche de 0 et tel que $\alpha - \beta_0 \in B$, on montre aussi que $\alpha \in B$ $\square$

On a, de plus, le résultat de résolution locale suivant :

Lemme 3.2.9 *Soit $[\Omega, \widetilde{\Omega}, \varepsilon, V_1, V_2, V_3, V_4]$ un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, alors*

$$E^\infty_{0,r}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E) = E^\infty_{0,r}(X \setminus \Omega, E) \cap Z^\infty_{0,r}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E) \tag{3.2.4}$$

pour tout $1 \leq r \leq q-1$ et si $q \leq n-2$, pour $r = q$.
De plus, dans les mêmes conditions sur r et q, si $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E)$, $\bar\partial$-fermée, est telle qu'il existe $u_1 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ telle que $\bar\partial u_1 = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$, alors, il existe $u_2 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E)$ telle que $\bar\partial u_2 = f$ sur $X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}$ et $u_2 = u_1$ sur $(X \setminus \Omega) \setminus V_1$.

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E)$ telle qu'il existe $u_1 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ avec $\bar\partial u_1 = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$. On a alors deux cas à considérer :

- si $r = q$ avec $q \leq n-2$, soit $\widetilde{\chi}$ une application $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans X contenant un voisinage de $\overline{\Omega}$ telle que $\widetilde{\chi} \equiv 1$ sur un voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors $f - \bar\partial((1-\widetilde{\chi})u_1) \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E)$, est $\bar\partial$-fermée et à support compact, donc d'après la Définition 3.2.6 et le Lemme 3.2.5, il existe $v_1 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{(X \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V_3}, E)$ telle que $\bar\partial v_1 = f - \bar\partial((1-\widetilde{\chi})u_1)$ sur $\overline{(X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}) \cap V_3}$, on pose alors $v = v_1 + (1-\widetilde{\chi})u_1$, on a $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{(X \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V_3}, E)$ et $\bar\partial v = f$ sur $(X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}) \cap V_3$.
- si $1 \leq r \leq q-1$, par définition des éléments d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, il existe $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{(X \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V_3}, E)$ telle que $\bar\partial v = f$ sur $(X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}) \cap V_3$.

Dans les deux cas, il existe deux formes, $u_1 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ et $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{(X \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V_3}, E)$ telles que $\bar\partial u_1 = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$ et $\bar\partial v = f$ sur $(X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}) \cap V_3$.

1. Si $r-1 > 0$, on a $u_1 - v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{(X \setminus \Omega) \cap V_3}, E)$, $\bar\partial$-fermée, or $[\Omega, \Omega, \varepsilon, V_1, V_2, V_3, V_4]$ est un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe, donc d'après le Lemme 3.2.5 *(iii)*, il existe $w \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-2}(\overline{(X \setminus \Omega) \cap V_2}, E)$ telle que $\bar\partial w = u_1 - v$ sur $(X \setminus \Omega) \cap V_2$. Soit χ une application $\mathcal{C}^\infty$, positive telle que $\operatorname{supp} \chi \subset\subset V_1$ et $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\overline{\Omega \setminus \widetilde{\Omega}}$.
   On pose alors
   $$u_2 = \begin{cases} u_1 - \bar\partial(\chi w) & \text{sur } X \setminus \Omega \\ v + \bar\partial((1-\chi)w) & \text{sur } \Omega \setminus \widetilde{\Omega} \end{cases}$$
   Une telle u_2 convient.

2. Si $r=1$, $u_1-v\in\mathcal{C}^\infty_{0,0}(\overline{(X\setminus\Omega)\cap V_3},E)$ est une application holomorphe, alors, comme il existe des coordonnées holomorphes $h : V_4\to\mathbb{C}^n$, la fonction $(h^{-1})^*(u_1-v)$ se prolonge en une fonction holomorphe w sur $h(V_2)$ d'après la Proposition 1.4.12. Comme $\Omega\setminus\widetilde{\Omega}\subset\subset V_2$, on peut poser
$$u_2=\begin{cases}u_1 & \text{sur } X\setminus\Omega\\ v+h^*w & \text{sur } \Omega\setminus\widetilde{\Omega}\end{cases}$$
Une telle u_2 convient. □

On déduit, comme dans [He/Le 2], des Lemmes 3.2.8 et 3.2.9, le lemme suivant :

Lemme 3.2.10 *Soit Ω un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux et soit $\alpha>0$ assez petit pour que Ω_α soit aussi un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. Alors, pour tout $1\leq r\leq q-1$ et, pour $r=q$ si $q\leq n-2$, l'application restriction*

$$\varphi_r : H^\infty_{0,r}(X\setminus\Omega,E)\longrightarrow H^\infty_{0,r}(X\setminus\Omega_\alpha,E)$$

est injective.
De plus, si $f\in Z^\infty_{0,r}(X\setminus\Omega,E)$, telle qu'il existe $u_1\in\mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X\setminus\Omega_\alpha,E)$ telle que $\bar\partial u_1=f$ sur $X\setminus\overline{\Omega_\alpha}$, alors, il existe V voisinage de Ω relativement compact et $u_2\in\mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X\setminus\Omega,E)$ telle que $\bar\partial v=f$ sur $X\setminus\overline{\Omega}$ et $u_2=u_1$ sur $X\setminus V$.

Démonstration : D'après le Lemme 3.2.8, il existe un nombre fini d'élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, $[\Omega^i,\Omega^{i+1},\varepsilon^i,U_1^i,U_2^i,U_3^i,U_4^i]$, $0\leq i\leq p$, tel que
$\Omega_\alpha=\Omega^0\supseteq\Omega^1\supseteq\cdots\supseteq\Omega^{p+1}=\Omega$. Alors, si on note

$$\varphi_r^i : H^\infty_{0,r}(X\setminus\Omega^{i+1})\longrightarrow H^\infty_{0,r}(X\setminus\Omega^i)$$

application de restriction, φ_r^i est injective d'après le Lemme 3.2.9, de plus, $\varphi_r=\varphi_r^1\circ\cdots\circ\varphi_r^{p+1}$.
La deuxième affirmation du Lemme découle facilement de la deuxième affirmation de Lemme 3.2.9 et du Lemme 3.2.8. □

On peut maintenant démontrer le Théorème 3.2.4 :
Démonstration du Théorème 3.2.4 : Soit $f\in\mathcal{C}^\infty_{0,r}(\overline{W},E)$ avec $1\leq r\leq q-1$ ou, si $q\leq n-2$, $1\leq r\leq q$, à support compact, $\bar\partial$-fermée. Soit $\alpha>0$ assez petit tel que Ω_α soit un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.
Comme X est une extension q-convexe généralisée de $\overline{\Omega}$, il existe $\mathcal{D}\subset\subset\Omega_\alpha$, tel que X est une extension q-convexe de $\overline{\mathcal{D}}$. Comme f est à support compact, d'après le Théorème 16.1 dans [He/Le 2], il existe $g\in\mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X\setminus\overline{\mathcal{D}},E)$ à support compact dans $X\setminus\overline{\mathcal{D}}$ telle que $\bar\partial g=f$ sur $X\setminus\overline{\mathcal{D}}$.
Soit χ une application positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\chi\equiv 1$ au voisinage de

$X \setminus \Omega_\alpha$ et $\chi \equiv 0$ au voisinage de $\overline{\mathcal{D}}$.
Alors $f - \bar\partial(\chi g) \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(X \setminus \Omega, E)$, est $\bar\partial$-fermée et à support compact inclus dans $\Omega_\alpha \setminus \Omega$, c'est donc une forme exacte sur $X \setminus \Omega_\alpha$. Alors, d'après le Lemme 3.2.10, il existe $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ à support compact telle que, sur $X \setminus \overline{\Omega}$

$$\bar\partial v = f - \bar\partial(\chi g)$$

Alors $u = v + \chi g \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ est à support compact dans $X \setminus \Omega$ et vérifie bien $\bar\partial u = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$. □

3.2.2 Théorème de séparation

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant que nous démontrons de manière analogue au Théorème 3.4 dans [L-T/Le 3].

Théorème 3.2.11 *Soit X une variété complexe de dimension n et E un fibré holomorphe sur X. Soit $\Omega \subset\subset X$ un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux tel qu'il existe $\mathcal{D}_0$ voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$ dans X qui est une extension q-convexe généralisée de $\overline{\Omega}$. On suppose de plus que X est $(n-q)$-convexe. Alors l'espace*

$$E^\infty_{0,q}(X \setminus \Omega, E)$$

est fermé dans $\mathcal{C}^\infty_{0,q}(X \setminus \Omega, E)$ pour la topologie de convergence uniforme sur tout compact de $X \setminus \Omega$.

Démonstration : Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E^\infty_{0,q}(X \setminus \Omega, E)$ qui converge uniformément sur tout compact de $X \setminus \Omega$ vers $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(X \setminus \Omega, E)$.

Soit $\alpha > 0$ assez petit pour que Ω_α soit aussi un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux et $\Omega_\alpha \subset\subset \mathcal{D}_0$. Par ailleurs, il existe $\mathcal{D}$ avec $\Omega \subset \mathcal{D} \subset\subset \Omega_\alpha$, tel que $\partial\mathcal{D}$ est strictement q-convexe, en effet, il suffit de considérer Ω_β pour $\beta < \alpha$ est de lisser le bord en utilisant le maximum régularisé comme cela a déjà été fait dans la démonstration du Théorème 3.1.6 par exemple.
D'après le Théorème de séparation d'Andreotti-Vesentini, voir [An/Ve] ou le Théorème 1.2 dans [L-T/Le 3], il existe $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(X \setminus \overline{\mathcal{D}}, E)$ tel que $\bar\partial v = f$ sur $X \setminus \overline{\mathcal{D}}$.

Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur X telle que supp $\chi \subset X \setminus \overline{\mathcal{D}}$ et que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de $X \setminus \Omega_\alpha$. Alors la forme $g = f - \bar\partial(\chi v)$ appartient à $\mathcal{C}^\infty_{0,q}(X \setminus \Omega)$, est $\bar\partial$-fermée et à un support compact inclus dans $\Omega_\alpha \setminus \Omega$ donc dans $\mathcal{D}_0 \setminus \Omega$.
Alors d'après le Théorème 3.2.4, il existe $u' \in \mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(\mathcal{D}_0 \setminus \Omega, E)$ à support compact telle que $\bar\partial u' = g$ sur $\mathcal{D}_0 \setminus \overline{\Omega}$.
On étend u' par 0 sur X et on pose $u = u' + \chi v$, alors $u \in \mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(X \setminus \Omega, E)$ et $\bar\partial u = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$. □

Chapitre 4

Quelques résultats globaux pour l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle dans les sous-variétés CR

Dans ce chapitre, nous démontrons des résultats d'annulation et de finitude de la cohomologie pour le complexe de Cauchy-Riemann tangentiel sur des domaines d'une sous-variété CR dont le bord possède de bonnes propriétés de q-convexité ou de q-concavité.

Les raisonnements que nous utilisons ici sont proches de la méthode des bosses déjà employée dans le Chapitre 3 pour démontrer le Théorème 3.2.4. Cependant, une des différences majeures avec l'étude effectuée au chapitre précédent vient du fait qu'il faut se préoccuper des points critiques de la fonction qui définit le bord du domaine. En effet, dans le chapitre précédent, on peut se placer aussi près du bord de Ω qu'on le souhaite et donc supposer que les applications définissant Ω (voir la Définition 3.2.3) n'admettent aucun point critique au voisinage de $\partial\Omega$. Un des objectifs de ce chapitre est de relier la cohomologie des formes définies sur un domaine D, lisses jusqu'au bord, à celle des formes définies sur un domaine G, lisses jusqu'au bord, où D et G représentent deux niveaux distincts d'une même application qui ne sont pas forcément proches l'un de l'autre. Ainsi, comme l'ont fait G.M. Henkin et J. Leiterer dans [He/Le 2] ainsi que C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer dans [L-T/Le 4], il faut se préoccuper des points critiques de cette application.

Nous conservons ici les mêmes notations que dans le Chapitre 2, cependant, comme il s'agit d'une étude globale, on considère des formes à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe E sur $\mathbb{C}^n$, on ajoutera donc E dans les notations, par exemple, $[\mathcal{C}^\infty_{n,r}]_M(W,E)$ désigne l'espace des formes de bidegré (n,r) sur M de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de W dans $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans E.

4.1 Dans le cas convexe

Nous allons mettre en place un raisonnement du type «Beulenmethode» de Grauert, pour cela, nous commençons par définir les éléments qui forment les bosses. Ensuite, nous généraliserons au cas des sous-variétés CR des notions d'extension q-convexes analogues à celles que l'on a vu pour les variétés complexes (voir la Définition 1.4.5). Puis, nous démontrerons que si φ est une application ayant de bonnes propriétés et définie sur M, sous-variété CR générique, alors la cohomologie des formes lisses sur $\overline{D}$, où $D = \{z \in M | \varphi(z) < 0\}$ est la même que celle des formes lisses sur $\overline{G}$, où $G = \{z \in M | \varphi(z) < 1\}$. Enfin, nous utiliserons des résultats de C.D. Hill et M. Nacinovich (voir [Hi/Na]) pour démontrer des théorèmes d'annulation et de finitude de la cohomologie de Cauchy-Riemann tangentielle pour des formes lisses jusqu'au bord d'un domaine ayant les bonnes propriétés de convexité.

4.1.1 Éléments d'extension q-convexe

Les définitions utilisées ici sont des généralisations de notions que l'on trouve dans [L-T/Le 4] pour le cas des hypersurfaces. Il faut noter que certaines notions sont différentes (en particulier la notion de *bosse q-convexe* est plus précise ici), mais, comme elles ont un rôle similaire, on a conservé leur nom en passant à la codimension supérieure.

Définition 4.1.1 *Soit M une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$, de codimension k avec $1 < k \leq n$ et soit q un entier avec $0 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$.*

(i) Une configuration q-convexe affine *pour M est une collection ordonnée $[U, D, \psi, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ où $U \subset\subset \mathbb{C}^n$ est convexe et $\psi, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs réelles tels que*

- *$D = \{z \in U | \psi(z) < 0\}$ et $d\psi(z) \neq 0$ pour $z \in \partial D$;*
- *pour tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq k+1$, $(\rho_{j_1}, \ldots, \rho_{j_k})$ est un système de fonctions définissantes pour M sur U ;*
- *pour tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq k+1$, $\bar\partial\rho_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar\partial\rho_{j_k} \neq 0$ sur U ;*
- *si on note $\Omega_\nu = \{z \in U | \rho_\nu(z) < 0\}$, pour $\nu = 1, \ldots, k+1$, on a :*

$$M \cap U = \bigcap_{\nu=1}^{k+1} \overline{\Omega}_\nu, \quad U \setminus M = \bigcup_{\nu=1}^{k+1} \Omega_\nu, \quad U = \bigcup_{\nu=1}^{k+1} \overline{\Omega}_\nu$$

- *pour tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k+1$, avec $l \leq k$,*
  $d\psi(z) \wedge d\rho_{j_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_{j_l}(z) \neq 0$
  sur $\{z \in U | \psi(z) = \rho_{j_1}(z) = \cdots = \rho_{j_l}(z) = 0\}$;
- *pour tout $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{k+1}) \in \Delta_{(0,1,\ldots,k+1)}$ tel qu'il existe $j \in \{1, \ldots, k+1\}$ avec $\lambda_j = 0$, et pour tout $z \in U$, la forme $\mathcal{L}^{\mathbb{C}^n}_{\lambda_0\psi+\lambda_1\rho_1+\cdots+\lambda_{k+1}\rho_{k+1}}(z)$ admet au moins $q+k$ valeurs propres strictement positives.*

(ii) Une bosse q-convexe *pour M est une collection ordonnée $[U_0, U_1, U_2, D_1, D_2, \psi_1, \psi_2, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ telle que*

- *$U_0 \subset\subset U_1 \subset\subset U_2$ sont des ouverts relativement compacts dans $\mathbb{C}^n$;*
- *$[U_2, D_i, \psi_i, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$, $i = 1, 2$, est une configuration q-convexe affine pour M ;*
- *$D_1 \subseteq D_2$ avec $D_2 \setminus D_1 \subset\subset U_0$;*
- *pour $i = 1, 2$, pour $j = 1, 2$ et pour $n - q - k + 1 \leq r \leq n$, si $u \in [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{D_i \cap U_j})$ avec $du = 0$, il existe $v \in [\mathcal{E}_{n,r-1}]_M(\overline{D_i \cap U_{j-1}})$ tel que $dv = u$.*

(iii) On dit que $[\Theta_1, \Theta_2, V]$ est un élément d'extension q-convexe *dans M si Θ_1 et Θ_2 sont des domaines ouverts de M à bord $\mathcal{C}^2$ et V un ouvert relativement compact dans M tels que*

- *$\Theta_1 \subseteq \Theta_2$;*
- *$\Theta_2 \setminus \Theta_1 \subset\subset V$;*
- *il existe une bosse q-convexe $[U_0, U_1, U_2, D_1, D_2, \psi_1, \psi_2, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ telle que $V = U_2 \cap M$, et pour $i = 1, 2$,*

$$\Theta_i \cap V = \{z \in V | \psi_i(z) < 0\} = D_i \cap V$$

On dit que Θ_2 peut être obtenu de Θ_1 par un élément d'extension q-convexe dans M, s'il existe V dans M tel que $[\Theta_1, \Theta_2, V]$ est un élément d'extension q-convexe dans M.

Remarques. 1. Si $[\Theta_1, \Theta_2, V]$ est un élément d'extension q-convexe dans M, et si $[U_0, U_1, U_2, D_1, D_2, \psi_1, \psi_2, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ est une bosse q-convexe vérifiant les propriétés définies ci-dessus, alors $\Theta_2 \setminus \Theta_1 \subset\subset U_0 \cap M$.

2. Il est facile de voir que si $[U, D, \psi, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ est une configuration q-convexe affine pour M alors, pour χ, une application définie sur U suffisamment petite pour la topologie $\mathcal{C}^2$, $[U, D_\chi, \psi + \chi, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ est aussi une configuration q-convexe affine pour M, avec $D_\chi = \{z \in U | \psi(z) + \chi(z) < 0\}$.

3. Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$, et de codimension k, avec $1 < k \leq n$ et $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Si $[U, D, \psi, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ est une configuration q-convexe affine pour M et si $\xi \in \partial D \cap U$, alors, d'après la remarque précédente et le Théorème 2.2.10 *(ii)*, il existe deux voisinages V_ξ et V'_ξ de ξ dans $\mathbb{C}^n$, $V_\xi \subset\subset V'_\xi \subset\subset U$ et un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour toute application χ positive, à support dans V_ξ et dont la norme $\mathcal{C}^2$ est inférieure à ε, $[V_\xi, V'_\xi, U, D, D_{-\chi}, \psi, \psi - \chi, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ est une bosse q-convexe pour M. Une version plus forte de ce fait est démontré dans le Lemme 4.1.5 .

Lemme 4.1.2 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$ et $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soient $[\Theta_1, \Theta_2, V]$ un élément d'extension q-convexe dans M et E un fibré vectoriel holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ qui est holomorphiquement trivial au-dessus d'un voisinage de $\overline{V}$. Alors, les propriétés suivantes sont vraies :*

1. *Si $n - q - k + 1 \leq r \leq n - k$ et si W est un voisinage de $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$ dans M, alors pour toute $f_1 \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{\Theta}_1, E)$ avec $df_1 = 0$, il existe*

$f_2 \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{\Theta}_2, E)$ avec $df_2 = 0$ et $u_1 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{\Theta}_1, E)$ dont le support est inclus dans $W \cap \overline{\Theta}_1$ telles que $f_2 = f_1 - du_1$ sur Θ_1.
Ce qui implique que l'application restriction :

$$H^{n,r}_\infty(\overline{\Theta}_2, E) \longrightarrow H^{n,r}_\infty(\overline{\Theta}_1, E)$$

est surjective.

2. *Si $n - q - k + 2 \leq r \leq n - k$ et si W est un voisinage de $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$, pour toute $f \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{\Theta}_2, E)$ telle que $df = 0$ sur Θ_2 et telle qu'il existe $u_1 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{\Theta}_1, E)$ avec $du_1 = f$ sur Θ_1, alors il existe $u_2 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{\Theta}_2, E)$ telle que $du_2 = f$ sur Θ_2 et $u_2 = u_1$ sur $\overline{\Theta}_1 \setminus W$.*
Ce qui implique clairement que l'application restriction :

$$H^{n,r}_\infty(\overline{\Theta}_2, E) \longrightarrow H^{n,r}_\infty(\overline{\Theta}_1, E)$$

est injective.

Démonstration : Soit $[U_0, U_1, U_2, D_1, D_2, \psi_1, \psi_2, \rho_1, \dots, \rho_{k+1}]$ une bosse q-convexe vérifiant les propriétés de la Définition 4.1.1 par rapport à $[\Theta_1, \Theta_2, V]$.

1. Soit $f_1 \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{\Theta}_1, E)$ avec $df_1 = 0$, alors d'après la Définition 4.1.1, *(ii)*, il existe $u \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{\Theta_1 \cap U_1}, E)$ tel que $du = f_1$ sur $\Theta_1 \cap U_1$.
Soit χ une fonction positive sur M de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$ et supp $\chi \subset\subset \mathrm{W} \cap \mathrm{U}_1$.
On pose alors $u_1 = \chi u$ sur $\overline{\Theta}_1$ et

$$f_2 = \begin{cases} f_1 - d(\chi u) & \text{sur } \overline{\Theta}_1 \\ 0 & \text{sur } \overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1} \end{cases}$$

Ceci convient pour démontrer le point *1.*

2. Soit $f \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{\Theta}_2, E)$ telle que $df = 0$ sur Θ_2 et telle qu'il existe $u_1 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{\Theta}_1, E)$ avec $du_1 = f$ sur Θ_1.
D'après la Définition 4.1.1, *(ii)*, il existe $v \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{\Theta_2 \cap U_1}, E)$ tel que $dv = f$ sur $\Theta_2 \cap U_1$.
De plus, $u_1 - v \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{\Theta_1 \cap U_1}, E)$ avec $d(u_1 - v) = 0$ et $r - 1 \geq n - k - q + 1$, donc, d'après la Définition 4.1.1, *(ii)*, il existe $w \in [C^\infty_{n,r-2}]_M(\overline{\Theta_1 \cap U_0}, E)$ telle que $dw = u_1 - v$.
Considérons maintenant une application χ définie sur M, positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$ et supp $\chi \subset\subset \mathrm{W} \cap \mathrm{U}_0$. Alors, sur $\Theta_1 \cap U_0$, on a :

$$u_1 - d(\chi w) = v + d((1 - \chi) w)$$

Les deux membres de cette égalité définissent alors une forme u_2 satisfaisant les conditions du point *2.* $\square$

4.1.2 Extensions q-convexes

Définition 4.1.3 *Soit M une sous-variété réelle de $\mathbb{C}^n$ de codimension k, avec $1 < k \leq n$.*

1. *On dit que $[D,G]$ est une* extension q-convexe dans M *si D et G sont des ouverts de M avec $D \subseteq G$ tels que :*
   • *∂D est compact ;*
   • *il existe un voisinage $W_{\partial D}$ de ∂D dans M , une application $(q+k)$-convexe φ définie sur $W = W_{\partial D} \cup (G \setminus D)$ et $0 < c_\infty \leq +\infty$ tels que*
   (i) $D \cap W = \{z \in W | \varphi(z) < 0\}$;
   (ii) $\forall z \in \partial D$, $d\varphi(z) \neq 0$;
   (iii) pour tout c avec $0 \leq c < c_\infty$, $\{z \in W | 0 \leq \varphi(z) \leq c\}$ est compact.
2. *On dit que $[D,G]$ est une* extension strictement q-convexe dans M *si D et G sont des ouverts de M avec $D \subseteq G$ tels que :*
   • *$\overline{G \setminus D}$ est compact ;*
   • *il existe un voisinage W de $\overline{G \setminus D}$ dans M , une application $(q+k)$-convexe φ définie sur W tels que*
   (i) $D \cap W = \{z \in W | \varphi(z) < 0\}$ et $G \cap W = \{z \in W | \varphi(z) < 1\}$
   (ii) $\forall z \in \partial D \cup \partial G$, $d\varphi(z) \neq 0$;
3. *On dit que $[D,G]$ est une extension (strictement) q-convexe* non-critique *dans M si φ peut être choisie sans point critique sur W.*
4. *On dit que M est une extension q-convexe (non-critique) de D si $[D,M]$ est une extension q-convexe (non-critique). On dit que M est complètement q-convexe si $[\varnothing, M]$ est une extension q-convexe.*

Remarque. Comme cela a été remarqué dans [L-T/Le 4], lorsque $[D,G]$ est une extension (strictement) q-convexe dans M, on peut supposer grâce aux conditions de non-annulation de $d\varphi$ données dans la Définition 4.1.3 et à un Lemme de Morse (voir par exemple la Proposition 0.5 dans l'Annexe B de [He/Le 2]) que l'application φ admet uniquement des points critiques non-dégénérés. De plus, on peut supposer que si $\alpha \in \mathbb{R}$, et si $D_\alpha = \{z \in W | \varphi(z) < \alpha\}$, alors, il y a au plus un point critique sur ∂D_α.

L'objectif de la sous-partie qui suit est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1.4 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$ et $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$.*
Soit $[D,G]$ une extension strictement q-convexe dans M et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $\overline{G \setminus D}$ par des ouverts de M. Alors il existe des ouverts de M, $\Theta_0, \ldots, \Theta_N$, $V_0, \ldots, V_{N-1}$ tels que :
• *$\Theta_0 = D$ et $\Theta_N = G$;*

• *pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, $[\Theta_i, \Theta_{i+1}, V_i]$ est un élément d'extension q-convexe dans M ;*
• *pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, il existe $j_0 \in I$, tel que $V_i \subset\subset U_{j_0}$.*

4.1.3 Démonstration du Théorème 4.1.4

Commençons par démontrer un lemme technique :

Lemme 4.1.5 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$ et $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$.
Soient φ une application $(q+k)$-convexe sur M et $\xi \in M$, tel que $d\varphi(\xi) \neq 0$, on note $\varphi(\xi) = c$.
Soient $U_\xi, \widetilde{\varphi}, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}$ donnés par la Définition 2.2.8, alors il existe $\varepsilon_\xi > 0$ et des ouverts de $\mathbb{C}^n$, V_ξ, V'_ξ et V''_ξ tels que $V_\xi \subset\subset V'_\xi \subset\subset V''_\xi \subset\subset U_\xi$ et tels que : Si $\widetilde{\psi}$ est une application avec $\|(\widetilde{\varphi} - c) - \widetilde{\psi}\|_{2,U_\xi} < \varepsilon_\xi$ et telle que, si on pose $\widetilde{D} = \{z \in U_\xi | \widetilde{\psi}(z) < 0\}$, on a $\partial\widetilde{D} \cap M \cap V_\xi \neq \varnothing$. Alors, pour $n-q-k+1 \leq r \leq n-k$,*
1. si $u \in [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{\widetilde{D} \cap V''_\xi})$ avec $du = 0$, il existe $v \in [\mathcal{E}_{n,r-1}]_M(\overline{\widetilde{D} \cap V'_\xi})$ telle que $dv = u$.
2. si $u \in [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{\widetilde{D} \cap V'_\xi})$ avec $du = 0$, il existe $v \in [\mathcal{E}_{n,r-1}]_M(\overline{\widetilde{D} \cap V_\xi})$ telle que $dv = u$.

Démonstration : Par définition des applications $(q+k)$-convexes, $[U_\xi, D, \widetilde{\varphi} - c, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ est une configuration q-convexe.
Comme le réel R_0 dont l'existence est donné par le Théorème 2.2.10 peut être choisi indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de la fonction $\widetilde{\varphi} - c$, on peut affirmer qu'il existe des réels $\varepsilon_\xi > 0$ $R_\xi > 0$ et $R'_\xi > 0$ tels que :
pour toute application $\widetilde{\psi}$ définie sur U_ξ avec $\|(\widetilde{\varphi} - c) - \widetilde{\psi}\|_{2,U_\xi} < \varepsilon_\xi$, si on pose $\widetilde{D} = \{z \in U_\xi | \widetilde{\psi}(z) < 0\}$, alors, pour tout $\widetilde{\xi} \in M \cap B(\xi, R_\xi) \cap \partial\widetilde{D}$, pour tout R avec $0 < R \leq R'_\xi$ et pour tout r avec $n-q-k+1 \leq r \leq n-k$, on a $H^{n,r}_\infty\left(\overline{\widetilde{D} \cap B(\widetilde{\xi}, R) \cap M}\right) = 0$.
On peut supposer de plus, que $R_\xi < \frac{R'_\xi}{9}$.
Posons $V_\xi = B(\xi, \frac{R'_\xi}{9})$, $V'_\xi = B(\xi, \frac{R'_\xi}{2})$ et $V''_\xi = B(\xi, 3R'_\xi)$.
Soient alors $\widetilde{\xi} \in M \cap V_\xi \cap \partial\widetilde{D}$, $n-q-k+1 \leq r \leq n-k$ et $u \in [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{\widetilde{D} \cap V''_\xi})$ avec $du = 0$.
Or $B(\widetilde{\xi}, R'_\xi) \subset\subset V''_\xi$ donc, il existe $v \in [\mathcal{E}_{n,r-1}]_M(\overline{\widetilde{D} \cap B(\widetilde{\xi}, R'_\xi)})$ tel que $dv = u$. Cependant, $V'_\xi \subset\subset B(\widetilde{\xi}, R'_\xi)$, donc le point *1.* est réalisé.
Par ailleurs, si $u \in [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{\widetilde{D} \cap V'_\xi})$ avec $du = 0$, comme, $B(\widetilde{\xi}, \frac{R'_\xi}{4}) \subset\subset V'_\xi$ il existe $v \in [\mathcal{E}_{n,r-1}]_M(\overline{\widetilde{D} \cap B(\widetilde{\xi}, \frac{R'_\xi}{4})})$ tel que $dv = u$. Comme $V_\xi \subset\subset B(\widetilde{\xi}, \frac{R'_\xi}{4})$, on peut conclure la démonstration. $\square$

On peut maintenant étudier le cas où l'application φ n'a pas de point critique.

Lemme 4.1.6 *Sous les hypothèses du Théorème 4.1.4, si on suppose que* $[D, G]$ *est une extension strictement* q*-convexe non-critique dans* M*, alors les conclusions du Théorème 4.1.4 sont vérifiées.*

Démonstration : Soient W et φ donnés par la Définition 4.1.3, *2.* tels que $d\varphi \neq 0$ sur W.
Comme $[0,1]$ est compact, il suffit de démontrer le fait suivant :
pour tout $0 \leq c \leq 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $c-\varepsilon \leq \alpha \leq \beta \leq c+\varepsilon$, il existe un nombre fini d'ouverts de M, $\Theta_1, \ldots, \Theta_N$, $V_1, \ldots, V_{N-1}$ tels que :
• $\Theta_1 = \{z \in M | \varphi(z) < \alpha\}$ et $\Theta_N = \{z \in M | \varphi(z) < \beta\}$;
• pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, $[\Theta_i, \Theta_{i+1}, V_i]$ est un élément d'extension q-convexe dans M ;
• pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, il existe $j_0 \in I$, tel que $V_i \subset\subset U_{j_0}$.

On note, pour $c \in [0,1]$, $\Upsilon_c = \{z \in M | \varphi(z) < c\}$, $\partial\Upsilon_c$ désigne le bord de Υ_c dans M. Fixons $c \in [0,1]$.
Soient $\xi \in \partial\Upsilon_c$ et $U_\xi, \widetilde{\varphi} - c, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}$ donnés par la Définition 2.2.8.
Soient $\varepsilon_\xi, V_\xi, V'_\xi$ et V''_ξ donnés par le Lemme 4.1.5, par ailleurs, on peut supposer dans la démonstration de ce lemme qu'il existe $j \in I$ tel que $V''_\xi \subset U_j$.

$\partial\Upsilon_c$ est compact, donc, on peut extraire une famille finie $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ de points de $\partial\Upsilon_c$ telle que $(V_{\xi_i})_{i=1,\ldots,N}$ est recouvrement de $\partial\Upsilon_c$. Considérons alors $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$\overline{\Upsilon_{c+\varepsilon_1} \setminus \Upsilon_{c-\varepsilon_1}} \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_{\xi_i}$$

Soient $\chi_1, \ldots, \chi_K$ des applications positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n$ telles que

$$\text{supp } (\chi_i) \subset\subset V_{\xi_i} \text{ pour } i = 1, \ldots, N$$

$$\sum_{i=1}^{N} \chi_i = 1 \text{ au voisinage de } \overline{\Upsilon_{c+\varepsilon_1} \setminus \Upsilon_{c-\varepsilon_1}}$$

Alors, on peut trouver un réel $\varepsilon > 0$, avec $\varepsilon < \varepsilon_1$ tel que pour tout $c - \varepsilon \leq \alpha \leq \beta \leq c + \varepsilon$, si on pose pour tout $z \in W$ et tout $j \in \{0, \ldots, N\}$:

$$\psi_j = \varphi - \alpha + (\alpha - \beta) \sum_{\nu=1}^{j} \chi_\nu$$

$$\Theta_i = \{z \in W | \psi_j(z) < 0\}$$

et pour $j = 0, \ldots, N-1$, $V_j = V_{\xi_{j+1}} \cap M$ alors $\Theta_0, \ldots, \Theta_N, V_0, \ldots, V_{N-1}$ conviennent.

En effet il est facile de voir que $\Theta_0 = \Upsilon_\alpha$, $\Theta_N = \Upsilon_\beta$ et que pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, il existe $i \in I$ tel que $V_j \in U_i$.
Il reste maintenant à vérifier que pour tout $j \in \{0, \ldots, N-1\}$, $[\Theta_j, \Theta_{j+1}, V_j]$ est un élément d'extension q-convexe. Soit $j \in \{0, \ldots, N-1\}$, on a

$$\psi_j - \psi_{j+1} = (\beta - \alpha)\chi_{j+1}$$

donc
• $\psi_{j+1} \leq \psi_j$ ce qui implique $\Theta_j \subseteq \Theta_{j+1}$;
• $\mathrm{supp}\ (\psi_j - \psi_{j+1}) = \mathrm{supp}\ \chi_{j+1} \cap M \subset\subset V_j$;
• $[V_{\xi_{j+1}}, V'_{\xi_{j+1}}, V''_{\xi_{j+1}}, D_j, D_{j+1}, \widetilde{\psi}_j, \widetilde{\psi}_{j+1}, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ est une bosse q-convexe qui vérifie les propriétés de la Définition 4.1.1 *(iii)*, où on a posé, pour $i = j, j+1$, $\widetilde{\psi}_i = \widetilde{\varphi} - \alpha + (\alpha - \beta)\sum_{\nu=1}^{j} \chi_\nu$ définie sur $U_{\xi_{j+1}}$ et $D_i = \{z \in U_{\xi_{j+1}} | \widetilde{\psi}_i(z) < 0\}$.
En effet, pour $i = j, j+1$,

$$\widetilde{\psi}_i - (\widetilde{\varphi} - c) = (c - \alpha) + (\alpha - \beta)\sum_{\nu=1}^{j} \chi_\nu$$

donc si ε est assez petit, on a

$$\|\widetilde{\psi}_i - (\widetilde{\varphi} - c)\|_{2, U_{\xi_{j+1}}} < \varepsilon_{\xi_{j+1}}$$

alors, la deuxième remarque suivant la Définition 4.1.1 et le Lemme 4.1.5 permettent de conclure. □

Nous allons maintenant nous occuper des points critiques éventuels de l'application φ. Il y en a deux types qui doivent être traités différemment :

1. $\xi \in G \setminus \overline{D}$ est un point critique non-dégénéré de φ qui n'est pas un point où φ atteint un minimum local.
2. $\xi \in G \setminus \overline{D}$ est un point où φ admet un minimum local, (nous rappelons qu'une application $(q+k)$-convexe n'a pas de maximum local).

Considérons le premier cas, on a alors, le lemme suivant (généralisant en codimension supérieure le Lemme 7.8 dans [L-T/Le 4]) :

Lemme 4.1.7 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k avec $1 < k \leq n$ et $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soient φ une application $(q+k)$-convexe sur M et $\xi \in M$ un point critique non-dégénéré de φ qui n'est pas un point où φ atteint un minimum local (i.e. $d\varphi(\xi) = 0$ et le Hessien de φ est inversible mais pas défini positif) .*
Soient $U, \widetilde{\varphi}, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}$ donnés par la Définition 2.2.8, on peut de plus supposer que $d\widetilde{\varphi}(\xi) \neq 0$.
Alors, il existe $\delta_0 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$, avec $B(\xi, 5\delta_0) \subseteq U$ tels que si χ_1 et χ_2 sont des applications vérifiant les propriétés suivantes :

(i) χ_1 et χ_2 sont des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs réelles ;

(ii) χ_1 *et* χ_2 *sont positives ;*

(iii) *pour* $i = 1, 2$, $\text{supp}\ (\chi_{\text{i}}) \subset\subset \text{B}(\xi, \delta_0)$ *;*

(iv) *pour* $i = 1, 2$, χ_i *est constante et strictement positive sur* $B(\xi, \frac{\delta_0}{2})$ *;*

(v) *pour* $i = 1, 2$, $\|\chi_i\|_{2,U} < \varepsilon_0$

et si on note

$$U_0 = B(\xi, \delta_0),\ U_1 = B(\xi, 5\delta_0)$$

$$D_{\chi_1} = \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) + \chi_1(z) < \varphi(\xi)\}$$

$$\text{et } D_{-\chi_2} = \{z \in U | \widetilde{\varphi}(z) - \chi_2(z) < \varphi(\xi)\}$$

alors $[U_0, U_1, U, D_{\chi_1}, D_{-\chi_2}, \widetilde{\varphi} + \chi_1 - \varphi(\xi), \widetilde{\varphi} - \chi_2 - \varphi(\xi), \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ *est une bosse q-convexe pour M.*

Démonstration : Il s'agit de faire un raisonnement du même type que celui que l'on trouve dans la démonstration du Lemme 4.1.5. L'idée est de modifier la fonction φ pour pouvoir «sauter» au-dessus du point critique. Comme $d\varphi(\xi) = 0$, on ne peut pas utiliser directement le Théorème 2.2.10.
Cependant, il faut remarquer, en revenant au Chapitre 1, que si D est défini par $D = \cap_{j=1}^{L} \{\psi_j < 0\} \cap B(\xi, R)$, où $\psi_1, \ldots, \psi_L$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert V de $\mathbb{C}^n$, à valeurs réelles et vérifiant :

(Cvx) Pour tout $I = (j_1, \ldots, j_l) \subset \{1, \ldots, L\}$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq L$, et toute famille $(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_l})$ de réels positifs tels que $\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_l} = 1$, la forme de Levi de l'application $\lambda_{j_1}\psi_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_l}\psi_{j_l}$ admet au moins s valeurs propres strictement positives en tout point de V ;

alors le réel $R_0 > 0$ tel que si $0 < R < R_0$, les applications $\psi_1, \ldots, \psi_L, z \mapsto |z - \xi|^2 - R^2$ vérifient la propriété donnée dans la Définition 1.3.1, dépend uniquement de la forme de Levi des applications $\lambda_{j_1}\psi_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_l}\psi_{j_l}$, et donc des dérivées d'ordre 2, que la différentielle s'annule ou non (voir le Lemme 2.4 dans [L-T/Le 1]).
0r, cette propriété est celle qui permet de construire les sections de Leray et les noyaux intégraux qui donnent la résolution du $\bar{\partial}$. Les conditions de non-annulation de la différentielle et de transversalité sont utiles uniquement lors de l'intégration.
Ainsi on peut affirmer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $R_\xi > 0$ tel que si $\widetilde{\psi}$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur U avec $\|\widetilde{\varphi} - \widetilde{\psi}\|_{2,U} < \varepsilon$ et qui vérifie la condition de transversalité suivante :

- pour tout $(j_1, \ldots, j_l)$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k + 1$, $l \leq k$,

$$d\widetilde{\psi}(z) \wedge d\rho_{j_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_{j_l}(z) \neq 0$$

  pour tout $z \in \{z \in U | \widetilde{\psi}(z) - \varphi(\xi) = \rho_{j_1}(z) = \cdots = \rho_{j_l}(z) = 0\}$, et si $\widetilde{\xi}$ est un point proche de ξ avec $\widetilde{\psi}(\widetilde{\xi}) = \varphi(\xi)$, alors on peut choisir le réel R_0 du Théorème 2.2.10, par rapport à $\widetilde{\psi} - \varphi(\xi)$ et à $\widetilde{\xi}$, tel que $R_0 = R_\xi$. Comme ξ n'est pas un point où φ atteint un minimum local (voir la Proposition 0.6 de l'Annexe B dans [He/Le 2]), on peut choisir δ_0 avec $0 < \delta_0 < \frac{R_\xi}{8}$ et ε_0 avec $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_\xi$ tels que, si χ est une application positive vérifiant les propriétés *(i)* à *(v)* données dans l'énoncé alors, pour $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k+1$, $l \leq k$ et pour $R > 0$ avec $R < R_\xi$

$$d(\widetilde{\varphi} \pm \chi) \wedge d\rho_{j=1} \wedge \cdots \wedge d\rho_{j_l} \neq 0 \tag{4.1.1}$$

sur $\{z \in U | (\widetilde{\varphi} \pm \chi)(z) - \varphi(\xi) = \rho_{j_1}(z) = \cdots = \rho_{j_l}(z) = 0\}$ et

$$d_z(|z-\xi|^2) \wedge d(\widetilde{\varphi} \pm \chi) \wedge d\rho_{j=1} \wedge \cdots \wedge d\rho_{j_l} \neq 0 \tag{4.1.2}$$

sur $\{z \in U | (\widetilde{\varphi} \pm \chi)(z) - \varphi(\xi) = |z-\xi|^2 - R = \rho_{j_1}(z) = \cdots = \rho_{j_l}(z) = 0\}$.

Ainsi, si ε_0 est assez petit, on peut montrer en raisonnant comme dans le Lemme 4.1.5 que $[U_0, U_1, U, D_{\chi_1}, D_{-\chi_2}, \widetilde{\varphi}+\chi_1-\varphi(\xi), \widetilde{\varphi}-\chi_2-\varphi(\xi), \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ est une bosse q-convexe pour M. □

Le lemme précédent et le Lemme 4.1.6 permettent alors de démontrer :

Corollaire 4.1.8 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k avec $1 < k \leq n$ et $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soient φ une application $(q+k)$-convexe sur M et $\xi \in M$ un point critique non-dégénéré de φ qui n'est pas un point où φ atteint un minimum local.*
Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de M par des ouverts. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et des ouverts de M, $\Theta_0, \ldots, \Theta_N$, $V_0, \ldots, V_{N-1}$ tels que :
- *$\Theta_0 = \{z \in M | \varphi(z) < \varphi(\xi) - \varepsilon\}$ et $\Theta_N = \{z \in M | \varphi(z) < \varphi(\xi) + \varepsilon\}$;*
- *pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, $[\Theta_i, \Theta_{i+1}, V_i]$ est un élément d'extension q-convexe dans M ;*
- *pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, il existe $j_0 \in I$, tel que $V_i \subset\subset U_{j_0}$.*

Pour le second type de point critique, on a le lemme suivant :

Lemme 4.1.9 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k avec $1 < k \leq n$ et $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soient φ une application $(q+k)$-convexe sur M et $\xi \in M$ un point critique non-dégénéré de φ qui est un point où φ admet un minimum local.*
Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de M par des ouverts. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et des ouverts de M, $\Theta_0, \ldots, \Theta_N$, $V_0, \ldots, V_{N-1}$ tels que :
- *$\Theta_0 = \{z \in M | \varphi(z) < \varphi(\xi)\}$ et $\Theta_N = \{z \in M | \varphi(z) < \varphi(\xi) + \varepsilon\}$;*
- *pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, $[\Theta_i, \Theta_{i+1}, V_i]$ est un élément d'extension q-convexe dans M ;*
- *pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, il existe $j_0 \in I$, tel que $V_i \subset\subset U_{j_0}$.*

Démonstration : Cette démonstration est identique à celle du point (ii) dans la preuve du Théorème 7.10 dans [L-T/Le 4], il reste juste à vérifier, avec les notations de [L-T/Le 4], que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $D_{\varphi(\xi)+\varepsilon}$ peut être

obtenu de $D_{\varphi(\xi)+\varepsilon} \setminus \overline{W}_\varepsilon$ par un élément d'extension q-convexe pour M.
Comme φ admet un minimum local en ξ, on peut trouver un voisinage V de ξ dans $\mathbb{C}^n$ et une extension $\widetilde{\varphi}$ de φ sur V qui soit strictement convexe avec $d\widetilde{\varphi}(\xi) = 0$.
Comme les points critiques non-dégénérés sont isolés, on peut supposer quitte à réduire V que ξ est le seul point critique de φ sur $V \cap M$, alors pour tout $z \in V$, $z \neq \xi$, et pour tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k+1$, $l \leq k$

$$d\widetilde{\varphi}(z) \wedge d\rho_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\rho_{j_l} \neq 0$$

La forme de Levi de $\widetilde{\varphi} - (\varphi(\xi) + \varepsilon)$ est définie positive et ne dépend pas de ε, donc on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour pouvoir construire une section de Leray associée à l'intersection $\mathcal{C}^2$ définie par le cadre $(V, \rho_{j_1}, \ldots, \rho_{j_l}, \widetilde{\varphi} - (\varphi(\xi) + \varepsilon))$, pour tout $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k+1$, $l \leq k$, (voir le Chapitre 1, Définition 1.3.1 et partie 1.3.1). Ici, $\widetilde{\varphi} - (\varphi(\xi) + \varepsilon)$ joue le rôle de ρ_*.
Si V et $\varepsilon > 0$ sont assez petits, on a $W_\varepsilon = M \cap \{z \in V | \widetilde{\varphi}(z) < \varphi(\xi) + \varepsilon\}$, notons $\widetilde{W}_\varepsilon = \{z \in V | \widetilde{\varphi}(z) < \varphi(\xi) + \varepsilon\}$.
Alors, on démontre comme dans le Théorème 2.2.10 *(i)* en remplaçant $B(\xi, R)$ par $\widetilde{W}_\varepsilon$, que si $\varepsilon > 0$ est assez petit, pour tout r avec $n-q-k+1 \leq r \leq n-k$,

$$H^{n,r}_\infty(\overline{W}_\varepsilon) = 0$$

Il est alors facile de conclure. $\square$

La démonstration du Théorème 4.1.4 découle alors de manière classique des Lemmes 4.1.6 et 4.1.9 ainsi que du Corollaire 4.1.8.

4.1.4 Conclusions

On peut maintenant énoncer quelques résultats découlant du travail précédent sur les «bosses».

Théorème 4.1.10 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$, $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soient E un fibré holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ et $[D, G]$ une extension strictement q-convexe dans M. Alors*

1. *Si $n-q-k+1 \leq r \leq n-k$ et si W est un voisinage de ∂D dans M, alors pour toute $f_1 \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{D}, E)$ avec $df_1 = 0$, il existe $f_2 \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{G}, E)$ avec $df_2 = 0$ et $u_1 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{D}, E)$ telles que $f_2 = f_1 - du_1$ sur D et $f_1 = f_2$ sur $D \setminus W$.*
2. *Si $n-q-k+2 \leq r \leq n-k$ et si W est un voisinage de ∂D, pour toute $f \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{G}, E)$ telle que $df = 0$ sur G et telle qu'il existe $u_1 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{D}, E)$ avec $du_1 = f$ sur D, alors il existe $u_2 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{G}, E)$ telle que $du_2 = f$ sur G et $u_2 = u_1$ sur $\overline{D} \setminus W$.*
3. *L'application de restriction :*

$$H^{n,r}_\infty(\overline{G}, E) \longrightarrow H^{n,r}_\infty(\overline{D}, E)$$

est un isomorphisme si $n-q-k+2 \leq r \leq n-k$. De plus, elle est surjective si $r = n-q-k+1$.

Démonstration : Ce théorème découle immédiatement du Théorème 4.1.4 et du Lemme 4.1.2. $\square$

Théorème 4.1.11 *Soient M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$, $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$ et E un fibré holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. Si D est tel que M est une extension q-convexe de D, alors pour tout r avec $n-q-k+2 \leq r \leq n-q$, l'application de restriction :*

$$H^{n,r}_\infty(M,E) \longrightarrow H^{n,r}_\infty(\overline{D},E)$$

est un isomorphisme.
De plus, si $r = n-q-k+1$, elle est surjective.

Démonstration : D'après un lemme de Morse (voir par exemple la Proposition 0.5 dans l'Annexe B dans [He/Le 2]), il existe une suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $D_0 = D$, $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[D_n, D_{n+1}]$ est une extension strictement q-convexe dans M. On utilise alors le Théorème 4.1.10 *1.* (pour la surjectivité) et *2.* (pour l'injectivité) sur chaque couple (D_n, D_{n+1}) pour conclure. $\square$

Théorème 4.1.12 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$, $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soient E un fibré holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ et $D \subset M$ un ouvert de M tel que ∂D, le bord de D dans M, est compact. Si on suppose qu'il existe une application φ, $(q+k)$-convexe, définie sur un voisinage $U_{\partial D}$ de D dans M telle que $D \cap U_{\partial D} = \{z \in U_{\partial D} | \varphi(z) < 0\}$ et $d\varphi(z) \neq 0$ sur ∂D. Alors, l'application restriction :*

$$H^{n,r}_\infty(\overline{D},E) \longrightarrow H^{n,r}_\infty(D,E)$$

est un isomorphisme si $n-q-k+2 \leq r \leq n-k$. De plus, elle est surjective si $r = n-q-k+1$.

Démonstration : Ce théorème découle du Théorème 4.1.10 de manière classique (voir par exemple le Théorème 12.15 dans [He/Le 2]). $\square$

Théorème 4.1.13 *Soient M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$, $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$ et E un fibré holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. Soit D un ouvert de M relativement compact, on note ∂D le bord de D dans M.*

1. *S'il existe $U_{\partial D}$, voisinage de ∂D dans M et une application φ, définie sur $U_{\partial D}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et à valeurs réelles tels que*
   - *(i) $D \cap U_{\partial D} = \{z \in U_{\partial D} | \varphi(z) < 0\}$;*
   - *(ii) $d\varphi(z) \neq 0$ si $z \in \partial D$;*
   - *(iii) pour toute extension ψ de φ à un voisinage de $U_{\partial D}$ dans $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{L}^M_\psi(\xi)$ admet au moins q valeurs propres positives.*

Alors, pour tout $n-q-k+2 \leq r \leq n-k$:

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{n,r}_{\infty}(\overline{D}, E) < \infty$$

2. *Si on peut remplacer $U_{\partial D}$ par $U_{\overline{D}}$, voisinage de l'adhérence de D dans M dans les hypothèses précédente, alors, pour tout $n-q-k+2 \leq r \leq n-k$:*

$$H^{n,r}_{\infty}(\overline{D}, E) = 0$$

Démonstration : 1. Soient $U_{\partial D}$ un voisinage de ∂D dans M et φ une application vérifiant les propriétés requises par l'énoncé.
D'après la Proposition 2.2.9, φ est $(q+k)$-convexe sur $U_{\partial D}$ alors d'après le Théorème 4.1.12, il suffit de vérifier que pour tout r avec $n-q-k+2 \leq r \leq n-k$,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{n,r}_{\infty}(D, E) < \infty$$

Pour cela, on utilise un résultat dû à C.D. Hill et M. Nacinovich. En effet, comme D est un sous-ensemble ouvert d'une sous-variété CR q-concave de $\mathbb{C}^n$, il est évident que D est aussi une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k, (c'est donc une variété CR de type $(n-k, k)$, avec les notations de [Hi/Na] et [Hi/Na 2]). De plus, les propriétés *(i)* et *(iii)* permettent d'affirmer que D est *(n-k-q)-pseudoconvexe à l'infini* (avec les notations de [Hi/Na] et [Hi/Na 2]). Le Théorème 5.1 dans [Hi/Na 2] permet alors de conclure.

2. Le raisonnement est le même sauf qu'ici, D est *(n-k-q)-complète* (toujours avec les notations de [Hi/Na] et [Hi/Na 2]), et la Remarque 1 suivant le Théorème 5.1 dans [Hi/Na 2] permet de conclure. □

Remarque. Le point *2.* de ce théorème peut être démontré sans utiliser les résultats de C.D. Hill et M. Nacinovich et sous des hypothèses légèrement plus faibles. En effet, si on suppose que φ est $(q+k)$-convexe, alors on peut montrer que si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors

$$H^{n,r}_{\infty}(\overline{D}_{\min \varphi + \varepsilon}, E) = 0$$

où $D_{\min \varphi+\varepsilon} = \{z \in U_D | \varphi(z) < \min_D \varphi + \varepsilon\}$ Pour cela, il suffit de prendre ε suffisamment petit pour que chaque composante connexe de $D_{\min \varphi+\varepsilon}$ soit incluse dans une boule assez petite pour pouvoir construire les sections de Leray. Le Théorème 4.1.10 permet alors de conclure.

4.2 Dans le cas concave

Les raisonnements sont similaires au cas convexe, aussi, on commence par définir des éléments d'extension afin de créer des bosses.

4.2.1 Éléments d'extension

Définition 4.2.1 *Soit M une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, de codimension k avec $1 < k \leq n$ et soit q un entier avec $0 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$.*

(i) Une bosse q-concave pour M *est une collection ordonnée* $[U_0, U_1, U_2, D_1, D_2, \psi_1, \psi_2, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ *telle que*
- $U_0 \subset\subset U_1 \subset\subset U_2$ *sont des ouverts relativement compacts dans* $\mathbb{C}^n$ *;*
- *pour* $i = 1, 2$, $D_i = \{z \in U_2 | \psi_i(z) < 0\}$ *;*
- *pour* $i = 1, 2$, $[U_2, (U_2 \setminus \overline{D}_i), -\psi_i, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ *est une configuration q-convexe affine pour M ;*
- $D_1 \subseteq D_2$ *avec* $D_2 \setminus D_1 \subset\subset U_0$ *;*
- *pour* $i = 1, 2$, *pour* $j = 1, 2$ *et pour* $1 \leq r \leq q - 2$, *si* $u \in [\mathcal{E}_{n,r}]_M(\overline{D_i \cap U_j})$ *avec* $du = 0$, *il existe* $v \in [\mathcal{E}_{n,r-1}]_M(\overline{D_i \cap U_{j-1}})$ *tel que* $dv = u$ *;*
- *pour* $i = 1, 2$, *toute* $(n, 0)$*-forme CR sur* $M \cap \overline{D_i \cap U_1}$ *peut être étendue en une* $(0, r)$*-forme CR de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur un voisinage de* $M \cap \overline{U}_0$ *dans* $\mathbb{C}^n$.

(ii) $[\Theta_1, \Theta_2, V]$ *est un* élément d'extension q-concave dans M *si* Θ_1 *et* Θ_2 *sont des domaines ouverts de M à bord $\mathcal{C}^2$ et V un ouvert relativement compact dans M tels que*
- $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$ *;*
- $\Theta_2 \setminus \Theta_1 \subset\subset V$ *;*
- *il existe une bosse q-concave* $[U_0, U_1, U_2, D_1, D_2, \psi_1, \psi_2, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ *telle que* $V = U_2 \cap M$, *et pour* $i = 1, 2$,

$$\Theta_i \cap V = \{z \in V | \psi_i(z) < 0\} = D_i \cap V$$

On dit que Θ_2 peut être obtenu de Θ_1 par un élément d'extension q-concave dans M, s'il existe V dans M tel que $[\Theta_1, \Theta_2, V]$ est un élément d'extension q-concave dans M.

On a alors le lemme suivant dont la démonstration est identique à celle du Lemme 4.1.2 :

Lemme 4.2.2 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$ et $2 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soient $[\Theta_1, \Theta_2, V]$ un élément d'extension q-concave dans M et E un fibré vectoriel holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ qui est holomorphiquement trivial au-dessus d'un voisinage de $\overline{V}$. Alors, les propriétés suivantes sont vraies :*

1. *Si $1 \leq r \leq q-2$ et si W est un voisinage de $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$ dans M, alors pour toute $f_1 \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{\Theta}_1, E)$ avec $df_1 = 0$, il existe $f_2 \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{\Theta}_2, E)$ avec $df_2 = 0$ et $u_1 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{\Theta}_1, E)$ dont le support est inclus dans $W \cap \overline{\Theta}_1$ telles que $f_2 = f_1 - du_1$ sur Θ_1.*
   Ce qui implique que l'application restriction :

$$H^{n,r}_\infty(\overline{\Theta}_2, E) \longrightarrow H^{n,r}_\infty(\overline{\Theta}_1, E)$$

est surjective.

2. *Si $1 \leq r \leq q-2$ et si W est un voisinage de $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$, pour toute $f \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{\Theta}_2, E)$ telle que $df = 0$ sur Θ_2 et telle qu'il existe $u_1 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{\Theta}_1, E)$ avec $du_1 = f$ sur Θ_1, alors il existe $u_2 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{\Theta}_2, E)$ telle que $du_2 = f$ sur Θ_2 et $u_2 = u_1$ sur $\overline{\Theta}_1 \setminus W$.*
   Ce qui implique clairement que l'application restriction :
$$H^{n,r}_\infty(\overline{\Theta}_2, E) \longrightarrow H^{n,r}_\infty(\overline{\Theta}_1, E)$$
   est injective.
3. *Si $r = 0$, l'application :*
$$H^{n,0}_\infty(\overline{\Theta}_2, E) \longrightarrow H^{n,0}_\infty(\overline{\Theta}_1, E)$$
   est bijective

Démonstration : 1. La démonstration est identique à celle du cas convexe.
2. Si $r = 1$, en reprenant les notations de la démonstration du Lemme 4.1.2, la forme $u_1 - v$ est une $(n,0)$-forme CR sur $\overline{\Theta_1 \cap U_1}$, donc, d'après le troisième point de la Définition 4.2.1, *(i)*, elle peut être étendue en une forme CR, w, sur $\overline{U_0}$. Posons alors $u_2 = u_1$ sur $\overline{\Theta}_1$ et $u_2 = v + w$ sur $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$.
Si $r \geq 2$, la démonstration est identique à celle du cas convexe.
3. La surjectivité découle directement du troisième point de la Définition 4.2.1, *(i)*. Pour l'injectivité, on utilise le fait que si M est une variété 1-concave, le théorème de prolongement analytique est valide. Ainsi, lorsque f est une forme fermée sur Θ_2 qui s'annule sur Θ_1, le théorème de prolongement analytique permet d'affirmer qu'elle s'annule aussi sur Θ_2. □

Dans le cas limite où $r = q-1$, on a le résultat suivant :

Lemme 4.2.3 *Soient M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$, $2 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$ et E un fibré holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. Si $[\Theta_1, \Theta_2, V]$ est un élément d'extension q-concave dans M tel que V vérifie les propriétés suivantes :*
- *E est holomorphiquement trivial au-dessus d'un voisinage de $\overline{V}$;*
- *$V \subseteq B(\xi, R) \cap M$ où ξ est un point de $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$ et $R = R_1$ où R_1 est donné par le Théorème 2.3.2 (i) pour un R_0 fixé.*

alors la propriété suivante est vérifiée :
Soit $f \in [C^\infty_{n,q-1}]_M(M, E)$ avec $df = 0$ et telle qu'il existe $u_1 \in [C^\infty_{n,q-2}]_M(\overline{\Theta}_1, E)$ avec $du_1 = f$. Alors pour tout voisinage W dans M de $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$, il existe $u_2 \in [C^\infty_{n,q-2}]_M(\overline{\Theta}_2, E)$ avec $du_2 = f$ sur Θ_2 et $u_2 = u_1$ sur $\overline{\Theta}_1 \setminus W$.

Démonstration : Soit $[U_0, U_1, U_2, D_1, D_2, \psi_1, \psi_2, \rho_1, \ldots, \rho_{k+1}]$ une bosse q-concave associée à $[\Theta_1, \Theta_2, V]$.
Soit $f \in [C^\infty_{n,q-1}]_M(M, E)$ avec $df = 0$ et telle qu'il existe $u_1 \in [C^\infty_{n,q-2}]_M(\overline{\Theta}_1, E)$

avec $du_1 = f$. D'après le Théorème 2.3.2 *(i)*, il existe $v \in [C^\infty_{n,q-2}]_M(U_2, E)$ telle que $dv = f$ sur $U_2 \cap M$.
Si $q \geq 3$, $u_1 - v \in [C^\infty_{n,q-2}]_M(\overline{\Theta_1 \cap U_2}, E)$ avec $d(u_1 - v) = 0$ donc il existe $v_2 \in [C^\infty_{n,q-3}]_M(\overline{\Theta_1 \cap U_1}, E)$ avec $dv_2 = u_1 - v$.
Soit χ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M positive telle que supp $\chi \subset\subset \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{W}$ et $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$, posons :

$$u_2 = \begin{cases} u_1 - d(\chi v_2) & \text{sur } \overline{\Theta}_1 \\ v + d((1-\chi)v_2) & \text{sur } \overline{\Theta}_2 \cap (U_1 \cap W) \end{cases}$$

Alors u_2 convient.
Si $q = 2$, $u_1 - v \in [C^\infty_{n,0}]_M(\overline{\Theta_1 \cap U_2}, E)$ est CR, donc il existe w extension CR de $u_1 - v$ sur $\overline{U_0} \cap M$, posons alors $u_2 = u_1$ sur $\overline{\Theta}_1$ et $u_2 = v + w$ sur $\overline{\Theta_2 \setminus \Theta_1}$. u_2 convient. $\square$

4.2.2 Extensions q-concaves

Définition 4.2.4 *Soit M une sous-variété réelle de $\mathbb{C}^n$ de codimension k et de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $1 < k \leq n$. Soit q un entier avec $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$*

1. *On dit que $[D, G]$ est une* extension q-concave dans M *si D et G sont des ouverts de M avec $D \subseteq G$ tels que :*
   - *∂D est compact ;*
   - *D rencontre chaque composante connexe de G ;*
   - *il existe un voisinage $W_{\partial D}$ de ∂D dans M, une application $(q+k)$-concave φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie sur $W = W_{\partial D} \cup (G \setminus D)$ et $0 < c_\infty \leq +\infty$ tels que*

     (i) $D \cap W = \{z \in W | \varphi(z) < 0\}$;

     (ii) $\forall z \in \partial D$, $d\varphi(z) \neq 0$;

     (iii) pour tout c avec $0 \leq c < c_\infty$, $\{z \in W | 0 \leq \varphi(z) \leq c\}$ est compact.
2. *On dit que $[D, G]$ est une* extension strictement q-concave dans M *si D et G sont des ouverts de M avec $D \subseteq G$ tels que :*
   - *$\overline{G \setminus D}$ est compact ;*
   - *il existe un voisinage W de $\overline{G \setminus D}$ dans M , une application $(q+k)$-concave φ définie sur W et de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que*

     (i) $D \cap W = \{z \in W | \varphi(z) < 0\}$ et $G \cap W = \{z \in W | \varphi(z) < 1\}$

     (ii) $\forall z \in \partial D \cup \partial G$, $d\varphi(z) \neq 0$;
3. *On dit que $[D, G]$ est une extension (strictement) q-concave* non-critique *dans M si φ peut être choisie sans point critique sur W.*
4. *On dit que M est une* extension q-concave (non-critique) de *D si $[D, M]$ est une extension q-concave (non-critique).*

Remarque. Dans *1.* on donne une condition supplémentaire par rapport à la définition des extensions q-convexes dans M : D doit rencontrer toutes les composantes connexes de G. Cette condition est imposée par le fait qu'une application $(q+k)$-concave n'admet pas de minimum local, ce qui implique que la notion de «*sous-variété complètement q-concave*» ne peut exister. Or s'il existait une composante connexe de G ne rencontrant pas D, celle-ci serait une sous-variété complètement q-concave et on aurait donc une contradiction (voir la remarque III p.101 dans [He/Le 2] pour le cas convexe).

En utilisant les Théorèmes 2.3.2 et 2.3.3 ainsi que la remarque suivant le Théorème 2.3.3, on démontre comme dans le cas convexe :

Théorème 4.2.5 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$ et $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$.*
Soit $[D,G]$ une extension strictement q-concave dans M et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $\overline{G\setminus D}$ par des ouverts de M. Alors il existe des ouverts de M, $\Theta_0,\ldots,\Theta_N$, $V_0,\ldots,V_{N-1}$ tels que :
• *$\Theta_0 = D$ et $\Theta_N = G$;*
• *pour tout $i \in \{0,\ldots,N-1\}$, $[\Theta_i,\Theta_{i+1},V_i]$ est un élément d'extension q-concave dans M ;*
• *pour tout $i \in \{0,\ldots,N-1\}$, il existe $j_0 \in I$, tel que $V_i \subset\subset U_{j_0}$.*

4.2.3 Conclusions

On peut alors obtenir dans le cas concave des résultats analogues aux Théorèmes 4.1.10, 4.1.11, 4.1.12 et 4.1.13 qui s'énoncent de la manière suivante :

Théorème 4.2.6 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$, $2 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soient E un fibré holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ et $[D,G]$ une extension strictement q-concave dans M. Alors*

1. *Si $1 \leq r \leq q-2$ et si W est un voisinage de ∂D dans M, alors pour toute $f_1 \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{D},E)$ avec $df_1 = 0$, il existe $f_2 \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{G},E)$ avec $df_2 = 0$ et $u_1 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{D},E)$ telles que $f_2 = f_1 - du_1$ sur D et $f_1 = f_2$ sur $D \setminus W$.*
2. *Si $1 \leq r \leq q-2$ et si W est un voisinage de ∂D, pour toute $f \in [C^\infty_{n,r}]_M(\overline{G},E)$ telle que $df = 0$ sur G et telle qu'il existe $u_1 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{D},E)$ avec $du_1 = f$ sur D, alors il existe $u_2 \in [C^\infty_{n,r-1}]_M(\overline{G},E)$ telle que $du_2 = f$ sur G et $u_2 = u_1$ sur $\overline{D}\setminus W$.*
3. *L'application de restriction :*

$$H^{n,r}_\infty(\overline{G},E) \longrightarrow H^{n,r}_\infty(\overline{D},E)$$

est un isomorphisme si $0 \leq r \leq q-2$.

Théorème 4.2.7 *Soient M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$, $2 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$ et E un fibré holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. Si D est tel que M est une extension q-concave de D, alors pour tout r avec $0 \leq r \leq q-2$, l'application de restriction :*

$$H_\infty^{n,r}(M,E) \longrightarrow H_\infty^{n,r}(\overline{D},E)$$

est un isomorphisme.
De plus, si $r = q-1$, elle est injective.

Démonstration : D'après un lemme de Morse (voir par exemple la Proposition 0.5 dans l'Annexe B dans [He/Le 2]), il existe une suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $D_0 = D$, $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[D_n, D_{n+1}]$ est une extension strictement q-concave dans M. On utilise alors le Théorème 4.2.6 *1.* pour démontrer la surjectivité quand $1 \leq r \leq q-2$ et *2.* pour démontrer l'injectivité quand $2 \leq r \leq q-2$ sur chaque couple (D_n, D_{n+1}) pour conclure. Si $r = q-1$, on utilise le Lemme 4.2.3 à la place du Théorème 4.2.6 en remarquant que dans le Théorème 4.2.5, on peut choisir les ouverts $V_0, \dots, V_{N-1}$ de manière à ce qu'ils vérifient les hypothèses du Lemme 4.2.3. $\square$

Remarque. Si $q = 1$, alors M est 1-concave et l'application

$$H_\infty^{n,0}(M,E) \longrightarrow H_\infty^{n,0}(\overline{D},E)$$

est injective d'après le théorème de prolongement analytique dans les variétés CR 1-concaves. Cette remarque s'applique aussi aux Théorèmes 4.2.6 et 4.2.8.

Théorème 4.2.8 *Soit M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$, $2 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Soient E un fibré holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ et $D \subset M$ un ouvert de M tel que ∂D, le bord de D dans M, est compact. Si on suppose qu'il existe une application φ, $(q+k)$-concave, définie sur un voisinage $U_{\partial D}$ de D dans M telle que $D \cap U_{\partial D} = \{z \in U_{\partial D} | \varphi(z) < 0\}$ et $d\varphi(z) \neq 0$ sur ∂D. Alors, l'application restriction :*

$$H_\infty^{n,r}(\overline{D},E) \longrightarrow H_\infty^{n,r}(D,E)$$

est un isomorphisme si $0 \leq r \leq q-2$.

Théorème 4.2.9 *Soient M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k, avec $1 < k \leq n$, $2 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$ et E un fibré holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. Soit D un ouvert de M relativement compact, on note ∂D le bord de D dans M.*
S'il existe $U_{\partial D}$, voisinage de ∂D dans M et une application φ, définie sur $U_{\partial D}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et à valeurs réelles tels que

(i) $D \cap U_{\partial D} = \{z \in U_{\partial D} | \varphi(z) < 0\}$;

(ii) $d\varphi(z) \neq 0$ *si* $z \in \partial D$ *;*

(iii) *pour toute extension* ψ *de* φ *à un voisinage de* $U_{\partial D}$ *dans* $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{L}_\psi^M(\xi)$ *admet au moins* q *valeurs propres négatives.*

Alors, pour tout $0 \leq r \leq q-2$ *:*

$$\dim_{\mathbb{C}} H_\infty^{n,r}(\overline{D}, E) < \infty$$

Démonstration : Comme pour le point *1.* du Théorème 4.1.13, on utilise des résultats de C.D. Hill et M. Nacinovich, en effet, les propriétés *(i)* et *(iii)* permettent d'affirmer que D est une variété CR de type $(n-k, k)$ qui est *q-pseudoconcave à l'infini* avec les notations de [Hi/Na], alors le Théorème 5.1 dans [Hi/Na] et le Théorème 4.2.8 permettent de conclure. □

Annexe A

Quelques rappels de théorie des faisceaux et d'algèbre homologique

Voici quelques outils de théorie des faisceaux et d'algèbre homologique qui ont pour but de faciliter la lecture de cette thèse. Ce qui va suivre est en partie inspiré de l'annexe B du livre de C. Laurent-Thiébaut (voir [L-T 1]) et de [We]. Pour plus de détails, le lecteur pourra lire par exemple [Go], [Ka/Sc], [Gu/Ro] ou [We], les deux derniers ouvrages étant écrits dans le contexte de l'Analyse Complexe en Plusieurs Variables.

A.1 Préfaisceaux et Faisceaux

A.1.1 Premières définitions

Définition A.1.1 *Soit X un espace topologique.*
Un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X *est la donnée*

(i) pour chaque ouvert U de X d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$;

(ii) pour chaque couple (U,V) d'ouverts de X tel que $V \subset U$ d'une application de restriction

$$r_V^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

telle que
- *pour tout ouvert U de X, $r_U^U = I$;*
- *si $W \subset V \subset U$ alors $r_W^U = r_W^V \circ r_V^U$.*

Les éléments de $\mathcal{F}(U)$ sont appelés sections au-dessus de U.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des préfaisceaux sur X, un *morphisme de préfaisceaux*

$$h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

est une collection d'applications $h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ telle que pour tout ouvert U de X et pour tout ouvert V inclus dans U, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle r_V^U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_V^U} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Si les applications h_U sont des inclusions, on dit que $\mathcal{G}$ est un *sous-préfaisceau* de $\mathcal{F}$.

Remarque. 1. Si, pour un préfaisceau $\mathcal{F}$, chaque $\mathcal{F}(U)$ a une structure algébrique (par exemple, $\mathcal{F}(U)$ a une structure de groupe abélien, d'anneaux....), alors, on demande aux applications de restriction et aux morphismes de préserver cette structure, (par exemple r_V^U et h_U sont des homomorphismes de groupes, d'anneaux...). Ainsi, si $\mathcal{F}$ est un préfaisceaux de groupes abéliens et si $\mathcal{G}$ est un sous-préfaisceau de $\mathcal{F}$, alors chaque $\mathcal{G}(U)$ est un sous-groupe de $\mathcal{F}(U)$.

Définition A.1.2 *Un préfaisceau $\mathcal{F}$ est un* faisceau *si et seulement si pour tout ouvert U de X et toute collection d'ouvert $(U_i)_{i\in I}$ vérifiant $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, les deux axiomes de recollement suivants sont vérifiés :*

(R_1) *Si $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ et si $r_{U_i}^U(s_1) = r_{U_i}^U(s_2)$ pour tout $i \in I$ alors $s_1 = s_2$.*

(R_2) *Si, pour chaque $i \in I$ il existe $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ vérifiant les conditions de compatibilité*
$$r_{(U_i\cap U_j)}^{U_i}(s_i) = r_{(U_i\cap U_j)}^{U_j}(s_j)$$
alors il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $r_{U_i}^U(s) = s_i$.

Exemples. Si X est une variété analytique complexe, $\mathcal{O}$ est un faisceau sur X, où $\mathcal{O}(U)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur U et $\mathcal{O}$ est muni des applications de restriction usuelles ; $\mathcal{C}_{p,q}^\alpha$ est un faisceau sur X pour $0 \leq \alpha \leq \infty$, où $\mathcal{C}_{p,q}^\alpha(U)$ est l'ensemble des (p,q)-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\alpha$ sur U.

Définition A.1.3 *Soit $\mathcal{E}$ un préfaisceau d'anneaux commutatifs et $\mathcal{M}$ une préfaisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X. Supposons que pour tout ouvert $U \subset X$, $\mathcal{M}(U)$ possède une structure de $\mathcal{E}(U)$-module telle que : si $\alpha \in \mathcal{E}(U)$ et $s \in \mathcal{M}(U)$ alors, pour tout $V \subset U$*
$$r_V^U(\alpha s) = \rho_V^U(\alpha) r_V^U(s)$$
où les r_V^U sont les applications de restriction pour $\mathcal{M}$ et les ρ_V^U celles pour $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{M}$ est appelé préfaisceau de $\mathcal{E}$-modules, *si de plus $\mathcal{M}$ est un faisceau, alors $\mathcal{M}$ est appelé* faisceau de $\mathcal{E}$-modules.

Définition A.1.4 *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau d'anneaux commutatifs sur un espace topologique X On définit :*

(i) *$\mathcal{E}^p$, pour $p \geq 0$ par le préfaisceau*

$$U \longrightarrow \mathcal{E}^p(U) = \underbrace{\mathcal{E}(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}(U)}_{p \text{ termes}}$$

alors $\mathcal{E}^p$ est clairement un faisceau de $\mathcal{E}$-modules appelé somme directe de $\mathcal{E}$, p fois.

(ii) *Si $\mathcal{M}$ est un faisceau de $\mathcal{E}$-modules tel qu'il existe $p \geq 0$ avec $\mathcal{M} \simeq \mathcal{E}^p$, on dit que $\mathcal{M}$ est un* faisceau de $\mathcal{E}$-modules libre.

(iii) *Si $\mathcal{M}$ est un faisceau de $\mathcal{E}$-modules tel que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que $\mathcal{M}|_U$ est libre, on dit que $\mathcal{M}$ est* localement libre.

A.1.2 Espace étalé, faisceau engendré

Nous allons donner ici une autre vision des faisceaux qui donne une approche locale au moyen des *fibres*.

Définition A.1.5 *Soit X un espace topologique.*

1. *On dit que (Y, π) est un* espace étalé au-dessus de X *si Y est un espace topologique et $\pi : Y \to X$ est une application continue et surjective qui est un homéomorphisme local.*
2. *Soit $Y \xrightarrow{\pi} X$ un espace étalé. Une* section de $Y \xrightarrow{\pi} X$ au-dessus de U, *où U est un ouvert de X, et une application continue $f : U \to Y$ telle que $\pi \circ f = id_U$. L'espace des sections au-dessus de U est noté $\Gamma(U, Y)$.*

Considérons un préfaisceau $\mathcal{F}$ au-dessus de X et pour $x \in X$, soit

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \text{ ouvert } \ni x} \mathcal{F}(U)$$

$\mathcal{F}_x$ est appelée la *fibre de $\mathcal{F}$ en x*. Il existe alors une application naturelle :

$$r_x^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x, \quad x \in U$$

qui transforme un élément de $\mathcal{F}(U)$ en sa classe d'équivalence dans la limite directe. Si $s \in \mathcal{F}(U)$, alors $s_x := r_x^U(s)$ est appelé le *germe* de s en x.

Notons alors

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

et

$$\begin{array}{rrcl} \pi : & \widetilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & X \\ & f_x \in \mathcal{F}_x & \longmapsto & x \end{array}$$

Pour que $\widetilde{\mathcal{F}} \xrightarrow{\pi} X$ soit un espace étalé, il reste à construire une topologie sur $\widetilde{\mathcal{F}}$, ce que nous ne ferons pas ici. On donne cependant le théorème suivant, dont la démonstration peut être lue par exemple dans [We]. Ce théorème fait le lien entre les deux types de visions.

Théorème A.1.6 *1. Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau au-dessus de X, alors on peut munir $\widetilde{\mathcal{F}}$ d'une topologie pour que $\widetilde{\mathcal{F}} \xrightarrow{\pi} X$ soit un espace étalé.*
Alors l'espace des sections de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est appelé faisceau engendré par *$\mathcal{F}$, et il est noté $\overline{\mathcal{F}}$.*
2. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X alors $\overline{\mathcal{F}} \simeq \mathcal{F}$. Ainsi, pour tout U ouvert de X, on a $\mathcal{F}(U) \simeq \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}})$, ce qui justifie l'appellation de sections.

A.2 Faisceaux mous, faisceaux fins

Un espace topologique X est paracompact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de X possède un recouvrement plus fin localement fini.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau au-dessus d'un espace topologique X, et soit S un fermé de X, on définit l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de S par

$$\mathcal{F}(S) = \varinjlim_{U \supset S} \mathcal{F}(U)$$

Définition A.2.1 *Soient X un espace topologique paracompact et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est* mou *si toute section de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un fermé se prolonge à X tout entier.*
En d'autres termes, pour tout S fermé dans X, l'application de restriction

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$$

est surjective.

Définition A.2.2 *Soient X un espace topologique paracompact et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est* fin *si pour tout recouvrement localement fini de X par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$, il existe une famille de morphismes de faisceaux*

$$(\eta_i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F})_{i\in I}$$

telle que :

1. *$\sum \eta_i = 1$*
2. *pour tout $i \in I$, $\eta_i(\mathcal{F}_x) = 0$ pour tout x dans un voisinage du complémentaire de U_i*

Une telle famille $(\eta_i)_{i\in I}$ est appelée une partition de l'unité de $\mathcal{F}$ subordonnée au recouvrement (U_i).

Lemme A.2.3 *Tout faisceau fin est mou.*

On donne maintenant quelques exemples de faisceaux fins, certains de ces exemples sont utilisés dans le Chapitre 2.

Premiers Exemples : Soit D un domaine ouvert dans $\mathbb{C}^n$. Pour n'importe quel recouvrement localement fini de D par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$, il existe une famille de fonctions $(\rho_i)_{i\in I}$ telle que

1. pour tout $i \in I$, ρ_i est $\mathcal{C}^\infty$ sur D, positive avec supp $\rho_\mathrm{i} \subset\subset \mathrm{U_i}$;
2. $\sum_{i\in I} \rho_i \equiv 1$ sur D.

Par ailleurs, l'opération de multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ est clairement un homomorphisme de faisceaux sur le faisceau des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, ou sur le faisceau des germes de fonctions continues ou encore sur celui des germes de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$... et l'ensemble des multiplications par les fonctions ρ_i fournit alors une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i).
Ainsi, les faisceaux de germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, de fonctions continues et de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sont des faisceaux fins.

Autres Exemples : Si X est un espace séparé et paracompact, les faisceaux suivants sont fins :

1. $\mathcal{E}_X$, le faisceau des germes de formes différentielles sur X ;
2. $\mathcal{E}_X^{p,q}$, si X admet de plus une structure complexe ;
3. tout faisceau localement libre de $\mathcal{E}_X$-module, si X est une variété différentiable ;

Une des propriétés utiles des faisceaux mous, est l'exactitude du foncteur Γ, ainsi on a le résultat suivant, qui est démontré par exemple dans [Go], [Gu/Ro] ou [We] :

Théorème A.2.4 *Soient X un espace topologique paracompact et séparé et*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \cdots$$

une suite exacte de faisceaux mous, alors la suite induite

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^0) \to \Gamma(X, \mathcal{F}^1) \to \cdots$$

est exacte.

A.3 Suite exacte longue de Cohomologie, Lemme du serpent

Les résultats suivants ne font pas partie de la théorie des faisceaux, il s'agit plutôt de résultats d'algèbre homologique, qui sont utilisés dans ce travail dans le cadre de complexes de groupes abéliens (lorsque l'on passe grâce au théorème précédent aux sections associées au faisceau au-dessus d'un ouvert U).

Soient $(\mathcal{F}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de groupes abéliens et $(d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille d' homomorphismes de groupes abéliens tels que

$$d_n : \mathcal{F}^n \longrightarrow \mathcal{F}^{n+1}$$

$$d_n \circ d_{n+1} = 0$$

On dit alors que :

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{F}^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{F}^n \xrightarrow{d_n} \mathcal{F}^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

est un *complexe de groupes abéliens*, on le note $(\mathcal{F}^\bullet, d_\bullet)$ ou $\mathcal{F}^\bullet$ lorsqu'il n'y a pas de confusion.
On note alors pour $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(\mathcal{F}^\bullet) = \mathrm{Ker\ d_n/Im\ d_{n-1}}$, les groupes de cohomologie du complexe $(\mathcal{F}^\bullet, d_\bullet)$.
Un *morphisme de complexes* f entre $(\mathcal{F}^\bullet, d_\bullet^{\mathcal{F}})$ et $(\mathcal{G}^\bullet, d_\bullet^{\mathcal{G}})$ est alors une famille (f^n) d'homomorphismes de groupes, $f^n : \mathcal{F}^n \to \mathcal{G}^n$, qui commutent avec les applications différentielles, i.e., pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "d_n^{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{G}^n \arrow[d, "d_n^{\mathcal{G}}"] \\
\mathcal{F}^{n+1} \arrow[r, "f^{n+1}"] & \mathcal{G}^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Ceci permet alors de définir ce qu'est une suite exacte de complexes : il s'agit pour chaque n d'une suite exacte de groupes abéliens telle que les morphismes commutent avec les applications différentielles.
Le résultat suivant est démontré dans [Ka/Sc] :

Théorème A.3.1 *Soient* $(\mathcal{F}^n, d_n^{\mathcal{F}})$, $(\mathcal{G}^n, d_n^{\mathcal{G}})$ *et* $(\mathcal{H}^n, d_n^{\mathcal{H}})$ *des complexes de groupes abéliens. Alors si*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}^\bullet \longrightarrow 0$$

est une suite exacte, alors, il existe un morphisme de connexion canonique :

$$\delta^\bullet : H^n(\mathcal{H}^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{F}^\bullet)$$

et une suite exacte longue de cohomologie associée :

$$\cdots \longrightarrow H^n(\mathcal{F}^\bullet) \to H^n(\mathcal{G}^\bullet) \to H^n(\mathcal{H}^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Plus précisément si, le diagramme suivant est un diagramme commutatif de suites exactes de complexes de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{G}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{H}^\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{F}}^\bullet & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{G}}^\bullet & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{H}}^\bullet & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

alors le diagramme des suites exactes longues associées est commutatif :

$$\begin{array}{cccccccccc}
\longrightarrow & H^n(\mathcal{F}^\bullet) & \rightarrow & H^n(\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & H^n(\mathcal{H}^\bullet) & \rightarrow & H^{n+1}(\mathcal{F}^\bullet) & \rightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & H^n(\widetilde{\mathcal{F}}^\bullet) & \rightarrow & H^n(\widetilde{\mathcal{G}}^\bullet) & \rightarrow & H^n(\widetilde{\mathcal{H}}^\bullet) & \rightarrow & H^{n+1}(\widetilde{\mathcal{F}}^\bullet) & \rightarrow
\end{array}$$

Pour finir, nous allons énoncer et démontrer le Lemme des cinq que l'on peut trouver par exemple dans [Sp] :

Lemme A.3.2 ***[Lemme des cinq]****.*
Si le diagramme suivant est un diagramme commutatif de suites exactes de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccccccc}
X_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & X_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & X_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & X_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & X_4 \\
f_0\downarrow & & f_1\downarrow & & f_2\downarrow & & f_3\downarrow & & f_4\downarrow \\
Y_0 & \xrightarrow{\psi_0} & Y_1 & \xrightarrow{\psi_1} & Y_2 & \xrightarrow{\psi_2} & Y_3 & \xrightarrow{\psi_3} & Y_4
\end{array}$$

On a les propriétés suivantes,

1. *si f_0 est surjective et f_1 et f_3 sont injectives, alors f_2 est injective ;*
2. *si f_4 est injective et f_1 et f_3 sont surjectives, alors f_2 est surjective.*

Démonstration : 1. Soit $x_2 \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{f}_2$.
Le diagramme est commutatif donc on a $f_3 \circ \varphi_2(x_2) = 0$.
Grâce à l'injectivité de f_3, on peut affirmer que $\varphi_2(x_2) = 0$, donc $x_2 \in \mathrm{Ker}\ \varphi_2 = \mathrm{Im}\ \varphi_1$, ainsi, il existe $x_1 \in X_1$ tel que $\varphi_1(x_1) = x_2$.
Comme le diagramme est commutatif, on a $\psi_1 \circ f_1(x_1) = f_2 \circ \varphi_1(x_1) = 0$, donc $f_1(x_1) \in \mathrm{Ker}\ \psi_1 = \mathrm{Im}\ \psi_0$, i.e. il existe $y_0 \in Y_0$ tel que $\psi_0(y_0) = f_1(x_1)$.
f_0 étant surjective, il existe $x_0 \in X_0$ tel que $f_0(x_0) = y_0$.
Ainsi, $\psi_0 \circ f_0(x_0) = f_1 \circ \varphi_0(x_0)$ et $\psi_0 \circ f_0(x_0) = f_1(x_1)$, comme f_1 est injective, on en déduit que $x_1 = \varphi_0(x_0)$ et donc $\varphi_1(x_1) = 0$. Ce qui permet de conclure que $x_2 = 0$.
2. Soit $y_2 \in Y_2$.
Comme f_3 est surjective, il existe $x_3 \in X_3$ tel que $f_3(x_3) = \psi_2(y_2)$.
Le diagramme étant commutatif, $\psi_3 \circ f_3(x_3) = f_4 \circ \varphi_3(x_3)$ or $f_3(x_3)\ \mathrm{Im}\ \psi_2 = \mathrm{Ker}\ \psi_3$, donc, par injectivité de f_4, on a $\varphi_3(x_3) = 0$.
L'exactitude des lignes permet d'affirmer qu'il existe $x_2 \in X_2$ tel que $\varphi_2(x_2) =$

x_3.
Comme le diagramme est commutatif, on a $\psi_2 \circ f_2(x_2) = f_3 \circ \varphi_2(x_2) = f_3(x_3) = \psi_2(y_2)$, donc $(y_2 - f_2(x_2)) \in \mathrm{Ker}\ \psi_2$.
L'exactitude des ligne permet alors d'affirmer qu'il existe $y_1 \in Y_1$ tel que $\psi_1(y_1) = (y_2 - f_2(x_2))$.
Comme f_1 est surjective, il existe $x_1 \in X_1$ tel que $f_1(x_1) = y_1$. Alors $f_2 \circ \varphi_1(x_1) = \psi_1 \circ f_1(x_1) = (y_2 - f_2(x_2))$.
D'où $y_2 = f_2 \circ \varphi_1(x_1) + f_2(x_2)$ donc $y_2 \in \mathrm{Im}\ \mathrm{f}_2$. $\square$

Bibliographie

[Ai/He] AIRAPETJAN R.A., HENKIN G.M. *Integral representations of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR-functions.* Russ. Math. Surv., 39, 41-118, 1984, *et Integral representations of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR-functions II.* Math. USSR Sbornik 55, 1, 91-111, 1986.

[An] ANDREOTTI A. *Complexes of partial differential operators.* Yale Univ. Press, 1975.

[An/Gr] ANDREOTTI A., GRAUERT H. *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* Bull. Soc. Math. France 90, 193-259, 1962.

[An/Fr/Na] ANDREOTTI A., FREDERICKS G., NACINOVICH M. *On the absence of Poincaré lemma in tangential Cauchy-Riemann complexes.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 8, 365-404, 1981.

[An/Hi] ANDREOTTI A., HILL C.D. *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem, part. I et II* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 26, 325-363 et 747-806, 1972.

[An/Ve] ANDREOTTI A., VESENTINI E. *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds.* Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 25, 1965.

[Ba 1] BARKATOU M.Y. *Optimal Regularity for $\bar{\partial}_b$ on CR Manifolds.* Journal of Geometric Analysis, Vol 10, number 2, 2000.

[Ba 2] BARKATOU M.Y. $\mathcal{C}^k$ *estimates for* $\bar{\partial}$ *on q-convex wedges.* Math. Z. 239, 335-352, 2002.

[Bo] BOGGESS A. *CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex.* CRC Press, Boca Raton, Florida, 1991.

[Go] GODEMENT R. *Théorie des faisceaux.* Hermann, Paris, 1958.

[Gr] GRAUERT H. *Kantenkohomologie.* Compositio Math. 44, 79-101, 1981.

[Gu/Ro] GUNNING R.C., ROSSI H. *Analytic functions of several complex variables.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[Ha/Po] HARVEY R., POLKING J. *Fundamental solutions in complex analysis. Part I and Part II* Duke Math.J. 46, 253-300 et 301-340, 1979.

[He] HENKIN G.M. *The method of integral representations in complex analysis.* Encyclopedia of Math. Sci., Several complex variables I, Springer-Verlag, 7, 19-116, 1990.

[He/Le 1] HENKIN G.M., LEITERER J. *Theory of functions on complex manifolds.* Akademie Verlag Berlin et Birkhäuser Verlag Boston, 1984.

[He/Le 2] HENKIN G.M., LEITERER J. *Androtti-Grauert Theory by Integral Formulas.* Akademie Verlag Berlin et Birkhäuser Verlag Boston, 1988.

[He/Ro] HENKIN G.M., ROMANOV A.V. *Exact Hölder estimates for the solutions of the $\bar\partial$-equation.* Izv. Akad. Nauk. SSSR 35, 1171-1183, 1971 ; English Translation : Math. USSR Izvestija 5, 1180-1192, 1971.

[Hi/Na] HILL C.D., NACINOVICH M. *Pseudoconcave CR-manifolds.* Complex analysis and geometry (V. Ancona, E. Ballico, A. Silva, eds.), Marcel Dekker, Inc., New York, 275-297, 1996 ; Preprint Dipartimentodi Matematica Università di Pisa, Février 1993.

[Hi/Na 2] HILL C.D., NACINOVICH M. *Aneurysms of pseudoconcave CR manifolds.* Math. Z. 220, 347-367, 1995.

[Ka/Sc] KASHIWARA M., SCHAPIRA P. *Sheaves on Manifolds.* Springer, Berlin, 1990.

[L-T 1] LAURENT-THIÉBAUT C. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables.* InterÉditions / CNRS Éditions, 1997.

[L-T 2] LAURENT-THIÉBAUT C. Polycopié de l'Ecole de printemps d'Analyse Complexe à Autrans, Mai 2001.

[L-T/Le 1] LAURENT-THIÉBAUT C., LEITERER J. *Uniform estimates for the Cauchy-Riemann Equation on q-convex wedges.* Ann. Inst. Fourier 43, No.2, 383-436, 1993.

[L-T/Le 2] LAURENT-THIÉBAUT C., LEITERER J. *Uniform estimates for the Cauchy-Riemann Equation on q-concave wedges.* Astérisque 217, 151-182, 1993.

[L-T/Le 3] LAURENT-THIÉBAUT C., LEITERER J. *The Andreotti-Vesentini separation theorem with $\mathcal{C}^k$ estimates and extension of CR-forms.* Several complex variables, Proc. Mittag-Leffler Inst., Stockholm/Swed, 1987-88 ou Math. Notes 38, 416-439, 1993.

[L-T/Le 4] LAURENT-THIÉBAUT C., LEITERER J. *Andreotti-Grauert Theory on Real Hypersurfaces.* Quaderni, Scuola Normale Superiore Pisa, 1995.

[L-T/Le 5] Laurent-Thiébaut C., Leiterer J. *Dolbeault Isomorphism for CR manifolds* Prépublication de l'Institut Fourier, 521, 1-19, 2000.

[Li] Lieb I. *Beschränkte Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf q-konkaven Gebieten.* Manuscripta Math., 26, 387-409, 1979.

[Li/Ra] Lieb I., Range M. *Lösungsoperatoren für den Cauchy-Riemann-Komplex mit $\mathcal{C}^k$-Abschätzungen.* Math. Ann. 253, 145-164, 1980.

[Ło] Łojasiewicz S. *Introduction to complex analytic geometry.* Birkhäuser Verlag Basel ; Boston ; Berlin, 1991.

[Mi] Michel J. *Randregularität des $\bar{\partial}$-Problems für stückweise streng pseudoconvexe Gebiete in $\mathbb{C}^n$.* Math. Ann. 280, 45-68, 1988.

[Mi/Pe] Michel J., Perroti A. *$\mathcal{C}^k$-Regularity for the $\bar{\partial}$-equation on Strictly Pseudoconvex Domains with Piecewise Smooth Boundaries.* Math. Z. 203, 415-427, 1990.

[Na] Nacinovich M. *Poincaré Lemma for Tangential Cauchy Riemann Complexes* Math. Ann. 268, 449-471, 1984.

[Ra] Range R.M. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.* Springer, New-York, Berlin,Heildelberg, Tokyo, 1986.

[Ra/Si] Range R.M., Siu Y.T. *Uniform estimates for the Cauchy-Riemann equation on q-convex wedges.* Math. Ann. 206, 325-354, 1973.

[Se] Seeley R. T. *Extension of $\mathcal{C}^\infty$ functions defined in a half space.* Proc. A.M.S. 15, 625-626, 1964.

[Sp] Spanier E. H. *Algebraic topology.* Springer, New-York, Heidelberg, Berlin, 1981.

[To] Tougeron J. C. *Idéaux de fonctions différentiables.* Springer, Berlin, 1972.

[Tr] Treves F. *Homotopy formulas in the tangential Cauchy-Riemann complex.* Mem. Am. Math. Soc. 434, 1990.

[We] Wells R.O. *Differential Analysis on Complex Manifolds.* Springer, Berlin, 1980.