

# PROPRIÉTÉS DE CONCAVITÉ DU PROFIL ISOPÉRIMÉTRIQUE ET APPLICATIONS

BAYLE Vincent

14 janvier 2004

## Remerciements

Je remercie Gérard Besson d'avoir accepté de diriger cette thèse. Il m'a laissé une grande liberté d'investigation et j'apprécie son point de vue global sur la géométrie différentielle. Je remercie aussi Pierre Bérard, Gérard Besson et Sylvestre Gallot qui m'ont proposé de prouver puis d'exploiter un résultat qu'ils avaient conjecturé plusieurs années auparavant. Je souhaite également saluer le courage de Dominique Bakry et d'Antonio Ros qui ont accepté de rapporter sur ce travail. Je remercie Thierry Coulhon, Sylvestre Gallot et Hervé Pajot qui me font l'honneur de participer au jury.

Un grand merci aux chercheurs de l'Institut Fourier pour leur disponibilité, à Arlette pour sa bienveillance, ainsi qu'à tout le personnel de l'Institut Fourier pour sa diligence et son efficacité. Un merci plus particulier à tous les thésards de l'Institut Fourier, d'hier et d'aujourd'hui, plus spécialement à Vidian, qui a relu et judicieusement commenté des versions préliminaires de ce travail, à Constantin, Erwann et Alice qui furent mes collègues de bureau. Je tiens aussi à remercier Laurence et toute ma famille, qui m'ont si souvent encouragé tout au long de l'élaboration et de la rédaction de cette thèse.

Je garde un excellent souvenir des membres du département de Topologie et Géométrie de Grenade (Espagne), au sein duquel j'ai eu la chance et le plaisir de travailler durant deux semaines. Au cours de ce séjour, j'ai eu l'occasion de rencontrer Frank Morgan, Antonio Ros, Manuel Ritoré et César Rosales au contact desquels j'ai beaucoup appris et dont les questions et suggestions ont orienté la fin de ce travail. Plus précisément, Antonio Ros a attiré mon attention sur l'éventualité d'une généralisation des résultats du chapitre 2 au cadre plus vaste d'une mesure non riemannienne décrit dans le chapitre 3. Frank Morgan m'a permis, quant à lui, de mener à bien cette étude en m'assurant de la validité du résultat d'existence et de régularité (voir [M1]) des hypersurfaces minimisantes pour ces densités plus générales. C'est également à la suite de ce voyage que, sous l'impulsion de Manuel Ritoré, César Rosales et moi-même avons entrepris la rédaction de l'article qui figure dans l'annexe G.

Je tiens également à saluer la disponibilité de Laurent Bessières dont les explications des idées et techniques développées par J. Cheeger et T. H. Colding dans [ChC1] ont été déterminantes dans le résultat de continuité du profil isopérimétrique établi au chapitre 4. Je remercie aussi Sylvestre Gallot, Gilles Carron, Nader Yeganefar et Gilles Courtois avec lesquels j'ai régulièrement discuté durant ces années de doctorat, ainsi que toutes les personnes qui m'ont accordé du temps et de l'intérêt au cours des conférences, colloques, groupes de travail et séminaires auxquels j'ai participé. Je souhaite enfin remercier le C.I.E.S. pour la pertinence des stages proposés, en particulier ceux, animés par Hervé Raynaud, concernant "l'aspect émotionnel de la vie d'enseignant-chercheur", et l'atelier Zététique dont j'ai fait partie au cours de ma dernière année de thèse.

Mes derniers remerciements vont aux nombreux partenaires de la partie de football hebdomadaire du mercredi midi ainsi qu'à mes coéquipiers de l'équipe d'Herbeys. Ils m'ont, grâce au sport, régulièrement permis d'oublier mes préoccupations mathématiques et d'évacuer la tension qu'elles suscitent. Dans le même registre, merci Vidian pour toutes ces soirées passées à regarder les matchs de Ligue des Champions.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>La fonction profil isopérimétrique</b>	<b>17</b>
1.1	définitions . . . . .	17
1.1.1	Profil isopérimétrique des variétés riemanniennes fermées . . . . .	18
1.1.2	Profil isopérimétrique des variétés riemanniennes non compactes de volume infini . . . . .	20
1.2	Propriétés élémentaires des profils isopérimétriques . . . . .	20
1.2.1	Homogénéité . . . . .	20
1.2.2	Symétrie . . . . .	22
1.3	Exemples de profils isopérimétriques connus . . . . .	22
1.3.1	variétés compactes . . . . .	22
1.3.2	variétés non compactes . . . . .	22
1.4	Les constantes isopérimétriques . . . . .	26
1.4.1	définition . . . . .	26
1.4.2	Liens avec la fonction profil isopérimétrique . . . . .	27
1.4.3	Tableau de valeurs et exemples . . . . .	28
1.4.4	Minoration des constantes isopérimétriques . . . . .	28
1.5	Propriétés locales du profil . . . . .	29
1.5.1	Régularité . . . . .	29
1.5.2	Equivalent au voisinage de 0 . . . . .	29
1.6	Discussion sur différentes notions de volume de bord . . . . .	32
1.7	Conséquences géométriques et analytiques d'une estimation du profil isopérimétrique . . . . .	33
1.7.1	Intégration d'une inégalité isopérimétrique et applications . . . . .	34
1.7.2	Comparaisons analytiques et géométriques issues d'une comparaison isopérimétrique . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Concavité du profil isopérimétrique</b>	<b>41</b>
2.1	Technique variationnelle et relations différentielles . . . . .	42
2.1.1	Formules de variations . . . . .	42
2.1.2	Approche variationnelle des inéquations différentielles possibles . . . . .	44
2.2	Une famille d'inéquations différentielles pour la fonction profil isopérimétrique . . . . .	45
2.2.1	Enoncé des résultats . . . . .	45
2.2.2	Preuves des théorèmes 2.2.1 et 2.2.3 . . . . .	48
2.2.3	Quid d'une généralisation de l'inéquation différentielle pour les variétés non compactes? . . . . .	51
2.3	Conséquences de l'inéquation différentielle . . . . .	53
2.3.1	Régularité du profil isopérimétrique . . . . .	53
2.3.2	Contrôle géométrique des domaines isopérimétriques . . . . .	56

2.3.3	Contrôle topologique des domaines isopérimétriques . . . . .	59
2.4	Intégration de l'inéquation différentielle et comparaisons . . . . .	62
2.4.1	Profils modèles . . . . .	62
2.4.2	L'inégalité de Lévy-Gromov . . . . .	68
2.4.3	Théorèmes de comparaison en dimension 2 . . . . .	71
2.4.4	Théorèmes de comparaison en dimension $n \geq 3$ . . . . .	75
2.4.5	Cas particulier des quotients compacts d'espaces modèles $\mathbb{M}_\delta^n$ . . . . .	83
2.5	Application à la minoration du $\lambda_1$ . . . . .	84
2.5.1	Cas des surfaces riemanniennes . . . . .	84
2.5.2	Cas des variétés de dimension $n \geq 3$ . . . . .	85
2.6	Applications à la convergence des profils . . . . .	86
2.6.1	Relation diamètre/profil isopérimétrique . . . . .	87
2.6.2	Relations volume/profil isopérimétrique . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Problèmes isopérimétriques sur les mm-espaces</b>	<b>95</b>
3.1	Généralisation des problèmes isopérimétriques . . . . .	97
3.1.1	Choix d'une notion de volume de bord . . . . .	97
3.1.2	Profil isopérimétrique des mm-espaces . . . . .	97
3.1.3	Exemples et mm-espaces modèles . . . . .	98
3.2	Apports de l'isopérimétrie sur les mm-espaces . . . . .	102
3.2.1	Interprétation de la minoration du trou spectral: $\lambda_1 \geq \frac{h_C(M,g)^2}{4}$ . . . . .	102
3.2.2	Profil isopérimétrique d'un produit de mm-espaces . . . . .	103
3.2.3	Etude du profil d'un produit infini de sphères identiques . . . . .	110
3.3	Symétrisation des produits tordus . . . . .	115
3.4	Concavité du profil des variétés à densité . . . . .	115
3.4.1	Notations . . . . .	115
3.4.2	Le problème isopérimétrique généralisé . . . . .	116
3.4.3	Premières estimations du profil isopérimétrique . . . . .	117
3.4.4	Comportement asymptotique pour les petits volumes . . . . .	119
3.4.5	Régularité a priori . . . . .	121
3.4.6	Propriétés différentielles de concavité . . . . .	121
3.4.7	Extension de l'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov et conséquences . . . . .	129
<b>4</b>	<b>Continuité du profil isopérimétrique vis-à-vis de la distance de Gromov-Hausdorff</b>	<b>133</b>
4.1	Etude de l'adhérence de $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ pour la distance de Gromov-Hausdorff	136
4.1.1	Définition du cadre. Notations . . . . .	136
4.1.2	Construction d'une mesure limite sur $M_\infty$ . . . . .	136
4.1.3	Identification de cette mesure . . . . .	141
4.1.4	Description des deux résultats essentiels . . . . .	145
4.2	Convergence du profil isopérimétrique . . . . .	150
4.2.1	Préliminaires techniques sur les profils des variétés de $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$	150
4.2.2	Résultats de continuité du profil isopérimétrique . . . . .	155
4.2.3	Convergence uniforme en rapport sur les compacts de $]0,1[$ . . . . .	155
4.2.4	Convergence uniforme en rapport sur $]0,1[$ . . . . .	159
4.3	Approche fonctionnelle de la convergence des fonctions profils isopérimétriques . . . . .	160

<b>A</b>	<b>Capacité d'un ensemble de grande codimension de Hausdorff</b>	<b>169</b>
A.1	Démonstration de la proposition A.0.5 . . . . .	171
A.1.1	Lemmes préparatoires . . . . .	171
A.1.2	Preuve de la proposition A.0.5 . . . . .	171
A.2	Preuve du lemme A.1.1 . . . . .	174
A.3	Démonstration du lemme A.1.2 . . . . .	175
<b>B</b>	<b>Fonctions concaves</b>	<b>179</b>
B.1	Définition et propriétés élémentaires liées à la concavité . . . . .	179
B.2	La concavité d'un point de vue différentiel . . . . .	181
B.3	La concavité : une hypothèse intéressante . . . . .	181
B.3.1	Régularité des solutions d'une inéquation différentielle . . . . .	181
B.3.2	Contrôle des variations d'une fonction concave . . . . .	183
B.3.3	Convergence en rapport à partir d'une convergence uniforme . . . . .	184
B.3.4	Une convergence $L^\infty$ à partir d'une convergence $L^1$ . . . . .	187
B.3.5	Passage à la limite dans une inéquation différentielle . . . . .	190
<b>C</b>	<b>Intégration d'inéquations différentielles</b>	<b>193</b>
C.1	Inéquations du premier ordre . . . . .	193
C.2	Inéquations différentielles du second ordre: $\overline{D^2}y \leq g(y)$ . . . . .	195
C.2.1	Cas où $g$ est croissante . . . . .	195
C.2.2	Cas où $g$ est décroissante . . . . .	200
<b>D</b>	<b>Lemmes de recouvrements</b>	<b>209</b>
D.1	Enoncés des lemmes de recouvrement . . . . .	209
D.1.1	Recouvrement et remplissage par des boules centrées dans un voisinage tubulaire de l'ensemble considéré . . . . .	209
D.1.2	Remplissage d'un compact par des boules centrées sur ce compact . . . . .	211
D.2	Lemmes préparatoires . . . . .	212
D.3	Preuve de la proposition D.1.2 et du lemme D.1.1 . . . . .	216
D.3.1	Preuve de la proposition D.1.2 . . . . .	216
D.3.2	Preuve du lemme D.1.1 . . . . .	223
D.4	Preuves de la proposition D.1.5 et du lemme D.1.4 . . . . .	224
D.4.1	Preuve de la proposition D.1.5 . . . . .	224
D.4.2	Preuve du lemme D.1.4 . . . . .	229
<b>E</b>	<b>Théorèmes de comparaison sous une hypothèse de courbure-dimension</b>	<b>231</b>
E.1	Propriétés différentielles de la densité non riemannienne le long d'une géodésique . . . . .	231
E.2	Extension des théorèmes de comparaison de Myers, de Bishop-Gromov et Heintze-Karcher . . . . .	233
E.2.1	Théorème de Bishop généralisé . . . . .	233
E.2.2	Inégalité de Heintze-Karcher généralisée . . . . .	234
E.3	Conséquences de ces généralisations . . . . .	234
E.3.1	Majoration des valeurs propres de l'opérateur à poids associé . . . . .	235
E.3.2	Minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger et généralisation de l'inégalité de Lévy-Gromov . . . . .	235
E.3.3	Majoration du $\lambda_1(M, g, \psi)$ en fonction de la constante isopérimétrique de Cheeger . . . . .	236

<b>F</b>	<b>Symmetrization of Warped Products</b>	<b>237</b>
<b>G</b>	<b>Isoperimetric comparison theorems for convex bodies</b>	<b>241</b>
G.1	Introduction . . . . .	241
G.2	Preliminaries . . . . .	243
G.2.1	The isoperimetric profile . . . . .	243
G.2.2	Isoperimetric regions: existence and regularity . . . . .	245
G.2.3	An analytic comparison result . . . . .	245
G.2.4	Convex domains in Riemannian manifolds . . . . .	246
G.3	The differential inequality . . . . .	247
G.4	Comparison theorems . . . . .	252
G.4.1	Upper bounds on the isoperimetric profile . . . . .	253
G.4.2	A Lévy-Gromov type inequality for convex bodies . . . . .	254
G.4.3	Some consequences of Theorem G.4.8 . . . . .	256
G.5	Appendix: an alternative proof of inequality (G.16) in the euclidean case	258

## Notations

Dans ce mémoire, nous appelons *variété riemannienne fermée*  $(M, g)$  une variété riemannienne de classe  $C^\infty$ , complète, compacte et sans bord dont  $d\nu_g$  représente la mesure riemannienne canonique. De plus, nous adoptons les conventions de notations précisées et explicitées ci-dessous.

- $\alpha_n$  désigne, pour tout  $n \geq 0$ , le volume riemannien de la sphère unité de l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_2)$  munie de la métrique canonique induite par l'espace ambiant. Cette suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation de récurrence suivante,  $\alpha_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

$\omega_n$  représente, pour tout  $n \geq 1$ , le volume de la boule unité euclidienne et est reliée à  $\alpha_n$  par la formule :

$$\omega_{n+1} = \frac{\alpha_n}{n+1}.$$

Notons par ailleurs  $\gamma_n$  la quantité

$$\gamma_n := \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_n^n} = n^{\frac{n-1}{n}} \alpha_{n-1}^{\frac{1}{n}}$$

qui représente *la constante isopérimétrique euclidienne* (voir le paragraphe 1.1.2 pour une définition et l'inégalité (2) pour une utilisation).

- $\mathbb{M}_\delta^n$  désigne l'espace simplement connexe de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) et de courbure sectionnelle constante  $\delta$  ( $\delta \in \mathbb{R}$ ). Pour les valeurs particulières de  $\delta$  que sont 0, 1 et  $-1$ , nous notons  $(\mathbb{R}^n, \text{can})$ ,  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$  et  $(\mathbb{H}^n, \text{can})$  l'espace modèle  $\mathbb{M}_\delta^n$  correspondant.

Considérons l'équation différentielle :  $y'' + \delta y = 0$  où  $\delta$  est un réel quelconque. Nous notons  $c_\delta$  (resp.  $s_\delta$ ) la solution de cette équation avec comme conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$  (resp.  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ ). Nous disposons des expressions explicites suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad c_\delta(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\delta}t) & \text{si } \delta > 0, \\ 1 & \text{si } \delta = 0, \\ \cosh(\sqrt{-\delta}t) & \text{si } \delta < 0, \end{cases}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad s_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sin(\sqrt{\delta}t) & \text{si } \delta > 0, \\ t & \text{si } \delta = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\delta}} \sinh(\sqrt{-\delta}t) & \text{si } \delta < 0. \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont reliées par l'égalité :

$$c_\delta(u)^2 + \delta s_\delta(u)^2 = 1.$$

De plus, notons  $I_\delta$  l'intervalle ouvert maximal d'extrémité gauche 0 sur lequel la fonction  $s_\delta$  est strictement positive :

$$I_\delta = \begin{cases} ]0, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}[ & \text{si } \delta > 0, \\ ]0, +\infty[ & \text{si } \delta \leq 0. \end{cases}$$

Pour tout  $r \in I_\delta$ , notons  $\cot_\delta$  le rapport

$$\cot_\delta(r) := \frac{c_\delta(r)}{s_\delta(r)}$$

et  $V_{n,\delta}(r)$  le volume riemannien des boules géodésiques de rayon  $r$  dans  $\mathbb{M}_\delta^n$ ,

$$V_{n,\delta}(r) = \alpha_{n-1} \int_0^r s_\delta(u)^{n-1} du.$$

Remarquons que le volume riemannien  $(n-1)$ -dimensionnel du bord de cette boule géodésique est égal à la dérivée  $V'_{n,\delta}(r)$  de son volume par rapport au rayon  $r$  (voir le paragraphe 1.6 pour une explication).

– L'hypothèse notée

$$\text{Ricci} - \text{Hess}\psi - cd\psi \otimes d\psi \geq (n-1)\delta g \quad , \quad (c,\delta,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*,$$

concernant une variété riemannienne  $(M,g)$  et une fonction  $\psi \in C^2(M,\mathbb{R})$ , est utilisée pour signifier qu'en tout point  $m$  de  $M$ , la forme quadratique

$$\text{Ricci}_m(\cdot,\cdot) - \text{Hess}_m\psi(\cdot,\cdot) - cd_m\psi(\cdot)^2 - (n-1)\delta g_m(\cdot,\cdot)$$

est positive sur l'espace tangent  $T_mM$ , où Ricci représente la courbure de Ricci de  $(M,g)$ , Hess $\psi$  et  $d\psi$  désignent respectivement le hessien riemannien et la différentielle de la fonction  $\psi$ .

– Pour  $n \geq 2$ ,  $d > 0$ ,  $v > 0$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ , notons  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  l'ensemble des variétés riemanniennes fermées  $(M,g)$  de dimension  $n$  telles que

$$\text{diam}(M,g) \leq d \quad , \quad \text{vol}(M,g) \geq v \quad \text{et} \quad \text{Ricci}_{(M,g)} \geq (n-1)\delta g.$$

– La notation

$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p | A_1, \dots, A_q)$$

signale que  $f$  est une fonction dépendant des  $p+q$  variables  $(\varepsilon_i)_{i=1,\dots,p}$ ,  $(A_i)_{i=1,\dots,q}$ , telle que, pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$\lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p | A_1, \dots, A_q) = 0$$

lorsque les  $p+q-1$  autres variables sont fixées.

– Pour toute partie  $A$  d'un espace métrique  $(E,d)$  et pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , la notation  $A_\varepsilon$  désigne le  $\varepsilon$ -voisinage tubulaire fermé de  $A$ :

$$A_\varepsilon := \left\{ m \in E \mid d(m,A) \leq \varepsilon \right\}.$$

En particulier,  $A_0$  coïncide avec l'adhérence de  $A$ .



# Introduction

Le problème isopérimétrique classique dans le plan euclidien consiste à déterminer la ou les courbes fermées simples rectifiables de longueur fixée qui délimitent une aire intérieure maximale. Les cercles dont la circonférence est égale à la longueur imposée sont les solutions de ce problème. Une façon duale et équivalente d'envisager cette question revient à chercher, parmi tous les domaines à bord régulier d'aire fixée, celui ou ceux dont le périmètre est minimal. D'après ce qui précède, les disques dont la superficie a la valeur imposée sont les solutions de ce problème. Dans la suite, nous considérons *les problèmes isopérimétriques* de ce second point de vue : sur une variété riemannienne  $(M,g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), nous fixons une quantité de volume  $V$  et nous cherchons, parmi les ouverts relativement compacts  $\Omega$  à bord régulier, de volume  $n$ -dimensionnel  $\text{vol}_n(\Omega)$  égal à  $V$ , à minimiser le volume  $(n-1)$ -dimensionnel  $\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)$  du bord de ces domaines. Ainsi, afin de refléter les propriétés isopérimétriques de la variété riemannienne fermée  $(M,g)$ , nous définissons la fonction  $h_{(M,g)} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , appelée *profil isopérimétrique*, pour tout  $\beta$  dans  $[0,1]$ , par

$$h_{(M,g)}(\beta) := \inf \left\{ \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol}(M,g)} \mid \Omega \text{ ouvert à bord } C^\infty \text{ tel que } \text{vol}_n(\Omega) = \beta \text{vol}(M,g) \right\}. \quad (1)$$

Tout domaine réalisant l'infimum dans ce problème de minimisation sous contrainte est appelé *domaine isopérimétrique*. A ce problème isopérimétrique sont associées des *inégalités isopérimétriques*, qui donnent une minoration du volume  $(n-1)$ -dimensionnel du bord d'un domaine en fonction de son volume intérieur. Un premier exemple se déduit directement de la définition (1) : pour tout ouvert  $\Omega$  à bord  $C^\infty$ ,

$$\frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol}(M,g)} \geq h_{(M,g)} \left( \frac{\text{vol}_n(\Omega)}{\text{vol}(M,g)} \right).$$

Remarquons en particulier que toute minoration explicite du profil conduit à une inégalité isopérimétrique explicite. Un exemple plus connu est fourni par *l'inégalité isopérimétrique euclidienne classique* qui donne : pour tout ouvert relativement compact  $\Omega$  à bord régulier,

$$\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega) \geq \gamma_n (\text{vol}_n(\Omega))^{\frac{n-1}{n}}, \quad (2)$$

où  $\gamma_n$  représente la *constante isopérimétrique euclidienne* et se calcule en utilisant le fait que les boules euclidiennes sont des domaines isopérimétriques. Les inégalités isopérimétriques peuvent faire intervenir d'autres quantités géométriques associées aux domaines, telles que leur diamètre, leur rayon intérieur... Par exemple, les inégalités isopérimétriques de Bonnesen dans  $(\mathbb{R}^2, \text{can})$  font intervenir, en plus de l'aire et du périmètre des domaines, le rayon du plus grand disque inscriptible dans le domaine et celui du plus petit disque contenant le domaine (voir [O] et [BZ]).

“Les développements modernes de l’utilisation des inégalités isopérimétriques en analyse et probabilités<sup>1</sup> trouvent leur origine en théorie locale des espaces de Banach, avec la démonstration donnée par V. D. Milman dans [Mi0] (voir aussi [FLM]), au début des années soixante-dix, du fameux théorème de A. Dvoretzky (voir [Dv]) sur les sections presque sphériques des corps convexes. Cette démonstration s’appuie en effet sur l’inégalité isopérimétrique sur les sphères, due à P. Lévy (voir [L]) et E. Schmidt (voir [Sc]).” En fait, P. Lévy démontrait<sup>2</sup> dès 1919, pour les *hypersurfaces convexes fermées*  $M$  de  $(\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_2)$  dont les rayons de courbure sont majorés par 1, la comparaison isopérimétrique suivante, généralisée par M. Gromov en 1980 au cadre des *variétés riemanniennes*  $(M, g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) satisfaisant l’hypothèse de courbure  $\text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)g(\cdot, \cdot)$ ,

$$h_{(M, g)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}. \quad (3)$$

La preuve de ce résultat, que nous appellerons *inégalité de Lévy-Gromov*, est proposée dans [Gr1] et reprend des idées introduites puis développées par les spécialistes de la théorie géométrique de la mesure comme J. Almgren, E. Bombieri, R. Schoen, L. Simon, F. Morgan (voir [Alm], [SS], [M1])..., à savoir l’existence, obtenue à partir d’un théorème de compacité sur les courants, de domaines isopérimétriques dont le bord, de courbure moyenne constante, est “suffisamment” régulier. Cette inégalité et la démonstration qu’en a donnée M. Gromov dans [Gr1], ont joué un rôle essentiel au carrefour de la géométrie riemannienne (voir [BBG]) et euclidienne, de la théorie locale des espaces de Banach (voir [Mi]), de l’analyse et des probabilités (voir [LT]). En effet, l’inégalité de Lévy-Gromov contient les solutions des problèmes isopérimétriques dans les espaces euclidiens (dans son application aux ensembles de petits volumes) et gaussiens (par passage à la limite sur la dimension et projection sur un sous-espace fixé). De plus, l’intégration de cette inégalité isopérimétrique met en évidence le *principe de concentration de la mesure*, phénomène observé sur les sphères euclidiennes par E. Borel dans [Br]<sup>3</sup>, puis dégagé dans toute sa généralité par V. D. Milman (voir [Mi] et [Led1]). Cette observation a ouvert la voie au développement et à l’extension des idées isopérimétriques au-delà de leur cadre géométrique habituel. Ceci a pour conséquence de permettre l’émergence de points de vue et de techniques nouvelles pour obtenir des résultats de nature isopérimétrique. Par exemple, la recherche d’inégalités fonctionnelles est privilégiée en théorie des probabilités (voir [S], [BH1] et [Ba2]) tandis qu’en géométrie riemannienne, les méthodes les plus courantes sont géométriques et variationnelles. L’approche proposée dans cette thèse consiste à obtenir, à partir d’une hypothèse de courbure, des informations locales concernant les propriétés différentielles du profil isopérimétrique. Nous en déduisons alors des propriétés globales sur le profil, comme sa concavité en courbure positive ou nulle, des théorèmes de comparaison et des estimations d’invariants riemanniens. L’intérêt de cette recherche d’informations analytiques sur le profil et géométriques sur les domaines isopérimétriques, réside dans le peu de renseignements dont nous disposons, a priori, concernant le profil isopérimétrique d’une variété quelconque.

Donnons maintenant l’organisation des idées et le plan de ce travail qui se divise en quatre chapitres et sept annexes. Certes nous sommes conscients de la longueur du texte mais elle ne devrait pas constituer un obstacle à la lecture et à la compréhension. En effet, afin de pouvoir, au coeur du texte, multiplier les commentaires géométriques et faire

1. Nous reprenons ici une partie de l’introduction de l’article [Led] écrit par M. Ledoux.

2. Se reporter pour cela à la page 280 de [L].

3. P. Lévy précise, à la page 216 de [L], que E. Borel a remarqué la “*concentration près de l’équateur du volume de la sphère*” dans [Br]. P. Lévy s’intéresse quant à lui, essentiellement à la concentration, autour de sa valeur moyenne, d’une fonction définie sur une hypersurface strictement convexe.

ressortir les schémas de preuves, nous avons reporté dans les annexes, qui représentent presque la moitié de cette thèse, de nombreux résultats techniques. Par ailleurs, le choix délibéré d’une rédaction précise et détaillée, lors de l’écriture de ce document, répond essentiellement à la volonté de justifier intégralement les énoncés proposés et de clarifier certains aspects trop succinctement évoqués dans la littérature.

Le premier chapitre est consacré à la définition et à la description de l’outil analytique que nous avons choisi pour formaliser le problème isopérimétrique, en l’occurrence, la *fonction profil isopérimétrique*  $h_{(M,g)}$  associée à une variété riemannienne  $(M,g)$ . Nous en profitons pour répertorier les quelques variétés dont le profil est connu. Nous explicitons les fonctions correspondantes qui illustrent à la fois le rappel des propriétés élémentaires du profil isopérimétrique et une étude approfondie du comportement du profil au voisinage de 0. De plus, nous relierons le profil à la *constante isopérimétrique* et à la *constante isopérimétrique de Cheeger*, deux quantités plus fréquemment utilisées que la fonction  $h_{(M,g)}$ , dont nous rappelons les définitions géométriques et les interprétations analytiques en terme d’inégalités de Sobolev. Afin de motiver l’étude du profil isopérimétrique, nous proposons d’illustrer les conséquences d’une minoration du profil. Nous insistons sur la distinction entre les théorèmes de comparaison, qui permettent de situer un invariant riemannien par rapport à sa valeur sur un *espace modèle*, et les résultats quantitatifs qui consistent à estimer un invariant riemannien sans pouvoir interpréter géométriquement le majorant ou le minorant obtenu comme l’invariant correspondant sur une variété modèle. Nous en profitons pour détailler la technique d’intégration d’une inégalité isopérimétrique dont nous déduisons, comme applications d’une minoration du profil, une majoration du diamètre et une minoration du volume des boules. En particulier, nous observons qu’en substituant l’hypothèse isopérimétrique  $h_{(M,g)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, can)}$  à l’hypothèse de courbure Ricci $_{(M,g)} \geq (n-1)g$ , ce qui représente un affaiblissement de la condition de courbure d’après le résultat (3) de Lévy-Gromov, la précompacité des ensembles  $\mathcal{M}(n,d,v,1)$  se généralise. De plus, de nombreux théorèmes de comparaison tels que la minoration du  $\lambda_1$  (théorème de Lichnerowicz), la majoration du diamètre (théorème de Myers) et celle du volume restent valides sous cette hypothèse.

Le second chapitre expose les idées, les techniques et les résultats centraux de cette thèse, qui ont suggéré et orienté les travaux exposés dans les chapitres 3 et 4. De nombreuses études du profil isopérimétrique d’une variété riemannienne fermée ont déjà été menées, citons en particulier les articles [BP], [BBG], [G1], [MJ], [BC] et [P1]. Toutefois, l’originalité du point de vue adopté ici réside dans le choix de présenter l’étude du profil isopérimétrique à partir de ses propriétés différentielles de concavité. En effet, leur exploitation permet d’accéder à de très nombreux résultats de nature analytique, géométrique et topologique, parmi lesquels nous retrouvons et précisons la plupart de ceux établis antérieurement. Ainsi, cette approche confère une certaine unité à la description, que nous avons voulue aussi complète que possible, des propriétés du profil et des domaines isopérimétriques.

En reprenant l’argument issu de la théorie géométrique de la mesure et utilisé par M. Gromov dans [Gr1], à savoir l’existence de domaines  $\Omega_\beta$  de volume relatif  $\beta$  réalisant l’infimum dans la définition (1), nous cherchons à caractériser la propriété de minimisation de  $\partial\Omega_\beta$  en appliquant les techniques du calcul variationnel pour des déformations parallèles à  $\partial\Omega_\beta$ . En dépit d’éventuelles singularités de  $\partial\Omega_\beta$ , leur grande codimension de Hausdorff permet de construire des variations “presque” parallèles à support dans la partie régulière de l’hypersurface minimisante  $\partial\Omega_\beta$  qui induisent dans les formules des variations premières et secondes des aires et des volumes des perturbations arbitrairement faibles. A partir de cet argument technique, détaillé dans l’annexe A et également

résolu par d'autres auteurs (voir [SZ] et [MR]), nous démontrons que le *profil renormalisé*  $y_{(M,g)} := h_{(M,g)}^{\frac{n}{n-1}}$  d'une variété fermée  $(M,g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) vérifie l'inéquation différentielle fondamentale suivante au sens des distributions :

$$y'' \leq -n\delta y^{\frac{2-n}{n}} \quad (4)$$

où  $(n-1)\delta$  est un minorant de la courbure de Ricci sur le fibré unitaire tangent. Cette caractérisation différentielle, conjecturée par P. Bérard, G. Besson et S. Gallot, pour laquelle les sphères euclidiennes réalisent des cas d'égalité, impose sur le profil isopérimétrique suffisamment de régularité pour donner un sens à une famille d'inéquations différentielles satisfaites par les puissances du profil comprises entre 1 et  $\frac{n}{n-1}$ , et parmi lesquelles (4) apparaît comme un cas particulier. Ces propriétés différentielles montrent que le profil possède la régularité d'une fonction concave. Par ailleurs, la courbure moyenne des domaines isopérimétriques coïncide avec la dérivée du profil en les points où il est dérivable, ce qui nous donne un moyen d'interpréter géométriquement des propriétés analytiques et vice versa. Nous déduisons en effet de cette relation entre l'analyse et la géométrie une estimation de la courbure moyenne et du diamètre des domaines isopérimétriques, à partir de résultats concernant la régularité du profil isopérimétrique. De plus, ces estimations d'une part et les techniques variationnelles d'autre part, permettent de contrôler la connexité des domaines isopérimétriques et de leur bord.

L'intégration de l'inéquation différentielle (4) repose sur des lemmes techniques détaillés dans les annexes B et C. Elle permet tout d'abord de donner une nouvelle preuve, de nature variationnelle, de l'inégalité de Lévy-Gromov. Nous affinons ensuite les estimations du profil, obtenues par comparaison avec des solutions exactes de l'équation différentielle associée à (4), en introduisant deux paramètres analytiques qui s'interprètent géométriquement : le volume de la variété, contenu dans la dérivée à droite en 0 du profil renormalisé, et la constante isopérimétrique de Cheeger, reliée à un minorant de la valeur du profil en  $\frac{1}{2}$ . Ainsi, le pincement du profil isopérimétrique qui en découle est directement issu de théorèmes de comparaisons entre solutions de l'inéquation différentielle en fonction de leurs conditions initiales et de leurs conditions de bord. Cet encadrement du profil suggère alors l'étude, sous hypothèse de courbure, des relations entre la maximalité du volume, la minimalité du profil, la minimalité de la constante isopérimétrique de Cheeger, et la maximalité du diamètre. En particulier, pour les variétés riemanniennes fermées satisfaisant  $\text{Ricci}_{(M,g)} \geq (n-1)g$ , nous montrons que la presque maximalité du volume est équivalente à la presque minimalité du rapport  $h_{(M,g)}/h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}$  (proche de 1) tandis que la presque maximalité du diamètre est équivalente à la presque minimalité de la différence  $h_{(M,g)} - h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}$  (proche de 0).

Le chapitre 3 propose de prendre de la hauteur vis-à-vis des problèmes isopérimétriques. En effet, après avoir remarqué que l'isopérimétrie peut être envisagée à partir de deux notions fondamentales, à savoir une mesure et une distance, nous proposons de généraliser les considérations isopérimétriques au cadre bien plus vaste des espaces métriques mesurés munis d'une mesure borélienne de probabilité, c'est-à-dire aux *mm-espaces*. Nous pouvons ainsi étudier l'aspect isopérimétrique des espaces sur lesquels la distance et la mesure n'ont pas une origine riemannienne commune. Ce contexte a tout d'abord été envisagé du point de vue des inégalités fonctionnelles et les premiers résultats ont été obtenus par des techniques analytiques (voir [BH1], [BH2], [Ba1], [BaMa], [Ba2]) avant que A. Ros ne parvienne à proposer dans [Ro] des interprétations géométriques pour certains d'entre eux. L'intérêt essentiel de cette généralisation réside dans les nouveaux outils de comparaison qu'elle met à la disposition de l'étude des propriétés isopérimétriques des variétés riemanniennes fermées. En effet, les profils iso-

périmétriques des mesures définies sur les boréliens de  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est symétrique et log-concave, sont connus explicitement, ce qui accroît considérablement le nombre d'*espaces modèles* dans l'optique de nouvelles comparaisons isopérimétriques. Cette observation permet en particulier de fournir une preuve simple et rapide de la minoration "classique" du trou spectral en fonction de la constante isopérimétrique de Cheeger,  $\lambda_1 \geq h_C^2/4$  (voir [C]), à partir d'une comparaison isopérimétrique avec le "bon" espace modèle. De plus, le cadre des mm-espaces inclut la mesure gaussienne qui, caractérisée parmi les autres mesures de probabilité sur  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  par sa stabilité par produit<sup>4</sup> (voir [BH1]), se révèle un outil particulièrement performant lors de l'étude du profil isopérimétrique des produits de variétés. Elle permet par exemple de calculer les constantes de Cheeger de tous les produits finis de sphères euclidiennes.

Enfin, nous considérons plus spécifiquement les mm-espaces, notés  $(M, g, \psi)$ , obtenus en choisissant, sur une variété riemannienne fermée  $(M, g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), la distance induite par la métrique riemannienne et une mesure ayant une densité régulière  $\Psi = \exp(\psi)$  par rapport à la mesure riemannienne canonique. Nous cherchons alors à comprendre quelles hypothèses mêlant la métrique et la mesure permettent de généraliser les propriétés différentielles de concavité du profil établies au chapitre 2. Nous observons en particulier le rôle crucial joué par la forme quadratique

$$\text{Ricci}_{(M, g)}^q(\cdot, \cdot) := \text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) - \text{Hess}\psi(\cdot, \cdot) - \frac{1}{q} d\psi \otimes d\psi(\cdot, \cdot) \quad , \quad q > 0,$$

qui oppose les dérivées premières et secondes de la métrique riemannienne à celles du logarithme  $\psi$  de la densité non riemannienne  $\Psi$ . Cette quantité qui, d'un point de vue technique et formel remplace la courbure de Ricci, porte le nom de *tenseur de Bakry-Emery*. En effet, en étudiant les générateurs de diffusion de Markov sur un espace de probabilité (voir [Bak] et [BE]), ces deux auteurs ont observé que ce tenseur apparaît comme "la généralisation naturelle" de la courbure de Ricci dans ce contexte, par extrapolation de l'exemple du Laplacien sur une variété compacte. Une borne inférieure sur ce tenseur,

$$\text{Ricci}_{(M, g)}^q(\cdot, \cdot) \geq rg(\cdot, \cdot) \quad , \quad (q, r) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},$$

appelée *hypothèse de courbure-dimension*  $C(r, n + q)$ <sup>5</sup> permet de généraliser l'hypothèse de courbure récurrente du chapitre 2, en l'occurrence une minoration de la courbure de Ricci. Ainsi, sous l'hypothèse de courbure-dimension  $C(r, n + q)$ , nous établissons que le profil isopérimétrique renormalisé  $y_{(M, g, \psi)} = h_{(M, g, \psi)}^{\frac{n+q}{n+q-1}}$  de la variété  $(M, g)$  munie de la densité  $\Psi$  vérifie l'inéquation différentielle suivante :

$$y'' \leq -\frac{(n+q)r}{n+q-1} y^{\frac{2-(n+q)}{n+q}}. \quad (5)$$

Nous déduisons de cette extension de la relation différentielle (4), une version généralisée de l'inégalité de Lévy-Gromov lorsque  $r > 0$  : sous l'hypothèse de courbure-dimension  $C((n+q-1), n+q)$ , nous obtenons l'inégalité

$$h_{(M, g, \psi)} \geq h_{(\mathbb{S}^{n+q}, \text{can})}. \quad (6)$$

---

4. Nous voulons ici rappeler que tous les espaces  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\gamma_n$  est la mesure gaussienne correspondante, ont le même profil isopérimétrique. Ceci implique la stabilité du profil isopérimétrique gaussien par produit puisque d'une part  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)$  peut être considéré comme le produit de  $p$  copies de l'espace gaussien de dimension 1 et d'autre part le profil décroît par produit (voir l'inégalité (3.8)).

5.  $n$  est la dimension de la variété  $M$ .

Comme conséquences de cette généralisation, nous parvenons à donner des preuves isopérimétriques de plusieurs généralisations de théorèmes de comparaison “classiques” en courbure positive, comme les théorèmes de Myers et de Lichnerowicz, déjà connus dans ce cadre (voir [Q] et [BQ2]). Une nouvelle démonstration d’un théorème du type Bishop-Gromov sous hypothèse de courbure-dimension, déjà obtenu par Z. Qian dans [Q], est proposée dans l’annexe E. Nous obtenons aussi par cette méthode une généralisation de l’inégalité de Heintze-Karcher, ce qui permet de proposer une preuve “alternative” de (6) en reproduisant les arguments donnés par M. Gromov dans [Gr1] pour démontrer (3).

Le chapitre 4 trouve son origine dans la conséquence suivante du pincement du profil isopérimétrique établie au chapitre 2: si  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de variétés riemanniennes fermées de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) satisfaisant  $\text{Ricci}_{(M_i, g_i)} \geq (n-1)g_i$  et convergeant vers  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$  pour la distance de Gromov-Hausdorff, alors la suite des rapports  $(h_{(M_i, g_i)}/h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})})_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers 1, uniformément sur  $]0,1[$ . En effet, il devient tout à fait naturel de se demander s’il s’agit d’un résultat typique d’une convergence vers  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ , ou bien si ce phénomène illustre, d’une certaine manière, un résultat de continuité, sous hypothèse de courbure, du profil isopérimétrique vis-à-vis de la distance de Gromov-Hausdorff. L’étude de cette question nous incite tout d’abord à détailler les idées et les techniques développées par J. Cheeger et T. H. Colding dans [ChC1] afin de donner une description infinitésimale de la structure des espaces métriques compacts obtenus comme limites de suites de variétés appartenant aux ensembles précompacts  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ . A partir de ces résultats et des lemmes de recouvrement précisés dans l’annexe D, nous démontrons que lorsqu’une suite de variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  converge vers une variété de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ , la suite des rapports des profils converge vers 1, uniformément sur  $]0,1[$ . Nous observons que la preuve consiste à obtenir, par une méthode laborieuse et technique, la convergence des profils pour les volumes pas trop petits, avant d’en déduire la convergence uniforme sur  $]0,1[$  en faisant intervenir simultanément les propriétés de concavité des profils impliqués (issues de la caractérisation différentielle (4)) et la convergence des volumes (voir [C3] où T. H. Colding prouve la continuité de la fonction volume sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ ). Enfin, nous terminons le chapitre par quelques questions concernant le comportement de la suite des profils lorsque la suite de variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  converge vers un espace limite singulier. Nous les illustrons en proposant d’interpréter la précompacité de la famille des profils renormalisés des variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  (théorème d’Ascoli) comme la version fonctionnelle du théorème de précompacité de Gromov de l’ensemble  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  pour la topologie induite par la distance de Gromov-Hausdorff.

Nous avons placé en annexe différents résultats techniques et deux articles. Avant de débiter des preuves souvent longues et délicates, nous nous efforçons de donner les motivations essentielles et de justifier intuitivement l’existence de ces résultats. Nous ne garantissons pas que des preuves plus simples et plus courtes ne puissent être trouvées, mais nous reconnaissons ne pas être parvenus à les rendre particulièrement attrayantes. L’utilisation de certains lemmes techniques n’était pas toujours indispensable, leur application conduisant parfois à des résultats pouvant être également obtenus à partir d’inégalités géométriques. Cependant, nous pensons qu’il est intéressant de voir que les propriétés du profil peuvent être presque toutes obtenues comme des conséquences de l’étude de l’inéquation différentielle (4) satisfaite par le profil. En effet, privilégier un aspect fonctionnel (voir le profil comme une solution de l’inéquation différentielle) plutôt que géométrique (utilisation d’inégalités géométriques telles que celle de Heintze-Karcher) permet de préparer une étude analogue du profil dans le cadre plus vaste du chapitre 3 où les inégalités géométriques classiques n’ont pas, a priori, d’analogues aussi

performants. Ceci permet en particulier de généraliser dans ce contexte la concavité du profil au voisinage de 0 et l'explosion de la courbure moyenne des petits domaines isopérimétriques à partir de la relation différentielle (5).

Le premier article (annexe G) est le fruit d'un travail effectué en collaboration avec C. Rosales, doctorant du département de Géométrie et de Topologie de Grenade (Espagne). Nous étudions le profil isopérimétrique  $h_{(\Omega,g)}$  associé à un ouvert convexe relativement compact inclus dans une variété riemannienne  $(M,g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), pour *le problème à frontière libre*. En particulier, nous montrons que le profil renormalisé  $y_{(\Omega,g)} := h_{(\Omega,g)}^{\frac{n}{n-1}}$  vérifie l'inéquation différentielle (4) dans laquelle  $(n-1)\delta$  désigne un minorant de la courbure de Ricci sur le fibré unitaire tangent de  $\Omega$ . Cette généralisation nous autorise à reprendre la démarche du chapitre 2, ce qui complète et étend des résultats établis précédemment par S. Sternberg et K. Zumbrun dans [SZ]. Nous parvenons de plus à donner une inégalité du type Lévy-Gromov dans ce contexte: si la courbure de Ricci satisfait  $\text{Ricci} \geq (n-1)g$  sur  $\Omega$ , alors

$$h_{(\Omega,g)} \geq h_{(\mathbb{S}^{n+},can)} \quad (7)$$

où  $(\mathbb{S}^{n+},can)$  désigne un hémisphère de  $(\mathbb{S}^n,can)$ , le cas d'égalité ne se produisant que si  $(\Omega,g)$  est isométrique à  $(\mathbb{S}^{n+},can)$ .

Le second article (annexe F) propose une extension de la technique de symétrisation exposée par A. Ros dans [Ro] afin de minorer le profil d'un produit de mm-espaces. En effet, en remarquant que cette technique est locale et que d'un point de vue local, un produit tordu est "presque" un produit, nous généralisons son théorème de comparaison aux produits tordus de variétés. Ceci a pour conséquence, comme nous l'a fait observé F. Morgan, de redémontrer le caractère minimisant des boules centrées au sommet pour les cônes définis comme le complété du produit tordu  $]0, +\infty[_{\varphi}M$  où  $(M,g)$  est une variété riemannienne fermée satisfaisant  $\text{Ricci} \geq (n-1)g$  et où la fonction  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est définie par  $t \mapsto \varphi(t) = t$ . Nous obtenons ainsi une preuve extrêmement simple de ce résultat initialement établi par F. Morgan et M. Ritoré dans [MR].

Avec un peu de recul sur les problèmes isopérimétriques et sur le travail présenté ici, nous remarquons que les résultats obtenus suggèrent de nombreux prolongements. En effet, dans un premier temps, il serait intéressant de préciser le comportement des profils isopérimétriques associés à une suite de variétés qui convergent vers un espace singulier de même dimension. Il conviendrait ensuite d'étudier la question analogue lors d'un effondrement. Enfin, après avoir observé que la topologie de Gromov-Hausdorff mesurée (voir [Fu]) permet de généraliser la précompacité des ensembles  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  au cadre des variétés fermées à densité en remplaçant l'hypothèse sur la courbure de Ricci par une hypothèse de courbure-dimension, il resterait à déterminer l'évolution des profils lors de la convergence d'une suite de variétés à densité pour cette nouvelle topologie. Par ailleurs, un autre cadre particulièrement intéressant dans lequel les problèmes isopérimétriques restent difficiles à appréhender est celui des variétés riemanniennes non compactes. Bien que nous nous intéressions essentiellement dans ce travail aux variétés riemanniennes compactes, nous avons pris soin de préciser, lorsque cela est possible, dans quelle mesure et sous quelles hypothèses les techniques utilisées et les résultats obtenus s'étendent au cadre non compact. En effet, il serait particulièrement utile d'obtenir des comparaisons de profils pour des variétés non compactes, à partir d'hypothèses de courbure. Par exemple, la conjecture dite de "Cartan-Hadamard", qui annonce la validité de l'inégalité isopérimétrique euclidienne classique (2) sur toutes les variétés

riemanniennes simplement connexes de courbure sectionnelle négative ou nulle, n'a été résolue et prouvée qu'en dimension 2 (voir [W]), 3 (voir [Kl]) et 4 (voir [Cr2]). Avec le formalisme utilisé dans cette thèse, elle revient à dire que le profil isopérimétrique de ces variétés est minoré par celui de l'espace euclidien de même dimension. Ainsi, l'étude des problèmes isopérimétriques est très loin d'être complète et devrait continuer à tenir en haleine la communauté mathématique pour de nombreuses années.



# Chapitre 1

## La fonction profil isopérimétrique

Dans un premier temps, nous considérons une variété riemannienne  $(M, g)$  sur laquelle nous formalisons le problème isopérimétrique, d'origine géométrique, par l'intermédiaire de la fonction  $h_{(M, g)}$ , appelée *profil isopérimétrique*, c'est-à-dire une quantité analytique. Nous précisons ce profil isopérimétrique sur les espaces modèles  $\mathbb{M}_\delta^n$  et nous essayons de dresser une liste des variétés dont les profils sont actuellement connus. La description des *domaines isopérimétriques* sur ces exemples nous permettra d'illustrer ultérieurement les différents résultats qualitatifs et quantitatifs que nous rencontrerons. Ensuite, nous explicitons les liens qui unissent cette fonction profil à deux constantes isopérimétriques plus fréquemment utilisées dont nous rappelons les interprétations géométriques et analytiques en terme d'inégalités de Sobolev notamment. Parmi elles, la *constante isopérimétrique de Cheeger* apparaîtra au chapitre 2 comme un paramètre géométrique pertinent pour minorer le profil isopérimétrique. Enfin, nous motivons la recherche de résultats de comparaison et, plus généralement, l'obtention de minoration explicites du profil isopérimétrique en rappelant quelques conséquences géométriques d'une part, comme la minoration du volume des boules, et analytiques d'autre part, comme la majoration du noyau de la chaleur. Afin de justifier ces applications, nous présentons en détail la technique d'intégration d'une inégalité isopérimétrique, souvent passée sous silence dans la littérature. A cette occasion, nous proposons une étude approfondie des différentes conséquences d'une hypothèse isopérimétrique du type  $h_{(M, g)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, can)}$ . Bien que l'inégalité de Lévy-Gromov prouve que l'hypothèse  $h_{(M, g)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, can)}$  est plus faible que l'hypothèse de courbure Ricci $_{(M, g)} \geq (n - 1)g$  (voir [Gr1]), nous observons et illustrons que sous une minoration du profil isopérimétrique, certains théorèmes de précompacité peuvent être adaptés et de nombreux résultats de comparaison restent valides.

### 1.1 définitions

Le problème isopérimétrique dans l'espace euclidien, et plus généralement dans les espaces simplement connexes de courbure sectionnelle constante 1, 0 et  $-1$ , possède une longue histoire (voir [O]) et les boules géodésiques sont, parmi les ensembles suffisamment réguliers, ceux qui minimisent l'aire du bord à volume intérieur fixé. Nous dirons que les boules géodésiques résolvent le problème isopérimétrique sur les espaces simplement connexes de courbure sectionnelle constante. De nombreuses preuves, correspondant à des approches différentes, sont disponibles dans la littérature (voir [BZ], [C2]). Afin de refléter analytiquement ces résultats de nature géométrique, nous allons définir la *fonction profil isopérimétrique* associée à une variété riemannienne, qui représente un

minorant optimal de l'aire du bord d'un domaine en fonction de son volume intérieur.

### 1.1.1 Profil isopérimétrique des variétés riemanniennes fermées

**Définition 1.1.1** Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Notons  $h_{(M,g)}$  sa fonction profil isopérimétrique définie sur  $[0,1]$  par  $h_{(M,g)}(0) := 0$ ,  $h_{(M,g)}(1) := 0$  et, pour tout  $\beta \in ]0,1[$ ,

$$h_{(M,g)}(\beta) := \inf \left\{ \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol}(M,g)} \mid \Omega \subset M, \frac{\text{vol}_n(\Omega)}{\text{vol}(M,g)} = \beta \right\},$$

où  $\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)$  désigne la mesure  $(n-1)$ -dimensionnelle de la sous-variété  $\partial\Omega$  munie de la métrique induite par celle de  $M$  et où l'infimum est pris sur l'ensemble des ouverts  $\Omega$  de  $M$  à bord régulier (au moins de classe  $C^1$ ).

Un ouvert  $\Omega$  qui réalise le cas d'égalité dans l'infimum ci-dessus est appelé domaine isopérimétrique et son bord  $\partial\Omega$  est une hypersurface minimisante.

**Remarque 1.1.2** La même définition peut s'appliquer pour les variétés riemanniennes complètes non compactes de volume fini, à condition de préciser<sup>1</sup> que l'infimum est pris sur l'ensemble des ouverts  $\Omega$  à bord régulier relativement compacts dans  $M$ .

Par exemple, la connaissance des solutions du problème isopérimétrique sur  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$  permet d'accéder implicitement à son profil isopérimétrique :

$$\forall r \in [0, \pi] \quad , \quad h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})} \left( \frac{V_{n,1}(r)}{V_{n,1}(\pi)} \right) = \frac{V'_{n,1}(r)}{V_{n,1}(\pi)},$$

soit

$$\forall r \in [0, \pi] \quad , \quad h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})} \left( \frac{\int_0^r (\sin u)^{n-1} du}{\int_0^\pi (\sin u)^{n-1} du} \right) = \frac{(\sin r)^{n-1}}{\int_0^\pi (\sin u)^{n-1} du}.$$

Par ailleurs, dans le cas particulier de la dimension 2, une expression explicite existe :

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad h_{(\mathbb{S}^2, \text{can})}(\beta) = \sqrt{\beta(1-\beta)}.$$

Les graphes des profils isopérimétriques des sphères de petite dimension sont représentés par la figure 1.1. Nous observons que ces fonctions ne sont pas dérivables en 0. C'est pourquoi, il est souvent judicieux, d'un point de vue technique, de s'intéresser à la puissance  $\frac{n}{n-1}$  du profil isopérimétrique.

**Définition 1.1.3** Nous appelons profil isopérimétrique renormalisé de la variété riemannienne fermée  $(M,g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), la fonction  $y_{(M,g)}$  définie par

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad y_{(M,g)}(\beta) := h_{(M,g)}(\beta)^{\frac{n}{n-1}}.$$

La figure 1.2 donne les profils renormalisés des sphères de petites dimensions. D'une manière générale, nous montrerons que les profils renormalisés sont dérivables à droite en 0 (voir la proposition 1.5.2) et lipschitziens sur  $[0,1]$  (voir la proposition 2.3.3), ce qui facilite leur manipulation.

---

1. Cette restriction sert essentiellement à garantir la finitude du volume  $(n-1)$ -dimensionnel du bord  $\partial\Omega$ .

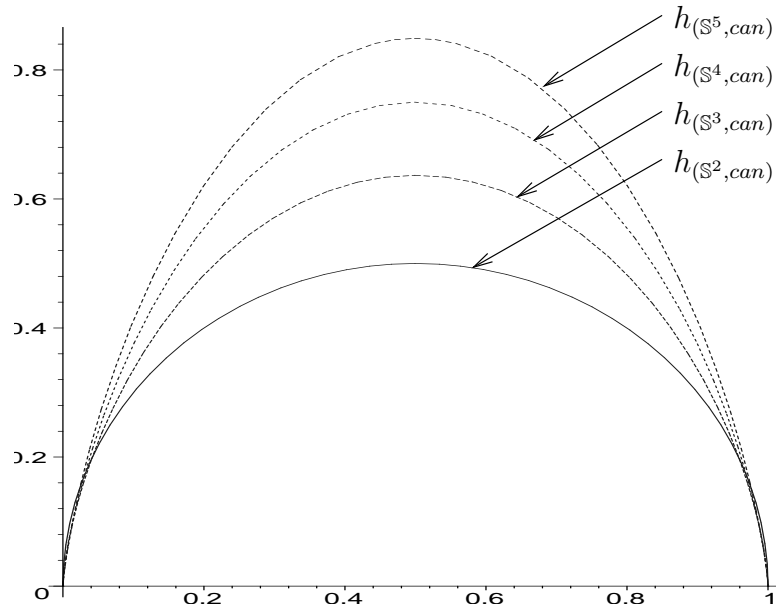


FIG. 1.1 – Profils isopérimétriques de  $(\mathbb{S}^2, can)$ ,  $(\mathbb{S}^3, can)$ ,  $(\mathbb{S}^4, can)$ ,  $(\mathbb{S}^5, can)$ .

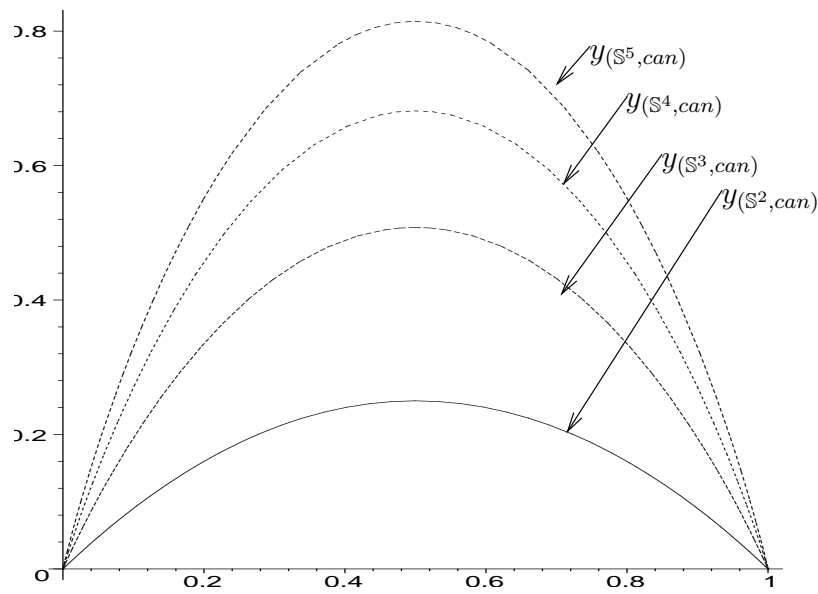


FIG. 1.2 – Profils isopérimétriques renormalisés de  $(\mathbb{S}^2, can)$ ,  $(\mathbb{S}^3, can)$ ,  $(\mathbb{S}^4, can)$ ,  $(\mathbb{S}^5, can)$ .

### 1.1.2 Profil isopérimétrique des variétés riemanniennes non compactes de volume infini

**Définition 1.1.4** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de volume infini (en particulier non compacte) de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Notons  $I_{(M, g)}$  sa fonction profil isopérimétrique définie sur  $[0, +\infty[$  par  $I_{(M, g)}(0) := 0$  et, pour tout  $V \in ]0, +\infty[$ ,

$$I_{(M, g)}(V) := \inf \left\{ \text{vol}_{n-1}(\partial\Omega) \mid \Omega \subset M, \text{vol}_n(\Omega) = V \right\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des ouverts à bord régulier relativement compacts dans  $M$ .

Nous désignons par  $Y_{(M, g)}$  le profil isopérimétrique renormalisé de la variété riemannienne de volume infini (en particulier non compacte) de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) définie par

$$\forall V \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad Y_{(M, g)}(V) := I_{(M, g)}(V)^{\frac{n}{n-1}}.$$

La connaissance des solutions du problème isopérimétrique sur  $\mathbb{M}_n^\delta$  ( $\delta \leq 0$ ) permet d'accéder implicitement à son profil isopérimétrique :

$$\forall r \in [0, +\infty[ \quad , \quad I_{\mathbb{M}_\delta^n}(V_{n, \delta}(r)) = V'_{n, \delta}(r),$$

soit

$$\forall r \in [0, +\infty[ \quad , \quad I_{\mathbb{M}_\delta^n} \left( \alpha_{n-1} \int_0^r s_\delta(u)^{n-1} du \right) = s_\delta(r)^{n-1}.$$

Dans le cas particulier où  $\delta = 0$ , cette relation peut être rendue explicite,

$$\forall V \in [0, +\infty[ \quad , \quad I_{(\mathbb{R}^n, \text{can})}(V) = \gamma_n V^{\frac{n-1}{n}}$$

où  $\gamma_n$  est la constante isopérimétrique euclidienne. C'est aussi le cas en dimension 2 pour  $\delta = -1$ ,

$$\forall V \in [0, +\infty[ \quad , \quad I_{(\mathbb{H}^2, \text{can})}(V) = \sqrt{V(4\pi + V)}.$$

Les figures 1.3 et 1.4 montrent les profils et les profils renormalisés de quelques variétés modèles non compactes de dimension.

## 1.2 Propriétés élémentaires des profils isopérimétriques

Énonçons les propriétés d'homogénéité et de symétrie des profils isopérimétriques qui se déduisent immédiatement des définitions 1.1.1 et 1.1.4.

### 1.2.1 Homogénéité

**Proposition 1.2.1** Pour tout  $\lambda > 0$ , en reprenant les notations introduites lors des définitions 1.1.1 et 1.1.4 précédentes,

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad h_{(M, \lambda^2 g)}(\beta) = \frac{1}{\lambda} h_{(M, g)}(\beta) \quad \text{et} \quad \forall V \in [0, +\infty[ \quad I_{(M, \lambda^2 g)}(V) = \lambda^{n-1} I_{(M, g)} \left( \frac{V}{\lambda^n} \right),$$

où  $n \geq 2$  désigne la dimension de la variété  $(M, g)$ .

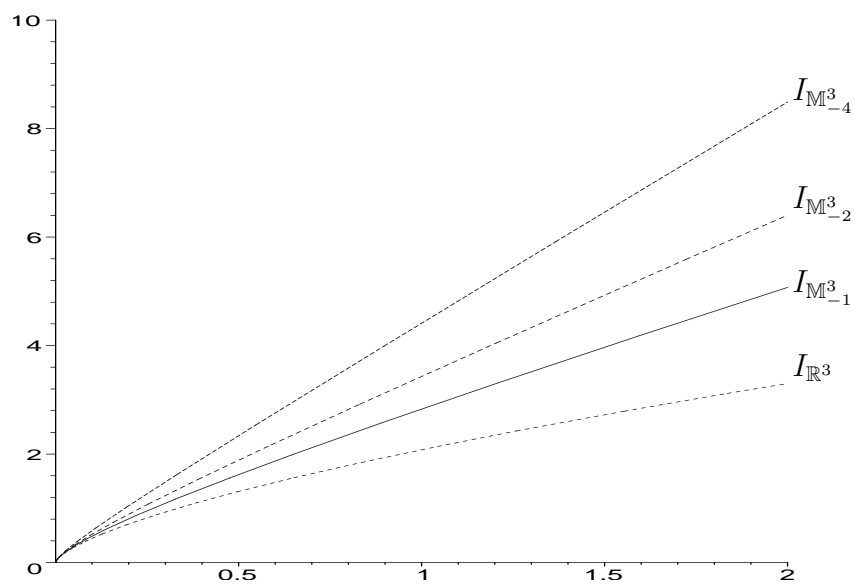


FIG. 1.3 – Profils isopérimétriques des variétés modèles non compactes  $M_\delta^3$  pour  $\delta = 0$ ,  $\delta = -1$ ,  $\delta = -2$  et  $\delta = -4$ .

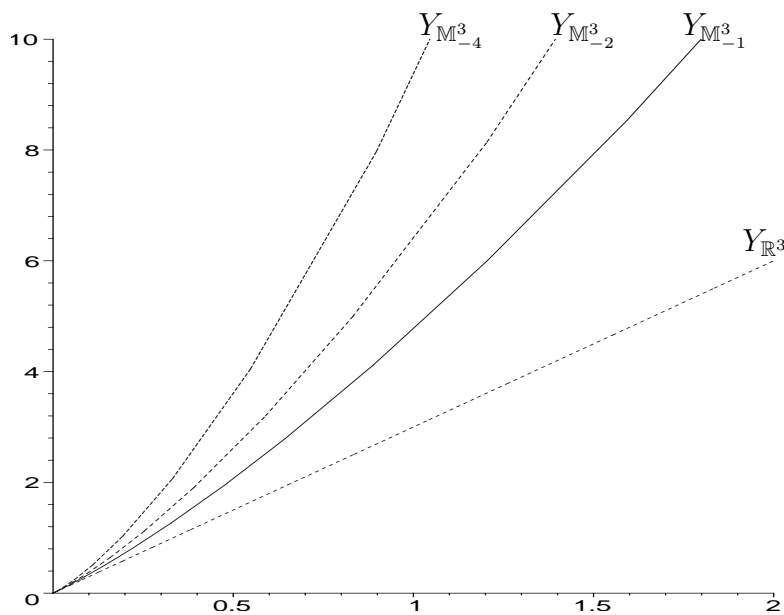


FIG. 1.4 – Profils isopérimétriques renormalisés des variétés modèles non compactes  $M_\delta^3$  pour  $\delta = 0$ ,  $\delta = -1$ ,  $\delta = -2$  et  $\delta = -4$ .

### 1.2.2 Symétrie

Observons que, pour tout ouvert  $\Omega$  à bord régulier de volume relatif  $\beta$ ,  $M \setminus \overline{\Omega}$  est un ouvert à bord régulier de volume relatif  $1 - \beta$  dont le bord  $\partial(M \setminus \overline{\Omega})$  coïncide avec le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Nous en déduisons le résultat suivant :

**Proposition 1.2.2** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée. Alors, pour tout  $\beta$  dans  $[0, 1]$ ,*

$$h_{(M, g)}(\beta) = h_{(M, g)}(1 - \beta).$$

Cette propriété de symétrie explique pourquoi nous restreindrons souvent l'étude du profil des variétés riemanniennes fermées à l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ .

## 1.3 Exemples de profils isopérimétriques connus

La définition du profil montre que la difficulté de le calculer réside dans l'obtention d'une minoration, puisqu'il suffit de tester des domaines susceptibles de réaliser l'infimum pour le majorer.

### 1.3.1 variétés compactes

E. Schmidt a résolu dans [Sc] le problème isopérimétrique sur  $(\mathbb{S}^n, can)$  pour tout  $n \geq 2$ , donnant ainsi accès au profil isopérimétrique de toutes les sphères euclidiennes par homogénéité. Cependant, il a fallu attendre ces dernières années, pour voir émerger de nouvelles approches dans la détermination de profils isopérimétriques. Citons par exemple [BC], [P1] et surtout [HHM] où sont explicités les domaines isopérimétriques des tores plats de dimension 2, des bouteilles de Klein plates et de l'espace projectif de dimension 2. En particulier, sur les tores plats de dimension 2, les domaines isopérimétriques pour les petits volumes sont des disques euclidiens, puis à partir d'un volume critique, les bandes de même volume dans le sens de la largeur ont un périmètre inférieur et deviennent les nouveaux domaines isopérimétriques, provoquant ainsi une rupture de la topologie des domaines minimisants. Ceci est illustré par les figures 1.5 et 1.7. Sur l'espace projectif de dimension 2, les domaines isopérimétriques sont des disques centrés au pôle pour  $\beta \in ]0, \frac{1}{2}]$  et leur complémentaire si  $\beta \in [\frac{1}{2}, 1[$ , d'où le profil

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad h_{(P^2(\mathbb{R}), can)}(\beta) = \sqrt{\beta(2 - \beta)},$$

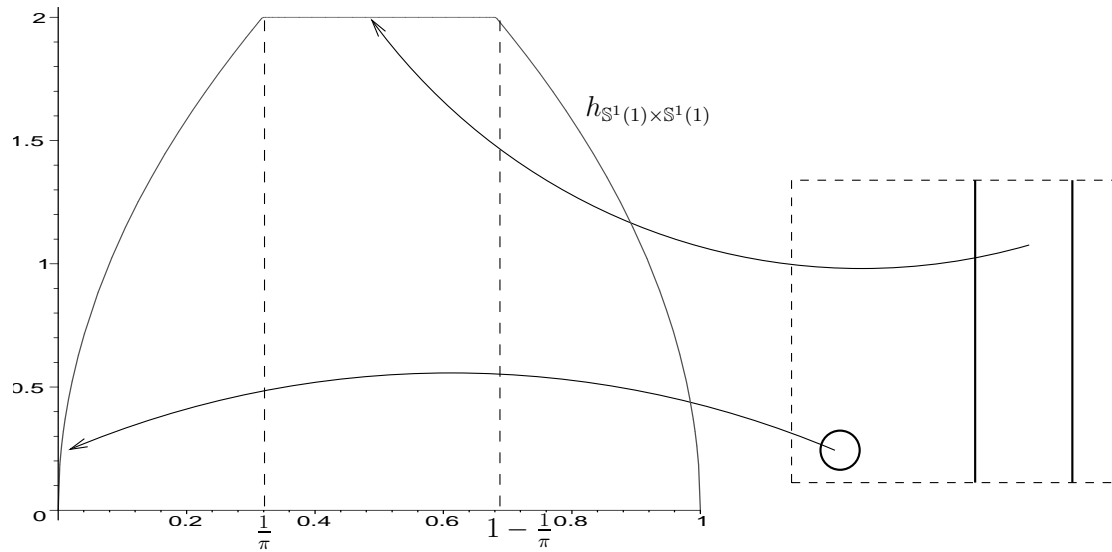
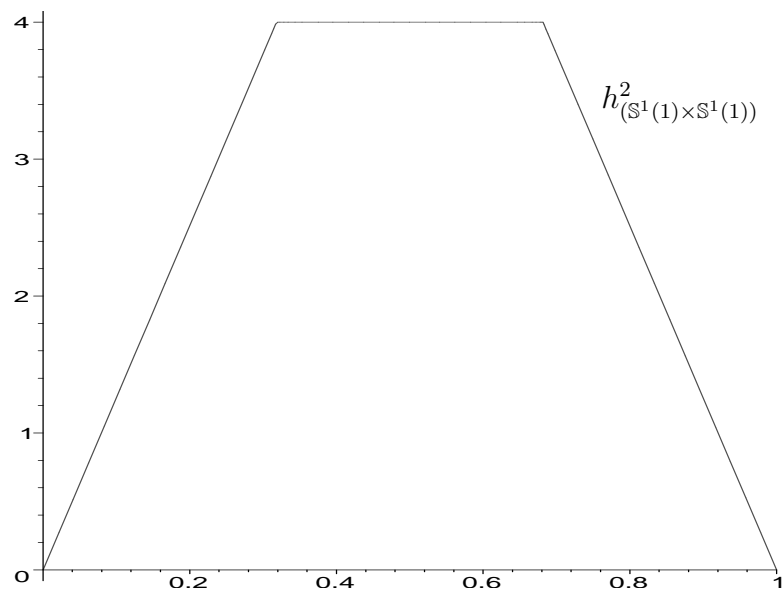
et la relation suivante, illustrée par la figure 1.9,

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad h_{(P^2(\mathbb{R}), can)}(\beta) = 2h_{(\mathbb{S}^2, can)}\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Concernant les variétés de dimension supérieure, A. Ros et M. Ritoré ont proposé dans [RR0] et [RR1] plusieurs déterminations du profil isopérimétrique de l'espace projectif de dimension 3, en s'appuyant sur la stabilité des hypersurfaces minimisantes et en cherchant à classifier toutes les hypersurfaces stables de courbure moyenne constante. Un travail de A. Ros sur les profils isopérimétriques de certains espaces lenticulaires (voir [Ro]) est actuellement en cours.

### 1.3.2 variétés non compactes

Ce n'est qu'en 1996 que I. Benjamini et J. Cao ont calculé le profil isopérimétrique d'un paraboloïde de révolution en démontrant que les boules géodésiques centrées sur le

FIG. 1.5 – Profil isopérimétrique du tore plat  $(\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1))$ .FIG. 1.6 – Profil isopérimétrique renormalisé du tore plat  $(\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1))$ .

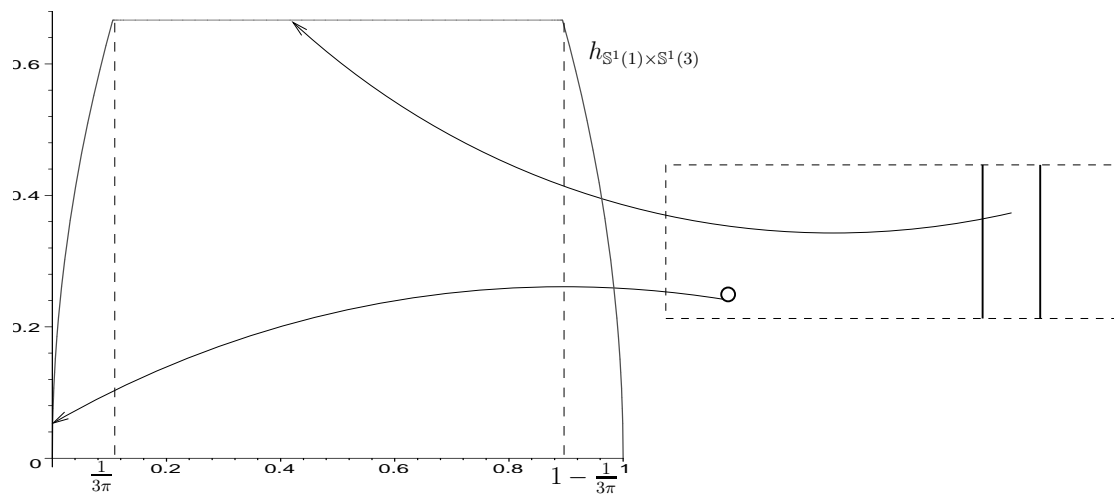


FIG. 1.7 – Profil isopérimétrique du tore plat ( $\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(3)$ ).

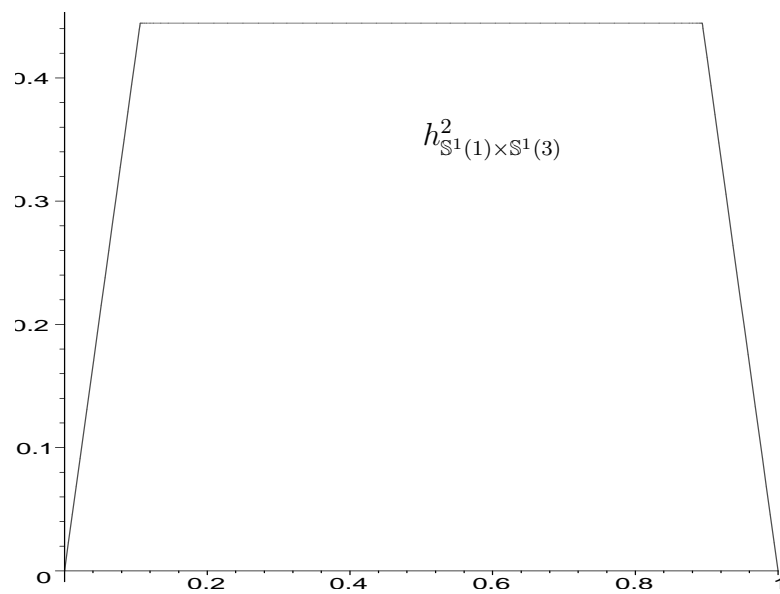


FIG. 1.8 – Profil isopérimétrique renormalisé du tore plat ( $\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(3)$ ).



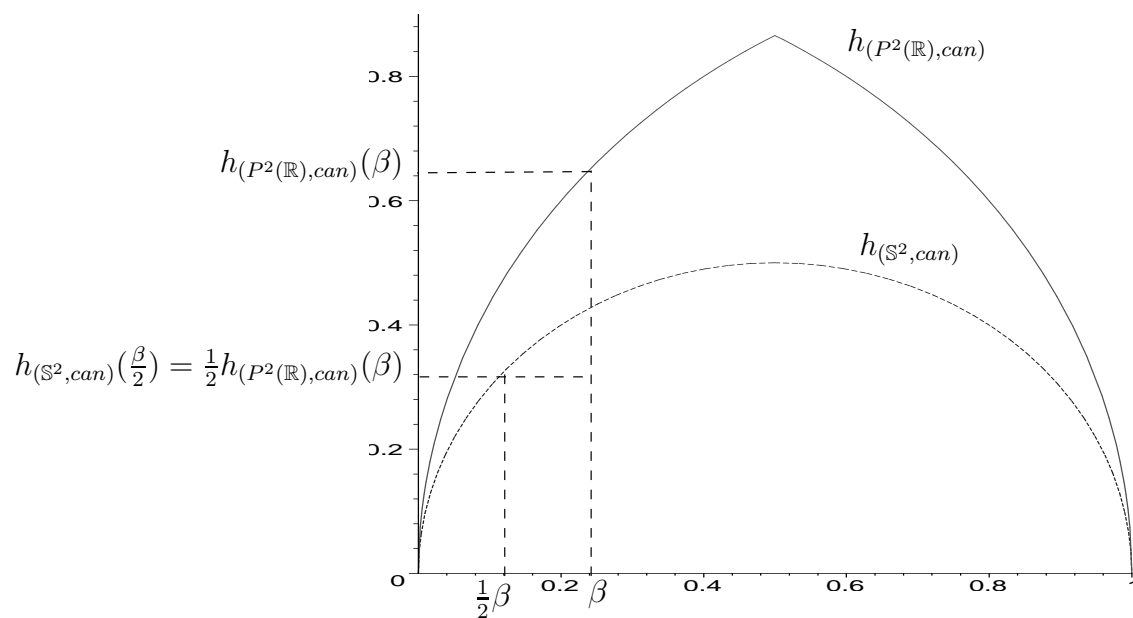


FIG. 1.9 – Profils isopérimétriques de la sphère canonique de dimension 2 et du projectif de dimension 2.

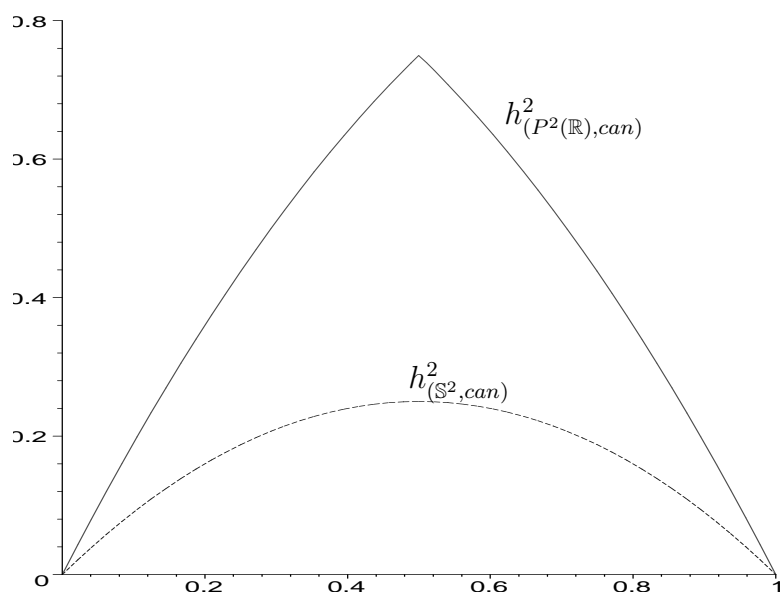


FIG. 1.10 – Profils isopérimétriques renormalisés de la sphère canonique de dimension 2 et du projectif de dimension 2.

sommet sont les domaines isopérimétriques (voir [BC]). D'une manière plus générale, F. Morgan, M. Hutchings et H. Howards démontrent dans [MHH] que sur  $\mathbb{R}^2$  muni d'une métrique de révolution complète dont la courbure gaussienne est une fonction strictement décroissante de la distance à l'origine, les domaines isopérimétriques peuvent être :

- un disque centré à l'origine,
- le complémentaire d'un disque centré à l'origine,
- un anneau centré à l'origine.

L'approche qui leur permet de déduire cette classification reprend et approfondit des idées apparues dans [BC] et [P1]. De plus, elle est typique de la dimension 2 car elle repose sur l'intégration de l'égalité de Gauss-Bonnet appliquée aux domaines isopérimétriques. Citons aussi le théorème 10.1 de [HHM] qui propose une classification des domaines isopérimétriques sur les surfaces hyperboliques (courbure sectionnelle constante égale à  $-1$ ) compactes ou non compactes, de volume fini ou infini.

Par ailleurs, R. Pedrosa a décrit dans [Pe] les domaines isopérimétriques et le profil des variétés  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Par la suite, R. Pedrosa et M. Ritoré se sont intéressés dans [PeRi] aux profils des variétés  $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{M}_g^n$ . En utilisant les symétries de l'espace ambiant, la stabilité des hypersurfaces minimisantes et la théorie des équations différentielles ordinaires pour rechercher les hypersurfaces de courbure moyenne constante, ils parviennent à déterminer explicitement les profils de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{H}_{-1}^2$  et à mettre en évidence un changement de nature des domaines isopérimétriques de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^n$  à partir de  $n = 9$ .

## 1.4 Les constantes isopérimétriques

Nous allons définir deux constantes isopérimétriques qui apparaissent de manière assez naturelle lorsqu'il s'agit de contrôler les propriétés analytiques et géométriques d'une variété riemannienne compacte par des quantités isopérimétriques. Nous relierons ces constantes au profil isopérimétrique et nous en rappelons des estimations en fonction de la géométrie de la variété. Ces résultats seront particulièrement utiles au chapitre 2, lorsque nous chercherons à estimer le profil isopérimétrique en fonction de paramètres géométriques.

### 1.4.1 définition

**Définition 1.4.1** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Appelons constante isopérimétrique de  $(M, g)$  la quantité

$$\mathcal{I}(M, g) := \inf \left\{ \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)^n}{\min(\text{vol}_n(\Omega), \text{vol}_n(M \setminus \Omega))^{n-1}} \mid \Omega \subset M \right\} \quad (1.1)$$

et constante isopérimétrique de Cheeger de  $(M, g)$  la quantité

$$h_C(M, g) := \inf \left\{ \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\min(\text{vol}_n(\Omega), \text{vol}_n(M \setminus \Omega))} \mid \Omega \subset M \right\} \quad (1.2)$$

où les infima sont pris sur l'ensemble des ouverts  $\Omega$  à bord régulier.

La constante isopérimétrique intervient pour généraliser l'inégalité isopérimétrique euclidienne (2) sur une variété riemannienne compacte. En effet, pour tout ouvert  $\Omega$  à bord régulier, nous pouvons écrire

$$\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)^n \geq \mathcal{I}(M, g) \min(\text{vol}_n(\Omega), \text{vol}_n(M - \Omega))^{n-1}.$$

Quant à la constante isopérimétrique de Cheeger, sa connaissance permet de minorer la première valeur propre non nulle du laplacien sur une variété riemannienne compacte (voir [C] et [B]),

$$\lambda_1(M,g) \geq \frac{h_C(M,g)^2}{4}.$$

Par ailleurs, nous pouvons, en rappelant des résultats détaillés au cours du chapitre IV de [C2], relier les constantes géométriques précédentes à des quantités analytiques (constantes de Sobolev) associées à la variété fermée  $(M,g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). De telles inégalités sont, dans le cadre compact, à rapprocher du théorème de Federer-Fleming qui établit, sur  $(\mathbb{R}^n, can)$ , l'équivalence entre l'inégalité isopérimétrique euclidienne classique (2) et l'injection de Sobolev de  $W_0^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$ , tout en préservant l'optimalité des constantes concernées (voir [FF] et [Maz]). La version compacte donne

$$\mathcal{I}(M,g)^{\frac{1}{n}} \leq \inf_{f \in C^\infty(M,\mathbb{R})} \frac{\|\nabla f\|_1}{\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|f - \alpha\|_{\frac{n}{n-1}}} \leq 2\mathcal{I}(M,g)^{\frac{1}{n}}$$

et

$$h_C(M,g) = \inf_{f \in C^\infty(M,\mathbb{R})} \frac{\|\nabla f\|_1}{\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|f - \alpha\|_1}.$$

#### 1.4.2 Liens avec la fonction profil isopérimétrique

**Proposition 1.4.2** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Alors,*

$$\mathcal{I}(M,g) = \left( \inf \left\{ \frac{h_{(M,g)}^{\frac{n}{n-1}}(\beta)}{\beta} / \beta \in \left] 0, \frac{1}{2} \right] \right\} \right)^{n-1} \text{vol}(M,g) \quad (1.3)$$

et

$$h_C(M,g) = \inf \left\{ \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta} / \beta \in \left] 0, \frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (1.4)$$

Ces deux constantes sont reliées par l'inégalité suivante :

$$\mathcal{I}(M,g) \leq \frac{\text{vol}(M,g)}{2} h_C(M,g)^n. \quad (1.5)$$

Par ailleurs,

(i) si  $h_{(M,g)}$  est concave, nous disposons de l'égalité :

$$h_C(M,g) = 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right), \quad (1.6)$$

(ii) si  $h_{(M,g)}^{\frac{n}{n-1}}$  est concave, nous disposons des égalités :

$$h_C(M,g) = 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mathcal{I}(M,g) = 2^{n-1} \text{vol}(M,g) h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (1.7)$$

et

$$\mathcal{I}(M,g) = \frac{\text{vol}(M,g)}{2} h_C(M,g)^n. \quad (1.8)$$

**Démonstration.**

Les relations (1.3) et (1.4) sont immédiates à partir des définitions des constantes isopérimétriques et du profil. L'inégalité (1.5) s'obtient en considérant un réel  $\beta_0$  dans  $]0, \frac{1}{2}[$  tel que

$$h_C(M, g) = \frac{h_{(M, g)}(\beta_0)}{\beta_0},$$

puis en exploitant le fait que

$$\mathcal{I}(M, g) \leq \text{vol}(M, g) \frac{h_{(M, g)}(\beta_0)^n}{\beta_0^{n-1}}.$$

Enfin, les dernières égalités obtenues sous hypothèses de concavité de certaines puissances du profil isopérimétrique reposent sur l'interprétation graphique de la constante isopérimétrique (resp. de la constante isopérimétrique de Cheeger) sur le graphe du profil renormalisé (resp. du profil isopérimétrique) comme la pente minimale des cordes reliant l'origine à un autre point d'abscisse inférieure à  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

**Remarque 1.4.3** L'hypothèse (ii) implique l'hypothèse (i), il est donc normal que les conséquences qu'elle implique soient plus fortes.

**1.4.3 Tableau de valeurs et exemples**

Compte tenu de la concavité de la fonction  $h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}^{\frac{n}{n-1}}$  (voir chapitre 2) et de la proposition 1.5,

$$h_c(\mathbb{S}^n, \text{can}) = \frac{2\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-1} du}$$

et

$$\mathcal{I}(\mathbb{S}^n, \text{can}) = \frac{\alpha_n}{2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-1} du \right)^n}.$$

Donnons quelques valeurs exactes dans le tableau suivant où nous avons noté  $I_n$  l'intégrale de Wallis

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-1} du.$$

$n$	$I_n$	$\alpha_n$	$\omega_n$	$\gamma_n$	$h_c(\mathbb{S}^n, \text{can})$	$\mathcal{I}(\mathbb{S}^n, \text{can})$
1	$\frac{1}{2}\pi$	$2\pi$	2			
2	1	$4\pi$	$2\pi$	$2\sqrt{\pi}$	1	$2\pi$
3	$\frac{1}{4}\pi$	$2\pi^2$	$\frac{4}{3}\pi$	$(36\pi)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{64}{\pi}$
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}\pi^2$	$\frac{1}{2}\pi^2$	$2^{\frac{7}{4}}\sqrt{\pi}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{4}\pi^2$
5	$\frac{3}{16}\pi$	$\pi^3$	$\frac{8}{15}\pi^2$	$(\frac{8}{3})^{\frac{1}{5}}5^{\frac{4}{5}}\pi^{\frac{2}{5}}$	$\frac{16}{3\pi}$	$\frac{2^{19}}{3^5\pi^2}$

**1.4.4 Minoration des constantes isopérimétriques**

Citons un résultat établi par S. Gallot dans le théorème 6.15 de [G1], dont nous nous servirons à de multiples reprises dans la suite.

**Théorème 1.4.4** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que

$$\text{diam}(M, g) \leq d \quad \text{et} \quad \text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad (d, \delta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

Alors il existe deux constantes explicites strictement positives  $H(n,d,\delta)$  et  $I(n,d,\delta)$  telles que

$$h_C(M,g) \geq H(n,d,\delta) = \frac{1}{\int_0^{\frac{1}{2}d} (c_\delta(u))^{n-1} du} \quad (1.9)$$

et

$$\mathcal{I}(M,g) \geq \text{vol}(M,g) I(n,d,\delta)^n. \quad (1.10)$$

**Remarque 1.4.5** Dans les applications de ce théorème, la minoration (1.9) sera utilisée surtout pour son optimalité lorsque  $\delta > 0$  (les sphères euclidiennes sont les cas d'égalité) tandis que l'estimation (1.10) sera, en vertu de (1.3), interprétée de la manière suivante :

$$\inf_{\beta \in ]0, \frac{1}{2}[} \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta^{\frac{n-1}{n}}} \geq I(n,d,\delta). \quad (1.11)$$

## 1.5 Propriétés locales du profil

Abordons maintenant les propriétés un peu plus délicates du profil isopérimétrique que sont la continuité et le comportement au voisinage de 0 dont nous proposons une nouvelle preuve inspirée de [MJ]. L'étude des propriétés différentielles du profil menée au chapitre 2 s'appuie sur ces résultats mais permettra, a posteriori, de les renforcer (voir la proposition G.3.6).

### 1.5.1 Régularité

**Proposition 1.5.1** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée. Alors le profil isopérimétrique est continu sur  $[0,1]$  et strictement positif sur  $]0,1[$ .*

La continuité est prouvée dans [G1] et le caractère strictement positif sur  $]0,1[$  est, suite à l'égalité (1.4), une conséquence de la stricte positivité de la constante isopérimétrique de Cheeger des variétés riemanniennes compactes établie par P. Buser dans [B], ce qui s'obtient également à partir du théorème 1.4.4.

### 1.5.2 Equivalent au voisinage de 0

Nous déduisons facilement de l'appendice C de [BM] le comportement du profil isopérimétrique pour les petits volumes.

**Proposition 1.5.2** *Le comportement asymptotique du profil isopérimétrique d'une variété riemannienne fermée  $(M,g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) au voisinage de 0 est donné par l'équivalent*

$$h_{(M,g)}(\beta) \underset{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}}{\sim} \frac{\gamma_n}{\text{vol}(M,g)^{\frac{1}{n}}} \beta^{\frac{n-1}{n}} \quad (1.12)$$

où  $\gamma_n$  est la constante isopérimétrique euclidienne  $n$ -dimensionnelle.

#### Démonstration.

Comme le font judicieusement remarquer les auteurs dans [BM], ce résultat, qui exprime que le profil est euclidien au voisinage de 0 (c'est-à-dire que son équivalent correspond au résultat que nous obtiendrions si nous savions justifier que les domaines

isopérimétriques pour les petits volumes sont presque des boules géodésiques) n'est pas une conséquence triviale du caractère localement euclidien des variétés riemanniennes. En effet, la difficulté consiste à montrer que l'inégalité isopérimétrique euclidienne locale reste "presque" valide pour les domaines de petit volume et de grand diamètre. Cependant, nous pouvons proposer ici une autre preuve de l'équivalent (1.12), inspirée de la preuve du théorème 2.2 de [MJ]. Nous aurons recours à la théorie géométrique de la mesure (non utilisée dans [BM]) dont les apports essentiels concernant les problèmes isopérimétriques sont rappelés dans la proposition 2.2.5. En effet, afin de démontrer que les domaines isopérimétriques de volume relatif  $\beta$ , renormalisés pour être de volume 1 et plongés isométriquement dans un espace euclidien de dimension assez grande, convergent, lorsque  $\beta$  tend vers 0, vers la boule euclidienne de volume 1 et de même dimension (ce qui est l'objet du théorème 2.2 de [MJ]), F. Morgan et D. L. Johnson remarquent tout d'abord que le théorème de comparaison de Heintze-Karcher (voir [HK]), appliqué vers l'extérieur d'un domaine isopérimétrique (voir la proposition 2.2.5 pour l'existence) de volume relatif  $\beta$  et de courbure moyenne  $\eta_{\Omega_\beta}$  donne

$$\frac{\text{vol}(M \setminus \Omega_\beta)}{\text{vol}(M, g)} \leq \frac{\text{vol}(\partial\Omega_\beta)}{\text{vol}(M, g)} \int_0^{\text{diam}(M, g)} \max\left(0, (c_\delta(u) + \eta_{\Omega_\beta} s_\delta(u))\right)^{n-1} du$$

d'où

$$\frac{1 - \beta}{h_{(M, g)}(\beta)} \leq \text{diam}(M, g) \sup_{u \in [0, \text{diam}(M, g)]} |c_\delta(u) + \eta_{\Omega_\beta} s_\delta(u)|^{n-1} \quad (1.13)$$

où  $(n - 1)\delta$  est un minorant négatif de la courbure de Ricci sur le fibré unitaire tangent de  $(M, g)$ . La nullité et la continuité du profil en 0 (ceci est trivial en introduisant des boules géodésiques concentriques comme domaines tests pour majorer le profil), impliquent alors, compte tenu de l'inégalité (1.13),

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \eta_{\Omega_\beta} = +\infty.$$

Des estimations plus précises (voir [MJ]) permettent alors d'observer que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \text{diam}(\Omega_\beta) = 0.$$

Par conséquent, l'inégalité isopérimétrique localisée et presque euclidienne (voir le lemme de localisation I de l'appendice C de [BM]), valable pour les domaines inclus dans une petite boule géodésique suffit pour obtenir l'équivalent (1.12). Cette nouvelle preuve, qui nécessite plus de connaissances que celle proposée dans [BM], consiste à justifier que les domaines isopérimétriques ont un diamètre qui tend vers 0 avec leur volume. Ce résultat a été utilisé en dimension 2 dans [P1] car le bord d'un domaine régulier est une courbe et la connexité des domaines isopérimétriques de petit volume (voir le théorème 2.3.13) donne alors trivialement  $\text{diam}(\Omega_\beta) \leq h_{(M, g)}(\beta)$ . □

**Remarque 1.5.3** Ce comportement asymptotique, très lié au fait qu'il s'agit d'une variété riemannienne (voir aussi le paragraphe 3.1.3 qui évoque l'équivalent du profil en présence de singularités), ne se généralise pas sans hypothèse supplémentaire au cadre des variétés non compactes, qu'elles soient de volume fini ou non. L'exemple, proposé dans [BC] (voir la figure 1.11), des métriques complètes de révolution dans le plan  $\mathbb{R}^2$  dont l'expression dans le système des coordonnées polaires est  $dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$  où  $f$  est une fonction décroissante pour  $r$  suffisamment grand et d'intégrale divergente en  $+\infty$ ,

montre que le profil d'une variété non compacte de volume infini peut être identiquement nul (l'existence d'un "bout" de volume infini dont le rayon d'injectivité tend vers 0 permet de choisir des suites de domaines de révolution de même aire dont le périmètre tend vers 0). L'équivalent (1.12) ne persiste pas non plus sur les variétés non compactes de volume fini. Par exemple, le théorème 10.1 de [HHM] (voir également [BC], [MHH] et [AM]) décrit les domaines isopérimétriques possibles sur les surfaces hyperboliques (c'est-à-dire de courbure sectionnelle constante égale à  $-1$ ) et montre que la présence d'un cusp impose

$$h(\beta) = \beta$$

pour  $\beta$  assez petit, les horocycles autour d'un cusp apparaissent alors comme des domaines isopérimétriques. Une autre grande différence vis-à-vis du cadre des variétés compactes apparaît sur cet exemple : les domaines isopérimétriques pour les petits volumes ne sont plus nécessairement compacts et leur diamètre ne tend plus vers 0 avec le volume.

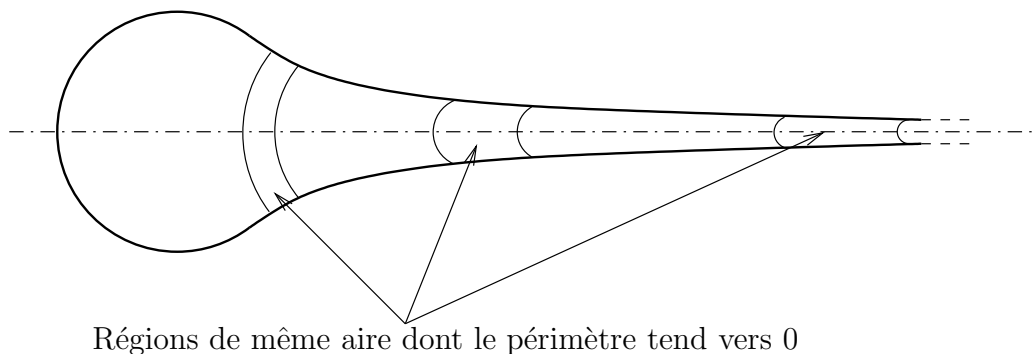


FIG. 1.11 – Exemple de surface de révolution non compacte, de volume infini et de profil isopérimétrique identiquement nul.

Dans [P1], P. Pansu s'est intéressé à un développement limité, au voisinage de 0, du profil des surfaces compactes. D'un point de vue qualitatif, il obtient que les domaines isopérimétriques se concentrent en les maxima de la courbure sectionnelle, ce qui lui permet de montrer que le second terme du développement limité est un multiple du maximum de la courbure sectionnelle. En dimension supérieure, le second terme est géré par le maximum de la courbure scalaire, c'est une conséquence du théorème 2 de [D] :

$$h_{(M,g)}(\beta) = \frac{\gamma_n}{\text{vol}(M,g)^{\frac{1}{n}}} \beta^{\frac{n-1}{n}} \left[ 1 - \left( \frac{\text{vol}(M,g)}{\omega_n} \right)^{\frac{2}{n}} \frac{\text{Sc}(M,g)}{2n(n+2)} \beta^{\frac{2}{n}} \right] + o\left(\beta^{\frac{n+1}{n}}\right) \quad (1.14)$$

où

$$\text{Sc}(M,g) := \sup_{m \in M} \text{scal}_g(m).$$

Sur les variétés riemanniennes non compactes, seule la majoration asymptotique de ce développement limité (1.14) reste valide puisqu'elle repose sur l'introduction, dans l'inégalité isopérimétrique (1.15), d'une famille de boules concentriques, centrées en un maximum de la courbure scalaire, dont le rayon tend vers 0 (voir à ce propos la majoration du profil des variétés à densité obtenue au paragraphe 3.4.4).

## 1.6 Discussion sur différentes notions de volume de bord

Bien que le profil isopérimétrique soit ici la fonction pertinente que nous allons étudier, il convient de garder à l'esprit qu'il est issu de la formalisation analytique d'un problème de nature géométrique. La définition du profil isopérimétrique permet d'associer au profil une inégalité isopérimétrique optimale : pour tout ouvert  $\Omega$  à bord  $C^1$ ,

$$\frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol}(M,g)} \geq h_{(M,g)} \left( \frac{\text{vol}_n(\Omega)}{\text{vol}(M,g)} \right). \quad (1.15)$$

Il est alors naturel (et indispensable dans les applications, voir le paragraphe 1.7) de se demander s'il n'existerait pas une notion de volume de bord coïncidant avec le volume riemannien  $(n-1)$ -dimensionnel pour tout ouvert à bord  $C^1$ , et qui prolongerait l'inégalité (1.15) à une classe de domaines ayant des bords moins réguliers.

Nous allons proposer plusieurs pistes dont l'étude est détaillée dans [BZ] (chapitre 3) et [C2] (chapitres III et IV). Distinguons deux approches possibles, soit nous choisissons d'associer un réel positif à l'ensemble  $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$  (mesure riemannienne induite, mesure de Hausdorff,...), soit nous définissons une fonctionnelle sur un ensemble de parties de la variété (l'ensemble des boréliens par exemple) et dont la valeur représente la "mesure" du bord de la partie considérée (périmètre géométrique, contenu de Minkowski, périmètre,...).

Compte tenu de la continuité du profil isopérimétrique, l'idée la plus naturelle pour étendre l'inégalité (1.15) consiste à utiliser une technique d'approximation par des ouverts à bord régulier. Considérons la fonctionnelle *périmètre géométrique*, notée  $\mathcal{P}_g$ , définie pour tout borélien  $E$  de  $M$  par

$$\mathcal{P}_g(E) := \inf \left\{ \liminf_{i \rightarrow +\infty} \text{vol}_{n-1}(\partial M_i) \mid (M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}_E \right\}$$

où  $\mathcal{T}_E$  est l'ensemble des suites de variétés à bord  $C^\infty$  telles que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} [\text{vol}_n(M_i \setminus E) + \text{vol}_n(E \setminus M_i)] = 0.$$

Cette notion, introduite par R. Cacciopoli et E. De Giorgi, permet de prolonger la notion de volume de bord utilisée jusqu'à présent tout en donnant un sens à (1.15) pour les boréliens. Il est remarquable que cette définition géométrique coïncide (sur un ensemble à préciser) avec la définition analytique d'une autre fonctionnelle *périmètre*, notée  $\mathcal{P}$ , qui consiste à associer à un domaine dont la fonction caractéristique est à variations bornées, la norme  $L^1$  du gradient de cette fonction caractéristique (voir [Z] et [KP]). L'ensemble des *domaines de périmètre fini* est constitué de ceux dont la fonction caractéristique est à variations bornées et les deux fonctionnelles  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_g$  coïncident sur cet ensemble (théorème III 4.8 de [C2]).

Une autre notion de volume de bord, souvent intéressante (voir le lemme 1.7.1), consiste à penser le volume du bord comme la limite des taux d'accroissement du volume des voisinages tubulaires extérieurs d'un domaine. Il s'agit de la fonctionnelle *contenu extérieur de Minkowski*, notée  $\nu_g^+(\cdot)$ , et définie pour tout compact  $K$  par<sup>2</sup>

$$\nu_g^+(K) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu_g(K_\varepsilon) - \nu_g(K)}{\varepsilon} \quad (1.16)$$

---

2. Nous avons choisi de ne considérer dans cet exposé que le contenu extérieur de Minkowski de parties compactes, mais la définition 1.16 se généralise sans difficulté à tous les ensembles mesurables.



où  $\nu_g$  représente la mesure riemannienne canonique sur la variété considérée. Cette notion est à rapprocher de la relation, classique dans les espaces modèles  $\mathbb{M}_\delta^n$ ,

$$\left(\frac{d}{dr}\text{vol}_n(B(r))\right)_{r=r_0} = \text{vol}_{n-1}(\partial B(r_0)).$$

De plus, cette idée de taux d'accroissement du volume des voisinages tubulaires se retrouve aussi dans la définition de la fonctionnelle périmètre évoquée précédemment, le gradient (au sens des fonctions à variations bornées) de la fonction caractéristique d'une partie de périmètre fini pouvant s'interpréter comme la dérivée des volumes des voisinages tubulaires de cet ensemble. Enfin, le contenu extérieur de Minkowski présente l'avantage de ne faire intervenir qu'une mesure et une distance, ce qui le place dans une situation privilégiée dans l'optique d'une étude des problèmes isopérimétriques sur les espaces métriques mesurés (voir le chapitre 3).

Le théorème III 4.1 de [C2] (voir aussi le théorème 14.2.1 de [BZ]) établit, pour tout compact  $K \subset M$ ,

$$\mathcal{P}_g(K) \leq \nu_g^+(K), \tag{1.17}$$

ce qui, sachant que, pour un compact à bord  $C^\infty$  le contenu extérieur de Minkowski et le volume riemannien  $(n - 1)$ -dimensionnel induit coïncident, permet d'étendre l'inégalité (1.15) aux parties compactes de  $M$  pour la notion  $\nu_g^+$ .

Après avoir proposé ces différentes fonctionnelles "volume de bord" avec référence explicite à  $\Omega$  pour prolonger le volume riemannien  $(n - 1)$ -dimensionnel, donnons un moyen de le faire en considérant directement l'ensemble  $\partial\Omega$ . La mesure de Hausdorff  $(n - 1)$ -dimensionnelle, notée  $\mathcal{H}_{n-1}(\cdot)$ , non triviale sur les ensembles de dimension de Hausdorff égale à  $n - 1$ , coïncide avec le volume riemannien sur les ouverts à bord  $C^1$ . De plus elle est minorée par le périmètre sur les ensembles de périmètre fini (théorème 14.6.2 de [BZ]) ce qui, avec le choix de cette notion de volume de bord, prolonge l'inégalité (1.15) aux ensembles de périmètre fini.

Ainsi, ces extensions de l'inégalité (1.15) permettent d'envisager de nouvelles définitions du profil isopérimétrique, équivalentes à la définition 1.1.1 :

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad h_{(M,g)}(\beta) := \inf \left\{ \frac{\mathcal{B}(\Omega)}{\text{vol}(M,g)} \mid \Omega \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}, \frac{\text{vol}_n(\Omega)}{\text{vol}(M,g)} = \beta \right\},$$

où si les fonctionnelles  $\mathcal{B}$  sont respectivement  $\mathcal{P}_g(\cdot)$ ,  $\mathcal{P}(\cdot)$ ,  $\nu_g^+(\cdot)$  et  $\mathcal{H}_{n-1}(\partial\cdot)$ , alors les ensembles  $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$  sont respectivement les boréliens, les ensembles de périmètre fini, les ensembles compacts et les ensembles de périmètre fini.

## 1.7 Conséquences géométriques et analytiques d'une estimation du profil isopérimétrique

Ce paragraphe a pour objectif de donner des motivations justifiant l'étude des propriétés isopérimétriques des variétés riemanniennes à travers leur fonction profil. Les meilleures références concernant l'exploitation d'une minoration du profil isopérimétrique dans le but d'estimer quantitativement différentes quantités sont l'article [G1] de S. Gallot et le livre [B] de P. Bérard. Plutôt que de tenter d'énumérer tous les travaux qui peuvent être conduits à partir d'estimations du profil isopérimétrique, nous avons choisi de consacrer une première partie aux détails de la technique d'intégration

de l'inégalité isopérimétrique (1.15) dont aucune référence satisfaisante ne semble exister dans la littérature. Les applications de cette méthode requièrent un minorant du profil et donnent des estimations quantitatives de quantités géométriques. Dans une seconde partie, nous énonçons des résultats comparatifs, établis sous une hypothèse de comparaison de profils isopérimétriques, avec les sphères euclidiennes comme espaces modèles. Nous insisterons dans les deux parties sur l'idée qu'une hypothèse isopérimétrique peut remplacer et affaiblir une hypothèse de courbure, à la fois dans les théorèmes de précompacité et dans les théorèmes de comparaison.

### 1.7.1 Intégration d'une inégalité isopérimétrique et applications

Nous allons tout d'abord établir une version intégrée de l'inégalité isopérimétrique (1.15), canoniquement associée au profil isopérimétrique. Ensuite, nous étudierons ses conséquences qui mettent en évidence l'idée qu'un minorant du profil isopérimétrique permet de majorer le diamètre, minorer le volume des boules, minorer la croissance des voisinages tubulaires d'un ensemble quelconque,... Enfin, nous utiliserons la minoration du volume des boules obtenue précédemment pour démontrer de nouveaux résultats de précompacité.

**Lemme 1.7.1** *Soit  $A$  une partie non vide d'une variété riemannienne fermée  $(M, g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Alors, pour tout  $\eta$  dans  $[0, \eta_A]$ ,*

$$\int_{\beta(0)}^{\beta(\eta)} \frac{d\beta}{h_{(M,g)}(\beta)} \geq \eta, \quad (1.18)$$

où  $\eta_A := \sup \{t \geq 0 \mid \text{vol}(A_t) < \text{vol}(M, g)\}$  et  $\beta(\eta) = \frac{\text{vol}(A_\eta)}{\text{vol}(M, g)}$ .

#### Démonstration.

Supposons  $\beta(0) > 0$ , ce qui signifie que l'adhérence de  $A$  est de mesure strictement positive, et définissons la fonction

$$\begin{aligned} f &: [0, \eta_A] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \eta &\longmapsto \int_{\beta(0)}^{\beta(\eta)} \frac{d\beta}{h_{(M,g)}(\beta)}. \end{aligned}$$

Les fonctions  $f$  et  $\beta$  sont croissantes donc dérivables presque partout sur  $]0, \eta_A[$  et en les points où elles sont toutes deux dérivables,

$$f'(\eta) = \frac{\beta'(\eta)}{h_{(M,g)}(\beta(\eta))}.$$

Or en les points où  $\beta$  est dérivable (voir la définition (1.16)),

$$\beta'(\eta) = \frac{\nu_g^+(\Omega_\eta)}{\text{vol}(M, g)},$$

ce qui, d'après le paragraphe 1.6 et l'extension de l'inégalité isopérimétrique (1.15), donne, aux points de dérivabilité de  $f$ ,

$$f'(\eta) = \frac{\nu_g^+(\Omega_\eta)}{h_{(M,g)}(\beta(\eta)) \text{vol}(M, g)} \geq 1. \quad (1.19)$$

Ainsi, le lemme d'intégration C.1.1 s'applique à la fonction  $f$ , croissante et continue sur  $]0, \eta_A[$ , et permet d'obtenir le résultat.

Si l'adhérence de la partie non vide  $A$  est de mesure nulle, il faut appliquer le résultat déjà démontré aux  $\varepsilon$ -voisinages tubulaires de  $A$  puis passer à la limite pour  $\varepsilon$  tendant

vers 0. Notons au passage que le comportement asymptotique du profil des variétés riemanniennes fermées, précisé lors de la proposition 1.5.2, garantit l'intégrabilité de l'inverse du profil en 0 et en 1.  $\square$

**Remarques 1.7.2**

- Nous avons volontairement énoncé le lemme 1.7.1 dans la plus grande généralité possible concernant la partie  $A$  et nous rappelons que le 0-voisinage coïncide avec l'adhérence  $\overline{A}$  de  $A$  dont le volume peut être strictement supérieur à celui de la partie  $A$  (qui n'est par ailleurs même pas supposée mesurable).
- Si nous appliquons le lemme 1.7.1 aux sphères euclidiennes sur lesquelles nous considérons une boule géodésique comme partie  $A$ , alors l'inégalité (1.19) devient une égalité (car les voisinages tubulaires d'une boule géodésique sont des boules géodésiques et donc des domaines isopérimétriques de la sphère considérée) si bien que l'inégalité (1.18) devient elle aussi une égalité. De ce point de vue, le lemme 1.7.1 est optimal.
- La preuve du lemme 1.7.1 montre que, dans ce type de raisonnement, la notion de volume de bord qui semble la plus pertinente est celle de contenu extérieur de Minkowski. Elle présente en effet l'avantage de relier la géométrie à l'analyse en faisant apparaître le volume du bord d'un compact comme la dérivée du volume de ses voisinages tubulaires. Ceci influencera la généralisation des problèmes isopérimétriques au cadre des mm-espaces, proposée au chapitre 3.

Nous allons donner, dans les paragraphes suivants, différentes applications de ce lemme 1.7.1 en considérant toujours une variété riemannienne fermée  $(M,g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ).

**Majoration du diamètre**

En appliquant le lemme 1.7.1 pour  $A = \{m\}$  où  $m$  est un point de  $M$  d'où part une géodésique, paramétrée par la longueur d'arc, minimisante sur  $[0, \text{diam}(M,g)]$  (ceci est possible car  $M$  est compacte), nous obtenons, comme  $\eta_A = \text{diam}(M,g)$ ,

$$\text{diam}(M,g) \leq \int_0^1 \frac{d\beta}{h_{(M,g)}(\beta)}. \tag{1.20}$$

Ce résultat apparaît et est utilisé dans [G1].

**Minoration du volume des petites boules**

Rappelons que le radius d'une variété riemannienne fermée  $(M,g)$ , noté  $\text{rad}(M,g)$  est défini par

$$\text{rad}(M,g) := \inf \left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists m \in M \text{ tel que } M \subset B(m,r) \right\}.$$

Si nous appliquons le lemme 1.7.1 dans le cas particulier où  $A$  est un point, en observant alors que  $\eta_A \geq \text{rad}(M,g)$ , nous obtenons,

$$\forall m \in M \quad , \quad \forall r \in [0, \text{rad}(M,g)] \quad , \quad \frac{\text{vol}(B(m,r))}{\text{vol}(M,g)} \geq \Gamma_{(M,g)}^{-1}(r), \tag{1.21}$$

où  $\Gamma_{(M,g)}$  est la bijection croissante définie par

$$\Gamma_{(M,g)} : \begin{array}{ccc} ]0,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \beta & \longmapsto & \int_0^\beta \frac{d\beta}{h_{(M,g)}(\beta)} \end{array}$$

et prolongée par continuité à  $[0,1]$ .

### Remarques 1.7.3

- Le pincement classique entre le diamètre et le radius,

$$\text{diam}(M,g) \leq 2\text{rad}(M,g) \leq 2\text{diam}(M,g)$$

permet de relire différemment la minoration (1.21).

- Sachant que, sur une variété riemannienne non compacte de volume fini, le volume des boules de petit rayon ne peut évidemment pas être uniformément minoré, l'inégalité (1.21) montre que le profil isopérimétrique de ces variétés n'est pas d'inverse intégrable au voisinage de 0 (c'est aussi le cas du profil gaussien dont l'équivalent au voisinage de 0 est connu, voir le paragraphe 3.2.2 et l'équivalent (3.10)). La connaissance explicite du profil des surfaces hyperboliques non compactes de volume fini pour les petits volumes (voir la remarque 1.5.3) illustre cette observation.

Ce résultat est particulièrement intéressant dans la mesure où il ouvre la voie à des théorèmes de précompacité sans hypothèse de courbure ni de dimension. Rappelons tout d'abord que M. Gromov a montré la précompacité de l'ensemble des variétés riemanniennes compactes de même dimension, de diamètre uniformément majoré et de courbure de Ricci uniformément minorée (théorème 5.3 page 65 de [GLP]). Nous allons donner des résultats de précompacité dans lesquels l'hypothèse de courbure est affaiblie (voir remarque 1.7.7) en une hypothèse isopérimétrique, les hypothèses de dimension et de majoration du diamètre sont affaiblies en une condition d'intégrabilité. Commençons par définir les ensembles de variétés intéressants.

**Définition 1.7.4** *Pour tous  $V > v > 0$  et  $\phi$  fonction continue sur  $[0,1]$ , strictement positive sur  $]0,1[$ , nulle en 0 et en 1 et d'inverse intégrable en 0 et en 1, notons  $\mathcal{N}(v,V,\phi)$  l'ensemble des variétés riemanniennes fermées, de volume compris entre  $v$  et  $V$  et de profil isopérimétrique minoré par  $\phi$ .*

**Théorème 1.7.5**  *$\mathcal{N}(v,V,\phi)$  est une partie précompacte de l'ensemble des espaces métriques compacts muni de la distance de Gromov-Hausdorff.*

#### Démonstration.

Ce résultat repose sur l'idée que l'hypothèse isopérimétrique implique, d'après (1.21), une minoration du volume de toutes les boules de rayon  $\varepsilon$ , sur les variétés dont le radius est supérieur ou égal à  $\frac{\varepsilon}{4}$ , par la quantité  $\text{vol}(M,g)\Gamma_\phi^{-1}(\frac{\varepsilon}{4})$  où  $\Gamma_\phi$  est la bijection croissante définie par

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi & : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \beta & \longmapsto \int_0^\beta \frac{d\beta}{\phi(\beta)} \end{aligned}$$

et prolongée par continuité à  $[0,1]$ .

Notons  $N(\varepsilon)$  le nombre maximal de boules de rayon  $\varepsilon$  deux à deux disjointes que peut contenir une variété riemannienne fermée satisfaisant  $h_{(M,g)} \geq \phi$ . Si le radius de  $(M,g)$  est inférieur à  $\frac{\varepsilon}{4}$  son diamètre est inférieur à  $\frac{\varepsilon}{2}$  et par conséquent  $N(\varepsilon) \leq 2$ . Si le radius de  $(M,g)$  est supérieur à  $\frac{\varepsilon}{4}$ , alors  $N(\varepsilon) \leq N(\frac{\varepsilon}{4})$  et

$$N(\varepsilon)\text{vol}(M,g)\Gamma_\phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \leq \text{vol}(M,g).$$

Ainsi, dans tous les cas,

$$N(\varepsilon) \leq \max\left(2, \frac{1}{\Gamma_\phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right),$$

ce qui, avec le lemme 1.7.6 qui suit (voir [GLP] théorème 5.3), permet de conclure.

**Lemme 1.7.6** *Un ensemble  $\mathcal{E}$  d'espaces métriques compacts est précompact pour la topologie induite par la distance de Gromov-Hausdorff si et seulement si pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , le nombre maximal de boules de rayon  $\varepsilon$  deux à deux disjointes que peut contenir un espace métrique de  $\mathcal{E}$  est majoré, uniformément sur  $\mathcal{E}$ .*

□

**Remarques 1.7.7**

- La preuve montre que les bornes sur le volume sont inutiles pour obtenir la précompacité.
- Ce résultat contient le résultat de précompacité classique de l'ensemble  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  car

$$\mathcal{M}(n,d,v,\delta) \subset \mathcal{N}(v, V_{n,\delta}(d), C(n,d,\delta)h_{(\mathbb{S}^n, can)})$$

où  $C(n,d,\delta)$  est la constante qui apparaît dans la minoration du profil isopérimétrique des variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  par un multiple du profil de la sphère canonique (théorème 2 de [BBG]). De ce point de vue, nous pouvons dire que l'hypothèse isopérimétrique affaiblit une hypothèse de courbure. En revanche, même si la borne sur le diamètre imposée dans  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  n'apparaît plus explicitement dans  $\mathcal{N}(v,V,\phi)$ , elle se déduit de l'intégrabilité de l'inverse de  $\phi$  au voisinage de 0 et 1 (voir la majoration (1.20)).

- Les éléments de  $\mathcal{N}(v,V,\phi)$  sont a priori de toute dimension. Cependant, si  $\phi$  possède un équivalent au voisinage de 0 de la forme  $c_\phi \beta^{\frac{n-1}{n}}$  où  $c_\phi > 0$ , alors, d'après l'équivalent (1.12) établi dans la proposition 1.5.2, seules les variétés de dimension inférieure ou égale à  $n$  peuvent être dans l'ensemble  $\mathcal{M}(v,V,\phi)$ . En revanche, si  $\phi(\beta) \sim \beta(\log \beta)^2$  au voisinage de 0, il n'y a en effet aucune restriction a priori sur la dimension des variétés de  $\mathcal{N}(v,V,\phi)$ .
- Compte tenu de l'équivalent (1.12) du profil au voisinage de 0 (voir la proposition 1.5.2), il est possible d'inclure la majoration du volume dans l'hypothèse isopérimétrique en imposant une condition sur le comportement asymptotique de  $\phi$ . La contrepartie liée à cette dissimulation réside dans la nécessité de fixer la dimension  $n$  des variétés considérées. En effet, notons  $\mathcal{N}_n(v,\phi)$  l'ensemble des variétés riemanniennes fermées de dimension  $n$ , de volume minoré par  $v$  et de profil minoré par  $\phi$ , fonction qui possède un équivalent au voisinage de 0 de la forme  $c_\phi \beta^{\frac{n-1}{n}}$  où  $c_\phi > 0$ . Alors,

$$\mathcal{N}_n(v,\phi) \subset \mathcal{N}\left(v, \left(\frac{\gamma_n}{c_\phi}\right)^{\frac{1}{n}}, \phi\right)$$

si bien que  $\mathcal{N}_n(v,\phi)$  est aussi un ensemble précompact.

**Croissance du volume des voisinages tubulaires**

**Lemme 1.7.8** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Alors pour tout compact non vide  $K$  de  $M$  et pour tout  $\eta > 0$ ,*

$$\frac{1}{\text{vol}(M,g)} \frac{\text{vol}(K_\eta) - \text{vol}(K)}{\eta} \geq \inf_{\frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(M,g)} \leq \tilde{\beta} \leq \frac{\text{vol}(K_\eta)}{\text{vol}(M,g)}} h_{(M,g)}(\tilde{\beta}). \tag{1.22}$$

**Démonstration.**

Le résultat est immédiat si  $\text{vol}(K) = 0$  ou si  $\text{vol}(K_\eta) = \text{vol}(M, g)$  car le minorant est alors nul. Supposons donc  $\text{vol}(K) > 0$  et  $\text{vol}(K_\eta) < \text{vol}(M, g)$ . L'inégalité cherchée vient de l'application du lemme 1.7.1 qui donne l'estimation

$$\eta \leq \int_{\frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(M, g)}}^{\frac{\text{vol}(K_\eta)}{\text{vol}(M, g)}} \frac{d\beta}{h_{(M, g)}(\beta)}.$$

Sous les conditions  $\text{vol}(K) > 0$  et  $\text{vol}(M \setminus K_\eta) > 0$ , nous en déduisons

$$\eta \leq \frac{1}{\text{vol}(M, g)} \frac{\text{vol}(K_\eta) - \text{vol}(K)}{\inf_{\frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(M, g)} \leq \tilde{\beta} \leq \frac{\text{vol}(K_\eta)}{\text{vol}(M, g)}} h_{(M, g)}(\tilde{\beta})},$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque 1.7.9** Ce lemme sera utilisé au chapitre 4, dans la preuve du théorème 4.2.4, comme un moyen de majorer le profil isopérimétrique à partir d'un taux d'accroissement du volume des voisinages tubulaires d'une partie compacte. Par ailleurs, nous verrons aussi dans le chapitre 4, à l'occasion du lemme 4.2.1, que les taux d'accroissement du volume des voisinages tubulaires d'un domaine isopérimétrique permettent de minorer le profil isopérimétrique.

### 1.7.2 Comparaisons analytiques et géométriques issues d'une comparaison isopérimétrique

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que des minorations du profil isopérimétrique permettent d'estimer différentes quantités géométriques. Nous allons maintenant préciser que lorsque le minorant du profil isopérimétrique est le profil de la sphère de même dimension, nous disposons de résultats de comparaison. Il semblerait que cette démarche ait commencé par la comparaison de la plus petite valeur propre non nulle dans [Gr1], pour être ensuite étendue à d'autres quantités géométriques et analytiques par P. Bérard, G. Besson et S. Gallot (voir [BBG], [BG], [G1], [G2], [B1] et [B2]).

Une motivation pour étudier les conséquences d'une comparaison des profils isopérimétriques réside dans le fait qu'elle peut s'interpréter comme un affaiblissement d'une hypothèse de courbure. En effet, généralisant un résultat de P. Lévy (voir [L]), M. Gromov a démontré dans [Gr1] que les variétés riemanniennes fermées de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) satisfaisant  $\text{Ricci}_{(M, g)} \geq (n-1)g$  vérifient

$$h_{(M, g)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}. \quad (1.23)$$

Nous rassemblons dans la proposition suivante différents résultats de comparaison, assez classiques sous l'hypothèse  $\text{Ricci} \geq (n-1)g$ , mais qui sont en fait plus généraux et peuvent être établis sous l'hypothèse isopérimétrique  $h_{(M, g)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}$ , moins restrictive que l'hypothèse de courbure d'après l'inégalité (1.23) de Lévy-Gromov.

**Proposition 1.7.10** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad h_{(M, g)}(\beta) \geq h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta). \quad (1.24)$$

Alors,

(i) *pour toute partie non vide  $A \subset M$ , pour tout  $h > 0$ ,*

$$\frac{\text{vol}(A_h)}{\text{vol}(M, g)} \geq \frac{\text{vol}(A_h^*)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})}, \quad (1.25)$$

où  $A^*$  est une boule géodésique de  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$  telle que<sup>3</sup>

$$\frac{\text{vol}(\overline{A})}{\text{vol}(M, g)} \geq \frac{\text{vol}(A^*)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})},$$

(ii)

$$\text{diam}(M, g) \leq \pi,$$

(iii)

$$\text{vol}(M, g) \leq \text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can}),$$

(iv)

$$h_C(M, g) \geq h_C(\mathbb{S}^n, \text{can}),$$

(v) pour tout ouvert  $\Omega$  de  $M$  à bord régulier, en notant  $\lambda_1^D(\Omega)$  la première valeur propre de l'opérateur Laplacien sur  $\Omega$  avec la condition au bord de Dirichlet,

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(\Omega^*),$$

où  $\Omega^*$  est une boule géodésique de  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$  telle que

$$\frac{\text{vol}(\Omega^*)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})} = \frac{\text{vol}(\Omega)}{\text{vol}(M, g)},$$

en particulier

$$\lambda_1(M, g) \geq \lambda_1(\mathbb{S}^n, \text{can}) = n,$$

(vi) pour tout couple  $(m, t)$  dans  $M \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\text{vol}(M, g)k_{(M, g)}(t, m, m) \leq \text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})k_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(t, m, m),$$

où  $k_{(M, g)}(t, m, m)$  désigne le noyau de la chaleur de  $(M, g)$ .

**Démonstration.**

Les comparaisons (i) et (ii) sont des conséquences immédiates des estimations (1.18) et (1.20) dans lesquelles la sphère canonique réalise des cas d'égalité. Les résultats (iii) et (iv) se déduisent respectivement du contenu géométrique du comportement asymptotique du profil au voisinage de 0 (voir la proposition 1.5.2) et de la définition de la constante isopérimétrique de Cheeger. La preuve de (v) repose sur une technique de symétrisation particulièrement bien exposée dans [B2] et nous renvoyons à [G1] pour la démonstration de (vi). □

**Remarques 1.7.11**

- Nous pourrions ajouter à cette liste la comparaison des constantes de Sobolev proposée dans la proposition 5.6 de [G1]. Une minoration des valeurs propres du laplacien,  $\lambda_i(M, g)$  pour  $i \geq 2$  et une majoration de la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres du laplacien sur  $(M, g)$ , résultats quantitatifs et non comparatifs, sont également obtenus dans [B2] sous la même hypothèse isopérimétrique. Nous renvoyons aussi à [BG] et au théorème 5.4 de [G1] pour des énoncés précis et leurs preuves.
- L'inégalité (1.25) permet par exemple d'établir un lien entre les propriétés isopérimétriques des sphères euclidiennes et le phénomène de concentration de leur mesure riemannienne canonique (voir les livres [Mi], [Gr] et [Led1] pour des définitions et plus de détails sur ce point de vue, voir [G02] pour de plus récents développements).

---

3. La notation  $\overline{A}$  désigne l'adhérence de la partie  $A$ .

- À la lumière de cette proposition 1.26, nous pouvons interpréter la minoration du profil isopérimétrique d'une variété riemannienne fermée de dimension  $n \geq 2$  par celui de la sphère de même dimension comme un affaiblissement de l'hypothèse  $\text{Ricci} \geq (n - 1)g$ . En effet, par homogénéité du profil (voir la proposition 1.2.1), quitte à écraser suffisamment la métrique par homothétie, toute variété riemannienne possède une métrique, multiple de sa métrique d'origine, pour laquelle elle satisfait l'hypothèse (1.24).

En conclusion, nous remarquons qu'au sein des variétés riemanniennes fermées, les sphères euclidiennes sont les seuls espaces modèles pertinents dont nous disposons. Nous verrons, au chapitre 3, qu'en se plaçant dans le cadre des espaces métriques mesurés, s'y ajouteront un grand nombre d'espaces de comparaison dont certains, comme  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  muni de la mesure gaussienne, recèlent des propriétés particulièrement intéressantes et proches de celles des sphères euclidiennes (voir le paragraphe 3.2.2).



## Chapitre 2

# Concavité du profil isopérimétrique

La définition du profil isopérimétrique d'une variété riemannienne fermée  $(M, g)$  comme un infimum nous incite à chercher, en utilisant le calcul variationnel, une relation différentielle du second ordre satisfaite par cette fonction. En effet, nous établissons que si  $\text{Ricci}_{(M, g)} \geq (n-1)\delta g$  ( $\delta \in \mathbb{R}$ ), alors le profil renormalisé  $y_{(M, g)} := h_{(M, g)}^{\frac{n}{n-1}}$  vérifie l'inéquation différentielle fondamentale

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \overline{D^2}y(\beta) \leq -n\delta y(\beta)^{\frac{2-n}{n}}. \quad (2.1)$$

D'une manière plus générale, nous observons que les puissances du profil isopérimétrique comprises entre 1 et  $\frac{n}{n-1}$  sont solutions d'une famille d'inéquations différentielles dont les seuls paramètres géométriques sont la dimension de la variété et un minorant de la courbure de Ricci. Ces propriétés différentielles ont de nombreuses conséquences analytiques qui peuvent être interprétées d'un point de vue géométrique. Tout d'abord, nous étudions la régularité imposée au profil isopérimétrique par la relation différentielle (2.1) et nous remarquons que ces propriétés analytiques conduisent à un contrôle géométrique et topologique des domaines isopérimétriques et de leur bord. Ensuite, nous donnons une nouvelle preuve, de nature variationnelle, de l'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov (voir [Gr1]), obtenue à partir d'un résultat de comparaison analytique des solutions de l'inéquation différentielle (2.1). Plus généralement, nous intégrons l'inéquation différentielle (2.1) pour déduire des comparaisons géométriques de résultats de comparaisons analytiques. Ceci nécessite le choix de paramètres géométriques pertinents liés aux paramètres de comparaisons analytiques. Ainsi, nous parvenons à établir des théorèmes de pincement du profil isopérimétrique qui dépendent de la dimension et de minorants du volume, de la constante isopérimétrique de Cheeger et de la courbure de Ricci. Enfin, nous exploitons ces résultats de pincement afin de comprendre les liens entre la "presque maximalité" du volume ou du diamètre et la "presque minimalité" du profil isopérimétrique. Pour les variétés satisfaisant  $\text{Ricci} \geq (n-1)$ , ceci illustre la différence entre les deux conditions "volume proche de  $\alpha_n$ " et "diamètre proche de  $\pi$ ". En particulier, nous obtenons, pour une suite  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de variétés fermées telles que  $\text{Ricci} \geq (n-1)$ , que la convergence vers la sphère canonique en distance de Gromov-Hausdorff est équivalente à la convergence vers 1 du rapport des profils  $h_{(M_i, g_i)}/h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}$ , uniformément sur  $]0, 1[$  tandis que la convergence de la suite des diamètres vers  $\pi$  est équivalente à la convergence vers 0 de la différence des profils  $h_{(M_i, g_i)} - h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}$ , uniformément sur  $]0, 1[$ .

Ce chapitre doit être considéré comme l'élément central et moteur du travail proposé dans cette thèse. Les idées développées au cours des chapitres 3 et 4 trouvent leur origine

dans les résultats obtenus dans ce chapitre 2. En effet, nous essaierons de généraliser l'aspect caractérisation différentielle des propriétés de concavité du profil isopérimétrique des mm-espaces au chapitre 3 tandis que le chapitre 4 sera consacré à l'étude d'une forme de continuité du profil isopérimétrique vis-à-vis de la distance de Gromov-Hausdorff sur les variétés riemanniennes fermées.

Nous travaillons en permanence sous une hypothèse de courbure. Plus précisément, compte tenu des techniques auxquelles nous faisons appel, une minoration uniforme de la courbure de Ricci du type

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad , \quad \delta \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

apparaît comme l'hypothèse de courbure pertinente, et c'est elle que nous avons choisie. Cependant, une autre possibilité aurait été de partir d'une hypothèse donnant une borne inférieure sur la quantité homogène  $\text{Ricci}_{(M,g)} \times \text{diam}(M,g)^2$  du type

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \text{diam}(M,g)^2 \geq (n-1)\delta' g(\cdot, \cdot) \quad , \quad \delta' \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Il suffit de remplacer  $\delta$  par  $\frac{\delta'}{\text{diam}^2}$  pour passer de l'une à l'autre, c'est pourquoi nous ne donnons les résultats que sous l'hypothèse (2.2).

## 2.1 Technique variationnelle et relations différentielles

La recherche d'une inéquation différentielle pour le profil isopérimétrique est une idée suggérée par au moins deux raisons très différentes. D'une part, la définition même du profil isopérimétrique par l'infimum d'une fonctionnelle rend possible une caractérisation variationnelle de cet extremum par une inéquation différentielle du second ordre. D'autre part, presque tous (tous?) les théorèmes de comparaison classiques en géométrie riemannienne (Rauch, Bishop-Gromov, Meyer, Heintze-Karcher,...) peuvent être obtenus à partir de relations différentielles entre les coefficients de la métrique et leurs dérivées successives (voir par exemple [CE], [E1], [E2] et les chapitres 6, 9 et 11 de [Pn] sur les théorèmes de comparaison). Nous rajoutons ainsi, dans la suite du chapitre, l'inégalité de Lévy-Gromov à cette liste.

### 2.1.1 Formules de variations

L'objet de cette partie est d'étudier le comportement des aires et des volumes lors de la déformation d'une hypersurface.

Considérons l'ouvert  $\Omega$  d'une variété riemannienne fermée  $(M,g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Notons  $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$  son bord que nous décomposons en l'union disjointe d'un ensemble régulier  $\partial\Omega_r$ , constitué de l'ensemble des points au voisinage desquels  $\partial\Omega$  est une hypersurface de classe  $C^\infty$ , et d'un ensemble singulier  $\partial\Omega_s := \partial\Omega \setminus \partial\Omega_r$ . Nous supposons dans la suite que  $\partial\Omega_r$  est muni d'un champ normal sortant régulier. Nous allons décrire les déformations du domaine  $\Omega$  au voisinage de  $\partial\Omega_r$  dans le système des coordonnées normales autour de  $\partial\Omega_r$  (voir dans [Ca] et [G1] des descriptions analogues).

Notons

$$\begin{aligned} \Phi & : \quad \partial\Omega_r \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \quad M \\ & (m, s) & \longmapsto & \quad \exp_m(s\vec{\nu}(m)) \end{aligned}$$

l'application exponentielle orthogonale autour de  $\partial\Omega_r$ . Soient  $s_+$  (resp.  $s_-$ ), la fonction réelle définie sur  $\partial\Omega_r$  par la propriété suivante :  $s_+(m)$  (resp.  $s_-(m)$ ) est le supremum des  $s \in \mathbb{R}^+$  tels que la géodésique  $t \mapsto \exp_m(t\vec{\nu}(m))$  est minimisante sur  $[0, s]$  (resp. sur  $[-s, 0]$ ). Les fonctions  $s_+$  et  $s_-$  sont continues sur  $\partial\Omega_r$ . Paramétronsons les déformations

normales de  $\partial\Omega_r$  par l'espace vectoriel  $C_c^2(\partial\Omega_r, \mathbb{R})$  des fonctions réelles de classe  $C^2$  à support compact dans  $\partial\Omega_r$ . Ce choix de déformations correspond bien-entendu aux variations qui laissent fixe un voisinage de la partie singulière  $\partial\Omega_s$  de l'hypersurface  $\partial\Omega$ . Voyons maintenant les conditions qu'il faut imposer pour que la variation ne fasse pas apparaître de nouvelles singularités lors de la déformation de la partie régulière. Soit  $\text{supp}(\varphi)$  le support d'une fonction  $\varphi$  non identiquement nulle appartenant à  $C_c^2(\partial\Omega_r, \mathbb{R})$  et notons

$$\varepsilon_\varphi := \frac{1}{\sup_{m \in \partial\Omega_r} |\varphi(m)|} \min \left( \inf_{m \in \text{supp}(\varphi)} s_+(m), \inf_{m \in \text{supp}(\varphi)} s_-(m) \right).$$

$\varepsilon_\varphi$  est strictement positif puisque  $s_+$  et  $s_-$  sont continues, strictement positives et  $\text{supp}(\varphi)$  est un ensemble compact. Ainsi, l'exponentielle orthogonale, qui est un difféomorphisme de  $\text{supp}(\varphi) \times ]-\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\varphi[$  dans le  $\varepsilon_\varphi$ -voisinage tubulaire de  $\text{supp}(\varphi)$  dans  $M$ , apparaît comme un système de coordonnées pertinent dans l'étude des variations normales infinitésimales dont l'amplitude est proportionnelle à la fonction  $\varphi$ . Définissons maintenant l'ouvert  $\Omega_{\varphi,t}$  par :

$$\Omega_{\varphi,t} := \left[ \Omega \cup \left\{ \Phi(p \times [0, t\varphi(p)]) / p \in \partial\Omega_r, \varphi(p) > 0 \right\} \right] \setminus \left\{ \Phi(p \times [t\varphi(p), 0]) / p \in \partial\Omega_r, \varphi(p) < 0 \right\}$$

dont le bord  $\partial\Omega_{\varphi,t}$  est égal à

$$\partial\Omega_{\varphi,t} = \partial\Omega_s \amalg \left\{ \Phi(p, t\varphi(p)) / p \in \partial\Omega_r \right\}.$$

Posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\varphi(t) &= \frac{\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega_{\varphi,t})}{\text{vol}(M,g)}, \\ \mathbf{v}_\varphi(t) &= \frac{\text{vol}_n(\Omega_{\varphi,t})}{\text{vol}(M,g)}. \end{aligned}$$

Dans le système des coordonnées normales décrit précédemment, nous obtenons :

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega_{\varphi,t}) = \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \setminus \text{supp}(\varphi)) + \int_{\text{supp}(\varphi)} b_{t\varphi}(m) d\nu_{g|_{\partial\Omega}}(m)$$

et

$$\text{vol}_n(\Omega_{\varphi,t}) = \text{vol}_n(\Omega) + \int_{\partial\Omega_r} \int_0^{t\varphi(m)} b(m,s) d\nu_{g|_{\partial\Omega}}(m) ds,$$

où  $d\nu_{g|_{\partial\Omega}}(m)$ ,  $b_{t\varphi}(m) d\nu_{g|_{\partial\Omega}}(m)$  et  $b(m,s) d\nu_{g|_{\partial\Omega}}(m) ds$  désignent respectivement la forme volume de  $\partial\Omega$  au point régulier  $m$ , la forme volume de l'hypersurface  $\partial\Omega_{\varphi,t}$  au point régulier  $\exp_m(t\varphi(m)\vec{\nu}(m))$  et la forme volume de  $M$  au point  $\exp_m(s\vec{\nu}(m))$ .

D'après les formules des variations premières et secondes des volumes  $n$  et  $(n-1)$ -dimensionnels (voir [Ca] par exemple), les fonctions  $\mathbf{a}_\varphi$  et  $\mathbf{v}_\varphi$  possèdent les développements limités au second ordre suivants en la variable  $t$  :

**Proposition 2.1.1**

$$\mathbf{a}_\varphi(t) = \frac{\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol}(M,g)} + \mathbf{a}'_\varphi(0)t + \frac{\mathbf{a}''_\varphi(0)}{2}t^2 + O(t^3), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}_\varphi(t) = \frac{\text{vol}_n(\Omega)}{\text{vol}(M,g)} + \mathbf{v}'_\varphi(0)t + \frac{\mathbf{v}''_\varphi(0)}{2}t^2 + O(t^3), \quad (2.5)$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}'_{\varphi}(0) &= \frac{1}{\text{vol}(M,g)} \int_{\partial\Omega_r} \eta_{\vec{v}}(p) \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p), \\
\mathbf{a}''_{\varphi}(0) &= \frac{1}{\text{vol}(M,g)} \int_{\partial\Omega_r} \left( \eta_{\vec{v}}(p)^2 - \|A_p^{\vec{v}}\|_2^2 - \text{Ricci}_{(M,g)}(\vec{v}(p), \vec{v}(p)) \right) \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p) \\
&\quad + \frac{1}{\text{vol}(M,g)} \int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \varphi\|_2^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p) \\
\mathbf{v}'_{\varphi}(0) &= \frac{1}{\text{vol}(M,g)} \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p), \\
\mathbf{v}''_{\varphi}(0) &= \frac{1}{\text{vol}(M,g)} \int_{\partial\Omega_r} \eta_{\vec{v}}(p) \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p),
\end{aligned}$$

où  $A_p^{\vec{v}}$  représente la seconde forme fondamentale de l'hypersurface  $\partial\Omega$  au point régulier  $p$  et  $\eta_{\vec{v}}(p)$  désigne la courbure moyenne au point régulier  $p$  de  $\partial\Omega_r$ , définie comme la trace de la seconde forme fondamentale, c'est-à-dire la somme des courbures principales. En particulier, si la variété ambiante est de dimension 2,  $\|A_p^{\vec{v}}\|_2^2$  et  $\eta_{\vec{v}}(p)^2$  sont deux quantités égales.

### 2.1.2 Approche variationnelle des inéquations différentielles possibles

Nous allons étudier quel type d'inéquation différentielle nous pouvons espérer pour les différentes puissances du profil isopérimétrique obtenues en faisant varier le paramètre  $\alpha \in [n, +\infty]$  dans l'expression  $^1 (h_{(M,g)})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ . Dans un premier temps les deux puissances qui nous intéressent plus particulièrement sont  $\alpha = +\infty$  et  $\alpha = n$ , mais cette étude un peu plus systématique prendra plus de sens au chapitre 3 (voir le théorème 3.4.14 par exemple).

Supposons que, pour  $\beta_0$  dans  $]0,1[$ , nous savons qu'il existe un domaine isopérimétrique  $\Omega$  de volume relatif  $\beta_0$ . Son bord  $\partial\Omega$  est une hypersurface dont nous allons considérer des variations dans le système de coordonnées décrit au paragraphe précédent. En considérant une fonction  $\varphi$  de valeur moyenne non nulle, ce qui correspond à une variation pour laquelle  $\mathbf{v}_{\varphi}$  est bijective au voisinage de 0, nous pouvons écrire, pour  $u$  suffisamment petit, par définition du profil isopérimétrique,

$$h_{(M,g)}(\beta_0 + u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \leq \mathbf{a}_{\varphi}(\mathbf{v}_{\varphi}^{-1}(\beta_0 + u))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{h_{(M,g)}(\beta_0 + u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + h_{(M,g)}(\beta_0 - u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - 2h_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{u^2} &\leq \frac{1}{u^2} \left[ \mathbf{a}_{\varphi}(\mathbf{v}_{\varphi}^{-1}(\beta_0 + u))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{a}_{\varphi}(\mathbf{v}_{\varphi}^{-1}(\beta_0 - u))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right. \\
&\quad \left. - 2\mathbf{a}_{\varphi}(\mathbf{v}_{\varphi}^{-1}(\beta_0))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right]
\end{aligned}$$

ce qui donne, compte tenu des développements limités (2.4) et (2.5) obtenus pour les volumes  $n$ -dimensionnels et  $(n-1)$ -dimensionnels, après passage à la limite supérieure

---

1. Nous adoptons ici les conventions usuelles suivantes: si  $\alpha = +\infty$ ,  $\frac{\alpha}{\alpha-1} = 1 = \frac{\alpha-2}{\alpha-1}$ ,  $\frac{1}{\alpha-1} = 0$  et si  $\alpha \in ]1, +\infty[$ ,  $0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = 0$ .

lorsque  $u$  tend vers 0,

$$\begin{aligned} \overline{D^2}\left(h_{(M,g)}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)(\beta_0) &\leq \overline{D^2}\left((a_\varphi \circ v_\varphi^{-1})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)(0) \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \left(h_{(M,g)}(\beta_0)\right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \\ &\quad \times \left[ \frac{\mathbf{a}''_\varphi(0)\mathbf{v}'_\varphi(0) - \mathbf{a}'_\varphi(0)\mathbf{v}''_\varphi(0)}{\mathbf{v}'_\varphi(0)^3} \mathbf{a}_\varphi(0) + \frac{1}{\alpha-1} \frac{\mathbf{a}'_\varphi(0)^2}{\mathbf{v}'_\varphi(0)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.2 Une famille d'inéquations différentielles pour la fonction profil isopérimétrique

### 2.2.1 Enoncé des résultats

#### Une inéquation différentielle fondamentale pour le profil isopérimétrique

Voici la propriété différentielle du profil isopérimétrique dont nous déduisons, au cours de ce chapitre, les conséquences analytiques sur le profil, puis géométriques sur la variété considérée. De plus, ce résultat est le point de départ de notre étude du profil, il donne un sens au théorème 2.2.3 et représente l'origine commune de tous les résultats établis aux paragraphes 2.3, 2.4, 2.5, et 2.6.

**Théorème 2.2.1** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad , \quad \text{où } \delta \in \mathbb{R}.$$

Alors, le profil renormalisé  $y_{(M,g)} := h_{(M,g)}^{\frac{n}{n-1}}$  vérifie :

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad \overline{D^2}y_{(M,g)}(\beta) \leq -n\delta y_{(M,g)}(\beta)^{\frac{2-n}{n}}. \quad (2.7)$$

De plus, s'il y a égalité en  $\beta_0 \in ]0,1[$ , alors tout domaine isopérimétrique de volume relatif  $\beta_0$  a un bord totalement ombilical<sup>2</sup> le long duquel la courbure de Ricci, évaluée sur les normales unitaires<sup>3</sup>, est égale à  $(n-1)\delta$ .

#### Remarques 2.2.2

- En dimension 2, cette inégalité se simplifie et devient linéaire :

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad \overline{D^2}y_{(M,g)}(\beta) \leq -2\delta. \quad (2.8)$$

- La non-linéarité de l'inéquation différentielle (2.7) en dimension supérieure ou égale à 3 nous force à mener séparément l'étude de la dimension 2 et de la dimension  $n \geq 3$ . De plus, les résultats obtenus en dimension 2 sont plus explicites que ceux obtenus en dimension supérieure.
- Si  $(M,g)$  satisfait les hypothèses du théorème 2.2.1, alors pour tout  $\lambda > 0$ , le profil isopérimétrique renormalisé associé à la variété  $(M, \lambda^2 g)$  vérifie l'inéquation différentielle

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad \overline{D^2}y(\beta) \leq -n \frac{\delta}{\lambda^2} y(\beta)^{\frac{2-n}{n}}.$$

2. Une hypersurface est *totalement ombilicale* si en tout point, la seconde forme fondamentale est un multiple de l'identité.

3. Il n'y a pas besoin de préciser le sens de la normale car la courbure de Ricci est une forme quadratique.

Ceci peut s'obtenir de deux façons différentes : soit en appliquant le théorème 2.2.1 au profil renormalisé  $y_{(M,g)}$  puis en utilisant la relation d'homogénéité (voir la proposition 1.2.1)

$$y_{(M,\lambda^2g)} = \lambda^{-\frac{n}{n-1}} y_{(M,g)},$$

soit en appliquant directement le théorème 2.2.1 à la variété  $(M,\lambda^2g)$  après avoir rappelé la propriété d'homogénéité suivante concernant la courbure de Ricci

$$\text{Ricci}_{(M,g)} \geq (n-1)\delta g \Rightarrow \text{Ricci}_{(M,\lambda^2g)} \geq (n-1)\frac{\delta}{\lambda^2}(\lambda^2g).$$

- La description des domaines isopérimétriques sur les espaces modèles  $\mathbb{M}_\delta^n$ , la caractérisation des cas d'égalité et l'étude de la preuve du théorème 2.2.1 permettent de comprendre géométriquement<sup>4</sup> que, pour  $\delta > 0$ , le profil isopérimétrique renormalisé  $y_{\mathbb{S}_\delta^n} := h_{\mathbb{S}_\delta^n}^{\frac{n}{n-1}}$  de la sphère euclidienne  $\mathbb{S}_\delta^n$  est solution de l'équation différentielle

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad \overline{D^2}y(\beta) = -n\delta y(\beta)^{\frac{2-n}{n}}, \quad (2.9)$$

tandis que, pour  $\delta \leq 0$ , le profil isopérimétrique renormalisé  $Y_{\mathbb{M}_\delta^n} := I_{\mathbb{M}_\delta^n}^{\frac{n}{n-1}}$  de  $\mathbb{M}_\delta^n$  est solution de l'équation différentielle

$$\forall V \in ]0, +\infty[ \quad , \quad \overline{D^2}Y(V) = -n\delta Y(V)^{\frac{2-n}{n}}. \quad (2.10)$$

### Une famille d'inéquations différentielles

Une analyse plus fine de la preuve de l'inéquation différentielle (2.7) et de ses conséquences sur la régularité du profil isopérimétrique permet de voir qu'elle peut s'inscrire dans le cadre plus général d'une famille d'inéquations différentielles pour toutes les puissances du profil comprises entre 1 et  $\frac{n}{n-1}$ . Cependant, ce sont les conséquences de l'inéquation différentielle (2.7) sur la régularité du profil qui permettent de donner un sens précis au terme en  $h'(\beta)$  (voir les remarques 2.2.4) et pour cette raison, le théorème 2.2.1 est qualifié de résultat fondamental.

**Théorème 2.2.3** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad , \quad \text{où } \delta \in \mathbb{R}.$$

*Alors, pour tout réel  $\alpha$  tel que  $n \leq \alpha \leq +\infty$ , le profil isopérimétrique à la puissance  $\frac{\alpha}{\alpha-1}$  vérifie, pour tout  $\beta \in ]0,1[\setminus I$ ,*

$$\begin{aligned} \forall \beta \in ]0,1[\setminus I, \quad \overline{D^2}\left(h_{(M,g)}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)(\beta) &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1} h_{(M,g)}(\beta)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \\ &\times \left[ \frac{n-\alpha}{(\alpha-1)(n-1)} h'_{(M,g)}(\beta)^2 - (n-1)\delta \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

*où  $I$  est une partie au plus dénombrable de  $]0,1[$ .*

*De plus, s'il y a égalité en  $\beta_0 \in ]0,1[\setminus I$ , alors tout domaine isopérimétrique de volume relatif  $\beta_0$  a un bord totalement ombilical le long duquel la courbure de Ricci, évaluée sur les normales unitaires est égale à  $(n-1)\delta$ .*

---

4. Une autre preuve de ce résultat, entièrement analytique, consiste à mener le calcul explicite à partir des expressions données au paragraphe 1.1.

**Remarques 2.2.4**

- Nous ne savons pas, a priori, que le profil est dérivable en tout point  $\beta$  de  $]0,1[$ , d'où la difficulté de donner un sens à une relation qui fait intervenir explicitement sa dérivée. En fait, les résultats de régularité obtenus à partir de (2.7) (voir la proposition G.3.6) nous permettent de donner un sens à la dérivée du profil sur le complémentaire d'un ensemble au plus dénombrable qui correspond à l'ensemble des points où les dérivées à droite et à gauche sont distinctes. Nous observons par ailleurs qu'en les points  $\beta$  où les dérivées à droite et à gauche diffèrent, un développement limité au premier ordre montre, en utilisant la relation  $h_{(M,g)'_d}(\beta) \leq h_{(M,g)'_g}(\beta)$  établie lors de la proposition G.3.6, que

$$\overline{D^2} \left( h_{(M,g)}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right) (\beta) = -\infty. \quad (2.12)$$

Par conséquent, nous pouvons affirmer qu'en remplaçant  $h'_{(M,g)}$  dans (2.11) par la dérivée à droite  $h_{(M,g)'_d}$  ou par la dérivée à gauche  $h_{(M,g)'_g}$ , l'inéquation différentielle (2.11) a un sens pour tout  $\beta$  dans  $]0,1[$ . Le cas d'égalité dans ces généralisations ne se produisant qu'en un point où le profil est dérivable compte tenu de (2.12), il impose, sur les domaines isopérimétriques de volume relatif correspondant, les mêmes conditions géométriques que celles énoncées dans le théorème 2.2.3.

- Cette famille d'inéquations différentielles permet de retrouver (2.7) pour  $\alpha = n$ . Par ailleurs, le cas  $\alpha = +\infty$  est intéressant, il donne

$$\forall \beta \in ]0,1[ \setminus I \quad , \quad \overline{D^2} h_{(M,g)}(\beta) \leq -\frac{n-1}{h_{(M,g)}(\beta)} \left[ \frac{h'_{(M,g)}(\beta)^2}{(n-1)^2} + \delta \right]. \quad (2.13)$$

- L'étude de la caractérisation des cas d'égalité et de la preuve du théorème 2.2.3 permet de comprendre géométriquement que la fonction  $h_{(\mathbb{S}^n, can)}$  réalise des cas d'égalité dans (2.11) . Elle est, en effet, solution des équations différentielles suivantes, paramétrées par  $\alpha \in [n, +\infty[$ ,

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad (f^{\frac{\alpha}{\alpha-1}})''(\beta) = \frac{\alpha}{\alpha-1} f(\beta)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \left[ \frac{n-\alpha}{(\alpha-1)(n-1)} f'(\beta)^2 - (n-1) \right].$$

En particulier, compte tenu de la relation suivante valable pour  $n \geq 2$ ,

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad \left( \frac{h'_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta)}{n-1} \right)^2 = \left( h_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta) \int_0^\pi \sin u^{n-1} du \right)^{-\frac{2}{n-1}} - 1,$$

l'inéquation différentielle (2.13) devient pour  $\alpha = +\infty$ ,

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad h_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta)^{\frac{n+1}{n-1}} h''_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta) = -\frac{n-1}{\left( \int_0^\pi \sin u^{n-1} du \right)^{\frac{2}{n-1}}}. \quad (2.14)$$

Cette équation différentielle est attribuée à Schmuckenscläger dans le lemme 3 de [Ba2]. Pour les espaces modèles non compacts  $\mathbb{M}_\delta^n$  ( $\delta \leq 0$ ), l'équation différentielle (2.14) vérifiée par le profil des sphères se généralise. En effet, pour tout  $\delta \leq 0$ , les profils  $I_{\mathbb{M}_\delta^n}$  satisfont la relation différentielle

$$\forall V \in ]0, +\infty[ \quad , \quad I(V)^{\frac{n+1}{n-1}} I''(V) = -(n-1) \alpha_n^{\frac{2}{n-1}}. \quad (2.15)$$

### 2.2.2 Preuves des théorèmes 2.2.1 et 2.2.3

#### Existence et régularité de domaines isopérimétriques

Commençons par rappeler l'apport fondamental de la théorie géométrique de la mesure concernant l'existence, la régularité et l'orientabilité des hypersurfaces minimisantes.

**Proposition 2.2.5** *Soient  $\beta$  dans  $]0,1[$  et  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Alors il existe un ouvert  $\Omega$  tel que*

- $\text{vol}(\Omega) = \beta \text{vol}(M,g)$ ,
- $\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) = h_{(M,g)}(\beta) \text{vol}(M,g)$ ,
- $\partial\Omega$  est l'union disjointe d'une partie régulière  $\partial\Omega_r$  composée de points au voisinage desquels c'est une hypersurface  $C^\infty$  de courbure moyenne constante, et d'une partie singulière  $\partial\Omega_s$ , définie par  $\partial\Omega_s := \partial\Omega \setminus \partial\Omega_r$ , dont la dimension de Hausdorff dans  $(M,g)$  est inférieure ou égale à  $n - 8$ ,
- $\partial\Omega$  est orientable et  $\partial\Omega_r$  est muni d'un champ normal sortant unitaire et régulier.

Une preuve de ce résultat, utilisé la première fois dans [Gr1], est l'objet de [M1]. L'existence est donnée par la théorie géométrique de la mesure (voir [M], [Fe] et [Alm]) pour les courants ou pour les ensembles de périmètre fini. La régularité des hypersurfaces minimisantes est abordée par E. Gonzalez, U. Massari et I. Tamanini dans [GMT] et nous verrons ultérieurement que la condition technique indispensable dans la démonstration des théorèmes 2.2.1 et 2.2.3 que nous proposons (voir la proposition A.0.5) est en fait

$$\mathcal{H}_{n-3}(\partial\Omega_s) = 0,$$

ce qui est beaucoup plus faible que l'hypothèse  $\dim_H(\partial\Omega_s) \leq n - 8$  dont nous disposons d'après la proposition 2.2.5. Le caractère constant de la courbure moyenne sur  $\partial\Omega_r$ , quant à elle, est imposée par la propriété de minimisation du domaine (variation première de l'aire dans la proposition 2.1.1).

L'objet du lemme suivant est de relier la géométrie d'un domaine isopérimétrique aux propriétés analytiques de régularité du profil isopérimétrique (voir aussi le lemme 4 de [P1]).

**Lemme 2.2.6** *Soient  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) et  $\Omega$  un domaine isopérimétrique de volume relatif  $\beta$  dont  $\eta$  désigne la courbure moyenne<sup>5</sup>. Alors*

$$\limsup_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{h_{(M,g)}(\beta + u) - h_{(M,g)}(\beta)}{u} \leq \eta \leq \liminf_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{h_{(M,g)}(\beta - u) - h_{(M,g)}(\beta)}{-u}. \quad (2.16)$$

#### Démonstration.

En reprenant les notations et les descriptions du paragraphe 2.1, considérons une variation du domaine isopérimétrique  $\Omega$  imposée par une fonction positive  $\varphi$  de valeur moyenne strictement positive, ce qui correspond géométriquement à une déformation qui augmente strictement le volume de  $\Omega$ . Nous pouvons écrire, par définition du profil,

$$\frac{h_{(M,g)}(\beta + u) - h_{(M,g)}(\beta)}{u} \leq \frac{\mathbf{a}_\varphi(\mathbf{v}_\varphi^{-1}(\beta + u)) - \mathbf{a}_\varphi(\mathbf{v}_\varphi^{-1}(\beta))}{u},$$

5. Nous avons ici choisi d'appeler *courbure moyenne* la trace de l'endomorphisme de Weingarten.



d'où, en passant à la limite supérieure sur  $u$ , en utilisant les résultats de la proposition 2.1.1 et la courbure moyenne constante de l'hypersurface minimisante,

$$\limsup_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{h_{(M,g)}(\beta + u) - h_{(M,g)}(\beta)}{u} \leq \frac{\mathbf{a}'_{\varphi}(0)}{\mathbf{v}'_{\varphi}(0)} = \frac{\int_{\partial\Omega_r} \eta_{\vec{v}}(p) \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p)}{\int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p)} = \eta_{\vec{v}}.$$

La majoration de la courbure moyenne s'obtient exactement de la même manière en considérant la variation associée à la fonction  $-\varphi$ , qui perturbe  $\Omega$  en diminuant strictement son volume. □

**Remarque 2.2.7** La limite inférieure et la limite supérieure qui interviennent dans le lemme 2.2.6 sont en fait de vraies limites, ce qui sera justifié lors de la remarque 2.3.2, une fois obtenue la propriété de "concavité locale" du profil renormalisé (voir la proposition G.3.6).

### Preuve des inéquations différentielles (2.7) et (2.11)

Fixons  $\beta_0$  dans  $]0,1[$ . La proposition 2.2.5 nous donne l'existence d'un ouvert  $\Omega$  dont le volume relatif est  $\beta_0$ , c'est-à-dire tel que  $\text{vol}(\Omega) = \beta_0 \text{vol}(M,g)$ , et dont le bord  $\partial\Omega$  vérifie :

$$\frac{\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol}(M,g)} = h_{(M,g)}(\beta_0) = y_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{n-1}{n}},$$

où nous avons noté  $\mathcal{H}_{n-1}$  la mesure de Hausdorff  $(n-1)$ -dimensionnelle.

En reprenant la description des variations paramétrées par  $C_c^2(\partial\Omega_r, \mathbb{R})$  du paragraphe 2.1.1 et la technique variationnelle exposée au paragraphe 2.1.2, calculons explicitement le second membre de l'inégalité (2.6) à partir des développements limités de la proposition 2.1.1. Ainsi, pour  $\alpha$  fixé dans  $[n, +\infty[$ , en considérant la variation imposée par une fonction  $\varphi$  de valeur moyenne non nulle de sorte que  $\mathbf{v}_{\varphi}$  soit bijective au voisinage de 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} \overline{D^2} \left( h_{(M,g)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta_0) &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1} h_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \left[ \frac{1}{\alpha-1} \frac{\left( \int_{\partial\Omega_r} \eta_{\vec{v}}(p) \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \right. \\ &\quad - \frac{\int_{\partial\Omega_r} \eta_{\vec{v}}(p) \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \int_{\partial\Omega_r} \eta_{\vec{v}}(p) \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^3} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \\ &\quad + \frac{\int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \varphi\|_2^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^3} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \\ &\quad + \frac{\int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \int_{\partial\Omega_r} \left( \eta_{\vec{v}}(p)^2 - \|A_p^{\vec{v}}\|_2^2 \right) \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^3} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \\ &\quad \left. - \frac{\int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \int_{\partial\Omega_r} \text{Ricci}(\vec{v}(p), \vec{v}(p)) \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^3} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \right] \end{aligned}$$

d'où, après simplification

$$\begin{aligned} \overline{D^2} \left( h_{(M,g)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta_0) &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1} h_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \left[ \eta_{\vec{v}}^2 \left( \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{n-1} \frac{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \right) \right. \\ &+ \frac{\int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \varphi\|_2^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \\ &\left. + \frac{\int_{\partial\Omega_r} \left( \frac{1}{n-1} \eta_{\vec{v}}^2 - \|A_p^{\vec{v}}\|_2^2 - \text{Ricci}(\vec{v}(p), \vec{v}(p)) \right) \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \right] \end{aligned}$$

en utilisant que la courbure moyenne est constante sur  $\partial\Omega_r$  (proposition 2.2.5).

Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2 \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega_r) \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}},$$

et par conséquent

$$1 \leq \frac{\int_{\partial\Omega_r} \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega),$$

d'où l'inégalité différentielle

$$\begin{aligned} \overline{D^2} \left( h_{(M,g)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta_0) &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1} h_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left[ \frac{n-\alpha}{(n-1)(\alpha-1)} \eta_{\vec{v}}^2 \right. \\ &+ \frac{\int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \varphi\|_2^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \\ &\left. + \frac{\int_{\partial\Omega_r} \left( \frac{1}{n-1} \eta_{\vec{v}}^2 - \|A_p^{\vec{v}}\|_2^2 - \text{Ricci}(\vec{v}(p), \vec{v}(p)) \right) \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant d'une part l'hypothèse de courbure

$$\forall p \in \partial\Omega_r \quad , \quad -\text{Ricci}_{(M,g)}(\vec{v}(p), \vec{v}(p)) \leq -(n-1)\delta, \quad (2.17)$$

et d'autre part la relation classique entre la courbure moyenne et la norme de la seconde forme fondamentale,

$$\forall p \in \partial\Omega_r \quad , \quad \frac{1}{n-1} \eta_{\vec{v}}^2(p) - \|A_p^{\vec{v}}\|_2^2 \leq 0, \quad (2.18)$$

nous obtenons, pour toute fonction  $\varphi$  de  $C_c^2(\partial\Omega_r)$  d'intégrale non nulle,

$$\begin{aligned} \overline{D^2} \left( h_{(M,g)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta_0) &\leq \frac{(n-\alpha)\alpha}{(n-1)(\alpha-1)^2} h_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \eta_{\vec{v}}^2 \\ &+ \frac{\alpha}{\alpha-1} h_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \frac{\int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \varphi\|_2^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \\ &- \frac{(n-1)\alpha}{\alpha-1} \delta h_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \frac{\int_{\partial\Omega_r} \varphi(p)^2 d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Or la proposition 2.2.5 précise que  $\mathcal{H}_{n-3}(\partial\Omega_s) = 0$ , nous pouvons donc remplacer  $\varphi$  par les éléments de la suite  $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c^2(\partial\Omega_r, [0,1])$ , construites dans la proposition A.0.5 et qui correspondent à des variations de  $\partial\Omega$  selon des hypersurfaces qui conservent la même partie singulière et qui sont parallèles à  $\partial\Omega$  sur le complémentaire d'un voisinage de  $\partial\Omega_s$ . De plus ces fonctions vérifient

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_r} \Psi_i(p) d\nu_{g|\partial\Omega_r} &= \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega), \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_r} \Psi_i(p)^2 d\nu_{g|\partial\Omega_r} &= \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega), \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \Psi_i\|_2^2 d\nu_{g|\partial\Omega_r} &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant ensuite à la limite sur  $i$  dans (2.19), l'inéquation différentielle suivante apparaît :

$$\overline{D^2} \left( h_{(M,g)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta_0) \leq \frac{(n-\alpha)\alpha}{(n-1)(\alpha-1)^2} h_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \eta_{\bar{\nu}}^2 - \frac{(n-1)\alpha}{\alpha-1} \delta h_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}. \quad (2.20)$$

Dans le cas particulier où  $\alpha = n$ , (2.20) donne l'inéquation (2.7) annoncée dans le théorème 2.2.1 :

$$\overline{D^2} y_{(M,g)}(\beta_0) \leq -n \delta y_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{2-n}{n}}.$$

Le cas d'égalité dans l'inéquation différentielle (2.7) nécessite les cas d'égalité dans les inégalités (2.17) et (2.18), ce qui d'une part implique le caractère ombilical de la partie régulière de l'hypersurface et d'autre part impose que la courbure de Ricci est constante et égale à son minorant dans la direction normale à  $\partial\Omega_r$ . Ceci achève la preuve du théorème 2.2.1.

L'exploitation du théorème 2.2.1 permet de montrer (voir la proposition G.3.6) que le profil isopérimétrique est dérivable en tout point de  $]0,1[$  privé d'un ensemble au plus dénombrable, que nous notons  $I$ . Le lemme 2.2.6 permet alors de montrer qu'en tout point  $\beta_0$  de  $]0,1[\setminus I$ , la courbure moyenne  $\eta_{\bar{\nu}}$  d'un domaine isopérimétrique de volume relatif  $\beta_0$  coïncide avec la dérivée du profil. Ainsi, pour tout  $\beta_0$  appartenant à  $]0,1[\setminus I$ , l'inéquation (2.20) donne

$$\overline{D^2} \left( h_{(M,g)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta_0) \leq h_{(M,g)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \left[ \frac{(n-\alpha)\alpha}{(n-1)(\alpha-1)^2} h'_{(M,g)}(\beta_0)^2 - \frac{(n-1)\alpha}{\alpha-1} \delta \right],$$

ce qui démontre l'inéquation différentielle (2.11). Le cas d'égalité se traite comme précédemment et permet de terminer la preuve du théorème 2.2.3.

### 2.2.3 Quid d'une généralisation de l'inéquation différentielle pour les variétés non compactes ?

L'élément essentiel dans l'établissement de l'inéquation différentielle (2.7) est l'existence et la régularité d'une hypersurface minimisante partageant la variété en deux parties de volumes fixés. Ce résultat ne persiste pas dans le cadre des variétés non compactes et les surfaces de révolution  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  munies de la métrique  $dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$  montrent que les domaines isopérimétriques peuvent ne pas exister. En effet, si la fonction positive  $f$  est décroissante pour  $r$  assez grand, de limite nulle en  $+\infty$  et non intégrable en  $+\infty$ , alors le profil est identiquement nul car la suite des longueurs des bords d'une suite de cylindres de volume constant fixé qui fuient vers  $+\infty$  tend vers 0 (voir la figure 1.11).

Bien entendu, il est raisonnable d'espérer que des hypothèses géométriques supplémentaires sur les variétés non compactes considérées permettent d'établir l'existence de domaines isopérimétriques. Par exemple, J. Gonzalo montre dans [Go] que sur les produits  $(M, g) \times (R^n, can)$  où  $(M, g)$  est une variété fermée, des domaines isopérimétriques existent pour toute quantité de volume fixée. Il montre de plus qu'au-delà d'un volume critique, les domaines obtenus par produit de  $(M, g)$  et d'une boule euclidienne sont isopérimétriques. Une autre hypothèse, plus géométrique est proposée par F. Morgan qui montre, au chapitre 13 de [M1], que si le quotient d'une variété non compacte par son groupe d'isométries donne une variété compacte, alors la proposition 2.2.5 s'adapte au cas non compact, à savoir que, pour toute valeur  $V > 0$ , il existe un domaine isopérimétrique de volume  $V$  dont le bord, orientable, est régulier en dehors d'une partie compacte de dimension de Hausdorff inférieure à  $n - 8$ . Ce résultat permet d'obtenir l'existence de domaines isopérimétriques sur les produits  $M \times \mathbb{M}_\delta^n$  où  $(M, g)$  est une variété riemannienne fermée. Cet argument est en particulier utilisé dans [Pe] et [PeRi] afin d'étudier et de préciser les profils isopérimétriques de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{M}_\delta^n$ . Ainsi, nous pouvons généraliser sous cette hypothèse le résultat du théorème 2.2.1 :

**Corollaire 2.2.8** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète non compacte de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dont le quotient par un sous-groupe d'isométries est une variété compacte et telle que*

$$\text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) \geq (n - 1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad , \quad \text{où } \delta \in ] - \infty, 0].$$

Alors son profil isopérimétrique renormalisé  $Y_{(M, g)} := I_{(M, g)}^{\frac{n}{n-1}}$  satisfait :

$$\forall V \in ]0, +\infty[ \quad , \quad \overline{D^2}Y_{(M, g)}(V) \leq -n\delta Y_{(M, g)}(V)^{\frac{2-n}{n}}. \quad (2.21)$$

En particulier, nous obtenons ainsi que le produit de variétés compactes dont la courbure de Ricci est positive ou nulle et de copies de  $(\mathbb{R}^n, can)$  possède un profil isopérimétrique concave donc croissant sur  $]0, +\infty[$  (car positif ou nul sur  $]0, +\infty[$ ). Une autre application de ce résultat concerne le profil isopérimétrique du revêtement universel  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  d'une variété riemannienne fermée  $(M, g)$  de dimension  $n$  dont la courbure de Ricci est positive ou nulle. Le théorème 2.2.8 permet de conclure à la concavité de  $Y_{(\tilde{M}, \tilde{g})}$  sur  $]0, +\infty[$ <sup>6</sup>. La fonction

$$\frac{I_{(\tilde{M}, \tilde{g})}(V)}{V^{\frac{n-1}{n}}}$$

est par conséquent décroissante et positive sur  $]0, +\infty[$ , nous notons  $c_\infty(M, g) \in [0, +\infty[$  sa limite. Sous ces hypothèses, T. Coulhon et L. Saloff-Coste ont prouvé dans le théorème 3 de [CS] que, si le volume des boules de rayon  $r$  de  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  est uniformément minoré par  $Cr^n$  ( $C > 0$ ), alors une inégalité isopérimétrique du type

$$\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega) \geq C' \text{vol}_n(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} \quad , \quad C' > 0$$

est valide sur  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ . Ainsi, dans ces circonstances,  $c_\infty(M, g) > 0$ , d'où

$$\forall V \in [0, +\infty[ \quad , \quad I_{(\tilde{M}, \tilde{g})}(V) \geq c_\infty(M, g)V^{\frac{n-1}{n}} \quad \text{et} \quad I_{(\tilde{M}, \tilde{g})}(V) \underset{v \rightarrow +\infty}{\sim} c_\infty(M, g)V^{\frac{n-1}{n}}.$$

Ces manipulations permettent de retrouver l'équivalent du profil isopérimétrique du revêtement universel  $(\tilde{T}, \tilde{g})$  d'un tore riemannien  $(T, g)$  (c'est-à-dire de  $\mathbb{R}^n$  muni d'une

<sup>6</sup> En effet, une variété riemannienne non compacte dont la courbure de Ricci est positive ou nulle a un volume infini.

métrique périodique) dont la courbure de Ricci est positive ou nulle. Ceci est un cas particulier d'un résultat plus général établi sans hypothèse de courbure par P. Pansu dans [P2] : il existe une constante  $c_\infty(T, g) > 0$  telle que

$$I_{(\tilde{T}, \tilde{g})}(V) \underset{v \rightarrow +\infty}{\sim} c_\infty(T, g) V^{\frac{n-1}{n}}$$

et la constante  $c_\infty(T, g)$  est reliée aux notions de volumes asymptotiques du tore considéré et de ses groupes d'homologie.

Signalons par ailleurs que M. Ritoré a récemment prouvé dans [R] que le profil des surfaces riemanniennes non compactes de courbure positive ou nulle satisfait l'inéquation différentielle (2.21). Pour cela, il démontre l'existence de domaines isopérimétriques en distinguant les surfaces de courbure identiquement nulle de celles dont l'intégrale de la courbure est strictement positive. Pour les premières qui sont, d'après la classification de Cohn-Vossen, le plan euclidien, des cylindres plats ou des rubans de Möbius plats, l'existence de domaines isopérimétriques est une conséquence du résultat énoncé précédemment. Lorsque l'intégrale de la courbure est strictement positive, M. Ritoré a recours à l'inégalité isopérimétrique suivante (voir le théorème 4.3 de [O])

$$L(\partial\Omega)^2 \geq 4\pi A(\Omega) - 2 \left( \int_{\Omega} K \right) A(\Omega)$$

valide pour tout domaine  $\Omega$  à bord régulier simplement connexe, afin d'obtenir l'existence d'un domaine isopérimétrique relativement compact. En ce qui concerne les dimensions supérieures, la concavité du profil isopérimétrique des variétés riemanniennes complètes non compactes de courbure de Ricci positive ou nulle, qui serait une généralisation naturelle du théorème 2.2.1 au cadre non compact, demeure une conjecture.

## 2.3 Conséquences de l'inéquation différentielle

Au cours de ce paragraphe, nous allons d'abord exposer comment l'inéquation différentielle (2.7) renforce la régularité du profil isopérimétrique dont nous ne connaissons jusqu'à présent que la continuité. Ensuite, nous tenterons d'interpréter géométriquement les informations analytiques obtenues sur le profil par l'intermédiaire des relations différentielles (2.7) et (2.11) qu'il satisfait.

### 2.3.1 Régularité du profil isopérimétrique

La proposition suivante, dont le résultat est aussi établi dans [BP] par C. Bavard et P. Pansu, précise la dérivabilité au premier ordre du profil isopérimétrique.

**Proposition 2.3.1** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Le profil isopérimétrique renormalisé est, en tout point de  $]0, 1[$ , dérivable à droite et à gauche et*

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad y_{(M, g)}'(\beta) \geq y_{(M, g)_d}'(\beta).$$

*En particulier,  $y_{(M, g)}$  est dérivable à gauche en  $\frac{1}{2}$  et sa dérivée est positive ou nulle (il est aussi dérivable à droite en 0 et à gauche en 1). Plus généralement,  $y_{(M, g)}$  est dérivable sur  $]0, 1[$  privé d'un ensemble au plus dénombrable.*

*Quant au profil isopérimétrique proprement dit,  $h_{(M, g)}$ , il est, en tout point de  $]0, 1[$ , dérivable à droite et à gauche et*

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad h_{(M, g)}'(\beta) \geq h_{(M, g)_d}'(\beta).$$

En particulier,  $h_{(M,g)}$  est dérivable à gauche en  $\frac{1}{2}$  et sa dérivée est positive ou nulle. Plus généralement,  $h_{(M,g)}$  est dérivable sur  $]0,1[$  privé d'un ensemble au plus dénombrable.

**Démonstration.**

La dérivabilité à gauche et à droite en tout point, l'inégalité reliant ces dérivées et la dérivabilité au sens classique en dehors d'un ensemble au plus dénombrable sont des conséquences immédiates du fait que l'inéquation différentielle montre que localement, le profil renormalisé, à l'addition près d'un monôme du second degré, est concave (voir la proposition B.3.1). □

**Remarque 2.3.2** Le lemme 2.2.6 exprime alors que si  $\Omega$  est un domaine isopérimétrique de volume relatif  $\beta$  et de courbure moyenne  $\eta_\Omega$ ,

$$h_{(M,g)'_d}(\beta) \leq \eta_\Omega \leq h_{(M,g)'_g}(\beta). \quad (2.22)$$

Par ailleurs, si en un point  $\beta$ , les dérivées à droite et à gauche du profil isopérimétrique diffèrent, alors il existe au moins deux domaines isopérimétriques de volume relatif  $\beta$ , l'un d'eux a pour courbure moyenne  $h_{(M,g)'_g}(\beta)$  et l'autre a pour courbure moyenne  $h_{(M,g)'_d}(\beta)$ . Pour justifier cette affirmation<sup>7</sup>, considérons deux suites de domaines isopérimétriques  $(\Omega_i^+)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(\Omega_i^-)_{i \in \mathbb{N}}$ , associées respectivement aux suites de volumes relatifs  $(\beta + \frac{1}{i})_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta - \frac{1}{i})_{i \in \mathbb{N}}$ , et dont les suites de courbures moyennes sont  $(\eta_i^+)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(\eta_i^-)_{i \in \mathbb{N}}$ . D'après le pincement (2.22), pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\eta_i^+ \geq h_{(M,g)'_d}\left(\beta + \frac{1}{i}\right) \quad \text{et} \quad \eta_i^- \leq h_{(M,g)'_g}\left(\beta - \frac{1}{i}\right).$$

De plus, au sein des parties de périmètre fini, un théorème de compacité permet d'extraire de chacune des suites une sous-suite qui converge vers un domaine isopérimétrique de volume relatif  $\beta$  et de courbure moyenne constante égale à la limite des courbures moyennes. Notons respectivement  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  les domaines limites obtenus,  $\eta_{\Omega^+}$  et  $\eta_{\Omega^-}$  leurs courbures moyennes. Alors, par "concavité locale" (voir la proposition G.3.6) du profil au voisinage de  $\beta$

$$\eta_{\Omega^+} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \eta_i^+ \geq \lim_{i \rightarrow +\infty} h_{(M,g)'_d}\left(\beta + \frac{1}{i}\right) \geq h_{(M,g)'_d}(\beta)$$

et nous obtenons de même

$$\eta_{\Omega^-} \leq h_{(M,g)'_g}(\beta).$$

Le pincement (2.22) permet alors d'écrire  $\eta_{\Omega^+} = h_{(M,g)'_d}(\beta)$  et  $\eta_{\Omega^-} = h_{(M,g)'_g}(\beta)$ , d'où le résultat annoncé.

En courbure positive ou nulle, l'inégalité (2.7) exprime la concavité du profil renormalisé, mais lorsque le minorant de la courbure de Ricci est négatif, la perte de linéarité dans (2.7) est un obstacle à l'obtention d'un résultat du même type. Toutefois, en introduisant la constante isopérimétrique de Cheeger qui permet de minorer le profil isopérimétrique, nous pouvons majorer le second membre de (2.7) et le rendre indépendant de  $y_{(M,g)}$ . Cette technique permet de montrer le caractère lipschitzien du profil renormalisé et donne une majoration de la constante de Lipschitz en fonction de la constante isopérimétrique de Cheeger.

---

7. Nous détaillons ici l'argument donné par M. Ritoré dans la preuve du corollaire 4.1 de [R].

**Proposition 2.3.3** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M,g)} \geq (n-1)\delta g \quad \text{où } \delta \in \mathbb{R}.$$

Alors

– si  $\delta \geq 0$ , pour tout  $\beta \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,

$$\frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{\text{vol}(M,g)^{\frac{1}{n-1}}} \geq y_{(M,g)_g}'(\beta) \geq y_{(M,g)_d}'(\beta) \geq 0,$$

– si  $\delta < 0$  et  $h_C(M,g) \geq H$ , pour tout  $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$ ,

$$\frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{\text{vol}(M,g)^{\frac{1}{n-1}}} + n(n-1)|\delta|H^{\frac{2-n}{n-1}}\beta^{\frac{1}{n-1}} \geq y_{(M,g)_g}'(\beta)$$

et

$$y_{(M,g)_d}'(\beta) \geq n(n-1)|\delta|H^{\frac{2-n}{n-1}}\left(\beta^{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{2^{\frac{1}{n-1}}}\right).$$

**Démonstration.**

Sous l'hypothèse  $\delta \geq 0$ , l'estimation proposée est une conséquence immédiate de la concavité du profil renormalisé établie par l'inéquation différentielle (2.7).

Lorsque  $\delta < 0$ , en reportant la minoration du profil isopérimétrique

$$\forall \beta \in ]0, \frac{1}{2}[ \quad , \quad h_{(M,g)}(\beta) \geq H\beta,$$

dans l'inéquation différentielle (2.7), nous pouvons montrer que la fonction

$$y_{(M,g)}(\beta) - (n-1)^2|\delta|H^{\frac{2-n}{n-1}}\beta^{\frac{n}{n-1}},$$

est concave sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , d'où le résultat en utilisant le lemme B.1.2 et l'inégalité  $y_{(M,g)_g}'(\frac{1}{2}) \geq 0$  donnée par la proposition G.3.6.  $\square$

**Corollaire 2.3.4** *Les profils renormalisés des variétés riemanniennes fermées de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  sont lipschitziens et leurs constantes de Lipschitz sont uniformément majorées par une constante positive  $C_L(n,d,v,\delta)$ .*

**Démonstration.** Il s'agit d'une conséquence immédiate de la proposition 2.3.3 et de la minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger, uniforme sur  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  (voir [G1] de S. Gallot) rappelée dans le théorème 1.4.4.  $\square$

**Remarques 2.3.5**

- Pour les variétés de courbure de Ricci positive ou nulle, la concavité permet de s'affranchir de la dépendance en le diamètre dans le majorant des constantes de Lipschitz du corollaire 2.3.4.
- Ce corollaire sera très utile dans l'approche fonctionnelle de l'étude de la continuité du profil isopérimétrique (voir le paragraphe 4.3 du chapitre 4) et dans l'obtention d'estimations, uniformes sur  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ , de la constante de Lipschitz du profil isopérimétrique sur un compact de  $]0,1[$  (voir lemme 4.2.1).

- Dans la proposition 2.3.3, au lieu de supposer une minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger  $h_C(M,g)$ , nous aurions pu supposer une minoration de la constante isopérimétrique. En effet, l'hypothèse

$$\inf_{\beta \in ]0, \frac{1}{2}]} \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta^{\frac{n-1}{n}}} \geq I,$$

permet de montrer, lorsque  $\delta < 0$ , la concavité, sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , de la fonction

$$y_{(M,g)}(\beta) - \frac{n^3}{2(n+2)} |\delta| I^{\frac{2-n}{n-1}} \beta^{\frac{n+2}{n}},$$

d'où, pour tout  $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ ,

$$\frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{\text{vol}(M,g)^{\frac{1}{n-1}}} + \frac{n^2}{2} |\delta| I^{\frac{2-n}{n-1}} \beta^{\frac{2}{n}} \geq y_{(M,g)}'(\beta) \geq y_{(M,g)}'_d(\beta) \geq \frac{n^2}{2} |\delta| I^{\frac{2-n}{n-1}} \left( \beta^{\frac{2}{n}} - \frac{1}{2^{\frac{2}{n}}} \right).$$

### 2.3.2 Contrôle géométrique des domaines isopérimétriques

Nous allons établir, sous des hypothèses géométriques concernant la variété  $(M,g)$ , une borne inférieure sur les dérivées à droite du profil isopérimétrique au voisinage de 0.

**Lemme 2.3.6** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{diam}(M,g) \leq d \quad \text{et} \quad \text{Ricci}_{(M,g)} \geq (n-1)\delta g \quad \text{où} \quad \delta \in \mathbb{R}.$$

*Alors il existe  $C_0(n,d,\delta) > 0$  et  $\beta_0(n,d,\delta) \in ]0, \frac{1}{2}]$  tels que*

$$\forall \beta \in ]0, \beta_0(n,d,\delta)] \quad , \quad h_{(M,g)}'_d(\beta) \geq C_0(n,d,\delta) \beta^{-\frac{1}{n}}. \quad (2.23)$$

**Démonstration.** Dans la preuve, nous allons supposer  $\delta \leq 0$ , ce qui n'est pas restrictif. En utilisant la minoration du profil renormalisé par  $I(n,d,\delta)^{\frac{n}{n-1}} \beta$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$  (voir le théorème 1.4.4 dû à S. Gallot et la remarque 1.4.5 qui le suit), nous obtenons, grâce à l'inéquation différentielle (2.7) la concavité, sur  $[0, \frac{1}{2}]$  de la fonction

$$z(\beta) := y_{(M,g)}(\beta) - \frac{n^3 |\delta|}{2(n+2)} I^{\frac{2-n}{n-1}} \beta^{1+\frac{2}{n}}.$$

Appliquons alors le lemme technique B.3.3 à la fonction  $f = y_{(M,g)}$ , pour  $a = \frac{1}{2}$ ,  $c = I(n,d,\delta)^{\frac{n}{n-1}}$ ,  $C = \frac{n^3 |\delta|}{2(n+2)} I^{\frac{2-n}{n-1}}$  et  $\alpha = \frac{2}{n}$ . Ainsi, il existe  $\Gamma(n,d,\delta) > 0$  et  $\beta_0(n,d,\delta) \in ]0, \frac{1}{2}]$  tels que

$$\forall \beta \in ]0, \beta_0(n,d,\delta)] \quad , \quad y_{(M,g)}'_d(\beta) \geq \Gamma(n,d,\delta) y_{(M,g)}'_d(0).$$

Par ailleurs, la concavité de la fonction  $z$  permet de majorer  $y_{(M,g)}$  en majorant  $z$  par sa tangente à l'origine, soit

$$\begin{aligned} \forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad y_{(M,g)}(\beta) &\leq y_{(M,g)}'_d(0) \beta + \frac{n^3 |\delta|}{2(n+2)} I^{\frac{2-n}{n-1}} \beta^{1+\frac{2}{n}} \\ &\leq \left( y_{(M,g)}'_d(0) + A(n,d,\delta) \right) \beta, \end{aligned} \quad (2.24)$$



où nous avons posé

$$A(n,d,\delta) := \frac{n^3|\delta|}{(n+2)2^{1+\frac{2}{n}}} I^{\frac{2-n}{n-1}}.$$

Par conséquent, la relation (liée à la régularité des profils vue lors de la proposition G.3.6)

$$h_{(M,g)'_d}(\beta) = \frac{n-1}{n} \frac{y_{(M,g)'_d}(\beta)}{h_{(M,g)}(\beta)^{\frac{1}{n-1}}}$$

permet de minorer la dérivée du profil :

$$\forall \beta \in ]0, \beta_0] \quad , \quad h_{(M,g)'_d}(\beta) \geq \frac{B y_{(M,g)'_d}(0)}{\left(y_{(M,g)'_d}(0) + A\right)^{\frac{1}{n}}} \beta^{-\frac{1}{n}} \geq \frac{B y_{(M,g)'_d}(0)^{\frac{n-1}{n}}}{\left(1 + \frac{A}{y_{(M,g)'_d}(0)}\right)^{\frac{1}{n}}} \beta^{-\frac{1}{n}},$$

où nous avons posé  $B(n,d,\delta) := \frac{n-1}{n} \Gamma(n,d,\delta)$ . La connaissance exacte de  $y_{(M,g)'_d}(0)$  en fonction de  $n$  et  $\text{vol}(M,g)$  (voir la proposition 1.5.2), donne, par l'intermédiaire du théorème de Bishop et de l'hypothèse sur la majoration du diamètre de  $(M,g)$

$$y_{(M,g)'_d}(0) = \frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{\text{vol}(M,g)^{\frac{1}{n-1}}} \geq \frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{V_{n,\delta}(d)^{\frac{1}{n-1}}} := D(n,d,\delta),$$

d'où le résultat annoncé en posant

$$C_0(n,d,\delta) := \frac{BD^{\frac{n-1}{n}}}{\left(1 + \frac{A}{D}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

□

**Remarque 2.3.7** Dans cette étude des dérivées du profil au voisinage de 0, nous avons privilégié la constante isopérimétrique devant la constante isopérimétrique de Cheeger car l'ordre de grandeur de la minoration du profil qu'elle permet d'obtenir est optimal au voisinage de 0, ce qui n'est pas vrai pour  $h_C(M,g)$ .

Le théorème suivant repose sur l'interprétation géométrique du lemme 2.3.6, rendue possible par le lemme 2.2.6 qui fournit un contrôle de la courbure moyenne des domaines isopérimétriques de volume relatif  $\beta$  en fonction des dérivées à droite et à gauche du profil au point  $\beta$ .

**Théorème 2.3.8** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{diam}(M,g) \leq d \quad \text{et} \quad \text{Ricci}_{(M,g)} \geq (n-1)\delta \quad \text{où} \quad \delta \in \mathbb{R}_*^*.$$

*Alors, il existe  $\beta_1(n,d,\delta) > 0$  ( $\beta_1(n,d,\delta) < \frac{1}{2}$ ),  $C_0(n,d,\delta) > 0$  et  $C_1(n,d,\delta) > 0$  tels que tout domaine isopérimétrique  $\Omega_\beta$  de volume relatif  $\beta$  inférieur à  $\beta_1(n,d,\delta)$  et de courbure moyenne  $\eta_{\Omega_\beta}$  vérifie*

$$C_0(n,d,\delta)\beta^{-\frac{1}{n}} \leq \eta_{\Omega_\beta} \leq \frac{C_1(n,d,\delta)}{\text{vol}(M,g)^{\frac{1}{n}}} \beta^{-\frac{1}{n}}$$

**Démonstration.**

Notons, pour tout  $\beta \in ]0,1[$ ,  $\Omega_\beta$  un domaine isopérimétrique de volume relatif  $\beta$  et  $\eta_{\Omega_\beta}$  sa courbure moyenne définie par rapport à la normale sortante. La minoration de la courbure moyenne résulte directement de l'application des lemmes 2.2.6 et 2.3.6. Prouvons maintenant la majoration de la courbure moyenne. En fait, en reprenant la preuve du théorème 2.3.10, nous observons qu'il existe  $\beta_1(n,d,\delta) \in ]0,\beta_0]$  tel que le profil est concave sur  $[0,\beta_1(n,d,\delta)]$  (ceci est une conséquence du lemme 2.3.6 et de l'inéquation différentielle (2.13)). Ainsi, nous pouvons écrire

$$\forall \beta \in ]0,\beta_1(n,d,\delta)] \quad , \quad h_{(M,g)}'(\beta) \leq \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta},$$

d'où, en utilisant la majoration (2.24) établie au cours du lemme 2.3.6,

$$\forall \beta \in ]0,\beta_1(n,d,\delta)] \quad , \quad h_{(M,g)}'(\beta) \leq \beta^{-\frac{1}{n}} \left( \frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{\text{vol}(M,g)^{\frac{1}{n-1}}} + A(n,d,\delta)\beta^{\frac{2}{n}} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Le résultat annoncé s'obtient alors sur  $[0,\beta_1(n,d,\delta)]$ , en utilisant les inégalités reliant la courbure moyenne aux dérivées du profil établies lors de la remarque 2.3.2, et en posant

$$C_1(n,d,\delta) := \left( \gamma_n^{\frac{n}{n-1}} + \frac{V_{n,\delta}(d)^{\frac{1}{n-1}} A(n,d,\delta)}{2^{\frac{2}{n}}} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

□

**Remarques 2.3.9**

- Le pincement de la courbure moyenne est optimal quant à la puissance de  $\beta$  impliquée. Ceci se vérifie par exemple sur les tores plats de dimension 2 dont nous connaissons bien le profil et les domaines isopérimétriques décrits au paragraphe 1.3.
- Il faut ici souligner le fait que l'explosion de la courbure moyenne, quantifiée par le théorème 2.3.8, peut se lire sur l'inégalité de Heintze-Karcher (voir la preuve de la proposition 1.5.2) et pourrait servir à donner une version du lemme 2.3.6 sans avoir recours à l'inéquation différentielle (2.7). En effet, si  $\Omega_\beta$  est un domaine isopérimétrique de courbure moyenne  $\eta_{\Omega_\beta}$  et de volume relatif  $\beta$ , l'inégalité de Heintze-Karcher donne, lors d'une variation vers l'extérieur de  $\Omega_\beta$ ,

$$\frac{\text{vol}(M \setminus \Omega_\beta)}{\text{vol}(M,g)} \leq \frac{\text{vol}(\partial\Omega_\beta)}{\text{vol}(M,g)} \int_0^{\text{diam}(M,g)} (c_\delta(u) + \eta_{\Omega_\beta} s_\delta(u))_+^{n-1} du$$

d'où, si  $\eta_{\Omega_\beta} \leq 0$ ,

$$\frac{1 - \beta}{h_{(M,g)}(\beta)} \leq \int_0^{\text{diam}(M,g)} c_\delta(u)^{n-1} du.$$

Ainsi, par nullité et continuité du profil en 0, nous obtenons dans un premier temps que la courbure moyenne des domaines isopérimétriques de petit volume relatif est positive, puis qu'elle tend vers  $+\infty$  lorsque  $\beta$  tend vers 0. Nous avons cependant privilégié ici l'exploitation de l'inéquation différentielle en pensant à des contextes plus généraux (comme le cadre des variétés à densité étudié au chapitre 3) dans lesquels il serait peut-être plus facile de généraliser les propriétés différentielles du profil que l'inégalité de Heintze-Karcher.

### 2.3.3 Contrôle topologique des domaines isopérimétriques

#### Contrôle du nombre de composantes connexes des domaines isopérimétriques

Donnons ici un résultat qui reprend et généralise le corollaire 6.6 de [G1].

**Théorème 2.3.10** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{diam}(M,g) \leq d \quad \text{et} \quad \text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad , \quad \text{où} \quad \delta \in \mathbb{R}.$$

- Si  $\delta \geq 0$ , alors tout domaine isopérimétrique est connexe.
- Si  $\delta < 0$ , alors il existe  $\beta_0(n,d,\delta) \in ]0, \frac{1}{2}]$  tel que tout domaine isopérimétrique de volume relatif dans  $]0, \beta_0(n,d,\delta)]$  est connexe.

#### Démonstration.

Dans le cas où  $\delta \geq 0$ , nous pourrions être tentés de donner une preuve “massue” en disant que la concavité du profil renormalisé (c'est-à-dire à la puissance  $\frac{n}{n-1}$ ) implique la stricte concavité du profil qui, à son tour implique la connexité des domaines isopérimétriques. Observons en fait que la concavité seule (c'est-à-dire pas nécessairement stricte!) du profil, suffit à assurer ce résultat et cela vient de la non dérivabilité en 0 (qui impose une stricte concavité au voisinage de 0)<sup>8</sup> :

**Lemme 2.3.11** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dont le profil isopérimétrique est concave. Alors, tout domaine isopérimétrique est connexe.*

#### Démonstration du lemme.

Nous allons raisonner par l'absurde. La non connexité d'un domaine isopérimétrique  $\Omega$  de volume relatif  $\beta$  nous assure l'existence de deux unions disjointes de composantes connexes non triviales  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , de volumes relatifs  $\beta_1 \in ]0, 1[$  et  $\beta_2 \in ]0, 1[$  tels que  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ . De plus<sup>9</sup>,  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \amalg \partial\Omega_2$  de sorte que

$$h_{(M,g)}(\beta) \geq h_{(M,g)}(\beta_1) + h_{(M,g)}(\beta_2).$$

Or, par concavité du profil, le lemme B.1.4 impose,

$$h_{(M,g)}(\beta) \leq h_{(M,g)}(\beta_1) + h_{(M,g)}(\beta_2).$$

Nous sommes donc dans le cas d'égalité, d'où la linéarité du profil sur  $[0, \beta_1 + \beta_2]$ , obtenue en appliquant le lemme B.1.4. Ceci fournit la contradiction attendue car la linéarité du profil est incompatible avec la non dérivabilité du profil en 0 (voir l'équivalent (1.12) de la proposition 1.5.2).  $\square$

Considérons maintenant le cas  $\delta < 0$ . Nous allons montrer qu'il existe  $\beta_0(n,d,\delta)$  tel que  $h_{(M,g)}$  est croissante et concave sur  $[0, \beta_0(n,d,\delta)]$ . Ceci est une conséquence immédiate du lemme 2.3.6. D'une part, il donne, pour les petits volumes, la positivité des dérivées à droite, donc la croissance du profil (voir le lemme C.1.3). D'autre part, la minoration de  $h_{(M,g)}' d^2$  qu'il établit révèle, par l'intermédiaire de l'inéquation différentielle (2.13), la concavité du profil pour les volumes inférieurs à une valeur critique notée  $\beta_0(n,d,\delta)$ . Par conséquent, une fois établies la concavité et la croissance du profil sur  $[0, \beta_0(n,d,\delta)]$ , la connexité des domaines isopérimétriques de volume relatif inférieur à  $\beta_0(n,d,\delta)$  est immédiate.  $\square$

#### Remarques 2.3.12

- Des exemples de variétés sur lesquelles il existe des domaines isopérimétriques non connexes sont fournis par des variétés de révolution pour lesquelles, à partir d'un

8. Nous écrivons le lemme qui suit avec en tête l'exemple des tores plats de dimension 2 dont le profil est concave sur  $[0, 1]$ , mais pas strictement concave sur  $[0, 1]$ .

9. Attention à ne pas croire que les composantes connexes de domaines isopérimétriques sont des domaines isopérimétriques.

certain volume relatif, les anneaux sont minimisants (voir la description proposée dans le théorème 1.2 de [MHH]) si bien que pour le volume relatif complémentaire il existe au moins un domaine isopérimétrique non connexe. Un autre exemple est proposé dans la figure 2.1.

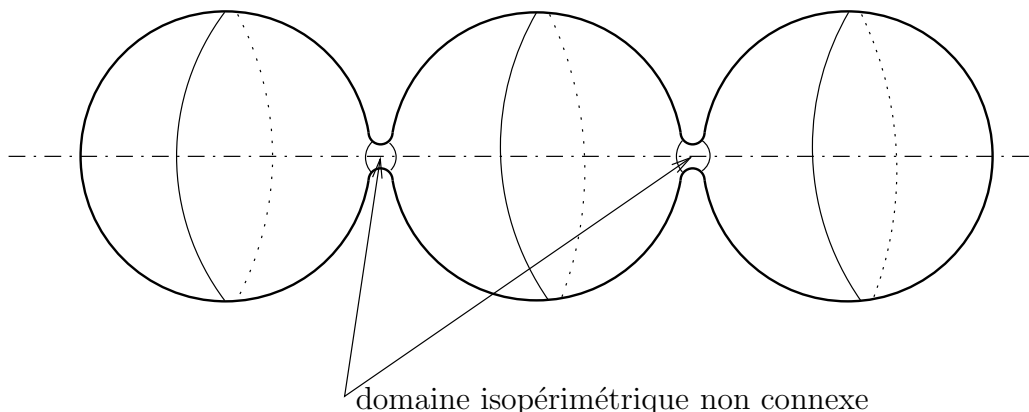


FIG. 2.1 – Exemple de variété sur laquelle certains domaines isopérimétriques ne sont pas connexes.

- Observons que la preuve du théorème 2.3.10 montre que lorsque  $\delta < 0$ , bien que la puissance  $\frac{n}{n-1}$  du profil (le profil renormalisé) ne soit pas nécessairement concave sur  $[0,1]$ , toutes les puissances du profil comprises entre 1 et  $\frac{n}{n-1}$  sont concaves, pour des volumes suffisamment petits. Ceci est une conséquence du lemme 2.3.6 et de la famille d'inéquations différentielles (2.11) proposées dans le théorème 2.2.3.

### Contrôle du nombre de composantes connexes des hypersurfaces minimisantes

Il s'agit ici de reproduire des arguments déjà utilisés (voir [BP], le lemme 5 de [P1] et le théorème 2.2 de [MJ]) qui reposent essentiellement sur la variation seconde des aires et sur le contrôle géométrique des domaines isopérimétriques. Néanmoins, la dernière assertion de ce résultat est nouvelle et due à l'apport de l'inéquation différentielle (2.7).

**Théorème 2.3.13** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{diam}(M,g) \leq d \quad \text{et} \quad \text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad , \quad \text{où} \quad \delta \in \mathbb{R}.$$

- Si  $\delta > 0$ , alors toute hypersurface minimisante est connexe.
- Si  $\delta = 0$ , alors toute hypersurface minimisante non connexe est telle que la courbure de Ricci est nulle dans la direction normale à l'hypersurface et toutes les composantes connexes sont totalement géodésiques<sup>10</sup>.
- Si  $\delta < 0$ , alors il existe  $\beta_0(n,d,\delta) \in ]0, \frac{1}{2}]$  tel que toute hypersurface minimisante correspondant à un domaine isopérimétrique de volume relatif inférieur à  $\beta_0(n,d,\delta)$  ou supérieur à  $1 - \beta_0(n,d,\delta)$  est connexe.

<sup>10</sup>. Ceci signifie que la seconde forme fondamentale est identiquement nulle sur la partie régulière de l'hypersurface minimisante.

**Remarque 2.3.14** Ce résultat est bien illustré par le cas des tores plats de dimension 2 et 3 dont les domaines isopérimétriques de petit volume relatif ont un bord connexe (ce sont des boules euclidiennes) tandis que ceux de volume relatif  $\frac{1}{2}$  (voir le paragraphe 3.2.2 où nous donnons la preuve de ce résultat proposée par F. Barthe et B. Maurey dans [BaMa] et [Ba1]) sont des bandes dont le bord a deux composantes connexes totalement géodésiques.

**Démonstration.**

A partir de la variation normale infinitésimale seconde du volume  $(n-1)$ -dimensionnel de l'hypersurface  $\partial\Omega_r$  de courbure moyenne  $\eta$  (voir la proposition 2.1.1), d'amplitude  $t\varphi + \frac{1}{2}t^2\psi + o(t^2)$ , sous la contrainte de préservation du volume  $n$ -dimensionnel qui impose la nullité de la valeur moyenne de  $\varphi$  au premier et la relation  $\psi = -\eta\varphi^2$  au second ordre, nous obtenons (voir [BP])

$$\int_{\partial\Omega_r} \left[ \|\nabla\varphi\|^2 - \left( \text{Ricci}(\vec{\nu}, \vec{\nu}) + \|A\vec{\nu}\|^2 \right) \varphi^2 \right] d\nu_{g_{|\partial\Omega_r}} \geq 0,$$

pour toute fonction  $\varphi$  de  $C^\infty(\partial\Omega_r)$  de valeur moyenne nulle. Il apparaît ainsi que si le bord d'un domaine isopérimétrique n'est pas connexe, en déformant parallèlement (ou "presque parallèlement" en utilisant le résultat du lemme A.0.5 pour éviter de modifier la partie singulière de  $\partial\Omega$ ) une composante vers l'extérieur ( $\varphi = +1$ ) du domaine et l'autre vers l'intérieur ( $\varphi = -1$ ) de façon à préserver le volume (les éventuelles autres composantes connexes sont laissées fixes), nous obtenons, après utilisation de l'hypothèse de courbure,

$$-(n-1)\delta\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - \int_{\partial\Omega_r} \|A\vec{\nu}\|^2 d\nu_{g_{|\partial\Omega_r}} \geq 0, \quad (2.25)$$

d'où les résultats annoncés dans les cas  $\delta > 0$  et  $\delta = 0$ .

Étudions maintenant le cas  $\delta < 0$  et voyons en quoi une borne inférieure strictement négative sur la courbure de Ricci affaiblit les conclusions précédentes. L'inégalité (2.18) entre le carré de la courbure moyenne et la norme de la seconde forme fondamentale permet, avec l'hypothèse de courbure, d'obtenir, à partir de (2.26)

$$-(n-1)^2\delta\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - \int_{\partial\Omega_r} \eta^2 d\nu_{g_{|\partial\Omega_r}} \geq 0, \quad (2.26)$$

d'où, puisque la courbure moyenne est constante,

$$\eta^2 \leq -(n-1)^2\delta.$$

Compte tenu de la proposition 2.2.6 qui lie les dérivées (à droite et à gauche) du profil à la courbure moyenne d'un domaine isopérimétrique, nous obtenons

$$\min \left( h_{(M,g)}'(\beta)^2, h_{(M,g)}'(\beta)^2 \right) \leq (n-1)^2|\delta|. \quad (2.27)$$

Or, à partir du comportement du profil au voisinage de 0, le lemme 2.3.6 permet d'établir l'existence d'un réel  $\beta_0(n,d,\delta) \in ]0, \frac{1}{2}]$  tel que pour  $\beta \in [0, \beta_0(n,d,\delta)]$ , l'inégalité (2.27) est impossible, d'où la connexité du bord des domaines isopérimétriques de petit volume relatif.  $\square$

## 2.4 Intégration de l'inéquation différentielle et comparaisons

Sachant que le profil renormalisé d'une variété riemannienne fermée satisfait l'inéquation différentielle (2.7) établie dans le théorème 2.2.1, l'idée essentielle de cette partie réside dans l'utilisation de théorèmes de comparaison sur les solutions de l'inéquation différentielle (2.7) afin d'obtenir des estimations du profil isopérimétrique. Une excellente illustration de cette méthode est donnée par la nouvelle preuve que nous fournissons de l'inégalité de Lévy-Gromov. La technique de comparaison repose sur le pincement de toute solution de l'inéquation différentielle (2.7) : elle est majorée sur  $[0,1]$  (resp.  $[0, \frac{1}{2}]$ ) par la solution exacte de l'équation différentielle (2.9) qui a mêmes conditions initiales en 0 et elle est minorée par la solution exacte de l'équation différentielle (2.9) qui prend les mêmes valeurs au bord, en 0 et en 1 (resp. en 0 et en  $\frac{1}{2}$ ). En courbure strictement positive, nous disposons des sphères euclidiennes comme variétés modèles canoniques dont les profils sont des solutions exactes de l'équation différentielle (2.9). Cependant, afin d'affiner les estimations obtenues en courbure positive et de proposer des comparaisons en courbure négative ou nulle, nous sommes conduits à décrire précisément des familles de solutions de (2.9) et à interpréter géométriquement les quantités analytiques  $y'_{(M,g)}(0)$  et  $y_{(M,g)}(\frac{1}{2})$  introduites pour les paramétrer. Ainsi, nous allons d'une part nous inspirer de la connaissance des solutions du problème isopérimétrique sur les espaces modèles  $\mathbb{M}_\delta^n$  pour construire des "profils modèles" solutions de (2.9), et d'autre part considérer des hypothèses géométriques supplémentaires concernant le volume de la variété (qui gère la dérivée à droite du profil renormalisé en 0) et la constante isopérimétrique de Cheeger (qui est liée à la valeur du profil en  $\frac{1}{2}$ ), dans le but d'accéder à des pincements du profil ayant une signification géométrique.

### 2.4.1 Profils modèles

Rappelons que les profils des espaces simplement connexes de courbure sectionnelle constante sont des solutions exactes de l'équation différentielle (2.9) associée à l'inéquation différentielle (2.7). Par conséquent, nous proposons des *profils modèles*, inspirés des profils des espaces simplement connexes de courbure sectionnelle constante sur lesquels les boules géodésiques sont des domaines isopérimétriques. Considérons, dans l'espace simplement connexe de dimension  $n$  et de courbure constante  $\delta$ , une boule géodésique de rayon  $R$  et de volume  $V_{n,\delta}(R)$  ( $R \in ]0, \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}[$  si  $\delta > 0$  et  $R \in ]0, +\infty[$  si  $\delta \leq 0$ ). Définissons alors, sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ , la fonction  $h_{n,\delta,R}$  en posant, pour toute valeur de  $r$  dans  $[0, R]$ ,

$$h_{n,\delta,R} \left( \frac{V_{n,\delta}(r)}{2V_{n,\delta}(R)} \right) = \frac{V'_{n,\delta}(r)}{2V_{n,\delta}(R)},$$

ce qui revient à associer à toute valeur de  $\beta$  comprise entre 0 et  $\frac{1}{2}$ , le rapport du volume  $(n-1)$ -dimensionnel du bord de la boule géodésique de volume  $2\beta V_{n,\delta}(R)$  sur le double du volume de la boule géodésique de rayon  $R$ . Enfin, nous prolongeons  $h_{n,\delta,R}$  à  $[0,1]$  par symétrie par rapport à  $\frac{1}{2}$ .

Ces profils modèles  $h_{n,\delta,R}$  possèdent des propriétés différentielles héritées des équations différentielles (2.9), (2.14) et (2.15) satisfaites par les profils isopérimétriques des espaces modèles  $\mathbb{M}_\delta^n$ . En effet, les fonctions  $h_{n,\delta,R}$  vérifient l'équation différentielle

$$\forall \beta \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[ \quad , \quad h_{n,\delta,R}(\beta)^{\frac{n+1}{n-1}} h''_{n,\delta,R}(\beta) = - \frac{n-1}{\left( \int_0^R (s_\delta(u))^{n-1} du \right)^{\frac{2}{n-1}}}$$

et les profils renormalisés qui leur sont associés, notés  $y_{n,\delta,R} := h_{n,\delta,R}^{\frac{n}{n-1}}$ , constituent une famille de solutions exactes, paramétrées par  $R$ , de l'équation différentielle suivante :

$$\forall \beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[ \quad , \quad y''(\beta) = -n\delta y(\beta)^{\frac{2-n}{n}}.$$

Ces profils modèles permettent de décrire des familles continues de solutions de l'équation différentielle (2.9) et nous rassemblons dans la proposition suivante quelques propriétés élémentaires de ces fonctions, également illustrées par les figures 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 et 2.7.

**Proposition 2.4.1** *Les profils modèles  $h_{n,\delta,R}$  sont de classe  $C^\infty$ , concaves et croissants sur  $[0, \frac{1}{2}]$ . En particulier,*

$$\sup_{\beta \in [0, \frac{1}{2}]} h_{n,\delta,R}(\beta) = h_{n,\delta,R}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad 2h_{n,\delta,R}\left(\frac{1}{2}\right) = \inf_{\beta \in [0, \frac{1}{2}]} \left\{ \frac{h_{n,\delta,R}(\beta)}{\beta} \right\}.$$

De plus, si  $R < R'$ , alors, sous réserve d'existence des profils mentionnés, pour tout  $\beta \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,

$$h_{n,\delta,R}(\beta) > h_{n,\delta,R'}(\beta) \quad , \quad h'_{n,\delta,R}(\beta) > h'_{n,\delta,R'}(\beta) \quad \text{et} \quad y'_{n,\delta,R}(\beta) > y'_{n,\delta,R'}(\beta).$$

Notons respectivement  $V(n,\delta,R)$ ,  $d(n,\delta,R)$  et  $H(n,\delta,R)$  les quantités  $2V_{n,\delta}(R)$ ,  $2R$  et  $2h_{n,\delta,R}(\frac{1}{2})$ . Ces notations représentent les quantités géométriques associées aux profils des variétés riemanniennes fermées par les relations suivantes, inspirées de (1.12), (1.20) et (1.4),

$$h_{n,\delta,R}(\beta) \underset{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}}{\sim} \frac{\gamma_n}{V(n,\delta,R)^{\frac{1}{n}}} \beta^{\frac{n-1}{n}}, \quad (2.28)$$

$$d(n,\delta,R) = \int_0^1 \frac{d\beta}{h_{n,\delta,R}(\beta)}, \quad (2.29)$$

$$H(n,\delta,R) = \inf \left\{ \frac{h_{n,\delta,R}(\beta)}{\beta} / \beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[ \right\} = 2h_{n,\delta,R}\left(\frac{1}{2}\right), \quad (2.30)$$

et qui correspondent respectivement au volume, au diamètre et à la constante isopérimétrique de Cheeger du profil  $h_{n,\delta,R}$ . Remarquons que l'égalité (2.30) vient de la concavité des profils  $h_{n,\delta,R}$  rappelée dans la proposition 2.4.1 et reflétée par les équations différentielles (2.14) et (2.15).

Nous devons insister sur le fait que ces profils modèles sont des fonctions explicites ne correspondant a priori à aucun profil isopérimétrique de variété, ni même d'espace singulier (voir le chapitre 3 pour une définition du profil isopérimétrique dans ce contexte). Néanmoins, S. Gallot propose dans [G1] d'interpréter ces profils modèles d'après leur construction en les "associant" aux variétés singulières  $M_{n,\delta,R}$ , obtenues en recollant sur leur bord deux boules géodésiques identiques de rayon  $R$  de  $\mathbb{M}_\delta^n$ , comme l'illustre la figure 2.8. Attention toutefois, bien que  $M_{n,\delta,R}$  soit une variété singulière de volume  $V(n,\delta,R)$  et de diamètre  $d(n,\delta,R)$ , le profil de  $M_{n,\delta,R}$  vue comme variété singulière n'est pas  $h_{n,\delta,R}$ , comme le montre le calcul des profils des variétés  $M_{2,\delta,R}$  effectué dans [CFGTSY].

En ajustant le paramètre  $R$ , nous observons qu'il devient possible d'imposer soit la valeur de la dérivée initiale de  $y_{n,\delta,R}$ , soit la valeur que prend cette fonction en  $\frac{1}{2}$ . Du

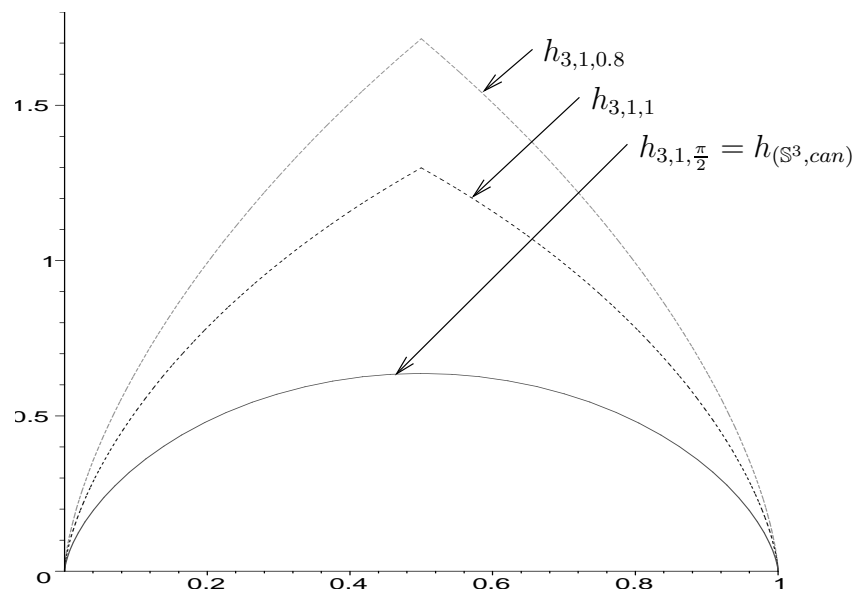


FIG. 2.2 – Concavité des profils isopérimétriques modèles de dimension 3 en courbure positive  $\delta = 1$ . Lorsque le paramètre  $R$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , les fonctions  $h_{n,\delta,R}$  décroissent et convergent vers  $h_{(\mathbb{S}^n(\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}))}$ .

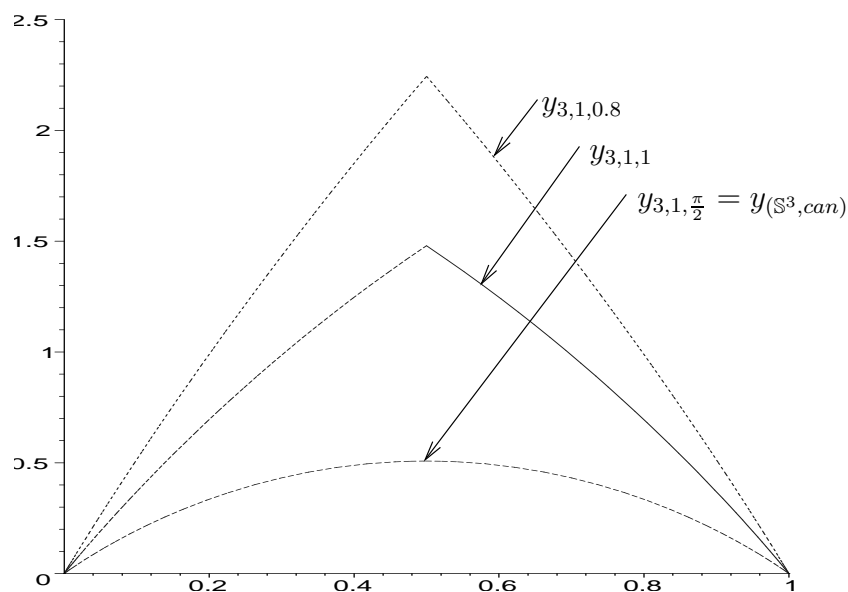


FIG. 2.3 – Concavité des profils modèles renormalisés de dimension 3 en courbure positive  $\delta = 1$ .



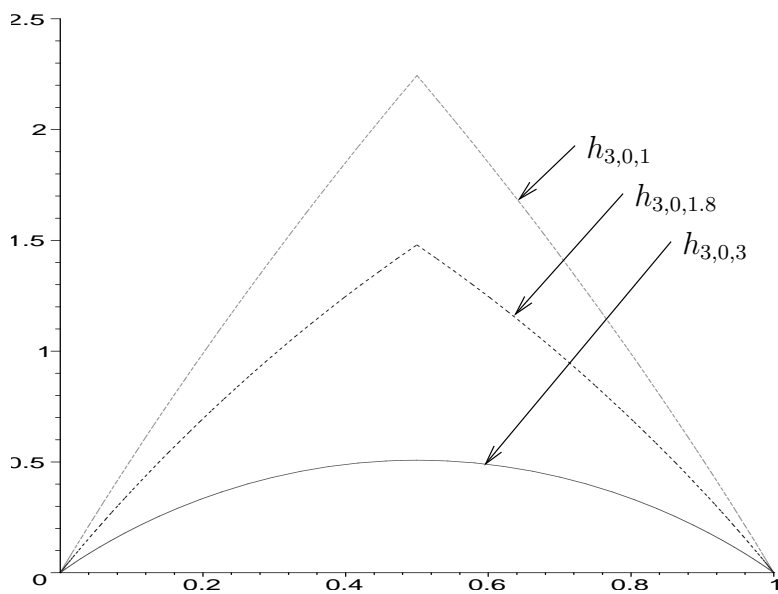


FIG. 2.4 – Concavité des profils modèles de dimension 3 en courbure nulle  $\delta = 0$ .

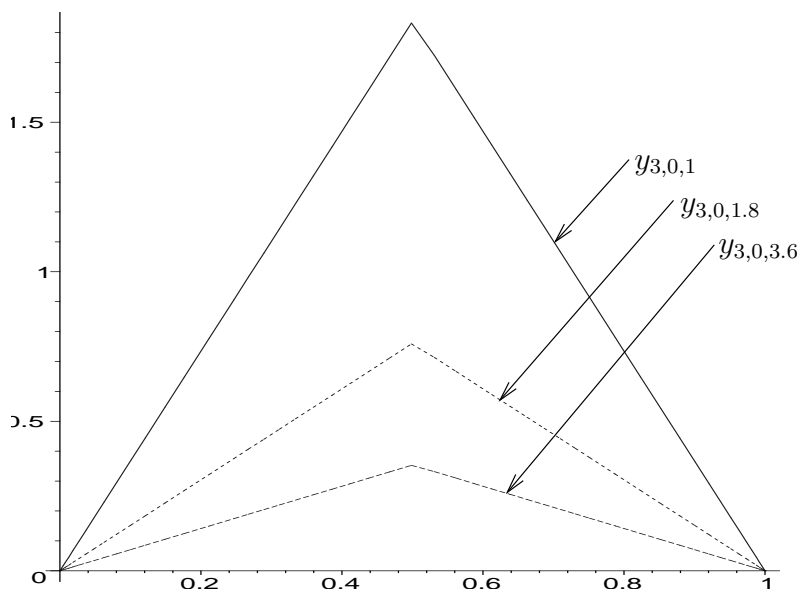


FIG. 2.5 – Linéarité des profils modèles renormalisés de dimension 3 en courbure nulle  $\delta = 0$ .

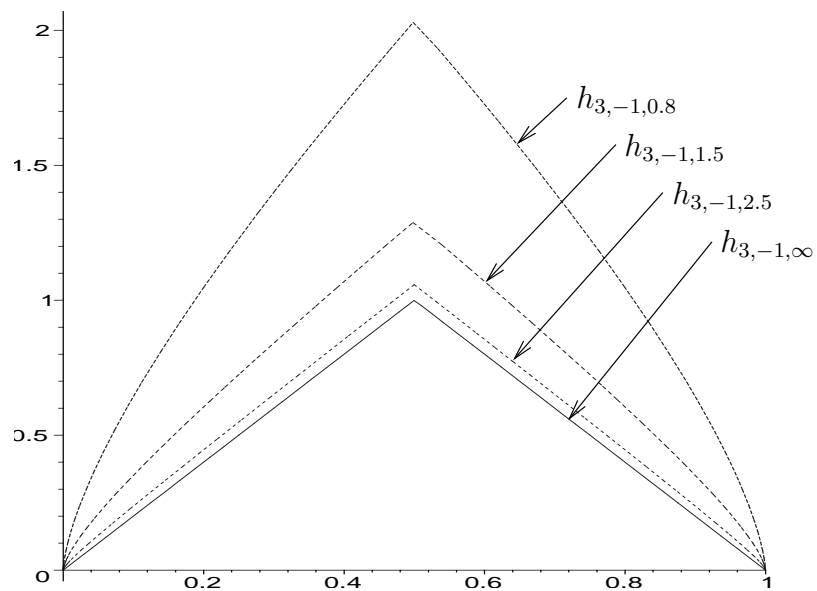


FIG. 2.6 – Concavité des profils modèles de dimension 3 en courbure négative  $\delta = -1$ . Lorsque le paramètre  $R$  tend vers  $+\infty$ , les fonctions  $h_{n,\delta,R}$  décroissent et convergent vers  $h_{n,\delta,\infty}$ .

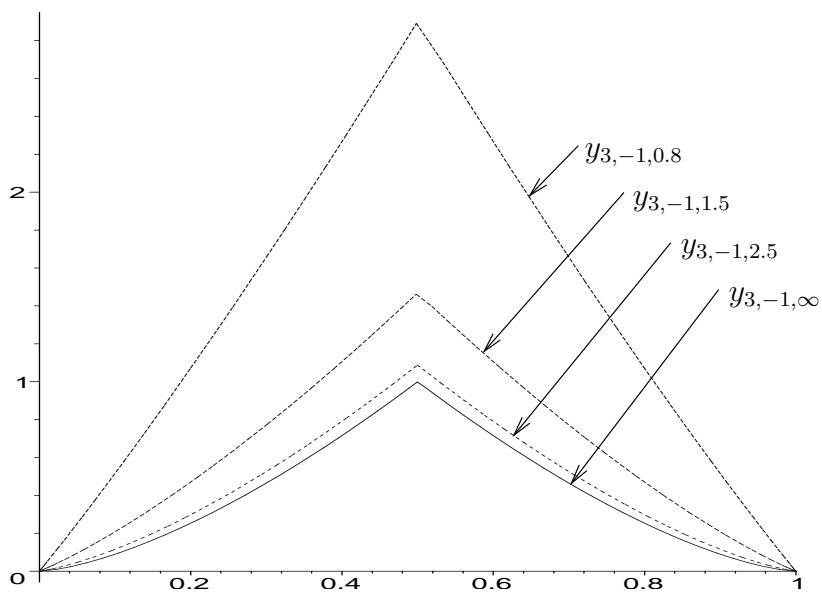


FIG. 2.7 – Convexité des profils modèles renormalisés de dimension 3 en courbure négative  $\delta = -1$ .

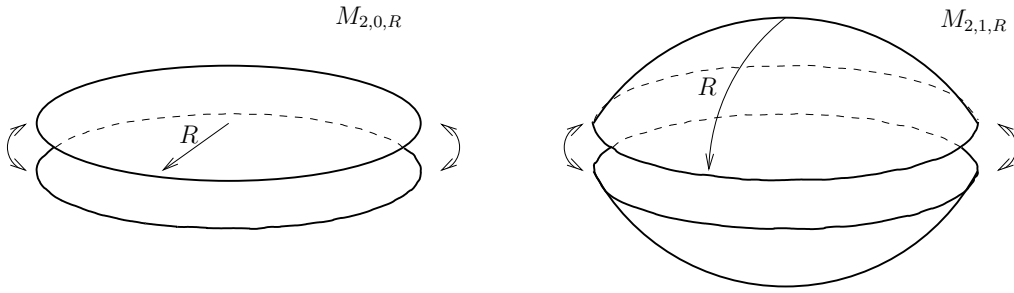


FIG. 2.8 – Interprétation des espaces modèles comme des variétés singulières de courbure positive ou nulle en dimension 2.

point de vue de nos interprétations géométriques (2.28) et (2.30), ceci correspond respectivement, sur le profil modèle, soit à imposer le volume, soit à imposer la constante isopérimétrique de Cheeger. Ainsi, pour tout triplet  $(n, \delta, V)$  où  $(n, V)$  appartient à  $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\} \times ]0, \text{vol}(\mathbb{S}_\delta^n)]$  si  $\delta > 0$  et à  $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\} \times ]0, +\infty[$  si  $\delta < 0$ , notons  $R_0(n, \delta, V)$  l'unique solution de l'équation d'inconnue  $R$ ,

$$V(n, \delta, R) = V,$$

qui est équivalente à

$$2\alpha_{n-1} \int_0^R (s_\delta(u))^{n-1} du = V.$$

De même, pour tout triplet  $(n, \delta, H)$  où  $(n, H)$  appartient à  $(\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}) \times [h_C(\mathbb{S}_\delta^n), +\infty[$  si  $\delta > 0$  et à  $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\} \times ]-(n-1)^2\delta, +\infty[$  si  $\delta < 0$ , notons  $R_1(n, \delta, H)$  l'unique solution de l'équation d'inconnue  $R$

$$h_C(n, \delta, R) = H,$$

qui est équivalente à

$$\frac{s_\delta(R)^{n-1}}{\int_0^R s_\delta(u)^{n-1} du} = H.$$

Les restrictions  $V \leq \text{vol}(\mathbb{S}_\delta^n)$  et  $H \geq h_C(\mathbb{S}_\delta^n)$  si  $\delta > 0$ ,  $H^2 > -(n-1)^2\delta$  si  $\delta < 0$ , sont des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une solution (unique de surcroît) de l'équation proposée. D'un point de vue technique, ce sont des contraintes liées à l'existence d'un profil modèle vérifiant les conditions requises en 0 ou en  $\frac{1}{2}$ .

Notons respectivement, pour simplifier,  $V_1(n, \delta, H)$ ,  $d_1(n, \delta, H)$  et  $H_0(n, \delta, V)$  les quantités  $V(n, \delta, R_1(n, \delta, H))$ ,  $d(n, \delta, R_1(n, \delta, H))$  et  $H(n, \delta, R_0(n, \delta, V))$ .

**Lemme 2.4.2** Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 3 et  $\delta$  un réel strictement négatif. Alors, pour tout  $\beta$  dans  $[0, \frac{1}{2}]$ ,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} h_{n, \delta, R}(\beta) = (n-1)\sqrt{-\delta}\beta.$$

Ainsi, l'existence cette limite nous permet de définir, pour tout  $n \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})$  et  $\delta < 0$ , les fonctions  $h_{n, \delta, \infty}$  par la relation

$$h_{n, \delta, \infty}(\beta) := (n-1)\sqrt{-\delta} \min(\beta, 1-\beta).$$

Par ailleurs, notons  $v(R, \beta)$  la fonction des deux variables  $R$  et  $\beta$  définie par  $v(R, \beta) := v'_{n, \delta, R}(\beta)$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\beta_\varepsilon > 0$  et  $R_\varepsilon > 0$  tels que

$$\sup \left\{ v(R, \beta) \mid \beta \leq \beta_\varepsilon, R \geq R_\varepsilon \right\} \leq \varepsilon.$$

**Démonstration.**

La première assertion repose sur un calcul d'équivalent relativement simple que nous ne détaillons pas ici.

La seconde affirmation repose sur la monotonie et la convexité des profils modèles. En effet, fixons  $\beta_c \in ]0, \frac{1}{2}]$  et  $R_c > 0$ , alors pour tout  $\beta \leq \beta_c$  et pour tout  $R \geq R_c$ , par convexité de  $y_{n,\delta,R}$ ,

$$v(R, \beta) \leq v(R, \beta_c)$$

et par monotonie (voir la proposition 2.4.1),

$$v(R, \beta_c) \leq v(R_c, \beta_c).$$

Ainsi,

$$\sup \left\{ v(R, \beta) \mid \beta \leq \beta_c, R \geq R_c \right\} = v(R_c, \beta_c).$$

Il ne reste plus qu'à observer que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} v(R_c, \beta) = \frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{V(n, \delta, R_c)^{\frac{1}{n-1}}}$$

et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{V(n, \delta, R)^{\frac{1}{n-1}}} = 0.$$

Dès lors, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, choisissons  $R_\varepsilon$  tel que

$$\frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{V(n, \delta, R_\varepsilon)^{\frac{1}{n-1}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

puis choisissons  $\beta_\varepsilon$  tel que

$$v(R_c, \beta) - \frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{V(n, \delta, R_c)^{\frac{1}{n-1}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ces choix permettent de conclure. □

**2.4.2 L'inégalité de Lévy-Gromov**

Redémontrons l'inégalité de Lévy-Gromov (voir [Gr1]) en la faisant apparaître comme une conséquence d'un théorème de comparaison analytique entre les solutions de l'inéquation différentielle (2.7).

**Théorème 2.4.3** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M,g)} \geq (n-1)g.$$

*Alors*

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad h_{(M,g)}(\beta) \geq h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta).$$

*De plus, s'il existe  $\beta_0$  dans  $]0, 1[$  tel que  $h_{(M,g)}(\beta_0) = h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta_0)$ , alors  $h_{(M,g)}$  coïncide avec  $h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}$  sur  $[0, 1]$  et  $(M, g)$  est isométrique à  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ .*

**Démonstration.**

La preuve du résultat en dimension 2 est une application directe du corollaire C.2.4 appliqué pour  $a = 1$ ,  $c = -2$  et  $f = y_{(M,g)}$ . Nous observons alors que la minoration obtenue correspond au profil de  $(\mathbb{S}^2, can)$ , à savoir

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad y_{(M,g)}(\beta) \geq \beta(1 - \beta) = y_{(\mathbb{S}^2, can)}(\beta),$$

d'où le résultat. Quant au cas d'égalité, il provient également du corollaire C.2.4 : s'il existe  $\beta_0$  dans  $]0,1[$  tel que  $y_{(M,g)}(\beta_0) = y_{(\mathbb{S}^2, can)}(\beta_0)$ , alors  $y_{(M,g)}$  et  $y_{(\mathbb{S}^2, can)}$  coïncident sur  $[0,1]$ . Par conséquent, l'égalité des dérivées à droite en 0 impose l'égalité des volumes de sorte que le cas d'égalité du théorème de Bishop permet d'affirmer que  $(M,g)$  et  $(\mathbb{S}^2, can)$  sont isométriques.

En dimension  $n \geq 3$ , la minoration du profil isopérimétrique est une application du théorème C.2.2 pour  $a = 1$ ,  $g(x) = -nx^{\frac{2-n}{n}}$ ,  $f = y_{(M,g)}$  et  $y_- = y_{(\mathbb{S}^n, can)}$ . Ainsi, comme  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  est une solution de l'équation différentielle (2.9) qui prend les mêmes valeurs que  $y_{(M,g)}$  en 0 et en 1, nous obtenons

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad h_{(M,g)}(\beta) \geq h_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta).$$

Traitons maintenant le cas d'égalité et supposons qu'il existe  $\beta_0$  dans  $]0,1[$  tel que  $y_{(M,g)}(\beta_0) = y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0)$ . Par symétrie des profils, nous pouvons supposer que  $\beta_0$  appartient à  $]0, \frac{1}{2}[$ . Notre objectif va être de montrer que les deux fonctions prennent la même valeur en  $\frac{1}{2}$ . Si  $\beta_0 = \frac{1}{2}$ , le résultat est trivial. Si  $\beta_0 < \frac{1}{2}$ , nous cherchons à appliquer le lemme C.2.1 pour  $a = \frac{1}{2} - \beta_0$ ,  $g(x) = -nx^{\frac{2-n}{n}}$ ,  $f(\cdot) = y_{(M,g)}(\cdot + \beta_0)$  et  $y(\cdot) = y_{n,1,R}(\cdot + \beta_0) + y_{(M,g)}(\beta_0) - y_{n,1,R}(\beta_0)$  où  $R \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . En effet, l'idée qui nous guide est la suivante : en  $\beta_0$ ,  $y_{(M,g)}$  et  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  ont même valeur et même dérivée<sup>11</sup> si bien que la "philosophie" des théorèmes de comparaison (voir les remarques C.2.3) laisse penser que le profil  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  majore  $y_{(M,g)}$ , et comme nous savons par ailleurs qu'il le minore, il y aura égalité. D'une part, compte tenu de la croissance de  $g$  et de l'inégalité  $y_{n,1,R} \geq y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  pour tout  $R \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  (voir la proposition 2.4.1) qui donne  $y_{(M,g)}(\beta_0) - y_{n,1,R}(\beta_0) \leq 0$ , nous obtenons<sup>12</sup>,

$$\forall \beta \in \left]0, \frac{1}{2} - \beta_0 \right[ \quad , \quad \underline{D}^2 y(\beta) = y''_{n,1,R}(\beta + \beta_0) = g(y_{n,1,R}(\beta + \beta_0)) \geq g(y(\beta)).$$

D'autre part, nous savons, d'après la proposition 2.4.1, que  $y'_{n,1,R}(\beta_0) > y'_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0)$ <sup>13</sup> et l'inégalité  $y_{(M,g)} \geq y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  donne, avec les propriétés de dérivabilité du profil établies à la proposition G.3.6,

$$y'_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0) \leq y_{(M,g)'_d}(\beta_0) \leq y_{(M,g)'_g}(\beta_0) \leq y'_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0)$$

de sorte que

$$y_{(M,g)'_d}(\beta_0) = y'_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0) < y'_{n,1,R}(\beta_0).$$

Ainsi, le lemme C.2.1 établit la majoration

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2} - \beta_0 \right] \quad , \quad y_{(M,g)}(\beta + \beta_0) \leq y_{n,1,R}(\beta + \beta_0) + y_{(M,g)}(\beta_0) - y_{n,1,R}(\beta_0),$$

11. Cette affirmation est justifiée dans la suite de la preuve.

12. En fait il faut également remarquer que, d'après la proposition 2.4.1, la fonction  $y_{n,1,R} - y_{(\mathbb{S}^n, can)}$ , dont la dérivée est positive sur  $\frac{1}{2}$ , est croissante, ce qui permet de justifier que la fonction  $y$  est strictement positive sur  $]0, \frac{1}{2} - \beta_0[$ .

13. La contrainte  $R \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  est importante ici.

d'où, en passant à la limite sur  $R$  tendant vers  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$\forall \beta \in \left[ \beta_0, \frac{1}{2} \right] \quad , \quad y_{(M,g)}(\beta) \leq y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta),$$

car pour tout  $u$  dans  $[0, \frac{1}{2}]$ ,

$$\lim_{R \rightarrow \frac{\pi}{2}} y_{n,1,R}(u) = y_{(\mathbb{S}^n, can)}(u),$$

ce qui implique aussi

$$\lim_{R \rightarrow \frac{\pi}{2}} y_{(M,g)}(\beta_0) - y_{n,1,R}(\beta_0) = 0.$$

Par conséquent,  $y_{(M,g)}$  et  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  coïncident sur  $[\beta_0, 1 - \beta_0]$ , donc en  $\frac{1}{2}$ .

Observons maintenant que l'égalité des profils de  $(M,g)$  et de  $(\mathbb{S}^n, can)$  en  $\frac{1}{2}$  implique, compte tenu de la concavité des profils et de la proposition 1.4.2, l'égalité de leurs constantes isopérimétriques de Cheeger. Or l'inégalité (1.9) établie par S. Gallot et rappelée dans le théorème 1.4.4 impose alors l'égalité de leurs diamètres, ce qui avec l'hypothèse de courbure Ricci  $\geq (n-1)g$  permet de conclure que  $(M,g)$  est isométrique à  $(\mathbb{S}^n, can)$ , d'après le théorème de rigidité de Toponogov (voir [To]).

Cette preuve du cas d'égalité n'est pas satisfaisante dans la mesure où l'égalité analytique des fonctions  $y_{(M,g)}$  et  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  sur  $[0,1]$  apparaît comme une conséquence du contenu géométrique du profil isopérimétrique en  $\frac{1}{2}$ . Nous allons par conséquent proposer une version légèrement affinée de la preuve donnée précédemment, afin de montrer que s'il existe  $\beta_0$  dans  $]0,1[$  tel que  $w(\beta_0) = y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0)$ , où  $w$  est une fonction continue sur  $[0,1]$ , nulle en 0, symétrique par rapport à  $\frac{1}{2}$  et telle que

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad \overline{D^2}w(\beta) \leq -nw(\beta)^{\frac{2-n}{n}},$$

alors  $w$  et  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  coïncident sur  $[0,1]$ . Par symétrie des fonctions  $w$  et  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$ , nous pouvons supposer que  $\beta_0$  appartient à  $]0, \frac{1}{2}]$ . Comme nous l'avons vu précédemment nous pouvons affirmer que les fonction considérées sont égales sur  $[\beta_0, 1 - \beta_0]$  et nous disposons de l'égalité :

$$w'_g(\beta_0) = w'_d(\beta_0) = y'_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0).$$

- Supposons que  $\beta_0$  appartient à  $]0, \frac{1}{2}[$ . Par stricte concavité et croissance de la fonction  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$ , considérons, pour  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < \frac{1}{2} - \beta_0$ , la fonction  $y_\varepsilon(\beta) := y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta + \varepsilon) + w(\beta_0) - y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0 + \varepsilon)$  ( $w(\beta_0) - y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0 + \varepsilon) < 0$  par croissance de  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$ ), strictement positive lorsque  $\beta$  décrit  $]0, \beta_0]$  car la croissance de la fonction  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  donne la croissance de  $y_\varepsilon$  tandis que sa stricte concavité permet d'établir  $y_\varepsilon(0) = y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\varepsilon) + y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0) - y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0 + \varepsilon) > 0$ . Observons alors d'une part que  $y'_\varepsilon(\beta_0) = y'_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0 + \varepsilon) < y'_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0) = w'_g(\beta_0)$  (de sorte que  $y_\varepsilon$  majore strictement  $w$  à gauche de  $\beta_0$ ) et d'autre part que

$$\begin{aligned} \forall \beta \in ]0, \beta_0[ \quad , \quad y''_\varepsilon(\beta) &= y''_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta + \varepsilon) \\ &= -ny_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta + \varepsilon)^{\frac{2-n}{n}} \\ &\geq -n \left( y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta + \varepsilon) + w(\beta_0) - y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0 + \varepsilon) \right)^{\frac{2-n}{n}} \\ &= -ny_\varepsilon(\beta)^{\frac{2-n}{n}}. \end{aligned}$$

Si nous supposons qu'il existe  $\beta_1$  dans  $[0, \beta_0[$  tel que  $y_\varepsilon(\beta_1) < w(\beta_1)$ , en posant

$$\beta_2 := \inf \{ \beta \in [0, \beta_0] \mid \forall u \in [\beta, \beta_0], y_\varepsilon(u) \geq w(u) \},$$

( $\beta_2$  est bien défini puisque  $y'_\varepsilon(\beta_0) < w'_g(\beta_0)$  et  $\beta_2 > \beta_1 \geq 0$  d'où  $y_\varepsilon(\beta_2) = w(\beta_2)$ ) nous pouvons appliquer le lemme C.2.1 sur  $[\beta_2, \beta_0]$ , pour  $g(x) = -nx^{\frac{2-n}{n}}$ ,  $f(\cdot) = w(\cdot)$  et  $y(\cdot) = y_\varepsilon$ . Nous obtenons alors, comme  $y_\varepsilon \geq w$  sur  $[\beta_2, \beta_0]$  et  $y_\varepsilon(\beta_2) = w(\beta_2)$ , une contradiction avec la condition  $y_\varepsilon(\beta_0) = w(\beta_0)$ . Par conséquent,

$$\forall \beta \in [0, \beta_0] \quad , \quad y_\varepsilon(\beta) \geq w(\beta),$$

d'où, par passage à la limite sur  $\varepsilon$  tendant vers 0,  $y_{(\mathbb{S}^n, can)} \geq w$  sur  $[0, \beta_0]$ . Ainsi,  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  et  $w$  coïncident sur  $[0, \beta_0]$ , ce qu'il restait à prouver.

- Supposons que  $\beta_0 = \frac{1}{2}$ . Le résultat déjà obtenu sur les dérivées devient  $w'_d(\frac{1}{2}) = w'_g(\frac{1}{2}) = 0$ . Par symétrie et concavité de  $w$ , la fonction  $\varepsilon \mapsto w'_g(\frac{1}{2} - \varepsilon)$  définie pour  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ , est strictement croissante et nulle en 0 (la croissance est immédiate, la stricte monotonie vient de la stricte positivité de  $w$  sur  $]0, 1[$  et de l'inéquation différentielle qui interdit à  $w$  d'être constante sur un ouvert de  $]0, 1[$ ). Par conséquent, nous pouvons reproduire le raisonnement développé lorsque  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$  et démontrer, pour tout  $\varepsilon > 0$  que

$$\forall \beta \in [0, \frac{1}{2} - \varepsilon] \quad , \quad w(\beta) \leq y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta + \varepsilon) + w\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) - y_{(\mathbb{S}^n, can)}\left(\frac{1}{2}\right).$$

(en effet, le membre de gauche satisfait la "bonne" inéquation différentielle, coïncide avec  $w$  en  $\frac{1}{2} - \varepsilon$  et sa dérivée en  $\frac{1}{2} - \varepsilon$  est strictement inférieure à celle de  $w$ , ce qui permet d'appliquer le lemme C.2.1). Ainsi, en passant à la limite pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, nous obtenons l'inégalité  $w \leq y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , d'où l'égalité.

Ainsi, les fonctions  $w$  et  $y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  coïncident sur  $[0, 1]$ , ce qui prouve le résultat annoncé. En particulier, cette amélioration de la technique permet de démontrer que l'existence de  $\beta_0$  dans  $]0, 1[$  tel que  $y_{(M, g)}(\beta_0) = y_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta_0)$  suffit pour établir  $y_{(M, g)} = y_{(\mathbb{S}^n, can)}$  dont se déduit l'égalité  $\text{vol}(M, g) = \text{vol}(\mathbb{S}^n, can)$ .  $(M, g)$  et  $(\mathbb{S}^n, can)$  sont alors isométriques d'après le cas d'égalité du théorème de Bishop. □

**Remarque 2.4.4** *La technique de traitement du cas d'égalité montre qu'il suffit, pour conclure, de connaître la caractérisation du cas d'égalité dans l'inégalité  $\text{vol}(M, g) \leq \text{vol}(\mathbb{S}^n, can)$  sous l'hypothèse Ricci  $\geq n - 1$ .*

Cette preuve illustre deux aspects essentiels qui influencent la suite de cette partie sur les théorèmes de comparaison. D'une part, nous traiterons séparément les variétés de dimension 2 et les autres, car l'intégration de l'inéquation différentielle linéaire (2.8) est moins technique que celle de (2.7). D'autre part, nous comparerons systématiquement le profil d'une variété à des solutions exactes de l'équation différentielle (2.9), choisies parmi les profils modèles décrits au paragraphe 2.4.1.

### 2.4.3 Théorèmes de comparaison en dimension 2

Parmi tous les profils modèles décrits au paragraphe 2.4.1, seuls ceux des sphères sont de "vrais" profils de variétés, c'est pourquoi le théorème 2.4.3 est le seul véritable résultat de comparaison obtenu directement sur  $[0, 1]$ . Les autres profils modèles, définis sur  $[0, \frac{1}{2}]$  puis prolongés à  $[0, 1]$  par symétrie, sont des solutions de l'équation différentielle (2.9) sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , mais pas sur  $[0, 1]$  car leur construction les rend non dérivables en  $\frac{1}{2}$ . Ainsi, dans la suite, nous proposerons plus modestement des estimations du profil isopérimétrique sur  $[0, \frac{1}{2}]$ . La description des profils modèles auxquels nous souhaitons comparer le profil isopérimétrique requiert le choix de paramètres géométriques pertinents afin d'estimer le

plus finement possible le profil de la variété qui nous intéresse. Ces paramètres seront le volume de la variété, que nous pouvons interpréter comme la quantité géométrique qui donne la dérivée initiale du profil renormalisé (voir la proposition 1.5.2), et sa constante isopérimétrique de Cheeger qui s'interprète comme un minorant de la valeur du profil en  $\frac{1}{2}$  (comme la valeur exacte si Ricci  $\geq 0$ ).

### Estimations du profil des surfaces riemanniennes fermées

**Théorème 2.4.5** *Soit  $(M,g)$  une surface riemannienne fermée dont les courbures sectionnelles sont minorées par  $K_0 \in \mathbb{R}^+$ . Alors, la fonction profil isopérimétrique de  $(M,g)$  est concave, croissante sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , sa valeur en  $\frac{1}{2}$  est reliée à la constante isopérimétrique de Cheeger par*

$$h_C(M,g) = 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.31)$$

et elle vérifie, pour tout  $\beta$  dans  $[0, \frac{1}{2}]$ ,

$$\frac{h_C(M,g)^2 + K_0}{2}\beta - K_0\beta^2 \leq h_{(M,g)}(\beta)^2 \leq \min\left(\frac{4\pi}{\text{vol}(M,g)}\beta - K_0\beta^2, \frac{h_C(M,g)^2}{4}\right). \quad (2.32)$$

#### Démonstration.

La concavité de  $h_{(M,g)}^2$  implique celle de  $h_{(M,g)}$ , d'où, avec la proposition 1.4.2,

$$h_C(M,g) = \inf_{\beta \in ]0, \frac{1}{2}[} \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta} = \frac{h_{(M,g)}(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right).$$

L'encadrement (2.32) vient du théorème C.2.4 appliqué pour  $a = \frac{1}{2}$ ,  $c = 2K_0$  et  $f = h_{(M,g)}^2$ . □

Enonçons maintenant la version analogue lorsque le minorant des courbures sectionnelles est strictement négatif. La preuve, similaire à celle du résultat précédent est omise.

**Théorème 2.4.6** *Soit  $(M,g)$  une surface riemannienne fermée de dimension 2 dont les courbures sectionnelles sont minorées par  $K_0 \in \mathbb{R}^*$ . Alors,*

$$h_C(M,g) \leq 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.33)$$

et, pour tout  $\beta$  dans  $[0, \frac{1}{2}]$ ,

$$\max\left(0, \frac{h_C(M,g)^2 + K_0}{2}\beta - K_0\beta^2\right) \leq h_{(M,g)}(\beta)^2 \leq \frac{4\pi}{\text{vol}(M,g)}\beta - K_0\beta^2. \quad (2.34)$$

Ces estimations, obtenues par intégration "optimale" de l'inéquation différentielle (2.8) (voir le premier point des remarques C.2.5), peuvent être "affaiblies" en les résultats de comparaison suivants :

**Corollaire 2.4.7** *Soit  $(M,g)$  une surface riemannienne fermée dont les courbures sectionnelles sont minorées par  $K_0 \in \mathbb{R}_+$ . Alors,*

– si  $K_0 > 0$ ,

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \sqrt{\frac{h_C(M,g)^2 + K_0}{2}} \leq \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^2, \text{can})}(\beta)} \leq \sqrt{\frac{8\pi}{\text{vol}(M,g)} - K_0},$$



– si  $K_0 = 0$ ,

$$\forall \beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad \frac{h_C(M,g)}{\sqrt{2}} \leq \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\sqrt{\beta}} \leq \sqrt{\frac{4\pi}{\text{vol}(M,g)}}.$$

**Démonstration.**

Considérons séparément les cas  $K_0 = 0$  et  $K_0 > 0$  qui correspondent à des choix d'espaces modèles différents.

- si  $K_0 = 0$ , le résultat est une application immédiate du théorème 2.4.5,
- si  $K_0 > 0$ , sachant que  $h_{(\mathbb{S}^2, \text{can})}(\beta) = \sqrt{\beta(1-\beta)}$ , il suffit, compte tenu de la minoration obtenue au théorème 2.4.5, de calculer la borne inférieure, sur  $]0, \frac{1}{2}]$  de la fonction

$$f(\beta) := \frac{\frac{h_C(M,g)^2 + K_0}{2}\beta - K_0\beta^2}{\beta(1-\beta)}$$

et la borne supérieure, sur  $]0, \frac{1}{2}]$  de la fonction

$$g(\beta) := \frac{\frac{4\pi}{\text{vol}(M,g)}\beta - K_0\beta^2}{\beta(1-\beta)}.$$

Le calcul des dérivées donne

$$f'(\beta) = \frac{1}{2} \frac{h_C(M,g)^2 - K_0}{(1-\beta)^2} \quad \text{et} \quad g'(\beta) = \frac{\frac{4\pi}{\text{vol}(M,g)} - K_0}{(1-\beta)^2}.$$

Or nous savons, par l'intermédiaire de l'inégalité de Lévy-Gromov établie au théorème 2.4.3, que

$$h_C(M,g) = 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right) \geq 2h_{(\mathbb{S}_{K_0}^2, \text{can})}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{K_0},$$

d'où, pour tout  $\beta$  dans  $]0, \frac{1}{2}]$ ,  $f'(\beta) \geq 0$  et par conséquent

$$\forall \beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^2, \text{can})}(\beta)} \geq \sqrt{\frac{h_C(M,g)^2 + K_0}{2}}.$$

Par ailleurs, le théorème de Bishop donne

$$\text{vol}(M,g) \leq \frac{4\pi}{K_0}$$

si bien que, pour tout  $\beta$  dans  $]0, \frac{1}{2}]$ ,  $g'(\beta) \geq 0$  et par conséquent

$$\forall \beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^2, \text{can})}(\beta)} \leq \sqrt{\frac{8\pi}{\text{vol}(M,g)} - K_0}.$$

□

**Remarque 2.4.8** Nous ne considérons pas, dans le corollaire 2.4.7, le cas où le minorant des courbures sectionnelles est strictement négatif. Il serait pourtant possible de donner des résultats de comparaison à condition de supposer l'inégalité

$$h_C(M,g)^2 > -K_0$$

pour garantir la stricte positivité du minorant obtenu dans le théorème 2.4.6 sous l'hypothèse de courbure  $K_0 < 0$ . Cette restriction dans la technique de comparaison correspond à la condition  $h_C(M,g)^2 > -(n-1)^2\delta$  nécessaire lors de la construction des profils modèles en dimension supérieure ou égale à 3. Nous renvoyons le lecteur intéressé au théorème 2 de [BBG] où des théorèmes de comparaison du profil par rapport aux sphères euclidiennes sont établis, sans supposer cette condition supplémentaire.

### Inégalités isopérimétriques sur les surfaces compactes

La recherche d'inégalités isopérimétriques sur les surfaces compactes a montivé de très nombreux travaux parmi lesquels nous pouvons citer [To], [R], [BP], [MJ], [MHH] ...

L'inégalité isopérimétrique de Bol-Fiala (voir [Fi] et [Bl]) établit qu'un domaine d'aire  $A$  et de longueur de bord  $L$  sur une surface compacte de courbure sectionnelle majorée par  $K_0$  vérifie :

$$4\pi A \leq L^2 + K_0 A^2.$$

Nous citons ici un pendant à cette inégalité dans la mesure où nous remplaçons l'hypothèse de majoration de la courbure par une hypothèse de minoration de la courbure.

**Théorème 2.4.9** *Soit  $(M, g)$  une surface riemannienne fermée dont la courbure sectionnelle est minorée par un nombre réel  $K_0 \in \mathbb{R}$ . Alors, tout ouvert  $\Omega$  à bord de classe  $C^\infty$  (non nécessairement connexe), de volume  $A \leq \frac{1}{2}\text{vol}(M, g)$  et de longueur de bord  $L$  vérifie :*

$$\frac{h_C(M, g)^2 + K_0}{2} \text{vol}(M, g) A \leq L^2 + K_0 A^2, \quad (2.35)$$

et

$$\frac{1 + K_0 s_{K_0} \left( \frac{\text{diam}(M, g)}{2} \right)^2}{2s_{K_0} \left( \frac{\text{diam}(M, g)}{2} \right)^2} \text{vol}(M, g) A \leq L^2 + K_0 A^2. \quad (2.36)$$

#### Démonstration.

Il suffit d'écrire la minoration de la fonction profil donnée par les corollaires 2.4.5 et 2.4.6 au point  $\beta = \frac{A}{\text{vol}(M, g)} \leq \frac{1}{2}$ , soit

$$\frac{h_C(M, g)^2 + K_0}{2} \frac{A}{\text{vol}(M, g)} + K_0 \frac{A^2}{\text{vol}(M, g)^2} \leq h_{(M, g)} \left( \frac{A}{\text{vol}(M, g)} \right)^2 \leq \frac{L^2}{\text{vol}(M, g)^2},$$

d'où le premier résultat.

La seconde expression prend en compte le fait que nous disposons d'une minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger en fonction d'un minorant de la courbure de Ricci et d'un majorant du diamètre (voir le théorème 1.4.4 issu de [G1]). En l'occurrence, en dimension 2, si  $K_0$  minore la courbure sectionnelle,

$$h_C(M, g) \geq \frac{1}{\int_0^{\frac{\text{diam}(M, g)}{2}} c_{K_0}(u) du} = \frac{1}{s_{K_0} \left( \frac{\text{diam}(M, g)}{2} \right)},$$

d'où la seconde minoration. □

#### Remarques 2.4.10

- L'inégalité (2.36) est optimale lorsque  $K_0$  est strictement positive. En effet, sur la sphère de dimension 2 et de rayon  $\frac{1}{\sqrt{K_0}}$  les calottes sphériques réalisent le cas d'égalité.
- Si  $K_0$  est strictement négatif, il existe un diamètre critique  $d_{K_0}$  à partir duquel ce théorème devient vide de sens car le minorant proposé est négatif. Un majorant de ce diamètre critique est caractérisé par l'inéquation

$$1 \leq |K_0| s_{K_0} \left( \frac{d(M, g)}{2} \right)^2,$$

issue de la condition  $h_C(M, g)^2 + K_0 \leq 0$  et de la minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger donnée par S. Gallot.

Nous pouvons également utiliser la majoration de la fonction profil établie par les théorèmes 2.4.5 et 2.4.6 pour donner un majorant de la longueur du bord d'un domaine minimisant, résultat que propose F. Morgan, H. Howards et M. Hutchings dans l'énoncé 2.7 de [MHH].

**Proposition 2.4.11** *Soit  $(M,g)$  une surface riemannienne complète compacte dont la courbure sectionnelle est minorée par un nombre réel  $K_0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $A \leq \frac{1}{2}\text{vol}(M,g)$ , alors tout domaine  $\Omega$  minimisant parmi les domaines de volume  $A$  satisfait, en notant  $L$  la longueur de son bord,*

$$L^2 \leq 4\pi A - K_0 A^2. \quad (2.37)$$

#### 2.4.4 Théorèmes de comparaison en dimension $n \geq 3$

Compte tenu de la symétrie du profil,  $h_{(M,g)}(\beta) = h_{(M,g)}(1-\beta)$ , nous nous limiterons à estimer le profil isopérimétrique sur  $[0, \frac{1}{2}]$ .

**Théorème 2.4.12** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 3$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad \text{où } \delta \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad h_{(M,g)}(\beta) \leq h_{n,\delta,R_0}(\beta), \quad (2.38)$$

pour  $R_0 := R_0(n, \delta, \text{vol}(M,g))$ . S'il existe  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$  tel que  $h_{(M,g)}(\beta_0) = h_{n,\delta,R_0}(\beta_0)$ , alors les deux fonctions coïncident sur  $[0, \beta_0] \cup [1 - \beta_0, 1]$ .

De plus, sous l'hypothèse supplémentaire<sup>14</sup>  $h_C(M,g)^2 > -(n-1)^2\delta$ ,

$$h_C(M,g) = 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

et

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad h_{(M,g)}(\beta) \geq h_{n,\delta,R_1}(\beta), \quad (2.39)$$

pour  $R_1 := R_1(n, \delta, h_C(M,g))$ . S'il existe  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$  tel que  $h_{(M,g)}(\beta_0) = h_{n,\delta,R_1}(\beta_0)$ , alors les deux fonctions coïncident sur  $[0, 1]$ .

#### Démonstration.

Ces encadrements sont issus de théorèmes de comparaison entre le profil renormalisé et des solutions exactes de l'équation différentielle (2.9) associée à l'inéquation différentielle (2.7) qu'il vérifie. L'idée de ces comparaisons est de montrer que le profil renormalisé est majoré par la solution exacte qui a même valeur et même dérivée à l'origine, et minoré par celle qui prend les mêmes valeurs aux extrémités de l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ . Ceci est une évidence géométrique en courbure positive ou nulle car l'inéquation différentielle équivaut alors à la concavité du profil, majoré par sa tangente à l'origine et minoré par ses cordes. Cependant, la preuve est assez technique lorsqu'il s'agit de traiter des bornes inférieures sur la courbure de Ricci strictement positive ou strictement négative. Par ailleurs, nous observons que le majorant est paramétré par le volume de la variété (qui intervient dans la dérivée à droite en 0 du profil renormalisé) tandis que le minorant est paramétré par la constante isopérimétrique de Cheeger (reliée à la valeur du profil en  $\frac{1}{2}$ ).

<sup>14</sup>. Cette condition est trivialement satisfaite si  $\delta \geq 0$ .

Considérons dans un premier temps le cas  $\delta > 0$  et supposons que la variété  $(M, g)$  n'est pas isométrique à  $\mathbb{S}_\delta^n$  (si elle l'était, les estimations à prouver deviennent des égalités évidentes). Le pincement du profil isopérimétrique est une application du théorème C.2.2 pour  $a = \frac{1}{2}^{15}$ ,  $g(x) = -n\delta x^{\frac{2-n}{n}}$ ,  $f = y_{(M,g)}$ ,  $y_+ = y_{n,\delta,R_{0,\varepsilon}}$  et  $y_- = y_{n,\delta,R_1}$ , où nous avons noté,

$$\forall \varepsilon \in ]0, \text{vol}(\mathbb{S}_\delta^n) - \text{vol}(M, g)[ \quad , \quad R_{0,\varepsilon} := R_0(n, \delta, \text{vol}(M, g) - \varepsilon) \quad \text{et} \quad R_1 := R_1(n, \delta, h_C(M, g)).$$

Précisons que  $R_{0,\varepsilon}$  et  $R_1$  sont bien définis (voir le paragraphe 2.4.1 pour les définitions de  $R_0(n, \delta, \cdot)$  et  $R_1(n, \delta, \cdot)$ ), d'une part car  $\text{vol}(\mathbb{S}_\delta^n) > \text{vol}(M, g)$ ,  $(M, g)$  et  $\mathbb{S}_\delta^n$  n'étant pas isométriques, et d'autre part puisque l'inégalité de Lévy-Gromov donne  $h_C(M, g) \geq h_C(\mathbb{S}_\delta^n)$ . Ainsi, le théorème C.2.2 s'applique et donne

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad y_{n,\delta,R_1}(\beta) \leq y_{(M,g)}(\beta) \leq y_{n,\delta,R_{0,\varepsilon}}(\beta).$$

En passant à la limite sur  $\varepsilon$  qui tend vers 0, en utilisant la continuité des fonctions  $R_0(n, \delta, V)$  et  $y_{n,\delta,R}$  en les paramètres respectifs  $V$  et  $R$ , nous obtenons

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad y_{n,\delta,R_1}(\beta) \leq y_{(M,g)}(\beta) \leq y_{n,\delta,R_0}(\beta), \quad (2.40)$$

d'où le résultat en prenant la puissance  $\frac{n-1}{n}$  et utilisant la symétrie des fonctions impliquées.

Intéressons-nous maintenant au cas d'égalité avec le majorant et supposons qu'il existe  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$  tel que  $h_{(M,g)}(\beta_0) = h_{n,\delta,R_0}(\beta_0)$ . Le théorème C.2.2, appliqué avec  $a = \beta_0$ ,  $g(x) = -n\delta x^{\frac{2-n}{n}}$ ,  $f = y_{(M,g)}$  et  $y_- = y_{n,\delta,R_0}$  donne

$$\forall \beta \in [0, \beta_0] \quad , \quad y_{n,\delta,R_0}(\beta) \leq y_{(M,g)}(\beta),$$

d'où, compte tenu de l'encadrement (2.40), l'égalité de  $h_{(M,g)}$  et de  $h_{n,\delta,R_0}$  sur  $[0, \beta_0]$ . Traitons maintenant le cas d'égalité avec le minorant et supposons qu'il existe  $\beta_0$  dans  $]0, \frac{1}{2}[$  tel que  $y_{(M,g)}(\beta_0) = y_{n,\delta,R_1}(\beta_0)$ . L'idée de la technique qui suit s'inspire de l'étude du cas d'égalité analogue, proposé dans la preuve du théorème 2.4.3. En effet, nous remarquons qu'en  $\beta_0$ ,  $y_{(M,g)}$  et  $y_{n,\delta,R_1}$  ont les mêmes conditions initiales, ce qui laisse penser que  $y_{n,\delta,R_1}$  majore  $y_{(M,g)}$  sur  $[\beta_0, \frac{1}{2}]$ , d'où l'égalité sur  $[\beta_0, \frac{1}{2}]$  compte tenu de (2.40). Cherchons à appliquer le lemme C.2.1 pour  $a = \frac{1}{2} - \beta_0$ ,  $g(x) = -n\delta x^{\frac{2-n}{n}}$ ,  $f(\cdot) = y_{(M,g)}(\cdot + \beta_0)$  et  $y(\cdot) = y_{n,\delta,R}(\cdot + \beta_0) + y_{(M,g)}(\beta_0) - y_{n,\delta,R}(\beta_0)$  où  $R \in ]0, R_1[$ . D'une part, compte tenu de la croissance de  $g$  et de l'inégalité  $y_{n,\delta,R} > y_{n,\delta,R_1}$  sur  $]0, \frac{1}{2}[$  (voir la proposition 2.4.1), qui donne  $y_{(M,g)}(\beta_0) - y_{n,\delta,R}(\beta_0) \leq 0$ , nous obtenons

$$\forall \beta \in \left]0, \frac{1}{2} - \beta_0\right[ \quad , \quad \underline{D}^2 y(\beta) = y''_{n,\delta,R}(\beta + \beta_0) = g(y_{n,\delta,R}(\beta + \beta_0)) \geq g(y(\beta)).$$

D'autre part, nous savons, d'après la proposition 2.4.1, que  $y'_{n,\delta,R}(\beta_0) > y'_{n,\delta,R_1}(\beta_0)$ <sup>16</sup> et l'inégalité  $y_{(M,g)} \geq y_{n,\delta,R_1}$  donne, avec les propriétés de dérivabilité du profil, établies à la proposition G.3.6,

$$y'_{n,\delta,R_1}(\beta_0) \leq y'_{(M,g)}(\beta_0) \leq y'_{(M,g)}(\beta_0) \leq y'_{n,\delta,R_1}(\beta_0)$$

15. Les fonctions  $h_{n,\delta,R}$  ne sont pas solutions exactes de (2.9) sur  $]0, 1[$ , car elles sont singulières en  $\frac{1}{2}$ ...sauf  $h_{n,\delta,\frac{\pi}{2}}$ , pour  $\delta > 0$ , qui coïncide avec  $h_{\mathbb{S}_\delta^n}$ , et nous pouvons alors appliquer le théorème C.2.2 sur  $]0, 1[$ , ce qui nous a permis de prouver l'inégalité de Lévy-Gromov sans avoir à connaître au préalable d'estimations sur la valeur du profil en  $\frac{1}{2}$ .

16. La contrainte  $R < R_1$  est importante ici.

de sorte que

$$y_{(M,g)_d}'(\beta_0) = y_{n,\delta,R_1}'(\beta_0) < y_{n,\delta,R}'(\beta_0).$$

Ainsi, le lemme C.2.1 établit la majoration

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2} - \beta_0\right] \quad , \quad y_{(M,g)}(\beta + \beta_0) \leq y_{n,\delta,R}(\beta + \beta_0) + y_{(M,g)}(\beta_0) - y_{n,\delta,R}(\beta_0),$$

d'où, en passant à la limite sur  $R$  tendant vers  $R_1$ ,

$$\forall \beta \in \left[\beta_0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad y_{(M,g)}(\beta) \leq y_{n,\delta,R_1}(\beta),$$

car, pour tout  $u$  dans  $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ ,

$$\lim_{R \rightarrow R_1} y_{n,\delta,R}(u) = y_{n,\delta,R_1}(u),$$

ce qui implique aussi

$$\lim_{R \rightarrow R_1} y_{(M,g)}(\beta_0) - y_{n,\delta,R}(\beta_0) = 0.$$

Par conséquent,  $y_{(M,g)}$  et  $y_{n,\delta,R_1}$  coïncident sur  $[\beta_0, 1 - \beta_0]$ . Montrons désormais l'égalité sur  $[0, \beta_0] \cup [1 - \beta_0, 1]$ . Par stricte concavité et croissance de la fonction  $y_{n,\delta,R_1}$ , considérons, pour  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < \frac{1}{2} - \beta_0$ , la fonction  $y_\varepsilon(\beta) := y_{n,\delta,R_1}(\beta + \varepsilon) + y_{n,\delta,R_1}(\beta_0) - y_{n,\delta,R_1}(\beta_0 + \varepsilon)$  ( $y_{n,\delta,R_1}(\beta_0) - y_{n,\delta,R_1}(\beta_0 + \varepsilon) < 0$  par croissance de  $y_{n,\delta,R_1}$ ), strictement positive lorsque  $\beta$  décrit  $]0, \beta_0]$  car la croissance de la fonction  $y_{n,\delta,R_1}$  donne la croissance de  $y_\varepsilon$  tandis que sa stricte concavité permet d'établir  $y_\varepsilon(0) = y_{n,\delta,R_1}(\varepsilon) + y_{n,\delta,R_1}(\beta_0) - y_{n,\delta,R_1}(\beta_0 + \varepsilon) > 0$ . Observons alors d'une part que  $y_\varepsilon'(\beta_0) = y_{n,\delta,R_1}'(\beta_0 + \varepsilon) < y_{n,\delta,R_1}'(\beta_0) = y_{(M,g)_g}'(\beta_0)$  (de sorte que  $y_\varepsilon$  majore strictement  $y_{(M,g)}$  à gauche de  $\beta_0$ ) et d'autre part que

$$\begin{aligned} \forall \beta \in ]0, \beta_0[ \quad , \quad y_\varepsilon''(\beta) &= y_{n,\delta,R_1}''(\beta + \varepsilon) \\ &= -n\delta y_{n,\delta,R_1}(\beta + \varepsilon)^{\frac{2-n}{n}} \\ &\geq -n\delta \left( y_{n,\delta,R_1}(\beta + \varepsilon) + y_{n,\delta,R_1}(\beta_0) - y_{n,\delta,R_1}(\beta_0 + \varepsilon) \right)^{\frac{2-n}{n}} \\ &= -n\delta y_\varepsilon(\beta)^{\frac{2-n}{n}}. \end{aligned}$$

Si nous supposons qu'il existe  $\beta_1$  dans  $]0, \beta_0[$  tel que  $y_\varepsilon(\beta_1) < y_{(M,g)}(\beta_1)$ , en posant

$$\beta_2 := \inf\{\beta \in [0, \beta_0] \mid \forall u \in [\beta, \beta_0], y_\varepsilon(u) \geq y_{(M,g)}(u)\},$$

( $\beta_2$  est bien défini puisque  $y_\varepsilon'(\beta_0) < y_{(M,g)_g}'(\beta_0)$  et  $\beta_2 > \beta_1 \geq 0$  d'où  $y_\varepsilon(\beta_2) = y_{(M,g)}(\beta_2)$ ) nous pouvons appliquer le lemme C.2.1 sur  $[\beta_2, \beta_0]$ , pour  $g(x) = -n\delta x^{\frac{2-n}{n}}$ ,  $f(\cdot) = y_{(M,g)}(\cdot)$  et  $y(\cdot) = y_\varepsilon$ . Nous obtenons alors, comme  $y_\varepsilon \geq y_{(M,g)}$  sur  $[\beta_2, \beta_0]$  et  $y_\varepsilon(\beta_2) = y_{(M,g)}(\beta_2)$ , une contradiction avec la condition  $y_\varepsilon(\beta_0) = y_{(M,g)}(\beta_0)$ . Par conséquent,

$$\forall \beta \in [0, \beta_0] \quad , \quad y_\varepsilon(\beta) \geq y_{(M,g)}(\beta),$$

d'où, par passage à la limite sur  $\varepsilon$  tendant vers 0,  $y_{n,\delta,R_1} \geq y_{(M,g)}$  sur  $[0, \beta_0]$ . Ainsi, les fonctions  $y_{n,\delta,R_1}$  et  $y_{(M,g)}$  coïncident aussi sur  $[0, \beta_0]$ , ce qui termine la preuve de l'égalité  $y_{n,\delta,R_1} = y_{(M,g)}$  sur  $[0, 1]$ , d'après la propriété de symétrie de ces profils.

Considérons désormais le cas  $\delta < 0$  et montrons tout d'abord la majoration. Appliquons le théorème C.2.11 pour  $a = \frac{1}{2}$ ,  $g(x) = -n\delta x^{\frac{2-n}{n}}$ ,  $f(\cdot) = y_{(M,g)}(\cdot)$  et  $y_+(\cdot) = y_{n,\delta,R}(\cdot)$  où  $R \in ]0, R_0[$ . La condition  $R < R_0$  nous garantit, d'après la proposition 2.4.1, la comparaison

$$y_{(M,g)_d}'(0) = y_{n,\delta,R_0d}'(0) < y_{n,\delta,Rd}'(0),$$

si bien que le théorème C.2.11 permet d'affirmer

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad y_{(M,g)}(\beta) \leq y_{n,\delta,R}(\beta).$$

Le résultat s'obtient alors en prenant la puissance  $\frac{n-1}{n}$ , en utilisant la symétrie des profils et en passant à la limite sur  $R$  tendant vers  $R_0$ , sachant que

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad \lim_{\substack{R \rightarrow R_0 \\ R < R_0}} h_{n,\delta,R}(\beta) = h_{n,\delta,R_0}(\beta).$$

Montrons maintenant la minoration. La condition géométrique  $h_C(M,g)^2 > -(n-1)^2\delta$  est requise afin de garantir l'existence d'un profil modèle dont la constante de Cheeger associée vaut  $h_C(M,g)$ . Définissons l'ensemble

$$\mathcal{G} := \left\{ R \in ]0, +\infty[ \mid \forall \beta \in [0,1], y_{n,\delta,R}(\beta) \leq y_{(M,g)}(\beta) \right\}.$$

D'après la propriété de monotonie et de continuité des profils modèles rappelée lors de la proposition 2.4.1, l'ensemble  $\mathcal{G}$  est soit l'ensemble vide, soit un intervalle de la forme  $[R_m, +\infty[$ , sachant que par monotonie,  $R_m \geq R_1(n,\delta,2h_{(M,g)}(\frac{1}{2}))$ . Nous allons tout d'abord montrer que  $\mathcal{G}$  est non vide, puis que  $R_m = R_1(n,\delta,2h_{(M,g)}(\frac{1}{2}))$ .

1. Montrons que  $\mathcal{G}$  est non vide et raisonnons par l'absurde en supposant que  $\mathcal{G} = \emptyset$ . Alors, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , il existe  $\beta_i$ , que nous pouvons choisir dans  $[0, \frac{1}{2}]$  par symétrie du profil, tel que

$$h_{n,\delta,i}(\beta_i) > h_{(M,g)}(\beta_i). \quad (2.41)$$

Par compacité de  $[0, \frac{1}{2}]$  il existe une sous-suite  $(\beta_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\beta_\infty \in [0, \frac{1}{2}]$ . En passant à la limite inférieure sur  $k$  dans l'inégalité (2.41), par continuité de  $h_{(M,g)}$ , nous obtenons

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} h_{n,\delta,i_k}(\beta_{i_k}) \geq h_{(M,g)}(\beta_\infty).$$

Or le lemme 2.4.2 donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} h_{n,\delta,i_k}(\beta_{i_k}) = (n-1)\sqrt{-\delta}\beta_\infty,$$

(en effet, le lemme 2.4.2 montre que la famille de fonctions  $(h_{n,\delta,R})_{R \in \mathbb{R}_+}$  converge en décroissant vers la fonction continue  $\beta \mapsto (n-1)\sqrt{-\delta}\beta$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$  lorsque  $R$  tend vers  $+\infty$ , d'où une convergence uniforme par le théorème de Dini, ce qui permet d'obtenir le résultat ci-dessus) d'où, comme  $h_C(M,g)^2 > -(n-1)^2\delta$ ,  $\beta_\infty = 0$ . Mais alors, en reprenant l'inégalité (2.41), en l'élevant à la puissance  $\frac{n}{n-1}$ , en divisant par  $\beta_{i_k}$  puis en passant à la limite sur  $k$ , nous obtenons

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_{n,\delta,i_k}(\beta_{i_k})}{\beta_{i_k}} \geq \frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{\text{vol}(M,g)^{\frac{1}{n-1}}} > 0. \quad (2.42)$$

Or, comme par convexité de  $y_{n,\delta,i_k}$ , nous avons

$$\frac{y_{n,\delta,i_k}(\beta_{i_k})}{\beta_{i_k}} \leq y_{n,\delta,i_k}'(\beta_{i_k}),$$

le lemme 2.4.2 montre que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n,\delta,i_k}'(\beta_{i_k}) = 0$ , d'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_{n,\delta,i_k}(\beta_{i_k})}{\beta_{i_k}} = 0$$

et la contradiction attendue en reportant ce résultat dans (2.42).

2. Montrons que  $R_m = R_1(n, \delta, 2h_{(M,g)}(\frac{1}{2}))$ .  $R_m$  étant l'infimum des  $R$  appartenant à  $\mathcal{G}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon < R_1$ ), il existe  $\beta_\varepsilon \in ]0, 1[$  tel que

$$y_{n,\delta,R_m-\varepsilon}(\beta_\varepsilon) > y_{(M,g)}(\beta_\varepsilon). \quad (2.43)$$

Fixons une suite  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui tend vers 0 et considérons la suite  $(\beta_{\varepsilon_i})_{i \in \mathbb{N}}$ . Supposons que cette suite ait une valeur d'adhérence  $\beta_\infty$  différente de 0 et 1, en passant à la limite sur l'extraction correspondante dans l'inégalité (2.43), nous obtenons

$$y_{n,\delta,R_m}(\beta_\infty) \geq y_{(M,g)}(\beta_\infty)$$

d'où, comme  $R_m \in \mathcal{G}$ ,

$$y_{n,\delta,R_m}(\beta_\infty) = y_{(M,g)}(\beta_\infty).$$

Par symétrie du profil, nous pouvons supposer que  $\beta_\infty$  appartient à  $]0, \frac{1}{2}]$ . Les propriétés de dérivabilité du profil, établies à la proposition G.3.6, donnent au point  $\beta_\infty$ , compte tenu de la comparaison locale avec son minorant,

$$y'_{n,\delta,R_m}(\beta_\infty) \leq y'_{(M,g)_d}(\beta_\infty) \leq y'_{(M,g)_g}(\beta_\infty) \leq y'_{n,\delta,R_m}(\beta_\infty),$$

d'où

$$y'_{n,\delta,R_m}(\beta_\infty) = y'_{(M,g)_d}(\beta_\infty) = y'_{(M,g)_g}(\beta_\infty).$$

Le lemme C.2.6, appliqué sur l'intervalle  $[0, \beta_\infty]$  puis sur l'intervalle  $[\beta_\infty, \frac{1}{2}]$  permet de conclure à l'égalité des fonctions  $y_{n,\delta,R_m}$  et  $y_{(M,g)}$  sur  $[0, 1]$ . Par conséquent,  $R_m = R_1$ . Supposons maintenant que les seules valeurs d'adhérence de la suite  $(\beta_{\varepsilon_i})_{i \in \mathbb{N}}$  soient 0 ou 1. Ce sont en fait 0 et 1 par symétrie du profil. Considérons une extraction  $(\beta_{\varepsilon_{i_k}})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers 0, nous pouvons écrire

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{y_{n,\delta,R_m-\varepsilon_{i_k}}(\beta_{\varepsilon_{i_k}})}{\beta_{\varepsilon_{i_k}}} > \frac{y_{(M,g)}(\beta_{\varepsilon_{i_k}})}{\beta_{\varepsilon_{i_k}}},$$

d'où, par passage à la limite sur  $k$ ,

$$y_{n,\delta,R_m}'_d(0) \geq y_{(M,g)'_d}(0).$$

Or l'application du lemme C.2.6 donne

$$y_{n,\delta,R_m}'_d(0) < y_{(M,g)'_d}(0),$$

d'où une contradiction. Ainsi, la suite réelle  $(\beta_{\varepsilon_i})_{i \in \mathbb{N}}$ , qui a au moins une valeur d'adhérence par compacité de  $[0, 1]$ , n'a que des valeurs d'adhérence appartenant à  $]0, 1[$ , ce qui impose, comme nous l'avons vu précédemment,  $R_m = R_1(n, \delta, h_{(M,g)}(\frac{1}{2}))$ .

Ainsi, la minoration est démontrée. Observons alors une conséquence inattendue de cette minoration. En effet, d'une part nous pouvons écrire

$$h_C(M, g) \leq 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

et d'autre part, en utilisant le résultat de la proposition 2.4.1,

$$h_C(M, g) = \inf_{\beta \in ]0, \frac{1}{2}]} \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta} \geq \inf_{\beta \in ]0, \frac{1}{2}]} \frac{h_{n,\delta,R_1}(\beta)}{\beta} = 2h_{n,\delta,R_1}\left(\frac{1}{2}\right) = 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right),$$

d'où l'égalité

$$h_C(M,g) = 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Traisons le cas d'égalité avec le majorant et supposons qu'il existe  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}]$  tel que  $h_{(M,g)}(\beta_0) = h_{n,\delta,R_0}(\beta_0)$ . En reproduisant la preuve de la minoration sur  $[0, \beta_0]$ , nous obtenons que  $h_{(M,g)} \geq h_{n,\delta,R_0}$  sur  $[0, \beta_0]$  de sorte que les deux fonctions coïncident sur  $[0, \beta_0]$  et donc aussi sur  $[1 - \beta_0, 1]$  par symétrie.

Considérons le cas d'égalité avec le minorant et supposons qu'il existe  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$  tel que  $h_{(M,g)}(\beta_0) = h_{n,\delta,R_1}(\beta_0)$ . Les propriétés de dérivabilité du profil, établies à la proposition G.3.6, donnent au point  $\beta_0$ , compte tenu de la comparaison locale avec son minorant,

$$y'_{n,\delta,R_1}(\beta_0) \leq y'_{(M,g)_d}(\beta_0) \leq y'_{(M,g)_g}(\beta_0) \leq y'_{n,\delta,R_1}(\beta_0),$$

d'où

$$y'_{n,\delta,R_1}(\beta_0) = y'_{(M,g)_d}(\beta_0) = y'_{(M,g)_g}(\beta_0).$$

Le lemme C.2.6, appliqué sur l'intervalle  $[0, \beta_0]$  puis sur l'intervalle  $[\beta_0, \frac{1}{2}]$  permet de conclure à l'égalité des fonctions sur  $[0, 1]$ . □

### Remarques 2.4.13

- La minoration du profil proposée dans le théorème 2.4.12 a déjà été obtenue, sous les mêmes hypothèses, par S. Gallot dans [G1]. Sa méthode s'appuie exclusivement sur des techniques variationnelles du premier ordre et des théorèmes de comparaison (Heintze-Karcher essentiellement).
- La majoration du profil a déjà été obtenue dans [MHH] par une technique analogue. Les auteurs font ensuite remarquer que cette majoration peut également être obtenue à partir d'une version raffinée du théorème de Bishop-Gromov.
- La majoration est optimale au voisinage de 0, dans la mesure où

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{h_{n,\delta,R_0}(\beta)} = 1.$$

Quant à la minoration elle est optimale au sens où il y a égalité en  $\beta = 0$  et  $\beta = \frac{1}{2}$ .

- Nous pouvons préciser la géométrie locale des variétés qui réalisent des cas d'égalité avec les profils modèles dans les estimations (2.38) et (2.39).
  - S'il existe  $\beta_0$  dans  $]0, \frac{1}{2}]$  tel que  $y_{(M,g)}$  coïncide en  $\beta_0$  avec son "majorant modèle" donné par (2.38), alors le profil  $y_{(M,g)}$  est parfaitement déterminé sur  $[0, \beta_0]$ . En particulier, l'application de l'inégalité (1.21) montre qu'en tout point  $m$  de  $M$ , les boules de volume relatif inférieur à  $\beta_0$  ont le même volume que les boules de même rayon dans  $\mathbb{M}_\delta^n$ . Par conséquent, les boules géodésiques de volume relatif inférieur à  $\beta_0$  sont isométriques aux boules de même rayon sur  $\mathbb{M}_\delta^n$ . Ainsi,  $(M,g)$  est une variété dont la courbure sectionnelle est constante et égale à  $\delta$ , il s'agit donc d'un quotient de  $\mathbb{M}_\delta^n$  (voir aussi à ce propos le paragraphe 2.4.5).
  - S'il existe  $\beta_0$  dans  $]0, \frac{1}{2}[$  tel que  $y_{(M,g)}$  coïncide en  $\beta_0$  avec son "minorant modèle" donné par (2.39), alors le profil  $y_{(M,g)}$  est parfaitement déterminé sur  $[0, 1]$ . En particulier son volume s'exprime en fonction de la constante isopérimétrique de Cheeger et les boules de volume relatif inférieur à  $\frac{1}{2}$  ont le même volume que les boules de même rayon dans  $\mathbb{M}_\delta^n$ . Par conséquent,



les boules géodésiques de volume relatif inférieur à  $\frac{1}{2}$  sont isométriques aux boules de même rayon sur  $\mathbb{M}_\delta^n$ . Ainsi,  $(M, g)$  est une variété dont la courbure sectionnelle est constante et égale à  $\delta$ , il s'agit donc d'un quotient de  $\mathbb{M}_\delta^n$ .

Nous allons maintenant affaiblir ces comparaisons du profil vis-à-vis des profils modèles en une véritable comparaison vis-à-vis de profils associés à des espaces modèles.

Lorsque l'infimum sur la courbure de Ricci est strictement positif, il semble naturel de chercher à comparer le profil isopérimétrique à celui de la sphère de même dimension. Par conséquent, nous allons affaiblir les estimations du théorème 2.4.12 pour en déduire une comparaison de ce type.

**Corollaire 2.4.14** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 3$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)g(\cdot, \cdot).$$

Alors, la fonction profil isopérimétrique vérifie

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \left( \frac{h_C(M, g)}{h_C(\mathbb{S}^n, \text{can})} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta)} \leq \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})}{\text{vol}(M, g)}. \quad (2.44)$$

De plus, s'il existe  $\beta_0 \in ]0, 1[$  tel que  $h_{(M, g)}(\beta_0) = h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta_0)$ , alors  $(M, g)$  est isométrique à  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ .

#### Démonstration.

D'après le pincement du profil isopérimétrique établi lors du théorème 2.4.12, il s'agit en fait simplement de calculer explicitement les quantités

$$\inf_{\beta \in ]0, 1[} \frac{h_{n, \delta, R_1}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta)} \quad \text{et} \quad \sup_{\beta \in ]0, 1[} \frac{h_{n, \delta, R_0}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta)}$$

où  $R_0 := R_0(n, \delta, \text{vol}(M, g))$  et  $R_1 := R_1(n, \delta, h_C(M, g))$ . Après avoir remarqué que  $h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})} = h_{n, \delta, \frac{\pi}{2}}$ , nous observons que, pour tout  $R$  dans  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , la fonction

$$\beta \longmapsto \frac{h_{n, \delta, R}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta)}$$

est croissante sur  $]0, \frac{1}{2}[$  d'où

$$\inf_{\beta \in ]0, 1[} \frac{h_{n, \delta, R_1}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta)} = \left( \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})}{V(n, \delta, R_1)} \right)^{\frac{1}{n}} = (\sin R_1)^{-\frac{n-1}{n}} \left( \frac{h_C(M, g)}{h_C(\mathbb{S}^n, \text{can})} \right)^{\frac{1}{n}}$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{\beta \in ]0, 1[} \frac{h_{n, \delta, R_0}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta)} &= \frac{h_{n, \delta, R_0}\left(\frac{1}{2}\right)}{h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}\left(\frac{1}{2}\right)} = (\sin R_0)^{n-1} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-1} du}{\int_0^{R_0} (\sin u)^{n-1} du} \\ &= (\sin R_0)^{n-1} \left( \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})}{\text{vol}(M, g)} \right). \end{aligned}$$

Ainsi l'encadrement annoncé du profil s'obtient en majorant les sinus par 1.

Traisons les cas d'égalité dans (2.44). S'il y a égalité avec le majorant, alors  $\sin R_1 = 1$  donc  $h_C(M, g) = h_C(\mathbb{S}^n, \text{can})$ , ce qui, d'après la minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger due à S. Gallot et rappelée au théorème 1.4.4, implique  $\text{diam}(M, g) = \pi$ .

Ainsi  $(M,g)$  et  $(\mathbb{S}^n, can)$  sont isométriques. S'il y a égalité avec le minorant, alors  $\sin R_0 = 1$  donc  $\text{vol}(M,g) = \text{vol}(\mathbb{S}^n, can)$ , ce qui impose que  $(M,g)$  et  $(\mathbb{S}^n, can)$  sont isométriques.  $\square$

**Remarque 2.4.15** Nous remarquons, à la lecture de la preuve du corollaire 2.4.14, que les bornes inférieures et supérieures optimales sur le rapport  $h_{(M,g)}/h_{(\mathbb{S}^n, can)}$  ont été respectivement minorées et majorées dans le but de simplifier les expressions. C'est pourquoi l'énoncé du corollaire 2.4.14 doit être considéré comme une version, affaiblie à deux niveaux, du pincement donné par le théorème 2.4.12. En effet, la première perte d'information intervient dans la comparaison avec le profil de la sphère au lieu des profils modèles du théorème 2.4.12, la seconde apparaît lors de la majoration des termes  $\sin(R_0)$  et  $\sin(R_1)$  par 1. Ceci explique aussi pourquoi les cas d'égalité sont si bien particularisés.

Enfin, si la courbure de Ricci est positive ou nulle, les minorants et les majorants ont une expression simple et le théorème 2.4.12 donne explicitement :

**Corollaire 2.4.16** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \geq 0.$$

*Alors, la fonction profil isopérimétrique est concave, croissante sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , vérifie*

$$h_C(M,g) = 2h_{(M,g)}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.45)$$

*et*

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad \frac{h_C(M,g)}{2^{\frac{1}{n}}}\beta^{\frac{n-1}{n}} \leq h_{(M,g)}(\beta) \leq \frac{\gamma_n}{\text{vol}(M,g)^{\frac{1}{n}}}\beta^{\frac{n-1}{n}}. \quad (2.46)$$

### Démonstration.

La concavité du profil renormalisé est une conséquence de l'inéquation différentielle (2.7) et de la caractérisation (iii) de la concavité du lemme B.2.1. Elle implique alors celle du profil  $h_{(M,g)}$  d'où la monotonie d'après le lemme B.1.3 et le lien avec la constante isopérimétrique de Cheeger d'après la proposition 1.4.2.  $\square$

### Remarques 2.4.17

- Nous avons choisi d'énoncer les résultats de comparaison à partir d'une minoration uniforme de la courbure de Ricci. Néanmoins, nous pouvons adapter tous les résultats précédents à l'hypothèse

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \text{diam}(M,g)^2 \geq \varepsilon(n-1)a^2g(\cdot, \cdot) \quad \text{où } \varepsilon \in \{-1, 0, 1\}.$$

Cette hypothèse présente l'avantage d'être homogène, c'est-à-dire invariante par dilatation de la métrique. En revanche, elle introduit le diamètre comme paramètre géométrique supplémentaire.

- En utilisant la minoration explicite de la constante isopérimétrique de Cheeger en fonction d'un minorant de la courbure de Ricci, du diamètre et de la dimension de la variété, due à S. Gallot et rappelée au théorème 1.4.4, nous retrouvons à partir de (2.44) et (2.46), les minorations établies par P. Bérard, G. Besson et S. Gallot dans [BBG]. Plus précisément, si  $\text{Ricci}_{(M,g)} \geq (n-1)g$ , (2.44) donne

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad h_{(M,g)}(\beta) \geq \left( \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{n-1} du}{\frac{\text{diam}(M,g)}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{n-1} du} \right)^{\frac{1}{n}} h_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta),$$

et si  $\text{Ricci}_{(M,g)} \geq 0$ , (2.46) devient

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad h_{(M,g)}(\beta) \geq \frac{2^{\frac{n-1}{n}}}{\text{diam}(M,g)} \beta^{\frac{n-1}{n}}.$$

### 2.4.5 Cas particulier des quotients compacts d'espaces modèles $\mathbb{M}_\delta^n$

Nous allons donner, dans le cas particulier des quotients d'espaces modèles, une interprétation géométrique de la majoration (2.38), obtenue lors du théorème 2.4.12, à la suite de l'intégration de l'inéquation différentielle (2.7). Comme les espaces modèles  $\mathbb{M}_\delta^n$  ne sont compacts qu'en courbure positive, nous avons choisi d'énoncer deux théorèmes qui expriment l'idée que, sur les quotients compacts de  $\mathbb{M}_\delta^n$ , les solutions du problème isopérimétriques pour les volumes suffisamment petits sont les "mêmes" que celles de l'espace modèle.

**Théorème 2.4.18** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), de courbure sectionnelle constante égale à  $\delta > 0$  et dont  $(S_\delta^n, \text{can})$  est le revêtement universel. Notons  $k \in \mathbb{N}^*$  le cardinal du groupe fondamental de  $(M,g)$ . Alors,*

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad h_{(M,g)}(\beta) \leq kh_{(S_\delta^n, \text{can})}(\beta) \left(\frac{\beta}{k}\right).$$

**Démonstration.** Il s'agit d'une conséquence du théorème de comparaison 2.4.12 puisque la fonction

$$\begin{aligned} \left[0, \frac{1}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \beta &\longmapsto \left(kh_{(S_\delta^n, \text{can})}(\beta) \left(\frac{\beta}{k}\right)\right)^{\frac{n}{n-1}} \end{aligned}$$

est la solution de l'équation différentielle  $y'' = -n\delta y^{\frac{2-n}{n}}$  dont la dérivée à droite en 0 vaut  $y_{(M,g)'_d}(0)$ . □

### Remarques 2.4.19

- Lors de l'intégration de l'inéquation différentielle (2.7), nous avons vu que le majorant contient, comme information géométrique sur la variété, la valeur de son volume. Il est intéressant d'observer ici que le volume est connu puisque la variété est un quotient de la sphère par un groupe d'isométries de cardinal  $k$ .
- Ce résultat donne, sur un voisinage de 0 (et de 1 par symétrie), de manière exacte, le profil isopérimétrique de tous les quotients des sphères canoniques (en particulier les espaces projectifs et lenticulaires). En effet, les domaines isopérimétriques de volume suffisamment petit ont un radius inférieur au rayon d'injectivité de  $M$  (voir [MJ] où F. Morgan et D. L. Johnson montrent que le diamètre des domaines isopérimétriques de petit volume tend vers 0 avec le volume) si bien qu'ils se relèvent sur la sphère  $S_\delta^n$ , d'où, pour  $\beta$  suffisamment petit, l'inégalité

$$h_{(M,g)}(\beta) \geq kh_{(S_\delta^n, \text{can})}(\beta) \left(\frac{\beta}{k}\right),$$

et par conséquent, d'après le théorème 2.4.18 l'égalité des deux membres au voisinage de 0. Il serait intéressant de donner un minorant explicite de la taille du voisinage de 0 sur lequel il y a égalité en fonction de la géométrie de l'espace quotient. Dans le cas particulier de la dimension 2, comme nous l'avons observé au paragraphe 1.3, la relation

$$h_{P^2(\mathbb{R})}(\beta) = 2h_{(\mathbb{S}^2, \text{can})}(\beta)$$

est valide sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

Considérons maintenant le problème analogue en courbure négative ou nulle.

**Théorème 2.4.20** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), de courbure sectionnelle constante égale à  $\delta \leq 0$  et dont  $(\mathbb{M}_\delta^n, \text{can})$  est le revêtement universel. Alors,*

$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad h_{(M,g)}(\beta) \leq \frac{I_{(\mathbb{M}_\delta^n, \text{can})}(\beta \text{vol}(M,g))}{\text{vol}(M,g)}. \quad (2.47)$$

La preuve est analogue à celle du théorème 2.4.18 ci-dessus.

### Remarques 2.4.21

- Comme précédemment, ce résultat permet de connaître explicitement le profil sur un voisinage de 0, ce qui confirme la description du profil des tores plats en dimension 2 vue au paragraphe 1.3.
- Cette égalité des profils au voisinage de 0 ne s'étend pas au cadre des variétés non compactes de courbure sectionnelle constante négative comme le montre l'équivalent du profil donné pour une surface hyperbolique à cusp, justement parce que le raisonnement proposé repose sur l'idée que le diamètre des domaines isopérimétriques tend vers 0 avec leur volume (voir la remarque 1.5.3).

## 2.5 Application à la minoration du $\lambda_1$

Nous adoptons les notations suivantes : sur une variété fermée  $(M,g)$ ,  $\lambda_1(M,g)$  désigne la première valeur propre non nulle de l'opérateur Laplacien et, pour tout ouvert  $\Omega \subset M$  à bord régulier,  $\lambda_1^D(\Omega)$  représente la plus petite valeur propre de ce même opérateur sur  $\Omega$  pour la condition au bord de Dirichlet.

Ce paragraphe fournit des estimations de  $\lambda_1(M,g)$  et  $\lambda_1^D(\Omega)$  en fonction de la géométrie de  $(M,g)$ , à partir des méthodes isopérimétriques décrites dans [BBG] et [G1]. La seule nouveauté réside dans le fait que nous avons choisi de paramétrer nos minoration du profil isopérimétrique par la constante isopérimétrique de Cheeger, ce qui donne des minoration nouvelles, que nous aurons le souci de comparer à celles déjà connues.

### 2.5.1 Cas des surfaces riemanniennes

La technique de symétrisation détaillée dans [BM] et [B1] permet, à partir des minoration explicites du profil obtenues lors du théorème de comparaison 2.4.7 de contrôler  $\lambda_1(M,g)$  et  $\lambda_1^D(\Omega)$  sur une surface riemannienne fermée.

**Théorème 2.5.1** *Soit  $(M,g)$  une surface riemannienne fermée dont la courbure sectionnelle est minorée par un nombre réel  $K_0 \in \mathbb{R}_+$ . Soit  $\Omega$  un ouvert à bord  $C^\infty$  de  $M$ , de volume inférieur à  $\frac{1}{2}\text{vol}(M,g)$ . Alors*

(i) si  $K_0 > 0$ ,

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \frac{h_C(M,g)^2 + K_0}{2} \lambda_1^D(\Omega^*),$$

où  $\Omega^*$  est la calotte sphérique de  $(\mathbb{S}^2, \text{can})$  telle que

$$\frac{\text{vol}(\Omega)}{\text{vol}(M,g)} = \frac{\text{vol}(\Omega^*)}{\text{vol}(\mathbb{S}^2, \text{can})}.$$

En particulier,

$$\lambda_1(M,g) \geq h_C(M,g)^2 + K_0.$$

(ii) si  $K_0 = 0$ ,

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \frac{h_C(M,g)^2}{4} \lambda_1^D(\Omega^*) = \frac{\text{vol}(M,g)}{2\text{vol}(\Omega)} \lambda_1^D(B(1,\mathbb{R}^2)) \frac{h_C(M,g)^2}{4} = \frac{\text{vol}(M,g)}{2\text{vol}(\Omega)} j_{0,1}^2 \frac{h_C(M,g)^2}{4},$$

où  $\Omega^*$  est la boule euclidienne de  $(\mathbb{R}^2, \text{can})$  telle que

$$\frac{\text{vol}(\Omega)}{\text{vol}(M,g)} = \frac{\text{vol}(\Omega^*)}{2\text{vol}(B(1,\mathbb{R}^2), \text{can})} = \frac{\text{vol}(\Omega^*)}{2\pi}$$

et  $j_{0,1}$  est le plus petit zéro strictement positif de la fonction de Bessel  $J_0$ <sup>17</sup>. En particulier,

$$\lambda_1(M,g) \geq j_{0,1}^2 \frac{h_C(M,g)^2}{4}.$$

### 2.5.2 Cas des variétés de dimension $n \geq 3$

L'amélioration de la minoration du profil isopérimétrique d'une variété fermée donnée par les corollaires 2.4.14 et 2.4.16 conduit, en employant une technique de symétrisation détaillée dans [B2], aux estimations suivantes de  $\lambda_1(M,g)$  et  $\lambda_1^D(\Omega)$  en fonction de la constante isopérimétrique de Cheeger de la variété (le contexte général de ces comparaisons est décrit dans la proposition 1.26).

**Théorème 2.5.2** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée, de dimension  $n$  ( $n \geq 3$ ) telle que*

$$\text{Ricci}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad \text{où } \delta \in \{0,1\}.$$

Alors,

(i) si  $\delta = 1$ ,

$$\lambda_1(M,g) \geq \lambda_1(\mathbb{S}^n, \text{can}) \left( \frac{h_C(M,g)}{h_C(\mathbb{S}^n, \text{can})} \right)^{\frac{2}{n}} = n \left( \frac{h_c(M,g)}{h_c(\mathbb{S}^n, \text{can})} \right)^{\frac{2}{n}}, \quad (2.48)$$

et si  $\Omega$  est un ouvert à bord  $C^\infty$  de  $M$ , de volume inférieur à  $\frac{1}{2}\text{vol}(M,g)$  et si  $\Omega^*$  est une calotte sphérique de  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$  telle que

$$\frac{\text{vol}(\Omega)}{\text{vol}(M,g)} = \frac{\text{vol}(\Omega^*)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})},$$

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \left( \frac{h_C(M,g)}{h_C(\mathbb{S}^n, \text{can})} \right)^{\frac{2}{n}} \lambda_1(\Omega^*);$$

(ii) si  $\delta = 0$ ,

$$\lambda_1(M,g) \geq \frac{h_C(M,g)^2}{n^2} \lambda_1^D(B(1, (R)^n)), \quad (2.49)$$

et si  $\Omega$  est un ouvert à bord  $C^\infty$  de  $M$ , de volume inférieur à  $\frac{1}{2}\text{vol}(M,g)$ ,

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \left( \frac{\text{vol}(M,g)}{2\text{vol}(\Omega)} \right)^{\frac{2}{n}} \frac{h_C(M,g)^2}{n^2} \lambda_1^D(B(1, (R)^n)).$$

---

17. Numériquement,  $j_{0,1} \simeq 2,405$ .

### Remarques 2.5.3

- La minoration (2.48) est optimale et le cas d'égalité ne se produit que si  $(M, g)$  est isométrique à  $(\mathbb{S}^n, can)$ . En effet, la minoration explicite de la constante isopérimétrique de Cheeger établie par S. Gallot et rappelée dans le théorème 1.4.4 montre que l'égalité  $h_C(M, g) = h_C(\mathbb{S}^n, can)$  implique  $\text{diam}(M, g) = \pi$  qui implique l'isométrie des variétés  $(M, g)$  et  $(\mathbb{S}^n, can)$ . De plus, cette inégalité (1.9) entraîne la minoration

$$\lambda_1(M, g) \geq n \left( \int_0^{\frac{1}{2}\text{diam}(M, g)} (\cos u)^{n-1} du \right)^{-\frac{2}{n}},$$

obtenue dans [BBG] et qui permet d'estimer quantitativement le fait que le pincement du  $\lambda_1$  au voisinage de  $n$  implique le pincement du diamètre au voisinage de  $\pi$ .

- La minoration (2.48) montre que si  $\lambda_1(M, g)$  est proche de  $\lambda_1(\mathbb{S}^n, can)$ , alors  $h_C(M, g)$  est proche de  $h_C(\mathbb{S}^n, can)$ . En fait, l'assertion réciproque est également vraie car si  $h_C(M, g)$  est proche de  $h_C(\mathbb{S}^n, can)$ , alors  $\text{diam}(M, g)$  est proche de  $\pi$  (ceci se lit dans la relation (1.9) proposée dans le théorème 1.4.4), ce qui impose  $\lambda_1(M, g)$  proche de  $\lambda_1(\mathbb{S}^n, can)$  (voir [II] pour une preuve qui repose sur un théorème de comparaison établi par S. Y. Cheng dans [Che]).
- La minoration (2.49) a déjà été établie par S. Gallot dans [G1]. Elle améliore la minoration classique de J. Cheeger puisque la minoration qu'il donne peut s'établir par symétrisation à partir d'une minoration de la fonction profil moins fine que celle utilisée ici ( voir [B1] chap. IV, page 12). On peut être tenté de regarder ce que devient cette minoration lorsque la dimension  $n$  tend vers  $+\infty$ . En fait,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_1^D(B(1, \mathbb{R}^n))}{n^2} = \frac{1}{4},$$

ce qui montre que la minoration obtenue, quoique meilleure que celle de Cheeger, tend vers celle de Cheeger lorsque la dimension augmente.

## 2.6 Applications à la convergence des profils

Nous allons étudier, à partir des estimations (2.38) et (2.39) obtenues dans le théorème 2.4.12, les liens qui existent entre le caractère “presque extrémal” des profils isopérimétriques d'une part et de certains invariants riemanniens d'autre part (comme le diamètre et le volume). Nous insisterons plus spécialement sur les résultats obtenus sous l'hypothèse de courbure Ricci  $\geq (n-1)g$ , toutes les quantités géométriques mises en jeu étant alors proches, en un sens à préciser, de celles de la sphère canonique. En particulier, nous obtenons sous cette minoration de la courbure de Ricci, une illustration de la différence entre les hypothèses “diamètre proche de  $\pi$ ” et “volume proche de celui de  $(\mathbb{S}^n, can)$ ”. En effet, pour une suite  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de variétés riemanniennes fermées satisfaisant l'hypothèse Ricci  $\geq (n-1)$ , la convergence de la suite des diamètres vers  $\pi$  équivaut à la convergence des profils vers celui de la sphère  $(\mathbb{S}^n, can)$ , uniformément sur  $[0, 1]$ , tandis que la convergence de la suite des volumes vers celui de la sphère équivaut à la convergence du rapport des profils sur celui de la sphère vers 1, uniformément sur  $]0, 1[$ .

### 2.6.1 Relation diamètre/profil isopérimétrique

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que la "presque maximalité" du diamètre implique la "presque minimalité" du profil.

**Théorème 2.6.1** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dont la courbure de Ricci satisfait*

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad , \quad \text{où } \delta \in \mathbb{R}$$

*et dont la constante isopérimétrique de Cheeger est minorée par  $H \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $H^2 > -(n-1)^2\delta$ . Alors, nous obtenons*

$$\text{diam}(M,g) \leq d_1(n,\delta,H).$$

*De plus,*

*- si  $\delta \geq 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta := \eta(\varepsilon|n,\delta,H) > 0$  tel que si*

$$\text{diam}(M,g) \geq d_1(n,\delta,H) - \eta,$$

*alors*

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad 0 \leq h_{(M,g)}(\beta) - h_{n,\delta,R_1(n,\delta,H)}(\beta) \leq \varepsilon,$$

*- si  $\delta < 0$  et si  $\text{vol}(M,g) \geq v > 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta := \eta(\varepsilon|n,\delta,H,v) > 0$  tel que si*

$$\text{diam}(M,g) \geq d_1(n,\delta,H) - \eta,$$

*alors*

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad 0 \leq h_{(M,g)}(\beta) - h_{n,\delta,R_1(n,\delta,H)}(\beta) \leq \varepsilon.$$

#### Démonstration.

L'utilisation de la majoration (1.20) du diamètre d'une variété en fonction de son profil et la minoration (2.39) du profil, permettent d'obtenir, compte tenu de la propriété (2.29),

$$\text{diam}(M,g) \leq d_1(n,\delta,H).$$

L'hypothèse de presque maximalité du diamètre,

$$\text{diam}(M,g) \geq d_1(n,\delta,H) - \eta,$$

se traduit, compte tenu de l'inégalité (1.20) et de la symétrie des profils, par

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{h_{n,\delta,R_1}(\beta)} - \frac{1}{h_{(M,g)}(\beta)} \right) d\beta \leq \frac{\eta}{2} \quad \text{où } R_1 = R_1(n,\delta,H).$$

Ainsi, si  $\delta \geq 0$ , en observant que les profils modèles sont croissants sur  $[0, \frac{1}{2}]$  (voir la proposition 2.4.1) et que le profil  $h_{(M,g)}$  est lui aussi croissant (voir le corollaire 2.4.16),

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( h_{(M,g)}(\beta) - h_{n,\delta,R_1}(\beta) \right) d\beta &\leq \sup_{\beta \in [0, \frac{1}{2}]} |h_{n,\delta,R_1}(\beta) h_{(M,g)}(\beta)| \\ &\quad \times \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{h_{n,\delta,R_1}(\beta)} - \frac{1}{h_{(M,g)}(\beta)} \right) d\beta \\ &\leq \frac{H h_C(M,g)}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{h_{n,\delta,R_1}(\beta)} - \frac{1}{h_{(M,g)}(\beta)} \right) d\beta \\ &\leq \frac{\eta H h_C(M,g)}{8}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $h_C(M,g)$  est majorée en fonction de  $n, \delta, H$  pour tout  $\eta \leq R_1(n,\delta,H)$ , car par décroissance<sup>18</sup> de la bijection  $d_1(n,\delta,\cdot)$ , l'inégalité  $\text{diam}(M,g) \leq d_1(n,\delta,h_C(M,g))$  donne

$$\begin{aligned} h_C(M,g) &\leq (d_1(n,\delta,\cdot))^{-1}(\text{diam}(M,g)) \\ &\leq (d_1(n,\delta,\cdot))^{-1}(\text{diam}(M,g) - \eta) \\ &\leq (d_1(n,\delta,\cdot))^{-1}(R_1(n,\delta,H)). \end{aligned}$$

Compte tenu de la concavité des profils (car  $\delta \geq 0$ ), nous pouvons conclure en appliquant le lemme technique B.3.6 qui repose sur l'observation suivante : la concavité des profils force leur écart à être uniformément petit dès que l'intégrale de leur différence est suffisamment petite.

Traisons maintenant le cas  $\delta < 0$ . Reproduisons les mêmes manipulations en observant que faute de connaître la monotonie du profil  $h_{(M,g)}$ , nous utilisons la majoration (2.38) afin de contrôler son maximum sur  $[0, \frac{1}{2}]$  par  $h_{n,\delta,R_0}(\frac{1}{2})$  où  $R_0 := R_0(n,\delta,v)$  et c'est pour cela que nous avons besoin d'un minorant du volume de la variété  $(M,g)$ . Plus précisément,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (h_{(M,g)}(\beta) - h_{n,\delta,R_1}(\beta)) d\beta &\leq \sup_{\beta \in [0, \frac{1}{2}]} |h_{n,\delta,R_1}(\beta) h_{(M,g)}(\beta)| \\ &\quad \times \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{h_{n,\delta,R_1}(\beta)} - \frac{1}{h_{(M,g)}(\beta)} \right) d\beta \\ &\leq \frac{H h_{n,\delta,R_0}(\frac{1}{2})}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{h_{n,\delta,R_1}(\beta)} - \frac{1}{h_{(M,g)}(\beta)} \right) d\beta \\ &\leq \frac{\eta H h_{n,\delta,R_0}(\frac{1}{2})}{4}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors conclure en utilisant le lemme B.3.9 qui peut être appliqué, compte tenu du contrôle de la constante de Lipschitz du profil renormalisé obtenu dans la proposition 2.3.3. □

**Remarque 2.6.2** La partie du théorème concernant les variétés dont l'infimum sur la courbure de Ricci est strictement négatif requiert deux hypothèses supplémentaires. La première, concernant la constante isopérimétrique de Cheeger est indispensable pour garantir l'existence d'un "bon" profil modèle de comparaison (voir à ce propos le paragraphe 2.4.1). Quant à la seconde, une minoration du volume, elle est due aux nécessités techniques de contrôler le maximum du profil et de majorer la constante de Lipschitz du profil renormalisé dans le lemme B.3.9, pour remédier à la perte de concavité (par rapport à la courbure positive).

Ce résultat peut s'interpréter de la manière suivante : pour les variétés compactes de même dimension et ayant les mêmes minorants sur la courbure de Ricci et la constante isopérimétrique de Cheeger, le fait d'être de diamètre "presque maximal" impose d'avoir un profil isopérimétrique "presque minimal" au sens où il est uniformément proche, en

---

18. Si  $\delta > 0$ , nous devons considérer  $\max(H, h_C(\mathbb{S}_\delta^n))$  au lieu de  $H$  pour que la fonction  $d_1(n,\delta,\cdot)$  soit bien définie mais cela n'est absolument pas restrictif puisque sous cette hypothèse de courbure, l'inégalité de Lévy-Gromov établit  $h_C(M,g) \geq h_C(\mathbb{S}_\delta^n)$ .



différence, de son minorant modelé suivant les espaces de courbure constante. En particulier, sous ces hypothèses, la “presque maximalité” du diamètre implique la “presque minimalité” de la constante isopérimétrique de Cheeger.

Nous pourrions nous demander si, réciproquement, la “presque minimalité” du profil n’implique pas la “presque maximalité” du diamètre. Nous n’avons trouvé ni preuve, ni contre-exemple à cette assertion. Cependant, dans le cas particulier où  $\delta = 1$  et  $H = h_C(\mathbb{S}^n, \text{can})$ , le résultat du théorème 2.6.1 se simplifie et se renforce dans cette direction. En effet, la “presque maximalité” du diamètre, la “presque minimalité” du profil et la “presque minimalité” de la constante isopérimétrique de Cheeger deviennent des conditions équivalentes pour les variétés satisfaisant l’hypothèse de courbure Ricci  $\geq (n-1)g$ .

**Corollaire 2.6.3** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dont la courbure de Ricci satisfait :*

$$\text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)g(\cdot, \cdot).$$

Alors, nous obtenons

$$\text{diam}(M, g) \leq \pi.$$

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta := \eta(\varepsilon|n) > 0$  tel que si

$$\text{diam}(M, g) \geq \pi - \eta,$$

alors

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad 0 \leq h_{(M, g)}(\beta) - h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta) \leq \varepsilon$$

et

$$h_C(\mathbb{S}^n, \text{can}) \leq h_C(M, g) \leq h_C(\mathbb{S}^n, \text{can}) + 2\varepsilon.$$

Réciproquement, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\gamma := \gamma(\varepsilon|n) > 0$  tel que si

$$h_C(M, g) \leq h_C(\mathbb{S}^n, \text{can}) + \gamma,$$

alors

$$\pi - \varepsilon \leq \text{diam}(M, g) \leq \pi$$

et

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad 0 \leq h_{(M, g)}(\beta) - h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}(\beta) \leq \varepsilon.$$

### Démonstration.

Le sens direct est une application du théorème précédent tandis que la réciproque est une conséquence de la minoration optimale de la constante isopérimétrique de Cheeger donnée par S. Gallot et rappelée dans le théorème 1.4.4,

$$h_C(M, g) \geq \frac{1}{\int_0^{\frac{1}{2}\text{diam}(M, g)} (\cos u)^{n-1} du}.$$

□

Donnons une version séquentielle de ce résultat :

**Corollaire 2.6.4** *Soit  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés riemanniennes fermées de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dont la courbure de Ricci satisfait :*

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad \text{Ricci}_{(M_i, g_i)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)g_i(\cdot, \cdot).$$

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la suite des diamètres  $(\text{diam}(M_i, g_i))_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\pi$ ,
- (ii) la suite des profils  $(h_{(M_i, g_i)})_{i \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})}$  sur  $[0, 1]$ ,
- (iii) la suite des constantes isopérimétriques de Cheeger  $(h_C(M_i, g_i))_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers  $h_C(\mathbb{S}^n, \text{can})$ .

### 2.6.2 Relations volume/profil isopérimétrique

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que la "presque maximalité" du volume est équivalente à la "presque minimalité" du profil.

**Théorème 2.6.5** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dont la courbure de Ricci satisfait*

$$\text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad \text{où } \delta \in \mathbb{R}$$

*et dont la constante isopérimétrique de Cheeger est minorée par  $H \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $H^2 > -(n-1)^2\delta$ . Nous savons que*

$$\text{vol}(M, g) \leq V_1(n, \delta, H) \quad \text{et} \quad h_{(M, g)} \geq h_{n, \delta, R_1} \quad \text{où} \quad R_1 := R_1(n, \delta, H).$$

*Pour tout  $\varepsilon > 0$ , si*

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{n, \delta, R_1}(\beta)} \leq \left( \frac{1}{1 - \varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}},$$

*alors nous avons*

$$(1 - \varepsilon)V_1(n, \delta, H) \leq \text{vol}(M, g) \leq V_1(n, \delta, H).$$

*Réciproquement, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta := \eta(\varepsilon | n, \delta, H) > 0$  tel que si*

$$(1 - \eta)V_1(n, \delta, H) \leq \text{vol}(M, g),$$

*alors*

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad 1 \leq \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{n, \delta, R_1}(\beta)} \leq 1 + \varepsilon.$$

#### Démonstration.

L'hypothèse

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad 1 \leq \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{n, \delta, R}(\beta)} \leq \left( \frac{1}{1 - \varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}}$$

donne, par passage à la limite pour  $\beta$  tendant vers 0, compte tenu de l'équivalent (1.12),

$$(1 - \varepsilon)V_1(n, \delta, H) \leq \text{vol}(M, g) \leq V_1(n, \delta, H),$$

ce qui prouve le sens direct.

L'assertion réciproque se déduit d'une part de la majoration (2.38) qui donne, si  $\text{vol}(M, g) \geq (1 - \eta)V_1(n, \delta, H)$ ,

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad 1 \leq \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{n, \delta, R_1}(\beta)} \leq \frac{h_{n, \delta, R(\eta)}(\beta)}{h_{n, \delta, R_1}(\beta)}$$

où  $R(\eta) = R_0(n, \delta, (1 - \eta)V_1(n, \delta, H))$ , et d'autre part du résultat de continuité

$$\lim_{\substack{R' \rightarrow R_1 \\ R' > R_1}} \sup_{\beta \in ]0, \frac{1}{2}] } \frac{h_{n, \delta, R'}(\beta)}{h_{n, \delta, R_1}(\beta)} = 1$$

qui permet de conclure puisque  $R_1(n, \delta, H) = R_0(n, \delta, V_1(n, \delta, H))$ .  $\square$

Ce résultat peut s'interpréter de la manière suivante : pour les variétés compactes de même dimension et ayant les mêmes minorants sur la courbure de Ricci et la constante isopérimétrique de Cheeger, le fait d'être de volume "presque maximal" est équivalent à avoir un profil isopérimétrique "presque minimal" au sens où il est uniformément proche, en rapport, de son minorant modelé suivant les espaces de courbure constante. Ainsi, la "presque maximalité" du volume implique la "presque minimalité" de la constante isopérimétrique de Cheeger. Donnons l'énoncé simplifié du théorème 2.6.5 dans le cas particulier où  $\delta = 1$  et  $H = h_C(\mathbb{S}^n, can)$ .

**Corollaire 2.6.6** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dont la courbure de Ricci satisfait :*

$$\text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)g(\cdot, \cdot).$$

*Nous savons que*

$$\text{vol}(M, g) \leq \text{vol}(\mathbb{S}^n, can) \quad \text{et} \quad h_{(M, g)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, can)}.$$

*Pour tout  $\varepsilon > 0$ , si*

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta)} \leq \left( \frac{1}{1 - \varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}},$$

*alors nous avons*

$$(1 - \varepsilon)\text{vol}(\mathbb{S}^n, can) \leq \text{vol}(M, g) \leq \text{vol}(\mathbb{S}^n, can).$$

*Réciproquement, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta := \eta(\varepsilon|n) > 0$  tel que si*

$$(1 - \eta)\text{vol}(\mathbb{S}^n, can) \leq \text{vol}(M, g),$$

*alors*

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad 1 \leq \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Enonçons une version séquentielle de ce résultat que nous relierons au théorème de continuité de la fonctionnelle volume, établi par T. H. Colding dans [C3].

**Corollaire 2.6.7** *Soit  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés riemanniennes fermées de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dont la courbure de Ricci satisfait :*

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad \text{Ricci}_{(M_i, g_i)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)g_i(\cdot, \cdot).$$

*Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la suite  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(\mathbb{S}^n, can)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff,*
- (ii) *la suite des volumes  $(\text{vol}(M_i, g_i))_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\text{vol}(\mathbb{S}^n, can)$ ,*
- (iii) *la suite des rapports des profils*

$$\frac{h_{(M_i, g_i)}(\beta)}{h_{(\mathbb{S}^n, can)}(\beta)}$$

*converge uniformément vers 1 sur  $]0, 1[$ .*

**Remarque 2.6.8** Ce corollaire 2.6.7 est à l'origine du chapitre 4 qui consiste à étudier si l'équivalence de (i) et (iii) est typique d'une convergence vers la sphère ou bien si, comme l'équivalence de (i) et (ii), elle se généralise en une sorte de continuité du profil isopérimétrique vis-à-vis de la distance de Gromov-Hausdorff.

De ce corollaire 2.6.7, nous pouvons déduire la continuité, pour la distance de Gromov-Hausdorff, des fonctionnelles  $h_C(\cdot)$  et  $\mathcal{I}(\cdot)$  au point représenté par la sphère  $(\mathbb{S}^n, can)$  dans l'ensemble des variétés riemanniennes  $(M, g)$ , compactes, de dimension  $n$ , et telles que  $\text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)g(\cdot, \cdot)$ .

**Corollaire 2.6.9** Soit  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés riemanniennes fermées de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dont la courbure de Ricci satisfait

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad \text{Ricci}_{(M_i, g_i)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)g_i(\cdot, \cdot)$$

et qui convergent vers  $(\mathbb{S}^n, can)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff. Alors

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \mathcal{I}(M_i, g_i) = \mathcal{I}(\mathbb{S}^n, can) \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} h_C(M_i, g_i) = h_C(\mathbb{S}^n, can).$$

**Remarque 2.6.10** Nous observons un phénomène particulièrement intéressant lorsque nous comparons les hypothèses et les conclusions des corollaires 2.6.3 et 2.6.4 d'une part, 2.6.6 et 2.6.7 d'autre part. En effet, sous l'hypothèse de courbure Ricci  $\geq (n-1)g$ , le théorème de Bishop montre que la "presque maximalité" du volume impose celle du diamètre. De plus la réciproque est fautive comme le montre l'exemple des variétés "fuseaux" (voir la figure 2.9) de diamètre proche de  $\pi$  tandis que leur volume tend vers 0. Nous obtenons ici une illustration des différentes implications de ces hypothèses, qui rappelle que la "presque maximalité" du volume est une condition plus forte que celle du diamètre.

Nous disposons d'un résultat en tout point analogue au théorème 2.6.5 en échangeant les rôles joués par la constante de Cheeger et le volume: pour les variétés compactes de même dimension et ayant les mêmes minorants sur la courbure de Ricci et le volume, la "presque maximalité" du profil isopérimétrique, au sens où il est uniformément proche, en rapport, de son majorant modelé suivant les espaces de courbure constante, est équivalente à la "presque maximalité" de la constante isopérimétrique de Cheeger. Ainsi, la "presque maximalité" de la constante isopérimétrique de Cheeger implique la "presque minimalité" du volume.

**Théorème 2.6.11** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dont la courbure de Ricci satisfait

$$\text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g_{(M, g)}(\cdot, \cdot) \quad \text{où} \quad \delta \in \mathbb{R}$$

et dont le volume est minoré par  $V_0 \in \mathbb{R}_+^*$ . Nous savons alors que

$$h_C(M, g) \leq H_0(n, \delta, V_0) \quad \text{et que} \quad h_{(M, g)} \leq h_{n, \delta, R_0} \quad , \quad \text{où} \quad R_0 := R_0(n, \delta, V_0).$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , si

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{n, \delta, R_0}(\beta)} \geq 1 - \varepsilon,$$

alors nous avons

$$(1 - \varepsilon)H_0(n, \delta, V_0) \leq h_C(M, g) \leq H_0(n, \delta, V_0).$$

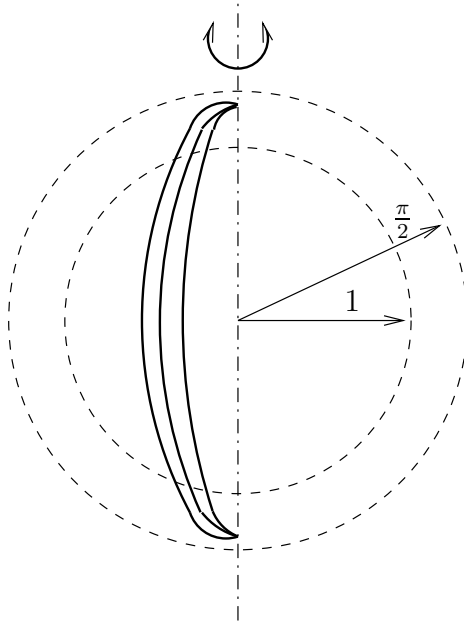


FIG. 2.9 – Génératrices de surfaces de révolution dont le diamètre est proche de  $\pi$ , dont les courbures sectionnelles sont minorées par 1 mais dont le volume tend vers 0.

Réciproquement, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta := \eta(\varepsilon | n, \delta, V_0) > 0$  tel que si

$$(1 - \eta)H_0(n, \delta, V_0) \leq h_C(M, g),$$

alors

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad 1 - \varepsilon \leq \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{n, \delta, R_0}(\beta)} \leq 1$$

et

$$V_0 \leq \text{vol}(M, g) \leq V_0 \left( \frac{1}{1 - \varepsilon} \right)^n .$$

### Démonstration.

Si

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{n, \delta, R}(\beta)} \geq 1 - \varepsilon,$$

le passage à l'infimum sur les rapports  $\frac{h_{(M, g)}(\beta)}{\beta}$  et  $\frac{h_{n, \delta, R}(\beta)}{\beta}$  donne

$$h_C(M, g) \leq (1 - \varepsilon)H(n, \delta, V_0)$$

tandis qu'une manipulation analogue à partir de l'inégalité

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{n, \delta, R}(\beta)} \leq 1$$

donne

$$h_C(M, g) \leq H(n, \delta, V_0).$$

La deuxième partie de l'énoncé se déduit de la minoration (2.39) (car  $H(n, \delta, V_0)$  vérifie  $H(n, \delta, V_0)^2 > -(n - 1)^2 \delta$ ) et du résultat de continuité suivant :

$$\lim_{\substack{R' \rightarrow R \\ R' < R}} \sup_{\beta \in ]0, \frac{1}{2}[} \frac{h_{n, \delta, R'}(\beta)}{h_{n, \delta, R}(\beta)} = 1.$$

□

## Chapitre 3

# Problèmes isopérimétriques sur les mm-espaces

Rappelons la version intégrée de l'inégalité de Lévy-Gromov obtenue dans la proposition 1.26 : si  $(M, g)$  est une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), l'hypothèse

$$h_{(M, g)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})} \quad (3.1)$$

impose, pour toute partie non vide  $A \subset M$  et pour tout  $h > 0$ , la comparaison

$$\frac{\text{vol}(A_h)}{\text{vol}(M, g)} \geq \frac{\text{vol}(A_h^*)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})}, \quad (3.2)$$

où  $A^*$  est une boule géodésique de  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$  telle que

$$\frac{\text{vol}(\overline{A})}{\text{vol}(M, g)} = \frac{\text{vol}(A^*)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})}.$$

Ce résultat suggère que la mesure riemannienne probabilisée (c'est-à-dire renormalisée pour être de masse totale 1) est “la” mesure pertinente pour formuler cet énoncé, d'autant que la définition du profil isopérimétrique d'une variété riemannienne fermée (voir la définition 1.1.1) privilégie elle aussi cette mesure de probabilité. De plus, la comparaison (3.2) ne fait pas directement appel à la structure riemannienne sous-jacente, elle ne nécessite qu'une mesure et une distance. Par conséquent, il semble raisonnable d'imaginer qu'elle puisse se généraliser au cadre des espaces métriques mesurés, sous réserve de formuler une hypothèse généralisant (3.1) et correspondant à un problème isopérimétrique à préciser. Sur une variété riemannienne, la distance et la mesure “habituellement” considérées ont une origine commune : elles sont induites par la métrique riemannienne. Par conséquent, la minoration de la courbure de Ricci, hypothèse omniprésente dans le chapitre 2, qui donne accès à un contrôle des dérivées secondes de la métrique, affecte simultanément la distance et la mesure riemanniennes. L'objectif de ce chapitre est de préciser comment formaliser une généralisation des questions isopérimétriques dans le cadre des espaces métriques munis d'une mesure borélienne de probabilité, que nous appellerons *mm-espaces*, puis d'étudier sous quel type d'hypothèses sur la distance d'une part et sur la mesure d'autre part, nous pouvons étendre les propriétés de concavité du profil isopérimétrique.

Nous reprenons ici une partie des travaux exposés dans [BH1] afin de généraliser la notion de profil isopérimétrique. En citant ensuite des résultats obtenus dans le cadre

des mm-espaces et dus à S. Bobkov [Bo2], F. Barthe [Ba2], F. Barthe et B. Maurey [BaMa], A. Ros [Ro], nous détaillons quelques aspects particulièrement intéressants de cette généralisation. La richesse des comparaisons isopérimétriques avec des *mm-espaces modèles* est illustrée d’une part par l’interprétation de la minoration de la première valeur propre non nulle du Laplacien donnée par J. Cheeger dans [C],  $\lambda_1 \geq \frac{h_C^2}{4}$ , comme la conséquence de la minoration du profil par celui d’un mm-espace particulier et d’autre part par l’étude des profils isopérimétriques des produits de sphère. Nous en profitons pour proposer une généralisation de la technique de symétrisation décrite par A. Ros dans [Ro] au cadre plus général des produits tordus. Une conséquence de l’extension de cette méthode est une preuve immédiate du caractère minimisant des boules centrées sur un sommet dans un cône. Enfin, en nous restreignant aux mm-espaces obtenus en considérant, sur une variété riemannienne fermée, la distance riemannienne et une mesure de probabilité ayant une densité  $\Psi = e^\psi$  non constante vis-à-vis de la mesure riemannienne, nous essayons d’étendre les propriétés différentielles de concavité du profil isopérimétrique, étudiées au chapitre 2 dans le cadre des variétés compactes. Dans ce but, nous reproduisons des techniques variationnelles analogues à celles mises en œuvre pour établir les relations différentielles des théorèmes 2.2.1 et 2.2.3. La différence majeure avec le chapitre 2 concerne la généralisation des termes de courbure. En effet, le rôle joué précédemment par la courbure de Ricci est désormais assuré par la forme quadratique

$$\text{Ricci}_{(M,g)_\psi^q}(\cdot, \cdot) := \text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) - \frac{1}{q} d\psi \otimes d\psi(\cdot, \cdot) \quad , \quad q > 0,$$

qui oppose deux types de dérivées secondes, les unes portent sur la métrique riemannienne tandis que les autres concernent le logarithme de la densité non riemannienne. L’apparition de ce terme doit être rapprochée des travaux récemment effectués, dans un contexte encore plus général, par D. Bakry et M. Émery dans [BE]. En effet, au cours de l’étude de semigroupes de diffusion, ils introduisent le tenseur  $\text{Ricci}_{(M,g)_\psi^q}$ , dit “tenseur de Ricci-Bakry-Émery”, comme l’analogue “naturel” du tenseur de courbure de Ricci. Une minoration de ce tenseur, désignée par l’appellation *hypothèse de courbure-dimension*, remplace alors l’hypothèse de courbure qui revient tout au long du chapitre 2, à savoir une borne inférieure sur le tenseur de Ricci. Nous proposons de généraliser, sous cette nouvelle hypothèse, le théorème de comparaison de Lévy-Gromov à partir duquel nous étendons les théorèmes de Myers (majoration du diamètre) et de Lichnerowicz (minoration du trou spectral). Enfin, nous renvoyons à l’annexe E pour une nouvelle preuve de la généralisation du théorème de Bishop-Gromov établie par Z. Qian dans [Q] et quelques applications.

Lors du développement de la théorie des espaces de longueur, de nombreuses considérations qui concernaient les variétés riemanniennes et reposaient sur des définitions analytiques (comme la courbure sectionnelle) ont bénéficié d’une compréhension nouvelle, liée à une interprétation plus géométrique ne nécessitant qu’une notion de distance. Ici, en étudiant les problèmes isopérimétriques sur les mm-espaces, nous montrons d’une part qu’ils permettent d’envisager l’isopérimétrie des variétés riemanniennes d’un point de vue nouveau, et d’autre part qu’ils mettent en lumière la rivalité entre la distance et la mesure lorsque ces deux notions ne sont pas issues d’une même métrique riemannienne.



## 3.1 Généralisation des problèmes isopérimétriques

### 3.1.1 Choix d'une notion de volume de bord

D'une certaine manière, nous allons commencer par dresser un "cahier des charges" de la généralisation du problème isopérimétrique :

- le problème isopérimétrique généralisé sur un mm-espace doit permettre de retrouver le problème isopérimétrique classique lorsque l'espace considéré est une variété riemannienne,
- la comparaison (3.2) doit pouvoir être généralisée et permettre ainsi d'aborder le phénomène de concentration de la mesure (voir plus précisément à ce propos le premier chapitre de [Mi] et le second chapitre de [Led1]),
- la définition ne doit faire intervenir qu'une mesure et une distance, en particulier les notions de dimension et de métrique sont à éviter.

En reprenant la discussion menée au paragraphe 1.6, il apparaît que la définition du profil isopérimétrique requiert une notion de volume d'un domaine, c'est-à-dire une mesure, et une notion de volume du bord d'un domaine qui peut être une mesure  $(n-1)$ -dimensionnelle (mesure de Hausdorff par exemple) ou une fonctionnelle sur les domaines (contenu extérieur de Minkowski par exemple). Parmi les notions de volume de bord étudiées au paragraphe 1.6, le contenu extérieur de Minkowski est la seule à ne mettre en jeu qu'une mesure et une distance, et à ne pas nécessiter de notion de dimension. De plus, l'étude de la preuve de la proposition 1.26 montre qu'il apparaît aussi comme "la" notion naturelle pour démontrer ce résultat. Ainsi, pour tout compact  $K$  d'un mm-espace  $(E, d, \mu)$ , nous notons  $\mu^+(K)$  son contenu extérieur de Minkowski défini par

$$\mu^+(K) := \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(K_h) - \mu(K)}{h} \in [0, +\infty],$$

où

$$K_h := \left\{ m \in E \mid d(m, K) \leq h \right\}.$$

### 3.1.2 Profil isopérimétrique des mm-espaces

**Définition 3.1.1** Soit  $(E, d, \mu)$  un mm-espace, nous lui associons une fonction appelée profil isopérimétrique, notée  $h_{(E, d, \mu)}$  et définie sur  $[0, 1]$  par  $h_{(E, d, \mu)}(0) = h_{(E, d, \mu)}(1) = 0$  et, pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ ,

$$h_{(E, d, \mu)}(\beta) := \inf \left\{ \mu^+(K) \mid K \subset E, \mu(K) = \beta \right\} \in [0, +\infty],$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des compacts  $K$  de  $E$  de mesure  $\beta$  et où nous adoptons la convention que l'infimum est infini dès que l'ensemble sur lequel il est pris est vide.

#### Remarques 3.1.2

- Si  $(E, d, \mu)$  est un espace métrique muni d'une mesure borélienne de masse totale finie non nulle, nous définissons son profil isopérimétrique comme celui du mm-espace  $(E, d, \frac{\mu}{\mu(E)})$  obtenu en renormalisant la mesure.
- D'après les définitions alternatives du profil isopérimétrique proposées au paragraphe 1.6, la définition 3.1.1 coïncide avec la définition classique du profil lorsque le mm-espace considéré est une variété riemannienne fermée.

- Cette définition permet de considérer des mesures de probabilité sur toutes les variétés non-compactes, ce qui inclus par exemple les variétés non compactes de courbure de Ricci positive ou nulle dont le volume riemannien est infini.

Observons enfin, par comparaison avec la définition 1.1.1, que la propriété de symétrie du profil n'est plus évidente, même si sur les exemples elle semble être conservée. La propriété d'homogénéité sur la distance reste quant à elle vérifiée, à savoir, pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad h_{(E,\lambda d,\mu)}(\beta) = \frac{1}{\lambda} h_{(E,d,\mu)}(\beta).$$

### 3.1.3 Exemples et mm-espaces modèles

#### Les variétés riemanniennes fermées à densité

Considérons, sur une variété riemannienne fermée  $(M,g)$ , une fonction  $\psi$  à valeurs réelles, continue sur  $M$ . Désignons par  $(M,g,\psi)$  l'espace métrique mesuré obtenu en considérant la variété  $M$  munie de la distance riemannienne induite par la métrique et de la mesure  $d\nu_{g,\psi}$  de densité  $\Psi := \exp(\psi)$  par rapport à la mesure riemannienne canonique  $d\nu_g$ ,

$$d\nu_{g,\psi}(p) = \Psi(p)d\nu_g(p).$$

Nous obtenons ainsi une formidable mine d'exemples que nous appelons *les variétés riemanniennes fermées à densité*.

L'étude des propriétés de concavité du profil isopérimétrique des variétés à densité  $(M,g,\psi)$  fait l'objet du paragraphe 3.4. Nous observons alors comment se “concurrent” et se “compensent” la distance riemannienne et la mesure non riemannienne par l'intermédiaire de la courbure de Ricci et du hessien du logarithme de la densité.

Ces mm-espaces apparaissent naturellement lorsque nous considérons une suite de produits tordus qui s'effondre sur le premier facteur. Considérons par exemple la famille de variétés  $(M_\varepsilon, g_\varepsilon) = M_1 \times_{\varepsilon\varphi} M_2$  où  $(M_1, g_1)$  et  $(M_2, g_2)$  sont deux variétés riemanniennes fermées de dimensions respectives  $n_1$  et  $n_2$ , et  $\varphi$  est une fonction strictement positive définie sur  $M_1$ . Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $(M_\varepsilon, g_\varepsilon)$  converge, pour la distance de Gromov-Hausdorff, vers  $(M_1, g_1)$ , ce qui, du point de vue métrique, signifie qu'il y a convergence vers l'espace métrique  $(M_1, g_1)$ . En revanche, du point de vue de la mesure, en observant que la mesure riemannienne sur  $M_\varepsilon$  vaut

$$d\nu_{g_\varepsilon}(m_1, m_2) = \varphi(m_1)^{n_2} d\nu_{g_1}(m_1) d\nu_{g_2}(m_2),$$

nous comprenons que la famille d'espaces mesurés  $(M_\varepsilon, d\nu_{g_\varepsilon})$  converge vers l'espace mesuré  $(M_1, d\nu_{g_0})$  où

$$d\nu_{g_0}(m_1) = \varphi(m_1)^{n_2} d\nu_{g_1}(m_1).$$

D'une certaine manière, la densité de la mesure limite par rapport à la mesure riemannienne représente, en tout point, une information issue de la géométrie de la fibre qui s'effondre sur ce point, par comparaison avec les autres fibres qui s'effondrent. Ainsi, la famille  $(M_\varepsilon, g_\varepsilon)$  converge<sup>1</sup>, pour la structure de mm-espace, vers la variété à densité  $(M_1, g_1, \varphi^{n_2})$ . Cet exemple simple montre qu'il est indispensable d'étudier l'isopérimétrie sur les variétés à densité avant de pouvoir discuter du comportement des profils isopérimétriques associés à une famille de variétés qui s'effondrent.

1. Il est possible de donner un sens précis à la convergence d'une suite  $(E_i, d_i, \mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de mm-espaces vers un mm-espace  $(E, d, \mu)$ . En effet, il faut d'une part la convergence au sens de la distance de Gromov-Hausdorff des espaces métriques  $(E_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$  vers  $(E, d)$ , et d'autre part, l'existence d'une suite d'applications mesurables  $\pi_i : E_i \rightarrow E$  telles que la suite des mesures  $\pi_i * \mu_i$  converge faiblement vers  $\mu$  (voir [Gr] et [Fu]).

## Les espaces singuliers

Sachant que nous pouvons, à partir de la définition 1.1.1, étudier les problèmes isopérimétriques sur les hypersurfaces régulières de  $(\mathbb{R}^n, can)$  car ce sont des variétés de classe  $C^\infty$ , il semble intéressant de pouvoir le faire également sur les hypersurfaces à singularités isolées comme les polyèdres. En considérant sur ces espaces singuliers la structure d'espace de longueur induite par l'espace ambiant  $(\mathbb{R}^n, can)$  et la mesure  $(n - 1)$ -dimensionnelle de Hausdorff probabilisée, la définition 3.1.1 répond à cette préoccupation. Le lecteur intéressé trouvera dans [CFGTSY] le calcul explicite des profils isopérimétriques du cube, du parallélépipède rectangle, du tétraèdre régulier, de l'octaèdre régulier, du double disque... De plus les auteurs parviennent à décrire les domaines isopérimétriques de ces variétés singulières et nous observons que pour les petits volumes, les domaines isopérimétriques sont des boules centrées sur un sommet d'ouverture minimale. Ce résultat, déjà établi dans le cas des cônes riemanniens (voir [MR] et l'annexe F pour une nouvelle preuve de ce fait) et étendu aux polytopes dans [M3], généralise l'idée que les domaines isopérimétriques de petit volume se concentrent en les extrema de la courbure (voir paragraphe 1.5.2) et montre que l'équivalent (1.12) n'est plus valable en présence de singularités.

D'une manière plus générale, à l'aide de la définition 3.1.1, nous pouvons considérer les profils isopérimétriques de toutes les variétés singulières munies d'une mesure pour laquelle l'ensemble des singularités est de mesure nulle. Une famille très intéressante d'espaces singuliers apparaît naturellement lorsque nous nous intéressons à l'adhérence des ensembles  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff. L'étude du comportement de la suite des profils isopérimétriques associée à une suite de variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  qui converge une limite singulière devrait nous inciter, dans un futur proche, à étudier les propriétés isopérimétriques de ces espaces limites. Observons par ailleurs que dans l'adhérence de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ , la mesure limite, si nous pensons à une convergence au sens des mm-espaces, n'est autre que la mesure  $n$ -dimensionnelle de Hausdorff, qui coïncide avec la mesure riemannienne canonique si l'espace limite est une variété. En effet, la minoration du volume, uniforme sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ , interdit le phénomène d'effondrement (voir à ce propos la remarque 4.1.3) qui, comme nous l'avons vu précédemment, peut faire apparaître une densité non triviale (c'est-à-dire non constante) par rapport à la "bonne" <sup>2</sup> mesure de Hausdorff sur l'espace limite.

## Les espaces modèles de dimension 1

A partir de la définition 3.1.1, nous pouvons enfin définir et calculer le profil isopérimétrique de  $(\mathbb{S}^1, can)$  <sup>3</sup>, noté  $h_{(\mathbb{S}^1, can)}$ , qui est nul en 0, nul en 1 et qui vaut  $\frac{1}{\pi}$  sur  $]0, 1[$  (voir la figure 3.1). Par homogénéité, nous en déduisons le profil de toutes les variétés riemanniennes compactes de dimension 1. Il est important de pouvoir définir et expliciter le profil isopérimétrique de  $\mathbb{S}^1(\pi)$  <sup>4</sup>, non seulement car les produits de copies de  $\mathbb{S}^1(d)$  sont isométriques aux tores plats dont les profils ne sont pas connus en dimension supérieure à 3, mais aussi pour pouvoir appliquer les théorèmes de comparaison sur les produits (voir le théorème 3.2.4) à la variété  $\mathbb{S}^1(\pi)$  dont nous savons désormais que le profil est minoré par  $\frac{1}{\pi}$  fois le profil gaussien que nous allons bientôt décrire.

De plus, nous pouvons également associer un profil isopérimétrique à toute mesure

---

2. C'est-à-dire la mesure  $p$ -dimensionnelle de Hausdorff si  $p$  est la dimension de Hausdorff de cet espace limite.

3. Nous définissons  $(\mathbb{S}^1, can)$  comme la sphère unité de  $(\mathbb{R}^2, can)$ .

4. Nous notons  $\mathbb{S}^1(d)$  la variété fermée de dimension 1 et de diamètre  $d \in \mathbb{R}_+^*$ , qui peut être vue comme le bord d'un disque de rayon  $\frac{d}{2}$  dans le plan euclidien.

de probabilité sur  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , la variété riemannienne non compacte de dimension 1. Il s'agit là d'une mine d'exemples extrêmement étudiés par de nombreux auteurs et plus particulièrement par des probabilistes (voir l'excellent exposé proposé dans le chapitre 13 de [BH1]). La grande richesse de cette famille réside dans le fait qu'elle contient une sous-famille dont les profils et les domaines isopérimétriques sont parfaitement déterminés. Le résultat suivant, qui reprend le corollaire 13.4 de [BH1], précise cela.

**Proposition 3.1.3** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  dont la densité  $\varphi$  par rapport à la mesure de Lebesgue est une fonction paire et log-concave. Alors les domaines isopérimétriques sont de la forme  $]-\infty, a]$  et  $[b, +\infty[$ . En particulier, le profil isopérimétrique de  $(\mathbb{R}, |\cdot|, \mu)$  est obtenu implicitement par la relation*

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad , \quad h_\mu(\mu(]-\infty, a])) = \varphi(a).$$

Parmi tous ces exemples, exhibons deux mesures particulières sur  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  qui jouent des rôles privilégiés dans la suite :

- la mesure gaussienne,  $d\gamma(x) := e^{-\pi x^2} dx$  dont la proposition 3.1.3 permet de calculer implicitement le profil  $h_\gamma$  représenté sur la figure 3.1 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad h_\gamma\left(\int_{-\infty}^x e^{-\pi u^2} du\right) = e^{-\pi x^2}, \quad (3.3)$$

- la mesure exponentielle,  $d\nu(x) := \frac{1}{2}e^{-|x|} dx$  dont la proposition 3.1.3 permet de calculer explicitement le profil  $h_\nu$  représenté sur la figure 3.1 :

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad h_\nu(\beta) = \min(\beta, 1 - \beta). \quad (3.4)$$

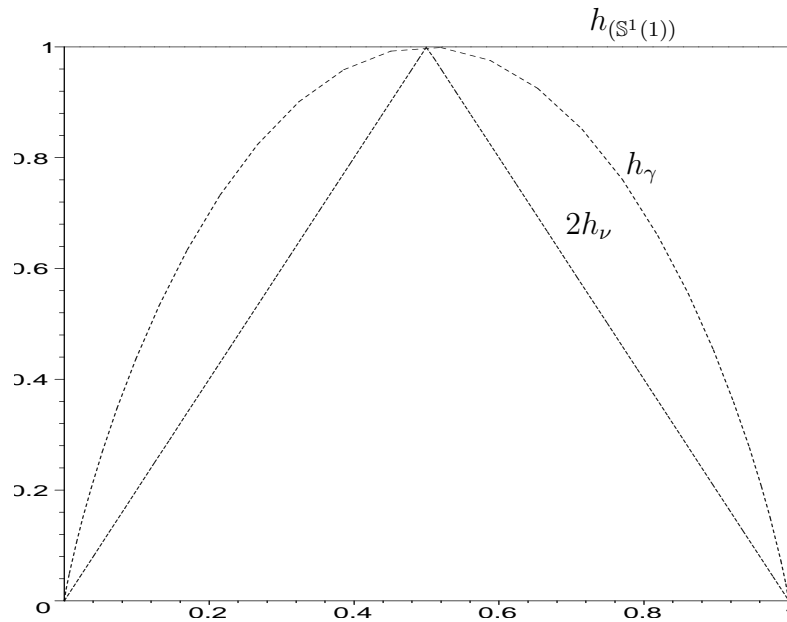


FIG. 3.1 – Profil isopérimétrique de  $\mathbb{S}^1(1)$ , des mesures gaussienne et exponentielle.

### mm-espaces modèles

Dans [Ro], A Ros introduit la définition suivante *des mm-espaces modèles*, afin de généraliser la technique de symétrisation de Steiner et Schwarz au cadre des mm-espaces.

**Définition 3.1.4** *Nous qualifions le mm-espace  $(E_0, d_0, \mu_0)$  de mm-espace modèle si  $(E_0, d_0)$  est une variété riemannienne et s'il existe une famille continue  $\mathcal{D} = \{D^t | t \in [0, 1]\}$  de parties fermées de  $E_0$ , satisfaisant les conditions suivantes :*

- (i) *pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\mu_0(D^t) = t$  et si  $s \in [0, t]$  alors  $D^s \subset D^t$ ,*
- (ii) *pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $D^t$  est un domaine à bord régulier tel que  $h_{(E_0, d_0, \mu_0)}(t) = \mu_0^+(D^t)$ , et  $h_{(E_0, d_0, \mu_0)}$  est strictement positif sur  $]0, 1[$ ,*
- (iii) *pour tout  $r \geq 0$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ , il existe  $s := s(r, t) \in [t, 1]$  tel que  $(D^t)_r = D^s$*
- (iv)  *$D^1 = E_0$  et  $D^0$  est un point ou l'ensemble vide<sup>5</sup>.*

### Remarques 3.1.5

- Dans la définition 3.1.4, le point (i) permet d'affirmer que les parties  $D^t$  sont non vides lorsque  $t \in ]0, 1]$ . De plus, la continuité de la famille  $\mathcal{D}$  signifie que l'application  $t \mapsto D^t$ , de  $]0, 1]$  dans les parties fermées non vides de  $E_0$ , est continue pour la topologie induite par la "distance"<sup>6</sup> de Hausdorff sur les parties fermées non vides de  $E_0$ .
- Une grande famille de mm-espaces modèles, dont nous allons utiliser certains représentants dans la suite, est fournie par la proposition 3.1.3. En effet, sur l'espace modèle  $(\mathbb{R}, |\cdot|, \varphi(x)dx)$ , la famille  $\mathcal{D}$  est donnée par  $D^0 = \emptyset$ ,  $D^1 = \mathbb{R}$  et pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $D^t = ]-\infty, a(t)]$  où la fonction  $a(t)$  est définie par l'égalité

$$\int_{-\infty}^{a(t)} \varphi(x)dx = t.$$

Cette notion de mm-espace modèle permet d'étendre les points (i) et (v) de la proposition 1.26 au cadre des espaces métriques mesurés. Ainsi, en notant  $\lambda_1(E, d, \mu)$  le *trou spectral* du mm-espace  $(E, d, \mu)$ , défini, lorsque  $(E, d)$  est une variété riemannienne, par

$$\lambda_1(E, d, \mu) := \inf \left\{ \int_E \|\nabla_p f\|^2 d\mu(p) \mid f \in \text{Lip}(E, d), \int_E f(p)^2 d\mu(p) = 1, \int_E f(p) d\mu(p) = 0 \right\},$$

nous obtenons la proposition suivante :

**Proposition 3.1.6** *Soient  $(E, d, \mu)$  une variété riemannienne munie d'une mesure de probabilité<sup>7</sup> et  $(E_0, d_0, \mu_0)$  un mm-espace modèle tel que*

$$h_{(E, d, \mu)} \geq h_{(E_0, d_0, \mu_0)}.$$

Alors,

- (i) *pour toute partie  $A \subset E$  non vide,*

$$\forall r \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad \mu(A_r) \geq \mu_0((D^{\mu(\bar{A})})_r), \quad (3.5)$$

5. Nous adoptons la convention suivante : les voisinages tubulaires de l'ensemble vide sont vides. Ainsi, dans le point (ii), si  $D^0 = \emptyset$ ,  $\mu_0^+(D^0) = 0$ .

6. Attention, deux parties fermées non vides peuvent être à une "distance de Hausdorff" infinie l'une de l'autre.

7. Il serait possible d'énoncer une proposition analogue en supposant que  $(E, d, \mu)$  est un mm-espace quelconque, mais cela nécessite une généralisation plus fine de la notion de trou spectral et nous n'utilisons pas dans la suite l'inégalité (3.6) dans un contexte aussi général.

(ii)

$$\lambda_1(E, d, \mu) \geq \lambda_1(E_0, d_0, \mu_0). \quad (3.6)$$

**Remarques 3.1.7**

- Le résultat du point (i) permet de démontrer, sous l'hypothèse de comparaison isopérimétrique de la proposition 3.1.6, la comparaison suivante des diamètres<sup>8</sup> :

$$\text{diam}(E, d) \leq \text{diam}(E_0, d_0).$$

- Sachant que la fonction de concentration d'un mm-espace  $(E, d, \mu)$ , notée  $\alpha_{(E, d, \mu)}$ , est définie de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ , pour tout  $u > 0$  par

$$\alpha_{(E, d, \mu)}(u) := \inf \left\{ \mu(A_u) \mid A \text{ borélien de } E \text{ tel que } \mu(A) \geq \frac{1}{2} \right\},$$

le point (i) permet d'obtenir, sous les hypothèses de la proposition 3.1.6, la comparaison suivante des fonctions de concentration :

$$\forall u > 0 \quad , \quad \alpha_{(E, d, \mu)}(u) \geq \alpha_{(E_0, d_0, \mu_0)}(u).$$

**3.2 Apports de l'isopérimétrie sur les mm-espaces**

La richesse de l'étude des problèmes isopérimétriques sur les mm-espaces réside dans le grand nombre d'espaces modèles dont le profil et les domaines isopérimétriques sont parfaitement décrits (voir la proposition 3.1.3). Ceci ouvre la voie à des comparaisons nouvelles. Plus précisément, la comparaison avec la mesure exponentielle permet d'interpréter différemment la minoration du trou spectral donnée par J. Cheeger tandis que la comparaison avec la mesure gaussienne facilite l'étude des propriétés isopérimétriques du produit de mm-espaces.

**3.2.1 Interprétation de la minoration du trou spectral :  $\lambda_1 \geq \frac{h_C(M, g)^2}{4}$** 

La connaissance explicite du profil isopérimétrique du mm-espace modèle  $(\mathbb{R}, |\cdot|, \nu)$ , donné par la relation (3.4), permet d'interpréter l'égalité (1.4) qui relie la constante isopérimétrique de Cheeger au profil d'une variété riemannienne fermée, comme une comparaison de deux profils :

$$h_C(M, g) = \inf_{\beta \in ]0, 1[} \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_\nu(\beta)},$$

d'où

$$h_{(M, g)} \geq h_C(M, g) h_\nu = h_{(\mathbb{R}, h_C(M, g)^{-1} |\cdot|, \nu)}.$$

Ainsi, en rappelant que le résultat de comparaison des trous spectraux à partir d'une hypothèse de comparaison isopérimétrique (voir la proposition 1.26) se généralise au cadre plus vaste des mm-espaces modèles (voir le point (ii) de la proposition 3.1.6), nous obtenons<sup>9</sup>

$$\lambda_1(M, g) \geq \lambda_1(\mathbb{R}, h_C(M, g)^{-1} |\cdot|, \nu) = h_C(M, g)^2 \lambda_1(\mathbb{R}, |\cdot|, \nu).$$

8. La preuve de ce résultat nécessite une mesure  $\mu$  strictement positive sur tout ouvert.

9. Nous utilisons ici l'homogénéité du trou spectral, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\lambda_1(E, \lambda d, \mu) = \lambda^{-2} \lambda_1(E, d, \mu)$ .

Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de calculer le trou spectral de l'espace  $(\mathbb{R}, |\cdot|, \nu)$ ,  $\lambda_1(\mathbb{R}, |\cdot|, \nu) = \frac{1}{4}$ , d'où

$$\lambda_1(M, g) \geq \frac{h_C(M, g)^2}{4}. \quad (3.7)$$

Cette preuve de la minoration de la première valeur propre non nulle sur une variété riemannienne présente l'intérêt de la faire apparaître comme un résultat issu de la comparaison du profil isopérimétrique de  $(M, g)$  avec celui de l'espace  $(\mathbb{R}, |\cdot|, \nu)$ . Cette interprétation "géométrique", sous-jacente dans la preuve du théorème 6.9 de [G1], est à rapprocher de l'étude proposée au chapitre IV de [B2], qui permet de donner une preuve "à la Faber-Krahn" (c'est-à-dire en mettant en oeuvre une technique de symétrisation sur une variété modèle de révolution munie d'une métrique adéquate) de la minoration (3.7) à partir de l'inégalité isopérimétrique

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad h_{(M, g)}(\beta) \geq h_C(M, g) \min(\beta, 1 - \beta).$$

**Remarque 3.2.1** Ce raisonnement se généralise sans aucune difficulté à tous les mm-espaces modèles, d'où le résultat général

$$\lambda_1(M, g) \geq \left( \inf_{\beta \in ]0, 1[} \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{(E_0, d_0, \mu_0)}(\beta)} \right)^2 \lambda_1(E_0, d_0, \mu_0).$$

Parmi toutes ces estimations, il convient alors de privilégier celles pour lesquelles le trou spectral du mm-espace modèle est connu et celles pour lesquelles la comparaison des profils pourra être minorée de manière optimale. La mesure exponentielle sur  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  satisfait ces conditions, la mesure gaussienne aussi. En particulier,  $\lambda_1(\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma) = 2\pi$ , et si nous anticipons sur la définition 3.2.2 de la constante isopérimétrique gaussienne  $h_G(M, g)$ ,

$$\lambda_1(M, g) \geq 2\pi h_G(M, g)^2.$$

Comme nous le justifierons au paragraphe 3.2.2, en reproduisant des idées apparues dans [BaMa] et [Ba1], les constantes isopérimétriques gaussiennes des sphères sont connues et cette inégalité donne<sup>10</sup>

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \lambda_1(\mathbb{S}^n(d_n)) \geq 2\pi.$$

Sachant que la valeur exacte est  $\lambda_1(\mathbb{S}^n(d_n)) = \frac{n\pi^2}{d_n^2}$  qui tend vers  $2\pi$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , nous pouvons, à l'instar de A. Ros dans [Ro], conclure à une forme "d'optimalité en dimension infini" de cette minoration.

### 3.2.2 Profil isopérimétrique d'un produit de mm-espaces

Considérons le produit des deux mm-espaces  $(E_1, d_1, \mu_1)$  et  $(E_2, d_2, \mu_2)$ , que nous notons  $(E_1 \times E_2, \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \mu_1 \otimes \mu_2)$ , où la distance est la distance "euclidienne" construite à partir des distances  $d_1$  et  $d_2$ , à savoir  $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ , et où la mesure est la mesure produit  $\mu_1 \otimes \mu_2$ . Nous allons essayer de voir comment minorer le profil isopérimétrique du produit en fonction des propriétés isopérimétriques de chacun des facteurs. Par ailleurs, en considérant des domaines produits du type  $\Omega_1 \times E_2$  (resp.  $E_1 \times \Omega_2$ ) où  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ) est un domaine de mesure  $\beta$ , presque<sup>11</sup> isopérimétrique sur  $E_1$  (resp.  $E_2$ ), nous obtenons la

10. Nous utilisons ici les notations du paragraphe 3.2.2.

11. Dans le cadre des mm-espaces, nous ne pouvons plus affirmer que des domaines isopérimétriques existent. Le "presque isopérimétrique" signifie ici "dont le volume du bord est arbitrairement proche de la valeur du profil pour le volume intérieur considéré".

majoration

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad h_{(E_1 \times E_2, \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \mu_1 \otimes \mu_2)}(\beta) \leq \min \left( h_{(E_1, d_1, \mu_1)}(\beta), h_{(E_2, d_2, \mu_2)}(\beta) \right). \quad (3.8)$$

Dans ce paragraphe, le profil gaussien joue un rôle fondamental lié à ses propriétés différentielles, à sa stabilité par produit et au lien étroit qui l'unit aux profils des sphères euclidiennes.

### Propriétés du profil gaussien

Le profil gaussien  $h_\gamma$ , donné par la relation (3.3), est de classe  $C^\infty$  sur  $]0,1[$ , vaut 0 en 0, 1 en  $\frac{1}{2}$ , et vérifie l'équation différentielle

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad h_\gamma(\beta) h_\gamma''(\beta) = -2\pi \quad (3.9)$$

Son comportement asymptotique au voisinage de 0 est donné par l'équivalent

$$h_\gamma(\beta) \underset{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}}{\sim} \beta \sqrt{-4\pi \log \beta}. \quad (3.10)$$

qui illustre la non intégrabilité de l'inverse du profil gaussien au voisinage de 0 et de 1. Cette particularité est à rapprocher de la non compacité de  $(\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma)$  (voir les remarques 1.7.3).

**Définition 3.2.2** *Appellons constante isopérimétrique gaussienne du mm-espace  $(E, d, \mu)$ , la constante définie par*

$$h_G(E, d, \mu) := \inf \left\{ \frac{h_{(E, d, \mu)}(\beta)}{h_\gamma(\beta)} \mid \beta \in ]0,1[ \right\}.$$

Remarquons que, dans le cas où  $(E, d, \mu)$  est une variété riemannienne fermée, cet infimum est strictement positif compte tenu de la continuité des fonctions  $h_{(M, g)}$  et  $h_\gamma$  et de leurs comportements asymptotiques respectifs au voisinage de 0 (voir les équivalents (1.12) et (3.10)).

Notons  $\gamma_n$  la mesure gaussienne  $d\gamma_n(x) := e^{-\pi \|x\|_2^2} dx$  sur l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  et  $h_{\gamma_n}$  le profil isopérimétrique du mm-espace  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)$ . La propriété la plus remarquable du profil gaussien, qui joue un rôle déterminant dans la suite, concerne sa stabilité par produit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad h_{\gamma_n} = h_\gamma.$$

### Lien avec l'isopérimétrie sur les sphères

Notons, pour  $n \geq 1$ ,  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{S}^n(\frac{\pi}{\sqrt{\delta}})$  la sphère de diamètre  $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$  et, si  $n \geq 2$ , de courbure sectionnelle constante  $\delta$ , qui peut être vue dans  $(\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_2)$  comme le bord d'une boule de rayon  $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ . Soit  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite des diamètres des sphères euclidiennes de dimension  $n$  dont le profil vaut 1 en  $\frac{1}{2}$ . Explicitement, nous obtenons par homogénéité, à partir des profils décrits au paragraphe 1.1.1,  $d_1 = 1$  et pour tout  $n \geq 2$ ,

$$d_n = \frac{\pi}{\int_0^\pi (\sin u)^{n-1} du}.$$

Par exemple,  $d_2 = \frac{\pi}{2}$  et  $d_3 = 2$ .

Poincaré avait observé, au début du siècle précédent, que la mesure gaussienne  $\gamma_m$  sur  $\mathbb{R}^m$  pouvait être obtenue comme limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , des projections



de la mesure riemannienne probabilisée de  $\mathbb{S}^n(d_n)$  sur un sous-espace vectoriel fixé de dimension  $m$ . Cette remarque permet de démontrer que les demi-espaces sont les domaines isopérimétriques de  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2, \gamma_m)$  (voir l'excellent exposé proposé dans [Ro]). Ce lien entre l'isopérimétrie gaussienne et l'isopérimétrie des sphères est renforcé par l'étonnante propriété suivante, établie par F. Barthe dans la proposition 11 de [Ba1] et illustrée par la figure 3.2.

**Proposition 3.2.3** *Pour tout  $n \geq 2$ ,*

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad y_{\mathbb{S}^n(d_n)}(\beta) \leq y_{\mathbb{S}^{n+1}(d_{n+1})}(\beta) \leq h_\gamma(\beta) \leq h_{\mathbb{S}^{n+1}(d_{n+1})}(\beta) \leq h_{\mathbb{S}^n(d_n)}(\beta),$$

avec comme uniques cas d'égalité  $\beta = 0$  ,  $\beta = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 1$ .

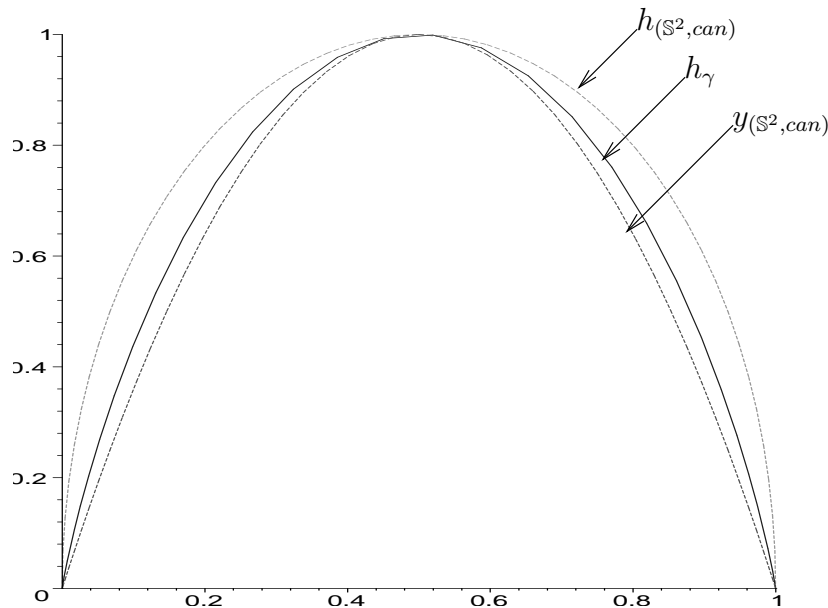


FIG. 3.2 – Pincement du profil gaussien par les profils de sphères.

Cette propriété de convergence des profils des sphères  $\mathbb{S}^n(d_n)$  vers le profil gaussien permet d'établir la propriété de concavité (3.9) du profil gaussien comme une conséquence des propriétés de concavité des profils des sphères. En effet, nous savons, depuis le paragraphe 2.2.1 du chapitre 2, que, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ , d'une part la fonction  $y_{\mathbb{S}^n(d_n)}$  est solution de l'équation différentielle (2.9)

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad y_{\mathbb{S}^n(d_n)}''(\beta) = -\frac{n\pi^2}{d_n^2} y_{\mathbb{S}^n(d_n)}(\beta)^{\frac{2-n}{n}}, \quad (3.11)$$

et d'autre part, la fonction  $h_{\mathbb{S}^n(d_n)}$  est solution de l'équation différentielle (2.14)

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad h_{\mathbb{S}^n(d_n)}(\beta)^{\frac{n+1}{n-1}} h_{\mathbb{S}^n(d_n)}''(\beta) = -(n-1) \left( \int_0^\pi \sin u^{n-1} du \right)^{\frac{2(n+1)}{n-1}}. \quad (3.12)$$

Après avoir déduit de la proposition 3.2.3 la monotonie des suites  $(h_{\mathbb{S}^n(d_n)})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_{\mathbb{S}^n(d_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , nous observons que la convergence simple de ces suites vers  $h_\gamma$  devient une convergence uniforme d'après le théorème de Dini. Ainsi, nous pouvons appliquer le lemme B.3.11 aux deux suites d'équations différentielles précédentes, (3.12) et (3.11), en utilisant

1. la convergence uniforme, sur tout compact de  $]0,1[$ , du rapport  $h_{\mathbb{S}^n(d_n)}/h_\gamma$  vers 1,

2. la convergence uniforme, sur tout compact de  $]0,1[$ , du rapport  $y_{\mathbb{S}^n(d_n)}/h_\gamma$  vers 1,
3. l'équivalent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-1} du \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}},$$

qui donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi^2}{d_n^2} = 2\pi$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) \left( \int_0^\pi \sin u^{n-1} du \right)^{\frac{2(n+1)}{n-1}} = 2\pi.$$

Nous observons alors que les deux suites d'équations différentielles, indicées par la dimension des sphères impliquées, donnent la même relation différentielle vérifiée par le profil gaussien :

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad h_\gamma(\beta)h_\gamma''(\beta) = -2\pi,$$

ce qui, d'une certaine manière, permet d'affirmer que les propriétés différentielles de concavité du profil gaussien sont un héritage des propriétés différentielles de concavité des profils des sphères.

### Minoration du profil d'un produit de mm-espaces

Nous citons ici un résultat obtenu analytiquement par F. Barthe dans [Ba2], par F. Barthe et B. Maurey dans [BaMa] et dont A. Ros propose dans [Ro] une preuve géométrique basée sur une adaptation de la technique de symétrisation d'une part et sur la stabilité du profil gaussien par produit d'autre part.

**Théorème 3.2.4** *Soient  $(E_1, d_1, \mu_1)$  et  $(E_2, d_2, \mu_2)$  deux espaces métriques mesurés tels que*

$$h_{(E_1, d_1, \mu_1)} \geq h_\gamma \quad \text{et} \quad h_{(E_2, d_2, \mu_2)} \geq h_\gamma. \quad (3.13)$$

*Alors, en notant  $(E, d, \mu)$  l'espace produit,*

$$h_{(E, d, \mu)} \geq h_\gamma.$$

*Par conséquent, si  $\Omega$  est un domaine isopérimétrique de  $E_1$  de mesure  $\beta$  pour lequel  $h_{(E_1, d_1, \mu_1)}(\beta) = h_\gamma(\beta)$ , alors  $\Omega \times E_2$  est un domaine isopérimétrique de  $(E, d, \mu)$ .*

La comparaison entre le profil gaussien et celui de  $\mathbb{S}^1(1)$ , illustrée par la figure 3.1 permet, en appliquant le théorème 3.2.4 d'obtenir la comparaison entre le profil gaussien et le profil du tore plat  $\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1)$ , reflétée par la figure 3.3.

### Application à la détermination des constantes isopérimétriques de Cheeger des produits de sphères

Les comparaisons fournies par la proposition 3.2.3 nous permettent d'appliquer le théorème de comparaison 3.2.4 lorsque nous considérons le produit de deux sphères euclidiennes,  $\mathbb{S}^{n_1}(\lambda_1 d_{n_1})$  et  $\mathbb{S}^{n_2}(\lambda_2 d_{n_2})$  ( $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ ). En effet, la propriété d'homogénéité des profils et la proposition 3.2.3 donnent

$$h_{\mathbb{S}^{n_1}(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} d_{n_1})} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} h_{\mathbb{S}^{n_1}(d_{n_1})} \geq h_\gamma \quad \text{et} \quad h_{\mathbb{S}^{n_2}(d_{n_2})} \geq h_\gamma,$$

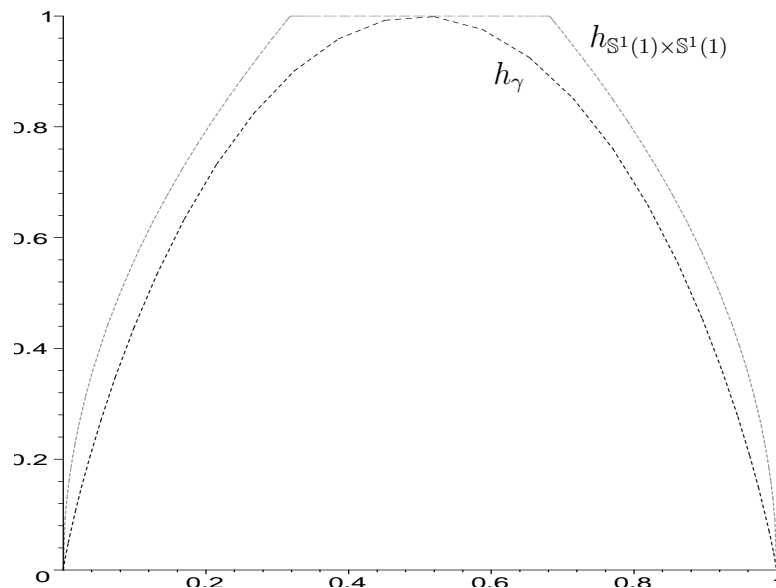


FIG. 3.3 – Minoration du profil isopérimétrique du tore plat  $\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1)$  par le profil gaussien.

d'où, en appliquant le théorème 3.2.4,

$$h_{\mathbb{S}^{n_1}(\lambda_1 d_{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\lambda_2 d_{n_2})} = \frac{1}{\lambda_2} h_{\mathbb{S}^{n_1}(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} d_{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(d_{n_2})} \geq \frac{1}{\lambda_2} h_\gamma. \quad (3.14)$$

De plus, la majoration (3.8) montre que la minoration (3.14) est une égalité en  $\frac{1}{2}$  car l'inégalité  $h_{\mathbb{S}^{n_2}(d_{n_2})} \geq h_\gamma$  est une égalité en  $\frac{1}{2}$ . L'optimalité de la comparaison en  $\frac{1}{2}$  et la concavité du profil gaussien nous autorisent alors à calculer explicitement les constantes isopérimétriques du produit :

$$h_C(\mathbb{S}^{n_1}(\lambda_1 d_{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\lambda_2 d_{n_2})) = \frac{2}{\lambda_2}$$

et

$$h_G(\mathbb{S}^{n_1}(\lambda_1 d_{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\lambda_2 d_{n_2})) = \frac{1}{\lambda_2}.$$

Notons enfin que le théorème 3.2.4 précise qu'un domaine isopérimétrique de mesure  $\frac{1}{2}$  est obtenu en faisant le produit de  $\mathbb{S}^{n_1}(\lambda_1 d_{n_1})$  par un hémisphère de  $\mathbb{S}^{n_2}(\lambda_2 d_{n_2})$ . Nous donnons ci-dessous la généralisation de ce résultat à un produit fini de sphères euclidiennes.

**Proposition 3.2.5** *La constante isopérimétrique de Cheeger de la variété obtenue en faisant le produit des  $p$  sphères  $(\mathbb{S}^{n_i}(\lambda_i d_{n_i}))_{1 \leq i \leq p}$  où  $\lambda_i > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq p$ , est*

$$h_C(\mathbb{S}^{n_1}(\lambda_1 d_{n_1}) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_p}(\lambda_p d_{n_p})) = 2h_G(\mathbb{S}^{n_1}(\lambda_1 d_{n_1}) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_p}(\lambda_p d_{n_p})) = \frac{2}{\max_{1 \leq i \leq p} \{\lambda_i\}},$$

où  $\mathbb{S}^{n_i}(\lambda_i d_{n_i})$  est la sphère euclidienne de dimension  $n_i \geq 1$ , de diamètre  $\lambda_i d_{n_i}$  et, si  $n_i \geq 2$ , de courbure sectionnelle constante  $\frac{\pi^2}{\lambda_i^2 d_{n_i}^2}$ .

**Remarque 3.2.6** A. Ros propose dans [Ro] d'illustrer l'intérêt des comparaisons avec le profil gaussien en comparant différentes minoration du trou spectral pour le tore plat

$\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1(1) \times \dots \times \mathbb{S}^1(1)$  dont nous savons, d'après la proposition 3.2.5, que  $h_C(\mathbb{T}^n) = 2$  et  $h_G(\mathbb{T}^n) = 1$ . La minoration établie par J. Cheeger dans [C], qui peut s'obtenir à partir de l'inégalité  $h_{\mathbb{T}^n} \geq 2h_\nu$  d'après le paragraphe 3.2.1, est

$$\lambda_1(\mathbb{T}^n) \geq \frac{h_C(\mathbb{T}^n)^2}{4} = 1,$$

tandis que celle fournie par le théorème 2.5.1, après comparaison avec une boule euclidienne à partir de l'inégalité  $h_{\mathbb{T}^n} \geq \frac{h_C(\mathbb{T}^n)}{2^{\frac{1}{n}}} \min(\beta, 1 - \beta)^{\frac{n-1}{n}}$ , donne

$$\lambda_1(\mathbb{T}^n) \geq j_{0,1}^2 \frac{h_C(\mathbb{T}^n)^2}{4} \simeq 5,784.$$

L'inégalité issue de la comparaison avec le profil gaussien,  $h_{\mathbb{T}^n} \geq h_\gamma$ , conduit, d'après la remarque 3.2.1 à

$$\lambda_1(\mathbb{T}^n) \geq 2\pi \simeq 6,283.$$

Sachant que la vraie valeur est  $\pi^2$ , aucune de ces estimations n'est optimale. Cependant, la hiérarchie dans ces comparaisons n'est pas claire. En effet, certes il est aisé de vérifier que la minoration par  $h_\nu$  est la plus mauvaise :

$$\frac{\min(\beta, 1 - \beta)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}} \geq 2h_\nu \quad \text{et} \quad h_\gamma \geq 2h_\nu.$$

Cependant, les deux autres profils modèles sont difficiles à départager : le profil modelé selon l'espace euclidien de dimension  $n$  est meilleur que le profil gaussien pour les petits volumes, mais moins intéressant au voisinage de  $\frac{1}{2}$ .

Décrivons une autre application du théorème 3.2.4 en considérant  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée. Par homogénéité, pour tout  $\lambda$  dans  $]0, 1]$ ,

$$h_{(M, \lambda^2 h_G(M, g)^2 g)} = \frac{1}{\lambda h_G(M, g)} h_{(M, g)} \geq \frac{1}{\lambda} h_\gamma \geq h_\gamma.$$

Par conséquent, pour tout entier  $n \geq 1$ , en appliquant le théorème 3.2.4 et en utilisant la majoration (3.8), nous obtenons l'inégalité

$$h_{\mathbb{S}^n(d_n) \times (M, \lambda^2 h_G(M, g)^2 g)} \geq h_\gamma,$$

qui est une égalité en  $\frac{1}{2}$ , ce qui permet d'obtenir

$$h_C(\mathbb{S}^n(d_n) \times (M, \lambda^2 h_G(M, g)^2 g)) = h_C(\mathbb{S}^n(d_n)) = 2$$

et

$$h_G(\mathbb{S}^n(d_n) \times (M, \lambda^2 h_G(M, g)^2 g)) = h_G(\mathbb{S}^n(d_n)) = 1.$$

Ainsi, nous connaissons la constante isopérimétrique gaussienne et la constante isopérimétrique de Cheeger pour tous les produits  $\mathbb{S}^n(d_n) \times (M, \lambda^2 h_G(M, g)^2 g)$  lorsque  $\lambda \in ]0, 1]$ . Une question intéressante consiste à préciser la valeur de ces constantes lorsque  $\lambda > 1$ . En fait, pour  $\lambda \geq 1$ , par homogénéité,

$$h_{(\mathbb{S}^n(\frac{d_n}{\lambda}))} = \lambda h_{(\mathbb{S}^n(d_n))} \geq h_\gamma.$$

De plus, par définition de la constante isopérimétrique gaussienne,

$$h_{(M, h_G(M, g)^2 g)} = \frac{1}{h_G(M, g)} h_{(M, g)} \geq h_\gamma \tag{3.15}$$

et il existe au moins une valeur  $\beta_0$  dans  $]0, \frac{1}{2}]$  pour laquelle il s'agit d'une égalité. Ainsi en appliquant le théorème 3.2.4,

$$h_{\left(\mathbb{S}^n(d_n) \times (M, \lambda^2 h_G(M, g)^2 g)\right)} = \frac{1}{\lambda} h_{\left(\mathbb{S}^n\left(\frac{d_n}{\lambda}\right) \times (M, h_G(M, g)^2 g)\right)} \geq \frac{1}{\lambda} h_\gamma. \quad (3.16)$$

Compte tenu de la majoration (3.8), nous observons que cette minoration est une égalité en tout point où (3.15) est une égalité. Nous en déduisons qu'elle est optimale, d'où

$$\begin{aligned} h_G\left(\mathbb{S}^n(d_n) \times (M, \lambda^2 h_G(M, g)^2 g)\right) &= \frac{1}{\lambda} h_G\left(\mathbb{S}^n\left(\frac{d_n}{\lambda}\right) \times (M, h_G(M, g)^2 g)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

En revanche, pour calculer exactement la constante isopérimétrique de Cheeger à partir de (3.16), il faudrait savoir qu'il s'agit d'une égalité en  $\frac{1}{2}$  (ce qui est vrai lorsque  $(M, g)$  est une sphère euclidienne). Néanmoins, une minoration est accessible :

$$\begin{aligned} h_G\left(\mathbb{S}^n(d_n) \times (M, \lambda^2 h_G(M, g)^2 g)\right) &= \frac{1}{\lambda} h_C\left(\mathbb{S}^n\left(\frac{d_n}{\lambda}\right) \times (M, h_G(M, g)^2 g)\right) \\ &\geq \frac{2}{\lambda}, \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de la majoration (3.8), pour tout  $\lambda \geq 1$ ,

$$\frac{2}{\lambda} \leq h_C\left(\mathbb{S}^n(d_n) \times (M, \lambda^2 h_G(M, g)^2 g)\right) \leq \min\left(2, \frac{h_C(M, g)}{\lambda h_G(M, g)}\right).$$

### Remarques 3.2.7

- La technique qui permet de calculer les constantes de Cheeger des produits de sphères euclidiennes se généralise à toutes les variétés dont le profil est minoré par le profil gaussien avec égalité en  $\frac{1}{2}$ , cette dernière condition correspondant à la relation

$$2h_G(E, d, \mu) = h_C(E, d, \mu).$$

- Si nous considérons le produit canonique de  $p$  copies du même espace métrique mesuré  $(E, d, \mu)$  (resp. de la même variété riemannienne fermée  $(M, g)$ ), noté  $(E_p, d_p, \mu_p)$  (resp.  $(M_p, g_p)$ ), le théorème 3.2.4 et la majoration (3.8) permettent d'établir le pincement suivant<sup>12</sup> :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad , \quad 2h_G(E, d, \mu) \leq h_C(E_p, d_p, \mu_p) \leq h_C(E, d, \mu). \quad (3.17)$$

Ce résultat doit être rapproché du théorème suivant, établi par S. Bobkov et C. Houdré dans le théorème 1.1 de [BH2], en utilisant des méthodes analytiques.

**Théorème 3.2.8** *Pour toute variété riemannienne fermée  $(M, g)$ ,*

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \frac{h_C(M, g)}{2\sqrt{6}} \leq h_C(M_p, g_p) \leq h_C(M, g). \quad (3.18)$$

---

12. Nous avons distingué le cas d'un produit de variétés de celui, plus général d'un produit de mm-espaces afin de distinguer les pincements (3.17) et (3.18). En effet bien que le théorème 3.2.8 de S. Bobkov et C. Houdré puisse être généralisé aux mm-espaces, il faut alors imposer des hypothèses supplémentaires qui sont automatiquement satisfaites si nous considérons des variétés.

Il ne semble pas évident de décider, lequel de ces deux pincements est le “meilleur” en toute généralité. Toutefois, il convient d’observer, à la lumière de la proposition 3.2.5, que lorsque  $(E, d, \mu)$  est une sphère euclidienne, les trois termes de l’encadrement (3.17) sont égaux. Enfin, ces pincements sont particulièrement intéressants dans la mesure où, en appliquant la minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger donnée par S. Gallot (voir le théorème 1.4.4), nous obtenons, si  $\text{Ricci}_{(M,g)} \geq 0$ , l’inégalité

$$h_C(M_p, g_p) \geq \frac{2}{\text{diam}(M_p, g_p)} = \frac{2}{\sqrt{p} \text{diam}(M, g)}$$

dont le second membre tend vers 0 lorsque  $p$  augmente, ce qui ne reflète pas du tout le comportement de la suite  $(h_C(M_p, g_p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ .

### 3.2.3 Etude du profil d’un produit infini de sphères identiques

Définissons, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  la variété riemannienne  $(M_{n,p}, g_{n,p})$  comme le produit de  $p$  sphères euclidiennes identiques de dimension  $n$  et de diamètre  $d_n$ . Notons  $h_{n,p}$  le profil isopérimétrique de  $(M_{n,p}, g_{n,p})$  et  $y_{n,p} := h_{n,p}^{\frac{np}{np-1}}$  son profil renormalisé. La majoration (3.8) montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les suites de fonctions  $(h_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(y_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$  sont décroissantes et positives ou nulles. Par conséquent, il existe deux fonctions,  $h_{n,\infty}$  et  $y_{n,\infty}$ , telles que

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad h_{n,\infty}(\beta) := \lim_{p \rightarrow +\infty} h_{n,p}(\beta) \quad \text{et} \quad y_{n,\infty}(\beta) := \lim_{p \rightarrow +\infty} y_{n,p}(\beta).$$

Nous allons proposer deux approches différentes pour essayer d’étudier ces profils limites. La première repose sur le théorème 3.2.4 de F. Barthe et B. Maurey, tandis que la seconde essaie de comprendre comment les fonctions limites héritent des propriétés de concavité des profils des suites  $(h_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(y_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ . Cette dernière idée a déjà fait ses preuves lors de l’étude du profil gaussien. Nous avons en effet montré que l’équation différentielle et les conditions au bord qui le caractérisent, à savoir

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad h_\gamma(\beta) h_\gamma''(\beta) = -2\pi \quad , \quad h_\gamma(0) = h_\gamma(1) = 0,$$

peuvent être déduites de la convergence uniforme de la suite  $(y_{(S^n(d_n))})_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $h_\gamma$ .

#### Utilisation de la stabilité du profil gaussien par produit

Le théorème 3.2.4 et le résultat de la proposition 3.2.5 montrent que

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad , \quad h_{n,p} \geq h_\gamma \quad \text{et} \quad h_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

d’où, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$h_{n,\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \forall \beta \in [0,1] \quad , \quad h_{n,\infty}(\beta) \geq h_\gamma(\beta).$$

Par conséquent, les deux limites  $y_{n,\infty}$  et  $h_{n,\infty}$  sont égales et leur minoration par  $h_\gamma$  est une égalité en  $\frac{1}{2}$ . Ce résultat nous amène par ailleurs à formuler la question suivante :

**Question 3.2.9** *Se pourrait-il que les fonctions limites  $(h_{n,\infty})_{n \in \mathbb{N}}$  coïncident avec  $h_\gamma$  ?*

### Utilisation des propriétés de concavité des produits de sphères

Optons maintenant pour un point de vue axé sur les propriétés différentielles des profils mis en jeu en faisant appel aux résultats établis dans le chapitre 2. Sachant que la courbure de Ricci des variétés  $(M_{n,p}, g_{n,p})$  satisfait

$$\text{Ricci}_{(M_{n,p}, g_{n,p})} \geq (np - 1) \frac{(n-1)\pi^2}{(np-1)d_n^2} g_{n,p},$$

nous disposons de la propriété de concavité suivante pour les profils renormalisés  $y_{n,p}$  (voir le théorème 2.2.1) :

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad \overline{D^2} y_{n,p}(\beta) \leq -np \frac{(n-1)\pi^2}{(np-1)d_n^2} y_{n,p}(\beta)^{\frac{2-np}{np}}. \quad (3.19)$$

Toutes ces inéquations différentielles permettent de conclure, a minima, à la concavité des fonctions  $(y_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$  et par conséquent à la concavité des fonctions  $(y_{n,\infty})_{n \in \mathbb{N}}$ , puisque la concavité est conservée par limite simple. Ainsi, comme toutes ces fonctions sont de plus symétriques par rapport à la droite verticale d'équation  $\beta = \frac{1}{2}$ , si  $y_{n,\infty}(\frac{1}{2}) = 0$ , alors  $y_{n,\infty}$  est identiquement nulle (voir le lemme B.1.3), et si  $y_{n,\infty}(\frac{1}{2}) > 0$ , alors  $y_{n,\infty}$  est strictement positive sur  $]0,1[$  (voir le lemme B.1.6). Nous savons, d'après la proposition 3.2.5, que le premier cas ne se produit pas, mais faire appel à ce résultat rend le raisonnement proposé ici dépendant du précédent. Une autre justification de cela consiste à utiliser le théorème 3.2.8, établi par S. Bobkov et C. Houdré dans [BH2] et rappelé dans les remarques 3.2.7. Nous pouvons, comme précédemment en déduire d'une part que  $y_{n,\infty} = h_{n,\infty}$  et d'autre part les suites décroissantes  $h_{n,p}/h_{n,\infty}$  et  $y_{n,p}/h_{n,\infty}$ , qui convergent de façon monotone vers la fonction constante (donc continue) égale à 1 sur  $]0,1[$ , convergent uniformément sur tout compact inclus dans  $]0,1[$  (application du lemme de Dini). Le lemme B.3.11 nous autorise alors à passer à la limite dans la suite d'inéquations différentielles (3.19) indicées par  $p$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 1$ , la limite  $h_{n,\infty}$  satisfait la relation différentielle

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad h_{n,\infty}(\beta) h''_{n,\infty}(\beta) \leq -\frac{(n-1)\pi^2}{d_n^2}. \quad (3.20)$$

Dans le cas particulier où  $n = 1$ , cette relation différentielle exprime uniquement la concavité du profil limite. En revanche, lorsque  $n \geq 2$ , le second membre est non trivial. Nous allons par conséquent essayer de minorer le profil limite à partir des résultats de comparaison analytiques sur les solutions d'inéquations différentielles.

### Construction de solutions de l'équation différentielle $y''y = -c$ ( $c > 0$ )

Nous allons nous inspirer de la définition du profil gaussien et de la construction des profils modèles proposée à l'occasion du paragraphe 2.4.1 afin de paramétrer des familles de solutions des équations différentielles associées aux inéquations différentielles du type (3.20).

Pour tout  $c > 0$ , définissons la fonction  $h_c : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  par  $h_c(0) = h_c(1) = 0$  et la relation implicite

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad h_c \left( \frac{\int_{-\infty}^x e^{-cu^2} du}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cu^2} du} \right) = \frac{e^{-cx^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cu^2} du}.$$

**Proposition 3.2.10** *La famille  $(h_c)_{c \in \mathbb{R}_+^*}$  est constituée de fonctions continues, de classe  $C^\infty$  sur  $]0,1[$ , qui satisfont la propriété de symétrie*

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad h_c(\beta) = h_c(1 - \beta)$$

*et qui sont solutions des équations différentielles*

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad h_c''(\beta)h_c(\beta) = -2c.$$

*En particulier, les fonctions  $(h_c)_{c \in \mathbb{R}_+^*}$  sont concaves sur  $[0,1]$  et*

$$\forall c \in \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \sup_{\beta \in [0,1]} h_c(\beta) = h_c\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cu^2} du} = \sqrt{\frac{c}{\pi}}.$$

*De plus, si  $c' > c > 0$ , alors*

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad h_{c'}(\beta) > h_c(\beta).$$

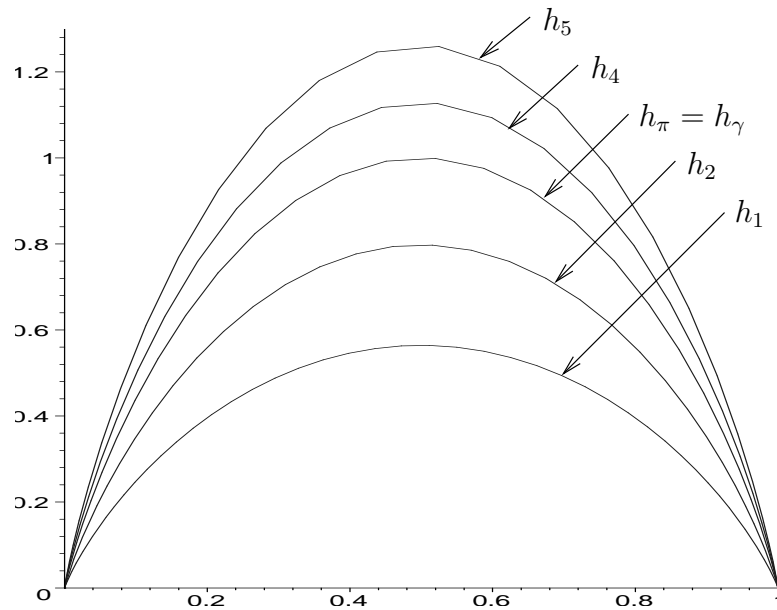


FIG. 3.4 – Graphes des fonctions  $h_c$  pour  $c = 1$ ,  $c = 2$ ,  $c = \pi$ ,  $c = 4$  et  $c = 5$ .

Pour tout  $c > 0$ , pour tout  $s \geq 0$ , définissons la fonction  $h_{c,s}$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$  par  $h_{c,s}(0) = 0$  et

$$\forall x \in [s, +\infty[ \quad , \quad h_{c,s}\left(\frac{\int_x^{+\infty} e^{-cu^2} du}{2 \int_s^{+\infty} e^{-cu^2} du}\right) = \frac{e^{-cx^2}}{2 \int_s^{+\infty} e^{-cu^2} du},$$

puis prolongeons-la à  $[0,1]$  par symétrie (c'est-à-dire en posant  $h_{c,s}(\beta) = h_{c,s}(1 - \beta)$  pour tout  $\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$ ).

Pour tout  $c > 0$ , pour tout  $s \geq 0$ , les fonctions  $(h_{c,s})_{\substack{c > 0 \\ s \geq 0}}$  vérifient la relation différentielle

$$\forall \beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[ \quad , \quad h_{c,s}''(\beta)h_{c,s}(\beta) = -2c$$

et l'égalité

$$\sup_{\beta \in [0,1]} h_{c,s}(\beta) = h_{c,s}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-cs^2}}{2 \int_s^{+\infty} e^{-cu^2} du}.$$



L'étude des variations de la fonction

$$s \mapsto \frac{e^{-cs^2}}{2 \int_s^{+\infty} e^{-cu^2} du}$$

montre qu'il s'agit d'une bijection croissante de  $[0, +\infty[$  dans  $[\sqrt{\frac{c}{\pi}}, +\infty[$ . Ainsi, pour tout  $c > 0$  et  $t \geq \sqrt{\frac{c}{\pi}}$  nous pouvons définir  $s(c, t)$  comme l'unique solution de l'équation d'inconnue  $s$

$$t = \frac{e^{-cs^2}}{2 \int_s^{+\infty} e^{-cu^2} du}.$$

L'interprétation que nous faisons de cette notation est que la fonction  $h_{c,s(c,t)}$  est la solution de l'équation différentielle

$$\forall \beta \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[ \quad , \quad h''_{c,s}(\beta) h_{c,s}(\beta) = -2c$$

qui vaut 0 en 0 et  $t$  et  $\frac{1}{2}$ .

Il est possible de préciser le comportement asymptotique des fonctions  $h_{c,s}$  au voisinage de 0 :

$$h_{c,s}(\beta) \underset{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}}{\sim} \beta \sqrt{-4c \log \beta}. \quad (3.21)$$

Cette relation généralise l'équivalent (3.10) donné pour le profil gaussien (cas où  $c = \pi$ ) et il est intéressant d'observer l'indépendance en  $s$ , au premier ordre du développement asymptotique.

**Remarque 3.2.11** Au cours du paragraphe 2.4.1 du chapitre 2, nous avons défini des “profils modèles”, certes inspirés par les profils isopérimétriques des espaces simplement connexes de courbure sectionnelle constante, mais qui n'étaient les profils isopérimétriques d'aucune variété, ni régulière, ni singulière. Ici, nous avons reproduit le même genre de manipulation : à partir des fonctions  $(h_c)_{c>0}$  qui sont les profils isopérimétriques des mm-espaces  $(\mathbb{R}, |\cdot|, \sqrt{\frac{c}{\pi}} \exp(-cv^2) dv)$ , nous construisons des fonctions  $(h_{c,s})_{s>0}$  dont l'intérêt analytique réside dans le fait qu'elles vérifient la même équation différentielle que  $h_c$  et qu'elles décrivent de nombreuses conditions de bord lorsque le paramètre  $s$  varie. Il convient par conséquent de savoir si ces fonctions, naturellement introduites comme les fonctions de référence pour des comparaisons analytiques à partir des inéquations différentielles étudiées, ont une réalité géométrique. La proposition 3.1.3 répond positivement à cette question, les fonctions  $(h_{c,s})_{\substack{c>0 \\ s>0}}$  sont les profils isopérimétriques des espaces unidimensionnels

$$\left( \mathbb{R}, |\cdot|, \frac{e^{-c \max(|s-u|, s+u)} du}{2 \int_s^{+\infty} e^{-cu^2} du} \right)_{\substack{c>0 \\ s>0}}.$$

**Minoration du profil limite  $h_{n,\infty}$  par comparaison avec les “profils modèles”**

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{(n-1)\pi^2}{d_n^2} = 2c_n$ . Nous observons d'une part que la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante, et d'autre part qu'elle tend vers  $\pi$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . La décroissance vient de la relation de récurrence sur les intégrales de Wallis :  $c_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-1} du$  et un raisonnement par récurrence à partir de la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad c_{n+2} = \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} c_n$$

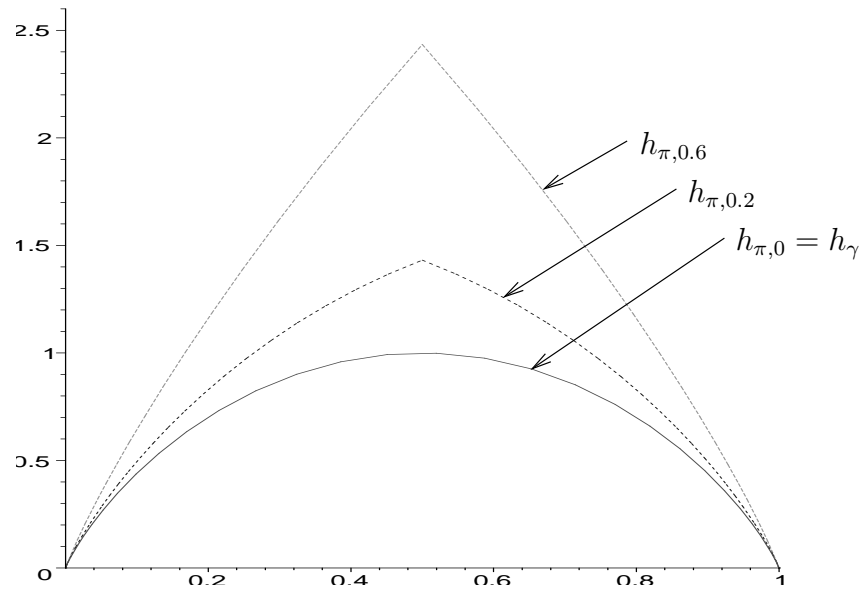


FIG. 3.5 – Graphes des fonctions  $h_{c,s}$  pour  $c = \pi$ ,  $s = 0$ ,  $s = 0,2$  et  $s = 0,6$ .

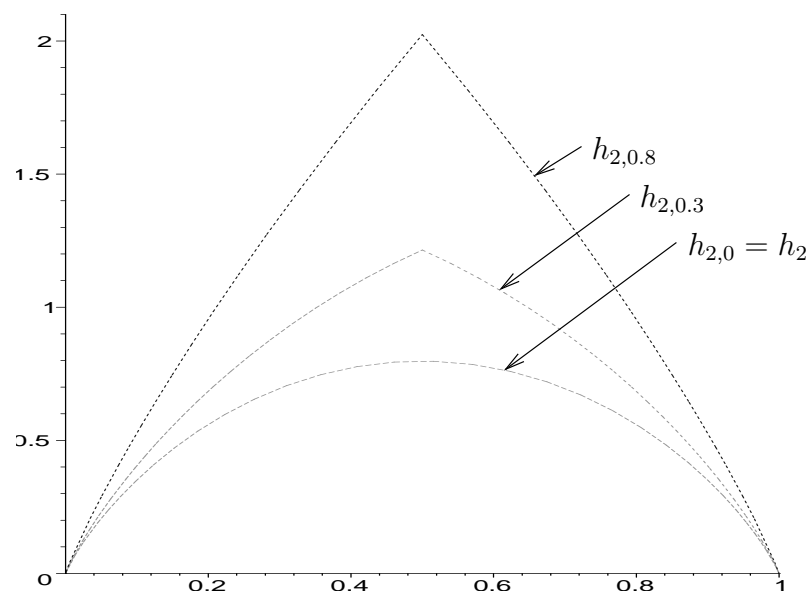


FIG. 3.6 – Graphes des fonctions  $h_{c,s}$  pour  $c = 2$ ,  $s = 0$ ,  $s = 0,3$  et  $s = 0,8$ .

permet de démontrer la monotonie

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad c_n \leq c_{n+1}.$$

La limite de la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $+\infty$  se calcule quant à elle à partir de l'équivalent du terme général dans les intégrales de Wallis qui donne un équivalent de  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Ceci nous permet d'utiliser le théorème de comparaison C.2.2, établi dans l'annexe C lorsque  $n \geq 2$ . Appliquons-le tout d'abord pour  $a = 1$ ,  $g(x) = -\frac{2c_n}{x}$ ,  $f = h_{n,\infty}$  et  $y_- = h_{c_n}$  pour obtenir

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad h_{n,\infty}(\beta) \geq h_{c_n}(\beta).$$

Cependant, comme  $c_n < \pi$ , cette minoration n'est pas optimale en  $\frac{1}{2}$ , point pour lequel nous connaissons la valeur de  $h_{n,\infty}$ . Ainsi, nous pouvons affiner la comparaison précédente en appliquant une seconde fois le théorème C.2.2 pour  $a = \frac{1}{2}$ ,  $g(x) = -\frac{2c_n}{x}$ ,  $f = h_{n,\infty}$  et  $y_- = h_{c_n, s(c_n, 1)}$ , ce qui donne

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad h_{n,\infty}(\beta) \geq h_{c_n, s(c_n, 1)}(\beta).$$

### Comparaison des deux approches

Indiscutablement, la minoration issue du théorème de comparaison, qui repose sur la stabilité du profil gaussien par produit, donne des minorations meilleures que celles obtenues par intégration des inéquations différentielles satisfaites par les limites. Plus précisément, nous observons que le minorant proposé dans la seconde approche tend vers celui fourni par la première lorsque la dimension des sphères considérées tend vers  $+\infty$ .

## 3.3 Symétrisation des produits tordus

Voir l'article proposé dans l'annexe F.

## 3.4 Concavité du profil des variétés à densité

Le but de ce paragraphe est de généraliser au cadre des variétés fermées à densité l'étude du profil isopérimétrique associé à une variété fermée, menée au chapitre 2 à partir de ses propriétés différentielles. Par conséquent, nous considérons désormais une variété riemannienne à densité et, en reprenant une étude détaillée de son profil, nous cherchons à comprendre les influences respectives de la métrique riemannienne et de la mesure non riemannienne sur ses propriétés de concavité.

### 3.4.1 Notations

Nous considérons, dans la suite de ce chapitre, une variété riemannienne fermée  $(M, g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) et une fonction  $\psi$  à valeurs réelles, de classe  $C^2$  sur  $M$ .  $(M, g, \psi)$  représente l'espace métrique mesuré obtenu en considérant la variété  $M$  munie de la distance riemannienne et de la mesure

$$d\nu_{g, \psi}(p) := \Psi(p) d\nu_g(p) \tag{3.22}$$

dont  $\Psi := \exp(\psi)$  est la densité strictement positive par rapport à la mesure riemannienne canonique  $d\nu_g$ . Nous désignons par  $\text{vol}(M, g, \psi)$  la mesure de  $M$  pour la nouvelle densité,

$$\text{vol}(M, g, \psi) := \nu_{g, \psi}(M),$$

nous notons aussi

$$m_\psi := \inf_{p \in M} e^{\psi(p)}$$

et

$$M_\psi := \sup_{p \in M} e^{\psi(p)}.$$

Rappelons que le Hessien de la fonction  $\psi$  au point  $p$  est la forme bilinéaire symétrique définie sur  $T_p M$  par

$$\text{Hess}_p \psi(X, Y) = D_X d_p \psi(Y) - d_p \psi(D_X Y)$$

où  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteur réguliers et où  $D$  désigne la connexion de Levi-Civita sur  $(M, g)$ . Sa trace est reliée à l'opérateur Laplacien :

$$\text{tr}(\text{Hess}_p \psi) = -\Delta \psi(p).$$

Par ailleurs, si  $s \mapsto \gamma(s)$  est une géodésique paramétrée par la longueur d'arc telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = u \in T_p M$ , alors

$$\left( \frac{d}{ds} \psi(\gamma(s)) \right)_{s=0} = d_p \psi(u) = g_p(\nabla_p \psi, u) \quad \text{et} \quad \left( \frac{d^2}{ds^2} \psi(\gamma(s)) \right)_{s=0} = \text{Hess}_p \psi(u, u).$$

Observons que la régularité  $C^2$  du logarithme  $\psi$  de la densité  $\Psi$  permet d'écrire les développements limités suivants le long de  $\gamma$  (développement de Taylor-Young) :

$$\psi(\gamma(s)) = \psi(p) + s d_p \psi(u) + \frac{s^2}{2} \text{Hess}_p \psi(u, u) + o(s^2), \quad (3.23)$$

soit

$$\Psi(\gamma(s)) = e^{\psi(p)} \left[ 1 + s d_p \psi(u) + \frac{s^2}{2} \left( d_p \psi(u)^2 + \text{Hess}_p \psi(u, u) \right) \right] + o(s^2). \quad (3.24)$$

### 3.4.2 Le problème isopérimétrique généralisé

Reformulons la définition 3.1.1 du profil isopérimétrique de l'espace métrique mesuré  $(M, g, \psi)$  (voir aussi le paragraphe 3.1.3) :  $h_{(M, g, \psi)}(0) = h_{(M, g, \psi)}(1) = 0$  et pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ ,

$$h_{(M, g, \psi)}(\beta) = \inf \left\{ \frac{\nu_{g, \psi}^+(\Omega)}{\text{vol}(M, g, \psi)} / \Omega \subset M, \nu_{g, \psi}(\Omega) = \beta \text{vol}(M, g, \psi) \right\}$$

où  $\nu_{g, \psi}^+(\Omega)$  désigne le contenu extérieur de Minkowski de  $\Omega$  (voir le paragraphe 1.6), à savoir

$$\nu_{g, \psi}^+(\Omega) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu_{g, \psi}(\Omega_\varepsilon) - \nu_{g, \psi}(\Omega)}{\varepsilon}.$$

La structure différentielle dont nous disposons sur la variété  $M$  nous permet de relier ce choix de notion de volume de bord à la mesure riemannienne :

**Proposition 3.4.1** *Pour tout  $\Omega$ , ouvert de  $M$ , à bord suffisamment régulier,*

$$\nu_{g, \psi}^+(\Omega) = \int_{\partial \Omega} e^{\psi(m)} d\nu_{g|_{\partial \Omega}}(m). \quad (3.25)$$

**Remarque 3.4.2** Observons que pour tout  $a > 0$  et  $\psi \in C^2(M, \mathbb{R})$ ,

$$h_{(M,g,\psi+a)} = h_{(M,g,\psi)}$$

de sorte que nous pourrions faire un choix de normalisation des fonctions  $\psi$ , en supposant par exemple que

$$\min_{m \in M} \{\psi(m)\} = 0,$$

ce qui correspond à des choix de densités minorées par 1<sup>13</sup>. Cependant, afin de mieux visualiser les modifications liées à la densité non riemannienne, nous ne supposons aucune normalisation.

### 3.4.3 Premières estimations du profil isopérimétrique

Nous allons, dans un premier temps, tout simplement observer que les relations (3.22) et (3.25) permettent d'obtenir, pour tout ouvert à bord régulier  $\Omega \subset M$ ,

$$\begin{aligned} m_\psi \operatorname{vol}_n(\Omega) &\leq \nu_{g,\psi}(\Omega) \leq M_\psi \operatorname{vol}_n(\Omega), \\ m_\psi \operatorname{vol}_{n-1}(\partial\Omega) &\leq \nu_{g,\psi}^+(\partial\Omega) \leq M_\psi \operatorname{vol}_{n-1}(\partial\Omega), \end{aligned}$$

d'où, pour tout  $\beta$  dans  $]0,1[$ , la majoration

$$h_{(M,g,\psi)}(\beta) \leq C(M,g,\psi) \sup \left\{ h_{(M,g)}(\tilde{\beta}) \left| \frac{1}{C(M,g,\psi)} \leq \frac{\tilde{\beta}}{\beta} \leq \frac{1}{c(M,g,\psi)} \right. \right\} \quad (3.26)$$

et la minoration

$$h_{(M,g,\psi)}(\beta) \geq c(M,g,\psi) \inf \left\{ h_{(M,g)}(\tilde{\beta}) \left| \frac{1}{C(M,g,\psi)} \leq \frac{\tilde{\beta}}{\beta} \leq \frac{1}{c(M,g,\psi)} \right. \right\}, \quad (3.27)$$

où nous avons posé

$$c(M,g,\psi) = \frac{m_\psi \operatorname{vol}(M,g)}{\operatorname{vol}(M,g,\psi)} \leq 1 \quad \text{et} \quad C(M,g,\psi) = \frac{M_\psi \operatorname{vol}(M,g)}{\operatorname{vol}(M,g,\psi)} \geq 1.$$

En considérant les profils isopérimétriques renormalisés (c'est-à-dire les profils à la puissance  $\frac{n}{n-1}$ ) et en utilisant le caractère lipschitzien de  $y_{(M,g)}$  (voir le corollaire 2.3.4), ces inégalités deviennent respectivement pour tout  $\beta$  dans  $]0,1[$ ,

$$y_{(M,g,\psi)}(\beta) \leq C(M,g,\psi)^{\frac{n}{n-1}} \left( y_{(M,g)}(\beta) + \operatorname{Lip}(y_{(M,g)}) E(M,g,\psi) \beta \right) \quad (3.28)$$

et

$$y_{(M,g,\psi)}(\beta) \geq c(M,g,\psi)^{\frac{n}{n-1}} \left( y_{(M,g)}(\beta) - \operatorname{Lip}(y_{(M,g)}) E(M,g,\psi) \beta \right), \quad (3.29)$$

où nous avons posé

$$E(M,g,\psi) := \max \left( 1 - \frac{1}{C(M,g,\psi)}, \frac{1}{c(M,g,\psi)} - 1 \right).$$

Donnons quelques applications immédiates de ces estimations "grossières" :

- (i) la minoration (3.27) montre que le profil  $h_{(M,g,\psi)}$  est strictement positif sur  $]0,1[$  puisque le profil  $h_{(M,g)}$  est continu et strictement positif sur  $]0,1[$  (voir la proposition B.3.1);

---

<sup>13</sup>. Un autre choix de normalisation possible serait de supposer constant le volume de  $(M,g,\psi)$ , par exemple égal à 1.

- (ii) pour toute fonction  $\psi$  dans  $C^0(M, \mathbb{R})$ , si nous considérons la famille des profils associés aux densités  $(\varepsilon\psi)_{\varepsilon>0}$ , nous observons que la famille des fonctions définies sur  $]0,1[$ ,  $(\frac{h_{(M,g,\varepsilon\psi)}}{h_{(M,g)}})_{\varepsilon>0}$ , converge, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, vers la fonction constante égale à 1, uniformément sur  $]0,1[$ . Ceci résulte des inéquations (3.28) et (3.29), en observant que la quantité

$$\frac{\beta}{y_{(M,g)}(\beta)}$$

est uniformément majorée sur  $]0,1[$  (voir le théorème 1.4.4) et en utilisant les propriétés immédiates suivantes

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} C(M, g, \varepsilon\psi) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} c(M, g, \varepsilon\psi) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} E(M, g, \varepsilon\psi) = 0.$$

**Remarque 3.4.3** La propriété de continuité obtenue ci-dessus lorsque la densité tend vers 1 se généralise en une continuité du profil vis-à-vis de la convergence uniforme des densités : si  $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions de  $C^0(M, \mathbb{R})$  qui converge uniformément sur  $M$  vers une fonction  $\psi_\infty$  de  $C^0(M, \mathbb{R})$ , alors la suite de fonctions

$$\left( \frac{h_{(M,g,\psi_i)}}{h_{(M,g,\psi_\infty)}} \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

converge vers 1, uniformément sur tout compact de  $]0,1[$ . Ce résultat est une conséquence immédiate des estimations qui suivent. En effet, en posant

$$\varepsilon_i := \sup_{m \in M} |e^{\psi_i(m)} - e^{\psi_\infty(m)}|,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} |\nu_{g,\psi_\infty}(\Omega) - \nu_{g,\psi_i}(\Omega)| &\leq \varepsilon_i \text{vol}(\Omega) \leq \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}} \nu_{g,\psi_\infty}(\Omega), \\ \frac{\nu_{g,\psi_\infty}(\Omega)}{\text{vol}(M,g,\psi_\infty)} &\leq \left( 1 + \varepsilon_i \frac{\text{vol}(M,g)}{\text{vol}(M,g,\psi_\infty)} \right) \frac{\nu_{g,\psi_i}(\Omega)}{\text{vol}(M,g,\psi_i)} + \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}} \frac{\nu_{g,\psi_\infty}(\Omega)}{\text{vol}(M,g,\psi_\infty)}, \\ \frac{\nu_{g,\psi_\infty}(\Omega)}{\text{vol}(M,g,\psi_\infty)} &\leq \frac{\left( 1 + \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}} \right) \nu_{g,\psi_i}(\Omega)}{\left( 1 - \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}} \right) \text{vol}(M,g,\psi_i)}, \\ \frac{\nu_{g,\psi_\infty}(\Omega)}{\text{vol}(M,g,\psi_\infty)} &\geq \frac{\left( 1 - \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}} \right) \nu_{g,\psi_i}(\Omega)}{\left( 1 + \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}} \right) \text{vol}(M,g,\psi_i)}, \\ |\nu_{g,\psi_\infty}^+(\Omega) - \nu_{g,\psi_i}^+(\Omega)| &\leq \varepsilon_i \text{vol}(\partial\Omega), \\ \frac{\nu_{g,\psi_\infty}^+(\Omega)}{\text{vol}(M,g,\psi_\infty)} &\leq \frac{\left( 1 + \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}} \right) \nu_{g,\psi_i}^+(\Omega)}{\left( 1 - \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}} \right) \text{vol}(M,g,\psi_i)}, \\ \frac{\nu_{g,\psi_\infty}^+(\Omega)}{\text{vol}(M,g,\psi_\infty)} &\geq \frac{\left( 1 - \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}} \right) \nu_{g,\psi_i}^+(\Omega)}{\left( 1 + \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}} \right) \text{vol}(M,g,\psi_i)}, \end{aligned}$$

d'où

$$h_{(M,g,\psi_i)}(\beta) \leq C(i) \sup \left\{ h_{(M,g,\psi_\infty)}(\tilde{\beta}) \left| \frac{1}{C(i)} \leq \frac{\tilde{\beta}}{\beta} \leq C(i) \right. \right\}$$

et

$$h_{(M,g,\psi_i)}(\beta) \geq \frac{1}{C(i)} \inf \left\{ h_{(M,g,\psi_\infty)}(\tilde{\beta}) \mid \frac{1}{C(i)} \leq \frac{\tilde{\beta}}{\beta} \leq C(i) \right\},$$

où

$$C(i) := \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}}\right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon_i}{m_{\psi_\infty}}\right)}.$$

La convergence, uniforme sur  $[0,1]$ , de la suite  $(h_{(M,g,\psi_i)})_{i \in \mathbb{N}}$  vers  $h_{(M,g,\psi_\infty)}$  découle de la continuité uniforme de  $h_{(M,g,\psi_\infty)}$  sur  $[0,1]$  (donc de la continuité de  $h_{(M,g,\psi_\infty)}$  que nous justifierons ultérieurement dans le théorème 3.4.14). La convergence, uniforme sur tout compact de  $]0,1[$  de la suite des rapports vers 1 se déduit de la précédente après avoir rappelé que  $h_{(M,g,\psi_\infty)}$  ne s'annule pas sur  $]0,1[$ .

### 3.4.4 Comportement asymptotique pour les petits volumes

Donnons ici la généralisation de l'équivalent (1.12) explicité dans la proposition 1.5.2.

**Proposition 3.4.4** *Soit  $(M,g,\psi)$  une variété riemannienne fermée à densité de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Le comportement asymptotique de son profil isopérimétrique au voisinage de 0 est donné par la relation*

$$h_{(M,g,\psi)}(\beta) \underset{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}}{\sim} \frac{\gamma_n m_\psi^{\frac{1}{n}}}{\text{vol}(M,g,\psi)^{\frac{1}{n}}} \beta^{\frac{n-1}{n}}. \quad (3.30)$$

**Remarque 3.4.5** Ce résultat est en accord avec l'invariance du profil lorsque la densité  $\Psi$  est multipliée par une constante car la quantité  $\frac{m_\psi}{\text{vol}(M,g,\psi)}$  est homogène. Notre refus de toute normalisation permet d'interpréter qualitativement ce comportement asymptotique : les domaines isopérimétriques de petit volume se concentrent au voisinage des points de faible densité.

#### Démonstration.

C'est une simple adaptation de la preuve de P. Bérard et D. Meyer donnée dans le cadre riemannien (voir [BM]), qui consiste à remarquer que par continuité de la densité non riemannienne considérée, le lemme de localisation II de [BM] se généralise de la manière suivante :

**Lemme 3.4.6** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) et  $\psi \in C^0(M, \mathbb{R})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\rho = \rho(\varepsilon, M, g, \psi)$  tel que pour tout  $m$  de  $M$  et tout ouvert à bord régulier  $\Omega$  inclus dans la boule ouverte de centre  $m$  et de rayon  $\rho$ ,*

$$\nu_{g,\psi}^+(\Omega) \geq (1 - \varepsilon) m_\psi^{\frac{1}{n}} \gamma_n \nu_{g,\psi}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}.$$

□

**Remarque 3.4.7** Si nous considérons le problème isopérimétrique à l'intérieur d'un ouvert relativement compact  $\Omega$ , à bord régulier, inclus dans une variété riemannienne et muni d'une densité non-riemannienne, nous disposons du comportement asymptotique suivant :

$$h_{(M,g,\psi)}(\beta) \underset{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}}{\sim} \frac{\gamma_n m_\psi^{\frac{1}{n}}}{\text{vol}(M,g,\psi)^{\frac{1}{n}}} \beta^{\frac{n-1}{n}}. \quad (3.31)$$

où

$$m_{\Omega,\psi} := \min \left( \inf_{p \in \Omega} \{e^{\psi(p)}\}, \frac{1}{2} \inf_{p \in \partial\Omega} \{e^{\psi(p)}\} \right).$$

Cet équivalent, qui se prouve en adaptant le lemme de localisation II de [BM], résulte de la compétition entre les domaines qui s'appuient sur le bord  $\partial\Omega$  de l'ouvert  $\Omega$  et ceux qui se concentrent en les infima de la densité considérée lorsqu'ils se trouvent à l'intérieur de l'ouvert  $\Omega$ .

### Majoration asymptotique du profil pour les petits volumes

Sachant que la mesure riemannienne admet le développement limité suivant en coordonnées normales au voisinage du point  $p$ , pour  $t < \text{inj}_{(M,g)}(p)$ ,

$$d\nu_g(\exp_p(su)) = \left[ 1 - s^2 \frac{\text{Ricci}(u,u)}{6} + o(s^2) \right] s^{n-1} ds d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}(u),$$

nous obtenons avec (3.24) le développement limité de la mesure non riemannienne

$$d\nu_{g,\psi}(\exp_p(su)) = e^{\psi(p)} \left[ 1 + s d_p \psi(u) + \frac{s^2}{2} \left( d_p \psi(u)^2 + \text{Hess}(u,u) - \frac{\text{Ricci}(u,u)}{3} \right) \right] s^{n-1} ds d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}(u).$$

Nous en déduisons les développements limités de la mesure non riemannienne des petites boules et des petites sphères :

$$\nu_{g,\psi}(B(p,r)) = e^{\psi(p)} \omega_n r^n \left[ 1 + \frac{r^2}{2(n+2)} \left( \|\nabla_p \psi\|^2 - \Delta \psi - \frac{\text{scal}(p)}{3} \right) \right] + o(r^{n+2}) \quad (3.32)$$

et

$$\nu_{g,\psi}^+(B(p,r)) = e^{\psi(p)} \alpha_{n-1} r^{n-1} \left[ 1 + \frac{r^2}{2n} \left( \|\nabla_p \psi\|^2 - \Delta \psi - \frac{\text{scal}(p)}{3} \right) \right] + o(r^{n+2}). \quad (3.33)$$

**Remarque 3.4.8** *Ces développements limités sont donnés sans preuve (et avec fautes de frappe) au cours du théorème 8 de [Q].*

Utilisons maintenant ces comportements asymptotiques pour majorer asymptotiquement le profil isopérimétrique au voisinage de 0, en testant les petites boules géodésiques. Pour cela, posons pour  $r < \text{inj}_{(M,p)}(p)$ ,

$$\beta(r) := \frac{\nu_{g,\psi}(B(p,r))}{\text{vol}(M,g,\psi)}.$$

Cette fonction est de classe  $C^2$ , strictement croissante et sa réciproque,  $r(\beta)$  admet le développement limité

$$r(\beta) = \left( \frac{\text{vol}(M,g,\psi)}{e^{\psi(p)} \omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \beta^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \frac{1}{2n(n+2)} \left( \frac{\text{vol}(M,g,\psi)}{e^{\psi(p)} \omega_n} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \|\nabla_p \psi\|^2 - \Delta \psi - \frac{\text{scal}(p)}{3} \right) \beta^{\frac{2}{n}} \right] + o\left(\beta^{1+\frac{1}{n}}\right).$$

En injectant les petites boules de centre  $p$  dans la définition du profil isopérimétrique, nous obtenons, pour  $\beta$  assez petit,  $\beta < \beta(\text{inj}_{(M,g)}(p))$ ,

$$h_{(M,g,\psi)}(\beta) \leq \frac{\nu_{g,\psi}^+(B(p,r(\beta)))}{\text{vol}(M,g,\psi)},$$



d'où

$$\limsup_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}} \frac{h_{(M,g,\psi)}(\beta)}{\frac{\gamma_n e^{\frac{\psi(p)}{n}}}{\text{vol}(M,g,\psi)^{\frac{1}{n}}} \beta^{1-\frac{1}{n}}} - \left[ 1 + \frac{3}{2n(n+2)} \left( \frac{\text{vol}(M,g,\psi)}{e^{\psi(p)} \omega_n} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \|\nabla_p \psi\|^2 - \Delta \psi - \frac{\text{scal}(p)}{3} \right) \beta^{\frac{2}{n}} \right] \leq 0$$

car

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{g,\psi}^+(B(p,r(\beta)))}{\text{vol}(M,g,\psi)} &= \frac{\gamma_n e^{\frac{\psi(p)}{n}}}{\text{vol}(M,g,\psi)^{\frac{1}{n}}} \beta^{1-\frac{1}{n}} \\ &\times \left[ 1 + \frac{3}{2n(n+2)} \left( \frac{\text{vol}(M,g,\psi)}{e^{\psi(p)} \omega_n} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \|\nabla_p \psi\|^2 - \Delta \psi - \frac{\text{scal}(p)}{3} \right) \beta^{\frac{2}{n}} \right] \\ &+ o\left(\beta^{1+\frac{1}{n}}\right). \end{aligned}$$

Il est probable que le comportement asymptotique du profil isopérimétrique au voisinage de 0 soit égal à l'infimum, pris sur l'ensemble des points réalisant le minimum de la densité, des majorants proposés ci-dessus. Ce résultat serait alors à rapprocher du développement asymptotique (1.14) établi dans le cadre riemannien qu'il généraliserait. D'un point de vue géométrique, la différence d'interprétation serait que, sur une variété fermée à densité, les domaines isopérimétriques se concentrent au voisinage des points de densité minimale, et si ceux-ci sont isolés, ils choisissent préférentiellement ceux qui minimisent la quantité

$$-\Delta \psi - \frac{\text{scal}(p)}{3}.$$

Cette "stratégie" serait l'analogue du résultat qualitatif de concentration des domaines isopérimétriques de petit volume au voisinage des maxima de la courbure scalaire, mis en évidence sur les surfaces riemanniennes fermées par P. Pansu dans [P1].

### 3.4.5 Régularité a priori

**Proposition 3.4.9** *Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) et  $\psi \in C^0(M, \mathbb{R})$ . Alors la fonction  $h_{(M,g,\psi)}$  est continue sur  $[0,1]$ .*

#### Démonstration.

Il s'agit d'une adaptation immédiate de la preuve de la continuité du profil isopérimétrique d'une variété riemannienne fermée proposée par S. Gallot dans [G1] (lemme 6.2). □

**Remarque 3.4.10** La technique développée au cours de la preuve du lemme 6.2 de [G1] permet non seulement d'établir la continuité mais aussi le caractère localement Hölderien d'exposant  $\frac{n-1}{n}$  du profil isopérimétrique de la variété à densité  $(M,g,\psi)$ .

### 3.4.6 Propriétés différentielles de concavité

#### Variations des aires et des volumes

En reprenant les notations et la description des coordonnées normales géodésiques au voisinage d'une hypersurface  $\partial\Omega$  de partie régulière  $\partial\Omega_r$ , donnée au paragraphe

2.1.1, et en considérant une variation normale infinitésimale paramétrée par la fonction  $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega_r, \mathbb{R})$ , notons

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\varphi^\psi(t) &= \frac{\nu_{g,\psi}^+(\Omega_{\varphi,t})}{\text{vol}(M,g,\psi)}, \\ \mathbf{v}_\varphi^\psi(t) &= \frac{\nu_{g,\psi}(\Omega_{\varphi,t})}{\text{vol}(M,g,\psi)}.\end{aligned}$$

Nous obtenons, compte tenu de la relation (3.25) et de l'expression (3.24), la généralisation suivante des développements limités de la proposition 2.1.1 :

$$\mathbf{a}_\varphi^\psi(t) = \frac{\nu_{g,\psi}^+(\Omega)}{\text{vol}(M,g,\psi)} + \mathbf{a}_\varphi^{\psi'}(0)t + \frac{\mathbf{a}_\varphi^{\psi''}(0)}{2}t^2 + O(t^3),$$

$$\mathbf{v}_\varphi^\psi(t) = \frac{\nu_{g,\psi}(\Omega)}{\text{vol}(M,g,\psi)} + \mathbf{v}_\varphi^{\psi'}(0)t + \frac{\mathbf{v}_\varphi^{\psi''}(0)}{2}t^2 + O(t^3),$$

où

$$\mathbf{a}_\varphi^{\psi'}(0) = \frac{1}{\text{vol}(M,g,\psi)} \int_{\partial\Omega_r} \eta_{\vec{\nu},\psi}(p) \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\varphi^{\psi''}(0) &= \frac{1}{\text{vol}(M,g,\psi)} \int_{\partial\Omega_r} \left[ \|\nabla_p \varphi\|_2^2 + \varphi(p)^2 \left( \eta_{\vec{\nu},\psi}(p)^2 - \|A_p^{\vec{\nu}}\|_2^2 \right) \right] e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_r} \left( \text{Hess}\psi(\vec{\nu}(p), \vec{\nu}(p)) - \text{Ricci}_{(M,g)}(\vec{\nu}(p), \vec{\nu}(p)) \right) \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p),\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_\varphi^{\psi'}(0) = \frac{1}{\text{vol}(M,g,\psi)} \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p),$$

$$\mathbf{v}_\varphi^{\psi''}(0) = \frac{1}{\text{vol}(M,g,\psi)} \int_{\partial\Omega_r} \eta_{\vec{\nu},\psi}(p) \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}(p).$$

Nous avons noté  $\eta_{\vec{\nu},\psi}(p)$  la quantité

$$\eta_{\vec{\nu}}(p) + d_p\psi(\vec{\nu}(p)) = \eta_{\vec{\nu}}(p) + g_p(\nabla_p\psi, \vec{\nu}(p)),$$

et nous l'appelons *courbure moyenne généralisée* car c'est elle qui remplace la courbure moyenne dans les formules de variations. Observons en particulier que cette courbure moyenne généralisée comporte un terme lié à la géométrie de  $\partial\Omega$  et un terme lié aux variations du logarithme de la densité dans la direction normale à  $\partial\Omega$ .

### Existence et régularité de domaines isopérimétriques

Énonçons des versions généralisées de la proposition 2.2.5 et du lemme 2.2.6. L'existence et la régularité des hypersurfaces minimisantes pour le problème isopérimétrique sur une variété fermée à densité nous ont été confirmées par F. Morgan et apparaissent dans [M1].

**Proposition 3.4.11** *Soient  $\beta$  dans  $]0,1[$  et  $(M,g,\psi)$  une variété riemannienne fermée à densité de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Alors il existe un ouvert  $\Omega$  tel que*

- $\nu_{g,\psi}(\Omega) = \beta \text{vol}(M,g,\psi)$ ,
- $\nu_{g,\psi}^+(\Omega) = h_{(M,g,\psi)}(\beta) \text{vol}(M,g,\psi)$ ,
- $\partial\Omega$  est l'union disjointe d'une partie régulière  $\partial\Omega_r$  composée de points au voisinage desquels c'est une hypersurface  $C^\infty$  de courbure moyenne généralisée constante, et d'une partie singulière  $\partial\Omega_s$ , définie par  $\partial\Omega_s := \partial\Omega \setminus \partial\Omega_r$ , dont la dimension de Hausdorff dans  $(M,g)$  est inférieure ou égale à  $n - 8$ ,

–  $\partial\Omega$  est orientable et  $\partial\Omega_r$  est muni d'un champ normal sortant unitaire régulier.

Observons qu'à la différence de la proposition 2.2.5, ce n'est plus la courbure moyenne de  $\partial\Omega$  qui est constante, mais sa courbure moyenne généralisée, comme le montre la formule de variation de l'aire au premier ordre. Le lemme suivant, inspiré du lemme 2.2.6, se prouve de manière analogue et permet de relier la courbure moyenne généralisée des domaines isopérimétriques aux variations du profil.

**Lemme 3.4.12** *Soient  $(M, g, \psi)$  une variété riemannienne fermée à densité de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) et  $\Omega$  un domaine isopérimétrique de volume relatif  $\beta$ , de champ normal sortant  $\vec{\nu}$ , dont  $\eta_{\vec{\nu}, \psi}$  désigne la courbure moyenne généralisée. Alors*

$$\limsup_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{h_{(M, g, \psi)}(\beta + u) - h_{(M, g, \psi)}(\beta)}{u} \leq \eta_{\vec{\nu}, \psi} \leq \liminf_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{h_{(M, g, \psi)}(\beta - u) - h_{(M, g, \psi)}(\beta)}{-u} \quad (3.34)$$

**Remarque 3.4.13** La limite inférieure et la limite supérieure qui interviennent dans le lemme 3.4.12 sont en fait de vraies limites. Ceci sera justifié par la régularité a posteriori du profil, que nous obtiendrons lors du théorème 3.4.14 comme conséquence de l'étude de ses propriétés différentielles.

### Inéquations différentielles satisfaites par le profil

Reprenons le principe des techniques variationnelles exposées au paragraphe 2.1.2, les calculs menés lors de la preuve du théorème 2.2.1 et les développements limités généralisés de ce paragraphe. En choisissant un domaine isopérimétrique  $\Omega$  tel que  $\nu_{g, \psi}(\Omega) = \beta_0 \text{vol}(M, g, \psi)$  et en considérant à partir de  $\partial\Omega$  des variations normales dirigées par  $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega_r, \mathbb{R})$ , nous obtenons, après simplification liée au caractère constant de  $\eta_{\vec{\nu}, \psi}$ , pour tout  $\alpha \in [n, +\infty]$ ,

$$\begin{aligned} \overline{D^2} \left( h_{(M, g, \psi)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta_0) &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1} h_{(M, g, \psi)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \left[ \frac{\left( \int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \varphi\|_2^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \nu_{g, \psi}^+(\Omega) \right. \\ &+ \frac{\int_{\partial\Omega_r} \left( \text{Hess}\psi(\vec{\nu}(p), \vec{\nu}(p)) - \text{Ricci}(\vec{\nu}(p), \vec{\nu}(p)) \right) \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \nu_{g, \psi}^+(\Omega) \\ &\left. - \frac{\int_{\partial\Omega_r} \|A_p^{\vec{\nu}}\|_2^2 \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \nu_{g, \psi}^+(\Omega) + \frac{1}{\alpha-1} \eta_{\vec{\nu}, \psi}^2 \right]. \end{aligned}$$

Observons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'établir la majoration

$$\eta_{\vec{\nu}, \psi}^2 = \eta_{\vec{\nu}, \psi}^2 \frac{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\frac{1}{2}\psi(p)} e^{\frac{1}{2}\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \leq \eta_{\vec{\nu}, \psi}^2 \frac{\nu_{g, \psi}^+(\Omega) \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{D^2} \left( h_{(M,g,\psi)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta_0) &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1} h_{(M,g,\psi)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \nu_{g,\psi}^+(\Omega) \left[ \frac{\left( \int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \varphi\|_2^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r} \right)}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r} \right)^2} \right. \\ &+ \frac{\int_{\partial\Omega_r} \left( \text{Hess}\psi(\vec{v}(p), \vec{v}(p)) - \text{Ricci}(\vec{v}(p), \vec{v}(p)) \right) \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r} \right)^2} \\ &\left. + \frac{\int_{\partial\Omega_r} \left( \frac{1}{\alpha-1} \eta_{\vec{v},\psi}^2 - \|A_p^{\vec{v}}\|_2^2 \right) \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

A partir de cette inégalité (3.35), nous allons explorer différentes relations différentielles possibles, correspondant à des hypothèses de natures différentes.

**Théorème 3.4.14** *Soit  $(M,g,\psi)$  une variété riemannienne fermée à densité, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\sup_{p \in M} \|\nabla_p \psi\| \leq C \quad , \quad C > 0 \quad (3.36)$$

et

$$\text{Ricci}_{(M,g)} - \text{Hess}\psi \geq (n-1)\delta g \quad , \quad \delta \in \mathbb{R}. \quad (3.37)$$

Alors, le profil isopérimétrique  $h_{(M,g,\psi)}$  admet des dérivées à droite et à gauche en tout point  $\beta$  de  $]0,1[$  telles que

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad h_{(M,g,\psi)}'(\beta) \geq h_{(M,g,\psi)}'(\beta) \quad \text{et} \quad h_{(M,g,\psi)}'(\beta) \geq 0.$$

Il satisfait de plus la relation différentielle

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad \overline{D^2} h_{(M,g,\psi)}(\beta) \leq \frac{1}{h_{(M,g,\psi)}(\beta)} \left( - \frac{(|h_{(M,g,\psi)}'(\beta)| - C)^2}{n-1} - (n-1)\delta \right) \quad (3.38)$$

### Démonstration.

Reprenons l'inégalité (3.35) dans le cas particulier  $\alpha = +\infty$  et utilisons l'hypothèse (3.37), afin d'obtenir, pour toute fonction  $\varphi$  de  $C_c^2(\partial\Omega_r)$  d'intégrale non nulle,

$$\begin{aligned} \overline{D^2} h_{(M,g,\psi)}(\beta_0) &\leq h_{(M,g,\psi)}(\beta_0)^{-1} \nu_{g,\psi}^+(\Omega) \left[ \frac{\left( \int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \varphi\|_2^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r} \right)}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r} \right)^2} \right. \\ &- (n-1)\delta \frac{\int_{\partial\Omega_r} \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r} \right)^2} \\ &\left. - \frac{\int_{\partial\Omega_r} \|A_p^{\vec{v}}\|_2^2 \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|\partial\Omega_r} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Majorons alors, dans un premier temps, le dernier terme qui est négatif ou nul par 0 et appliquons la proposition 3.4.11 qui précise que la propriété  $\mathcal{H}_{n-3}(\partial\Omega_s) = 0$ , permet,

comme dans la preuve du théorème 2.2.3, de remplacer  $\varphi$  par les éléments de la suite  $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c^2(\partial\Omega_r, [0,1])$ , construite dans la proposition A.0.5 et correspondant à des variations de  $\partial\Omega$  selon des hypersurfaces qui conservent la même partie singulière et qui sont parallèles à  $\partial\Omega$  sur le complémentaire d'un voisinage de  $\partial\Omega_s$ . Ces fonctions vérifient de plus

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_r} \Psi_i(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} &= \nu_{g,\psi}^+(\Omega), \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_r} \Psi_i(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} &= \nu_{g,\psi}^+(\Omega), \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \Psi_i\|_2^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} &= 0, \end{aligned}$$

si bien qu'en passant à la limite sur  $i$  dans la relation différentielle (3.39), nous obtenons

$$\overline{D^2}h_{(M,g,\psi)}(\beta_0) \leq -\frac{(n-1)\delta}{h_{(M,g,\psi)}(\beta_0)}. \quad (3.40)$$

La continuité (voir la proposition 3.4.9) et la stricte positivité du profil sur  $]0,1[$  (voir l'inégalité (3.27)) permettent alors, à partir de ce résultat, de conclure, par l'intermédiaire de la proposition B.3.1, à la dérivabilité à droite et à gauche en tout point de  $]0,1[$  (et donc à la dérivabilité sur le complémentaire d'une partie au plus dénombrable de  $]0,1[$ ) ainsi qu'à l'inégalité qui relie ces deux dérivées, d'où le caractère positif de la dérivée à gauche en  $\frac{1}{2}$  compte tenu de la symétrie du profil.

Ces propriétés de régularité vont nous permettre d'affiner les majorations utilisées précédemment, aidés en cela par la proposition 3.4.11. En effet, l'inégalité classique

$$\forall p \in \partial\Omega_r \quad , \quad \frac{1}{n-1} \eta_{\vec{v}}^2(p) - \|A_p^{\vec{v}}\|_2^2 \leq 0,$$

permet de majorer le terme  $-\|A_p^{\vec{v}}\|_2^2$  :

$$-\|A_p^{\vec{v}}\|_2^2 \leq -\frac{\eta_{\vec{v}}^2}{n-1} = -\frac{(\eta_{\vec{v},\psi} + d_p\psi(\vec{v}))^2}{n-1} \leq -\frac{(|\eta_{\vec{v},\psi}| - C)^2}{n-1}.$$

De plus, en les points  $\beta_0$  où  $h_{(M,g,\psi)}$  est dérivable, le lemme 3.4.12 donne

$$h_{(M,g,\psi)}'(\beta_0) = \eta_{\vec{v},\psi} \quad \text{d'où} \quad -\|A_p^{\vec{v}}\|_2^2 \leq -\frac{(|h_{(M,g,\psi)}'(\beta_0)| - C)^2}{n-1},$$

tandis qu'en les points  $\beta_0$  où les dérivées à droite et à gauche diffèrent,

$$\overline{D^2}h_{(M,g,\psi)}(\beta_0) = -\infty.$$

Ainsi, en reportant ces observations dans l'inégalité (3.39) puis en reproduisant les mêmes variations infinitésimales "presque parallèles" à support compact dans le complémentaire des singularités de  $\partial\Omega$ , nous obtenons

$$\overline{D^2}h_{(M,g,\psi)}(\beta_0) \leq \frac{1}{h_{(M,g,\psi)}(\beta_0)} \left( -\frac{(|h_{(M,g,\psi)}'_g(\beta_0)| - C)^2}{n-1} - (n-1)\delta \right),$$

où nous aurions pu remplacer  $h_{(M,g,\psi)}'_g(\beta_0)$  par  $h_{(M,g,\psi)}'_d(\beta_0)$ .

□

**Remarques 3.4.15**

- Dans le cas particulier où  $\psi$  est une fonction constante, l'inéquation différentielle (3.38) redonne la relation (2.11) établie lors du théorème 2.2.3, et qui est optimale dans la mesure où les profils des sphères euclidiennes réalisent des cas d'égalité.
- L'inéquation différentielle (3.38) reste valide si  $h_{(M,g,\psi)'_g}(\beta_0)$  est remplacée par  $h_{(M,g,\psi)'_d}(\beta)$ . A condition de restreindre le domaine de validité de (3.38) à  $]0,1[\setminus I$ , où  $I$  désigne l'ensemble au plus dénombrable sur lequel  $h_{(M,g,\psi)}$  n'est pas dérivable, il est possible de remplacer la dérivée à gauche par la dérivée.

L'étude du profil isopérimétrique des variétés fermées a montré que le résultat de concavité le plus fort était la concavité du profil renormalisé (cas  $\alpha = n$ ) sous l'hypothèse Ricci  $\geq 0$ . Le théorème 3.4.14 ne permet pas de généraliser immédiatement ce résultat. Cependant, il établit la concavité du profil sous l'hypothèse

$$\text{Ricci}_{(M,g)} - \text{Hess}\psi \geq 0,$$

que nous allons désormais envisager comme un cas limite d'une hypothèse plus générale.

**Hypothèses de type courbure-dimension**

Lors des manipulations précédentes, nous avons observé le rôle crucial joué par la forme quadratique

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) - \text{Hess}_{(M,g)}\psi(\cdot, \cdot). \quad (3.41)$$

En supposant une minoration de ce tenseur, uniforme sur la variété, nous pourrions espérer généraliser au cadre des variétés à densité, une partie des résultats "classiques" obtenus sur les variétés riemanniennes à partir d'une borne inférieure sur la courbure de Ricci (généralisation des théorèmes de Meyers, de Bishop, de Bishop-Gromov, de Heintze-Karcher...). Cependant, Z. Qian montre dans [Q] que l'hypothèse Ricci $_{(M,g)} - \text{Hess}_{(M,g)}\psi \geq 0$  n'implique pas que  $(M,g,\psi)$  soit de  $\nu_{g,\psi}$ -mesure finie et techniquement, l'hypothèse Ricci $_{(M,g)} - \text{Hess}_{(M,g)}\psi \geq 0$  n'apparaît pas comme l'hypothèse pertinente pour atteindre ces généralisations. Il faut en fait, pour pouvoir généraliser l'hypothèse de courbure

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) \geq (n-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad , \quad \delta \in \mathbb{R}, \quad (3.42)$$

considérer le tenseur (3.41) perturbé par un terme en  $d\psi \otimes d\psi$  qui fait intervenir les dérivées premières du logarithme de la densité non riemannienne. Reprenons les notations introduites par Z. Qian dans [Q] et notons, pour tout  $q > 0$  et pour toute fonction  $\psi \in C^2(M, \mathbb{R})$ , Ricci $_{(M,g)}^q_\psi$  le tenseur

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) - \text{Hess}_{(M,g)}\psi(\cdot, \cdot) - \frac{1}{q}d\psi \otimes d\psi(\cdot, \cdot).$$

Ainsi, l'hypothèse (3.42) se généralise en l'hypothèse dite "*de courbure-dimension*  $C(r, n+q)$ " suivante :

$$\text{Ricci}_{(M,g)}^q_\psi(\cdot, \cdot) \geq rg(\cdot, \cdot) \quad \text{où} \quad (r, q) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty]. \quad (3.43)$$

L'appellation *hypothèse de courbure-dimension* peut s'interpréter, lorsque  $q \in \mathbb{N}^*$ , si nous choisissons de définir  $\delta$  par l'égalité  $r = (n+q-1)\delta$ . En effet, bien que la variété

riemannienne  $(M, g)$  soit de dimension  $n$ , l'espace de comparaison privilégié apparaît comme étant la variété riemannienne simplement connexe de dimension  $n + q$  et de courbure sectionnelle constante  $\delta$ . Ainsi, cette généralisation de l'hypothèse de courbure détermine la courbure et la dimension de l'espace modèle correspondant, ce qui explique son nom. Enfin, remarquons que l'hypothèse de courbure-dimension  $C((n - 1)\delta, +\infty)$ , pour une variété à densité de dimension  $n$ , correspond à l'hypothèse

$$\text{Ricci}_{(M, g)}(\cdot, \cdot) - \text{Hess}_{(M, g)}\psi(\cdot, \cdot) \geq (n - 1)\delta g(\cdot, \cdot)$$

sous laquelle nous avons établi le théorème 3.4.14.

### Inéquations différentielles sous hypothèse de courbure-dimension

Généralisons l'inéquation différentielle (2.7) sous l'hypothèse de courbure-dimension  $C((n + q - 1)\delta, n + q)$ .

**Théorème 3.4.16** *Soit  $(M, g, \psi)$  une variété riemannienne fermée à densité, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M, g)} \stackrel{q}{\psi} \geq (n + q - 1)\delta g \quad , \quad (\delta, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* . \quad (3.44)$$

Alors, pour tout  $\alpha \in [n + q, +\infty]$ ,

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \overline{D^2} \left( h_{(M, g, \psi)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta) \leq - \frac{\alpha(n + q - 1)\delta}{\alpha - 1} h_{(M, g, \psi)}(\beta)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} . \quad (3.45)$$

#### Démonstration.

Reprenons l'inégalité (3.35) en faisant apparaître le terme sur lequel porte l'hypothèse (3.44) afin d'obtenir, pour toute fonction  $\varphi$  de  $C_c^2(\partial\Omega_r)$  d'intégrale non nulle,

$$\begin{aligned} \overline{D^2} \left( h_{(M, g, \psi)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta_0) &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} h_{(M, g, \psi)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \nu_{g, \psi}^+(\Omega) \left[ \frac{\left( \int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \varphi\|_2^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \right. \\ &+ \frac{\int_{\partial\Omega_r} \left( \frac{1}{q} d_p \psi(\vec{v})^2 + \text{Hess} \psi(\vec{v}(p), \vec{v}(p)) - \text{Ricci}(\vec{v}(p), \vec{v}(p)) \right) \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \\ &\left. + \frac{\int_{\partial\Omega_r} \left( \frac{1}{\alpha-1} \eta_{\vec{v}, \psi}^2 - \|A_p \vec{v}\|_2^2 - \frac{1}{q} d_p \psi(\vec{v})^2 \right) \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \right] . \quad (3.46) \end{aligned}$$

L'utilisation de la minoration classique de  $\|A_p \vec{v}\|_2^2$  en fonction de la courbure moyenne et de l'hypothèse (3.44) donne

$$\begin{aligned} \overline{D^2} \left( h_{(M, g, \psi)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta_0) &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} h_{(M, g, \psi)}(\beta_0)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \nu_{g, \psi}^+(\Omega) \left[ \frac{\left( \int_{\partial\Omega_r} \|\nabla_p \varphi\|_2^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \right. \\ &+ \frac{\int_{\partial\Omega_r} \left( \frac{1}{\alpha-1} (\eta_{\vec{v}} - d_p \psi(\vec{v}))^2 - \frac{\eta_{\vec{v}}^2}{n-1} - \frac{1}{q} d_p \psi(\vec{v})^2 \right) \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \\ &\left. - (n + q - 1)\delta \frac{\int_{\partial\Omega_r} \varphi(p)^2 e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}}}{\left( \int_{\partial\Omega_r} \varphi(p) e^{\psi(p)} d\nu_{g|_{\partial\Omega_r}} \right)^2} \right] . \quad (3.47) \end{aligned}$$

Considérons le second terme,

$$\frac{n-\alpha}{(n-1)(\alpha-1)}\eta_{\vec{v}}(p)^2 - \frac{2}{\alpha-1}\eta_{\vec{v}}(p)d_p\psi(\vec{v}(p)) + \frac{q-\alpha+1}{q(\alpha-1)}d_p\psi(\vec{v}(p))^2,$$

qui est un trinôme du second degré en  $d_p\psi(\vec{v}(p))$ , dont le coefficient dominant est négatif ou nul si  $\alpha \geq q+1$  et dont le discriminant vaut

$$\frac{4\eta_{\vec{v}}(p)^2(q+n-\alpha)}{q(n-1)(\alpha-1)}.$$

Nous en déduisons que pour tout  $\alpha \geq n+q$ , ce terme est négatif ou nul, d'où, en faisant appel aux techniques désormais classiques des variations presque parallèles construites dans la proposition A.0.5, l'obtention de la famille d'inéquations différentielles suivantes : pour tout  $\alpha \in [n+q, +\infty]$ ,

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad \overline{D^2} \left( h_{(M,g,\psi)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) (\beta) \leq -\frac{\alpha(n+q-1)\delta}{\alpha-1} h_{(M,g,\psi)}(\beta)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}.$$

□

**Remarque 3.4.17** Précisons le résultat du théorème 3.4.16 dans les deux cas limites suivants : “ $q$  tend vers 0” et “ $q$  tend vers  $+\infty$ ”,

- si  $(M,g)$  est une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que  $\text{Ricci} \geq (n-1)\delta g$  ( $\delta > 0$ ), alors elle satisfait l'hypothèse de courbure-dimension  $C((n+q-1)\delta, n+q)$  pour tout  $q > 0$  de sorte qu'en passant à la limite sur  $q$  tendant vers 0, nous retrouvons l'inéquation différentielle (2.7) établie lors du théorème 2.2.1;
- si  $(M,g,\psi)$  est une variété riemannienne fermée à densité de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que  $\text{Ricci} - \text{Hess}\psi \geq (n-1)\delta g$  ( $\delta > 0$ ), alors elle satisfait l'hypothèse de courbure-dimension  $C((n-1)\delta - \frac{1}{q} \sup_{p \in M} \|\nabla_p \psi\|^2, n+q)$  pour tout  $q > 0$  car

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) - \text{Hess}_{(M,g)}\psi(\cdot, \cdot) - \frac{1}{q} d\psi \otimes d\psi(\cdot, \cdot) \geq \left( (n-1)\delta - \frac{1}{q} \sup_{p \in M} \|\nabla_p \psi\|^2 \right) g(\cdot, \cdot),$$

de sorte qu'en considérant l'inéquation différentielle (3.45) pour  $\alpha = n+q$  puis en passant à la limite sur  $q$  tendant vers  $+\infty$ , nous retrouvons la version affaiblie (3.40) de l'inéquation différentielle (3.38) du théorème 3.4.14.

La généralisation des propriétés différentielles de concavité, pour le profil isopérimétrique des variétés riemanniennes fermées à densité, sous une hypothèse de courbure-dimension, suggère de reprendre l'étude de leurs nombreuses conséquences, déjà détaillées lors du chapitre 2. Le contrôle topologique et géométrique des domaines isopérimétrique et de leur bord s'obtient d'une manière analogue à la méthode proposée au paragraphe 2.3.3. Nous pouvons aussi rechercher des estimations du profil isopérimétrique, en faisant appel aux profils modèles définis au paragraphe 2.4.1. Il convient alors d'observer que seules les minoration peuvent être généralisées, il est impossible de majorer le profil d'une variété à densité de dimension  $n$  par le profil d'un espace modèle de “dimension  $n+q$ ” à cause de leurs comportements asymptotiques respectifs au voisinage de 0. En fait, nous allons limiter notre étude à la généralisation de l'inégalité de Lévy-Gromov à partir de laquelle nous étendrons les théorèmes de Myers, de Lichnerowicz et de Bishop-Gromov.



### 3.4.7 Extension de l'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov et conséquences

Donnons une généralisation de l'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov dans le cadre des variétés fermées à densité. Pour cela, généralisons<sup>14</sup> les notations du chapitre 2 en définissant implicitement, pour tout  $(p, \delta) \in [1, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^*$  et  $R \in ]0, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}]$ , la fonction  $h_{p, \delta, R}$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$  par  $h_{p, \delta, R}(0) = 0$  et

$$\forall r \in ]0, R] \quad , \quad h_{p, \delta, R} \left( \frac{\int_0^r (s_\delta(u))^{p-1} du}{2 \int_0^R (s_\delta(u))^{p-1} du} \right) = \frac{(s_\delta(u))^{p-1}}{2 \int_0^R (s_\delta(u))^{p-1} du}.$$

Nous la prolongeons ensuite à  $[0, 1]$  par symétrie en posant, pour tout  $\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $h_{p, \delta, R}(\beta) = h_{p, \delta, R}(1 - \beta)$ .

**Théorème 3.4.18** *Soit  $(M, g, \psi)$  une variété riemannienne fermée à densité, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M, g)_\psi}^q \geq (n + q - 1)\delta g \quad , \quad (\delta, q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*. \quad (3.48)$$

Alors,

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad h_{(M, g, \psi)}(\beta) \geq h_{n+q, \delta, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}(\beta). \quad (3.49)$$

#### Démonstration.

Reprenons la famille d'inéquations différentielles vérifiées par le profil isopérimétrique (résultat établi lors du théorème 3.4.16) dans le cas particulier  $\alpha = n + q$  :

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \overline{D^2} \left( h_{(M, g, \psi)}^{\frac{n+q-1}{n+q}} \right) (\beta) \leq -(n + q)\delta h_{(M, g, \psi)}^{\frac{2-n-q}{n+q-1}}(\beta). \quad (3.50)$$

L'inégalité annoncée résulte alors, comme lors de la preuve de l'inégalité de Lévy-Gromov proposée au paragraphe 2.4.2, de l'application du théorème C.2.2 pour  $a = 1$ ,  $g(x) = -nx \frac{2-n-q}{n+q}$ ,  $f = h_{(M, g)}^{\frac{n+q}{n+q-1}}$  et  $y_- = h_{n+q, \delta, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{n+q}{n+q-1}}$ . Ainsi, comme  $y_-$  est une (la) solution de l'équation différentielle

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \overline{D^2} \left( h_{(M, g, \psi)}^{\frac{n+q-1}{n+q}} \right) (\beta) = -(n + q)\delta h_{(M, g, \psi)}^{\frac{2-n-q}{n+q-1}}(\beta)$$

qui prend les mêmes valeurs que  $y_{(M, g)}$  en 0 et en 1, nous obtenons

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad h_{(M, g, \psi)}(\beta) \geq h_{n+q, \delta, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}(\beta).$$

□

#### Remarques 3.4.19

- Si  $q$  est un entier non nul, la conclusion du théorème de comparaison 3.4.18 prend une signification plus géométrique :

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad h_{(M, g, \psi)}(\beta) \geq h_{\mathbb{S}_\delta^{n+q}}(\beta).$$

Nous en déduisons en particulier que cette généralisation est optimale lorsque  $q$  est entier,  $\mathbb{S}_\delta^{n+q}$  réalisant un cas d'égalité.

<sup>14</sup> Lorsque  $p \in \mathbb{N}^*$ , les fonctions  $h_{p, \delta, R}$  coïncident avec les profils modèles définis au cours du paragraphe 2.4.1.

- Le théorème 3.4.18 contient l’inégalité de Lévy-Gromov. En effet, si  $(M, g)$  est une variété riemannienne telle que  $\text{Ricci} \geq (n-1)g$ , alors elle vérifie l’hypothèse (3.48) pour tout  $q > 0$  et  $\delta = \frac{n-1}{n+q-1}$  (le logarithme  $\psi$  de la densité  $\Psi$  est alors la fonction nulle), d’où

$$\forall q > 0 \quad , \quad h_{(M, g)} \geq h_{n+q, \frac{n-1}{n+q-1}, \pi}$$

et nous obtenons l’inégalité de Lévy-Gromov en passant à la limite sur  $q$  tendant vers 0.

- En se reportant au paragraphe 2.4.1 pour relire les définitions des fonctions  $h_{p, \delta, \pi}$ , nous sommes tentés de dire qu’elles peuvent être interprétées comme les profils “généralisés” des “sphères” de courbure sectionnelle constante  $\delta$  et de “dimension” (éventuellement non entière)  $p$ . Par ailleurs, la proposition 3.1.3 permet d’établir que la fonction  $h_{p, \delta, \pi}$  est le profil isopérimétrique du mm-espace modèle unidimensionnel

$$\left( \left[ 0, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \right], |\cdot|, \left( \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} (s_\delta(u))^{p-1} du \right)^{-1} (s_\delta(x))^{p-1} dx \right).$$

La difficulté qui se glisse ici est que la densité de ce mm-espace s’annule aux extrémités du segment considéré, phénomène que nous avons écarté lors de la description des variétés à densité. De plus, ceci explique pourquoi la comparaison (3.49) n’est pas optimale au voisinage de 0, à la différence des estimations obtenues par des méthodes analogues au théorème 2.4.12. En effet les comportements asymptotiques respectifs des profils concernés diffèrent. Celui du profil de  $(M, g, \psi)$  est en  $\beta^{1-\frac{1}{n}}$  (voir l’équivalent (3.30)) tandis que celui de  $h_{n+q, \delta, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}$  est en  $\beta^{1-\frac{1}{n+q}}$ , ce dernier profil correspondant à un espace modèle de “dimension  $(n+q)$ ”.

Une application immédiate de ce résultat consiste à établir la majoration du diamètre et la minoration du trou spectral qui suivent toute minoration du profil par un mm-espace modèle, d’après la proposition 3.1.6. Ceci conduit à une généralisation des théorèmes de Myers et de Lichnerowicz sous l’hypothèse de courbure-dimension  $C((n+q-1)\delta, n+q)$  ( $\delta > 0$ ).

**Corollaire 3.4.20** *Soit  $(M, g, \psi)$  une variété riemannienne fermée à densité, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M, g, \psi)} \geq (n+q-1)\delta g \quad , \quad (\delta, q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

Alors,

$$\lambda_1(M, g, \psi) \geq \frac{n+q}{\delta}$$

et

$$\text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

### Démonstration.

La minoration du trou spectral est une conséquence du point (ii) de la proposition 3.1.6 qui établit, à partir de la comparaison isopérimétrique  $h_{(M, g, \psi)} \geq h_{n+q, \delta, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}$  donnée par le théorème 3.4.18,

$$\lambda_1(M, g, \psi) \geq \lambda_1 \left( \left[ 0, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \right], |\cdot|, \left( \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} (s_\delta(u))^{n+q-1} du \right)^{-1} (s_\delta(x))^{n+q-1} dx \right).$$

Le calcul du membre de gauche, qui vaut  $\frac{n+q}{\delta}$ <sup>15</sup>, conduit par conséquent au résultat.

15. Il faudrait soit une référence, soit disposer d’une preuve.

Prouvons maintenant l'estimation portant sur le diamètre. La majoration (1.20) et la minoration (3.49) du théorème 3.4.18 donnent

$$\text{diam}(M, g) \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{h_{n+q, \delta, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}(u)}.$$

Effectuons alors le changement de variable

$$u = \beta(r)$$

où  $\beta$  est la bijection croissante définie de  $[0, \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$  par

$$r \mapsto \frac{\int_0^r (s_\delta(u))^{n+q-1} du}{2 \int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}} (s_\delta(u))^{n+q-1} du}.$$

En observant alors que

$$\forall r \in \left] 0, \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} \right] , \quad h_{n+q, \delta, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}(\beta(r)) = \beta'(r) \quad \text{et} \quad du = \beta'(r) dr,$$

nous obtenons

$$\text{diam}(M, g) \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}} d\beta = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

□

#### Remarques 3.4.21

- Ces comparaisons du diamètre et du trou spectral sont optimales, lorsque  $q \in \mathbb{N}$ , dans la mesure où les sphères  $\mathbb{S}_\delta^{n+q}$  réalisent des cas d'égalité. En effet, le corollaire 3.4.20 correspond alors aux comparaisons suivantes :

$$\lambda_1(M, g, \psi) \geq \lambda_1(\mathbb{S}_\delta^{n+q}) \quad \text{et} \quad \text{diam}(M, g) \leq \text{diam}(\mathbb{S}_\delta^{n+q}).$$

- Nous pourrions, d'une manière analogue à la proposition 1.26, démontrer, à partir de la comparaison isopérimétrique obtenue dans le théorème 3.4.18 (à savoir  $h_{(M, g, \psi)} \geq h_{n+q, \delta, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}$ , ce qui généralise l'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov), que pour tout ouvert  $\Omega$  de  $M$ ,

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(\Omega^*)$$

où  $\Omega^*$  est la boule centrée en 0 du mm-espace

$$\left( \left[ 0, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \right], |\cdot|, \left( \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} (s_\delta(u))^{n+q-1} du \right)^{-1} (s_\delta(x))^{n+q-1} dx \right)$$

de même volume relatif que  $\Omega$  (si  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega^*$  s'interprète aussi comme une boule géodésique de  $(\mathbb{S}_\delta^{n+q})$  de même volume relatif que  $\Omega$ , ce qui généralise le point (v) de la proposition 1.26). Observons par ailleurs que cette généralisation des minoration de la première valeur propre de Dirichlet s'accompagne d'une généralisation du théorème de comparaison de Cheng que nous précisons dans le théorème E.3.1 de l'annexe E.

- Le lecteur intéressé par les minoration du trou spectral faisant intervenir la courbure de Ricci, le diamètre et la dimension, trouvera dans l'article [BQ1], écrit par D. Bakry et Z. Qian, une présentation unifiée des résultats optimaux en courbure positive ou nulle.

L'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov généralisée (3.49) permet aussi de contrôler la croissance du volume des voisinages tubulaires d'une partie fermée (voir le point (i) de la proposition 1.26 et son extension dans la proposition 3.1.6). Nous en déduisons par conséquent le résultat de comparaison suivant :

**Corollaire 3.4.22** *Soit  $(M, g, \psi)$  une variété riemannienne fermée à densité, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M, g, \psi)}^q \geq (n + q - 1)\delta g \quad , \quad (\delta, q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

Alors,

$$\forall (m, r) \in M \times \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}\right] \quad , \quad \nu_{g, \psi}(B(m, r)) \geq \text{vol}(M, g, \psi) \frac{\int_0^r (s_\delta(u))^{n+q-1} du}{\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} (s_\delta(u))^{n+q-1} du}. \quad (3.51)$$

**Remarque 3.4.23**

- La minoration (3.51) du volume des boules géodésiques donnée par le corollaire 3.4.22 n'est pas de l'ordre de grandeur optimal pour les petites valeurs de  $r$  (voir le développement limité (3.32) du volume des petites boules géodésiques). En effet, l'hypothèse de courbure-dimension  $C((n + q - 1)\delta, n + q)$  donne accès à une comparaison avec un espace modèle de "dimension  $(n + q)$ ". Cette minoration, uniforme sur  $(M, g, \psi)$  est améliorée par la généralisation du théorème de Bishop-Gromov, proposée dans l'annexe E et établie différemment par Z. Qian dans [Q]), qui donne, pour tout  $m \in M$  et  $r \in [0, \text{diam}(M, g)]$ ,

$$\nu_{g, \psi}(B(m, r)) \geq \text{vol}(M, g, \psi) \frac{\int_0^r (s_\delta(u))^{n+q-1} du}{\int_0^{\text{diam}(M, g)} (s_\delta(u))^{n+q-1} du}.$$

- Le corollaire 3.4.22 suggère une extension des théorèmes de précompacité du genre du théorème 1.7.5 pour une distance (ou seulement une topologie) adéquate sur les espaces métriques mesurés (voir dans cette direction l'article [Fu] de K. Fukaya et le chapitre 3<sup>1/2</sup> de [Gr]).

## Chapitre 4

# Continuité du profil isopérimétrique vis-à-vis de la distance de Gromov-Hausdorff

M. Gromov a introduit une distance sur l'ensemble  $\mathcal{E}$  des classes d'isométrie des espaces métriques compacts, appelée *distance de Gromov-Hausdorff*, qui généralise la distance de Hausdorff sur les parties compactes non vides d'un espace métrique. La distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques compacts  $(E_1, d_1)$  et  $(E_2, d_2)$  est donnée par (voir [GLP] et [BBI])

$$d_{\text{GH}}((E_1, d_1), (E_2, d_2)) := \inf_{d_{1,2}} \left\{ d_{H, d_{1,2}}(E_1, E_2) \right\}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des distances  $d_{1,2}$  sur l'union disjointe de  $E_1$  et  $E_2$  qui coïncident respectivement avec  $d_1$  et  $d_2$  en restriction à  $E_1$  et  $E_2$ , et où  $d_{H, d_{1,2}}$  désigne la distance de Hausdorff sur les parties compactes non vides de  $(E_1 \amalg E_2, d_{1,2})$ . L'espace métrique  $(\mathcal{E}, d_{\text{GH}})$  s'avère alors être un espace métrique complet dont  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  est une partie précompacte<sup>1</sup> (théorème 5.3 page 65 de [GLP]). Il convient alors de s'intéresser à la continuité d'invariants géométriques attachés à certains espaces métriques compacts. Par exemple, les fonctions diamètre et radius sont continues (et même lipschitziennes) pour cette distance. L'objet de ce chapitre est l'étude du comportement de la suite des profils isopérimétriques associée à une suite de variétés fermées qui converge vers une variété fermée de même dimension, tous les termes de la suite satisfaisant une même borne inférieure sur la courbure de Ricci.

Nous avons obtenu, d'une manière assez inattendue, au chapitre 2, à l'occasion du corollaire 2.6.7, que lorsqu'une suite de variétés fermées de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), dont la courbure de Ricci est minorée par celle de la sphère  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ , converge vers la sphère  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ , alors la suite des rapports des profils sur celui de la sphère converge vers 1, uniformément sur  $]0, 1[$ . Il semble par conséquent naturel de se demander si cette "continuité", sous hypothèse de courbure, du profil isopérimétrique en la sphère canonique est un phénomène particulier à la sphère ou bien si, à l'instar de la continuité du volume (voir [C3]), il s'inscrit dans un cadre plus vaste, à savoir que la convergence d'une suite de variétés vers une variété de même dimension, sous une minoration uniforme

1. En fait, M. Gromov établit la précompacité de l'ensemble des variétés riemanniennes compactes de même dimension, de diamètre uniformément majoré et de courbure de Ricci uniformément minorée. Par conséquent, la borne inférieure sur le volume des variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  n'est pas nécessaire à la précompacité de cet ensemble. Toutefois, cette contrainte supplémentaire sera conservée tout au long du chapitre 4 afin d'éviter le *phénomène d'effondrement* des suites de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  (voir la remarque 4.1.3).

de la courbure de Ricci, implique la convergence de la suite des profils isopérimétriques vers le profil de la variété limite. En étudiant plus précisément la preuve du corollaire 2.6.7, nous observons que ce résultat de continuité en la sphère vient d'une part de la convergence de la suite des volumes -ce qui impose une convergence des profils pour les petits volumes compte tenu du comportement du profil au voisinage de 0 (voir la proposition 1.5.2)- et d'autre part de l'utilisation de la sphère comme modèle de comparaison pour pincer la suite les profils isopérimétriques (voir le corollaire 2.4.14). Ainsi, puisque la preuve de la continuité du profil en la sphère semble reposer sur le fait que la sphère est un espace modèle auquel l'inéquation différentielle (2.7) permet de comparer les profils des variétés ayant le même minorant sur la courbure de Ricci, ce qui est caractéristique de la sphère, cette technique ne semble pas pouvoir être adaptée afin d'obtenir une généralisation du résultat par une méthode analogue. Cependant, l'autre point essentiel de la preuve, la continuité de la fonctionnelle volume sur les variétés satisfaisant la même borne inférieure sur la courbure de Ricci, prouvée par T. H. Colding dans [C3], n'est pas spécifique d'une convergence vers la sphère. De plus, ce résultat de continuité a été renforcé dans [ChC1] où J. Cheeger et T. H. Colding démontrent d'une part qu'en restriction à  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ , la fonction volume est uniformément continue, et d'autre part que son prolongement continu à l'adhérence de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  coïncide avec la mesure  $n$ -dimensionnelle de Hausdorff. Une lecture attentive des résultats et des techniques exposés dans [ChC1] nous a donné l'idée que des arguments analogues pourraient permettre de montrer que si  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de variétés fermées de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) qui satisfont, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Ricci}_{(M_i, g_i)} \geq -(n-1)g_i,$$

et qui convergent vers une variété fermée  $(M, g)$  de dimension  $n$  telle que

$$\text{Ricci}_{(M, g)} \geq -(n-1)g,$$

alors

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \sup_{\beta \in ]0,1[} \left| \frac{h_{(M_i, g_i)}(\beta)}{h_{(M, g)}(\beta)} - 1 \right| = 0.$$

Le chapitre 4 est essentiellement consacré à la preuve de ce résultat qui apparaît au théorème 4.2.7.

Dans un premier temps, nous présentons de manière détaillée les preuves et les résultats inspirés de [ChC1] qui permettent de décrire les espaces singuliers de l'adhérence de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  dans  $\mathcal{E}$ , pour la topologie induite par la distance de Gromov-Hausdorff. Les théorèmes 4.1.18 et 4.1.19 constituent l'aboutissement de ces constructions et donnent des estimations uniformes sur les ensembles  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ . Nous pouvons alors débiter la preuve de la convergence des profils isopérimétriques, organisée en deux étapes distinctes. D'une part, la convergence vers 1, uniformément sur tout compact de  $]0,1[$ , du rapport des profils s'obtient grâce aux descriptions fines et techniques des paragraphes précédents. D'autre part, cette convergence uniforme sur tout compact de  $]0,1[$  peut être améliorée en une convergence uniforme sur  $]0,1[$  par l'utilisation simultanée (dans l'application du lemme B.3.4) de la convergence des volumes et des propriétés de concavité des profils révélées par l'inéquation différentielle (2.7) commune à tous les profils renormalisés des variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ . Enfin, nous concluons ce chapitre par une approche fonctionnelle de la convergence des profils, qui met en parallèle deux théorèmes de précompacité : la précompacité de l'ensemble de variétés  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  (théorème 5.3 dans [GLP]) et la précompacité de l'ensemble des profils isopérimétriques renormalisés des variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  (corollaire 2.3.4 et théorème d'Ascoli). Nous verrons que cet

aspect fonctionnel nous incite à énoncer une conjecture concernant le comportement de la suite des profils isopérimétriques associée à une suite de variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  qui converge vers un espace singulier adhérent à  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ .

Avant de commencer, rappelons que même s'il est évident, compte tenu du comportement asymptotique des profils au voisinage de 0 (voir la proposition 1.5.2), que la convergence vers 1 du rapport des profils, uniformément sur  $]0,1[$ , implique la convergence des volumes, le travail présenté dans la suite s'appuie fortement sur le résultat de continuité des volumes de T. H. Colding. En conséquence, sans exclure le fait que d'autres preuves de la convergence des profils puissent, par le biais de cette remarque redonner la convergence des volumes, l'approche présentée ici ne le permet pas.

Enfin, observons que la nécessité d'une hypothèse de courbure, afin d'espérer le moindre résultat de convergence (convergence ponctuelle sur  $[0,1]$  par exemple) est illustrée par l'existence d'une famille  $(\mathbb{S}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de surfaces de révolution régulières de  $(\mathbb{R}^3, can)$ , dont l'allure des génératrices est proposée dans la figure 4.1, qui convergent, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, vers  $(\mathbb{S}^2, can)$  en distance de Gromov-Hausdorff, et dont la suite des évaluations des profils en  $\frac{1}{2}$  tend vers 0. Cet exemple montre, par la même occasion, la nécessité d'une minoration de la courbure pour obtenir le résultat de continuité des volumes de T. H. Colding.

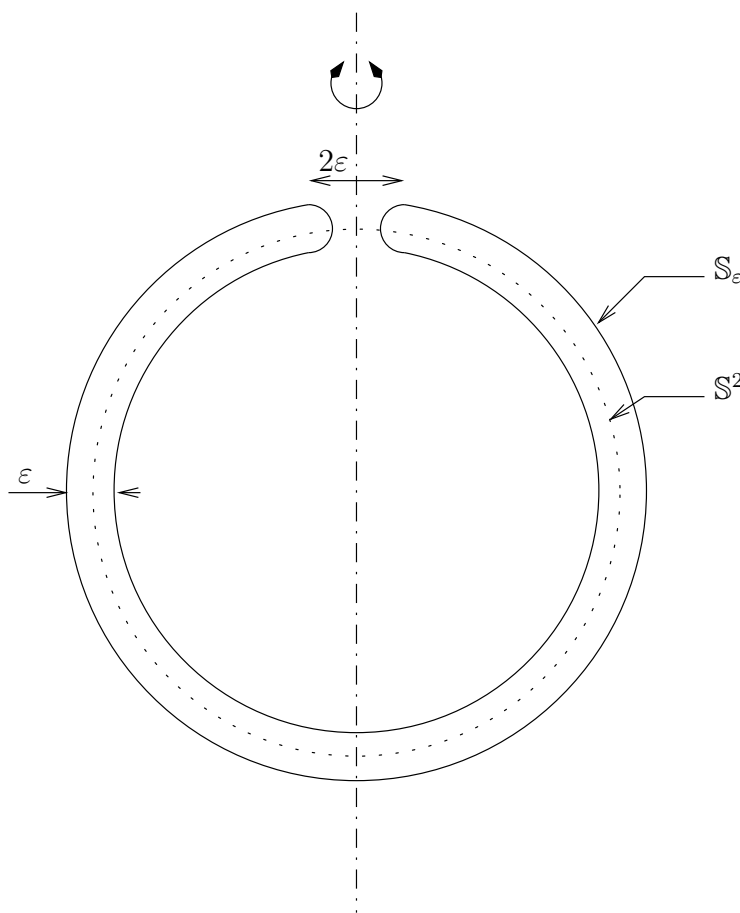


FIG. 4.1 – La famille des surfaces de révolution  $(\mathbb{S}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge en distance de Hausdorff, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, vers  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ , sans qu'il n'y ait convergence, ni des volumes, ni des profils isopérimétriques.

## 4.1 Etude de l'adhérence de $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ pour la distance de Gromov-Hausdorff

### 4.1.1 Définition du cadre. Notations

Considérons un espace métrique compact  $(M_\infty, d_\infty)$  obtenu comme limite, pour la distance de Gromov-Hausdorff, d'une suite  $((M_i, g_i))_{i \in \mathbb{N}}$  de variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ . Nous noterons  $d_i$  une distance compatible sur l'union disjointe de  $M_i$  et  $M_\infty$  -ce qui signifie qu'en restriction à  $M_i$  et  $M_\infty$ ,  $d_i$  coïncide respectivement avec la distance riemannienne et  $d_\infty$ - telle que la distance de Hausdorff entre  $M_i$  et  $M_\infty$  dans  $(M_i \amalg M_\infty, d_i)$  est strictement inférieure à  $d_{\text{GH}}((M_i, g_i), (M_\infty, d_\infty)) + \frac{1}{i}$ . Nous noterons  $\nu_i$  la mesure riemannienne canonique de  $(M_i, g_i)$ .

### 4.1.2 Construction d'une mesure limite sur $M_\infty$

Cette construction est une version détaillée de celle proposée dans [ChC1]. Notons  $(z_{\infty,p})_{p \in \mathbb{N}}$  une partie dénombrable dense de  $M_\infty$ . La convergence des variétés  $M_i$  vers  $M_\infty$  nous permet de construire, pour tout  $p$  entier, une suite  $(z_{i,p})_{i \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $i$  entier,  $z_{i,p}$  appartient à  $M_i$  et

$$d_i(z_{i,p}, z_{\infty,p}) \leq d_{\text{GH}}((M_i, g_i), (M_\infty, d_\infty)) + \frac{1}{i}.$$

Considérons la suite de fonctions  $(f_{i,p})_{i \in \mathbb{N}}$  définies par

$$\begin{aligned} f_{i,p} : [0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ r &\longmapsto \nu_i(B(z_{i,p}, r)). \end{aligned}$$

Observons que le théorème de Bishop-Gromov permet d'écrire, pour tout couple  $(r_1, r_2)$  tels que  $0 < r_1 < r_2 \leq \text{diam}(M_\infty, d_\infty)$ ,

$$\begin{aligned} |f_{i,p}(r_2) - f_{i,p}(r_1)| &= |\nu_i(B(z_{i,p}, r_2)) - \nu_i(B(z_{i,p}, r_1))| \\ &\leq \nu_i(B(z_{i,p}, r_1)) \left( \frac{\nu_i(B(z_{i,p}, r_2))}{\nu_i(B(z_{i,p}, r_1))} - 1 \right) \\ &\leq V_{n,\delta}(r_1) \left( \frac{V_{n,\delta}(r_2)}{V_{n,\delta}(r_1)} - 1 \right) \\ &\leq V_{n,\delta}(r_2) - V_{n,\delta}(r_1). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ainsi, pour tout  $p$  entier fixé, la suite de fonctions  $(f_{i,p})_{i \in \mathbb{N}}$  est uniformément équicontinue et à valeur dans un ensemble relativement compact de  $\mathbb{R}$  (car borné) si bien que le théorème d'Ascoli s'applique et permet d'affirmer que quitte à extraire, nous pouvons supposer que la suite  $(f_{i,p})_{i \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $f_{\infty,p}$ , continue sur  $[0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)]$ . Par procédé d'extraction diagonale, nous pouvons de plus supposer que pour tout  $p$  la suite  $(f_{i,p})_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f_{\infty,p}$ .

Considérons maintenant la fonction  $\tilde{f}_\infty$  définie sur la partie dense  $(z_{\infty,p})_{p \in \mathbb{N}} \times [0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)]$  de  $M_\infty \times [0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)]$  par

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall r \in [0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)] \quad , \quad \tilde{f}_\infty(z_{\infty,p}, r) := f_{\infty,p}(r).$$

Remarquons d'une part que par passage à la limite sur  $i$  dans la majoration (4.1), nous obtenons, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et pour tout  $(r_1, r_2) \in [0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)]^2$ ,

$$|\tilde{f}_\infty(z_{\infty,p}, r_2) - \tilde{f}_\infty(z_{\infty,p}, r_1)| \leq |V_{n,\delta}(r_2) - V_{n,\delta}(r_1)|,$$



et d'autre part que si  $r > d_\infty(z_{\infty,p}, z_{\infty,q})$ , alors

$$|\tilde{f}_\infty(z_{\infty,p}, r) - \tilde{f}_\infty(z_{\infty,q}, r)| \leq V_{n,\delta}(r) - V_{n,\delta}(r - d(z_{\infty,p}, z_{\infty,q})),$$

car

$$|\tilde{f}_\infty(z_{\infty,p}, r) - \tilde{f}_\infty(z_{\infty,q}, r)| = \lim_{i \rightarrow +\infty} |\nu_i(B(z_{i,p}, r)) - \nu_i(B(z_{i,q}, r))|,$$

et si  $\nu_i(B(z_{i,p}, r)) \geq \nu_i(B(z_{i,q}, r))$ , comme  $B(z_{i,p}, r - d(z_{i,p}, z_{i,q})) \subset B(z_{i,q}, r)$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq \nu_i(B(z_{i,p}, r)) - \nu_i(B(z_{i,q}, r)) &\leq \nu_i(B(z_{i,p}, r)) - \nu_i(B(z_{i,p}, r - d(z_{i,p}, z_{i,q}))) \\ &\leq V_{n,\delta}(r) - V_{n,\delta}(r - d(z_{i,p}, z_{i,q})). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\tilde{f}_\infty$  est uniformément continue et se prolonge par conséquent en une fonction  $f_\infty$ , continue et définie sur  $M_\infty \times [0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)]$ .

**Remarque 4.1.1** Dans l'idée de cette construction,  $f_\infty(z, r)$  est le bon candidat pour représenter le "volume" de la boule de centre  $z$  et de rayon  $r$  dans  $M_\infty$ . Cependant, nous ne pouvons pas encore l'affirmer.

Observons que la fonction  $f_\infty$  satisfait la propriété suivante :

**Proposition 4.1.2** Si  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de points telle que pour tout  $i$  entier,  $m_i$  appartient à  $M_i$  et s'il existe  $m_\infty$  dans  $M_\infty$  tel que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} d_i(m_i, m_\infty) = 0,$$

alors, pour toute suite réelle  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $r \in [0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)]$ ,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \nu_i(B(m_i, r_i)) = f_\infty(m_\infty, r).$$

**Démonstration.** Montrons tout d'abord le résultat lorsque la suite  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est constante et égale à  $r \in [0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)]$ . Soient  $m_\infty$  dans  $M_\infty$ ,  $r$  dans  $[0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)]$  et  $\varepsilon > 0$  fixés. Par densité de la famille  $(z_{\infty,p})_{p \in \mathbb{N}}$ , il existe une suite  $(z_{\infty,p_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d_\infty(z_{\infty,p_k}, m_\infty) = 0.$$

Notons

$$a_{i,k} := d_i(z_{i,p_k}, z_{\infty,p_k}) \quad , \quad b_{i,k} := d_\infty(z_{\infty,p_k}, m_\infty) \quad , \quad c_i := d_i(m_i, m_\infty)$$

et gardons bien en tête que pour tout  $k$  fixé, ces suites tendent vers 0 lorsque  $i$  tend vers  $+\infty$ . Observons alors que

$$d_i(m_i, z_{i,p_k}) \leq d_i(m_i, m_\infty) + d_\infty(z_{\infty,p_k}, m_\infty) + d_i(z_{i,p_k}, z_{\infty,p_k}) = a_{i,k} + b_{i,k} + c_i$$

si bien que dans  $M_i$ ,

$$B(z_{i,p_k}, r - a_{i,k} - b_{i,k} - c_i) \subset B(m_i, r) \subset B(z_{i,p_k}, r + a_{i,k} + b_{i,k} + c_i),$$

d'où, avec le théorème de Bishop-Gromov,

$$\nu_i(B(m_i, r)) \leq \nu_i(B(z_{i,p_k}, r + a_{i,k} + b_{i,k} + c_i)) \leq \nu_i(B(z_{i,p_k}, r)) \frac{V_{n,\delta}(r + a_{i,k} + b_{i,k} + c_i)}{V_{n,\delta}(r)} \quad (4.2)$$

et

$$\begin{aligned} \nu_i(B(m_i, r)) &\geq \nu_i(B(z_{i, p_k}, r - a_{i, k} - b_{i, k} - c_i)) \\ &\geq \nu_i(B(z_{i, p_k}, r)) - \left[ \nu_i(B(z_{i, p_k}, r)) - \nu_i(B(z_{i, p_k}, r - a_{i, k} - b_{i, k} - c_i)) \right] \\ &\geq \nu_i(B(z_{i, p_k}, r)) - \left[ V_{n, \delta}(r) - V_{n, \delta}(r - a_{i, k} - b_{i, k} - c_i) \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Par continuité de  $f_\infty$ , fixons  $k_0$  suffisamment grand de sorte que

$$|f_\infty(m_\infty, r) - f_\infty(z_{\infty, p_{k_0}}, r)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, il existe un entier  $i_0$  tel que pour tout  $i \geq i_0$ ,

$$r \geq a_{i, k_0} + b_{i, k_0} + c_i,$$

$$|V_{n, \delta}(r) - V_{n, \delta}(r - a_{i, k_0} - b_{i, k_0} - c_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$\frac{V_{n, \delta}(r + a_{i, k_0} + b_{i, k_0} + c_i)}{V_{n, \delta}(r)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout  $i \geq i_0$ , à partir des inégalités (4.2) et (4.3), nous obtenons

$$\nu_i(B(m_i, r)) \leq (1 + \varepsilon)\nu_i(B(z_{i, p_{k_0}}, r))$$

et

$$\nu_i(B(m_i, r)) \geq \nu_i(B(z_{i, p_{k_0}}, r)) - \frac{\varepsilon}{3},$$

d'où, en passant respectivement à la limite supérieure et inférieure, sur  $i$ ,

$$f_\infty(m_\infty, r) - \frac{2\varepsilon}{3} \leq \liminf_{i \rightarrow +\infty} \nu_i(B(m_i, r)) \leq \limsup_{i \rightarrow +\infty} \nu_i(B(m_i, r)) \leq (1 + \varepsilon) \left( f_\infty(m_\infty, r) + \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Le résultat s'en déduit alors en passant à la limite sur  $\varepsilon$  tendant vers 0.

Si la suite  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  n'est pas constante et converge vers  $r \in [0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)]$ , si  $r = 0$ , le résultat est immédiat car  $f_\infty(m, 0) = 0$  et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\nu_i(B(m_i, r_i)) \leq V_{n, \delta}(r_i)$ . Si  $r > 0$ , observons que d'une part

$$\nu_i(B(m_i, r_i)) \geq \begin{cases} \nu_i(B(m_i, r)) & \text{si } r_i \geq r, \\ \frac{V_{n, \delta}(r_i)}{V_{n, \delta}(r)} \nu_i(B(m_i, r)) & \text{si } r_i < r, \end{cases}$$

et d'autre part

$$\nu_i(B(m_i, r_i)) \leq \begin{cases} \nu_i(B(m_i, r)) & \text{si } r_i \leq r, \\ \frac{V_{n, \delta}(r_i)}{V_{n, \delta}(r)} \nu_i(B(m_i, r)) & \text{si } r_i > r, \end{cases}$$

d'où le résultat par passage à la limite sur  $i$ . □

A partir de cette fonction  $f_\infty$ , nous pouvons construire une mesure extérieure  $\nu_\infty$  définie pour toute partie  $A$  de  $M_\infty$  par

$$\nu_\infty(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_{\infty, \varepsilon}(A)$$

où

$$\nu_{\infty, \varepsilon}(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} f_\infty(m_k, r_k) \mid A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(m_k, r_k), \forall k \in \mathbb{N}, r_k \leq \varepsilon \right\}.$$

(dans cette définition, nous considérons les recouvrements par des boules ouvertes, ce qui n'a pas vraiment d'importance d'après la remarque 2.3 page 7 de [Si]). Le critère de Carathéodory (voir le théorème 1.2 page 3 de [Si]) implique que cette mesure est Borel-régulière, ce qui signifie (voir [Si], page 2) que les boréliens sont  $\nu_\infty$ -mesurables et que pour toute partie  $A$  de  $M_\infty$ , il existe un Borélien  $B$  contenant  $A$  et de même mesure que  $A$ .

**Remarque 4.1.3** Notons une conséquence immédiate de la proposition 4.1.2, pour tout point  $m$  de  $M_\infty$ , la fonction

$$r \longmapsto \frac{f_\infty(m,r)}{V_{n,\delta}(r)}, \quad (4.4)$$

définie sur  $]0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)[$ , est décroissante et sa limite lorsque  $r$  tend vers 0 est majorée par 1. Ceci implique en particulier que la mesure  $\nu_\infty$  est majorée par la mesure de Hausdorff  $n$ -dimensionnelle. De plus, le théorème de Bishop-Gromov appliqué aux variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  montre que la fonction définie par (4.4) est minorée par  $\frac{v}{V_{n,\delta}(d)}$ . Ce minorant strictement positif, qui résulte de la minoration uniforme du volume et de la majoration uniforme des diamètres des éléments de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ , interdit à la fonction  $f_\infty$  d'être identiquement nulle, ce qui pourrait se produire s'il y avait effondrement de la suite  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (par exemple convergence vers une variété de dimension strictement inférieure).

Enonçons et prouvons le théorème 1.10 de [ChC1] :

**Proposition 4.1.4** *La mesure  $\nu_\infty$  vérifie*

$$\forall (m,r) \in M_\infty \times [0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)] \quad , \quad \nu_\infty(B(m,r)) = f_\infty(m,r). \quad (4.5)$$

*Ainsi,  $\nu_\infty$  est une mesure de Radon et par ailleurs,  $\nu_\infty$  est l'unique mesure de Radon sur  $M_\infty$  satisfaisant cette propriété.*

**Démonstration.**

Fixons  $m$  dans  $M_\infty$ ,  $r \in ]0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)[$  et  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de points tels que pour tout  $i$  entier,  $m_i$  appartient à  $M_i$  et

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} d_i(m_i, m) = 0.$$

Nous noterons  $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de réels qui tend vers 0 et telle que pour tout  $i$  entier,

$$d_{\text{GH}}((M_i, g_i), (M_\infty, d_\infty)) < \rho_i.$$

Appliquons alors le lemme de recouvrement D.1.1 simultanément à toutes les boules  $B(m_i, r)$ . Il existe  $r_c(\varepsilon, \eta | n, d, v, \delta) > 0$ ,  $N_c(\varepsilon, \eta, n, d, v, \delta) \in \mathbb{N}$  et pour tout  $i$  entier, une famille de boules ouvertes  $(B(m_i^k, s_i^k))_{k=1, \dots, N_i}$  centrées dans  $B(m_i, r + \varepsilon)$  et recouvrant  $B(m_i, r)$  telles que

- $\forall k = 1, \dots, N_i, r_c \leq s_i^k \leq \varepsilon,$
- $N_i \leq N_c,$
- 

$$\sum_{k=1}^{N_i} \nu_i(B(m_i^k, s_i^k)) \leq (1 + \eta) \nu_i(B(m_i, r + \varepsilon)). \quad (4.6)$$

Dans un premier temps, pour  $i$  fixé, complétons la famille  $(m_i^k)_{k=1, \dots, N_i}$  par des points quelconques de  $B(m_i, r)$ , notés  $(m_i^k)_{k=N_i+1, \dots, N_c}$  auxquels nous associons une boule fermée de rayon nul.

Ainsi, pour  $k = 1, \dots, N_c$  fixé, à toute suite  $(m_i^k)_{i \in \mathbb{N}}$  associons une suite de points  $(m_{i, \infty}^k)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $M_\infty$  tels que  $d_i(m_i^k, m_{i, \infty}^k) \leq \rho_i$ . Quitte à extraire successivement un nombre fini de fois, nous pouvons supposer que tout pour  $k = 1, \dots, N_c$  fixé, les suites  $(m_{i, \infty}^k)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(s_i^k)_{i \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers  $m_\infty^k$  et  $s_\infty^k$ .

La propriété de recouvrement des familles  $(B(m_i^k, s_i^k))_{k=1, \dots, N_i}$  permet d'affirmer que les familles  $(B(m_{i, \infty}^k, s_i^k + 2\rho_i))_{k=1, \dots, N_i}$  indicées par  $i$  entier constituent une suite de recouvrement de  $B(m, r)$  par des boules de rayon inférieur à  $2\varepsilon$  (pour  $i$  assez grand) de sorte que pour tout  $i$  assez grand (tel que  $\rho_i \leq \varepsilon$ ),

$$\nu_{\infty, 2\varepsilon}(B(m, r)) \leq \sum_{k=1}^{N_c} f_\infty(m_{i, \infty}^k, s_i^k + 2\rho_i)$$

soit, en passant à la limite sur  $i$  et en utilisant la continuité de  $f_\infty$ ,

$$\nu_{\infty, 2\varepsilon}(B(m, r)) \leq \sum_{k=1}^{N_c} f_\infty(m_\infty^k, s_\infty^k).$$

Observons maintenant qu'en passant à la limite sur  $i$  dans (4.6), avec l'aide de la proposition 4.1.2, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{N_c} f_\infty(m_\infty^k, s_\infty^k) \leq (1 + \eta) f_\infty(m, r + \varepsilon),$$

d'où, pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$ ,

$$\nu_{\infty, 2\varepsilon}(B(m, r)) \leq (1 + \eta) f_\infty(m, r + \varepsilon)$$

ce qui donne par passage à la limite sur  $\varepsilon$  puis sur  $\eta$ ,

$$\nu_\infty(B(m, r)) \leq f_\infty(m, r).$$

Ainsi,  $\nu_\infty$  est une mesure Borel-régulière de masse totale finie (car  $f_\infty(m, r) \leq V_{n, \delta}(d)$ , voir la remarque 4.1.3) donc une mesure de Radon puisque  $M_\infty$  est un espace métrique compact (voir le théorème 1.3 page 4 de [Si]).

Montrons maintenant l'inégalité réciproque : soit  $\varepsilon > 0$ , comme nous savons désormais que  $\nu_\infty$  est finie, par définition de  $\nu_\infty$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et un recouvrement de  $B(m, r)$  par des boules  $(B(m^k, s^k))_{k=1, \dots, N}$  (nous pouvons nous limiter à un nombre fini de boules car nous recouvrons un compact par des boules ouvertes) tel que pour tout  $k = 1, \dots, N$ ,  $s^k \leq \varepsilon_0$  et

$$\nu_\infty(B(m, r)) \geq \sum_{k=1}^N f_\infty(m^k, s^k) - \varepsilon.$$

Cependant nous observons alors que pour tout  $i$  entier, la boule  $B(m_i, r)$  de  $M_i$  est recouverte par la famille de boules  $(B(m_i^k, s^k + 2\rho_i))_{k=1, \dots, N}$  où  $m_i^k$  appartient à  $M_i$  et satisfait  $d_i(m_i^k, m_i) \leq \rho_i$ . Ainsi,

$$\text{vol}(B(m_i, r)) \leq \sum_{k=1}^N \text{vol}(B(m_i^k, s^k + 2\rho_i)),$$

soit, en utilisant le résultat de la proposition 4.1.2 et en passant à la limite sur  $i$ ,

$$f_\infty(m,r) \leq \sum_{k=1}^N f_\infty(m^k, s^k),$$

d'où

$$f_\infty(m,r) \leq \nu_\infty(B(m,r)) + \varepsilon$$

et le résultat (4.5) par passage à la limite.

Il ne reste plus qu'à voir que cette mesure de Radon est caractérisée par la propriété (4.5). En effet, si deux mesures de Radon sur  $\nu_\infty$  satisfont la propriété (4.5), alors elles coïncident sur les boules, d'où l'unicité d'après le lemme de recouvrement D.1.1 puisque la mesure de tout compact s'approche par des sommes de mesure de boules.  $\square$

### 4.1.3 Identification de cette mesure

Ce paragraphe doit beaucoup à Laurent Bessières, notamment les lemmes 4.1.10, 4.1.13 et 4.1.15.

**Définition 4.1.5** *Pour tout point  $z$  de  $M_\infty$ , notons  $\theta^n(z, \nu_\infty)$  la densité de la mesure  $\nu_\infty$  en  $z$ , définie par*

$$\theta^n(z, \nu_\infty) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\nu_\infty(B(z,r))}{\omega_n r^n}.$$

**Remarque 4.1.6** Par construction de  $\nu_\infty$ , l'inégalité

$$\forall z \in M_\infty \quad , \quad \theta^n(z, \nu_\infty) \leq 1$$

est immédiate et vient du théorème de Bishop. De plus la propriété de monotonie évoquée lors de la remarque 4.1.3 montre qu'en tout point de  $M_\infty$ , la limite inférieure est en fait une limite.

**Définition 4.1.7** *Un point  $z$  de  $M_\infty$  est appelé point régulier s'il possède un unique cône tangent isométrique à  $(\mathbb{R}^n, can)$ , c'est à dire si*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} d_{GH}(B_{\frac{d_\infty}{\lambda}}(z,1), B_0(1)) = 0,$$

où  $B_0(1)$  désigne la boule unité centrée à l'origine de  $(\mathbb{R}^n, can)$  et où  $B_{\frac{d_\infty}{\lambda}}(z,1)$  désigne la boule de  $(M_\infty, d_\infty)$ , centrée en  $z$ , de rayon  $\frac{1}{\lambda}$  et munie de la distance  $\frac{d_\infty}{\lambda}$ .

Notons  $\mathcal{R}_\infty$  l'ensemble des points réguliers de  $M_\infty$  et  $\mathcal{S}_\infty$  son complémentaire, l'ensemble des points singuliers. Nous utiliserons aussi le sous-ensemble  $\mathcal{R}_{\infty, \varepsilon}$  défini pour tout  $\varepsilon > 0$  par

$$\mathcal{R}_{\infty, \varepsilon} := \left\{ z \in M_\infty \mid \exists r(\varepsilon, z) t. q. \forall r \leq r(\varepsilon, z), d_{GH}(B(z,r), B_0(r)) \leq \varepsilon r \right\},$$

où  $B_0(r)$  désigne la boule euclidienne de rayon  $r$  et de centre l'origine dans  $(\mathbb{R}^n, can)$ .

**Remarque 4.1.8** Observons que

$$\mathcal{R}_\infty = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{R}_{\infty, \varepsilon}.$$

En effet, par définition, si  $z \in M_\infty$  est un point régulier,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists r(z, \varepsilon) > 0 \mid \forall r \leq r(z, \varepsilon) \quad d_{\text{GH}}\left(B_{\frac{d_\infty}{r}}(z, 1), B_0(1)\right) \leq \varepsilon,$$

soit, d'après le lemme d'homogénéité 4.1.9,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists r(z, \varepsilon) > 0 \mid \forall r \leq r(z, \varepsilon) \quad d_{\text{GH}}\left(B_{d_\infty}(z, r), B_0(r)\right) \leq \varepsilon r,$$

donc pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{R}_{\infty, \varepsilon}.$$

L'inclusion réciproque est immédiate dès que l'on a compris que par homogénéité, l'appartenance d'un point  $z$  à  $\mathcal{R}_{\infty, \varepsilon}$  signifie

$$\exists r(z, \varepsilon) > 0 \mid \forall r \leq r(z, \varepsilon) \quad d_{\text{GH}}\left(B_{\frac{d_\infty}{r}}(z, 1), B_0(1)\right) \leq \varepsilon,$$

d'où

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{R}_{\infty, \varepsilon} \subset \mathcal{R}_\infty.$$

**Lemme 4.1.9** *Si  $(E_1, d_1)$  et  $(E_2, d_2)$  sont deux espaces métriques compacts, alors pour tout  $\lambda > 0$ ,*

$$d_{\text{GH}}\left((E_1, \lambda d_1), (E_2, \lambda d_2)\right) = \lambda d_{\text{GH}}\left((E_1, d_1), (E_2, d_2)\right).$$

Etablissons deux lemmes dont le but est de préciser les relations entre la densité en un point et l'appartenance de ce point aux ensembles  $\mathcal{R}_{\infty, \varepsilon}$ , ce qui, d'une certaine manière, quantifie son "degré de régularité".

**Lemme 4.1.10** *Soit  $z$  un point de  $M_\infty$ . Pour tout  $\kappa > 0$ , il existe  $\varepsilon(\kappa, n, \delta) > 0$  tel que si  $z$  appartient à  $\mathcal{R}_{\infty, \varepsilon(\kappa, n, \delta)}$ , alors*

$$\theta^n(z, \nu_\infty) \geq 1 - \kappa.$$

*Ce qui est remarquable est que  $\varepsilon(\kappa, n, \delta)$  ne dépend pas de  $z$ .*

**Démonstration.**

Rappelons tout d'abord le résultat de T. H. Colding (voir [C3] et la proposition 4.1 de [G3]).

**Théorème 4.1.11** *Pour tout  $\kappa > 0$ , il existe  $\varepsilon(\kappa|n, \delta) > 0$  et  $\rho(\kappa|n, \delta) \ll 1$  tels que pour toute variété riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) satisfaisant*

$$\text{Ricci}_{(M, g)} \geq (n - 1)\delta g,$$

*si pour  $p$  dans  $M$  et  $R \leq \rho(\kappa|n, \delta)$  on a*

$$d_{\text{GH}}\left(B(p, R), B_0(R)\right) < \varepsilon(\kappa|n, \delta)R,$$

*alors pour tout  $q$  dans  $B(p, (1 - \rho(\kappa|n, \delta))R)$  et tout  $r < \rho(\kappa|n, \delta)^2 R$ ,*

$$\frac{\text{vol}(B(q, r))}{\omega_n r^n} \geq 1 - \kappa.$$

Soient  $\kappa > 0$ ,  $z$  dans  $M_\infty$  et  $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de points telle que pour tout  $i$  entier,  $z_i$  appartient à  $M_i$  et  $\lim_{i \rightarrow +\infty} d_i(z_i, z) = 0$ . Appliquons le théorème 4.1.11 et notons  $\varepsilon(\kappa|n, \delta) > 0$ ,  $\rho(\kappa|n, \delta) \ll 1$  les constantes obtenues. Si  $z$  appartient à  $\mathcal{R}_{\infty, \frac{\varepsilon(\kappa, n, \delta)}{2}}$ , alors il existe  $r(z, \varepsilon) \leq \rho(\kappa, n, \delta)$  tel que

$$\forall r < r(z, \varepsilon) \quad , \quad d_{\text{GH}}(B(z, r), B_0(r)) \leq \frac{\varepsilon(\kappa|n, \delta)r}{2}.$$

Par ailleurs, la convergence de la suite de variétés implique celle des boules  $(B(z_i, r(z, \varepsilon)))_{i \in \mathbb{N}}$  si bien qu'il existe  $i(\varepsilon)$  tel que

$$\forall i \geq i(\varepsilon) \quad , \quad d_{\text{GH}}(B(z_i, r(z, \varepsilon)), B(z, r(z, \varepsilon))) \leq \frac{\varepsilon r(z, \varepsilon)}{2}$$

de sorte que

$$\forall i \geq i(\varepsilon) \quad , \quad d_{\text{GH}}(B(z_i, r(z, \varepsilon)), B_0(r(z, \varepsilon))) \leq \varepsilon r(z, \varepsilon).$$

Ainsi le théorème 4.1.11 nous permet d'affirmer

$$\forall i \geq i(\varepsilon) \quad , \quad \forall r < \rho(\kappa|n, \delta)^2 r(z, \varepsilon) \quad , \quad \frac{\nu_i(B(z_i, r))}{\omega_n r^n} \geq 1 - \kappa$$

ce qui donne, en passant à la limite sur  $i$  à  $r$  fixé,

$$\forall r < \rho(\kappa|n, \delta)^2 r(z, \varepsilon) \quad , \quad \frac{\nu_\infty(B(z, r))}{\omega_n r^n} \geq 1 - \kappa,$$

d'où

$$\theta^n(z, \nu_\infty) \geq 1 - \kappa.$$

□

Rappelons ici le corollaire 2.19 de [C1], qui se déduit du théorème 4.1.11 et dont nous aurons besoin plus tard.

**Théorème 4.1.12** *Pour tout  $\kappa > 0$ , il existe  $\varepsilon(\kappa|n, \delta) > 0$  et  $\rho(\kappa|n, \delta) > 0$  tels que pour toute variété riemannienne  $(M, g)$  vérifiant*

$$\text{Ricci}_{(M, g)} \geq (n-1)\delta g \quad , \quad \delta \in \mathbb{R},$$

si pour  $m \in M$  et  $r \leq \rho(\kappa|n, \delta)$  on a

$$d_{\text{GH}}(B(m, r), B_0(r)) \leq \varepsilon(\kappa|n, \delta)r,$$

alors

$$\text{vol}(B(m, r)) \geq (1 - \kappa)\omega_n r^n.$$

**Lemme 4.1.13** *Pout tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\kappa(\varepsilon|n, \delta) \geq 0$  tel que si*

$$\theta^n(z, \nu_\infty) \geq 1 - \kappa(\varepsilon|n, \delta),$$

alors  $z$  appartient à  $\mathcal{R}_{\infty, \varepsilon}$ . Bien observer que  $\kappa(\varepsilon|n, \delta)$  ne dépend pas du point  $z$  considéré.

**Démonstration.**

Rappelons le théorème de T. H. Colding (voir [C3] et le théorème 1.10 de [G3])

**Théorème 4.1.14** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\kappa(\varepsilon|n,\delta) > 0$  et  $\rho(\varepsilon|n,\delta)$  tels que pour toute variété riemannienne  $(M,g)$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) satisfaisant*

$$\text{Ricci}_{M,g} \geq (n-1)\delta g,$$

si pour  $p$  dans  $M$  et  $R \leq \rho(\varepsilon|n,\delta)$  on a

$$\text{vol}_{(M,g)}(B(p,R)) \geq (1 - \kappa(\varepsilon|n,\delta))\omega_n R^n,$$

alors

$$d_{\text{GH}}(B(p,R), B_0(R)) \leq \varepsilon R.$$

Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $z$  dans  $M_\infty$  et  $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de points telle que pour tout  $i$  entier,  $z_i$  appartient à  $M_i$  et  $\lim_{i \rightarrow +\infty} d_i(z_i, z) = 0$ . Appliquons le théorème 4.1.14 en remplaçant  $\varepsilon$  par  $\frac{\varepsilon}{2}$  et notons  $\kappa(\frac{\varepsilon}{2}|n,\delta) > 0$  et  $\rho(\frac{\varepsilon}{2}|n,\delta)$  les constantes qui apparaissent. Si nous supposons que

$$\theta^n(z, \nu_\infty) \geq 1 - \frac{\kappa(\frac{\varepsilon}{2}|n,\delta)}{3},$$

alors il existe  $r(z, \kappa) > 0$  tel que  $r(z, \kappa) \leq \rho(\frac{\varepsilon}{2}|n,\delta)$  et

$$\forall r \leq r(z, \kappa) \quad , \quad \frac{\nu_\infty(B(z,r))}{\omega_n r^n} \geq 1 - \frac{2\kappa(\frac{\varepsilon}{2}|n,\delta)}{3}.$$

Fixons  $r$  dans  $]0, r(z, \kappa)[$ . La convergence des variétés implique celle des boules  $(B(z_i, r(z, \kappa)))_{i \in \mathbb{N}}$  et la définition de  $\nu_\infty$  donne celle des volumes si bien qu'il existe  $i(z, \kappa, r)$  tel que

$$\forall i \geq i(z, \kappa, r) \quad , \quad d_{\text{GH}}(B(z_i, r), B(z, r)) \leq \frac{\varepsilon r}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\nu_\infty(B(z, r))}{\omega_n r^n} - \frac{\nu_i(B(z_i, r))}{\omega_n r^n} \right| \leq \frac{\kappa}{3}.$$

Ainsi, pour  $i = i(z, \kappa, r)$ , on obtient

$$\frac{\nu_i(B(z_i, r))}{\omega_n r^n} \geq \frac{\nu_i(B(z_i, r(z, \kappa)))}{\omega_n r(z, \kappa)^n} \geq 1 - \kappa$$

de sorte que le théorème 4.1.14 donne

$$d_{\text{GH}}(B(z_i, r), B_0(r)) \leq \frac{\varepsilon r}{2}$$

d'où, avec l'inégalité triangulaire,

$$d_{\text{GH}}(B(z, r), B_0(r)) \leq \varepsilon r.$$

Ceci étant vrai pour tout  $r \in ]0, r(z, \kappa)[$ , nous en déduisons que  $z$  appartient à  $\mathcal{R}_{\infty, \varepsilon}$ .  $\square$

Comme conséquence des lemmes 4.1.10 et 4.1.13, nous obtenons une caractérisation des points réguliers par leur densité.

**Lemme 4.1.15** *Un point  $z$  de  $M_\infty$  est régulier si et seulement si*

$$\theta^n(z, \nu_\infty) = 1.$$

**Remarque 4.1.16** Nous pourrions être tentés de comprendre le fait qu'un point régulier  $z$  de  $M_\infty$  est de densité 1 comme une conséquence de la généralisation de la



continuité de la fonction volume, énoncée au théorème 5.9 de [ChC1], en disant que par définition d'un point régulier,

$$\lim_{r \rightarrow 0} d_{\text{GH}}(B_{\frac{d_\infty}{r}}(z,1), B_0(1)),$$

de sorte que par continuité du volume, les petites boules centrées en  $z$  ont un volume presque euclidien. Ceci serait une erreur car la connaissance du lemme 4.1.15 est nécessaire pour établir le théorème 2.45 de [ChC1] dont découle ce "fameux" théorème 5.9.

**Démonstration.**

Le sens direct découle des remarques 4.1.6, 4.1.8 et du lemme 4.1.10 . Quant au sens réciproque, il se déduit du lemme 4.1.13 de manière analogue. □

Nous pouvons maintenant démontrer, à l'aide du théorème 2.1 de [ChC1], que  $\nu_\infty$  n'est autre que la mesure  $n$ -dimensionnelle de Hausdorff.

**Théorème 4.1.17** *La mesure  $\nu_\infty$  coïncide avec la mesure  $n$ -dimensionnelle de Hausdorff sur les parties non vides de  $M_\infty$ . En particulier, la construction proposée, qui dépendait a priori de l'extraction d'une sous-suite, n'en dépend plus.*

**Démonstration.** Nous utilisons tout d'abord la nullité de la mesure des points singuliers pour la mesure  $\nu_\infty$  (voir le théorème 2.1 de [ChC1]) puis le résultat du théorème 3.2 page 11 de [Si], qui exprime, à l'aide d'un lemme de recouvrement, que pour une mesure Borel-régulière, avoir une densité supérieure ou égale à 1 signifie qu'elle est minorée par la mesure de Hausdorff  $n$ -dimensionnelle. La remarque 4.1.3, qui donne la comparaison dans l'autre sens, permet alors de conclure. □

**4.1.4 Description des deux résultats essentiels**

Voici un théorème qui exprime le fait que modulo un ensemble de mesure arbitrairement petite, il existe un rayon uniforme sur les variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  en-deçà duquel "presque toutes" les petites boules ont un volume "presque" euclidien. Ce résultat est inspiré du théorème 6.68 de [ChC] dont la preuve est donnée dans [ChC1] de manière très succincte (tout au moins trop pour nous!). La preuve de l'énoncé proposée ici repose d'une part sur la précompacité de l'ensemble  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  et sur le théorème 2.1 de [ChC1], extrêmement fin et délicat, qui établit la nullité de la mesure de l'ensemble singulier des espaces appartenant à l'adhérence de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ ,

$$\nu_\infty(\mathcal{S}_\infty) = 0.$$

**Théorème 4.1.18** *Soient  $\kappa > 0$  et  $\tau > 0$ . Il existe  $r_0 = r_0(\kappa, \tau | n, d, v, \delta) > 0$  tel que pour toute variété  $(M, g)$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ ,*

$$\text{vol}_{(M,g)} \left( \left\{ m \in M \mid \frac{\text{vol}_{(M,g)}(B(m, r_0))}{\omega_n r_0^n} \leq 1 - \kappa \right\} \right) \leq \tau.$$

*Par conséquent, il existe  $r_1 = r_1(\tau | n, d, v, \delta)$  tel que pour toute variété  $(M, g)$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  et pour tout  $m$  dans  $M$ ,*

$$B(m, r_1) \cap \left\{ m \in M \mid \frac{\text{vol}_{(M,g)}(B(m, r_0))}{\omega_n r_0^n} \geq 1 - \kappa \right\} \neq \emptyset.$$

*Plus précisément,  $r_1(\tau | n, d, v, \delta) = C(n, d, v, \delta) \tau^{\frac{1}{n}}$  où  $C(n, d, v, \delta)$  est une constante ne dépendant que des paramètres indiqués.*

**Démonstration.**

Nous allons montrer ce résultat en raisonnant par l'absurde. Plus précisément, la négation du résultat annoncé donne l'assertion suivante : il existe  $\kappa_0 > 0$  et  $\tau_0 > 0$  tels que pour tout  $r > 0$ , il existe au moins une variété  $(M_r, g_r)$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  pour laquelle

$$\text{vol}_{(M_r, g_r)} \left( \left\{ m \in M_r \mid \frac{\text{vol}_{(M_r, g_r)}(B(m, r))}{\omega_n r^n} \leq 1 - \kappa_0 \right\} \right) \geq \tau_0.$$

Ainsi, nous pouvons supposer que l'on dispose d'une suite de réels  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0 et d'une suite  $((M_i, g_i))_{i \in \mathbb{N}}$  de variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  telles que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{vol}_{(M_i, g_i)} \left( \left\{ m \in M_i \mid \frac{\text{vol}_{(M_i, g_i)}(B(m, r_i))}{\omega_n r_i^n} \leq 1 - \kappa_0 \right\} \right) \geq \tau_0.$$

Par précompacité de l'ensemble  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  (voir le théorème 5.3 page 65 de [GLP]), quitte à extraire et à réindicer cette suite, nous pouvons supposer qu'elle converge vers un espace métrique compact limite  $(M_\infty, d_\infty)$ , sur lequel nous disposons d'une mesure de Radon limite, construite au paragraphe 4.1.2, qui coïncide avec la mesure  $n$ -dimensionnelle de Hausdorff (théorème 4.1.17). De plus, notons  $\nu_i$  la mesure riemannienne canonique sur la variété  $(M_i, g_i)$  et  $S_i$  la partie compacte de  $M_i$  définie par

$$S_i = \left\{ m \in M_i \mid \frac{\nu_i(B(m, r_i))}{\omega_n r_i^n} \leq 1 - \kappa_0 \right\}.$$

L'idée de la suite du raisonnement consiste à montrer qu'une sous-suite des parties compactes  $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers une partie compacte  $S_\infty$  de  $M_\infty$  dont la mesure  $\nu_\infty(S_\infty)$  est minorée par  $\tau_0$  et dont tous les points ont une densité, par rapport à la mesure  $\nu_\infty$ , inférieure à  $1 - \kappa_0$ . Par conséquent, en vertu du lemme 4.1.15,  $S_\infty$  est inclus dans l'ensemble  $\mathcal{S}_\infty$  des points singuliers de  $M_\infty$  d'où

$$\nu_\infty(\mathcal{S}_\infty) \geq \nu_\infty(S_\infty) \geq \tau_0 > 0,$$

ce qu'interdit le théorème 2.1 de [ChC1], d'où la contradiction attendue.

Ainsi, en reprenant les notations introduites au paragraphe 4.1.1 où  $d_i$  désigne une distance compatible sur l'union disjointe de  $M_i$  et  $M_\infty$  telle que la distance de Hausdorff entre  $M_i$  et  $M_\infty$  dans  $(M_i \amalg M_\infty, d_i)$  est strictement inférieure à  $d_{\text{GH}}((M_i, g_i), (M_\infty, d_\infty)) + \frac{1}{i}$ , il ne reste plus qu'à prouver les points suivants :

– **Construction de  $S_\infty$**

Définissons une suite de parties compactes non vides  $(S_{\infty, i})_{i \in \mathbb{N}}$  de  $M_\infty$  par

$$S_{\infty, i} := \left\{ m \in M_\infty \mid d_i(m, S_i) \leq d_{\text{GH}}((M_i, g_i), (M_\infty, d_\infty)) + \frac{2}{i} \right\}.$$

Le caractère non vide des éléments de cette suite vient du fait que la distance de Hausdorff entre  $M_i$  et  $M_\infty$  est inférieure à  $d_{\text{GH}}((M_i, g_i), (M_\infty, d_\infty)) + \frac{1}{i}$ . Par ailleurs, comme il s'agit de parties fermées dans un espace métrique compact, elles sont compactes. Ainsi, sachant que l'ensemble des parties compactes non vides d'un espace métrique compact est compact pour la distance de Hausdorff, il existe une partie compacte non vide que nous noterons  $S_\infty$  qui est une valeur d'adhérence de la suite  $(S_{\infty, i})_{i \in \mathbb{N}}$ . Quitte à extraire, nous supposons dorénavant que  $S_\infty$  est la limite pour la distance de Hausdorff de la suite  $(S_{\infty, i})_{i \in \mathbb{N}}$ .

– **Propriété de densité de la mesure  $\nu_\infty$  en les points de  $S_\infty$**

Soit  $m_\infty \in S_\infty$  et  $r > 0$ . Il existe donc  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  suite de points de  $S_i \subset M_i$  telle que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} d_i(m_\infty, m_i) = 0,$$

or la proposition 4.1.4 établit l'égalité

$$\nu_\infty(B(m_\infty, r)) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \nu_i(B(m_i, r)), \quad (4.7)$$

d'où

$$\frac{\nu_\infty(B(m_\infty, r))}{\omega_n r^n} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\nu_i(B(m_i, r))}{\omega_n r^n}.$$

Par ailleurs, il existe un entier  $i(r)$  suffisamment grand tel que pour  $i \geq i(r)$ ,  $r_i \leq r$ , ce qui, par le théorème de Bishop-Gromov implique

$$\forall i \geq i(r) \quad , \quad \frac{\nu_i(B(m_i, r))}{\omega_n r^n} \leq \frac{\nu_i(B(m_i, r_i)) V_{n,\delta}(r)}{V_{n,\delta}(r_i) \omega_n r^n},$$

d'où, en utilisant que  $m_i \in S_i$

$$\forall i \geq i(r) \quad , \quad \frac{\nu_i(B(m_i, r))}{\omega_n r^n} \leq (1 - \kappa_0) \frac{V_{n,\delta}(r) \omega_n r_i^n}{V_{n,\delta}(r_i) \omega_n r^n}.$$

En passant successivement à la limite sur  $i$  tendant vers  $+\infty$ , puis sur  $r$  tendant vers 0, compte tenu de la définition de la densité de  $\nu_\infty$ ,

$$\theta^n(m_\infty, \nu_\infty) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\nu_\infty(B(m_\infty, r))}{\omega_n r^n} \leq 1 - \kappa_0.$$

Ainsi en tout point de  $S_\infty$ , la densité est inférieure à  $1 - \kappa_0$ , d'où  $S_\infty \subset \mathcal{S}_\infty$  d'après le lemme 4.1.15.

– **Mesure de  $S_\infty$**

La mesure  $\nu_\infty$  est de Radon (voir la proposition 4.1.4),  $S_\infty$  est compact donc pour tout  $\eta > 0$ , par régularité de la mesure, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\nu_\infty(S_\infty) \geq \nu_\infty((S_\infty)_{2\varepsilon}) - \eta \geq \nu_\infty((S_\infty)_\varepsilon) - \eta. \quad (4.8)$$

(voisinage ouvert pour le premier et fermé pour le second car le résultat de recouvrement D.1.2 est énoncé pour des voisinages fermés). Par ailleurs, par définition de  $\nu_\infty$ , pour tout point  $z$  de  $M_\infty$ , la fonction

$$r \mapsto \frac{\nu_\infty(B(z, r))}{V_{n,\delta}(r)}$$

est décroissante sur  $]0, \text{diam}(M_\infty, d_\infty)]$  de sorte que nous pouvons appliquer la proposition D.1.2 (nous supposons donc de plus que  $\varepsilon \leq \frac{1}{3} \text{diam}(M_\infty, d_\infty)$ ). Ainsi, il existe un entier  $N(\varepsilon, \eta, n, d, v, \delta)$ , un réel  $r(\varepsilon, \eta | n, d, v, \delta) > 0$  et une famille de boules ouvertes  $(B(z_p, r_p))_{p=1, \dots, \tilde{N}}$  centrées dans  $(S_\infty)_\varepsilon$  tels que

- $\tilde{N} \leq N(\varepsilon, \eta, n, d, v, \delta)$ ,
- $\forall p = 1, \dots, \tilde{N} \quad , \quad r(\varepsilon, \eta | n, d, v, \delta) \leq r_p \leq \varepsilon$ ,

– les boules ouvertes  $(B(z_p, r_p))_{p=1, \dots, \tilde{N}}$  recouvrent  $S_\infty$  et

$$\sum_{p=1}^{\tilde{N}} \nu_\infty(B(z_p, r_p)) \leq (1 + \eta) \nu_\infty((S_\infty)_\varepsilon). \quad (4.9)$$

Observons maintenant que si  $d_H$  désigne la distance de Hausdorff dans  $(M_\infty, d_\infty)$ , on peut associer au recouvrement de  $S_\infty$  par la famille  $(B(z_p, r_p))_{p=1, \dots, \tilde{N}}$ , un recouvrement de  $S_i$  par une famille  $(B(z_p^i, r_p + \varepsilon_i))_{p=1, \dots, \tilde{N}}$  où  $\varepsilon_i = 2d_{\text{GH}}((M_i, g_i), (M_\infty, d_\infty)) + d_H(S_{\infty, i}, S_\infty) + \frac{4}{i}$ , si bien que

$$\sum_{p=1}^{\tilde{N}} \nu_i(B(z_p^i, r_p + \varepsilon_i)) \geq \nu_i(S_i) \geq \tau_0. \quad (4.10)$$

Or, la propriété caractéristique de  $\nu_\infty$  (voir la proposition 4.1.4) et le fait que la suite  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tende vers 0 lorsque  $i$  tend vers  $+\infty$  donnent

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \nu_i(B(z_p^i, r_p + \varepsilon_i)) = \nu_\infty(B(z_p, r_p)),$$

d'où, en passant à la limite dans (4.10) puis en injectant dans (4.9),

$$\nu_\infty(S_\infty) \geq \nu_\infty((S_\infty)_\varepsilon) - \eta \geq \frac{\tau_0}{1 + \eta} - \eta.$$

Ainsi, en reportant dans (4.8) et en passant à la limite sur  $\eta$ ,

$$\nu_\infty(S_\infty) \geq \tau_0 > 0.$$

Quant à la seconde affirmation du théorème 4.1.18, elle est immédiate car le théorème de Bishop-Gromov permet d'écrire pour tout point  $m$  d'une variété  $(M, g)$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ ,

$$\text{vol}_{(M, g)}(B(m, r)) \geq \frac{vV_{n, \delta}(r)}{V_{n, \delta}(d)}.$$

En effet, il suffit alors de poser

$$r_1(\tau | n, d, v, \delta) := \left( \frac{2\tau V_{n, \delta}(d)}{v\omega_n C(n, \delta, d)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

où

$$C(n, \delta, d) = \inf_{r \in [0, d]} \frac{V_{n, \delta}(r)}{\omega_n r^n},$$

pour pouvoir affirmer que sur toute variété  $(M, g)$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  toute boule de rayon  $r_1$  rencontre l'ensemble

$$\left\{ m \in M \mid \frac{\text{vol}_{(M, g)}(B(m, r_0))}{\omega_n r_0^n} \geq 1 - \kappa \right\}$$

de mesure supérieure à  $1 - \tau$  car sinon

$$\text{vol}_{(M, g)} \left( \left\{ m \in M \mid \frac{\text{vol}_{(M, g)}(B(m, r_0))}{\omega_n r_0^n} < 1 - \kappa \right\} \right) \geq \inf_{m \in M} \text{vol}_{(M, g)}(B(m, r_1)) > \tau,$$

d'où une contradiction avec le résultat obtenu précédemment.  $\square$

Le théorème suivant exprime qu'uniformément sur  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ , si deux variétés sont suffisamment proches et si un point de l'une et un point de l'autre sont également très proches, alors pour tout rayon pas trop petit, les boules de l'une et de l'autre centrées en ces points et de même rayon sont elles aussi proches. La preuve repose exclusivement sur un argument de compacité appliqué à l'ensemble  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ , ce qui rend ce résultat beaucoup plus accessible que le théorème 4.1.18.

**Théorème 4.1.19** *Soient  $r > 0$  et  $\varepsilon > 0$  fixés. Alors, il existe  $\xi(\varepsilon,r|n,d,v,\delta) > 0$  tel que si  $(M,g)$  et  $(M',g')$  sont deux variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  satisfaisant*

$$d_{\text{GH}}((M,g),(M',g')) < \xi,$$

*si  $m \in M$ ,  $m' \in M'$  et s'il existe une distance compatible  $d$  sur l'union disjointe de  $M$  et  $M'$  telle que  $d(m,m') \leq \xi$  alors, pour tout  $\tilde{r} \geq r$*

$$d_{\text{GH}}(B(m,\tilde{r}),B(m',\tilde{r})) \leq \varepsilon.$$

**Démonstration.** Raisonnons par l'absurde et montrons que la fonction  $h(\xi)$  définie par

$$h(\xi) := \sup_{\substack{((M,g),(M',g')) \in \mathcal{M}(n,d,v,\delta)^2 \\ d_{\text{GH}}((M,g),(M',g')) < \xi}} \left\{ d_{\text{GH}}(B(m,\tilde{r}),B(m',\tilde{r})) \mid (m,m') \in M \times M', \tilde{r} \geq r, (*) \right\}$$

tend vers 0 lorsque  $\xi$  tend vers 0, où  $(*)$  est la condition qu'il existe une distance compatible  $d$  sur l'union disjointe de  $M$  et  $M'$  telle que  $d(m,m') \leq \xi$ .

En effet, si ce résultat est faux, il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , une suite de réels  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$   $r \leq r_i \leq d$ , deux suites de variétés  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(M'_i, g'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  telles que

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad d_{\text{GH}}((M_i, g_i), (M'_i, g'_i)) \leq \frac{1}{i}$$

et deux suites de points  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(m'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tels que pour tout  $i$ , il existe une distance compatible  $d_i$  sur l'union disjointe de  $M_i$  et  $M'_i$  telle que  $d_i(m_i, m'_i) \leq \frac{1}{i}$  et

$$d_{\text{GH}}(B(m_i, r_i), B(m'_i, r'_i)) \geq \varepsilon_0. \tag{4.11}$$

Par précompacité de l'ensemble  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ , nous pouvons supposer, quitte à extraire, que la suite  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers un espace métrique limite compact  $(M_\infty, d_\infty)$ . Par conséquent, la suite  $(M'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge elle aussi vers la même limite, et toujours quitte à re-extraire, nous pouvons supposer que la suite  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui est à valeur dans  $[r, d]$  converge vers  $r_\infty \in [r, d]$  et que les suites  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(m'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  convergent vers un même point  $m_\infty$  de  $M_\infty$ . Mais alors

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} d_{\text{GH}}(B(m_i, r_i), B(m_\infty, r_\infty)) = 0 = \lim_{i \rightarrow +\infty} d_{\text{GH}}(B(m'_i, r_i), B(m_\infty, r_\infty)),$$

ce qui, avec l'inégalité triangulaire, contredit la minoration (4.11).  $\square$

## 4.2 Convergence du profil isopérimétrique

Au premier abord, il semble assez naturel d'envisager l'étude de la convergence des profils isopérimétriques en recherchant une convergence des hypersurfaces minimisantes et de leurs volumes  $(n - 1)$ -dimensionnels. Cependant, un résultat de ce type ne paraît pas du tout facile à obtenir, d'autant que la preuve de la convergence des volumes  $n$ -dimensionnels des boules géodésiques, a priori plus simple que celle de volumes  $(n - 1)$ -dimensionnels d'hypersurfaces, met en oeuvre, à elle seule, des techniques sophistiquées (voir [C3]). C'est pourquoi, nous allons développer une approche différente que suggèrent les résultats établis dans les deux lemmes du paragraphe suivant. Le lemme 4.2.1 montre tout d'abord que la valeur en un point du profil isopérimétrique peut être approchée par le taux d'accroissement des voisinages tubulaires des domaines isopérimétriques de volume correspondant. Ainsi naît l'idée de faire converger des différences discrètes de volumes  $n$ -dimensionnels, plutôt que des volumes  $(n - 1)$ -dimensionnels. Ce point de vue semble plus opportun que le précédent et nous permet d'utiliser les résultats obtenus par T. H. Colding dans [C3]. Afin de mettre en place cette stratégie, nous nous efforçons d'établir, dans le lemme 4.2.2, que lorsque deux variétés sont proches, il est possible de construire sur l'une et l'autre des domaines de volumes proches dont les voisinages tubulaires ont aussi des volumes proches. Après ces lemmes techniques dont nous avons essayé de privilégier l'interprétation géométrique, nous abordons l'étude de la continuité du profil isopérimétrique lors de la convergence d'une suite de variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  vers une variété de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ . Dans un premier temps, à l'aide des arguments techniques déployés précédemment, nous montrons que la suite des rapports des profils converge vers 1, uniformément sur tout compact de  $]0, 1[$  (théorème 4.2.4). Ensuite, nous observons que la régularité inhérente aux propriétés de concavité des profils isopérimétriques améliore cette convergence en une convergence uniforme en rapport sur  $]0, 1[$  (théorème 4.2.7). Nous terminons en proposant quelques réflexions et conjectures pour appréhender l'étude du problème analogue lorsque l'espace limite possède des singularités.

### 4.2.1 Préliminaires techniques sur les profils des variétés de $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$

#### Approximation du profil isopérimétrique par des taux d'accroissement de voisinages tubulaires de domaines isopérimétriques

**Lemme 4.2.1** *Soit  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Il existe une constante  $C_L(n, d, v, \delta, \beta_0) > 0$  telle que pour toute variété  $(M, g)$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ ,  $C_L(n, d, v, \delta, \beta_0)$  majore la constante de Lipschitz du profil  $h_{(M, g)}$  restreint à l'intervalle  $[\beta_0, 1 - \beta_0]$ .*

*De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta(\varepsilon | n, d, v, \delta, \beta_0) > 0$  tel que pour tout  $\beta \in [\beta_0, \frac{1}{2}]$ , si  $\Omega$  est un domaine isopérimétrique de volume relatif  $\beta$ , pour tout  $\eta \in ]0, \eta(\varepsilon | n, d, v, \delta, \beta_0)[$ ,*

$$(1 - \varepsilon)h_{(M, g)}(\beta) \leq \frac{1}{\text{vol}(M, g)} \frac{\text{vol}(\Omega_\eta) - \text{vol}(\Omega)}{\eta} \leq (1 + \varepsilon)h_{(M, g)}(\beta),$$

et

$$\text{vol}(\Omega) \leq \text{vol}(\Omega_\eta) \leq (1 + \varepsilon)\text{vol}(\Omega).$$

#### Démonstration.

La première affirmation est une conséquence immédiate de la régularité des profils  $h_{(M, g)}$  et  $y_{(M, g)}$  énoncée dans la proposition G.3.6, de la relation

$$h_{(M, g)'_d}(\beta) = \frac{n - 1}{n} \frac{y_{(M, g)'_d}(\beta)}{h_{(M, g)}(\beta)^{\frac{1}{n-1}}},$$

de la majoration de la constante de Lipschitz des profils renormalisés uniforme sur  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  (corollaire 2.3.4) et de la minoration du profil uniforme sur  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  (car la constante isopérimétrique de Cheeger est minorée, voir le théorème 1.4.4).

Quant à la seconde partie du lemme, la majoration est fournie par l'inégalité de Heintze-Karcher<sup>2</sup> dans laquelle la courbure moyenne du domaine isopérimétrique est contrôlée par le majorant de la constante de Lipschitz du profil sur  $[\beta_0, 1 - \beta_0]$  (voir la remarque 2.3.2) :

$$\frac{\text{vol}(\Omega_\eta) - \text{vol}(\Omega)}{\text{vol}(M,g)} \leq h_{(M,g)}(\beta) \int_0^\eta (c_\delta(u) + C_L(n,d,v,\delta,\beta_0)|s_\delta(u)|)^{n-1} du,$$

d'où l'existence d'un réel strictement positif  $\eta_1(\varepsilon|n,d,v,\delta,\beta_0)$  tel que pour tout  $\eta \leq \eta_1$ ,

$$\frac{\text{vol}(\Omega_\eta) - \text{vol}(\Omega)}{\eta \text{vol}(M,g)} \leq (1 + \varepsilon)h_{(M,g)}(\beta).$$

Par ailleurs, toujours à partir de l'inégalité de Heintze-Karcher, en utilisant la majoration du profil obtenue au théorème 2.4.12 et celle du volume de la variété donnée par le théorème de Bishop,

$$\text{vol}(\Omega_\eta) \leq \text{vol}(\Omega) + V_{n,\delta}(d)h_{n,\delta,R_0(n,\delta,v)}\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^\eta (c_\delta(u) + C_L(n,d,v,\delta,\beta_0)|s_\delta(u)|)^{n-1} du,$$

d'où l'existence d'un réel strictement positif  $\eta_2(\varepsilon|n,d,v,\delta,\beta_0)$  tel que pour tout  $\eta \leq \eta_2$ ,

$$\text{vol}(\Omega_\eta) \leq (1 + \varepsilon)\text{vol}(\Omega).$$

Enfin, la minoration vient de l'estimation (1.22) établie dans le lemme 1.7.8 et de la régularité du profil sur  $[\beta_0, 1 - \beta_0]$  :

$$\begin{aligned} \frac{\text{vol}(\Omega_\eta) - \text{vol}(\Omega)}{\eta \text{vol}(M,g)} &\geq \inf_{\beta \leq \tilde{\beta} \leq \beta + \eta(1+\varepsilon)h_{(M,g)}(\beta)} h_{(M,g)}(\tilde{\beta}) \\ &\geq h_{(M,g)}(\beta) - \eta(1 + \varepsilon)h_{(M,g)}(\beta)C_L(n,d,v,\delta,\beta_0) \\ &\geq \left(1 - \eta(1 + \varepsilon)C_L(n,d,v,\delta,\beta_0)\right)h_{(M,g)}(\beta), \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\text{vol}(\Omega_\eta) - \text{vol}(\Omega)}{\eta \text{vol}(M,g)} \geq (1 - \varepsilon)h_{(M,g)}(\beta)$$

dès que  $\eta$  est choisi inférieur à  $\eta_3(\varepsilon|n,d,v,\delta,\beta_0) := \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}C_L(n,d,v,\delta,\beta_0)^{-1}$ .

Ainsi,  $\eta(\varepsilon|n,d,v,\delta,\beta_0) := \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  satisfait les conditions requises par l'énoncé.  $\square$

## Construction de domaines de volumes proches sur des variétés proches

Après avoir approché la valeur du profil isopérimétrique par le taux d'accroissement des volumes des voisinages tubulaires des domaines isopérimétriques (lemme 4.2.1), nous allons, dans le résultat suivant, montrer comment, lorsque deux variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  sont suffisamment proches, en considérant un compact de volume pas trop petit sur l'une, il est possible de définir un compact ayant presque le même volume sur l'autre.

2. En dépit d'éventuelles singularités sur  $\partial\Omega$ , l'inégalité de Heintze-Karcher peut être utilisée car la propriété de minimisation de  $\partial\Omega$  impose à l'ensemble des pieds des géodésiques minimisantes reliant les points de  $M \setminus \partial\Omega$  à  $\partial\Omega$  d'être inclus dans la partie régulière de  $\partial\Omega$  (voir la proposition 1.5 de [G1]).

De plus, nous observons que cette propriété de proximité des volumes concerne aussi les voisinages tubulaires de ces compacts. Enfin, nous appliquons ce lemme pour donner une preuve de la continuité uniforme de la fonctionnelle volume sur  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ . Ce résultat est énoncé par J. Cheeger et T. H. Colding dans le théorème 5.4 de [ChC1] et la preuve qu'ils évoquent fait appel aux mêmes arguments techniques.

**Lemme 4.2.2** *Pour tout  $\nu > 0$  et  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$ , il existe  $\gamma(\nu|n,d,v,\delta,\beta_0) > 0$  tel que pour tout couple  $((M,g),(M',g'))$  de variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  satisfaisant*

$$\varrho := d_{\text{GH}}((M,g),(M',g')) \leq \gamma,$$

*si  $K$  est un compact de  $M$  de volume relatif minoré par  $\beta_0$ , alors il existe un compact  $K'$  de  $M'$  tel que*

$$(1 - \nu)\text{vol}(K) \leq \text{vol}(K') \leq (1 + \nu)\text{vol}(K_{2\nu+4\varrho})$$

*et pour tout  $\eta > 4\varrho$ ,*

$$\text{vol}(K'_{\eta-4\varrho}) \leq (1 + \nu)\text{vol}(K_{\eta+2\nu+4\varrho}) \quad \text{et} \quad \text{vol}(K'_{\eta+4\varrho}) \geq (1 - \nu)\text{vol}(K_{\eta}).$$

**Démonstration.**

Montrons tout d'abord comment construire  $K'$  et minorer son volume. Soit  $\nu > 0$  fixé tel que  $\nu < \frac{1}{2}$ . Notons  $\tilde{\nu}$  le plus grand réel de  $]0, \nu]$  tel que

$$1 - \nu \leq \frac{(1 - \tilde{\nu})^{n+3}}{1 + \tilde{\nu}} \quad \text{et} \quad \frac{1 + \tilde{\nu}}{(1 - \tilde{\nu})^{n+3}} \leq 1 + \nu,$$

et posons  $\tilde{\beta}_0 := (1 - \nu)\beta_0 \frac{v}{V_{n,\delta}(d)}$ . Appliquons le théorème 4.1.12 et notons  $\varepsilon_0(\tilde{\nu}|n,\delta)$  et  $\rho_0(\tilde{\nu}|n,\delta)$  les deux constantes qui apparaissent. Appliquons également le théorème 4.1.14 et notons  $\kappa_1(\min(\frac{1}{2}\varepsilon_0, \tilde{\nu})|n,\delta)$  et  $\rho_1(\min(\frac{1}{2}\varepsilon_0, \tilde{\nu})|n,\delta)$  les deux constantes qui apparaissent. Définissons alors  $r_1(\tilde{\nu}|n,\delta) > 0$  tel que

$$\forall r \in ]0, r_1] \quad , \quad \max\left(1 - \tilde{\nu}, (1 - \kappa_1)^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{V_{n,\delta}(r)}{\omega_n r^n} \leq \min\left(1 + \tilde{\nu}, (1 + \kappa_1)^{\frac{1}{p}}\right),$$

où  $p$  est déterminé par l'égalité

$$\left(\frac{1 - \kappa_1}{1 + \kappa_1}\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt{1 - \kappa_1}.$$

Pour toute variété  $(M,g)$  de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ , pour tous  $\kappa \in ]0, 1[$  et  $r > 0$ , notons

$$M_{\kappa,r} := \left\{ m \in M \mid \frac{\text{vol}_{(M,g)}(B(m,r))}{\omega_n r^n} \geq 1 - \kappa \right\}.$$

Appliquons le théorème 4.1.18 pour  $\kappa \in ]0, 1[$  et  $\tau > 0$  fixés de sorte qu'il existe  $r_0 = r_0(\kappa, \tau|n,d,v,\delta)$  tel que

$$\text{vol}_{(M,g)}(M \setminus M_{\kappa,r_0}) \leq \tau.$$

Choisissons  $\tau = \tilde{\nu}v\tilde{\beta}_0$ , puis fixons  $\kappa_2 := \kappa_2(\nu|n,d,v,\delta,\tilde{\beta}_0)$  sous les conditions

$$1 - \kappa_2 \geq \sqrt{1 - \kappa_1}$$

et

$$r_0(\kappa_2, \tilde{\nu}v\tilde{\beta}_0|n,d,v,\delta) \leq \min\left(\rho_1\left(\min\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0, \tilde{\nu}\right)|n,\delta\right), \rho_0(\tilde{\nu}|n,\delta), r_1(\tilde{\nu}|n,\delta)\right).$$



Posons  $r_2 := r_0(\kappa_2, \tilde{\nu}v\tilde{\beta}_0|n, d, v, \delta)$  et considérons l'ensemble compact  $\tilde{K}$  défini par

$$\tilde{K} := K \cap M_{\kappa_2, r_2},$$

qui vérifie

$$(1 - \tilde{\nu})\text{vol}(K) \leq \text{vol}(K) - \tau \leq \text{vol}(\tilde{K}) \leq \text{vol}(K). \quad (4.12)$$

Utilisons le lemme de recouvrement D.1.4 appliqué à  $\tilde{K}$  pour  $\varepsilon = \varepsilon(\nu|n, d, v, \delta, \tilde{\beta}_0) := \frac{1}{2} \min(\nu, r_2)$  et  $\eta = \tilde{\nu}$ . Ainsi, il existe  $r_c(\nu|n, d, v, \delta, \tilde{\beta}_0) > 0$ ,  $N_c(\nu, n, d, v, \delta, \tilde{\beta}_0) \in \mathbb{N}$ , une famille  $(B(m_i, s_i))_{i=1, \dots, N}$  de boules ouvertes deux à deux disjointes, incluses dans  $\tilde{K}_\varepsilon$ , et centrées dans  $\tilde{K}$  telles que

- $N \leq N_c$ ,
- $\forall i = 1, \dots, N$ ,  $r_c \leq s_i \leq \varepsilon$ ,
- 

$$\sum_{i=1}^N \text{vol}(B(m_i, s_i)) \geq (1 - \tilde{\nu})\text{vol}(\tilde{K}). \quad (4.13)$$

Le théorème de Bishop permet d'obtenir, comme  $r_2 \leq r_1$ , pour tout  $i = 1, \dots, N$

$$\text{vol}(B(m_i, s_i)) \leq V_{n, \delta}(s_i) \leq (1 + \tilde{\nu})\omega_n s_i^n,$$

d'où, à partir de (4.13),

$$\text{vol}(\tilde{K}) \leq \frac{(1 + \tilde{\nu})\omega_n}{1 - \tilde{\nu}} \sum_{i=1}^N s_i^n. \quad (4.14)$$

L'appartenance de  $m_i$  à  $M_{\kappa_2, r_2}$  permet d'écrire, avec l'aide du théorème de Bishop-Gromov et comme  $r_2 \leq r_1$ , pour tout  $i = 1, \dots, N$ , pour tout  $r \leq r_2$ ,

$$\begin{aligned} \text{vol}(B(m_i, r)) &\geq \frac{V_{n, \delta}(r)}{V_{n, \delta}(r_2)} \text{vol}(B(m_i, r_2)) \\ &\geq \frac{(1 - \kappa_1)^{\frac{1}{p}} \omega_n r^n}{(1 + \kappa_1)^{\frac{1}{p}} \omega_n r_2^n} (1 - \kappa_2) \omega_n r_2^n \\ &\geq (1 - \kappa_1) \omega_n r^n. \end{aligned}$$

Cette minoration du volume des petites boules, ajoutée au fait que  $r_2 \leq \rho_1(\min(\frac{1}{2}\varepsilon_0, \tilde{\nu})|n, \delta)$  nous place dans les conditions d'application du théorème 4.1.14 :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad , \quad \forall r \leq r_2 \quad , \quad d_{\text{GH}}(B(m_i, r), B_0(r)) \leq \frac{\varepsilon_0 r}{2}.$$

Soit  $(M', g')$  une variété de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  à distance de Gromov-Haudorff  $\varrho > 0$  de  $(M, g)$ . Considérons alors une distance compatible notée  $d(\cdot, \cdot)$  sur l'union disjointe de  $M$  et  $M'$  de sorte que la distance de Hausdorff dans  $(M \amalg M', d)$  entre  $i_M(M)$  et  $i_{M'}(M')$  est majorée par  $2\varrho$  ( $i_M$  et  $i_{M'}$  sont les injections canoniques de  $M$  et  $M'$  dans l'union disjointe  $M \amalg M'$ ). Notons  $K'$  le compact associé à  $K$ , défini par

$$K' := \pi_{M'}(i_M(K)_{2\varrho}),$$

où  $\pi_M$  et  $\pi_{M'}$  désignent les projections canoniques de  $M \amalg M'$  sur  $M$  et  $M'$ . Soit  $(m'_i)_{i=1, \dots, N}$  une famille de points de  $K'$  telle que pour tout  $i = 1, \dots, N$   $d(m_i, m'_i) \leq 2\varrho$ . Nous observons que sous la condition

$$\varrho \leq \frac{r_c}{8},$$

les boules ouvertes  $(B(m'_i, s_i - 2\varrho))_{i=1, \dots, N}$  incluses dans  $K'_\varepsilon$  sont deux à deux disjointes. Par ailleurs, le théorème 4.1.19 montre que si l'on impose

$$\varrho \leq \min\left(\frac{r_c}{8}, \frac{1}{2}\xi\left(\frac{3\varepsilon_0 r_c}{8}, \frac{1}{2}r_c |n, d, v, \delta\right)\right),$$

alors pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $s_i - 2\varrho \geq \frac{3}{4}r_c$  et

$$\begin{aligned} d_{\text{GH}}(B(m'_i, s_i - 2\varrho), B_0(s_i - 2\varrho)) &\leq d_{\text{GH}}(B(m'_i, s_i - 2\varrho), B(m_i, s_i - 2\varrho)) \\ &\quad + d_{\text{GH}}(B(m_i, s_i - 2\varrho), B_0(s_i - 2\varrho)) \\ &\leq \frac{3\varepsilon_0 r_c}{8} + \frac{\varepsilon_0(s_i - 2\varrho)}{2} \\ &\leq \varepsilon_0(s_i - 2\varrho). \end{aligned}$$

Comme par ailleurs nous avons choisi, pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $s_i \leq \rho_0(\tilde{\nu} |n, \delta)$ , le théorème 4.1.12 donne

$$\forall i = 1, \dots, N \quad , \quad \text{vol}(B(m'_i, s_i - 2\varrho)) \geq (1 - \tilde{\nu})\omega_n(s_i - 2\varrho)^n,$$

si bien qu'en imposant de plus la condition  $\varrho \leq \min\left(\frac{1}{2}\tilde{\nu}r_c, \frac{r_c}{8}, \frac{1}{2}\xi\left(\frac{3\varepsilon_0 r_c}{8}, \frac{1}{2}r_c |n, d, v, \delta\right)\right)$  de sorte que pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $s_i - 2\varrho \geq (1 - \tilde{\nu})s_i$ ,

$$\forall i = 1, \dots, N \quad , \quad \text{vol}(B(m'_i, s_i - 2\varrho)) \geq (1 - \tilde{\nu})^{n+1}\omega_n s_i^n.$$

Ainsi,

$$\text{vol}(K'_\varepsilon) \geq \sum_{i=1}^N (1 - \tilde{\nu})^{n+1}\omega_n s_i^n,$$

d'où, en utilisant (4.14) puis (4.12)

$$\text{vol}(K'_\varepsilon) \geq \frac{(1 - \tilde{\nu})^{n+2}}{1 + \tilde{\nu}} \text{vol}(\tilde{K}) \geq \frac{(1 - \tilde{\nu})^{n+3}}{1 + \tilde{\nu}} \text{vol}(K),$$

soit

$$\text{vol}(K'_\varepsilon) \geq (1 - \nu)\text{vol}(K).$$

Observons maintenant que toutes les bornes imposées sur les paramètres sont uniformes sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  et ne dépendent ni de  $(M, g)$ , ni de  $(M', g')$  mais seulement de  $\nu$ ,  $n$ ,  $d$ ,  $v$ ,  $\delta$  et  $\beta_0$ . Ainsi, en reproduisant le raisonnement ci-dessus et en échangeant les rôles joués par  $(M, g)$  et  $(M', g')$ , en remplaçant  $K$  par  $K'_\varepsilon$ , dont le volume relatif est minoré par  $\tilde{\beta}_0$  (c'est la raison de l'introduction de  $\tilde{\beta}_0$  au lieu de  $\beta_0$ ), nous obtenons un compact  $K''$  de  $M$  défini par

$$K'' := \pi_M(i_{M'}(K'_\varepsilon)_{2\varrho}),$$

satisfaisant

$$\text{vol}(K''_\varepsilon) \geq \frac{(1 - \tilde{\nu})^{n+3}}{1 + \tilde{\nu}} \text{vol}(K'_\varepsilon).$$

Par ailleurs,  $K'' \subset K_{\varepsilon+4\varrho}$  d'où

$$(1 - \nu)\text{vol}(K) \leq \text{vol}(K'_\varepsilon) \leq \frac{1 + \tilde{\nu}}{(1 - \tilde{\nu})^{n+3}} \text{vol}(K_{2\varepsilon+4\varrho}) \leq (1 + \nu)\text{vol}(K_{2\varepsilon+4\varrho}).$$

De même, pour tout  $\eta > 0$ , nous pouvons reproduire le même raisonnement pour le  $\eta$ -voisinage de  $K$  et affirmer que si  $Q'$  désigne le compact de  $M'$  défini par

$$Q' := \pi_{M'}(i_M(K_\eta)_{2\varrho}),$$

alors,

$$(1 - \nu)\text{vol}(K_\eta) \leq \text{vol}(Q'_\varepsilon) \leq (1 + \nu)\text{vol}(K_{\eta+2\varepsilon+4\varrho}).$$

Or  $Q'_\varepsilon \subset K'_{\eta+\varepsilon+4\varrho}$  (car  $Q' \subset K'_{\eta+4\varrho}$ ) ce qui donne

$$\text{vol}(K'_{\eta+\varepsilon+4\varrho}) \geq (1 - \nu)\text{vol}(K_\eta),$$

et  $K'_{\eta+\varepsilon-4\varrho} \subset Q'_\varepsilon$  (car  $K'_{\eta-4\varrho} \subset Q'$ ) ce qui donne

$$\text{vol}(K'_{\eta+\varepsilon-4\varrho}) \leq (1 + \nu)\text{vol}(K_{\eta+2\varepsilon+4\varrho}).$$

Ainsi, en renommant  $K'$  le compact noté jusqu'ici  $K'_\varepsilon$ , en remarquant que  $\varepsilon \leq \nu$  d'après la définition de  $\varepsilon(n, d, v, \delta, \beta_0)$ , et en posant

$$\gamma(\nu | n, d, v, \delta, \beta_0) := \min\left(\frac{\tilde{\nu}r_c}{2}, \frac{r_c}{8}, \frac{1}{2}\xi\left(\frac{3\varepsilon_0 r_c}{8}, \frac{r_c}{2} | n, d, v, \delta\right)\right),$$

nous obtenons le résultat annoncé.  $\square$

Nous allons donner une première application de ce lemme technique. Dans le cas particulier où le compact  $K$  n'est autre que la variété  $M$  elle-même, la construction proposée dans la preuve montre que  $K'$  correspond à la variété  $M'$  si bien que le lemme 4.2.2 établit la continuité uniforme de la fonction volume sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ .

**Théorème 4.2.3** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\zeta(\varepsilon | n, d, v, \delta) > 0$  tel que pour tout couple de variétés  $((M, g), (M', g'))$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  satisfaisant*

$$d_{\text{GH}}((M, g), (M', g')) \leq \zeta$$

leurs volumes vérifient

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\text{vol}(M, g)}{\text{vol}(M', g')} \leq 1 + \varepsilon.$$

## 4.2.2 Résultats de continuité du profil isopérimétrique

### 4.2.3 Convergence uniforme en rapport sur les compacts de $]0, 1[$

**Théorème 4.2.4** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$ , il existe  $\Delta(\varepsilon | n, d, v, \delta, \beta_0) > 0$  tel que si  $(M, g)$  et  $(M', g')$  sont deux variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  vérifiant*

$$d_{\text{GH}}((M, g), (M', g')) < \Delta(\varepsilon | n, d, v, \delta, \beta_0),$$

alors

$$\forall \beta \in [\beta_0, 1 - \beta_0] \quad , \quad 1 - \varepsilon \leq \frac{h_{(M, g)}(\beta)}{h_{(M', g')}(\beta)} \leq 1 + \varepsilon.$$

**Démonstration.**

Commençons par donner les idées et le plan de la preuve. Dans un premier temps, pour  $\beta$  fixé dans  $[\beta_0, \frac{1}{2}]$ , en considérant une variété  $(M, g)$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ , nous montrons que l'existence d'un domaine isopérimétrique  $K$  permet d'approcher la valeur du profil isopérimétrique en  $\beta$  par un taux d'accroissement des voisinages tubulaires du domaine isopérimétrique (étape 1 et lemme 4.2.1). Ensuite, dès qu'une autre variété  $(M', g')$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  est suffisamment proche de  $(M, g)$ , nous pouvons lui associer, d'après le lemme 4.2.2, un domaine  $K'$  dont le taux d'accroissement des voisinages tubulaires est arbitrairement proche de celui du domaine isopérimétrique considéré sur  $M$ , et par conséquent, arbitrairement proche de la valeur du profil de  $M$  pour un volume proche de  $\beta$  (début de l'étape 2). Enfin, le lemme 1.7.8 permet par ailleurs de minorer le taux d'accroissement des voisinages tubulaires du domaine de  $M'$  ainsi construit par le profil de  $M'$  et la comparaison des profils se déduit alors (étape 3) d'une minoration du profil (lemme 1.4.4) et de son caractère lipschitzien sur  $[\beta_0, 1 - \beta_0]$  (lemme 4.2.1), les deux estimées correspondantes étant uniformes sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ . Enfin, le résultat annoncé s'obtient en remarquant que le caractère uniforme sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  de toutes les estimations utilisées permet d'échanger les rôles jouées par  $(M, g)$  et  $(M', g')$  (étape 4).

– **Étape 1 : description du cadre.**

Soit  $(M, g)$  une variété de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ ,  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{7}]$  et  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$  fixés. Considérons  $\beta \in [\beta_0, \frac{1}{2}]$  et  $K$  un domaine isopérimétrique associée à la valeur  $\beta$  pour  $M$ . Le lemme 4.2.1 nous dit qu'il existe  $\eta(\varepsilon | n, d, v, \delta, \beta_0)$  tel que pour tout  $\eta \in ]0, \eta(\varepsilon | n, d, v, \delta, \beta_0)[$ , d'une part

$$\frac{1}{\text{vol}(M, g)} \frac{\text{vol}(K_\eta) - \text{vol}(K)}{\eta} \leq (1 + \varepsilon) h_{(M, g)}(\beta), \tag{4.15}$$

et d'autre part

$$\text{vol}(K) \leq \text{vol}(K_\eta) \leq (1 + \varepsilon) \text{vol}(K).$$

Pour la suite, fixons  $\eta = \eta(\varepsilon | n, d, v, \delta, \beta_0)$ .

– **Étape 2 : construction de domaines de volume proche et comparaison des taux d'accroissement des volumes des voisinages tubulaires.**

Appliquons le théorème 4.2.3 qui établit la continuité uniforme de la fonction volume sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  pour affirmer qu'il existe  $\zeta(\varepsilon | n, d, v, \delta) > 0$  tel que pour toute variété  $(M', g')$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  telle que

$$\varrho = d_{\text{GH}}((M, g), (M', g')) < \zeta,$$

alors

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\text{vol}(M, g)}{\text{vol}(M', g')} \leq 1 + \varepsilon. \tag{4.16}$$

Appliquons également le lemme 4.2.2 pour le compact  $K$ , pour  $\nu = \min(\frac{1}{4}\varepsilon\eta, \varepsilon)$  et notons  $\gamma(\varepsilon | n, d, v, \delta, \beta_0)$  la constante qui apparaît. Soit  $(M', g')$  une variété de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  telle que

$$\varrho = d_{\text{GH}}((M, g), (M', g')) < \min\left(\zeta(\varepsilon | n, d, v, \delta), \gamma(\varepsilon | n, d, v, \delta, \beta_0), \frac{1}{16}\varepsilon\eta(\varepsilon | n, d, v, \delta, \beta_0)\right) \tag{4.17}$$

Le lemme 4.2.2 nous permet alors de construire un compact  $K'$  dans  $M'$  tel que

$$\text{vol}(K') \geq (1 - \nu) \text{vol}(K), \tag{4.18}$$

et dont le  $(\eta - 8\rho - 2\nu)$ -voisinage satisfait

$$\text{vol}(K'_{\eta-8\rho-2\nu}) \leq (1 + \nu)\text{vol}(K_\eta). \quad (4.19)$$

Après avoir observé que les choix de  $\nu$  et de  $\rho$  permettent d'écrire  $\eta - 2\nu - 8\rho \geq (1 - \varepsilon)\eta$ , majorons, en utilisant les inégalités (4.18) et (4.19), le taux d'accroissement du volume des voisinages tubulaires de  $K'$  par celui des volumes des voisinages tubulaires de  $K$ .

$$\begin{aligned} \frac{\text{vol}(K'_{\eta-2\nu-8\rho}) - \text{vol}(K')}{(\eta - 2\nu - 8\rho)\text{vol}(M',g')} &\leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{(1 + \nu)\text{vol}(K_\eta) - (1 - \nu)\text{vol}(K)}{\eta\text{vol}(M,g)} \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \left( \frac{\text{vol}(K_\eta) - \text{vol}(K)}{\eta\text{vol}(M,g)} + \frac{2\nu}{\eta} \right), \end{aligned}$$

soit, comme  $\nu \leq \frac{1}{4}\eta\varepsilon$ ,

$$\frac{\text{vol}(K'_{\eta-2\nu-8\rho}) - \text{vol}(K')}{(\eta - 2\nu - 8\rho)\text{vol}(M',g')} \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \left( \frac{\text{vol}(K_\eta) - \text{vol}(K)}{\eta\text{vol}(M,g)} + \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

d'où, compte tenu de (4.15),

$$\frac{\text{vol}(K'_{\eta-2\nu-8\rho}) - \text{vol}(K')}{(\eta - 2\nu - 8\rho)\text{vol}(M',g')} \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \left( (1 + \varepsilon)h_{(M,g)}(\beta) + \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (4.20)$$

### – Etape 3 : comparaison des profils.

Le lemme 1.7.8 donne

$$\frac{\text{vol}(K'_{\eta-2\nu-8\rho}) - \text{vol}(K')}{(\eta - 2\nu - 8\rho)\text{vol}(M',g')} \geq \inf_{\frac{\text{vol}(K')}{\text{vol}(M',g')} \leq \tilde{\beta} \leq \frac{\text{vol}(K'_{\eta-8\rho-2\nu})}{\text{vol}(M',g')}} h_{(M',g')}(\tilde{\beta}). \quad (4.21)$$

Or, jointes à la proximité des volumes exprimée par les inégalités (4.16), les estimations (4.18) et (4.19) donnent

$$\frac{\text{vol}(K')}{\text{vol}(M',g')} \geq (1 - \varepsilon)^2 \frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(M,g)} \geq (1 - 2\varepsilon)\beta$$

et, en utilisant aussi que  $\varepsilon \leq 1$ ,

$$\frac{\text{vol}(K'_{\eta-8\rho-2\nu})}{\text{vol}(M',g')} \leq (1 + \varepsilon)^2 \frac{\text{vol}(K_\eta)}{\text{vol}(M,g)} \leq (1 + \varepsilon)^3\beta \leq (1 + 7\varepsilon)\beta.$$

Ainsi, la minoration (4.21) devient

$$\frac{\text{vol}(K'_{\eta-2\nu-8\rho}) - \text{vol}(K')}{(\eta - 2\nu - 8\rho)\text{vol}(M',g')} \geq \inf_{(1-2\varepsilon)\beta \leq \tilde{\beta} \leq (1+7\varepsilon)\beta} h_{(M',g')}(\tilde{\beta}),$$

d'où, en utilisant l'estimation sur les constantes de Lipschitz des profils, uniforme sur  $[\beta_0, 1 - \beta_0]$  et sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)^3$ ,

$$\frac{\text{vol}(K'_{\eta-2\nu-8\rho}) - \text{vol}(K')}{(\eta - 2\nu - 8\rho)\text{vol}(M',g')} \geq h_{(M',g')}(\beta) - 7\varepsilon\beta C_L(n, d, v, \delta, \frac{1}{2}\beta_0). \quad (4.22)$$

---

3. Nous utilisons ici également la condition  $\varepsilon \leq \frac{1}{7}$  qui donne  $[(1 - 2\varepsilon)\beta_0, (1 + 7\varepsilon)\beta_0] \subset [\frac{1}{2}\beta_0, (1 - \frac{1}{2})\beta_0]$ .

En regroupant (4.20) et (4.22),

$$h_{(M',g')}(\beta) \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon} h_{(M,g)}(\beta) + \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2(1-\varepsilon)} + 7\varepsilon\beta C_L(n,d,v,\delta, \frac{1}{2}\beta_0),$$

soit

$$\sup_{\beta \in [\beta_0, \frac{1}{2}]} \frac{h_{(M',g')}(\beta)}{h_{(M,g)}(\beta)} \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon} + \frac{1}{\inf_{\tilde{\beta} \in [\beta_0, \frac{1}{2}]} h_{(M,g)}(\tilde{\beta})} \left[ \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2(1-\varepsilon)} + 4\varepsilon C_L(n,d,v,\delta, \frac{1}{2}\beta_0) \right],$$

d'où, compte tenu de la minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger, uniforme sur les variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  et établie par S. Gallot dans [G1] (voir théorème 1.4.4),

$$\sup_{\beta \in [\beta_0, \frac{1}{2}]} \frac{h_{(M',g')}(\beta)}{h_{(M,g)}(\beta)} \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon} + \frac{1}{\beta_0 H(n,d,\delta)} \left[ \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2(1-\varepsilon)} + 4\varepsilon C_L(n,d,v,\delta, \frac{1}{2}\beta_0) \right] \quad (4.23)$$

– **Etape 4: conclusion.**

Nous pouvons conclure en choisissant  $\varepsilon$  suffisamment petit, en utilisant la symétrie du profil pour obtenir l'inégalité (4.23) pour  $\beta \in [\beta_0, 1-\beta_0]$ , puis en échangeant les rôles joués par  $(M,g)$  et  $(M',g')$  après avoir observé que l'inégalité (4.23) est uniforme sur  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  sous la condition (4.17) de proximité des variétés considérées.

□

Ce théorème 4.2.4 peut être reformulé d'un point de vue séquentiel

**Corollaire 4.2.5** *Soit  $(M,g)$  une variété de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  et  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  qui converge vers  $(M,g)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff. Alors, la suite des rapports des profils isopérimétriques  $(\frac{h_{(M_i, g_i)}}{h_{(M,g)}})_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers 1, uniformément sur tout compact de  $]0,1[$ .*

**Remarque 4.2.6** La convergence uniforme sur  $[0,1]$  de la suite  $(h_{(M_i, g_i)})_{i \in \mathbb{N}}$  vers  $h_{(M,g)}$  est immédiate à partir de la convergence des rapports vers 1, uniformément sur tout compact de  $]0,1[$ . En effet, puisque les profils sont uniformément majorés par une fonction  $h_{n,\delta,R}$  (voir la proposition 2.3.3 ou le théorème 2.4.12) continue nulle en 0, il suffit, pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, de choisir  $\beta_1 \in ]0,1[$  tel que

$$\forall \beta \in [0, \beta_1] \quad , \quad h_{n,\delta,R}(\beta) \leq \varepsilon,$$

puis de choisir  $i_1$  suffisamment grand tel que

$$\forall i \geq i_1 \quad , \quad \sup_{\beta \in [\beta_1, 1-\beta_1]} \left| \frac{h_{(M_i, g_i)}(\beta)}{h_{(M,g)}(\beta)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sup_{\beta \in [0,1]} h_{(M,g)}(\beta)}$$

pour obtenir

$$\forall i \geq i_1 \quad , \quad \sup_{\beta \in [0,1]} \left| h_{(M_i, g_i)}(\beta) - h_{(M,g)}(\beta) \right| \leq \varepsilon.$$

Dans le cas particulier d'une suite de variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,0)$  qui converge vers une variété de  $\mathcal{M}(n,d,v,0)$ , nous disposons, d'après le théorème 2.2.1, d'une information supplémentaire: tous les profils mis en jeu sont concaves. Nous remarquons alors, sur un dessin par exemple, que la concavité des fonctions considérées semble montrer que la convergence uniforme en rapport sur tout compact de  $]0,1[$  implique la convergence uniforme en rapport sur  $]0,1[$ . Cette intuition est exacte et nous allons la prouver au paragraphe suivant.

4.2.4 Convergence uniforme en rapport sur  $]0,1[$ 

**Théorème 4.2.7** *Soit  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  qui converge vers la variété  $(M, g)$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ . Alors,*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \sup_{\beta \in ]0,1[} \left| \frac{h_{(M_i, g_i)}(\beta)}{h_{(M, g)}(\beta)} - 1 \right| = 0.$$

**Démonstration.**

Comme le profil isopérimétrique des variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  est uniformément majoré (voir la proposition 2.3.3 ou le théorème 2.4.12) et minoré (voir le théorème 1.4.4), la convergence en rapport des profils, uniformément sur un intervalle, est équivalente à celle des profils renormalisés. Par conséquent, la convergence uniforme en rapport sur tout compact de  $]0,1[$  des profils renormalisés est une conséquence du théorème 4.2.4. La convergence uniforme des rapports des profils renormalisés vers 1 sur  $]0, \frac{1}{2}]$  est alors donnée par le lemme technique B.3.4. Ce lemme peut en effet être appliqué car le théorème de continuité des volumes se traduit par la convergence de la suite des dérivées initiales

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} y_{(M_i, g_i)}'_d(0) = y_{(M, g)}'_d(0)$$

tandis que la minoration des constantes isopérimétriques de Cheeger, uniforme sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  permet d'établir (voir la proposition 2.3.3) la concavité des fonctions

$$y_{(M_i, g_i)}(\beta) - (n-1)^2 |\delta| H(n, d, \delta)^{\frac{2-n}{n-1}} \beta^{\frac{n}{n-1}},$$

à condition de choisir  $\delta$  strictement négatif, ce qui n'est pas restrictif. Cette convergence uniforme en rapport des profils renormalisés s'étend à  $]0,1[$  par symétrie des profils et donne le même type de convergence pour les profils isopérimétriques, comme nous l'avons dit au début de la preuve.  $\square$

Le théorème 4.2.7 permet d'établir la continuité des constantes isopérimétriques suivantes :

**Corollaire 4.2.8** *En restriction aux ensembles  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ , les fonctionnelles  $h_C(\cdot)$ ,  $h_G(\cdot)$  et  $\mathcal{I}(\cdot)$  sont continues pour la distance de Gromov-Hausdorff.*

Prenons un peu de distance vis-à-vis de la technique et revenons aux raisons qui ont motivé cette étude, à savoir la généralisation du résultat de convergence des profils lorsque les variétés convergent vers la shere canonique. Nous pouvons désormais affirmer que la convergence des profils est une conséquence de celle des variétés, sous réserve d'une minoration uniforme de la courbure de Ricci. Ainsi, ce résultat n'est pas caractéristique de la sphère. Cependant, au voisinage de la sphère, le phénomène qui se produit est plus fort (voir le corollaire 2.6.7) : la convergence vers 1 uniformément sur  $]0,1[$  du rapport des profils, la convergence des volumes et la convergence des variétés en distance de Gromov-Hausdorff sont équivalentes. Dans le cadre plus général où nous nous sommes placés dans ce chapitre, les équivalences rappelées précédemment ne se généralise pas. Plus précisément, en exhibant deux variétés de même profil isopérimétrique non isométriques dans [BC], I. Benjamini et J. Cao illustrent que la convergence des profils n'implique pas, en général, la convergence des variétés en distance de Gromov-Hausdorff. Leur exemple faisant appel à des variétés de courbure négative, nous laissons toutefois ouverte la question suivante : dans l'ensemble  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  pour  $\delta \geq 0$ , la convergence des profils implique-t-elle celle des volumes ? Par ailleurs, il est évident que dans  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ , la seule convergence des volumes est insuffisante pour imposer la convergence des profils isopérimétriques dès que  $\delta \leq 0$  (considérer par exemple des tores plats de dimension  $n$  de même volume non isométriques).

### 4.3 Approche fonctionnelle de la convergence des fonctions profils isopérimétriques

Si  $(M, g)$  est une variété de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ , alors d'après le théorème 2.2.1, son profil renormalisé satisfait l'inéquation différentielle (2.7) :

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \overline{D^2} y_{(M, g)}(\beta) \leq -n \delta y_{(M, g)}(\beta)^{\frac{2-n}{n}}.$$

Cette propriété différentielle permet, en ayant recours à la minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger uniforme sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  (rappelée au théorème 1.4.4 et due à S. Gallot), de montrer que  $y_{(M, g)}$  est une fonction lipschitzienne dont il est possible de majorer la constante de Lipschitz uniformément sur  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  (voir le corollaire 2.3.4). Ainsi, le théorème d'Ascoli permet d'affirmer que la famille des profils renormalisés des variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  constitue une partie précompacte de  $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur  $[0, 1]$  muni de la norme uniforme. Ce résultat de précompacité apparaît comme une version fonctionnelle de la précompacité de l'ensemble  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  (théorème 5.3 de [GLP]).

Considérons  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  et  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  la suite de leurs profils renormalisés. D'après les deux résultats de précompacité de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  et de l'ensemble des profils correspondants, quitte à extraire, nous pouvons supposer qu'il existe un espace métrique compact  $(M_\infty, d_\infty)$  et une fonction  $y_\infty$  dans  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$  tels que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} d_{\text{GH}}((M_i, g_i), (M_\infty, d_\infty)) = 0$$

et

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|y_i - y_\infty\|_\infty = 0.$$

Il serait très intéressant de pouvoir préciser les liens qui existent entre  $(M_\infty, d_\infty)$  et  $y_\infty$ . Plus précisément, nous suggérons la conjecture suivante :

**Conjecture 4.3.1** *La fonction  $y_\infty$  coïncide avec le profil isopérimétrique renormalisé de l'espace métrique mesuré  $(M_\infty, d_\infty, \mathcal{H}^n)$  (voir définition 3.1.1), c'est-à-dire*

$$\forall \beta \in [0, 1] \quad , \quad y_\infty(\beta) = \left( h_{(M_\infty, d_\infty, \mathcal{H}^n)}(\beta) \right)^{\frac{n}{n-1}},$$

où  $\mathcal{H}^n$  désigne la mesure  $n$ -dimensionnelle de Hausdorff.

#### Remarques 4.3.2

- Le choix de la mesure de Hausdorff sur l'espace limite n'est pas fortuit. En effet, d'une part la mesure  $n$ -dimensionnelle de Hausdorff coïncide avec la mesure riemannienne canonique sur une variété et d'autre part elle apparaît naturellement comme "la" mesure limite des mesures riemanniennes lors de la convergence d'une suite de variétés de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  (voir le théorème 4.1.17).
- Le théorème 4.2.7 montre que si l'espace limite appartient à  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ , alors la conjecture est vraie. De plus, il prouve, sous cette hypothèse, que la convergence est plus forte qu'une convergence uniforme, ce sont les rapports des profils qui convergent vers 1, uniformément sur  $]0, 1[$ .

Ainsi, faute d'avoir pu résoudre la conjecture 4.3.1, nous avons rassemblé dans la proposition suivante les propriétés que la fonction limite  $y_\infty$  a hérité de la suite  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .



**Proposition 4.3.3** *En reprenant le contexte et les notations du début du paragraphe 4.3, la fonction  $y_\infty$  est symétrique par rapport à  $\frac{1}{2}$ , lipschitzienne, nulle en 0 et en 1. De plus, la suite  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge en rapport vers  $y_\infty$  sur tout compact de  $]0,1[$  et la fonction  $y_\infty$  vérifie l'inéquation différentielle (2.7) :*

$$\forall \beta \in ]0,1[ \quad , \quad \overline{D^2} y_\infty(\beta) \leq -n \delta y_\infty(\beta)^{\frac{2-n}{n}}. \quad (4.24)$$

**Démonstration.**

Les premières propriétés annoncées sont des conséquences immédiates de la convergence uniforme. La convergence en rapport de la suite  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  vers  $y_\infty$  sur tout compact de  $]0,1[$  vient de la minoration des profils, uniforme sur  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  (voir le théorème 1.4.4)

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad y_i(\beta) \geq H(n,d,\delta)^{\frac{n}{n-1}} \min(\beta, 1-\beta)^{\frac{n}{n-1}}$$

qui passe à la limite en

$$\forall \beta \in [0,1] \quad , \quad y_\infty(\beta) \geq H(n,d,\delta)^{\frac{n}{n-1}} \min(\beta, 1-\beta)^{\frac{n}{n-1}},$$

d'où le résultat en observant que pour tout  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[^4$ ,

$$\sup_{\beta \in [\beta_0, 1-\beta_0]} \left| \frac{y_i(\beta)}{y_\infty(\beta)} - 1 \right| \leq \frac{\|y_i - y_\infty\|_\infty}{H(n,d,\delta)^{\frac{n}{n-1}} \beta_0^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Enfin, le fait que la fonction limite satisfasse la même inéquation différentielle que les termes de la suite vient de l'application du lemme B.3.11. □

**Remarque 4.3.4** La remarque B.3.5 précise que si nous retirons l'hypothèse de convergence des dérivées initiales, la convergence uniforme impose

$$\liminf_{i \rightarrow +\infty} f'_{i,d}(0) \geq f'_d(0),$$

ce qui donne ici

$$\liminf_{i \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{\text{vol}(M_i, g_i)^{\frac{1}{n-1}}} \geq \limsup_{\beta \rightarrow 0} \frac{y_\infty(\beta)}{\beta}.$$

Or en utilisant le résultat de convergence des volumes dû à J. Cheeger et T. H. Colding (théorème 5.9 de [ChC1]), nous obtenons

$$\limsup_{\beta \rightarrow 0} \frac{y_\infty(\beta)}{\beta} \leq \frac{\gamma_n^{\frac{n}{n-1}}}{\mathcal{H}_n(M_\infty, d_\infty)^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Il est alors naturel de se demander si cette inégalité n'est pas une égalité, ce qui revient à savoir si la convergence en rapport, sur tout compact de  $]0,1[$ , ne se prolonge pas, comme dans la preuve du théorème 4.2.7, en une convergence en rapport, uniforme sur  $]0,1[$ . Nous allons exposer deux arguments qui laissent penser que ce n'est pas le cas. D'une part, si la conjecture 4.3.1 est vraie, alors il sera clair que la convergence en rapport n'est pas vraie sur  $]0,1[$ . En effet, considérons une suite de surfaces convexes régulières de  $\mathbb{R}^3$  qui convergent vers le bord du cube unité. La connaissance exacte du profil du cube

---

4. En fait nous avons uniquement besoin de savoir que  $y_\infty$  est strictement positive sur  $]0,1[$  car une convergence uniforme sur  $[0,1]$  se transforme en une convergence uniforme en rapport sur tout compact inclus dans un ouvert sur lequel la fonction limite ne s'annule pas.

(voir [CFGTSY]) et la connaissance de l'équivalent du profil des surfaces considérées (voir la proposition 1.5.2) montre que le rapport des profils ne converge pas vers 1 au voisinage de 0 mais vers  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Ceci peut s'interpréter comme le fait que l'apparition d'une singularité conique d'angle inférieur à  $2\pi$  abaisse le profil isopérimétrique et modifie l'équivalent donné par la proposition 1.5.2. D'autre part, l'argument technique qui permet de passer, dans le théorème 4.2.7, d'une convergence uniforme sur tout compact de  $]0,1[$ , à une convergence uniforme sur  $]0,1[$ , en l'occurrence le lemme B.3.4, nécessite la convergence des dérivées initiales et la remarque B.3.5 qui le suit montre que cette hypothèse est indispensable. Or la convergence des dérivées initiales correspond à une convergence des équivalents des profils au voisinage de 0 et l'exemple précédent montre que lorsque l'espace limite est singulier, les équivalents ne convergent pas. Pour ces deux raisons, nous pensons que la convergence vers 1, uniformément sur  $]0,1[$ , des rapports des profils d'une suite de variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  au profil de l'espace limite pourrait caractériser l'appartenance de l'espace limite à  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ .

# Bibliographie

- [AS] M. Abramowitz & I. Stegun, *Handbook of mathematical functions*. Dover, 1965.
- [AM] C. Adams & F. Morgan, *Isoperimetric curves on hyperbolic surfaces*. Proc. Amer. Math. Soc., to appear 2003.
- [Alm] F. Almgren, *Existence and Regularity almost everywhere of Solutions to Elliptic Variational Problems with constraints*. Mem. Am. Math. Soc., **4**, **165**, 1976.
- [ABCFGMRS] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto & G. Scheffer (avec une Préface de D. Bakry et M. Ledoux), *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*. Société Mathématique de France, 2000.
- [Bak] D. Bakry, *L'Hypercontractivité et son Utilisation en Théorie des Semigroupes*. Lectures on Probability Theory (Saint-Flour, 1992), Lecture Notes in Math. **1581**, Springer, Berlin, 1-114, 1994.
- [BE] D. Bakry & M. Émery, *Diffusions Hypercontractives*. Séminaire de probabilités XIX, 1983/84, Lecture Notes in Math. **1123**, Springer, Berlin, 177-206, 1985.
- [BL] D. Bakry & M. Ledoux, *Lévy-Gromov Isoperimetric Inequality for an infinite-Dimensional Diffusion Generator*. Inv. Math., **123**, 259-281, 1996.
- [BQ1] D. Bakry & Z. Qian, *Some New Results on Eigenvectors via Dimension, Diameter and Ricci Curvature*. Advances in Mathematics **155**, 2000, 98-153.
- [BQ2] D. Bakry & Z. Qian, *Volume comparison theorems without Jacobi fields*.
- [Ba1] F. Barthe, *Extremal Properties of Central Half-Spaces for Product Measures*. Journal of Functional Analysis, **182**, 2001, 81-107.
- [Ba2] F. Barthe, *Log-concave and spherical models in isoperimetry*. Geometric And Functional Analysis, **12**, 2002, 32-55.
- [BaMa] F. Barthe & B. Maurey, *Some remarks on isoperimetry of gaussian type*. Annales de l'Institut H. Poincaré Probabilités et Statistiques, **36**, 2000, 419-434.
- [BR] V. Bayle & C. Rosales, *Isoperimetric Comparison Theorems for Convex Bodies*. En préparation, 2003.
- [BP] C. Bavard & P. Pansu, *Sur le volume minimal de  $\mathbb{R}^2$* . Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4<sup>e</sup> série, t.9, 1986, 479-490.
- [BC] I. Benjamini & J. Cao, *A new isoperimetric comparison theorem for surfaces of variable curvature*. Duke Mathematical Journal, **85**, 359-396, 1996.
- [B1] P. Bérard, *Spectral geometry: direct and inverse problem*. With appendixes by G. Besson. Lecture Notes in Mathematics, **1207**, 1986.
- [B2] P. Bérard, *From vanishing theorems to estimating theorems: the Bochner technique revisited*. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. **19**, n°2, October 1988, 371-406.
- [BBG] P. Bérard, G. Besson & S. Gallot, *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*. Invent. math., **80**, 1985, 295-308.
- [BG] P. Bérard & S. Gallot, *Inégalités isopérimétriques pour l'équation de la chaleur et application à l'estimation de quelques invariants*. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, exposé XV, Ecole Polytechnique Palaiseau, 1984.
- [BM] P. Bérard & D. Meyer, *Inégalités isopérimétriques et applications*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., **15**, 1982, 513-542.

- [Bo1] S. G. Bobkov, *Extremal Properties of Half-spaces for Log-Concave Distributions*. The Annals of Probability, **24**, 1996, 35-48.
- [Bo2] S. G. Bobkov, *Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures*. The Annals of Probability, **27**, 1999, 1903-1921.
- [BH1] S. G. Bobkov & C. Houdré, *Some connections between isoperimetric and Sobolev-type inequalities*. Memoirs of the American Mathematical Society, volume **129**, Number 616, 1997.
- [BH2] S. G. Bobkov & C. Houdré, *Isoperimetric Constants for Product Probability Measures*. The Annals of Probability, **25**, 1997, 184-205.
- [Bl] G. Bol, *Isoperimetrische Ungleichung für Bereiche auf Flächen*. Jber. Deutsch. Math.-Verein **51**, 1941, 219-257.
- [Bom] E. Bombieri, *Regularity theory for almost minimal currents*. Arch. Res. Mech. Anal. **78**, 1982, 99-130.
- [Br] E. Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1914.
- [BBI] D. Burago, Y. Burago & S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*. Graduate Studies in Mathematics, volume 33, American Mathematical Society, 2001.
- [BZ] Yu. D. Burago & V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*. A series of Comprehensive Studies in Mathematics **285**. Springer-Verlag Berlin.
- [B] P. Buser, *On Cheeger's Inequality  $\lambda_1 \geq h^2/4$ , in Geometry of the Laplace Operator*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **36**, 29-77, 1980.
- [Car] L. Carleson, *Selected Problems on Exceptional Sets*. D. Van Nostrand Company, INC.
- [Ca] G. Carron, *Inégalités isopérimétriques sur les variétés riemanniennes*. Thèse de doctorat de Mathématiques de l'Université Joseph Fourier, 1994.
- [C1] I. Chavel, *Riemannian Geometry: a modern introduction*. Cambridge University Press, **108**.
- [C2] I. Chavel, *Isoperimetric Inequalities*. Cambridge University Press, **145**, 2001.
- [C] J. Cheeger, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*. Problems in Analysis, A Symposium in Honour of Salomon Bochner, Robert C. Gunning, editor, Princeton University Press, Princeton, N. J., 195-199, 1970.
- [Ch] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*. Geom. Funct. Anal., **9**, 1999, 428-517.
- [ChC] J. Cheeger & T. H. Colding, *Lower bounds on the Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*. Ann. of Math., **144**, 1996, 189-237.
- [ChC1] J. Cheeger & T. H. Colding, *On the Structure of Spaces with Ricci curvature bounded below.I*. Journal of Differential Geometry, **45**, 1997, 406-480.
- [ChC2] J. Cheeger & T. H. Colding, *On the Structure of Spaces with Ricci curvature bounded below.II*. Journal of Differential Geometry, **52**, 1999, 13-35.
- [ChC3] J. Cheeger & T. H. Colding, *On the Structure of Spaces with Ricci curvature bounded below.III*. Journal of Differential Geometry, **52**, 1999, 37-74.
- [CE] J. Cheeger & D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. North-Holland Mathematical Library, **9**, 1975.
- [Che] S. Y. Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*. Math. Z., **143**, 289-297, 1975.
- [C1] T. H. Colding, *Shape of manifolds with positive Ricci curvature*. Invent. Math., **124**, 1996, 175-191.
- [C2] T. H. Colding, *Large manifolds with positive Ricci curvature*. Invent. Math., **124**, 1996, 193-214.
- [C3] T. H. Colding, *Ricci curvature and volume convergence*. Annals of Mathematics, **145**, 1997, 477-501.
- [CFGTSY] A. Cotton, D. Freeman, A. Gnepp, Ting Ng, J. Spivack & C. Yoder, *The isoperimetric problem on some singular surfaces*. To appear in Journal of Australian Math. Soc.

- [CS] T. Coulhon & L. Saloff-Coste, *Isopérimétrie pour les groupes et les variétés*. Revista Matemática Iberoamericana, **9**, 293-314, 1993.
- [Co] G. Courtois, *Spectrum of Manifolds with holes*. Journal of Functional Analysis, **134**, 1995, 194-221.
- [Cr1] C.B. Croke, *An Eigenvalue pinching Theorem*. Invent. Math., **68**, 1982, 253-256.
- [Cr2] C.B. Croke, *A sharp four dimensional isoperimetric inequality*. Comment. Math. Helvetici, **59**, 187-192, 1984.
- [Dv] A. Dvoretzki, *Some results on convex bodies and Banach spaces*. Proc. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 1961, 123-160.
- [D] O. Druet, *Sharp Local Isoperimetric Inequalities involving the Scalar Curvature*. Proceedings of the American Mathematical Society, **130**, 2002, 2351-2361.
- [E1] J. H. Eshenburt, *Comparison theorems and hypersurfaces*. Manuscripta math. **59**, 1987, 295-323.
- [E2] J. H. Eshenburt, *Comparison theory for Riccati equations*. Manuscripta math. **68**, 1990, 209-214.
- [Fe] H. Federer, *Geometric Measure Theory*. Springer Verlag, New York, 1969.
- [FF] H. Federer & W. H. Fleming, *Normal and Integral Currents*. Ann. Math., **72**, 1960, 458-520.
- [Fi] F. Fiala, *Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive*. Comment. Math. Helv. **13**, 1940/41, 293-346.
- [FLM] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V. D. Milman, *The dimensions of almost spherical sections of convex bodies*. Acta Math. **139**, 1977, 52-94.
- [Fu] K. Fukaya, *Collapsing of Riemannian Manifolds and Eigenvalues of Laplace operator*. Invent. Math., **87**, 1987, 517-547.
- [Ga] M. Gage, *Upper Bounds for the First Eigenvalue of the Laplace-Beltrami Operator*. Indiana Univ. Math. J., **29**, 1980, 897-912.
- [G1] S. Gallot, *Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes*. Société mathématique de France, Astérisque **163-164**, 1988, 31-91.
- [G2] S. Gallot, *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature*. Société mathématique de France, Astérisque **157-158**, 1988, 191-216.
- [G3] S. Gallot, *Volumes, courbure de Ricci et convergence des variétés*. Séminaire Bourbaki, 50ème année, **835**, 1997-98, 7-32.
- [GMT] E. Gonzalez, U. Massari & I. Tamanini, *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint*. Indiana Univ. Math. J., **32**, 1983, 25-37.
- [Go] J. Gonzalo, *Large soap bubbles and isoperimetric regions in the product of euclidean space with a closed manifold*. Ph.D. thesis, U.C.Berkeley, 1990.
- [GLP] M. Gromov, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. Cedic/Fernand Nathan, 1981.
- [Gr] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Birkhäuser, 1999.
- [Gr1] M. Gromov, *Paul Levy's Isoperimetric Inequality*. Appendix C in Metric Structures for Riemannian and non Riemannian Spaces by M.Gromov, Birkhäuser.
- [G02] M. Gromov, *Isoperimetry of waists and concentration of maps*. Geom. Funct. Anal., **13**, 178-215, 2003.
- [HK] E. Heintze & H. Karcher, *A General Comparison Theorem with Applications to volume estimates for submanifolds*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., **11**, 1978, 451-470.
- [HHM] H. Howards, M. Hutchings & F. Morgan, *The Isoperimetric problem on surfaces*. The American Mathematical Montly, May, 1999.
- [II] S. Ilias, *Pincements du  $\lambda_1$  et diamètre*. Annales de l'Institut Fourier, **43**, 843-863, 1993.
- [Kl] B. Kleiner, *An isoperimetric comparison theorem*. Inventiones Mathematicae, **108**, 37-47, 1992.

- [KP] S. G. Krantz & H. R. Parks, *The Geometry of Domains in space*, Birkhäuser Advanced texts, 1999.
- [Led] M. Ledoux, *Inégalités isopérimétriques en analyse et probabilités*. Séminaire Bourbaki, 45ème année, **773**, 1993, 343-375.
- [Led1] M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon*. Mathematical Surveys and Monographs, **89**, AMS, 2001.
- [LT] M. Ledoux & M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces*. Springer Verlag, 1991.
- [L] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*. Gauthier-Villars, Paris, 1951.
- [Lo] J. Lott, *Some geometric properties of the Bakry-Émry-Ricci tensor*. Comm. Math. Helv. **78**, 2003, 865-883.
- [Mat] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measure in Euclidean Spaces, Fractals and Rectifiability*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **44**, 1995.
- [Maz] V. G. Maz'ya, *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York Tokyo, 1985.
- [Mi0] V. D. Milman, *New proof of the theorem of Dvoretzky on sections of convex bodies*. Funct. Anal. Appl. **5**, 1971, 28-37.
- [Mi] V. D. Milman, *Asymptotic theory of Finite Dimensional Normed Spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, **1200**, 1980.
- [M] F. Morgan, *Geometric measure theory, a beginner's guide*. Academic Press, Third edition, 2000.
- [M1] F. Morgan, *Regularity of isoperimetric Hypersurfaces in Riemannian Manifolds*. Transactions of the AMS, **355**, 2003, 5041-5052.
- [M2] F. Morgan, *Area-minimizing surfaces in cones*. Comm. Anal. Geom., **10**, 2002, 971-983.
- [M3] F. Morgan, *In Polytopes, Small Balls about Some Vertex Minimize Perimeter*. In preparation , 2003.
- [MHH] F. Morgan, M. Hutchings & H. Howards, *The Isoperimetric problem on surfaces of revolution of decreasing Gauss curvature*. Transactions of The American Mathematical Society, **352**, 2000, 4889-4909.
- [MJ] F. Morgan & D. L. Johnson, *Some Sharp Isoperimetric Theorems for Riemannian Manifolds*. Indiana University Mathematics Journal, **49**, 2000, 1017-1041.
- [MR] F. Morgan & M. Ritoré, *Isoperimetric regions in cones*. Trans. Amer. Math. Soc., **354**, 2002, 2327-2339.
- [O] R. Osserman, *The Isoperimetric Inequality*. Bulletin of the American Mathematical Society, **84**, Number 6, November 1978, 1183-1238.
- [P1] P. Pansu, *Sur la régularité du profil isopérimétrique des surfaces riemanniennes compactes*. Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, **48**, 1998, 247-264.
- [P2] P. Pansu, *Profil isopérimétrique, métriques périodiques et formes d'équilibre des cristaux*. ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, **4**, 631-665, 1999.
- [Pn] P. Petersen, *Riemannian Geometry*. Graduate texts in Mathematics, Springer, 1998.
- [Pe] R. H. L. Pedrosa, *The isoperimetric problem in spherical cylinders*. Preprint 2001.
- [PeRi] R. H. L. Pedrosa & M. Ritoré, *Isoperimetric domains in the Riemannian Product of a Circle with a simply connected Space Form and Applications to Free Boundary Problem*. Indiana University Mathematics Journal, **8**, 1999.
- [Q] Z. Qian, *Estimates for Weighted Volumes and Applications*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **48**, 235-242, 1997.
- [RT] J. Rauch & M. Taylor, *Potential and Scattering Theory on widely Perturbated Domains*. Journal of Functional Analysis, **18**, 1975, 27-59.
- [R] M. Ritoré, *The Isoperimetric Problem in Complete Surfaces of Non-Negative Curvature*. The Journal of Geometric Analysis, **11**, 2001, 509-517.

- [RR0] M. Ritoré & A. Ros, *Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric in three space forms*. Comm. Math. Helv., **67**, 1992, 293-305.
- [RR1] M. Ritoré & A. Ros, *Some updates on isoperimetric problems*. Math. Intelligencer, **24**, 2002, 9-14.
- [Ro] A. Ros, *The isoperimetric problem*. Lecture series given during the Clay Mathematics Institute Summer School on the Global Theory of Minimal Surfaces at the MSRI, Berkeley, California, 2001.
- [S] G. Scheffer, *Isopérimétrie fonctionnelle dimensionnelle en courbure positive*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **331**, 2000, 251-254.
- [SS] R. Schoen & L. Simon, *A new proof of the regularity theorem for rectifiable currents which minimize parametric elliptic functionals*. Indiana Univ. Math. J. **31**, 1982, 184-193.
- [Sc] E. Schmidt, *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie*. Math. Nach. **1**, 1948, 81-157.
- [SZ] P. Sternberg & K. Zumbrun, *On the connectivity of boundaries of sets minimizing perimeter subject to a volume constraint*. Comm. Anal. Geom. **7** (1999), no. 1, 199-220.
- [Si] L. Simons, *Lectures on Geometric Measure Theory*. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, **vol 3**, 1983.
- [Ti] Titchmarsh, *The theory of functions*. Oxford, 1932.
- [To] V. A. Toponogov, *Riemannian spaces having their curvature bounded below by a positive number*. Uspehi Mat. Nauk, **14**, 1959, 87-130 (Russian).
- [W] A. Weil, *Sur les surfaces à courbure négative*. C. R. Acad. Sci., Paris, **182**, 1926, 1069-1071.
- [Z] William P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1989, Sobolev spaces and functions of bounded variation.





## Annexe A

# Capacité d'un ensemble de grande codimension de Hausdorff

La recherche d'une inéquation différentielle vérifiée par le profil isopérimétrique d'une variété riemannienne fermée a été entreprise par C. Bavard et P. Pansu dans [BP]. A partir d'une hypersurface minimisante dont l'existence est assurée par la théorie géométrique de la mesure (voir [M2]), ils considèrent une famille d'hypersurfaces parallèles auxquelles ils appliquent les formules de variations premières et secondes des aires et des volumes. Cette méthode convient en petite dimension car les hypersurfaces minimisantes sont régulières, mais en dimension supérieure ou égale à 8 (voir la proposition 2.2.5), elle se heurte aux éventuelles singularités du bord des domaines isopérimétriques. Le but de cette annexe est de montrer qu'en dépit des singularités de l'hypersurface minimisante considérée, il est possible de construire des déformations "presque parallèles", à savoir des variations qui laissent fixe la partie singulière et qui déplacent parallèlement le complémentaire d'un voisinage des singularités tout en introduisant dans la technique variationnelle précédente des perturbations arbitrairement petites. Ce résultat, dont l'hypothèse essentielle porte sur la codimension de Hausdorff de la partie singulière dans l'hypersurface minimisante, est énoncé dans la proposition suivante.

**Proposition A.0.5** *Soient  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ),  $\beta$  un réel de  $]0, \frac{1}{2}]$  et  $\Omega$  un domaine isopérimétrique pour la fonction profil isopérimétrique de  $M$  au point  $\beta$ . Notons  $\partial\Omega$  l'hypersurface minimisante associée à  $\Omega$ , qui s'écrit comme l'union disjointe de points réguliers  $\partial\Omega_r$  et de points singuliers  $\partial\Omega_s$ . Soit  $\mathcal{S}$  une partie compacte de  $\partial\Omega$  contenant  $\partial\Omega_s$  telle que*

$$\dim_H \mathcal{S} < n - 3,$$

où  $\dim_H$  désigne la dimension de Hausdorff dans  $(M, g)$ .

Alors, pour tout  $\nu > 0$ , il existe une fonction  $\Psi$  dans  $C^\infty(\partial\Omega_r, [0, 1])$ , à support compact dans  $\partial\Omega_r$ , telle que :

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - \nu \leq \int_{\partial\Omega} \Psi(m) d\mathcal{H}_{n-1}(m) \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega),$$

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - \nu \leq \int_{\partial\Omega} \Psi(m)^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m) \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega),$$

et

$$\frac{\int_{\partial\Omega} \|\nabla_m^{\partial\Omega} \Psi\|^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m)}{\int_{\partial\Omega} \Psi(m)^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m)} \leq \nu.$$

En considérant les conditions techniques imposées à ces déformations “presque parallèles” afin de rendre arbitrairement faibles les perturbations introduites dans les formules de variations, nous pouvons formuler ce problème d’un point de vue plus conceptuel. En effet, la proposition A.0.5 consiste simplement à montrer que la capacité newtonienne d’une partie compacte  $\mathcal{S}$  telle que  $\partial\Omega_s \subset \mathcal{S} \subset \partial\Omega$ , définie par

$$\text{cap}(\mathcal{S}) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial\Omega_r} \|\nabla\Psi\|^2 d\nu_{g_{|\partial\Omega_r}} \mid \Psi \in \text{Lip}_c(\partial\Omega, [0,1]), \Psi|_{\mathcal{S}} = 1, \Psi|_{\partial\Omega \setminus \mathcal{S}_\varepsilon} = 0 \right\}, \quad (\text{A.1})$$

(où  $\text{Lip}_c(\partial\Omega, [0,1])$  désigne l’ensemble des fonctions lipschitziennes à valeurs dans  $[0,1]$  et à support compact dans  $\partial\Omega$ ) est nulle dès que la codimension de Hausdorff de  $\mathcal{S}$  dans l’hypersurface minimisante est strictement supérieure à 2. Bien qu’en théorie de la capacité, il semble communément admis (voir [RT] et [Co]) que les parties compactes de codimension strictement supérieure à 2 soient de capacité nulle, nous n’avons pas trouvé, dans la littérature, des énoncés permettant de conclure rapidement à la nullité de la capacité de la partie singulière d’une hypersurface minimisante. Ainsi, de ce point de vue, la proposition A.0.5 établit la nullité de la capacité d’une partie compacte  $\mathcal{S}$  de codimension de Hausdorff strictement supérieure à 2 dans une hypersurface minimisante en approchant explicitement le potentiel d’équilibre, c’est-à-dire la fonction  $\Psi$  qui réalise le cas d’égalité dans (A.1).

L’argument technique démontré dans la proposition A.0.5 a tout d’abord été établi par P. Sternberg et K. Zumbrun dans [SZ] pour les hypersurfaces minimisantes à l’intérieur d’un compact convexe de  $\mathbb{R}^n$ . F. Morgan, M. Ritoré et D. L. Johnson (voir [MJ] et [MR]) ont ensuite démontré ce résultat dans le cadre des variétés riemanniennes fermées. À défaut d’avoir eu connaissance de ces papiers suffisamment tôt dans l’élaboration de cette thèse, nous donnons nous aussi une preuve de ce résultat, obtenue indépendamment des auteurs cités précédemment. La construction proposée ici est extrêmement proche de celle de [SZ] et [MR]. Elle consiste, dans un premier temps, à isoler l’ensemble singulier à l’intérieur d’une union finie de petites boules (lemme A.1.1). En considérant alors, pour chaque boule, une fonction régulière  $\Psi_i$  nulle à l’intérieur de la boule et égale à 1 à l’extérieur de la boule de rayon double, il reste alors à montrer que la fonction  $\Psi := \prod \Psi_i$  convient. Deux points nécessitent une attention toute particulière. Le recouvrement proposé dans le lemme A.1.1 doit être choisi de façon à contrôler les auto-intersections apparaissant lors du doublement du rayon des boules afin de maîtriser l’intégrale du gradient de la fonction  $\Psi$ . Ensuite, en estimant les intégrales de  $\Psi$  et de son gradient, nous sommes amenés à majorer, uniformément sur  $M$ , le volume  $(n-1)$ -dimensionnel de l’intersection de  $\partial\Omega$  avec une boule géodésique de rayon  $r$  par un terme du type  $C(M, g)r^{n-1}$ . Ce résultat fait l’objet du lemme A.1.2 et différencie la preuve proposée ici de celles évoquées précédemment. En effet, nous montrons que le caractère minimisant de l’hypersurface  $\partial\Omega$  implique cette majoration alors que les auteurs précédents la déduisent d’une formule générale de monotonie pour les hypersurfaces minimisantes (proposition 2.3 de [SZ]). Enfin, précisons que la preuve donnée dans [SZ], qui considère la fonction  $\Psi := \min \Psi_i$  au lieu de considérer le produit, s’avère un peu plus simple bien qu’elle nécessite ultérieurement le recours à une technique de régularisation.

**Remarque A.0.6** Dans [MR], F. Morgan et M. Ritoré montrent qu’en intégrant de manière plus judicieuse vers la fin de la preuve, l’hypothèse  $\dim_H \partial\Omega_s < n-3$  peut être affaiblie en  $\mathcal{H}_{n-3}(\partial\Omega_s) = 0$  (voir aussi [SZ]).

## A.1 Démonstration de la proposition A.0.5

### A.1.1 Lemmes préparatoires

Commençons par énoncer deux lemmes qui seront utilisés dans la preuve de la proposition A.0.5 et dont les démonstrations sont proposées dans la suite. Le premier permet de préciser la technique d'isolation des singularités de l'hypersurface minimisante en maîtrisant les auto-intersections du recouvrement choisi, tandis que le second, plus géométrique, illustre le fait que le volume de la partie de l'hypersurface contenue dans une petite boule de la variété est majoré par le volume du bord de cette boule.

**Lemme A.1.1** *Soit  $(E, d, \mu)$  un espace de longueur muni d'une mesure borélienne telle que :*

$$\exists(\alpha, C_1(E, d, \mu), C_2(E, d, \mu)) \in (\mathbb{R}^{+*})^3 \quad |$$

$$\forall m \in E \quad , \quad \forall r \in [0, \text{diam}(E, d)] \quad , \quad C_1(E, d, \mu)r^\alpha \leq \mu(\overline{B(m, r)}) \leq C_2(E, d, \mu)r^\alpha.$$

*Soit  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble compact de  $E$  dont la mesure  $p$ -dimensionnelle de Hausdorff est nulle. Alors,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \forall \eta > 0 \quad , \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \exists(m_i, r_i)_{i=1 \dots N} \in (M \times \mathbb{R}^{+*})^N \quad |$$

$$- \forall i = 1 \dots N \quad , \quad r_i \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 < r_N \leq r_{N-1} \leq \dots \leq r_2 \leq r_1,$$

$$- \sum_{i=1}^N r_i^p \leq \eta,$$

$$- \mathcal{S} \subset \bigcup_{i=1}^N B(m_i, r_i),$$

$$- \forall 1 \leq i < j \leq N \quad , \quad B(m_i, \frac{r_i}{2}) \cap B(m_j, \frac{r_j}{2}) = \emptyset,$$

$$- \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad , \quad \forall m \in \overline{B(m_i, 2r_i)},$$

$$\text{Card}\{j \in \{1, \dots, N\} \mid m \in \overline{B(m_j, 2r_j)} \text{ et } r_j \geq r_i\} \leq 3.32^\alpha \frac{C_2(E, d, \mu)}{C_1(E, d, \mu)} \frac{\ln(1 + \frac{\varepsilon}{r_i})}{\ln 2}.$$

**Lemme A.1.2** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Soient  $\beta$  un réel de  $]0, \frac{1}{2}]$  et  $\Omega$  un domaine isopérimétrique pour la fonction profil isopérimétrique de  $M$  au point  $\beta$ . Alors il existe un réel  $r(\Omega, M, g) > 0$  et une constante  $C(M, g) > 0$  ne dépendant que de  $(M, g)$  tels que :*

$$\forall r \in ]0, r(\Omega, M, g)] \quad , \quad \forall m \in M \quad , \quad \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{B(m, r)}) \leq C(M, g)r^{n-1}.$$

### A.1.2 Preuve de la proposition A.0.5

Désignons par  $\text{inj}(M, g)$  le rayon d'injectivité de  $(M, g)$  et  $\delta(M, g)$  la borne inférieure des courbures sectionnelles de tous les 2-plans tangents à la variété  $M$ . Par compacité de  $M$ , il existe  $C_1(M, g)$  et  $C_2(M, g)$  deux constantes strictement positives telles que :

$$\forall m \in M \quad , \quad \forall 0 < r \leq \text{inj}(M, g) \quad , \quad C_1(M, g)r^n \leq \text{vol}_{(M, g)}(\overline{B(m, r)}) \leq C_2(M, g)r^n.$$

Fixons une valeur quelconque de  $\varepsilon$  telle que  $0 < \varepsilon \leq \text{inj}(M, g)$ .

L'hypothèse  $\dim_H \mathcal{S} < n - 3$  permet d'écrire :

$$\forall \gamma > 0 \quad | \quad n - 3 - \gamma > \dim_H(\mathcal{S}) \quad , \quad \mathcal{H}^{n-3-\gamma}(\mathcal{S}) = 0.$$

Par conséquent, nous pouvons, pour toute valeur de  $\gamma$  telle que  $n - 3 - \gamma > \dim_H(\mathcal{S})$ , appliquer le lemme A.1.1 avec  $p = n - 3 - \gamma$  et écrire :

$$\forall 0 < \varepsilon < \text{inj}(M, g) \quad , \quad \forall \eta > 0 \quad , \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \exists(m_i, r_i)_{i=1 \dots N} \in (M \times \mathbb{R}_+^*)^N \quad |$$

$$- \text{(i)} \quad \forall i = 1 \dots N \quad , \quad r_i \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 < r_N \leq r_{N-1} \leq \dots \leq r_2 \leq r_1,$$

- (ii)  $\sum_{i=1}^N r_i^{n-3-\gamma} \leq \eta$ ,
- (iii)  $\partial\Omega_s \subset \bigcup_{i=1}^N B(m_i, r_i)$ ,
- (iv)  $\forall 1 \leq i < j \leq N$  ,  $B(m_i, \frac{r_i}{2}) \cap B(m_j, \frac{r_j}{2}) = \emptyset$ ,
- (v)  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  ,  $\forall m \in \overline{B(m_i, 2r_i)}$ ,

si  $\mathcal{E}_i = \{m_j \text{ , } j \in \{1, \dots, i\} \text{ tels que } m \in \overline{B(m_j, 2r_j)}\}$  , alors

$$\text{Card}\mathcal{E}_i \leq 3.32^n \frac{C_2(M, g) \ln(1 + \frac{\varepsilon}{r_i})}{C_1(M, g) \ln 2}.$$

Choisissons des fonctions  $(\Psi_i)_{i=1, \dots, N}$ , de classe  $C^\infty$ , telles que :

$$\begin{cases} \forall p \in \overline{B(m_i, r_i)} & \Psi_i(p) = 0, \\ \forall p \in \overline{B(m_i, 2r_i)} - B(m_i, r_i) & 0 \leq \Psi_i(p) \leq 1 \text{ et } \|\nabla_m \Psi_i\|_{T_p M} \leq \frac{2}{r_i}, \\ \forall p \in M - \overline{B(m_i, 2r_i)} & \Psi_i(p) = 1 \end{cases}$$

et posons  $\Psi = \prod_{i=1}^N \Psi_i$ .

La propriété de recouvrement (iii) exprime que la fonction  $\Psi$  est à support compact dans  $M \setminus \partial\Omega_s$ , c'est-à-dire dans l'ensemble des points réguliers. Définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E_N &= \overline{B(m_N, 2r_N)}, E_{N-1} = \overline{B(m_{N-1}, 2r_{N-1})} \setminus E_N, \dots, E_i = \overline{B(m_i, 2r_i)} \setminus \bigcup_{k=i+1}^N \overline{B(m_k, 2r_k)}, \dots \\ &\dots, E_1 = \overline{B(m_1, 2r_1)} \setminus \bigcup_{k=2}^N \overline{B(m_k, 2r_k)}. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\bigcup_{k=1}^N \overline{B(m_k, 2r_k)} = \prod_{i=1}^N E_i.$$

Ces ensembles  $(E_i)_{i=1 \dots N}$  sont introduits car ce sont les ensembles pertinents compte tenu du type de contrôle des intersections dont on dispose. En effet, cette construction garantit que si un point de  $E_i$  (donc un point de  $\overline{B(m_i, 2r_i)}$  car  $E_i \subset \overline{B(m_i, 2r_i)}$ ) appartient à une autre boule  $\overline{B(m_j, 2r_j)}$  alors cette boule a un rayon  $r_j$  supérieur à  $r_i$ . Par conséquent, l'hypothèse (v) sert ici à majorer le nombre de fonctions  $\Psi_i$  qui ne sont pas constantes sur  $E_i$ . Plus précisément,

$$\begin{aligned} \forall m \in M \quad , \quad \nabla_m \Psi &= \sum_{i=1}^N \nabla_m \Psi_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Psi_j(m) \\ \forall m \in E_i \quad , \quad m \in \overline{B(m_i, 2r_i)} \quad , \quad \|\nabla_m \Psi\|_{T_m M} &\leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq i \\ m \in \overline{B(m_j, 2r_j)} \cap E_i}} \|\nabla_m \Psi_j\|_{T_m M} \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq i \\ m \in \overline{B(m_j, 2r_j)} \cap E_i}} \frac{2}{r_j} \\ &\leq 6.32^n \frac{C_2(M, g) \ln(1 + \frac{\varepsilon}{r_i})}{C_1(M, g) \ln 2} \max_{\substack{m \in \overline{B(m_j, 2r_j)} \\ 1 \leq j \leq i}} \frac{1}{r_j} \\ &= \frac{1}{r_i} . 6.32^n \frac{C_2(M, g) \ln(1 + \frac{\varepsilon}{r_i})}{C_1(M, g) \ln 2}. \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Dans la suite, nous désignerons par  $A(M,g,\varepsilon)$  le produit suivant :

$$A(M,g) = \frac{6.32^n C_2(M,g)}{\ln 2 C_1(M,g)}.$$

Notons  $\Psi_{\partial\Omega}$  la restriction de la fonction  $\Psi$  au bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Le résultat concernant la majoration du gradient de  $\Psi$  dans la variété ambiante permet également de contrôler le gradient de sa restriction à  $\partial\Omega$  car  $\Psi$  est à support compact dans l'ensemble ouvert des points réguliers

$$\partial\Omega_s \subset \bigcup_{i=1}^N B(m_i, r_i).$$

Ainsi,

$$\forall m \in E_i \cap \partial\Omega_r \quad , \quad \|\nabla_m \Psi_{\partial\Omega}\|_{T_m \partial\Omega} \leq \|\nabla_m \Psi\|_{T_m M} \leq A(M,g) \frac{\ln(1 + \frac{\varepsilon}{r_i})}{r_i}$$

de sorte que

$$\forall \gamma > 0 \quad , \quad \forall m \in E_i \cap \partial\Omega \quad , \quad \|\nabla_m \Psi_{\partial\Omega}\|_{T_m \partial\Omega} \leq C(\gamma) A(M,g) \frac{\varepsilon^\gamma}{r_i^{1+\gamma}}$$

où  $C(\gamma)$  est une constante strictement positive.

Par ailleurs, fixons  $\varepsilon \leq r(\Omega, M, g)$ , de sorte que le lemme A.1.2 permet d'écrire :

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap E_i) \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{B(m_i, 2r_i)}) \leq C(M,g) r_i^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \|\nabla_m \Psi_{\partial\Omega}\|_{T_m \partial\Omega}^2 d\mathcal{H}^{n-1}(m) &= \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega \cap E_i} \|\nabla_m \Psi_{\partial\Omega}\|_{T_m \partial\Omega}^2 d\mathcal{H}^{n-1}(m) \\ &\leq C(\gamma)^2 A(M,g)^2 \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon^{2\gamma}}{r_i^{2+2\gamma}} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega \cap E_i) \\ &\leq C(M,g) C(\gamma)^2 A(M,g)^2 \varepsilon^{2\gamma} \sum_{i=1}^N r_i^{n-3-2\gamma} \\ &\leq C(M,g) C(\gamma)^2 A(M,g)^2 \varepsilon^\gamma \eta \\ &\leq C(M,g) C(\gamma)^2 A(M,g)^2 \text{inj}(M,g)^\gamma \eta, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \Psi_{\partial\Omega}(m)^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m) &\geq \int_{\partial\Omega - \bigcup_{i=1}^N \overline{B(m_i, 2r_i)} \cap \partial\Omega} d\mathcal{H}_{n-1}(m) \\ &\geq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap \bigcup_{i=1}^N \overline{B(m_i, 2r_i)}) \\ &\geq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - \sum_{i=1}^N \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{B(m_i, 2r_i)}) \\ &\geq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - C(M,g) \sum_{i=1}^N r_i^{n-1} \\ &\geq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - C(M,g) \eta \varepsilon^{n-p-1} \\ &\geq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - C(M,g) \eta \text{inj}(M,g)^{n-p-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ainsi, en regroupant les estimations (A.3) et (A.4), on a :

$$\frac{\int_{\partial\Omega} \|\nabla_m \Psi_{\partial\Omega}\|_{T_m \partial\Omega}^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m)}{\int_{\partial\Omega} \Psi_{\partial\Omega}(m)^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m)} \leq \frac{C(M,g)C(\gamma)^2 A(M,g)^2 \text{inj}(M,g)^\gamma \eta}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) - C(M,g)\eta \text{inj}(M,g)^{n-p-1}}.$$

En choisissant alors  $\eta$  suffisamment petit, on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \Psi_{\partial\Omega}(m)^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m) \geq \max\left(\frac{1}{2}\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega), (1-\nu)\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega)\right),$$

$$\int_{\partial\Omega} \|\nabla_m \Psi_{\partial\Omega}\|_{T_m \partial\Omega}^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m) \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega)\nu,$$

d'où

$$\frac{\int_{\partial\Omega} \|\nabla_m \Psi_{\partial\Omega}\|_{T_m \partial\Omega}^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m)}{\int_{\partial\Omega} \Psi_{\partial\Omega}(m)^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m)} \leq \nu$$

et

$$\int_{\partial\Omega} \Psi_{\partial\Omega}(m)^2 d\mathcal{H}_{n-1}(m) \geq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - \nu.$$

La fonction  $\Psi$  étant à valeurs dans  $[0,1]$ , on observe d'une part que tout minorant de l'intégrale de  $\Psi^2$  est également un minorant de l'intégrale de  $\Psi$ , et d'autre part que ces deux quantités sont trivialement majorées par la mesure  $(n-1)$ -dimensionnelle de Hausdorff de  $\partial\Omega$ , ce qui permet d'obtenir les estimations annoncées.

## A.2 Preuve du lemme A.1.1

La nullité de la mesure  $p$ -dimensionnelle de Hausdorff du compact  $\mathcal{S}$  implique que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $\eta > 0$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \exists (y_i, d_i)_{i=1 \dots N_1} \in \left(E \times \mathbb{R}^{+*}\right)^{N_1} \quad \text{tels que :}$$

$$0 < d_N \leq d_{N-1} \leq \dots \leq d_2 \leq d_1 \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad , \quad \sum_{i=1}^{N_1} d_i^p \leq \frac{1}{2^p}\eta \quad \text{et} \quad \mathcal{S} \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} B(y_i, d_i) \quad .$$

Par conséquent, la famille des boules ouvertes  $B(y_i, d_i)_{i=1 \dots N_1}$  recouvre le compact  $\mathcal{S}$ , de sorte que l'on peut choisir (technique inspirée du théorème 1 page 30 de [Maz]) un entier  $N \leq N_1$ , une famille de points  $(m_i)_{i=1 \dots N}$  et une injection croissante  $\varphi$  de  $\{1, \dots, N\}$  dans  $\{1, \dots, N_1\}$  tels que :

- $\forall 1 \leq i < j \leq N \quad B(m_i, d_{\varphi(i)}) \cap B(m_j, d_{\varphi(j)}) = \emptyset,$
- $\forall 1 \leq i < j \leq N \quad d(m_i, m_j) \geq 2 \max(d_{\varphi(i)}, d_{\varphi(j)}),$
- $\mathcal{S} \subset \bigcup_{i=1}^N B(m_i, 2d_{\varphi(i)}).$

En posant alors  $r_i = 2d_{\varphi(i)}$ , on obtient que la famille de boules ouvertes  $(B(m_i, r_i))_{i=1 \dots N}$  vérifie les quatre premières propriétés recherchées.

Passons au contrôle des intersections. Soit  $i$  un entier de  $\{1, \dots, N\}$  et  $m$  un point de  $B(m_i, 2r_i)$ . Nous cherchons à majorer le nombre de boules  $B(m_j, 2r_j)$  de rayon  $r_j \geq r_i$  qui contiennent  $m$ . Un majorant est le nombre de boules  $\overline{B}(m_j, 2r_j)$  de rayon  $r_j \geq r_i$  qui rencontrent  $\overline{B}(m_i, 2r_i)$ . Pour majorer cet ensemble, remarquons que l'ensemble  $\mathcal{E}_i$  des centres de ces boules est l'union, lorsque l'entier  $k$  augmente, de ceux qui se trouvent dans la couronne  $\overline{B}(m_i, 2^{k+1}r_i) - B(m_i, 2^k r_i)$  et qui constituent l'ensemble  $\mathcal{E}_i^k$ . Précisons tout d'abord le domaine dans lequel varie l'entier  $k$ . Le caractère disjoint des boules

de rayon moitié nous assure qu'aucun centre d'une boule de rayon supérieur ne peut se trouver dans  $B(m_i, r_i)$ , donc  $k \geq 0$ . Par ailleurs, un tel centre ne peut pas être à une distance de  $m_i$  supérieure à  $2\varepsilon + 2r_i$ , ce qui donne que  $k_{max}$  est le plus petit  $k$  satisfaisant :

$$2^{k_{max}+1}r_i \geq 2\varepsilon + 2r_i \quad ,$$

soit

$$k_{max} = E\left(\frac{\ln(1 + \frac{\varepsilon}{r_i})}{\ln 2}\right) + 1 \leq \frac{\ln(1 + \frac{\varepsilon}{r_i})}{\ln 2} + 1 \leq 2\frac{\ln(1 + \frac{\varepsilon}{r_i})}{\ln 2} \quad .$$

Remarquons ensuite que les estimations uniformes sur le volume des boules en fonction de leur rayon permettent de majorer le nombre des centres considérés qui se situent dans ces couronnes, plus précisément :

$$\text{Card}\mathcal{E}_i^0 \leq \frac{C_1(E, d, \mu)}{C_2(E, d, \mu)} 7^\alpha \quad ,$$

$$\text{Card}\mathcal{E}_i^1 \leq \frac{C_1(E, d, \mu)}{C_2(E, d, \mu)} 16^\alpha \quad .$$

De manière plus générale,

$$\forall k = 1, \dots, k_{max} \quad , \quad \text{Card}\mathcal{E}_i^k \leq \frac{C_1(E, d, \mu)}{C_2(E, d, \mu)} \left(\frac{42^{k+1} - 1}{\frac{1}{2}(2^{k-1} - 1)}\right)^\alpha \leq \frac{C_1(E, d, \mu)}{C_2(E, d, \mu)} 32^\alpha \quad .$$

Ainsi,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  ,  $\forall m \in \overline{B(m_i, 2r_i)}$  ,

$$\begin{aligned} \text{Card}\{j \in \{1, \dots, i\} \mid m \in \overline{B(m_j, 2r_j)}\} &\leq 32^\alpha \frac{C_2(E, d, \mu)}{C_1(E, d, \mu)} \left(2\frac{\ln(1 + \frac{\varepsilon}{r_i})}{\ln 2} + 1\right) \\ &\leq 3.32^\alpha \frac{C_2(E, d, \mu)}{C_1(E, d, \mu)} \frac{\ln(1 + \frac{\varepsilon}{r_i})}{\ln 2} \quad . \end{aligned}$$

### A.3 Démonstration du lemme A.1.2

Au cours de la preuve nous verrons que la constante  $C(M, g)$  dépend en fait d'un minorant de la courbure de Ricci, du rayon d'injectivité, du volume et du diamètre de la variété  $(M, g)$ .

Nous allons utiliser que  $\Omega$  est minimisant de la manière suivante: si la portion du bord de  $\Omega$  contenue dans une boule suffisamment petite n'est pas maîtrisée par la puissance  $(n-1)$ -ième du rayon de la boule, alors il est possible d'exhiber un domaine de même volume que  $\Omega$  dont le volume du bord est strictement inférieur.

Soient  $(n-1)\delta$  un minorant des courbures sectionnelles sur  $(M, g)$ ,  $\text{inj}(M, g)$  le rayon d'injectivité de la variété  $(M, g)$  et  $\text{diam}(M, g)$  son diamètre.  $M \setminus \overline{\Omega}$  étant un ouvert, il existe un point  $m_\Omega$  dans  $M \setminus \overline{\Omega}$  et un réel  $r_\Omega$  dans  $]0, \text{inj}(M, g)[$  tels que :

$$\overline{B}(m_\Omega, r_\Omega) \subset M \setminus \overline{\Omega} \quad .$$

Le théorème de Bishop-Gromov nous permet alors de minorer le volume de cette boule que l'on vient de choisir dans le complémentaire de  $\overline{\Omega}$ ,

$$\text{vol}_n(\overline{B}(m_\Omega, r_\Omega)) \geq V_{n, \delta}(r_\Omega) \frac{\text{vol}(M, g)}{V_{n, \delta}(\text{diam}(M, g))} .$$

Remarquons alors que l'application

$$\begin{array}{ccc} [0, r_\Omega] & \longrightarrow & [0, V_{n,\delta}(r_\Omega)] \\ t & \longmapsto & V_{n,\delta}(t) \end{array}$$

est continue et strictement croissante de  $[0, r_\Omega]$  dans l'intervalle  $[0, V_{n,\delta}(r_\Omega)]$  qui contient l'intervalle  $[0, V_{n,\delta}(r_\Omega) \frac{\text{vol}(M,g)}{V_{n,\delta}(\text{diam}(M,g))}]$  puisque le théorème de comparaison de Bishop donne :

$$\text{vol}(M,g) \leq V_{n,\delta}(\text{diam}(M,g)).$$

Ainsi, nous pouvons définir le réel  $r(\Omega, M, g)$  dans  $[0, r_\Omega]$  de manière unique par l'équation :

$$V_{n,\delta}(r(\Omega, M, g)) = V_{n,\delta}(r_\Omega) \frac{\text{vol}(M,g)}{V_{n,\delta}(\text{diam}(M,g))}.$$

Observons alors que  $r(\Omega, M, g) \leq r_\Omega < \text{inj}(M, g)$ .

Soit  $m$  un point quelconque de  $M$  et  $r$  un réel de  $]0, r(\Omega, M, g)[$ . Considérons alors l'ouvert  $\tilde{\Omega}$  défini par

$$\tilde{\Omega} = \Omega \cap \overline{B}(m, r)^c.$$

Nous pouvons écrire  $\Omega = \tilde{\Omega} \sqcup \Omega \cap \overline{B}(m, r)$ , d'où, avec le théorème de comparaison de Bishop et la croissance de la fonction  $V_{n,\delta}$ ,

$$0 \leq \text{vol}_n(\Omega) - \text{vol}_n(\tilde{\Omega}) \leq \text{vol}_n(\overline{B}(m, r)) \leq V_{n,\delta}(r) \leq V_{n,\delta}(r(\Omega, M, g)).$$

Or l'application

$$\begin{array}{ccc} [0, r_\Omega] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & \text{vol}_n(\overline{B}(m_\Omega, t)) \end{array}$$

est continue et strictement croissante de  $[0, r_\Omega]$  dans un intervalle contenant  $[0, V_{n,\delta}(r(\Omega, M, g))]$ , de sorte qu'il existe un réel  $\tilde{r}$  dans  $[0, r_\Omega]$  tel que

$$\text{vol}_n(B(m_\Omega, \tilde{r})) = \text{vol}_n(\Omega) - \text{vol}_n(\tilde{\Omega}),$$

ce qui revient à dire que les ouverts  $\Omega$  et  $\tilde{\Omega} \cup B(m_\Omega, \tilde{r})$  ont même volume. Nous pouvons donc utiliser la propriété minimisante de  $\Omega$  pour affirmer :

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial(\tilde{\Omega} \cup B(m_\Omega, \tilde{r}))). \quad (\text{A.5})$$

Le caractère disjoint de  $\tilde{\Omega}$  et  $B(m_\Omega, \tilde{r})$  donne :

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial(\tilde{\Omega} \cup B(m_\Omega, \tilde{r}))) = \mathcal{H}_{n-1}(\partial\tilde{\Omega}) + \mathcal{H}_{n-1}(\partial B(m_\Omega, \tilde{r}))$$

et en utilisant le lemme A.3.1 suivant,

**Lemme A.3.1** *Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts de  $E$ . Définissons alors l'ouvert  $\tilde{\Omega}$  par :*

$$\tilde{\Omega} = \Omega_1 \cap \overline{\Omega_2}^c.$$

Alors,

$$\partial\tilde{\Omega} \subset \left( \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2}^c \cup \partial\Omega_2 \right)$$

où la notation  $\partial A$  désigne la frontière de l'ensemble  $A$  c'est-à-dire  $\overline{A} \setminus \text{int}(A)$ .

nous obtenons

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial\tilde{\Omega}) \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial(\Omega \cap \overline{B}(m, r)^c)) + \mathcal{H}_{n-1}(\partial B(m_\Omega, \tilde{r})),$$



nous obtenons après report dans (A.5)

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial(\Omega \cap \overline{B}(m,r)^c)) + \mathcal{H}_{n-1}(\partial B(m,r)) + \mathcal{H}_{n-1}(\partial B(m_\Omega, \tilde{r})),$$

or

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) = \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{B}(m,r)^c) + \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{B}(m,r)),$$

d'où

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega) - \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{B}(m,r)) + \mathcal{H}_{n-1}(\partial B(m_\Omega, \tilde{r})),$$

et par conséquent,

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{B}(m,r)) \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial B(m_\Omega, \tilde{r})) + \mathcal{H}_{n-1}(\partial B(m,r)).$$

Remarquons alors que le théorème de comparaison de Bishop, donne pour tout point  $m$  de  $M$  et tout  $t < \text{inj}(M,g)$  :

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial B(m,t)) \leq V'_{n,\delta}(t).$$

En particulier, ici, comme  $r(\Omega, M, g) < \text{inj}(M, g)$ , en posant

$$C_1(M, g) = \sup_{r \in ]0, \text{inj}(M, g)]} \frac{V'_{n,\delta}(r)}{r^n} = \sup_{r \in ]0, \text{inj}(M, g)]} \frac{\alpha_{n-1} s_\delta(r)^{n-1}}{r^n},$$

on obtient , pour tout  $r$  dans  $]0, r(\Omega, M, g)]$ , pour tout  $m$  dans  $M$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{B}(m,r)) &\leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial B(m_\Omega, \tilde{r})) + \mathcal{H}_{n-1}(\partial B(m,r)) \\ &\leq V'_{n,\delta}(\tilde{r}) + V'_{n,\delta}(r) \\ &\leq C_1(M, g) \tilde{r}^{n-1} + C_1(M, g) r^{n-1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, le théorème de comparaison de Bishop-Gromov et la définition de  $\tilde{r}$  donnent :

$$V_{n,\delta}(\tilde{r}) \frac{\text{vol}(M, g)}{V_{n,\delta}(\text{diam}(M, g))} \leq \text{vol}_n(B(m_\Omega, \tilde{r})) \leq \text{vol}_n(B(m_\Omega, r)) \leq V_{n,\delta}(r),$$

d'où, en posant

$$C_2(\delta, \text{inj}(M, g)) = \inf_{r \in ]0, \text{inj}(M, g)]} \frac{V_{n,\delta}(r)}{r^n}$$

et

$$C_3(\delta, \text{inj}(M, g)) = \sup_{r \in ]0, \text{inj}(M, g)]} \frac{V_{n,\delta}(r)}{r^n},$$

(ces constantes sont strictement positives car la fonction dont on prend les extrema est continue et se prolonge par continuité en 0 par une valeur non nulle )

$$\frac{\text{vol}(M, g)}{V_{n,\delta}(\text{diam}(M, g))} C_2(\delta, \text{inj}(M, g)) \tilde{r}^n \leq C_3(\delta, \text{inj}(M, g)) r^n,$$

soit

$$\tilde{r}^{n-1} \leq \left( \frac{C_3(\delta, \text{inj}(M, g)) V_{n,\delta}(\text{diam}(M, g))}{C_2(\delta, \text{inj}(M, g)) \text{vol}(M, g)} \right)^{\frac{n-1}{n}} r^{n-1}.$$

Ainsi, en posant  $C(M, g) = C_1(M, g) \left[ \left( \frac{C_3(\delta, \text{inj}(M, g)) V_{n,\delta}(\text{diam}(M, g))}{C_2(\delta, \text{inj}(M, g)) \text{vol}(M, g)} \right)^{\frac{n-1}{n}} + 1 \right]$ , nous pouvons conclure :

$$\forall 0 < r \leq r(\Omega, M, g) \quad , \quad \forall m \in M \quad , \quad \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{B}(m,r)) \leq C(M, g) r^{n-1}.$$



## Annexe B

# Fonctions concaves

Nous rappelons dans cette annexe quelques résultats concernant les fonctions concaves et nous les énonçons dans leur version la plus proche de celle que nous utilisons. De plus, nous complétons ces rappels élémentaires par des lemmes techniques qui apparaissent peu ou pas dans la littérature et dans lesquels l'hypothèse de concavité joue un rôle prépondérant.

### B.1 Définition et propriétés élémentaires liées à la concavité

**Définition B.1.1** Une fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est concave sur  $I$  si pour tout couple  $(x, y) \in I \times I$ , pour tout réel  $t$  de  $[0, 1]$ ,

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

D'un point de vue géométrique, ceci s'interprète en disant que la courbe est au-dessus de ses cordes.

Énonçons maintenant quelques propriétés élémentaires des fonctions concaves.

**Lemme B.1.2** Soit  $f$  une fonction concave définie sur un intervalle réel  $I$ . Alors, en tout point  $x$  de l'intérieur de  $I$ ,  $f$  est continue,  $f$  admet une dérivée à gauche, notée  $f'_g(x)$ , une dérivée à droite, notée  $f'_d(x)$  et elles sont reliées par l'inégalité

$$f'_g(x) \geq f'_d(x).$$

Ainsi  $f$  est dérivable sur  $I$  privé d'un ensemble au plus dénombrable.

**Lemme B.1.3** Soit  $f$  une fonction concave, continue et positive ou nulle sur  $[0, 1]$ , telle que  $f(0) = 0$  et

$$\forall x \in [0, 1] \quad , \quad f(x) = f(1 - x).$$

Alors,

- la dérivée à droite au point  $x \in [0, 1[$ , est reliée à la dérivée à gauche au point  $1 - x$  et  $f'_g(x) = -f'_d(x)$ ,
- la symétrie impose

$$f'_g\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \geq f'_d\left(\frac{1}{2}\right),$$

- $f$  est croissante sur  $[0, \frac{1}{2}]$ .

**Lemme B.1.4** Soit  $f$  une fonction concave, continue sur  $[0,1]$  et nulle en 0. Alors pour tout couple  $(x_1, x_2) \in ]0,1[^2$  tel que  $x_1 + x_2 < 1$ ,

$$f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2).$$

De plus, s'il existe un couple  $(x_1, x_2) \in ]0,1[^2$  tel que  $x_1 + x_2 < 1$  et  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , alors  $f$  est linéaire sur  $[0, x_1 + x_2]$ .

**Démonstration.** Par concavité, la décroissance des pentes donne, comme  $0 < x_2 < x_1 + x_2$  et  $0 < x_1 < x_1 + x_2$ , pour tout  $x \in [0, x_1]$  et tout  $y \in [x_2, x_1 + x_2]$ ,

$$\frac{f(x_1 + x_2) - f(x_1)}{x_1 + x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_1 + x_2) - f(x)}{x_1 + x_2 - x} \leq \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} \leq \frac{f(x_2) - f(0)}{x_2 - 0}$$

d'où le résultat. Quant au cas d'égalité, s'il existe un couple  $(x_1, x_2) \in ]0,1[^2$  tel que  $x_1 + x_2 < 1$  et  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , alors la suite des inégalités précédentes devient une suite d'égalités et pour tout  $y \in [x_2, x_1 + x_2]$ ,

$$f(y) = y \frac{f(x_2)}{x_2}.$$

Ainsi, comme  $f(0) = 0$ , la concavité de la fonction  $f$  impose la linéarité sur  $[0, x_1 + x_2]$ .  
□

**Lemme B.1.5** Soit  $f$  une fonction concave définie et continue sur  $[a, b]$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ . Si  $\max(|f'_d(a)|, |f'_g(b)|) < +\infty$ , alors  $f$  est lipschitzienne et

$$\text{Lip}(f) = \max(|f'_d(a)|, |f'_g(b)|).$$

**Lemme B.1.6** Soit  $f$  une fonction concave définie sur l'intervalle  $[a, b]$  ( $a < b$ ), continue sur  $[a, b]$  et telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Alors,  $f$  est positive ou nulle sur  $[a, b]$ . De plus, si  $f$  prend au moins une valeur strictement positive sur  $]a, b[$ , alors  $f$  est strictement positive sur  $]a, b[$ ,

$$f'_d(a) > 0 \quad \text{et} \quad f'_g(b) < 0.$$

**Démonstration.**

Notons  $x_0$  un point de  $]a, b[$  tel que  $f(x_0) > 0$ . Alors, par concavité de  $f$ ,

$$\forall x \in ]a, x_0[ \quad , \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0,$$

d'où, en passant à la limite pour  $x$  tendant vers  $a$  par valeurs supérieures,

$$f'_d(a) \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0.$$

Le caractère strictement négatif de  $f'_g(b)$  se prouve de la même façon.

□

## B.2 La concavité d'un point de vue différentiel

Une fonction réelle de classe  $C^2$  est concave si et seulement si sa dérivée seconde est négative ou nulle. Nous proposons de rappeler comment cette caractérisation se généralise à toutes les fonctions concaves.

**Proposition B.2.1** *Les trois assertions suivantes concernant la fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , continue et à valeurs réelles, sont équivalentes :*

- (i) *la fonction  $f$  est concave sur  $I$ ,*
- (ii) *en tout point  $\beta$  de l'intérieur de  $I$ , pour tout  $u > 0$  tel que  $\beta + u$  et  $\beta - u$  appartiennent à  $I$ , nous avons :*

$$\frac{f(\beta - u) + f(\beta + u) - 2f(\beta)}{u^2} \leq 0,$$

- (iii) *en tout point  $\beta$  de l'intérieur de  $I$ , nous avons :*

$$\underline{D}^2 f(\beta) \leq 0.$$

Remarquons que l'hypothèse de continuité de  $f$  peut être affaiblie en une hypothèse de semi-continuité inférieure (cf Bourbaki, chapitre fonctions convexes). Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que nous pourrions rajouter à cette liste d'assertions équivalentes l'affirmation suivante :

$$(iii') \text{ en tout point } \beta \text{ de l'intérieur de } I, \text{ nous avons : } \overline{D}^2 f(\beta) \leq 0.$$

## B.3 La concavité : une hypothèse intéressante

Nous allons illustrer sur quelques exemples l'idée que la concavité est une information particulièrement riche qui permet d'aboutir à des conclusions assez fortes concernant la régularité ou les propriétés différentielles d'une fonction concave.

### B.3.1 Régularité des solutions d'une inéquation différentielle

La proposition suivante est un résultat de régularité concernant les solutions d'inéquations différentielles satisfaites au sens des différences finies.

**Proposition B.3.1** *Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et*

- *$g$  une fonction continue définie sur un intervalle réel  $I$ ,*
- *$f$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $]0, a[$ , telle que  $f(]0, a[) \subset I$ , et qui satisfait l'inéquation différentielle :*

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D}^2 f(\beta) \leq g(f(\beta)).$$

*Alors, pour tout intervalle  $[\beta_1, \beta_2]$  inclus dans  $]0, a[$ , il existe une constante  $C(\beta_1, \beta_2)$  telle que la fonction*

$$f(\beta) - C(\beta_1, \beta_2)\beta^2$$

*soit concave sur  $[\beta_1, \beta_2]$ . Par conséquent,  $f$  admet en tout point  $\beta$  de  $]0, a[$  une dérivée à droite et une dérivée à gauche telles que*

$$f'_d(\beta) \leq f'_g(\beta).$$

*(ceci peut s'interpréter en disant que si la fonction est convexe au voisinage d'un point alors elle est dérivable en ce point). Ainsi,  $f$  est absolument continue sur  $]0, a[$  et est dérivable en tout point de  $]0, a[$  privé d'un ensemble au plus dénombrable.*

**Démonstration.**

Posons, pour tout intervalle  $[\beta_1, \beta_2]$  inclus dans  $]0, a[$ ,

$$C(\beta_1, \beta_2) := \sup_{\beta \in [\beta_1, \beta_2]} g(f(\beta))$$

et calculons

$$\begin{aligned} \underline{D}^2 \left( f(\beta) - \frac{1}{2} C(\beta_1, \beta_2) \beta^2 \right) &= \underline{D}^2 f(\beta) - C(\beta_1, \beta_2) \\ &\leq g(f(\beta)) - C(\beta_1, \beta_2) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'implication (iii)  $\Rightarrow$  (i) du lemme B.2.1, la fonction

$$f(\beta) - \frac{1}{2} \Gamma(\beta_0, \delta) \beta^2$$

est concave, de sorte que les propriétés de régularité de  $f$  viennent de celles des fonctions concaves rappelées dans le lemme B.1.2.  $\square$

Remarquons que la preuve de la proposition B.3.1 nous permet d'exhiber le lemme suivant, qui est intéressant en lui-même.

**Lemme B.3.2** Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et

- $g$  une fonction continue définie sur un intervalle réel  $I$ ,
- $f$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0, a]$ , telle que  $f(]0, a[) \subset I$ , et qui satisfait l'inéquation différentielle :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D}^2 f(\beta) \leq g(f(\beta)).$$

Alors,

$$\forall \beta_0 \in ]0, a[ \quad , \quad \forall \delta \in ]0, \min(\beta_0, a - \beta_0)[ \quad \text{et} \quad \forall u \in ]\beta_0 - \delta, \beta_0 + \delta[,$$

$$\frac{f(\beta_0 + u) + f(\beta_0 - u) - 2f(\beta_0)}{u^2} \leq \sup_{\beta \in [\beta_0 - \delta, \beta_0 + \delta]} g(f(\beta)).$$

**Démonstration.**

En posant

$$\Gamma(\beta_0, \delta) := \sup_{\beta \in [\beta_0 - \delta, \beta_0 + \delta]} g(f(\beta)),$$

un calcul déjà détaillé dans la preuve de la proposition B.3.1 montre que la fonction

$$f(\beta) - \frac{1}{2} \Gamma(\beta_0, \delta) \beta^2$$

est concave sur  $]\beta_0 - \delta, \beta_0 + \delta[$  de sorte que l'implication (iii)  $\Rightarrow$  (ii) du lemme B.2.1 donne

$$\forall u \in ]\beta_0 - \delta, \beta_0 + \delta[ \quad , \quad \frac{f(\beta_0 + u) + f(\beta_0 - u) - 2f(\beta_0)}{u^2} - \Gamma(\beta_0, \delta) \leq 0,$$

d'où le résultat.  $\square$

### B.3.2 Contrôle des variations d'une fonction concave

Le lemme suivant est utilisé pour estimer la courbure moyenne des domaines isopérimétriques. Bien que la quantification de cette grandeur géométrique puisse être obtenue à partir d'arguments géométriques (inégalité de Heintze-Karcher entre autres), il est particulièrement intéressant de développer cette technique analytique fondée sur les propriétés de concavité du profil dans l'optique d'une généralisation des résultats à un cadre dans lequel nous ne disposons pas d'une inégalité du type Heintze-Karcher (isopérimétrie à l'intérieur d'un compact convexe ou sur un mm-espace dont le profil satisfait une inéquation différentielle du type (2.7) par exemple).

**Lemme B.3.3** *Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0,a]$  ( $a > 0$ ), nulle en 0 et telle que*

- $f$  est dérivable à droite en 0 de dérivée strictement positive,
- il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $x$  dans  $[0,a]$ ,  $f(x) \geq cx$ ,
- il existe  $\alpha > 0$  et  $C > 0$  tels que la fonction  $x \mapsto f(x) - Cx^{1+\alpha}$  est concave sur  $[0,a]$ .

Alors, en posant

$$x_0 := x_0(\alpha, c, C) := \min \left( \frac{\alpha c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{f'_d(0) C^{\frac{1}{\alpha}} (1+\alpha)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}, a \right),$$

$$x_1 := x_1(\alpha, c, C) := \min \left( \frac{c^{\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} C^{\frac{1}{\alpha}}}, a \right)$$

et

$$x_2 := x_2(\alpha, c, C) := \min \left( \frac{c^{\frac{1}{\alpha}}}{C^{\frac{1}{\alpha}}}, a \right),$$

$f$  est strictement croissante sur  $[0, x_0]$  et

$$\forall x \in [0, x_0] \quad , \quad f'_d(x) \geq (1+\alpha)Cx^\alpha + f'_d(0) \frac{x_0 - x}{x_1 - x}.$$

En particulier, il existe  $\Gamma := \Gamma(\alpha, c, C) > 0$  et  $x'_0 := x'_0(\alpha, c, C) \in ]0, a]$  tels que

$$\forall x \in [0, x'_0] \quad , \quad f'_d(x) \geq \Gamma f'_d(0).$$

#### Démonstration.

La fonction concave  $x \mapsto f(x) - Cx^{1+\alpha}$  est minorée par  $x \mapsto cx - Cx^{1+\alpha}$  qui est également concave sur  $[0, a]$ , strictement positive sur  $]0, x_2[$  et qui atteint son maximum  $M(\alpha, c, C) = \frac{\alpha c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{C^{\frac{1}{\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}$  en  $x = x_1$ . La concavité de la fonction  $x \mapsto f(x) - Cx^{1+\alpha}$  impose alors à cette fonction d'être croissante tant qu'elle n'a pas atteint le maximum de son minorant. Comme par ailleurs, la concavité impose

$$\forall x \in [0, a] \quad , \quad f(x) - Cx^{1+\alpha} \leq f'_d(0)x, \tag{B.1}$$

nous pouvons affirmer que  $f$  est croissante sur  $[0, x_0]$ , où  $x_0$  est défini par l'égalité

$$M = f'_d(0)x_0.$$

Enfin, toujours par concavité,

$$\forall x \in [0, x_0] \quad , \quad (f(x) - Cx^{1+\alpha})'_d \geq \frac{[f(x_1) - Cx_1^{1+\alpha}] - [f(x) - Cx^{1+\alpha}]}{x_1 - x}$$

d'où, en utilisant la majoration (B.1) et  $f(x_1) - Cx_1^{1+\alpha} \geq M = f'_d(0)x_0$ ,

$$\forall x \in [0, x_0] \quad , \quad f'_d(x) \geq (1 + \alpha)Cx^\alpha + f'_d(0)\frac{x_0 - x}{x_1 - x}.$$

En posant alors par exemple  $x'_0(\alpha, c, C) := \frac{1}{2}x_0$  et  $\Gamma(\alpha, c, C) := \frac{x_0}{2x_1}$ , nous obtenons la minoration annoncée.  $\square$

### B.3.3 Convergence en rapport à partir d'une convergence uniforme

Montrons comment une hypothèse de concavité permet d'améliorer une convergence uniforme sur tout compact de  $]0, a]$  en une convergence uniforme sur  $]0, a]$ .

**Lemme B.3.4** *Soient  $a > 0$  et*

- $f$  une fonction définie sur  $[0, a]$ , continue sur  $[0, a]$ , strictement positive sur  $]0, a]$ , nulle en 0 et dérivable à droite en 0 de dérivée  $f'_d(0)$  strictement positive,
- $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $[0, a]$ , continues sur  $[0, a]$ , nulles en 0 et dérivables à droite en 0, pour lesquelles il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  et  $\alpha > 0$  tels que les fonctions  $x \mapsto f_i(x) - Cx^{1+\alpha}$  sont concaves sur  $[0, a]$ .

Si la suite  $(\frac{f_i}{f})_{i \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 1 sur tout compact de  $]0, a]$  et si la suite  $(f'_{id}(0))_{i \in \mathbb{N}}$  tend vers  $f'_d(0)$ , alors la suite  $(\frac{f'_i}{f'})_{i \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 1 sur  $]0, a]$ .

**Remarque B.3.5** Sans l'hypothèse sur la "presque-concavité"<sup>1</sup> des  $f_i$ , le résultat serait faux. En effet, définissons la fonction continue, affine par morceaux,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in ]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[, \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2], \\ 2(x - 2) + 1 & \text{si } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Alors la suite de fonctions  $h_i(x) := \frac{1}{i}h(ix)$  converge uniformément vers la première bissectrice sur  $[0, 1]$  tandis que le rapport  $h_i(2/i)/(2/i)$  est constant et égal à  $1/2$ . De même, sans l'hypothèse sur la convergence des dérivées initiales, le résultat serait faux. Définissons la suite de fonctions  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sur  $[0, 1]$  par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad g_i(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{i}], \\ \frac{1-\frac{2}{i}}{1-\frac{1}{i}}(x - \frac{1}{i}) + \frac{1}{i} & \text{si } x \in [\frac{1}{i}, 1]. \end{cases}$$

Alors cette suite de fonctions concaves converge uniformément vers la première bissectrice bien que la suite des dérivées initiales soit constante égale à 2. Par ailleurs, si nous retirons l'hypothèse de convergence des dérivées initiales, nous observons, en adaptant la preuve du lemme B.3.4 exposée ci-dessous, que la convergence uniforme et l'hypothèse de "presque concavité" imposent

$$\liminf_{i \rightarrow +\infty} f'_{id}(0) \geq f'_d(0).$$

#### Démonstration.

Considérons tout d'abord le cas particulier  $C = 0$ , ce qui revient à supposer que les  $f_i$  sont des fonctions concaves, et montrons que le résultat se prouve alors assez simplement à l'aide d'un dessin.

---

1. Une fonction  $x \mapsto f(x)$  possède la propriété de "presque concavité" si au voisinage de tout point, elle est concave modulo l'addition d'un multiple de la fonction  $x \mapsto x^\gamma$  où  $\gamma \geq 1$ .



Soit  $\nu > 0$ , il existe  $x_\nu \in ]0, a]$  tel que

$$\forall x \in ]0, x_\nu] \quad , \quad (1 - \nu)f'_d(0) \leq \frac{f(x)}{x} \leq (1 + \nu)f'_d(0).$$

La convergence uniforme sur le compact  $[x_\nu, a]$  du rapport des fonctions et la convergence des dérivées en 0 vers une limite non nulle assurent l'existence d'un entier  $i_\nu$  tel que

$$\forall i \geq i_\nu \quad , \quad 1 - \nu \leq \frac{f'_{id}(0)}{f'_d(0)} \leq 1 + \nu \quad \text{et} \quad \forall x \in [x_\nu, a] \quad , \quad 1 - \nu \leq \frac{f_i(x)}{f(x)} \leq 1 + \nu.$$

Ainsi, d'une part la convergence des dérivées et la concavité donnent

$$\forall i \geq i_\nu \quad , \quad \forall x \in [0, x_\nu] \quad , \quad f_i(x) \leq f'_{id}(0)x \leq (1 + \nu)f'_d(0)x \leq \frac{1 + \nu}{1 - \nu}f(x),$$

et d'autre part la concavité et la convergence en rapport au point  $x_\nu$  donnent

$$\begin{aligned} \forall i \geq i_\nu \quad , \quad \forall x \in [0, x_\nu] \quad , \quad f_i(x) &\geq f_i(0) + x \frac{f_i(x_\nu) - f_i(0)}{x_\nu} &\geq x \frac{(1 - \nu)f(x_\nu)}{x_\nu} \\ &&\geq (1 - \nu)^2 f'_d(0)x \\ &&\geq \frac{(1 - \nu)^2}{1 + \nu} f(x), \end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme du rapport sur  $]0, a]$ .

Considérons désormais le cas  $C > 0$  et raisonnons par l'absurde en supposant que la suite  $(\frac{f_i}{f})_{i \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers 1 sur  $]0, a]$ . Il existe donc  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_i \in ]0, a]$  tel que

$$\frac{f_i(x_i)}{f(x_i)} > 1 + \varepsilon_0 \quad (\text{situation 1}) \quad \text{ou} \quad \frac{f_i(x_i)}{f(x_i)} < 1 - \varepsilon_0 \quad (\text{situation 2}).$$

Soit  $\nu > 0$  tel que  $\nu < \min(\varepsilon_0, a)$ . Par définition de  $f'_d(0)$ , il existe  $x_\nu \in ]0, \nu]$  tel que

$$\forall x \in ]0, x_\nu] \quad , \quad (1 - \nu)f'_d(0) \leq \frac{f(x)}{x} \leq (1 + \nu)f'_d(0)$$

et par convergence des dérivées en 0, il existe  $i_\nu \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall i \geq i_\nu \quad , \quad 1 - \nu \leq \frac{f'_{id}(0)}{f'_d(0)} \leq 1 + \nu.$$

De plus, la convergence uniforme sur le compact  $[x_\nu, a]$  du rapport des fonctions assure l'existence d'un entier  $i'_\nu \geq i_\nu$  tel que

$$\forall i \geq i'_\nu \quad , \quad \forall x \in [x_\nu, a] \quad , \quad 1 - \nu \leq \frac{f_i(x)}{f(x)} \leq 1 + \nu.$$

Dans la situation 1, après avoir remarqué que  $x_i \leq x_\nu$  ( $i \geq i_\nu$ ) puisque  $\nu < \varepsilon_0$ , considérons pour  $i \geq i'_\nu$

$$\begin{aligned} \frac{f_i(x_i)}{x_i} &\geq \frac{(1 + \varepsilon_0)f(x_i)}{x_i} \\ &\geq (1 - \nu)(1 + \varepsilon_0)f'_d(0) \end{aligned} \tag{B.2}$$

Or, par concavité de  $f_i(x) - Cx^{1+\alpha}$ , d'une part

$$\forall u \in ]0, x_i] \quad , \quad f'_{id}(u) \leq f'_{id}(0) + (1 + \alpha)Cu^\alpha \leq (1 + \nu)f'_d(0) + (1 + \alpha)Cu^\alpha,$$

et d'autre part (absolue continuité)

$$f_i(x_i) - Cx_i^{1+\alpha} = \int_0^{x_i} (f'_{id}(u) - (1 + \alpha)Cu^\alpha) du,$$

d'où

$$\frac{f_i(x_i)}{x_i} \leq (1 + \nu)f'_d(0) + (1 + \alpha)C\nu^\alpha$$

et donc une contradiction avec la minoration (B.2) précédente dès que  $\nu$  est choisi assez petit devant  $\varepsilon_0$ . Par conséquent la situation 1 est impossible.

Dans la situation 2, après avoir remarqué que  $x_i \leq x_\nu$  ( $i \geq i_\nu$ ) puisque  $\nu < \varepsilon_0$ , observons qu'il existe  $\tilde{x}_i \in ]0, x_i]$  tel que

$$f'_{id}(\tilde{x}_i) \leq (1 - \varepsilon_0)(1 + \nu)f'_d(0)$$

car sinon l'égalité

$$f_i(x_i) = \int_0^{x_i} f'_{id}(u) du$$

donne

$$f_i(x_i) \geq (1 - \varepsilon_0)(1 + \nu)f'_d(0)x_i$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse

$$f_i(x_i) < (1 - \varepsilon_0)f(x_i) \leq (1 - \varepsilon_0)(1 + \nu)f'_d(0)x_i.$$

Par conséquent, en utilisant une nouvelle fois la concavité,

$$\forall x \in [\tilde{x}_i, x_\nu] \quad , \quad f'_{id}(\tilde{x}_i) - (1 + \alpha)C\tilde{x}_i^\alpha \geq f'_d(x) - (1 + \alpha)Cx^\alpha,$$

soit

$$\forall x \in [x_i, x_\nu] \quad , \quad f'_d(x) \leq (1 - \varepsilon_0)(1 + \nu)f'_d(0) + (1 + \alpha)C\nu^\alpha$$

d'où

$$\begin{aligned} f_i(x_\nu) &= f_i(x_i) + \int_{x_i}^{x_\nu} f'_d(u) du \\ &\leq (1 - \varepsilon_0)f(x_i) + (1 - \varepsilon_0)(1 + \nu)f'_d(0)(x_\nu - x_i) + (1 + \alpha)C\nu^\alpha(x_\nu - x_i) \\ &\leq (1 - \varepsilon_0)(1 + \nu)f'_d(0)x_\nu + (1 + \alpha)C\nu^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire, pour  $\nu$  suffisamment petit devant  $\varepsilon_0$ , avec

$$f_i(x_\nu) \geq (1 - \nu)f(x_\nu) \geq (1 - \nu)^2 f'_d(0)x_\nu,$$

d'où l'absurdité de la situation 2.

Ainsi le lemme est prouvé. □

**B.3.4 Une convergence  $L^\infty$  à partir d'une convergence  $L^1$**

Nous allons montrer que la concavité permet de transformer une convergence  $L^1$  en une convergence  $L^\infty$ .

**Lemme B.3.6** *Soit  $h$  une fonction définie, concave et continue sur  $[0,a]$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ). Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies, concaves et continues sur  $[0,a]$ , de même valeur en 0 que  $h$  et telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in [0,a] \quad , \quad h(x) \leq f_n(x).$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a (f_n(x) - h(x)) dx = 0,$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,a]} (f_n(x) - h(x)) = 0.$$

**Démonstration.**

Remarquons que ce lemme peut se démontrer par l'absurde. Nous proposons ici une façon directe de le prouver. Elle consiste à expliciter un minorant de l'écart de la norme  $L^1$  entre deux fonctions concaves dépendant de la norme infinie de leur différence. Pour cela montrons le lemme suivant :

**Lemme B.3.7** *Soit  $h$  une fonction définie et continue sur  $[0,a]$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ), concave et nulle en 0. Alors, il existe une fonction  $A_h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , nulle en 0, continue, croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ , telle que pour toute fonction  $f$ , définie, continue et concave sur  $[0,a]$  vérifiant*

$$\forall x \in [0,a] \quad , \quad h(x) \leq f(x),$$

$$\int_0^a (f(x) - h(x)) dx \geq A_h \left( \sup_{x \in [a,b]} (f(x) - h(x)) \right).$$

**Démonstration.**

Un dessin s'impose.

Définissons la fonction  $A_h(\varepsilon)$ , pour tout  $\varepsilon \geq 0$ . Pour, cela considérons les fonctions

$$L_d : \mathbb{R}_+ \times [0,a[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\varepsilon, y) \longmapsto L_d(\varepsilon, y)$$

et

$$L_g : \mathbb{R}_+ \times ]0,a] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\varepsilon, y) \longmapsto L_g(\varepsilon, y)$$

définies par

$$L_d(\varepsilon, y) := \inf \left\{ L \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [y, a], h(y) + \varepsilon + L(x - y) \geq h(x) \right\}$$

et

$$L_g(\varepsilon, y) := \inf \left\{ L \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [a, y], h(y) + \varepsilon + L(x - y) \geq h(x) \right\}.$$

Ces définitions ont un sens, en effet les ensembles sur lequel les infima sont pris sont non vides et minorés, par concavité de  $h$  sur  $[0,a]$ . Ces fonctions nous permettent de définir, pour tout  $y$  dans  $[0,a]$ , la fonction  $m_y^\varepsilon : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall x \in [0,a] \quad , \quad m_y^\varepsilon(x) := \begin{cases} h(y) + \varepsilon + L_g(\varepsilon, y)(x - y) & \text{si } x \in [0, y], \\ h(y) + \varepsilon + L_d(\varepsilon, y)(x - y) & \text{si } x \in [y, a]. \end{cases}$$

et posons

$$A_h(\varepsilon) := \inf \left\{ \int_0^a (m_y^\varepsilon(x) - h(x)) dx \mid y \in [0, a] \right\}.$$

La quantité  $\int_0^a (m_y^\varepsilon(x) - h(x)) dx$  étant continue en  $y$ , par continuité des fonctions  $L_d(\varepsilon, \cdot)$  et  $L_g(\varepsilon, \cdot)$ , et strictement positive pour tout  $y$  dans  $[0, a]$  dès que  $\varepsilon > 0$ ,  $A_h$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus  $A_h$  est continue croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et trivialement nulle en 0 car  $L_d(0, \cdot) = h'_d(\cdot)$  et  $L_g(0, \cdot) = h'_g(\cdot)$ . La continuité de  $A_h$  en 0 peut se voir en remarquant que

$$A_h(\varepsilon) \leq \int_0^a (h(x) + \varepsilon - h(x)) dx = \varepsilon a.$$

Ainsi, nous observons que si  $f$  est une fonction définie, continue, concave sur  $[0, a]$  vérifiant

$$\forall x \in [0, a] \quad , \quad h(x) \leq f(x)$$

et

$$\sup_{x \in [a, b]} (f(x) - h(x)) = \varepsilon = f(x_f) - h(x_f),$$

alors,

$$\forall x \in [0, a] \quad , \quad h(x) \leq m_{x_f}^\varepsilon(x) \leq f(x).$$

Par conséquent,

$$\int_0^a (f(x) - h(x)) dx \geq \int_0^a (m_{x_f}^\varepsilon(x) - h(x)) dx \geq A_h(\varepsilon).$$

□

Ce lemme B.3.8 permet alors de démontrer le résultat (i)  $\Rightarrow$  (ii) du lemme B.3.6. En effet il donne, sous l'hypothèse (i),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_h \left( \sup_{x \in [0, a]} (f_n(x) - h(x)) \right) = 0$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, a]} (f_n(x) - h(x)) = 0,$$

par continuité et stricte monotonie de la fonction  $A_h$ .

Quant à l'implication réciproque, (ii)  $\Rightarrow$  (i), elle est immédiate à partir de l'inégalité

$$\int_0^a (f_n(x) - h(x)) dx \leq a \sup_{x \in [0, a]} (f_n(x) - h(x)).$$

□

Remarque, nous pouvons énoncer le lemme B.3.8 différemment :

**Lemme B.3.8** *Soit  $h$  une fonction définie et continue sur  $[0, a]$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ), concave et nulle en 0. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta := \eta(h, \varepsilon)$  tel que pour toute fonction  $f$ , définie, continue et concave sur  $[0, a]$  vérifiant*

$$\forall x \in [0, a] \quad , \quad h(x) \leq f(x),$$

et

$$\int_0^a (f(x) - h(x)) dx \leq \eta,$$

alors

$$\sup_{x \in [a, b]} (f(x) - h(x)) \leq \varepsilon.$$

Le lemme suivant figure ici bien qu'il ne contienne pas explicitement d'hypothèse de concavité. Il apparaît en fait comme un analogue possible du lemme B.3.6 précédent lorsque l'hypothèse de concavité n'est plus satisfaite. En effet, lorsque nous l'appliquons, pour prouver le théorème 2.6.1, le caractère lipschitzien de la puissance  $\frac{n}{n-1}$  du profil isopérimétrique est issu de l'intégration de l'inéquation différentielle (2.7). Il n'est donc pas éronné d'attribuer aux propriétés de concavité des profils isopérimétriques le fait qu'une convergence  $L^1$  des profils implique leur convergence  $L^\infty$ .

**Lemme B.3.9** *Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $h$  une fonction continue positive définie sur  $[0,a]$  et  $f$  définie sur  $[0,a]$ , minorée par  $h$  et telle que  $f^\alpha$  est lipshitzienne de constante inférieure ou égale à  $L > 0$  ( $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ). Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta := \eta(h,\alpha,L,\varepsilon)$  tel que si*

$$\int_0^a (f(\beta) - h(\beta))d\beta \leq \eta(h,\alpha,L,\varepsilon)$$

alors

$$\sup_{\beta \in [0,a]} (f(\beta) - h(\beta)) \leq \varepsilon.$$

**Démonstration.**

Supposons que le point d'abscisse  $\beta_0 \in [0,a]$  réalise  $\sup_{\beta \in [0,a]} f(\beta) - h(\beta) = \varepsilon > 0$ . Alors, le caractère lipschitzien de  $f^\alpha$  donne pour tout  $\beta \in [0,a]$ ,

$$-L|\beta - \beta_0| + f^\alpha(\beta_0) \leq f^\alpha(\beta) \leq L|\beta - \beta_0| + f^\alpha(\beta_0),$$

d'où, en utilisant que  $f(\beta_0) - h(\beta_0) = \varepsilon$ ,

$$\forall \beta \in [0,a] \quad , \quad f(\beta) - h(\beta) \geq \max \left( 0, [(h(\beta_0) + \varepsilon)^\alpha - L|\beta - \beta_0|]^\frac{1}{\alpha} - h(\beta) \right).$$

Posons

$$I(h,\alpha,L,\varepsilon,\beta_0) := \int_0^a \max \left( 0, [(h(\beta_0) + \varepsilon)^\alpha - L|u - \beta_0|]^\frac{1}{\alpha} - h(u) \right) du.$$

Cette fonction est continue en la variable  $\beta_0$  et strictement positive sur  $[0,a]$ . Nous pouvons donc définir

$$\eta(h,\alpha,L,\varepsilon) := \inf_{\beta_0 \in [0,a]} I(h,\alpha,L,\varepsilon,\beta_0) > 0$$

de sorte que, si une fonction  $f$  satisfaisant les conditions de l'énoncé vérifie  $\sup_{\beta \in [0,a]} (f(\beta) - h(\beta)) > \varepsilon > 0$ , alors, d'après ce qui précède,

$$\int_0^a (f(\beta) - h(\beta))d\beta > \eta(h,\alpha,L,\varepsilon).$$

Ainsi, le résultat s'obtient en contraposant l'assertion précédente. □

**Remarque B.3.10** Les deux lemmes B.3.6 et B.3.9 apparaissent complémentaires l'un de l'autre dans la preuve du théorème 2.6.1. Cependant, le premier ne nécessite pas de supposer un contrôle uniforme des constantes de Lipschitz des fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Cette hypothèse semble correspondre à la contrepartie à imposer dans le lemme B.3.9 pour garder la même conclusion que le lemme B.3.6, en l'absence de la propriété de concavité des fonctions considérées. Cette différence explique pourquoi, dans le théorème 2.6.1, par rapport au cadre Ricci  $\geq 0$ , nous devons imposer une minoration du volume pour établir que la presque maximalité du diamètre impose la presque minimalité du profil lorsque le minorant de la courbure de Ricci est strictement négatif.

### B.3.5 Passage à la limite dans une inéquation différentielle

**Lemme B.3.11** Soient  $I$  un intervalle réel et

- $f$  une fonction définie et continue sur  $[0,1]$ , à valeurs dans  $I \subset \mathbb{R}$ ,
- $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies et continues sur  $I$  qui converge uniformément sur tout compact de  $I$  vers une fonction  $g$ , définie et continue sur  $I$ ,
- $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies et continues sur  $[0,1]$ , à valeurs dans  $I \subset \mathbb{R}$ , telles que

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in ]0,1[ \quad , \quad \overline{D^2} f_i(x) \leq g_i(f_i(x)).$$

S'il existe  $x_0 \in ]0,1[$  et  $\delta \in ]0, \min(x_0, 1 - x_0)[$  tels que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |f(x) - f_i(x)| = 0,$$

alors

$$\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \quad , \quad \overline{D^2} f(x) \leq g(f(x)).$$

#### Démonstration.

Supposons, dans un premier temps, que la suite  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est constante et égale à  $g$ . Il suffit donc de démontrer que l'inéquation différentielle est satisfaite pour  $x = x_0$  car, pour tout  $y$  de  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ , en reproduisant le même raisonnement sur l'intervalle centré en  $y$  d'amplitude  $\min(|x_0 - y|, \delta - |x_0 - y|)$ , nous démontrerons que l'inéquation différentielle est satisfaite au point  $y$ .

Par continuité de  $f$ ,  $f([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$  est un compact de  $I$  et par convergence uniforme des  $f_i$ , l'adhérence de l'union des  $f_i([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$  est un compact de  $I$ . Appelons  $K \subset I$  l'union de ces deux compacts. Dans la suite,  $\omega_f$  et  $\omega_g$  désigneront les modules de continuité uniforme de  $f$  sur  $[0,1]$  et de  $g$  restreinte au compact  $K$ .

Soit  $\delta_1 \in ]0, \delta[$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]} |g(f(x_0)) - g(f_i(x))| &\leq \omega_g \left( \sup_{x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]} |f(x_0) - f_i(x)| \right) \\ &\leq \omega_g \left( \omega_f(\delta_1) + \sup_{x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]} |f(x) - f_i(x)| \right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , par continuité de  $g$ , il existe  $\eta_\varepsilon > 0$  tel que

$$\omega_g(\eta_\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

par continuité de  $f$ , il existe  $\delta_\varepsilon \in ]0, \delta[$  tel que

$$\omega_f(\delta_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \eta_\varepsilon,$$

et par convergence uniforme de la suite  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , il existe  $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall i \geq i_\varepsilon \quad , \quad \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |f(x) - f_i(x)| \leq \frac{1}{2} \eta_\varepsilon.$$

De même, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta_\varepsilon \in ]0, \delta[$  et  $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall i \geq i_\varepsilon \quad , \quad \sup_{x \in [x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon]} |g(f(x_0)) - g(f_i(x))| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout  $i \geq i_\varepsilon$ , la fonction

$$f_i(x) - \frac{1}{2} \left( g(f(x_0)) + \varepsilon \right) (x - x_0)^2$$

est concave sur  $[x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon]$ . Elle converge simplement (c'est-à-dire point par point) sur cet intervalle vers la fonction

$$f(x) - \frac{1}{2} \left( g(f(x_0)) + \varepsilon \right) (x - x_0)^2$$

qui est donc concave elle aussi d'où

$$\forall x \in ]x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon[ \quad , \quad \overline{D^2} f(x) \leq g(f(x_0)) + \varepsilon.$$

Le résultat dans le cas particulier où  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite constante égale à  $g$  s'obtient alors en passant à la limite pour  $\varepsilon$  tendant vers 0 dans l'inéquation précédente particularisée en  $x = x_0$ .

Si la suite  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  n'est plus constante, il suffit de considérer pour  $\varepsilon > 0$  fixé,  $i$  suffisamment grand tel que, par convergence uniforme de  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  vers  $g$  sur le compact  $K \subset I$ ,

$$\sup_{y \in K} |g(y) - g_i(y)| \leq \varepsilon.$$

Nous pouvons alors appliquer le raisonnement précédent à la suite constante  $\varepsilon + g(\cdot)$  qui apparaît en majorant  $g_i(f_i(x))$  par  $g(f_i(x)) + \varepsilon$ , d'où

$$\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \quad , \quad \overline{D^2} f(x) \leq g(f(x)) + \varepsilon.$$

Le résultat final s'obtient alors par passage à la limite pour  $\varepsilon$  tendant vers 0.  $\square$





## Annexe C

# Intégration d'inéquations différentielles

Cette annexe a pour but de permettre l'intégration d'inéquations différentielles portant sur des fonctions dont la régularité est insuffisante pour utiliser les techniques classiques d'intégration. Dans un premier temps, nous allons montrer comment intégrer deux inéquations différentielles du premier ordre : l'une est une minoration presque partout la dérivée d'une fonction continue croissante, l'autre est une minoration partout la dérivée à droite d'une fonction continue. Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à des inéquations différentielles du second ordre pour lesquelles la dérivée seconde est obtenue comme limite supérieure de dérivées secondes discrètes. Les résultats de comparaison obtenus coïncident avec les théorèmes classiques dans le cas régulier.

Les preuves sont assez techniques et nous ne sommes pas parvenus à les présenter de manière plus simple, d'autant que nous avons préféré énoncer les résultats dans la plus grande généralité possible. Ce choix correspond à la fois au souci de mettre en avant les points essentiels sur lesquels reposent les preuves et à l'idée que ces techniques ne servent pas uniquement à étudier l'inéquation différentielle (2.7) qui orchestre le chapitre 2, mais également à exploiter d'autres inéquations différentielles comme par exemple l'inégalité (3.20), qui apparaît avec le profil gaussien au chapitre 3.

### C.1 Inéquations du premier ordre

Nous proposons deux lemmes d'intégration qui conduisent à des estimations similaires mais dont les hypothèses sont différentes. Le premier concerne les fonctions monotones tandis que le second suppose une minoration uniforme des limites inférieures des taux d'accroissement à gauche (ou à droite) sur un intervalle.

Commençons par rappeler le lemme suivant, qui concerne les fonctions croissantes et dont nous reprenons la preuve proposée dans [Ti] page 361.

**Lemme C.1.1** *Soit  $f$  une fonction continue croissante définie sur l'intervalle  $[a, b]$  qui admet par conséquent une dérivée à droite presque partout notée  $f'_d$ . Alors,  $f'_d$  est intégrable et vérifie :*

$$\int_a^b f'_d(u) du \leq f(b) - f(a).$$

**Démonstration.** Soient  $\varepsilon > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\varepsilon < b - a$  et  $N\varepsilon > 1$ . Posons, pour tout  $n \geq N$  et pour tout  $t \in [a, b - \varepsilon]$ ,  $g_n(t) = \frac{f(t + \frac{1}{n}) - f(t)}{\frac{1}{n}}$ . La fonction définie ponctuellement sur  $[a, b - \varepsilon]$  comme la limite inférieure de la suite  $(g_n)_{n \geq N}$ , est mesurable et

coïncide presque partout avec la fonction  $f'_d$ . Le lemme de Fatou, appliqué à la suite de fonctions positives  $g_n$  (c'est là qu'intervient la croissance de  $f$ ) donne alors :

$$\begin{aligned} \int_a^{b-\varepsilon} f'_d(t) dt &= \int_a^{b-\varepsilon} \liminf_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{b-\varepsilon} g_n(t) dt \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{n} \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon+\frac{1}{n}} f(t) dt - \frac{1}{n} \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt \right]. \end{aligned}$$

La continuité de  $f$  en  $a$ , en  $b - \varepsilon$ , puis en  $b$  permet alors de conclure en passant à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. □

Donnons un énoncé dont la conclusion est analogue mais pour lequel l'hypothèse de monotonie est remplacée par une minoration des dérivées à gauche partout.

**Lemme C.1.2** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :*

$$\forall x \in ]a, b[ \quad , \quad \liminf_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{f(x) - f(x-u)}{u} \geq g(x).$$

Alors,

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad , \quad x \leq y \quad , \quad \int_x^y g(t) dt \leq f(x) - f(y).$$

**Démonstration.**

Ce lemme est énoncé dans [MHH] (lemme 2.3 page 4893), prouvé et suivi d'une discussion concernant un affaiblissement possible des hypothèses de continuité de  $f$  et  $g$ . Nous donnons ici une autre rédaction de la preuve, sans revendiquer une grande différence.

Nous allons ramener le problème à une question de connexité. En effet, introduisons pour tout réel  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $y \in [a, b]$ , le sous-ensemble de  $[a, y]$  noté  $I_{\varepsilon, y}$  et défini par :

$$I_{\varepsilon, y} = \{x \in [a, y] \quad \text{tel que} \quad \forall t \in [x, y] \quad h(y) - h(t) \geq -\varepsilon(y - t)\},$$

où nous avons posé  $h(x) = f(x) - \int_a^x g(t) dt$ . Remarquons que l'ensemble  $I_{\varepsilon, y}$  est non vide puisque  $y$  lui appartient. Par ailleurs, la continuité de  $f$  et  $g$  entraînent celle de  $h$  si bien que  $I_{\varepsilon, y}$  est fermé. Montrons maintenant qu'il est ouvert. Soit  $x_0$  dans  $I_{\varepsilon, y}$ . D'une part, par définition de  $I_{\varepsilon, y}$ , l'intervalle  $[x_0, y]$  est dans  $I_{\varepsilon}$ . D'autre part, par hypothèse,

$$\liminf_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{h(x_0) - h(x_0 - u)}{u} \geq 0$$

donc il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall u \in ]0, \eta[ \quad , \quad h(x_0) - h(x_0 - u) \geq -\varepsilon u.$$

Par conséquent, nous pouvons vérifier que

$$\forall t \in [x_0 - \eta, y] \quad , \quad h(y) - h(t) \geq -\varepsilon(y - t)$$

donc  $x_0 - \eta$  appartient à  $I_{\varepsilon, y}$ .

Ainsi, l'ensemble  $I_{\varepsilon,y}$ , ouvert et fermé non vide du connexe  $[a,y]$ , est égal à  $[a,y]$ . Nous obtenons alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \forall y \in [a,b] \quad , \quad \forall t \in [a,y] \quad h(y) - h(t) \geq -\varepsilon(y - t)$$

d'où la croissance de  $h$ , par passage à la limite sur  $\varepsilon$  tendant vers 0, ce qui prouve le résultat annoncé.  $\square$

Remarquons que nous disposons d'un lemme analogue en changeant l'hypothèse sur la dérivée à gauche en une hypothèse sur la dérivée à droite :

**Lemme C.1.3** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $[a,b]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :*

$$\forall x \in [a,b[ \quad , \quad \liminf_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \geq g(x).$$

Alors,

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad , \quad x \leq y \quad , \quad \int_x^y g(t) dt \leq f(y) - f(x).$$

## C.2 Inéquations différentielles du second ordre : $\overline{D^2}y \leq g(y)$ .

Cette partie est consacrée à l'étude des inéquations différentielles du type

$$\overline{D^2}y \leq g(y).$$

Nous avons préféré énoncer les résultats et les techniques dans le cadre le plus général possible, d'une part parce que les techniques d'analyse sont essentiellement les mêmes et qu'il semblait opportun de montrer que les théorèmes de comparaison ne sont pas l'apanage d'une inéquation différentielle spécifique, d'autre part parce que nous avons été confrontés à d'autres inéquations différentielles -en particulier celle satisfaite par le profil gaussien (voir le paragraphe 3.2.2)- dont le traitement est analogue.

### C.2.1 Cas où $g$ est croissante

#### Théorème de comparaison

Voici un lemme fondamental sur lequel repose la preuve du théorème de comparaison C.2.2, qui établit un pincement d'une solution de l'inéquation différentielle entre deux solutions exactes de l'équation différentielle associée.

**Lemme C.2.1** *Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et*

- $g$  une fonction continue croissante (pas forcément strictement) définie sur un intervalle  $I$ ,
- $f$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0,a]$ , telle que  $f(]0,a[) \subset I$ , qui satisfait l'inéquation différentielle :

$$\forall \beta \in ]0,a[ \quad , \quad \underline{D^2}f(\beta) \leq g(f(\beta)),$$

- $y$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0,a]$ , telle que  $y(]0,a[) \subset I$ , et solution du problème :

$$\forall \beta \in ]0,a[ \quad , \quad \underline{D^2}y(\beta) \geq g(y(\beta)) \quad \text{et} \quad y(0) = f(0).$$

S'il existe  $\beta_0$  dans  $]0, a[$  tel que  $y(\beta_0) > f(\beta_0)$ , alors

$$\forall \beta \in [\beta_0, a] \quad , \quad y(\beta) > f(\beta).$$

**Démonstration.**

Définissons les réels  $\beta_-$  et  $\beta_+$  :

$$\beta_- = \inf \left\{ \beta \in [0, \beta_0] \quad / \quad \forall u \in [\beta, \beta_0] \quad , \quad y(u) > f(u) \right\},$$

$$\beta_+ = \sup \left\{ \beta \in [\beta_0, a] \quad / \quad \forall u \in [\beta_0, \beta] \quad , \quad y(u) > f(u) \right\}.$$

La continuité des fonctions  $y$  et  $f$  impose d'une part  $0 \leq \beta_- < \beta_0 < \beta_+ \leq a$  et d'autre part  $y(\beta_-) = f(\beta_-)$  puisque  $y(0) = f(0)$ .

Supposons que  $\beta_+ < a$ . Alors  $y(\beta_+) = f(\beta_+)$  par continuité des fonctions. Etudions la fonction  $f - y$  sur l'intervalle  $[\beta_-, \beta_+]$  :

- elle est nulle aux extrémités,
- elle prend une valeur strictement négative en  $\beta_0 \in ]\beta_-, \beta_+[$ , ailleurs elle est négative ou nulle,
- en observant que la limite inférieure d'une différence est majorée par la différence des limites inférieures, sa dérivée seconde vérifie :

$$\begin{aligned} \forall \beta \in ]\beta_-, \beta_+[ \quad , \quad \underline{D}^2(f - y)(\beta) &\leq \underline{D}^2 f(\beta) - \underline{D}^2(y)(\beta) \\ &\leq g(f(\beta)) - g(y(\beta)) \\ &\leq 0 \quad (\text{g croissante}). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la proposition B.2.1, la fonction continue  $f - y$  est concave sur  $]\beta_-, \beta_+[$ . Or elle est nulle aux extrémités, ce qui permet d'affirmer, par l'intermédiaire du lemme B.1.6 que la fonction  $f - y$  est positive ou nulle sur  $[\beta_-, \beta_+]$ , d'où une contradiction avec la valeur prise en  $\beta_0$ . Ainsi,  $\beta_+ = a$ . Si nous supposons que  $f(a) = y(a)$ , exactement le même raisonnement que ci-dessus permet d'aboutir à une contradiction analogue. Par conséquent,  $\beta_+ = a$  et  $f(a) < y(a)$ , le résultat annoncé se déduit alors de la définition de  $\beta_+$ . □

**Théorème C.2.2** Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et

- $g$  une fonction continue croissante définie sur un intervalle réel  $I$ ,
- $f$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0, a]$ , telle que  $f(]0, a[) \subset I$ , qui satisfait l'inéquation différentielle :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D}^2 f(\beta) \leq g(f(\beta))$$

et la condition  $|\overline{f}'_d(0)| < +\infty$ ,

- $y_+$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0, a]$ , telle que  $y_+(]0, a[) \subset I$ , et solution du problème :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D}^2 y(\beta) = g(y(\beta)) \quad , \quad y_+(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \overline{f}'_d(0) < \underline{y}'_+(0) < +\infty,$$

- $y_-$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0, a]$ , telle que  $y_-(]0, a[) \subset I$ , et solution du problème :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D}^2 y(\beta) = g(y(\beta)) \quad , \quad y_-(0) = f(0) \quad \text{et} \quad y_-(a) \leq f(a).$$

Alors,

$$\forall \beta \in [0, a[ \quad , \quad y_-(\beta) \leq f(\beta) \leq y_+(\beta).$$

### Démonstration.

– Preuve de la minoration

S'il existe  $\beta_0$  dans  $]0, a[$  tel que  $y_-(\beta_0) > f(\beta_0)$ , alors le lemme C.2.1 impose  $y_-(a) > f(a)$ , ce qui est faux, d'où :

$$\forall \beta \in [0, a[ \quad , \quad y_-(\beta) \leq f(\beta).$$

Remarquons que pour obtenir cette minoration, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse de finitude de  $\overline{f}'_d(0)$ .

– Preuve de la majoration dans le cas  $\overline{f}'_d(0) < \underline{y}'_{+d}(0) < +\infty$

Par définition des dérivées, nous pouvons écrire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \quad , \quad \exists \delta_\varepsilon \in ]0, a[ \quad \text{tel que}$$

$$\forall \beta \in ]0, \delta_\varepsilon[ \quad , \quad \frac{y_+(\beta) - y_+(0)}{\beta} \geq \underline{y}'_{+d}(0) - \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta} \leq \overline{f}'_d(0) + \varepsilon.$$

L'inégalité  $\underline{y}'_{+d}(0) > \overline{f}'_d(0)$  permet d'obtenir, en prenant  $\varepsilon \leq \frac{1}{3}(\underline{y}'_{+d}(0) - \overline{f}'_d(0))$ ,

$$\forall \beta \in ]0, \delta_\varepsilon[ \quad , \quad f(\beta) - f(0) \leq \overline{f}'_d(0)\beta + \varepsilon\beta < \underline{y}'_{+d}(0)\beta - \varepsilon\beta \leq y_+(\beta) - y_+(0).$$

Ainsi, comme  $y_+(0) = f(0)$ , il existe une suite  $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de réels de  $]0, 1[$  qui tend vers 0 et telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad y_+(\beta_i) > f(\beta_i).$$

Le lemme C.2.1 permet alors d'écrire :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall \beta \in [\beta_i, a[ \quad , \quad y_+(\beta) > f(\beta),$$

d'où, sachant que  $y_+(0) = f(0)$  et  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \beta_i = 0$ ,

$$\forall \beta \in [0, a[ \quad , \quad y_+(\beta) \geq f(\beta),$$

ce qui donne le résultat attendu. □

### Remarques C.2.3

– L'interprétation géométrique de ce théorème de comparaison est que toute solution de l'inéquation différentielle est localisée entre deux solutions exactes de l'équation différentielle associée. D'une part elle est majorée par toute solution qui a "presque" mêmes conditions initiales (même valeur initiale et vitesse initiale strictement supérieure), d'autre part elle est minorée par la solution qui prend les mêmes valeurs aux extrémités du segment  $[0, a]$ . Observons par ailleurs que l'application de ce théorème nécessite l'existence (et la connaissance) des solutions exactes de l'équation différentielle correspondante.

- Ce théorème de comparaison est optimal dans la minoration puisque le minorant d'une fonction qui satisfait l'inéquation différentielle est une solution de l'équation différentielle associée et vérifie elle-aussi l'inéquation différentielle. En revanche, il ne paraît pas évident; a priori, que la majoration soit optimale en toute généralité. Cependant, si nous considérons une situation dans laquelle il y a continuité des solutions en les conditions initiales au point considéré  $(f(0), \overline{f}'_a(0))$ , alors toute solution de l'inéquation différentielle est majorée par la solution de l'équation différentielle ayant les mêmes conditions initiales et cette majoration est optimale pour la même raison que l'optimalité de la minoration (un exemple est donné par le corollaire C.2.4).
- Nous n'avons pas abordé, dans l'énoncé du théorème C.2.2, l'étude des cas d'égalité. En fait, la condition sur les dérivées à l'origine montre que le cas d'égalité avec le majorant ne se produit qu'en 0. Néanmoins, comme le laisse sous-entendre la remarque précédente, le "bon majorant" ne sera pas souvent celui proposé dans le théorème C.2.2 mais la solution exacte qui a les mêmes conditions initiales que  $f$  et c'est l'étude du cas d'égalité avec ce majorant là qui nous intéressera alors. Si nous notons  $\tilde{y}_+$  ce majorant, un calcul analogue à celui effectué dans la preuve du lemme C.2.1 montre que  $f - \tilde{y}_+$  est une fonction concave, négative ou nulle sur  $[0, a]$ . Par conséquent, s'il existe  $\beta_0 \in ]0, a[$  tel que  $f(\beta_0) = \tilde{y}_+(\beta_0)$ , nous pouvons conclure que  $f$  et  $\tilde{y}_+$  coïncide sur  $[0, \beta_0]$ . L'étude des cas d'égalité sera toujours proposée dans les applications, elle sera détaillée et fera essentiellement appel au lemme fondamental C.2.1. Les résultats qu'il semble raisonnable d'espérer sont les suivants: s'il existe  $\beta_0$  dans  $]0, a[$  tel que  $f$  coïncide en  $\beta_0$  avec la solution exacte de l'inéquation différentielle qui a mêmes conditions initiales (resp. mêmes valeurs en 0 et en  $a$ ), alors elles coïncident sur  $[0, \beta_0]$  (resp.  $[\beta_0, a]$ ). Nous renvoyons au corollaire C.2.4 où nous étudions "à la main" les cas d'égalité.
- Dans le cas où  $g$  est la fonction identiquement nulle, nous retrouvons ainsi l'encadrement classique d'une fonction concave: elle est minorée par sa corde et majorée par sa tangente à l'origine.

### Application au cas particulier où $g$ est constante

Donnons une application du théorème C.2.2 dans une situation précise pour laquelle nous connaissons explicitement des familles de solutions particulières  $y_+$  et  $y_-$ , car la fonction  $g$  est supposée constante.

**Corollaire C.2.4** Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et

- $c$  une constante réelle quelconque,
- $f$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0, a]$  qui satisfait l'inéquation différentielle:

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D}^2 f(\beta) \leq c \quad \text{et la condition} \quad |\overline{f}'_a(0)| < +\infty.$$

Alors, pour tout  $\beta$  dans  $[0, a]$ ,

$$\frac{1}{2}c\beta^2 + \frac{1}{a} \left[ f(a) - f(0) - \frac{1}{2}ca^2 \right] \beta + f(0) \leq f(\beta) \leq \frac{1}{2}c\beta^2 + \overline{f}'_a(0)\beta + f(0).$$

Par ailleurs, s'il existe  $\beta_0 \in ]0, a[$  tel que  $f(\beta_0)$  est égal à son majorant (resp. à son minorant), alors  $f$  coïncide avec son majorant (resp. son minorant) sur  $[0, \beta_0]$  (resp. sur  $[0, a]$ ).

Enfin, la fonction  $f$  est lipschitzienne et plus précisément,

(i) si  $c \leq 0$ ,

$$\text{Lip}(f) \leq \max(|f'_d(0)|, |f'_g(a)|),$$

(ii) si  $c > 0$ ,

$$\text{Lip}(f) \leq 2ca + 2f'_d(0) - f'_g(a).$$

### Démonstration.

Nous allons appliquer le théorème C.2.2 pour  $g(\beta) = c$ . Remarquons alors que dans ce cas, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$y_{+, \varepsilon}(\beta) := \frac{1}{2}c\beta^2 + (\overline{f}'_d(0) + \varepsilon)\beta + f(0)$$

est une fonction continue sur  $[0, a]$ , de classe  $C^2$  sur  $]0, a[$  et solution du problème :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad y''_{+, \varepsilon}(\beta) = c \quad , \quad y_{+, \varepsilon}(0) = f(0) \quad \text{et} \quad y'_{+, \varepsilon}(0) = \overline{f}'_d(0) + \varepsilon > \overline{f}'_d(0).$$

Ainsi, le théorème C.2.2 s'applique et donne :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \quad , \quad \forall \beta \in [0, a] \quad , \quad f(\beta) \leq y_{+, \varepsilon}(\beta),$$

soit, en passant à la limite pour  $\varepsilon$  tendant vers 0,

$$\forall \beta \in [0, a] \quad , \quad f(\beta) \leq \frac{1}{2}c\beta^2 + \overline{f}'_d(0)\beta + f(0),$$

ce qui démontre la majoration de  $f$ . Quant à la minoration, elle est aussi donnée par le théorème C.2.2 après avoir remarqué que la fonction

$$y_-(\beta) := \frac{1}{2}c\beta^2 + \frac{1}{a}\left[f(a) - f(0) - \frac{1}{2}ca^2\right]\beta + f(0)$$

est continue sur  $[0, a]$ , de classe  $C^2$  sur  $]0, a[$  et solution du problème :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad y''_-(\beta) = c \quad , \quad y_-(0) = f(0) \quad \text{et} \quad y_-(a) = f(a).$$

De plus, si  $c \leq 0$ , la fonction  $f$  est concave de sorte qu'en appliquant le lemme B.1.5, nous obtenons (i) (remarquer que dans l'énoncé du lemme, nous ne précisons plus  $\overline{f}'_d(0)$  car, par concavité de  $f$ , il s'agit de  $f'_d(0)$ , de même  $f'_g(a)$  a un sens). Si  $c > 0$ , appliquons le lemme B.1.5 à la fonction positive  $y_{+, \varepsilon} - f$ , continue sur  $[0, a]$ , convexe et de dérivée positive en 0 (et donc positive en  $a$ ), pour obtenir

$$\text{Lip}(y_{+, \varepsilon} - f) \leq \max(\varepsilon, (y_{+, \varepsilon} - f)'_g(a)) \leq \varepsilon + (y_{+, \varepsilon})'_g(a) - f'_g(a) = \varepsilon + ca + f'_d(0) + \varepsilon - f'_g(a),$$

d'où

$$\text{Lip}(f) \leq \text{Lip}(y_{+, \varepsilon}) + ca + f'_d(0) - f'_g(a) + 2\varepsilon.$$

C'est parce que  $y_{+, \varepsilon} - f$  et  $y_{+, \varepsilon}$  sont dérivables à gauche en  $a$  et à droite en 0 que  $f$  le devient. En remarquant que  $y_{+, \varepsilon}$  est une parabole et qu'elle est convexe croissante sur  $[0, a]$ , le lemme B.1.5 donne

$$\text{Lip}(y_{+, \varepsilon}) = (y_{+, \varepsilon})'_g(a) = ca + f'_d(0) + \varepsilon,$$

d'où

$$\text{Lip}(f) \leq 2ca + 2f'_d(0) - f'_g(a) + 3\varepsilon,$$

puis en passant à la limite sur  $\varepsilon$ ,

$$\text{Lip}(f) \leq 2ca + 2f'_d(0) - f'_g(a),$$

ce qui achève la preuve de (ii).

Les cas d'égalité se traitent avec le lemme B.1.6 car la fonction  $f - y_+$  (resp.  $f - y_-$ ) est concave sur  $[0, a]$ , négative ou nulle sur  $[0, a]$  (resp. positive ou nulle sur  $[0, a]$ ), nulle en 0 (resp. nulle en 0 et en  $a$ ). Ainsi, s'il existe  $\beta_0 \in ]0, a[$  tel que  $f(\beta_0) = y_+(\beta_0)$  (resp.  $f(\beta_0) = y_-(\beta_0)$ ), alors nous pouvons conclure que  $f$  et  $y_+$  (resp.  $y_-$ ) coïncident sur  $[0, \beta_0]$  (resp. sur  $[0, a]$ ).

□

### Remarques C.2.5

- Ces résultats de comparaison sont optimaux dans la mesure où le majorant et le minorant exhibés satisfont les hypothèses requises sur la fonction  $f$ .
- Nous avons traité le cas d'égalité à la main dans le corollaire C.2.4 car la simplicité de  $g$  permet d'obtenir des contraintes plus fortes que celles qu'il est raisonnable d'espérer en toute généralité et qui sont évoquées au cours des remarques C.2.3.

### C.2.2 Cas où $g$ est décroissante

A défaut de pouvoir citer et prouver un résultat analogue au théorème C.2.2, nous allons donner un lemme qui apparaît comme le pendant du lemme C.2.1 lorsque la fonction  $g$  devient décroissante.

**Lemme C.2.6** Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et

- $g$  une fonction continue décroissante (pas forcément strictement) définie sur un intervalle  $I$ ,
- $f$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0, a]$ , telle que  $f(]0, a[) \subset I$  et qui satisfait l'inéquation différentielle :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D}^2 f(\beta) \leq g(f(\beta)),$$

- $y$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0, a]$ , telle que  $y(]0, a[) \subset I$  et solution du problème :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D}^2 y(\beta) \geq g(y(\beta)) \quad \text{et} \quad y(0) = f(0).$$

S'il existe  $\beta_0$  dans  $]0, a[$  tel que  $y(\beta_0) < f(\beta_0)$ , alors pour tout couple  $(\beta_-, \beta_+)$  tel que

- $0 \leq \beta_- < \beta_0 < \beta_+ \leq a$ ,
- $\forall \beta \in [\beta_-, \beta_+] \quad , \quad y(\beta) \leq f(\beta)$ ,
- $f(\beta_-) = y(\beta_-)$ ,

nous obtenons :

$$\underline{y}'_d(\beta_-) < \underline{f}'_d(\beta_-)$$

et si  $f(\beta_+) = y(\beta_+)$ , nous avons de plus :

$$\overline{y}'_g(\beta_+) > \overline{f}'_g(\beta_+).$$

Des réels  $\beta_+$  et  $\beta_-$  possibles peuvent être obtenus en posant par exemple :

$$\beta_- = \inf \left\{ \beta \in [0, \beta_0] \quad / \quad \forall u \in [\beta, \beta_0] \quad , \quad y(u) \leq f(u) \right\}$$

et

$$\beta_+ = \sup \left\{ \beta \in [\beta_0, a] \quad / \quad \forall u \in [\beta_0, \beta] \quad , \quad y(u) \leq f(u) \right\}.$$



**Démonstration.**

La continuité des fonctions  $y$  et  $f$  impose  $0 \leq \beta_- < \beta_0 < \beta_+ \leq a$  et ajoutée au fait que  $y(0) = f(0)$ , elle assure l'égalité  $y(\beta_-) = f(\beta_-)$ . Etudions la fonction  $f - y$  sur l'intervalle  $[\beta_-, \beta_+]$  :

- elle est nulle en  $\beta_-$ ,
- elle prend une valeur strictement positive en  $\beta_0 \in ]\beta_-, \beta_+[$ , ailleurs elle est positive ou nulle par définition de  $\beta_-$  et  $\beta_+$ ,
- en observant que la limite inférieure d'une différence est majorée par la différence des limites inférieures, sa dérivée seconde vérifie :

$$\begin{aligned} \forall \beta \in ]\beta_-, \beta_+[ \quad , \quad \underline{D^2}(f - y)(\beta) &\leq \underline{D^2}f(\beta) - \underline{D^2}y(\beta) \\ &\leq g(f(\beta)) - g(y(\beta)) \\ &\leq 0 \quad (\text{g décroissante}). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la proposition B.2.1, la fonction continue  $f - y$  est concave sur  $[\beta_-, \beta_+]$ , nulle en  $\beta_-$  et strictement positive sur  $] \beta_-, \beta_+[$ . Par conséquent, le lemme B.1.6 permet d'affirmer que

$$(f - y)'_d(\beta_-) > 0 \quad \text{d'où} \quad f'_d(\beta_-) > y'_d(\beta_-).$$

De plus si  $f(\beta_+) = y(\beta_+)$ , nous avons de même

$$(f - y)'_g(\beta_+) > 0 \quad \text{d'où} \quad f'_g(\beta_+) > y'_g(\beta_+),$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

**Lemme C.2.7** Soient  $a$  un réel strictement positif et  $f$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[-a, a]$ . S'il existe une constante  $C$  telle que  $f(\beta) + \frac{1}{2}C\beta^2$  est une fonction concave sur  $[-a, a]$  et si  $f'_d(0) > 0$ , alors la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] -\min(\frac{1}{|C|}f'_d(0), a), \min(\frac{1}{|C|}f'_d(0), a)[$ .

**Démonstration.**

Par concavité de  $f(\beta) + \frac{1}{2}C\beta^2$ , nous obtenons, pour tout  $h \in [0, a]$ ,

$$f'_d(-h) - Ch \geq f'_d(0) \geq f'_d(h) + Ch,$$

soit

$$f'_d(-h) \geq f'_d(0) + Ch \quad \text{et} \quad f'_d(h) \geq f'_d(0) - Ch,$$

de sorte que nous pouvons affirmer que pour tout  $\beta \in ] -\min(\frac{1}{|C|}f'_d(0), a), \min(\frac{1}{|C|}f'_d(0), a)[$ ,  $f'_d(\beta) > 0$ . Si  $f$  n'est pas strictement croissante sur  $] -\min(\frac{1}{|C|}f'_d(0), a), \min(\frac{1}{|C|}f'_d(0), a)[$ , alors il existe un couple  $(x_1, x_2)$  dans cet intervalle tel que  $x_1 < x_2$  et  $f(x_1) \geq f(x_2)$ . L'absolue continuité de la fonction concave  $\beta \mapsto f(\beta) + \frac{1}{2}C\beta^2$  donne alors,

$$0 < \int_{x_1}^{x_2} f'_d(\beta) d\beta = f(x_2) - f(x_1) \leq 0,$$

d'où une contradiction. Par conséquent,  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $] -\min(\frac{1}{|C|}f'_d(0), a), \min(\frac{1}{|C|}f'_d(0), a)[$ . □

**Remarque C.2.8** Il existe des versions analogues en supposant  $f'_d(0) < 0$  ou en considérant les dérivées à gauche et non à droite.

Voici un lemme général qui donne une version intégrée des inéquations différentielles du second ordre qui nous intéressent.

**Lemme C.2.9** Soient  $a \in \mathbb{R}^{+*}$  et

- $g$  une fonction continue définie sur un intervalle  $I$ ,
- $f$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $]0, a[$ , telle que  $f(]0, a[) \subset I$ , qui satisfait l'inéquation différentielle :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D}^2 f(\beta) \leq g(f(\beta)).$$

Alors, pour tout couple  $(\beta_1, \beta_2) \in ]0, a[ \times ]0, a[$  ( $\beta_1 < \beta_2$ ) tel que  $f$  est croissante sur un voisinage ouvert de  $[\beta_1, \beta_2]$ ,

$$\frac{1}{2} f_d'^2(\beta_2) - \frac{1}{2} f_g'^2(\beta_1) \leq G(f(\beta_2)) - G(f(\beta_1)),$$

où  $G$  est une primitive de  $g$ .

**Remarque C.2.10** Ce lemme est très général puisqu'il n'impose aucune d'hypothèse de signe ni de monotonie concernant la fonction  $g$ .

**Démonstration.**

Fixons  $(\beta_1, \beta_2)$  dans  $]0, a[$  tels que  $\beta_1 < \beta_2$  et  $\nu > 0$  tel que  $f$  est croissante sur  $[\beta_1 - \nu, \beta_2 + \nu]$ . Un simple calcul montre que pour tout  $u \in ]0, \min(\beta_1, a - \beta_2, \nu)[$ , les expressions

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{2u} \left[ \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 - \left( \frac{f(\beta) - f(\beta - u)}{u} \right)^2 \right] d\beta$$

et

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{f(\beta + u) + f(\beta - u) - 2f(\beta)}{u^2} \frac{f(\beta + u) - f(\beta - u)}{2u} d\beta$$

sont égales. La technique consiste alors à passer à la limite sur cette égalité lorsque  $u$  tend vers 0.

- Considérons tout d'abord le premier terme de cette égalité :

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{2u} \left[ \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 - \left( \frac{f(\beta) - f(\beta - u)}{u} \right)^2 \right] d\beta.$$

En observant que

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \left( \frac{f(\beta) - f(\beta - u)}{u} \right)^2 d\beta = \int_{\beta_1 - u}^{\beta_2 - u} \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 d\beta,$$

il se simplifie en

$$\frac{1}{2u} \int_{\beta_2 - u}^{\beta_2} \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 d\beta - \frac{1}{2u} \int_{\beta_1 - u}^{\beta_1} \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 d\beta.$$

L'application du lemme B.3.1 donne que la fonction

$$h(\beta) := f(\beta) - \frac{1}{2} C(\beta_1, \beta_2, \nu) \beta^2,$$

où  $C(\beta_1, \beta_2, \nu) = \sup_{\alpha \in [\beta_1 - \nu, \beta_2 + \nu]} g(f(\alpha))$  est concave sur  $[\beta_1 - \nu, \beta_2 + \nu]$ , de sorte que

$$\forall \beta \in [\beta_1 - u, \beta_1] \quad , \quad \frac{h(\beta_1 + u) - h(\beta_1)}{u} \leq \frac{h(\beta + u) - h(\beta)}{u} \leq \frac{h(\beta_1) - h(\beta_1 - u)}{u}.$$

En explicitant  $h$ , nous obtenons,  $\forall \beta \in [\beta_1 - u, \beta_1]$ ,

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta_1 + u) - f(\beta_1)}{u} - C(\beta_1, \beta_2, \nu) \frac{2u\beta_1 + u^2}{2u} &\leq \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} - C(\beta_1, \beta_2, \nu) \frac{2u\beta + u^2}{2u} \\ &\leq \frac{f(\beta_1) - f(\beta_1 - u)}{u} - C(\beta_1, \beta_2, \nu) \frac{2u\beta_1 + u^2}{2u}, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta_1 + u) - f(\beta_1)}{u} - C(\beta_1, \beta_2, \nu)(\beta_1 - \beta) &\leq \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \\ &\leq \frac{f(\beta_1) - f(\beta_1 - u)}{u} + C(\beta_1, \beta_2, \nu)(\beta_1 - \beta), \end{aligned}$$

puis après avoir élevé au carré et intégré en  $\beta$  sur  $[\beta_1 - u, \beta_1]$ , l'expression

$$\frac{1}{u} \int_{\beta_1 - u}^{\beta_1} \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 d\beta$$

est minorée par

$$\left( \frac{f(\beta_1 + u) - f(\beta_1)}{u} \right)^2 - \left( \frac{f(\beta_1 + u) - f(\beta_1)}{u} \right) C(\beta_1, \beta_2, \nu) u^2 + \frac{1}{3} C(\beta_1, \beta_2, \nu)^2 u^2$$

et majorée par

$$\left( \frac{f(\beta_1) - f(\beta_1 - u)}{u} \right)^2 + \left( \frac{f(\beta_1 + u) - f(\beta_1)}{u} \right) C(\beta_1, \beta_2, \nu) u^2 + \frac{1}{3} C(\beta_1, \beta_2, \nu)^2 u^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f_d'^2(\beta_1) &\leq \liminf_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{1}{2u} \int_{\beta_1 - u}^{\beta_1} \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 d\beta \\ &\leq \limsup_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{1}{2u} \int_{\beta_1 - u}^{\beta_1} \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 d\beta \\ &\leq \frac{1}{2} f_g'^2(\beta_1). \end{aligned}$$

Nous montrons de la même manière que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f_d'^2(\beta_2) &\leq \liminf_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{1}{2u} \int_{\beta_2 - u}^{\beta_2} \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 d\beta \\ &\leq \limsup_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{1}{2u} \int_{\beta_2 - u}^{\beta_2} \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 d\beta \\ &\leq \frac{1}{2} f_g'^2(\beta_2). \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\limsup_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{2u} \left[ \left( \frac{f(\beta + u) - f(\beta)}{u} \right)^2 - \left( \frac{f(\beta) - f(\beta - u)}{u} \right)^2 \right] d\beta \geq \frac{1}{2} f_d'^2(\beta_2) - \frac{1}{2} f_g'^2(\beta_1).$$

– Quant au membre de droite, il se décompose en la somme des deux termes suivants :

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} g(f(\beta)) \frac{f(\beta+u) - f(\beta-u)}{2u} d\beta$$

et

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \left( \frac{f(\beta+u) + f(\beta-u) - 2f(\beta)}{u^2} - g(f(\beta)) \right) \frac{f(\beta+u) - f(\beta-u)}{2u} d\beta.$$

En appliquant le lemme B.3.2 qui permet d'écrire, pour tous  $(\beta, u)$  appartenant à  $[\beta_1, \beta_2] \times ]0, \min(\beta_1, a - \beta_2)[$ ,

$$\frac{f(\beta+u) + f(\beta-u) - 2f(\beta)}{u^2} \leq \sup_{\alpha \in [\beta-u, \beta+u]} g(f(\alpha)),$$

et en utilisant la monotonie de  $f$  sur  $[\beta_1 - \nu, \beta_2 + \nu]$ , qui donne  $f(\beta+u) - f(\beta-u) \geq 0$ , le second terme est majoré par

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \left[ \sup_{\alpha \in [\beta-u, \beta+u]} (g(f(\alpha)) - g(f(\beta))) \right] \frac{f(\beta+u) - f(\beta-u)}{2u} d\beta,$$

lui-même inférieur à

$$\left[ \sup_{\substack{\alpha \in [\beta-u, \beta+u] \\ \beta \in [\beta_1, \beta_2]}} |g(f(\alpha)) - g(f(\beta))| \right] \frac{1}{2u} \left( \int_{\beta_2-u}^{\beta_2+u} f(\beta) d\beta - \int_{\beta_1-u}^{\beta_1+u} f(\beta) d\beta \right).$$

Cette dernière quantité est majorée par le produit du module de continuité uniforme de  $g(f)$  sur  $[\beta_1 - \nu, \beta_2 + \nu]$  évalué en  $u$ , qui tend vers 0 lorsque  $u$  tend vers 0, et de

$$\frac{1}{2u} \left( \int_{\beta_2-u}^{\beta_2+u} f(\beta) d\beta - \int_{\beta_1-u}^{\beta_1+u} f(\beta) d\beta \right)$$

qui tend, lorsque  $u$  tend vers 0, par continuité de  $f$ , vers

$$f(\beta_2) - f(\beta_1).$$

Par conséquent, lors du passage à la limite pour  $u$  tendant vers 0, le second terme a une limite supérieure négative ou nulle. Le premier terme, quant à lui, se décompose en

$$\frac{1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(f(\beta)) \frac{f(\beta+u) - f(\beta)}{u} d\beta + \frac{1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(f(\beta)) \frac{f(\beta) - f(\beta-u)}{u} d\beta,$$

de sorte que lorsque  $u$  tend vers 0, il est majoré par

$$G(f(\beta_1)) - G(f(\beta_2))$$

car

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u < 0}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(f(\beta)) \frac{f(\beta+u) - f(\beta)}{u} d\beta = \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(f(\beta)) f'_g(\beta) d\beta \leq G(f(\beta_1)) - G(f(\beta_2))$$

et

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(f(\beta)) \frac{f(\beta+u) - f(\beta)}{u} d\beta = \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(f(\beta)) f'_d(\beta) d\beta \leq G(f(\beta_1)) - G(f(\beta_2)).$$

(le passage à la limite se fait en appliquant le théorème de convergence dominée car  $f$  est lipschitzienne sur tout fermé de  $]0, a[$ , toujours par concavité locale, tandis que la majoration vient du lemme C.1.2)

Ainsi, nous obtenons le résultat annoncé.  $\square$

Nous donnons maintenant un théorème qui généralise la majoration obtenue au théorème C.2.2 au cas où  $g$  est décroissante et positive. Cependant, à la différence des lemmes C.2.1 et C.2.6, les techniques utilisées ne reflètent plus autant le rôle fondamental des propriétés de concavité.

**Théorème C.2.11** Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et

- $g$  une fonction continue positive décroissante (pas nécessairement strictement) définie sur un intervalle réel  $I$ ,
- $f$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0, a]$ , telle que  $f(]0, a[) \subset I$ , qui satisfait l'inéquation différentielle :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D^2}f(\beta) \leq g(f(\beta))$$

et la condition  $|\overline{f}'_d(0)| < +\infty$ ,

- $y_+$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0, a]$ , de classe  $C^1$  sur  $]0, a[$  telle que  $y_+(]0, a[) \subset I$ , et solution du problème :

$$\forall \beta \in ]0, a[ \quad , \quad \underline{D^2}y(\beta) = g(y(\beta)) \quad , \quad y_+(0) = f(0) \quad , \quad \underline{y_+}'_d(0) > 0$$

pour  $\overline{f}'_d(0) < \underline{y_+}'_d(0) < +\infty$ .

Alors,

$$\forall \beta \in [0, a] \quad , \quad f(\beta) \leq y_+(\beta).$$

### Démonstration.

Remarquons tout d'abord que les propriétés de régularité, démontrées dans la proposition B.3.1 et liées au type de l'inéquation différentielle, permettent de remplacer  $\underline{y_+}'_d(0)$  et  $\overline{f}'_d(0)$  par  $y_+'(0)$  et  $f'(0)$ .

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un point  $\beta_0 \in ]0, a]$  tel que  $f(\beta_0) > y_+(\beta_0)$ . Définissons alors le point  $\beta_2$  de la manière suivante

$$\beta_2 := \inf \left\{ \beta \in [0, \beta_0] \mid \forall t \in [\beta, \beta_0], f(t) > y_+(t) \right\}.$$

$\beta_2$  est bien défini car, par continuité de  $f - y_+$ , l'ensemble sur lequel nous prenons l'infimum est non vide. De plus, toujours par continuité de  $f - y_+$  et compte tenu de l'hypothèse sur les dérivées à l'origine,  $y_+(\beta_2) = f(\beta_2)$  et  $0 < \beta_2 < \beta_0 \leq a$ . Enfin, la comparaison des taux d'accroissement au voisinage de  $\beta_2$  donne

$$f'_d(\beta_2) \geq y_+'(\beta_2) \geq \underline{y_+}'_d(0) > 0, \tag{C.1}$$

(la dernière inégalité vient de la convexité de  $y_+$  qui est une conséquence de la positivité de  $g$ )

Définissons maintenant le point  $\beta_1$  par

$$\beta_1 := \inf \left\{ \beta \in [0, \beta_2] \mid f \text{ est croissante sur } [\beta, \beta_2] \right\}.$$

Comme  $f$  satisfait une inéquation différentielle particulière, la proposition B.3.1 s'applique et permet, après avoir observé que  $f'_g(\beta_2) > 0$ , d'utiliser le lemme C.2.7 pour affirmer que  $\beta_1$  est bien défini.

Nous pouvons alors affirmer que  $f$  est croissante sur  $[\beta_1, \beta_2]$  car sinon il existe  $(x_1, x_2) \in [\beta_1, \beta_2]^2$  tels que  $x_1 < x_2$  et  $f(x_1) > f(x_2)$  et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $z \in ]x_1, x_2[$  (en particulier,  $z \in ]\beta_1, \beta_2]$ ) tel que  $f(z) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) > f(x_2)$  donc  $f$  n'est pas croissante sur  $[z, \beta_2]$  ce qui est contradictoire avec la définition de  $\beta_1$ .

Appliquons le résultat du lemme C.2.9 à la fonction  $f$  croissante sur un voisinage ouvert de  $[\beta, \beta_2]$  où  $\beta \in ]\beta_1, \beta_2[$ ,

$$\frac{1}{2}f'_d(\beta_2)^2 - \frac{1}{2}f'_g(\beta)^2 \leq G(f(\beta_2)) - G(f(\beta)) \leq G(f(\beta_2)), \quad (\text{C.2})$$

où nous avons fait le choix de la primitive de  $g$  qui s'annule en  $f(0)$  (par positivité de  $g$ ,  $G$  est croissante). Pour la fonction régulière et convexe  $y_+$ , nous obtenons par multiplication par  $y'$  et intégration entre  $\beta$  et  $\beta_2$

$$\frac{1}{2}y'_d(\beta_2)^2 - \frac{1}{2}y'_g(\beta)^2 = G(y_+(\beta_2)) - G(y_+(\beta)). \quad (\text{C.3})$$

Deux cas se présentent alors :

- si  $\beta_1 > 0$ , nous pouvons montrer que,  $f'_g(\beta_1) = 0$ . La proposition B.3.1 donne en effet  $f'_g(\beta_1) \geq f'_d(\beta_1)$  et la monotonie de  $f$  sur  $[\beta_1, \beta_2]$  donne  $f'_d(\beta_1) \geq 0$  donc  $f'_g(\beta_1) \geq 0$ . Par ailleurs, si  $f'_g(\beta_1) > 0$ , le lemme C.2.7 permet de voir que l'on peut accroître l'intervalle de croissance de  $f$  en deçà de  $\beta_1$  ce qui est contradictoire avec la définition de  $\beta_1$ . Par conséquent,  $f'_g(\beta_1) = 0$ . De plus, l'application de la proposition B.3.1 permet de montrer, par concavité locale autour de  $\beta_1$  et croissance de  $f$  que

$$0 \leq \lim_{\substack{\beta \rightarrow \beta_1 \\ \beta > \beta_1}} f'_g(\beta) \leq f'_g(\beta_1) = 0$$

d'où,

$$\lim_{\substack{\beta \rightarrow \beta_1 \\ \beta > \beta_1}} f'_g(\beta)^2 = 0.$$

Par conséquent, le passage à la limite sur  $\beta$  qui tend vers  $\beta_1$  dans l'inégalité (C.2) devient

$$\frac{1}{2}f'_d(\beta_2)^2 \leq G(f(\beta_2)) + f'_g(\beta_1)^2 \leq G(f(\beta_2))$$

tandis que la manipulation analogue pour  $\beta$  tendant vers 0 dans (C.3) donne, comme  $y_+(0) = f(0)$ ,

$$\frac{1}{2}y'_d(\beta_2)^2 - \frac{1}{2} \lim_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}} y'_g(\beta)^2 = G(y_+(\beta_2)).$$

Or par convexité de  $y_+$ , pour tout  $\beta \in ]0, a[$ ,

$$y'_g(\beta)^2 \geq y'_d(0)^2$$

d'où

$$\frac{1}{2}y'_d(\beta_2)^2 - \frac{1}{2}y'_d(0)^2 \geq G(y_+(\beta_2)).$$

Ainsi, comme  $f(\beta_2) = y_+(\beta_2)$ , nous obtenons

$$\frac{1}{2}f'_d(\beta_2)^2 \leq \frac{1}{2}y'_d(\beta_2)^2 - \frac{1}{2}y'_d(0)^2,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (C.1).

– si  $\beta_1 = 0$ , passons à la limite pour  $\beta$  tendant vers 0 dans l'inégalité (C.2) qui donne

$$\frac{1}{2}f'_d(\beta_2)^2 \leq G(f(\beta_2)) + \frac{1}{2} \liminf_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}} f'_g(\beta)^2,$$

et dans l'égalité (C.3) qui devient, en utilisant comme précédemment la convexité de  $y_+$ ,

$$\frac{1}{2}y'_{+d}(\beta_2)^2 \geq G(y_+(\beta_2)) + \frac{1}{2}y'_{+d}(0)^2.$$

Nous obtenons alors, comme  $y_+(\beta_2) = f(\beta_2)$ ,

$$\frac{1}{2}f'^2_d(\beta_2) \leq \frac{1}{2}y'^2_{+d}(\beta_2) - \frac{1}{2} \left( y'_{+d}(0)^2 - \liminf_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}} f'_g(\beta)^2 \right).$$

Cependant, comme  $y_+$  majore  $f$  sur un voisinage de 0 car  $y'_{+d}(0) \geq f'_d(0)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, il existe  $\beta_\varepsilon \in ]0, \varepsilon[$  tel que  $0 < f'_g(\beta_\varepsilon) \leq y'_{+g}(\beta_\varepsilon)$  (en effet, sinon  $(y_+ - f)'_g < 0$ ) sur  $]0, \varepsilon[$  d'où une contradiction en appliquant le lemme C.1.1). Par conséquent,

$$\liminf_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}} f'_g(\beta)^2 \leq \limsup_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}} y'_{+g}(\beta)^2 = \lim_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}} y'_{+g}(\beta)^2 = y'_{+d}(0)^2,$$

où nous avons utilisé que la limite des dérivées à gauche, lorsque  $\beta$  tend vers 0 par valeurs positives en 0, est égale à la dérivée à droite en 0 (la convexité donne la croissance de la fonction dérivée à gauche et ce résultat peut être établi à partir de la relation  $y_+(\beta) - y_+(0) = \int_0^\beta y'_{+g}(u) du$ ).

Ainsi,

$$\frac{1}{2}f'_d(\beta_2)^2 \leq \frac{1}{2}y'_{+d}(\beta_2)^2,$$

et compte tenu l'inégalité (C.1), nous pouvons affirmer que

$$f'_d(\beta_2) = y'_{+d}(\beta_2),$$

d'où une contradiction avec le lemme C.2.6 appliqué pour  $\beta_- = \beta_2$ .

□





## Annexe D

# Lemmes de recouvrements

Nous exposons ici deux lemmes de recouvrement uniformes sur les ensembles  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ , qualifiés de classiques dans [ChC1], mais dont nous n'avons trouvé aucune preuve ni aucun énoncé précis dans la littérature. Après avoir donné les lemmes D.1.1 et D.1.4 dans le cadre des variétés riemanniennes de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ , nous proposons une preuve de ces résultats dans un cadre plus général. En effet, les propositions D.1.2 et D.1.5 peuvent en particulier s'appliquer aux éléments de l'adhérence de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  munis de la mesure  $n$ -dimensionnelle de Hausdorff qui satisfait alors l'hypothèse requise pour  $V = V_{n,\delta}$  d'après le théorème 4.1.17. Nous avons effectivement recours à une technique utilisant ce résultat pour prouver le théorème 4.1.18.

D'une manière générale, ces lemmes consistent à encadrer le volume d'une partie compacte (ou de l'un de ses voisinages tubulaires) par la somme des volumes des boules associées à un recouvrement ou bien à un remplissage du compact (ou de l'un de ses voisinages tubulaires). C'est la construction de ces judicieux recouvrements et remplissages que nous explicitons en guise de preuve. L'apport essentiel de ces résultats réside dans la minoration explicite et uniforme sur  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  des rayons des boules impliquées satisfaisant les conditions des énoncés. En effet, lorsque deux variétés de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  sont à une distance de Gromov-Hausdorff très petite devant le minorant précédent, il sera possible de passer d'un recouvrement (resp. remplissage) de l'une à un recouvrement (resp. remplissage) de l'autre. Il s'agit là d'un argument essentiel de la preuve de la continuité uniforme de la fonctionnelle volume sur  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ .

### D.1 Énoncés des lemmes de recouvrement

#### D.1.1 Recouvrement et remplissage par des boules centrées dans un voisinage tubulaire de l'ensemble considéré

Le lemme suivant est utilisé dans la preuve de la proposition 4.1.4.

**Lemme D.1.1** *Considérons l'ensemble  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$ ,  $\eta > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon \leq \frac{1}{3}d$ . Alors, pour toute variété riemannienne  $(M,g)$  de  $\mathcal{M}(n,d,v,\delta)$  et pour tout compact  $K$  de  $M$ , il existe deux entiers  $N = N(\varepsilon,\eta,n,d,v,\delta)$  et  $\tilde{N}$ , un réel  $r = r(\varepsilon,\eta|n,d,v,\delta) > 0$ , une famille  $(m_i)_{i=1,\dots,\tilde{N}}$  de points de  $K_\varepsilon$  et deux familles de réels,  $(r_i)_{i=1,\dots,\tilde{N}}$  et  $(r'_i)_{i=1,\dots,\tilde{N}}$ , tels que*

- $\tilde{N} \leq N$ ,
- $\forall i = 1, \dots, \tilde{N} \quad , \quad r \leq \frac{1}{4}r_i \leq r'_i \leq r_i \leq \varepsilon$ ,

– les boules ouvertes  $(B(m_i, r_i))_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  recouvrent  $K$  et

$$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \text{vol}(B(m_i, r_i)) \leq (1 + \eta) \text{vol}(K_\varepsilon),$$

– les boules ouvertes  $(B(m_i, r'_i))_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  sont deux à deux disjointes, incluses dans  $K_\varepsilon$  et

$$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \text{vol}(B(m_i, r'_i)) \geq (1 - \eta) \text{vol}(K_\varepsilon).$$

Ce résultat est en fait une conséquence du résultat de recouvrement plus général suivant.

**Proposition D.1.2** Soient  $d > 0$ ,  $V$  une fonction définie sur  $[0, d]$ , croissante, nulle en 0, strictement positive sur  $]0, d[$  et  $(E, d, \mu)$  un espace de longueur muni d'une mesure borélienne telle que pour tout  $m \in E$  et tout  $r \in ]0, d[$ , la fonction

$$(m, r) \longmapsto \frac{\mu(B(m, r))}{V(r)}$$

est décroissante en  $r$ , minorée par  $C_1(d, \mu, V) > 0$  et majorée par  $C_2(d, \mu, V) > 0$ , uniformément sur  $E \times ]0, d[$ .

Supposons de plus que

$$C_3(d, V) := \sup_{\substack{r \in ]0, \frac{1}{3}d[ \\ \lambda \in ]0, \frac{1}{2}[}} \frac{V((1 + \lambda)r) - V((1 - \lambda)r)}{\lambda V(r)} < +\infty,$$

$$C_4(d, V) := \inf_{\substack{r \in ]0, \frac{1}{3}d[ \\ \lambda \in ]0, \frac{1}{2}[}} \frac{V((1 - \lambda)r)}{V(3r)} > 0,$$

$$C_5(d, V) := \sup_{\substack{r \in ]0, \frac{1}{3}d[ \\ \lambda \in ]0, \frac{1}{2}[}} \frac{V(r) - V((1 - \lambda)r)}{\lambda V(r)} < +\infty,$$

et

$$C_6(d, V) := \sup_{r \in ]0, \frac{1}{3}d[} \frac{V(2r)}{V(r)} < +\infty.$$

Soit  $K$  une partie compacte de  $E$  dont le  $\varepsilon$ -voisinage fermé

$$K_\varepsilon = \{m \in E \mid d(m, K) \leq \varepsilon\}$$

est de mesure finie. Alors, pour tous  $\eta > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon \leq \frac{1}{3}d$ , il existe  $r = r(\varepsilon, \eta \mid d, \mu(K_\varepsilon), C_1, C_2, V) > 0$ ,  $N = N(\varepsilon, \eta, d, \mu(K_\varepsilon), C_1, C_2, V) \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ , une famille  $(m_i)_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  de points de  $K_\varepsilon$  et deux familles de réels,  $(r_i)_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  et  $(r'_i)_{i=1, \dots, \tilde{N}}$ , tels que

- $\tilde{N} \leq N$ ,
- $\forall i = 1, \dots, \tilde{N}$  ,  $r \leq \frac{1}{4}r_i \leq r'_i \leq r_i \leq \varepsilon$ ,

– les boules ouvertes  $(B(m_i, r_i))_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  recouvrent  $K$  et

$$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mu(B(m_i, r_i)) \leq (1 + \eta) \mu(K_\varepsilon),$$

– les boules ouvertes  $(B(m_i, r'_i))_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  sont deux à deux disjointes, incluses dans  $K_\varepsilon$  et

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{\tilde{N}} B(m_i, r'_i)\right) \geq (1 - \eta) \mu(K_\varepsilon).$$

**Remarque D.1.3** Les dépendances en les constantes  $C_3, C_4, C_5$  et  $C_6$  des paramètres  $N$  et  $r$  sont en fait cachées dans les dépendances en le réel  $d$  et en la fonction  $V$ .

### D.1.2 Remplissage d'un compact par des boules centrées sur ce compact

Nous avons besoin, dans la preuve du lemme 4.2.2 d'un lemme de recouvrement similaire au lemme D.1.1, mais avec une contrainte supplémentaire : les boules disjointes dont la somme des volumes approche le volume de  $K$  doivent être centrées sur  $K$  au lieu de  $K_\varepsilon$ . Ce problème technique est résolu par la proposition D.1.5 dont la preuve est une adaptation de celle de la proposition D.1.2. Observons cependant qu'il faut désormais supposer une minoration du volume relatif du compact  $K$  afin d'obtenir un résultat analogue à celui du lemme 4.2.2.

**Lemme D.1.4** *Considérons l'ensemble  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$ ,  $\eta > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon \leq \frac{1}{3}d$ . Alors, pour toute variété riemannienne  $(M, g)$  de  $\mathcal{M}(n, d, v, \delta)$  et pour tout compact  $K$  de  $M$  dont le volume relatif est minoré par  $\beta_0$  ( $\beta_0 \in ]0, 1[$ ), c'est-à-dire  $\text{vol}(K) \geq \beta_0 \text{vol}(M, g)$ , il existe deux entiers  $N = N(\varepsilon, \eta, n, d, v, \delta, \beta_0)$  et  $\tilde{N}$ , un réel  $r = r(\varepsilon, \eta, n, d, v, \delta, \beta_0) > 0$ , une famille  $(m_i)_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  de points de  $K$  et une famille de réels,  $(r_i)_{i=1, \dots, \tilde{N}}$ , tels que*

- $\tilde{N} \leq N$ ,
- $\forall i = 1, \dots, \tilde{N}$  ,  $r \leq r_i \leq \varepsilon$ ,
- les boules ouvertes  $(B(m_i, r_i))_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  sont deux à deux disjointes, centrées dans  $K$ , incluses dans  $K_\varepsilon$  et

$$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \text{vol}(B(m_i, r_i)) \geq (1 - \eta) \text{vol}(K).$$

Ce lemme D.1.4 se déduit du résultat plus général établi par la proposition suivante.

**Proposition D.1.5** *Soient  $d > 0$ ,  $V$  une fonction définie sur  $[0, d]$ , croissante, nulle en 0, strictement positive sur  $]0, d[$  et  $(E, d, \mu)$  un espace de longueur muni d'une mesure borélienne telle que pour tout  $m \in E$  et tout  $r \in ]0, d]$ , la fonction*

$$(m, r) \longmapsto \frac{\mu(B(m, r))}{V(r)}$$

*est décroissante en  $r$ , minorée par  $C_1(d, \mu, V) > 0$  et majorée par  $C_2(d, \mu, V) > 0$ , uniformément sur  $E \times ]0, d]$ .*

Supposons de plus que

$$C_3(d,V) := \sup_{\substack{r \in ]0, \frac{1}{3}d[ \\ \lambda \in ]0, \frac{1}{2}[}} \frac{V((1+\lambda)r) - V((1-\lambda)r)}{\lambda V(r)} < +\infty$$

et

$$C_4(d,V) := \inf_{\substack{r \in ]0, \frac{1}{3}d[ \\ \lambda \in ]0, \frac{1}{2}[}} \frac{V((1-\lambda)r)}{V(3r)} > 0.$$

Soit  $K$  une partie compacte de  $E$  dont le  $\varepsilon$ -voisinage fermé

$$K_\varepsilon = \{m \in E \mid d(m,K) \leq \varepsilon\}$$

est de mesure finie. Alors, pour tous  $\eta > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon \leq \frac{1}{3}d$ , il existe  $r = r(\varepsilon, \eta \mid d, \mu(K_\varepsilon), C_1, C_2, V) > 0$ ,  $N = N(\varepsilon, \eta, d, \mu(K_\varepsilon), C_1, C_2, V) \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ , une famille  $(m_i)_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  de points de  $K$  et une famille de réels,  $(r_i)_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  tels que

- $\tilde{N} \leq N$ ,
- $\forall i = 1, \dots, \tilde{N}$  ,  $r \leq r_i \leq \varepsilon$ ,
- les boules ouvertes  $(B(m_i, r_i))_{i=1, \dots, \tilde{N}}$  sont deux à deux disjointes, incluses dans  $K_\varepsilon$  et

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{\tilde{N}} B(m_i, r_i)\right) \geq \mu(K) - \eta.$$

**Remarque D.1.6** Les dépendances en les constantes  $C_3$  et  $C_4$  des paramètres  $N$  et  $r$  sont en fait cachées dans les dépendances en le réel  $d$  et en la fonction  $V$ .

## D.2 Lemmes préparatoires

Voici deux lemmes préparatoires, le second utilise le premier et représentera le moteur essentiel de la technique itérative développée pour démontrer les propositions D.1.2 et D.1.5. Ces premiers lemmes possèdent différents énoncés qu'il est possible de trouver dans [KP], [Si] , [Maz], [Mat]...

**Lemme D.2.1** Soient  $\varepsilon > 0$  et  $(E, d, \mu)$  un espace métrique muni d'une mesure borélienne telle que

$$\forall m \in E \quad , \quad \forall r \in [0, 3\varepsilon] \quad , \quad V_1(r) \leq \mu(B(m, r)) \leq V_2(r)$$

où  $V_1$  et  $V_2$  sont deux fonctions croissantes définies sur  $[0, 3\varepsilon]$ , strictement positives sur  $]0, \varepsilon]$ .

Soit  $K$  une partie fermée de  $E$  dont le  $\varepsilon$ -voisinage fermé

$$K_\varepsilon = \{m \in E \mid d(m, K) \leq \varepsilon\}$$

est de mesure finie. Alors il existe un entier  $N$  et une famille  $(m_i)_{i=1, \dots, N}$  de points de  $K$  telle que

- (i) les boules ouvertes  $(B(m_i, \varepsilon))_{i=1, \dots, N}$  sont deux à deux disjointes,
- (ii) les boules ouvertes  $(B(m_i, 2\varepsilon))_{i=1, \dots, N}$  recouvrent  $K$  et les boules ouvertes  $(B(m_i, 3\varepsilon))_{i=1, \dots, N}$  recouvrent  $K_\varepsilon$ ,

(iii)

$$\frac{\mu(K_\varepsilon)}{V_2(3\varepsilon)} \leq N \leq \frac{\mu(K_\varepsilon)}{V_1(\varepsilon)}.$$

**Démonstration.**

Nous allons choisir dans  $K$  un  $\varepsilon$ -réseau maximal. Considérons l'ensemble des familles finies  $\varepsilon$ -séparantes de  $K$ , c'est-à-dire toutes les familles finies de points  $(m_i)_{i=1,\dots,N}$  telles que

$$\forall (i,j) \quad | \quad 1 \leq i < j \leq N \quad , \quad d(m_i, m_j) \geq 2\varepsilon.$$

En particulier, si  $(m_i)_{i=1,\dots,N}$  est une famille  $\varepsilon$ -séparante finie, les boules ouvertes  $(B(m_i, \varepsilon))_{i=1,\dots,N}$  sont deux à deux disjointes de sorte que

$$N \leq \frac{\mu(K_\varepsilon)}{V_1(\varepsilon)}.$$

Ainsi, le nombre d'éléments d'une famille  $\varepsilon$ -séparante finie de  $K$  est uniformément borné et nous pouvons donc choisir une de ces familles finies, maximale au sens de l'inclusion, que nous notons  $(m_i)_{i=1,\dots,N}$ . Comme nous l'avons remarqué précédemment, les boules ouvertes  $(B(m_i, \varepsilon))_{i=1,\dots,N}$  sont deux à deux disjointes et

$$N \leq \frac{\mu(K_\varepsilon)}{V_1(\varepsilon)},$$

ce qui prouve (i) et la majoration dans (iii). Observons que ce qui reste à prouver est une conséquence de la maximalité de la famille. En effet, s'il existe un point  $m$  de  $K$  à distance supérieure ou égale à  $2\varepsilon$  de tous les  $m_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ , alors la famille  $(m_i)_{i=1,\dots,N}$  peut être raffinée (en lui adjoignant  $m$ ) en une famille  $\varepsilon$ -séparante finie qui la contient strictement ce qui est exclu par maximalité. Ainsi,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N B(m_i, 2\varepsilon),$$

d'où le résultat (ii), puis en remarquant qu'il implique

$$K_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^N B(m_i, 3\varepsilon),$$

on obtient

$$\mu(K_\varepsilon) \leq NV_2(3\varepsilon)$$

d'où la minoration de  $N$  dans (iii). □

**Lemme D.2.2** Soient  $d > 0$ ,  $V$  une fonction définie sur  $[0, d]$ , croissante, nulle en 0, strictement positive sur  $]0, d]$  et  $(E, d, \mu)$  un espace de longueur muni d'une mesure borélienne telle que pour tout  $m \in E$  et tout  $r \in ]0, d]$ , la fonction

$$(m, r) \longmapsto \frac{\mu(B(m, r))}{V(r)}$$

est décroissante en  $r$ , minorée par  $C_1(d, \mu, V) > 0$  et majorée par  $C_2(d, \mu, V) > 0$ , uniformément sur  $E \times ]0, d]$ .

Soient  $\lambda \in ]0,1[$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon \leq \frac{1}{3}d$ . Considérons  $K$ , une partie compacte de  $E$ , dont le  $\varepsilon$ -voisinage fermé

$$K_\varepsilon = \{m \in E \mid d(m, K) \leq \varepsilon\}$$

est de mesure finie. Alors il existe un entier  $N$  et une famille  $(m_i)_{i=1, \dots, N}$  de points de  $K$  telle que

(i) les boules ouvertes  $(B(m_i, \varepsilon))_{i=1, \dots, N}$  sont deux à deux disjointes, les boules ouvertes  $(B(m_i, 2\varepsilon))_{i=1, \dots, N}$  recouvrent  $K$ , les boules ouvertes  $(B(m_i, 3\varepsilon))_{i=1, \dots, N}$  recouvrent  $K_\varepsilon$ ,

(ii)

$$\frac{\mu(K_\varepsilon)}{C_2 V(3\varepsilon)} \leq N \leq \frac{\mu(K_\varepsilon)}{C_1 V(\varepsilon)},$$

(iii) en notant  $U$  et  $W$  les unions de boules ouvertes disjointes suivantes,

$$U = \prod_{i=1}^N B(m_i, (1-\lambda)\varepsilon) \quad , \quad W = \prod_{i=1}^N B(m_i, \varepsilon) \quad ,$$

nous obtenons

$$\mu(K_\varepsilon \setminus U) \leq \left(1 - \frac{C_1 V((1-\lambda)\varepsilon)}{C_2 V(3\varepsilon)}\right) \mu(K_\varepsilon),$$

(iv) en posant

$$\tilde{K} = K_{(1-\lambda)\varepsilon} \setminus W,$$

nous avons<sup>1</sup>

$$\tilde{K}_{\lambda\varepsilon} \subset (K_\varepsilon \setminus U)$$

et

$$\mu\left((K_\varepsilon \setminus U) \setminus \tilde{K}_{\lambda\varepsilon}\right) \leq \frac{C_2 \mu(K_\varepsilon)}{C_1} \left(\frac{V((1+\lambda)\varepsilon) - V((1-\lambda)\varepsilon)}{V(\varepsilon)}\right).$$

### Démonstration.

Le lemme D.2.1 donne l'existence d'un entier  $N$  et d'une famille de points  $(m_i)_{i=1, \dots, N}$  tels que

- les boules ouvertes  $(B(m_i, \varepsilon))_{i=1, \dots, N}$  sont deux à deux disjointes,
- les boules ouvertes  $(B(m_i, 2\varepsilon))_{i=1, \dots, N}$  recouvrent  $K$  et les boules ouvertes  $(B(m_i, 3\varepsilon))_{i=1, \dots, N}$  recouvrent  $K_\varepsilon$ ,

–

$$\frac{\mu(K_\varepsilon)}{C_2 V(3\varepsilon)} \leq N \leq \frac{\mu(K_\varepsilon)}{C_1 V(\varepsilon)}.$$

Ainsi, nous disposons de l'encadrement sur  $N$  et du caractère disjoint de la famille des boules ouvertes  $(B(m_i, \varepsilon))_{i=1, \dots, N}$ , ce qui prouve (i) et (ii).

Par ailleurs,

$$\mu\left(K_\varepsilon \setminus \prod_{i=1}^N B(m_i, (1-\lambda)\varepsilon)\right) \leq \mu(K_\varepsilon) - N C_1 V((1-\lambda)\varepsilon) \leq \left(1 - \frac{C_1 V((1-\lambda)\varepsilon)}{C_2 V(3\varepsilon)}\right) \mu(K_\varepsilon),$$

d'où (iii).

---

1. Si  $\tilde{K}$  est vide, nous poserons par convention que ses voisinages tubulaires sont vides.

Observons maintenant que l'inclusion

$$\tilde{K}_{\lambda\varepsilon} \subset (K_\varepsilon \setminus U) \quad (\text{D.1})$$

est immédiate de sorte qu'il ne reste plus à montrer que la majoration de (iv). Montrons pour cela que

$$K_\varepsilon \setminus \tilde{K}_{\lambda\varepsilon} \subset \bigcup_{i=1}^N B(m_i, (1+\lambda)\varepsilon). \quad (\text{D.2})$$

Soit  $m \in K_\varepsilon \setminus \bigcup_{i=1}^N B(m_i, (1+\lambda)\varepsilon)$ , soit  $p$  un point de  $K$  tel que  $d(p, m) \leq \varepsilon$  (possible car  $m \in K_\varepsilon$  et la partie  $K$  est compacte) et  $\gamma$  un chemin minimisant reliant  $m$  à  $p$ . Soit  $q$  un point de  $\gamma$  tel que  $d(q, m) = \lambda d(m, p)$ . Alors pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $d(q, m_i) \geq \varepsilon$  (car sinon  $d(m, m_i) < (1+\lambda)\varepsilon$  d'où une contradiction) et  $d(q, K) = d(q, p) = d(p, m) - d(m, q) \leq (1-\lambda)\varepsilon$  de sorte que  $q \in \tilde{K}$  donc  $m \in (\tilde{K})_{\lambda\varepsilon}$ . Ainsi on a prouvé l'inclusion annoncée si bien que

$$(K_\varepsilon \setminus U) \setminus \tilde{K}_{\lambda\varepsilon} = (K_\varepsilon \setminus \tilde{K}_{\lambda\varepsilon}) \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^N (B(m_i, (1+\lambda)\varepsilon) \setminus B(m_i, (1-\lambda)\varepsilon)),$$

d'où

$$\mu\left((K_\varepsilon \setminus U) \setminus \tilde{K}_{\lambda\varepsilon}\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^N (B(m_i, (1+\lambda)\varepsilon) \setminus B(m_i, (1-\lambda)\varepsilon))\right).$$

La décroissance du rapport des volumes des boules donne pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\frac{\mu\left(B(m_i, (1+\lambda)\varepsilon) \setminus B(m_i, (1-\lambda)\varepsilon)\right)}{\mu\left(B(m_i, (1+\lambda)\varepsilon)\right)} \leq \frac{V((1+\lambda)\varepsilon) - V((1-\lambda)\varepsilon)}{V((1+\lambda)\varepsilon)}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^N (B(m_i, (1+\lambda)\varepsilon) \setminus B(m_i, (1-\lambda)\varepsilon))\right) &\leq \left(\frac{V((1+\lambda)\varepsilon) - V((1-\lambda)\varepsilon)}{V((1+\lambda)\varepsilon)}\right) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^N \mu\left(B(m_i, (1+\lambda)\varepsilon)\right) \\ &\leq NC_2 V((1+\lambda)\varepsilon) \left(1 - \frac{V((1-\lambda)\varepsilon)}{V((1+\lambda)\varepsilon)}\right) \\ &\leq \frac{\mu(K_\varepsilon) C_2}{C_1} \left(\frac{V((1+\lambda)\varepsilon) - V((1-\lambda)\varepsilon)}{V(\varepsilon)}\right), \end{aligned}$$

ce qui fournit la majoration souhaitée.  $\square$

**Remarque D.2.3** L'hypothèse concernant la structure d'espace de longueur de  $E$  est utile pour justifier l'inclusion (D.2).

### D.3 Preuve de la proposition D.1.2 et du lemme D.1.1

#### D.3.1 Preuve de la proposition D.1.2

**Démonstration.**

Considérons une suite réelle décroissante  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lambda_0 = 1$  et pour tout  $i \geq 1$ ,  $\lambda_i \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Posons  $K_1 = K$  et notons, pour tout entier  $j$ ,

$$\omega_j = \prod_{k=0}^j \lambda_k.$$

Appliquons une première fois le lemme D.2.2 pour  $K = K_1$ ,  $\varepsilon = \lambda_0 \varepsilon$  et  $\lambda = \lambda_1$  : il existe un entier  $N_1$  et une famille  $(m_i^1)_{i=1, \dots, N_1}$  de points de  $K_1$  tels que

- i) les boules ouvertes  $(B(m_i^1, \lambda_0 \varepsilon))_{i=1, \dots, N_1}$  sont deux à deux disjointes, les boules ouvertes  $(B(m_i^1, 2\lambda_0 \varepsilon))_{i=1, \dots, N_1}$  recouvrent  $K$ , les boules ouvertes  $(B(m_i^1, 3\lambda_0 \varepsilon))_{i=1, \dots, N_1}$  recouvrent  $K_{\lambda_0 \varepsilon}$ ,
- ii)

$$\frac{\mu(K_{\lambda_0 \varepsilon})}{C_2 V(3\lambda_0 \varepsilon)} \leq N_1 \leq \frac{\mu(K_{\lambda_0 \varepsilon})}{C_1 V(\lambda_0 \varepsilon)},$$

- iii) en notant  $U_1$  et  $W_1$  les unions de boules ouvertes disjointes suivantes,

$$U_1 = \prod_{i=1}^{N_1} B(m_i^1, (1 - \lambda_1)\lambda_0 \varepsilon) \quad , \quad W_1 = \prod_{i=1}^{N_1} B(m_i^1, \lambda_0 \varepsilon),$$

$$\mu(K_{\lambda_0 \varepsilon} \setminus U_1) \leq \left(1 - \frac{C_1 V((1 - \lambda_1)\lambda_0 \varepsilon)}{C_2 V(3\lambda_0 \varepsilon)}\right) \mu(K_{\lambda_0 \varepsilon}) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right) \mu(K_{\lambda_0 \varepsilon}),$$

- iv) en posant

$$K_2 = (K_1)_{(1 - \lambda_1)\lambda_0 \varepsilon} \setminus W_1,$$

alors

$$(K_2)_{\lambda_1 \lambda_0 \varepsilon} \subset (K_{\lambda_0 \varepsilon} \setminus U_1) \quad , \quad \text{d'où} \quad \mu((K_2)_{\lambda_1 \lambda_0 \varepsilon}) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right) \mu(K_{\lambda_0 \varepsilon})$$

et

$$\begin{aligned} \mu((K_{\lambda_0 \varepsilon} \setminus U_1) \setminus (K_2)_{\lambda_1 \lambda_0 \varepsilon}) &\leq \frac{\mu(K_{\lambda_0 \varepsilon}) C_2}{C_1 V(\lambda_0 \varepsilon)} \left( V((1 + \lambda_1)\lambda_0 \varepsilon) - V((1 - \lambda_1)\lambda_0 \varepsilon) \right) \\ &\leq \lambda_1 \frac{\mu(K_{\lambda_0 \varepsilon}) C_2 C_3}{C_1}. \end{aligned}$$

Appliquons alors une seconde fois ce lemme D.2.2 en remplaçant  $K$  par  $K_2$ ,  $\varepsilon$  par  $\lambda_1 \lambda_0 \varepsilon$  et  $\lambda$  par  $\lambda_2$  : il existe un entier  $N_2$  et une famille  $(m_i^2)_{i=1, \dots, N_2}$  de points de  $K_2$  tels que

- i) les boules ouvertes  $(B(m_i^2, \lambda_1 \lambda_0 \varepsilon))_{i=1, \dots, N_2}$  sont deux à deux disjointes, les boules ouvertes  $(B(m_i^2, 2\lambda_1 \lambda_0 \varepsilon))_{i=1, \dots, N_2}$  recouvrent  $K_2$ , les boules ouvertes  $(B(m_i^2, 3\lambda_1 \lambda_0 \varepsilon))_{i=1, \dots, N_2}$  recouvrent  $(K_2)_{\lambda_1 \lambda_0 \varepsilon}$ , en particulier,
- les boules ouvertes de  $U_1$  et  $U_2$  forment une famille de boules deux à deux disjointes incluses dans  $K_{\lambda_0 \varepsilon}$ ,



– l'union de  $W_1$  et des boules ouvertes  $(B(m_i^2, 2\lambda_1\lambda_0\varepsilon))_{i=1, \dots, N_2}$  recouvre  $K_2$  et  $W_1$  donc  $K$ ,

– ii)

$$\frac{\mu\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right)}{C_2V(3\lambda_1\lambda_0\varepsilon)} \leq N_2 \leq \frac{\mu\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right)}{C_1V(\lambda_1\lambda_0\varepsilon)},$$

– iii) en notant  $U_2$  et  $W_2$  les unions de boules ouvertes disjointes suivantes,

$$U_2 = \prod_{i=1}^{N_2} B(m_i^2, (1-\lambda_2)\lambda_1\lambda_0\varepsilon) \quad , \quad W_2 = \prod_{i=1}^{N_2} B(m_i^2, \lambda_1\lambda_0\varepsilon) \quad ,$$

$$\begin{aligned} \mu\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon} \setminus U_2\right) &\leq \left(1 - \frac{C_1V((1-\lambda_2)\lambda_1\lambda_0\varepsilon)}{C_2V(3\lambda_2\lambda_1\lambda_0\varepsilon)}\right) \mu\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right) \mu\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

d'où, comme  $(K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon} \subset (K_{\lambda_0\varepsilon} \setminus U_1)$ ,

$$\mu\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon} \setminus U_2\right) \leq \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right)^2 \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}),$$

– iv) en posant

$$K_3 = (K_2)_{(1-\lambda_2)\lambda_1\lambda_0\varepsilon} \setminus W_2,$$

alors

$$(K_3)_{\lambda_2\lambda_1\lambda_0\varepsilon} \subset \left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon} \setminus U_2\right),$$

d'où

$$\mu\left((K_3)_{\lambda_2\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right) \leq \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right)^2 \mu(K_{\lambda_0\varepsilon})$$

et

$$\begin{aligned} \mu\left(\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon} \setminus U_2\right) \setminus (K_3)_{\lambda_2\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right) &\leq \frac{\mu\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right)C_2}{C_1V(\lambda_1\lambda_0\varepsilon)} \left[ V\left((1+\lambda_2)\lambda_1\lambda_0\varepsilon\right) \right. \\ &\quad \left. - V\left((1-\lambda_2)\lambda_1\lambda_0\varepsilon\right) \right] \\ &\leq \lambda_2 \frac{\mu\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right)C_2C_3}{C_1} \\ &\leq \lambda_2 \frac{C_2C_3}{C_1} \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right) \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}). \end{aligned}$$

Observons d'une part que

$$\begin{aligned} \mu(W_1 \cap W_2) &\leq \sum_{i=1}^{N_1} \mu\left(B(m_i^1, \lambda_0\varepsilon) \setminus B(m_i^1, (1-\lambda_1)\lambda_0\varepsilon)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_1} \mu\left(B(m_i^1, \lambda_0\varepsilon)\right) \left(1 - \frac{V\left((1-\lambda_1)\lambda_0\varepsilon\right)}{V(\lambda_0\varepsilon)}\right) \\ &\leq N_1 C_2 V(\lambda_0\varepsilon) \frac{V(\lambda_0\varepsilon) - V\left((1-\lambda_1)\lambda_0\varepsilon\right)}{V(\lambda_0\varepsilon)} \\ &\leq \lambda_1 \frac{C_2 C_3 \mu(K_{\lambda_0\varepsilon})}{C_1} \end{aligned}$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned} \mu\left(K_{\lambda_0\varepsilon} \setminus (U_1 \amalg U_2)\right) &\leq \mu\left((K_{\lambda_0\varepsilon} \setminus U_1) \setminus (K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right) + \mu\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon} \setminus U_2\right) \\ &\leq \lambda_1 \frac{C_2 C_3}{C_1} \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}) + \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^2 \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}). \end{aligned}$$

Appliquons alors une troisième fois ce lemme D.2.2 en remplaçant  $K$  par  $K_3$ ,  $\varepsilon$  par  $\omega_2\varepsilon$  et  $\lambda$  par  $\lambda_3$  : il existe un entier  $N_3$  et une famille  $(m_i^3)_{i=1,\dots,N_3}$  de points de  $K_3$  tels que

- i) les boules ouvertes  $(B(m_i^3, \omega_2\varepsilon))_{i=1,\dots,N_3}$  sont deux à deux disjointes, les boules ouvertes  $(B(m_i^3, 2\omega_2\varepsilon))_{i=1,\dots,N_3}$  recouvrent  $K_3$ , les boules ouvertes  $(B(m_i^3, 3\omega_2\varepsilon))_{i=1,\dots,N_3}$  recouvrent  $(K_3)_{\omega_2\varepsilon}$ , en particulier,
  - les boules ouvertes de  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  forment une famille de boules deux à deux disjointes incluses dans  $K_{\lambda_0\varepsilon}$ ,
  - l'union de  $W_1$ ,  $W_2$  et des boules ouvertes  $(B(m_i^3, 2\omega_2\varepsilon))_{i=1,\dots,N_3}$  recouvre  $K$  (en effet,  $W_2$  et des boules ouvertes  $(B(m_i^3, 2\omega_2\varepsilon))_{i=1,\dots,N_3}$  recouvrent  $K_3 \cup W_2 = (K_2)_{(1-\lambda_2)\omega_1\varepsilon}$  qui contient  $K_2$  donc en rajoutant  $W_1$ ,  $K$  est intégralement recouvert),
- ii)

$$\frac{\mu\left((K_3)_{\omega_2\varepsilon}\right)}{C_2 V(3\omega_2\varepsilon)} \leq N_3 \leq \frac{\mu\left((K_3)_{\omega_2\varepsilon}\right)}{C_1 V(\omega_2\varepsilon)},$$

- iii) en notant  $U_3$  et  $W_3$  les unions de boules ouvertes disjointes suivantes,

$$U_3 = \prod_{i=1}^{N_3} B(m_i^3, (1-\lambda_3)\omega_2\varepsilon) \quad , \quad W_3 = \prod_{i=1}^{N_3} B(m_i^3, \omega_2\varepsilon) \quad ,$$

$$\begin{aligned} \mu\left((K_3)_{\omega_2\varepsilon} \setminus U_3\right) &\leq \left(1 - \frac{C_1 V((1-\lambda_3)\omega_2\varepsilon)}{C_2 V(3\omega_3\varepsilon)}\right) \mu\left((K_3)_{\omega_2\varepsilon}\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right) \mu\left((K_3)_{\omega_2\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

d'où, comme  $(K_3)_{\omega_2\varepsilon} \subset ((K_2)_{\omega_1\varepsilon} \setminus U_2)$ ,

$$\mu\left((K_3)_{\omega_2\varepsilon} \setminus U_3\right) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^3 \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}),$$

- iv) en posant

$$K_4 = (K_3)_{(1-\lambda_3)\omega_2\varepsilon} \setminus W_3,$$

alors

$$(K_4)_{\omega_3\varepsilon} \subset ((K_3)_{\omega_2\varepsilon} \setminus U_3),$$

d'où

$$\mu\left((K_4)_{\omega_3\varepsilon}\right) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^3 \mu(K_{\lambda_0\varepsilon})$$

et

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left((K_3)_{\omega_2\varepsilon} \setminus U_3\right) \setminus (K_4)_{\omega_3\varepsilon}\right) &\leq \frac{\mu\left((K_3)_{\omega_2\varepsilon}\right)C_2}{C_1V(\omega_2\varepsilon)}\left(V\left((1+\lambda_3)\omega_2\varepsilon\right)-V\left((1-\lambda_3)\omega_2\varepsilon\right)\right) \\
&\leq \lambda_3\frac{\mu\left((K_3)_{\omega_2\varepsilon}\right)C_2C_3}{C_1} \\
&\leq \lambda_3\frac{C_2C_3}{C_1}\left(1-\frac{C_1C_4}{C_2}\right)^2\mu(K_{\lambda_0\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Observons que

$$\begin{aligned}
\mu\left(W_1 \cap W_3\right) &\leq \sum_{i=1}^{N_1}\mu\left(B\left(m_i^1,\lambda_0\varepsilon\right) \setminus B\left(m_i^1,(1-\lambda_2\lambda_1)\lambda_0\varepsilon\right)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_1}\mu\left(B\left(m_i^1,\lambda_0\varepsilon\right)\right)\left(1-\frac{V\left((1-\lambda_2\lambda_1)\lambda_0\varepsilon\right)}{V(\lambda_0\varepsilon)}\right) \\
&\leq N_1C_2V(\lambda_0\varepsilon)\frac{V(\lambda_0\varepsilon)-V\left((1-\lambda_2\lambda_1)\lambda_0\varepsilon\right)}{V(\lambda_0\varepsilon)} \\
&\leq \lambda_2\lambda_1\frac{C_2C_5\mu(K_{\lambda_0\varepsilon})}{C_1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu\left(W_2 \cap W_3\right) &\leq \sum_{i=1}^{N_2}\mu\left(B\left(m_i^2,\lambda_1\lambda_0\varepsilon\right) \setminus B\left(m_i^1,(1-\lambda_2)\lambda_1\lambda_0\varepsilon\right)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_2}\mu\left(B\left(m_i^2,\lambda_1\lambda_0\varepsilon\right)\right)\left(1-\frac{V\left((1-\lambda_2)\lambda_1\lambda_0\varepsilon\right)}{V(\lambda_1\lambda_0\varepsilon)}\right) \\
&\leq N_2C_2V(\lambda_1\lambda_0\varepsilon)\frac{V(\lambda_1\lambda_0\varepsilon)-V\left((1-\lambda_2)\lambda_1\lambda_0\varepsilon\right)}{V(\lambda_1\lambda_0\varepsilon)} \\
&\leq \lambda_2\frac{C_2C_5\mu(K_{\lambda_0\varepsilon})}{C_1}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mu\left(K_{\lambda_0\varepsilon} \setminus (U_1 \amalg U_2 \amalg U_3)\right) &\leq \mu\left(\left(K_{\lambda_0\varepsilon} \setminus U_1\right) \setminus (K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right) \\
&\quad + \mu\left(\left((K_2)_{\lambda_1\lambda_0\varepsilon} \setminus U_2\right) \setminus (K_3)_{\lambda_2\lambda_1\lambda_0\varepsilon}\right) + \mu\left(\left(K_3\right)_{\lambda_2\lambda_1\lambda_0\varepsilon} \setminus U_3\right) \\
&\leq \lambda_1\frac{C_2C_3}{C_1}\mu(K_{\lambda_0\varepsilon}) + \lambda_2\frac{C_2C_3}{C_1}\left(1-\frac{C_1C_4}{C_2}\right)\mu(K_{\lambda_0\varepsilon}) \\
&\quad + \left(1-\frac{C_1C_4}{C_2}\right)^3\mu(K_{\lambda_0\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Après avoir appliqué  $j$  fois successivement le lemme D.2.2 en remplaçant  $K$  par  $K_p$ ,  $\varepsilon$  par  $\omega_{p-1}\varepsilon$  et  $\lambda$  par  $\lambda_p$  ( $1 \leq p \leq j$ ), nous l'appliquons une  $(j+1)$ -ième fois en remplaçant  $K$  par  $K_{j+1}$ ,  $\varepsilon$  par  $\omega_j\varepsilon$  et  $\lambda$  par  $\lambda_{j+1}$  : il existe un entier  $N_{j+1}$  et une famille  $(m_i^{j+1})_{i=1,\dots,N_{j+1}}$  de points de  $K_{j+1}$  tels que

- i) les boules ouvertes  $(B(m_i^{j+1},\omega_j\varepsilon))_{i=1,\dots,N_{j+1}}$  sont deux à deux disjointes, les boules ouvertes  $(B(m_i^{j+1},2\omega_j\varepsilon))_{i=1,\dots,N_{j+1}}$  recouvrent  $K_{j+1}$ , les boules ouvertes

$(B(m_i^{j+1}, 3\omega_j\varepsilon))_{i=1, \dots, N_{j+1}}$  recouvrent  $(K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon}$ , en particulier,

- les boules ouvertes de l'union des  $U_p$  pour  $p = 1, \dots, j+1$  forment une famille de boules deux à deux disjointes incluses dans  $K_{\lambda_0\varepsilon}$ ,
- l'union des ensembles  $W_p$  pour  $p = 1, \dots, j$  et des boules ouvertes  $(B(m_i^{j+1}, 2\omega_j\varepsilon))_{i=1, \dots, N_{j+1}}$  recouvre  $K$ ,
- ii)

$$\frac{\mu\left((K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon}\right)}{C_2V(3\omega_j\varepsilon)} \leq N_{j+1} \leq \frac{\mu\left((K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon}\right)}{C_1V(\omega_j\varepsilon)},$$

- iii) en notant  $U_{j+1}$  et  $W_{j+1}$  les unions de boules ouvertes disjointes suivantes,

$$U_{j+1} = \prod_{i=1}^{N_{j+1}} B(m_i^{j+1}, (1 - \lambda_{j+1})\omega_j\varepsilon) \quad , \quad W_{j+1} = \prod_{i=1}^{N_{j+1}} B(m_i^{j+1}, \omega_j\varepsilon) \quad ,$$

$$\mu\left((K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon} \setminus U_{j+1}\right) \leq \left(1 - \frac{C_1V((1 - \lambda_{j+1})\omega_j\varepsilon)}{C_2V(3\omega_j\varepsilon)}\right) \mu\left((K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon}\right),$$

d'où, comme  $(K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon} \subset ((K_j)_{\lambda^{j-1}\varepsilon} \setminus U_j)$ ,

$$\mu\left((K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon} \setminus U_{j+1}\right) \leq \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right)^{j+1} \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}),$$

- iv) en posant

$$K_{j+2} = (K_{j+1})_{(1-\lambda_{j+1})\omega_j\varepsilon} \setminus W_{j+1},$$

alors

$$(K_{j+2})_{\omega_{j+1}\varepsilon} \subset (K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon} \setminus U_{j+1},$$

d'où

$$\mu\left((K_{j+2})_{\omega_{j+1}\varepsilon}\right) \leq \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right)^{j+1} \mu(K_{\lambda_0\varepsilon})$$

et

$$\begin{aligned} \mu\left(\left((K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon} \setminus U_{j+1}\right) \setminus (K_{j+2})_{\lambda_{j+1}\omega_j\varepsilon}\right) &\leq \frac{\mu\left((K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon}\right)C_2}{C_1V(\omega_j\varepsilon)} \left[ V\left((1 + \lambda_{j+1})\omega_j\varepsilon\right) \right. \\ &\quad \left. - V\left((1 - \lambda_{j+1})\omega_j\varepsilon\right) \right] \\ &\leq \lambda_{j+1} \frac{C_2C_3}{C_1} \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right)^j \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}). \end{aligned}$$

Observons alors que

$$\begin{aligned} \mu\left(K_{\lambda_0\varepsilon} \setminus \prod_{k=1}^{j+1} U_k\right) &\leq \mu\left((K_{\lambda_0\varepsilon} \setminus U_1) \setminus (K_2)_{\omega_1\varepsilon}\right) + \mu\left(\left((K_2)_{\omega_1\varepsilon} \setminus U_2\right) \setminus (K_3)_{\omega_2\varepsilon}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \mu\left(\left((K_j)_{\omega_{j-1}\varepsilon} \setminus U_j\right) \setminus (K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon}\right) + \mu\left((K_{j+1})_{\omega_j\varepsilon} \setminus U_{j+1}\right) \\ &\leq \frac{C_2C_3}{C_1} \left(\sum_{k=1}^j \lambda_k \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right)^{k-1}\right) \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}) + \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right)^{j+1} \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}). \end{aligned}$$

En utilisant alors la décroissance de la suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et en majorant la somme des  $j$  premiers termes d'une suite géométrique réelle positive par la somme de tous les termes, on obtient

$$\mu\left(K_{\lambda_0\varepsilon} \setminus \prod_{k=1}^{j+1} U_k\right) \leq \left(\lambda_1 \frac{C_2^2 C_3}{C_1^2 C_4} + \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^{j+1}\right) \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}).$$

Ainsi, les boules ouvertes de l'union des  $U_p$  pour  $p = 1, \dots, j+1$  forment une famille de boules ouvertes deux à deux disjointes, incluses dans  $K_{\lambda_0\varepsilon}$ , dont les rayons sont majorés par  $(1 - \lambda_1)\lambda_0\varepsilon$  et minorés par  $(1 - \lambda_{j+1})\omega_j\varepsilon$ . De plus,

$$\sum_{k=1}^{j+1} \sum_{i=1}^{N_k} \mu\left(B(m_i^k, (1 - \lambda_{k+1})\omega_k\varepsilon)\right) \geq \left(1 - \lambda_1 \frac{C_2^2 C_3}{C_1^2 C_4} + \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^{j+1}\right) \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}).$$

Observons par ailleurs que  $K$  est recouvert par la famille des boules ouvertes

$$\bigcup_{i=1}^{N_{j+1}} B(m_i^{j+1}, 2\omega_j\varepsilon) \bigcup_{k=1}^j \bigcup W_k,$$

soit

$$\left(\bigcup_{k=1}^j \bigcup_{i=1}^{N_k} B(m_i^k, \omega_{k-1}\varepsilon)\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{N_{j+1}} B(m_i^{j+1}, 2\omega_j\varepsilon)\right),$$

qui sont toutes incluses dans  $K_{\lambda_0\varepsilon}$  et dont les rayons sont majorés par  $\lambda_0\varepsilon$  et minorés par  $\omega_j\varepsilon$ . Cherchons à majorer la quantité

$$\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^{N_k} \mu\left(B(m_i^k, \omega_{k-1}\varepsilon)\right) + \sum_{i=1}^{N_{j+1}} \mu\left(B(m_i^{j+1}, 2\omega_j\varepsilon)\right) = \sum_{k=1}^j \mu(W_k) + \sum_{i=1}^{N_{j+1}} \mu\left(B(m_i^{j+1}, 2\omega_j\varepsilon)\right).$$

D'une part, en utilisant l'inégalité

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^j A_k\right) \geq \sum_{k=1}^j \mu(A_k) - \sum_{1 \leq p < q \leq j} \mu(A_p \cap A_q),$$

nous pouvons écrire

$$\sum_{k=1}^j \mu(W_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^j W_k\right) + \sum_{1 \leq p < q \leq j} \mu(W_p \cap W_q).$$

En utilisant que pour tout  $1 \leq p < q \leq j$ ,

$$\mu(W_p \cap W_q) \leq \lambda_p \lambda_{p+1} \dots \lambda_{q-1} \frac{C_2 C_5 \mu(K_{\lambda_0\varepsilon})}{C_1} \leq \lambda_p^{q-p} \frac{C_2 C_5}{C_1} \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j \mu(W_k) &\leq \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}) \left(1 + \frac{C_2 C_5}{C_1} \sum_{1 \leq p < q \leq j} \lambda_p^{q-p}\right) \\ &\leq \mu(K_{\lambda_0\varepsilon}) \left(1 + \lambda_1 \frac{j(j-1)}{2} \frac{C_2 C_5}{C_1}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, la décroissance des fonctions  $r \mapsto \frac{\mu(B(m,r))}{V(r)}$  donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_{j+1}} \mu(B(m_i^{j+1}, 2\omega_j \varepsilon)) &\leq \sum_{i=1}^{N_{j+1}} \mu(B(m_i^{j+1}, \omega_j \varepsilon)) \frac{V(2\omega_j \varepsilon)}{V(\omega_j \varepsilon)} \\ &\leq C_6 \sum_{i=1}^{N_{j+1}} \mu(B(m_i^{j+1}, \omega_j \varepsilon)) \\ &\leq C_6 \mu(W_{j+1}), \end{aligned}$$

or  $W_{j+1} \subset (K_{j+1})_{\omega_j \varepsilon}$ , donc

$$\mu(W_{j+1}) \leq \mu(K_{\lambda_0 \varepsilon}) \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^j$$

de sorte que

$$\sum_{i=1}^{N_{j+1}} \mu(B(m_i^{j+1}, 2\omega_j \varepsilon)) \leq C_6 \mu(K_{\lambda_0 \varepsilon}) \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^j.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^{N_k} \mu(B(m_i^k, \omega_{k-1} \varepsilon)) + \sum_{i=1}^{N_{j+1}} \mu(B(m_i^{j+1}, 2\omega_j \varepsilon)) &\leq \mu(K_{\lambda_0 \varepsilon}) \left(1 + \lambda_1 j(j-1) \frac{C_2 C_5}{C_1}\right. \\ &\quad \left.+ C_6 \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^j\right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$ , fixons tout d'abord  $j(\eta, d, C_1, C_2, V)$  de sorte que

$$C_6 \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^j \leq \frac{1}{2} \eta$$

puis  $\lambda(\eta, d, C_1, C_2, V) \in ]0, \frac{1}{2}]$  suffisamment proche de 0 pour que

$$\lambda \max \left( \frac{C_2^2 C_3}{C_1^2 C_4}, j(\eta)(j(\eta) - 1) \frac{C_2 C_5}{C_1} \right) \leq \frac{1}{2} \eta$$

et choisissons la suite  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  en posant pour tout  $i \geq 1$ ,  $\lambda_i = \lambda(\eta)$ .

Considérons alors les points  $(m_i^k)_{\substack{i=1, \dots, k \\ k=1, \dots, j+1}}$  qui appartiennent à  $K_\varepsilon$ . Leur nombre est majoré par

$$\sum_{k=1}^{j+1} N_k \leq \frac{\mu(K_\varepsilon)}{C_1} \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{V(\lambda^{k-1} \varepsilon)} := N(\varepsilon, \eta, d, \mu(K_\varepsilon), C_1, C_2, V)$$

On peut ainsi conclure que la famille des boules ouvertes disjointes incluses dans  $K_\varepsilon$

$$(B(m_i^k, (1 - \lambda)\lambda^{k-1} \varepsilon))_{\substack{i=1, \dots, k \\ k=1, \dots, j+1}}$$

vérifie

$$\sum_{k=1}^{j+1} \sum_{i=1}^{N_k} \mu(B(m_i^k, (1 - \lambda)\lambda^{k-1} \varepsilon)) \geq (1 - \eta) \mu(K_\varepsilon)$$

tandis que la famille de boules ouvertes incluses dans  $K_\varepsilon$

$$\bigcup_{i=1}^{N_{j+1}} B(m_i^{j+1}, 2\lambda^j \varepsilon) \bigcup_{k=1}^j \bigcup_{i=1}^{N_k} B(m_i^k, \lambda^{k-1} \varepsilon)$$

recouvre  $K$  et satisfait

$$\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^{N_k} \mu(B(m_i^k, \lambda^{k-1} \varepsilon)) + \sum_{i=1}^{N_{j+1}} \mu(B(m_i^{j+1}, 2\lambda^j \varepsilon)) \leq (1 + \eta) \mu(K_\varepsilon).$$

Toutes les boules considérées ont un rayon minoré par

$$r(\varepsilon, \eta | d, C_1, C_2, V) := (1 - \lambda) \lambda^j \varepsilon$$

et comme  $\lambda \in ]0, \frac{1}{2}[$ , le rayon de la boule de centre  $m_i^k$  dans la famille disjointe est supérieur au quart du rayon de la boule de même centre qui est dans la famille qui recouvre (il est en fait supérieur à la moitié si  $k \leq j$ , mais les rayons sont doublés pour  $k = j + 1 \dots$ ), ce qui finit la preuve.  $\square$

### D.3.2 Preuve du lemme D.1.1

La minoration de la courbure de Ricci donne, en appliquant le théorème de Bishop

$$\forall m \in M \quad , \quad \forall r \in [0, \text{diam}(M, g)] \quad , \quad V_n(B(m, r)) \leq V_{n, \delta}(r).$$

De plus, les hypothèses de majoration du diamètre et de minoration du volume permettent de minorer également le volume de toutes les boules grâce au théorème de Bishop-Gromov : pour tout  $m \in M$ , pour tout  $r \in [0, \text{diam}(M, g)]$ ,

$$V_n(B(m, r)) \geq \frac{\text{vol}(M, g)}{V_{n, \delta}(\text{diam}(M, g))} V_{n, \delta}(r) \geq \frac{v}{V_{n, \delta}(d)} V_{n, \delta}(r).$$

Ainsi, en faisant les choix de  $V = V_{n, \delta}$  dans la proposition D.1.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} C_1(n, d, v, \delta) &= \frac{v}{V_{n, \delta}(d)}, \\ C_2 &= 1, \\ C_3(n, d, \delta) &= \sup_{\substack{r \in ]0, \frac{1}{3}d[ \\ \lambda \in ]0, \frac{1}{2}[}} \frac{V_{n, \delta}((1 + \lambda)r) - V_{n, \delta}((1 - \lambda)r)}{\lambda V_{n, \delta}(r)} < +\infty, \\ C_4(n, d, \delta) &= \inf_{\substack{r \in ]0, \frac{1}{3}d[ \\ \lambda \in ]0, \frac{1}{2}[}} \frac{V_{n, \delta}((1 - \lambda)r)}{V_{n, \delta}(3r)} > 0, \\ C_5(n, d, \delta) &= \sup_{\substack{r \in ]0, \frac{1}{3}d[ \\ \lambda \in ]0, \frac{1}{2}[}} \frac{V_{n, \delta}(r) - V_{n, \delta}((1 - \lambda)r)}{\lambda V_{n, \delta}(r)} < +\infty, \\ C_6(n, d, \delta) &= \sup_{r \in ]0, \frac{1}{3}d[} \frac{V_{n, \delta}(2r)}{V_{n, \delta}(r)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat en observant aussi que la dépendance en  $\mu(K_\varepsilon)$  s'insère dans la dépendance en  $(n, d, \delta)$  car  $\mu(K_\varepsilon) \leq V_{n, \delta}(d)$

## D.4 Preuves de la proposition D.1.5 et du lemme D.1.4

### D.4.1 Preuve de la proposition D.1.5

Fixons  $\lambda \in ]0, \frac{1}{2}[$  et posons  $K_1 = K$ . Appliquons une première fois le lemme D.2.2 pour  $K$ ,  $\varepsilon$  et  $\lambda$ : il existe un entier  $N_1$  et une famille  $(m_i^1)_{i=1, \dots, N_1}$  de points de  $K$  tels que

- les boules ouvertes  $(B(m_i^1, \varepsilon))_{i=1, \dots, N_1}$  sont deux à deux disjointes,

–

$$\frac{\mu(K_\varepsilon)}{C_2 V(3\varepsilon)} \leq N_1 \leq \frac{\mu(K_\varepsilon)}{C_1 V(\varepsilon)},$$

- en notant  $U_1$  et  $W_1$  les unions de boules ouvertes disjointes suivantes,

$$U_1 = \prod_{i=1}^{N_1} B(m_i^1, (1-\lambda)\varepsilon) \quad , \quad W_1 = \prod_{i=1}^{N_1} B(m_i^1, \varepsilon),$$

$$\mu(K_\varepsilon \setminus U_1) \leq \left(1 - \frac{C_1 V((1-\lambda)\varepsilon)}{C_2 V(3\varepsilon)}\right) \mu(K_\varepsilon) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right) \mu(K_\varepsilon),$$

- en posant

$$K_2 = K_1 \setminus W_1,$$

alors

$$(K_2)_{\lambda\varepsilon} \subset K_\varepsilon \setminus U_1 \quad , \quad \text{d'où} \quad \mu((K_2)_{\lambda\varepsilon}) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right) \mu(K_\varepsilon).$$

Appliquons alors une seconde fois ce lemme D.2.2 en remplaçant  $K$  par  $K_2$ ,  $\varepsilon$  par  $\lambda\varepsilon$  et en conservant  $\lambda$ : il existe un entier  $N_2$  et une famille  $(m_i^2)_{i=1, \dots, N_2}$  de points de  $K_2$  (donc de  $K$ ) tels que

- les boules ouvertes  $(B(m_i^2, \lambda\varepsilon))_{i=1, \dots, N_2}$  sont deux à deux disjointes, incluses dans  $(K_2)_{\lambda\varepsilon}$  de sorte que les boules ouvertes de  $U_1$  et  $U_2$  forment une famille de boules deux à deux disjointes, centrées sur  $K$  et incluses dans  $K_\varepsilon$ ,

–

$$\frac{\mu((K_2)_{\lambda\varepsilon})}{C_2 V(3\lambda\varepsilon)} \leq N_2 \leq \frac{\mu((K_2)_{\lambda\varepsilon})}{C_1 V(\lambda\varepsilon)},$$

- en notant  $U_2$  et  $W_2$  les unions de boules ouvertes disjointes suivantes,

$$U_2 = \prod_{i=1}^{N_2} B(m_i^2, (1-\lambda)\lambda\varepsilon) \quad , \quad W_2 = \prod_{i=1}^{N_2} B(m_i^2, \lambda\varepsilon) \quad ,$$

$$\begin{aligned} \mu((K_2)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_2) &\leq \left(1 - \frac{C_1 V((1-\lambda)\lambda\varepsilon)}{C_2 V(3\lambda\varepsilon)}\right) \mu((K_2)_{\lambda\varepsilon}) \\ &\leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right) \mu((K_2)_{\lambda\varepsilon}), \end{aligned}$$

d'où, comme  $(K_2)_{\lambda\varepsilon} \subset K_\varepsilon \setminus U_1$ ,

$$\mu((K_2)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_2) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^2 \mu(K_\varepsilon),$$



– en posant

$$K_3 = K_2 \setminus W_2,$$

alors

$$(K_3)_{\lambda^2\varepsilon} \subset (K_2)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_2,$$

d'où

$$\mu\left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon}\right) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^2 \mu(K_\varepsilon).$$

Par ailleurs, nous remarquons que

$$K \subset (K_2 \cup W_1)$$

d'où

$$K_{\lambda\varepsilon} \subset \left((K_2)_{\lambda\varepsilon} \cup (W_1)_{\lambda\varepsilon}\right).$$

Par conséquent,

$$K_{\lambda\varepsilon} \setminus (U_1 \cup U_2) \subset \left((K_2)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_2\right) \cup \left((W_1)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_1\right).$$

si bien que

$$\mu\left(K_{\lambda\varepsilon} \setminus (U_1 \cup U_2)\right) \leq \mu\left((K_2)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_2\right) + \mu\left((W_1)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_1\right).$$

Or

$$\mu\left((W_1)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_1\right) \leq \sum_{i=1}^{N_1} \left(\mu\left(B(m_i^1, (1+\lambda)\varepsilon)\right) - \mu\left(B(m_i^1, (1-\lambda)\varepsilon)\right)\right),$$

d'où, compte tenu de l'hypothèse sur la mesure des boules,

$$\mu\left((W_1)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_1\right) \leq \lambda C_2 C_3 N_1 V(\varepsilon) \leq \lambda \frac{C_2 C_3 \mu(K_\varepsilon)}{C_1}.$$

Ainsi,

$$\mu\left((K)_{\lambda\varepsilon} \setminus (U_1 \cup U_2)\right) \leq \left(\left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^2 + \lambda \frac{C_2 C_3}{C_1}\right) \mu(K_\varepsilon).$$

Appliquons alors une troisième fois ce lemme D.2.2 en remplaçant  $K$  par  $K_3$ ,  $\varepsilon$  par  $\lambda^2\varepsilon$  et en conservant  $\lambda$ : il existe un entier  $N_3$  et une famille  $(m_i^3)_{i=1, \dots, N_3}$  de points de  $K_3$  tels que

- les boules ouvertes  $(B(m_i^3, \lambda^2\varepsilon))_{i=1, \dots, N_3}$  sont deux à deux disjointes et les boules ouvertes de  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  forment une famille de boules deux à deux disjointes incluses dans  $K_\varepsilon$ ,

–

$$\frac{\mu\left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon}\right)}{C_2 V(3\lambda^2\varepsilon)} \leq N_3 \leq \frac{\mu\left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon}\right)}{C_1 V(\lambda^2\varepsilon)},$$

- en notant  $U_3$  et  $W_3$  les unions de boules ouvertes disjointes suivantes,

$$U_3 = \prod_{i=1}^{N_3} B(m_i^3, (1-\lambda)\lambda^2\varepsilon) \quad , \quad W_3 = \prod_{i=1}^{N_3} B(m_i^3, \lambda^2\varepsilon) \quad ,$$

$$\begin{aligned}\mu\left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_3\right) &\leq \left(1 - \frac{C_1 V((1-\lambda)\lambda^2\varepsilon)}{C_2 V(3\lambda^2\varepsilon)}\right) \mu\left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon}\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right) \mu\left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

d'où, comme  $(K_3)_{\lambda^2\varepsilon} \subset (K_2)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_2$ ,

$$\mu\left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_3\right) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^3 \mu(K_\varepsilon),$$

– en posant

$$K_4 = K_3 \setminus W_3,$$

alors

$$(K_4)_{\lambda^3\varepsilon} \subset \left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_3\right),$$

d'où

$$\mu\left((K_4)_{\lambda^3\varepsilon}\right) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^3 \mu(K_\varepsilon).$$

Par ailleurs, nous remarquons que

$$K \subset (K_3 \cup W_2 \cup W_1),$$

d'où

$$K_{\lambda^2\varepsilon} \subset \left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon} \cup (W_2)_{\lambda^2\varepsilon} \cup (W_1)_{\lambda^2\varepsilon}\right).$$

Par conséquent,

$$\left(K_{\lambda^2\varepsilon} \setminus (U_1 \cup U_2 \cup U_3)\right) \subset \left(\left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_3\right) \cup \left((W_2)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_2\right) \cup \left((W_1)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_1\right)\right).$$

si bien que

$$\mu\left(K_{\lambda^2\varepsilon} \setminus (U_1 \cup U_2 \cup U_3)\right) \leq \mu\left((K_3)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_3\right) + \mu\left((W_2)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_2\right) + \mu\left((W_1)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_1\right).$$

Or

$$\mu\left((W_2)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_2\right) \leq \sum_{i=1}^{N_1} \left(\mu\left(B(m_i^2, (1+\lambda)\lambda\varepsilon)\right) - \mu\left(B(m_i^2, (1-\lambda)\lambda\varepsilon)\right)\right),$$

d'où, compte tenu de l'hypothèse sur la mesure des boules,

$$\mu\left((W_2)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_2\right) \leq \lambda C_2 C_3 N_2 V(\lambda\varepsilon) \leq \lambda \frac{C_2 C_3 \mu(K_\varepsilon)}{C_1}.$$

De plus,

$$\mu\left((W_1)_{\lambda^2\varepsilon} \setminus U_1\right) \leq \mu\left((W_1)_{\lambda\varepsilon} \setminus U_1\right) \leq \lambda \frac{C_2 C_3 \mu(K_\varepsilon)}{C_1},$$

de sorte que

$$\mu\left(K_{\lambda^2\varepsilon} \setminus (U_1 \cup U_2 \cup U_3)\right) \leq \left(\left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^3 + 2\lambda \frac{C_2 C_3}{C_1}\right) \mu(K_\varepsilon).$$

Après avoir appliqué  $j$  fois successivement le lemme D.2.2 en remplaçant, pour  $p = 1, \dots, j$ ,  $K$  par  $K_p$ ,  $\varepsilon$  par  $\lambda^{p-1}\varepsilon$  et en conservant  $\lambda$ , nous l'appliquons une  $(j+1)$ -ième fois en remplaçant  $K$  par  $K_{j+1}$ ,  $\varepsilon$  par  $\lambda^j\varepsilon$  et en conservant  $\lambda$ : il existe un entier  $N_{j+1}$  et une famille  $(m_i^{j+1})_{i=1, \dots, N_{j+1}}$  de points de  $K_{j+1}$  tels que

- les boules ouvertes  $(B(m_i^{j+1}, \lambda^j\varepsilon))_{i=1, \dots, N_{j+1}}$  sont deux à deux disjointes et les boules ouvertes de l'union des  $U_p$  pour  $p = 1, \dots, j+1$  forment une famille de boules deux à deux disjointes, centrées sur  $K$  et incluses dans  $K_\varepsilon$ ,

$$\frac{\mu((K_{j+1})_{\lambda^j\varepsilon})}{C_2V(3\lambda^j\varepsilon)} \leq N_{j+1} \leq \frac{\mu((K_{j+1})_{\lambda^j\varepsilon})}{C_1V(\lambda^j\varepsilon)},$$

- en notant  $U_{j+1}$  et  $W_{j+1}$  les unions de boules ouvertes disjointes suivantes,

$$U_{j+1} = \prod_{i=1}^{N_{j+1}} B(m_i^{j+1}, (1-\lambda)\lambda^j\varepsilon) \quad , \quad W_{j+1} = \prod_{i=1}^{N_{j+1}} B(m_i^{j+1}, \lambda^j\varepsilon) \quad ,$$

$$\mu((K_{j+1})_{\lambda^j\varepsilon} \setminus U_{j+1}) \leq \left(1 - \frac{C_1V((1-\lambda)\lambda^j\varepsilon)}{C_2V(3\lambda^j\varepsilon)}\right) \mu((K_{j+1})_{\lambda^j\varepsilon}),$$

d'où, comme  $(K_{j+1})_{\lambda^j\varepsilon} \subset (K_j)_{\lambda^{j-1}\varepsilon} \setminus U_j$ ,

$$\mu((K_{j+1})_{\lambda^j\varepsilon} \setminus U_{j+1}) \leq \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right)^{j+1} \mu(K_\varepsilon),$$

- en posant

$$K_{j+2} = K_{j+1} \setminus W_{j+1},$$

alors

$$(K_{j+2})_{\lambda^{j+1}\varepsilon} \subset ((K_{j+1})_{\lambda^j\varepsilon} \setminus U_{j+1}),$$

d'où

$$\mu((K_{j+2})_{\lambda^{j+1}\varepsilon}) \leq \left(1 - \frac{C_1C_4}{C_2}\right)^{j+1} \mu(K_\varepsilon).$$

Observons alors que

$$K \subset \left(K_{j+1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^j W_i\right)\right),$$

d'où

$$K_{\lambda^j\varepsilon} \subset \left((K_{j+1})_{\lambda^j\varepsilon} \cup \left(\bigcup_{i=1}^j (W_i)_{\lambda^j\varepsilon}\right)\right).$$

Par conséquent,

$$\left((K)_{\lambda^j\varepsilon} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^j U_i\right)\right) \subset \left(\left((K_{j+1})_{\lambda^j\varepsilon} \setminus U_{j+1}\right) \cup \bigcup_{i=1}^j \left((W_i)_{\lambda^j\varepsilon} \setminus U_i\right)\right).$$

si bien que

$$\mu\left(K_{\lambda^j\varepsilon} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^j U_i\right)\right) \leq \mu\left((K_{j+1})_{\lambda^j\varepsilon} \setminus U_{j+1}\right) + \sum_{i=1}^j \mu\left((W_i)_{\lambda^j\varepsilon} \setminus U_i\right).$$

Or, pour tout  $i = 1, \dots, j$ ,

$$\mu((W_i)_{\lambda^j \varepsilon} \setminus U_i) \leq \mu((W_i)_{\lambda^i \varepsilon} \setminus U_i) \leq \sum_{k=1}^{N_i} \left( \mu(B(m_k^i, (1+\lambda)\lambda^{i-1}\varepsilon)) - \mu(B(m_k^i, (1-\lambda)\lambda^{i-1}\varepsilon)) \right),$$

d'où, compte tenu de l'hypothèse sur la mesure des boules,

$$\mu((W_i)_{\lambda^i \varepsilon} \setminus U_i) \leq \lambda C_2 C_3 N_i V (\lambda^{i-1} \varepsilon) \leq \lambda \frac{C_2 C_3 \mu(K_\varepsilon)}{C_1}.$$

De plus, nous avons déjà obtenu

$$\mu((K_{j+1})_{\lambda^j \varepsilon} \setminus U_{j+1}) \leq \left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^{j+1} \mu(K_\varepsilon)$$

de sorte que

$$\mu\left(K_{\lambda^j \varepsilon} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^j U_i\right)\right) \leq \left(\left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^{j+1} + j \lambda \frac{C_2 C_3}{C_1}\right) \mu(K_\varepsilon).$$

Ainsi, pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$  fixés, choisissons<sup>2</sup> tout d'abord  $j(\eta, d, \mu(K_\varepsilon), C_1, C_2, V)$  tel que

$$\left(1 - \frac{C_1 C_4}{C_2}\right)^{j+1} \mu(K_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \eta,$$

puis  $\lambda(\eta, d, \mu(K_\varepsilon), C_1, C_2, V)$  tel que

$$j(\eta, d, \mu(K_\varepsilon), C_1, C_2, V) \lambda \frac{C_2 C_3}{C_1} \mu(K_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \eta.$$

Dès lors, la famille des boules ouvertes deux à deux disjointes  $(B(m_k^i, \lambda^{i-1} \varepsilon))_{\substack{i=1, \dots, j+1 \\ k=1, \dots, N_i}}$  centrées sur  $K$ , dont les rayons sont majorés par  $\varepsilon$  et minorés par

$$r(\varepsilon, \eta, d, \mu(K_\varepsilon), C_1, C_2, V) := \lambda^j \varepsilon,$$

dont le nombre est majoré par

$$\sum_{i=1}^{j+1} N_i \leq \sum_{i=1}^{j+1} \frac{\mu(K_\varepsilon)}{C_1 V (\lambda^i \varepsilon)} := N(\varepsilon, \eta, d, \mu(K_\varepsilon), C_1, C_2, V),$$

et dont la somme des volumes satisfait

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j+1} \sum_{k=1}^{N_i} \mu(B(m_k^i, \lambda^{i-1} \varepsilon)) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^j U_i\right) \\ &\geq \mu(K_{\lambda^j \varepsilon}) - \mu\left(K_{\lambda^j \varepsilon} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^j U_i\right)\right) \\ &\geq \mu(K_{\lambda^j \varepsilon}) - \eta \\ &\geq \mu(K) - \eta, \end{aligned}$$

convient.

---

2. Nous ne précisons pas explicitement les dépendances en les constantes  $C_3$  et  $C_4$  qui sont cachées dans les dépendances en  $d$  et  $V$ .

#### D.4.2 Preuve du lemme D.1.4

Il s'agit d'une application de la proposition D.1.5 avec les mêmes observations que celles précisées lors du passage de la proposition D.1.2 au lemme D.1.1. De plus, la minoration du volume relatif de  $K$  permet de passer d'une minoration en  $\text{vol}(K) - \eta$  à une minoration en  $(1 - \eta)\text{vol}(K)$ .



## Annexe E

# Théorèmes de comparaison sous une hypothèse de courbure-dimension

Nous proposons une approche un peu différente de celle adoptée par Z. Qian dans [Q], afin de généraliser les théorèmes de Myers, de Bishop-Gromov et de Heintze-Karcher sous une hypothèse de courbure-dimension. En effet, Z. Qian choisit de travailler sur la fonction distance à un point, dont le laplacien coïncide avec la dérivée logarithmique de la densité riemannienne. Ici, nous généralisons une inéquation différentielle linéaire du second ordre “classique”, faisant intervenir le tenseur de courbure de Ricci et satisfaite par une puissance de la densité riemannienne, en une inéquation différentielle linéaire du second ordre faisant intervenir la courbure de Ricci généralisée et satisfaite par une puissance de la densité non riemannienne. Ainsi, cette preuve s’inscrit parfaitement dans l’esprit des résultats de comparaison géométriques du chapitre 2 de cette thèse : ils proviennent de comparaisons analytiques concernant les solutions d’inéquations différentielles dont les espaces modèles “fournissent” des solutions exactes.

Nous déduisons, de l’extension de ces théorèmes de comparaison, la généralisation de majorations du trou spectral, de minorations de la constante isopérimétrique de Cheeger et nous observons que les arguments donnés par M. Gromov dans [Gr1] restent valides dans ce nouveau contexte, donnant ainsi une “autre” preuve de l’inégalité de Lévy-Gromov généralisée (3.49), obtenue au théorème 3.4.18 par intégration de l’inéquation différentielle généralisée (3.45).

### E.1 Propriétés différentielles de la densité non riemannienne le long d’une géodésique

Considérons une variété riemannienne  $(M, g)$ , de classe  $C^\infty$ , complète, non nécessairement compacte, sans bord, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), sur laquelle nous disposons de la densité non riemannienne  $\Psi = \exp(\psi)$  où  $\psi \in C^2(M, \mathbb{R})$ . Fixons un point  $p$  de  $M$  et notons  $\gamma$  la géodésique  $\gamma : s \mapsto \exp_p(su)$  où  $u$  est un vecteur unitaire de  $T_pM$ . Enfin,  $c(p, u)$  désigne le premier point à partir duquel la géodésique  $\gamma$  n’est plus minimisante. Dans [G1], S. Gallot démontre que si  $b(p, s)$  désigne la densité riemannienne au point  $\gamma(s)$ , alors la fonction  $a : s \mapsto b(p, s)^{\frac{1}{n-1}}$  définie sur  $[0, c(p, u)]$  et de classe  $C^\infty$  sur  $]0, c(p, u)[^1$ ,

1. En effet, la fonction  $s \mapsto b(p, s)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, c(p, u)[$  et ne s’annule pas, d’où la régularité de  $a$ .

vérifie la relation différentielle suivante<sup>2</sup> :

$$\forall s \in ]0, c(p, u)[ \quad , \quad a''(s) + \frac{a(s)}{n-1} \text{Ricci}_{(M,g)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) \leq 0. \quad (\text{E.1})$$

Nous allons démontrer que cette relation différentielle se généralise au cadre des densités non riemanniennes.

**Proposition E.1.1** *Pour tout  $q \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $a_\psi : s \mapsto a(s) \frac{n-1}{n+q-1} e^{\frac{\psi(\gamma(s))}{n+q-1}}$ , définie sur  $]0, c(p, u)[$  possède la propriété différentielle suivante :*

$$\forall s \in ]0, c(p, u)[ \quad , \quad a''_\psi(s) + \frac{a_\psi(s)}{n+q-1} \text{Ricci}_{(M,g)_\psi^q}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) \leq 0. \quad (\text{E.2})$$

### Démonstration.

Afin de comprendre pourquoi, si nous choisissons de faire apparaître le tenseur  $\text{Ricci}_{(M,g)_\psi^q}$ , c'est le choix de la fonction  $a_\psi : s \mapsto a(s) \frac{n-1}{n+q-1} e^{\frac{\psi(\gamma(s))}{n+q-1}}$  qui permet une généralisation pertinente de la relation (E.1), posons, pour  $(\nu, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\forall s \in [0, c(p, u)] \quad , \quad a_\psi(s) = a(s)^{(n-1)\nu} e^{\alpha\psi(\gamma(s))}.$$

Calculons, pour tout  $s \in ]0, c(p, u)[$ , la dérivée seconde de la fonction  $a_\psi$ <sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} a''_\psi(s) &= a(s)^{(n-1)\nu-2} e^{\alpha\psi(\gamma(s))} \left[ (n-1)\nu a(s) a''(s) \right. \\ &\quad + (n-1)\nu((n-1)\nu-1) a'(s)^2 + 2(n-1)\nu\alpha a(s) a'(s) d\psi(\dot{\gamma}(s)) \\ &\quad \left. + \alpha a(s)^2 \text{Hess}\psi(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) + \alpha^2 a(s)^2 d\psi(\dot{\gamma}(s))^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

En utilisant l'inégalité (E.1), nous obtenons, pour tout  $s \in ]0, c(p, u)[$ ,

$$\begin{aligned} a''_\psi(s) &\leq a_\psi(s) \left[ -\nu \text{Ricci}_{(M,g)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) + \alpha \text{Hess}\psi(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) + \alpha^2 d\psi(\dot{\gamma}(s))^2 \right] \\ &\quad + a(s)^{(n-1)\nu-2} e^{\alpha\psi(\gamma(s))} \left[ (n-1)\nu((n-1)\nu-1) a'(s)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(n-1)\nu\alpha a(s) a'(s) d\psi(\dot{\gamma}(s)) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Compte tenu de l'hypothèse de courbure dimension  $C((n+q-1)\delta, n+q)$  (inégalité du type (3.43)) que nous souhaitons exploiter dans la suite et qui repose sur la minoration suivante

$$\text{Ricci}_{(M,g)}(\cdot, \cdot) - \text{Hess}\psi(\cdot, \cdot) - \frac{1}{q} d\psi \otimes d\psi(\cdot, \cdot) \geq (n+q-1)\delta g(\cdot, \cdot) \quad , \quad (\delta, q) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[,$$

posons pour la suite  $\nu = \alpha$  et faisons apparaître le coefficient  $\frac{1}{q}$  devant le terme  $d\psi(\dot{\gamma}(s))^2$ . Ainsi, pour tout  $(\alpha, q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ , pour tout  $s \in ]0, c(p, u)[$ ,

$$\begin{aligned} a''_\psi(s) &\leq \alpha a_\psi(s) \left[ -\text{Ricci}_{(M,g)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) + \text{Hess}\psi(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) + \frac{1}{q} d\psi(\dot{\gamma}(s))^2 \right] \\ &\quad + a(s)^{(n-1)\alpha-2} e^{\alpha\psi(\gamma(s))} \left[ (n-1)\alpha((n-1)\alpha-1) a'(s)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(n-1)\alpha^2 a(s) a'(s) d\psi(\dot{\gamma}(s)) + \alpha \left( \alpha - \frac{1}{q} \right) a(s)^2 d\psi(\dot{\gamma}(s))^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

2. Dans [G1], S. Gallot attribue ce résultat à M. Gage et cite [Ga].

3. Cette fonction est de classe  $C^2$  sur  $]0, c(p, u)[$  car la fonction  $a$  est strictement positive sur  $]0, c(p, u)[$  et la fonction  $\psi$  appartient à  $C^2(M, \mathbb{R})$ .



Utilisons la majoration suivante (inégalité arithmético-géométrique)

$$2\left(\frac{(n-1)\alpha^2}{u} \frac{a'(s)}{\sqrt{a(s)}}\right) \left(ud\psi(\dot{\gamma}(s))\sqrt{a(s)}\right) \leq \left(\frac{(n-1)\alpha^2}{u} \frac{a'(s)}{\sqrt{a(s)}}\right)^2 + \left(ud\psi(\dot{\gamma}(s))\sqrt{a(s)}\right)^2,$$

où  $u$  est un réel strictement positif, pour majorer le terme

$$(n-1)\alpha((n-1)\nu-1)a'(s)^2 + 2(n-1)\alpha^2 a(s)a'(s)d\psi(\dot{\gamma}(s)) + \alpha\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)a(s)^2 d\psi(\dot{\gamma}(s))^2$$

par la somme des quantités

$$\left[(n-1)\alpha\left(1 + \frac{\alpha^2}{u^2}\right) - 1\right](n-1)\alpha a'(s)^2$$

et

$$\left[\alpha\left(\alpha - \frac{1}{q}\right) + u^2\right]d\psi(\dot{\gamma}(s))^2.$$

L'intérêt de ces manipulations réside dans l'observation que ces deux quantités sont nulles si nous choisissons de fixer

$$\alpha = \frac{1}{n+q-1} \quad \text{et} \quad u = \frac{\sqrt{n-1}}{(n+q-1)\sqrt{q}}.$$

Ainsi, la relation différentielle (E.5) devient, pour tout  $s \in ]0, c(p, u)[$ ,

$$a''_{\psi}(s) + \frac{a_{\psi}(s)}{n+q-1} \left[ \text{Ricci}_{(M,g)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) - \text{Hess}\psi(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) - \frac{1}{q}d\psi(\dot{\gamma}(s))^2 \right] \leq 0,$$

d'où le résultat. □

## E.2 Extension des théorèmes de comparaison de Myers, de Bishop-Gromov et Heintze-Karcher

### E.2.1 Théorème de Bishop généralisé

**Théorème E.2.1** *Soit  $(M, g, \psi)$  une variété riemannienne complète à densité, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M,g)_{\psi}}^q \geq (n+q-1)\delta g \quad , \quad (\delta, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

Alors,

(i) si  $\delta > 0$ , la variété  $(M, g)$  est compacte et

$$\text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}},$$

(ii) pour tout  $p \in M$ , pour tout  $r \in [0, \text{diam}(M, g)]$  et  $R \in [r, \text{diam}(M, g)]$ ,

$$\frac{\nu_{g,\psi}(B(p, r))}{\nu_{g,\psi}(B(p, R))} \geq \frac{\int_0^r (s_{\delta}(u))^{n+q-1} du}{\int_0^R (s_{\delta}(u))^{n+q-1} du}.$$

**Démonstration.**

La fonction  $a_\psi$  satisfait, d'après la proposition E.1.1, la relation différentielle

$$\forall s \in ]0, c(p, u)[ \quad , \quad a''_\psi(s) + \delta a_\psi(s) \leq 0.$$

De plus, elle est strictement positive sur  $]0, c(p, u)[$ , nulle en 0 et sa dérivée tend vers  $+\infty$  lorsque  $s$  tend vers 0. Un argument classique dit de "Sturm-Liouville"<sup>4</sup> permet de montrer que la fonction  $s \mapsto \frac{s_\delta(s)}{a_\psi(s)}$  est croissante sur  $[0, \min(\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}, c(p, u))]$  (sa limite en 0 est nulle). Lorsque  $\delta > 0$ , nous en déduisons que  $c(p, u) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ <sup>5</sup> d'où<sup>6</sup>

$$\text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}},$$

d'où la généralisation du théorème de Myers. De plus, par croissance de  $s \mapsto \frac{s_\delta(s)}{a_\psi(s)}$ , nous disposons de l'inégalité

$$\forall s \in ]0, c(p, u)[ \quad , \quad \frac{a'_\psi(s)}{a_\psi(s)} \leq \frac{s'_\delta(s)}{s_\delta(s)}, \quad (\text{E.6})$$

dont nous pouvons déduire un résultat du type Bishop-Gromov en reproduisant une technique désormais classique (voir [C1] par exemple), après avoir observé que le cut locus est de  $\nu_{g, \psi}$ -mesure nulle puisqu'il est de  $\nu_g$ -mesure nulle.  $\square$

**E.2.2 Inégalité de Heintze-Karcher généralisée**

En reprenant la preuve et les arguments de l'extension du théorème de Bishop-Gromov, nous parvenons, d'une manière analogue, à obtenir un résultat similaire à l'inégalité géométrique de Heintze-Karcher (voir [HK]).

**Théorème E.2.2** *Soit  $(M, g, \psi)$  une variété riemannienne complète à densité, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M, g)}^q \geq (n + q - 1)\delta g \quad , \quad (\delta, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

*Considérons un ouvert  $\Omega$  dont le bord est une hypersurface régulière dont  $\nu$  et  $\eta$  désignent respectivement un champ de vecteur normal sortant unitaire et la courbure moyenne.*

*Alors, pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$ ,*

$$\nu_{g, \psi}(\Omega_r \setminus \Omega) \leq \int_{\partial\Omega} \left( \int_0^r \max \left( 0, c_\delta(u) + (\eta(m) + d_m \psi(\nu)) s_\delta(u) \right)^{n+q-1} dr \right) e^{\psi(m)} d\nu_{g|_{\partial\Omega}}(m).$$

**E.3 Conséquences de ces généralisations**

En fait, tous les résultats basés sur l'hypothèse  $\text{Ricci} \geq (n - 1)\delta$ , dont les preuves reposent essentiellement sur les inégalités du type Bishop-Gromov et Heintze-Karcher, sont susceptibles de s'étendre aux variétés à densité sous l'hypothèse  $\text{Ricci}_\psi^q \geq (n + q - 1)\delta$ , avec comme seule modification, la substitution de  $n$  par  $n + q$ .

4. Plus précisément, à partir de la relation différentielle (E.2) nous montrons que la fonction  $s \mapsto s'_\delta(s)a_\psi(s) - s_\delta(s)a'_\psi(s)$  a une dérivée positive ou nulle sur  $[0, \min(\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}, c(p, u))]$ , ce qui la rend croissante. Sa limite étant nulle en 0 (utiliser l'équivalent  $a_\psi(s) \sim \frac{n-1}{n+q-1} e^{\frac{\psi(p)}{n+q-1}} s^{-\frac{q}{n+q-1}}$ ), nous en déduisons qu'elle est positive ou nulle sur  $[0, \min(\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}, c(p, u))]$ , d'où la croissance de  $s \mapsto \frac{s_\delta(s)}{a_\psi(s)}$ .

5. En effet, sinon  $s \mapsto \frac{s_\delta(s)}{a_\psi(s)}$  tend vers 0 lorsque  $s$  tend vers  $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ , ce qui est incompatible avec sa propriété de monotonie.

6. Nous montrons en fait que le long de toute géodésique, un point conjugué apparaît nécessairement avant la longueur  $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ .

### E.3.1 Majoration des valeurs propres de l'opérateur à poids associé

Donnons une extension du théorème de comparaison sur la première valeur propre des boules géodésiques, établi par S. Y. Cheng dans [Che] à partir d'une borne inférieure sur le tenseur de courbure de Ricci.

**Théorème E.3.1** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), munie de la densité  $\Psi := \exp \psi$  ( $\psi \in C^2(M)$ ) et satisfaisant*

$$\text{Ricci}_{(M, g)_q}^\psi \geq (n + q - 1)\delta g \quad (\delta, q) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty].$$

Alors, pour tout point  $m$  de  $M$  et pour tout  $r > 0$ ,

$$\lambda_1^D(B(m, r)) \leq \lambda_1^D(r, \delta, n + q),$$

où  $\lambda_1^D(r, \delta, n + q)$  désigne la première valeur propre du Laplacien à poids sur l'ouvert  $[0, r[$  du  $mm$ -espace

$$\left( I_\delta, |\cdot|, \left( \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} (s_\delta(u))^{n+q-1} du \right)^{-1} (s_\delta(x))^{n+q-1} dx \right).$$

#### Démonstration.

Il suffit de reprendre la preuve donnée par S. Y. Cheng et de remplacer l'utilisation de l'inégalité de Bishop-Gromov par sa version généralisée (E.6) obtenue lors de la preuve du théorème E.2.1.  $\square$

### Remarques E.3.2

- Donnons la définition de la première valeur propre du Laplacien à poids sur un ouvert  $\Omega$  relativement compact sur  $(M, g, \psi)$ , avec condition de bord de Dirichlet :

$$\lambda_1^D(\Omega) := \inf \left\{ \int_\Omega \|\nabla_p f\|^2 d\nu_{g, \psi}(p) \mid f \in \text{Lip}(M, d), \int_\Omega f(p)^2 d\nu_{g, \psi}(p) = 1, f|_{M \setminus \Omega} = 0 \right\}.$$

- Lorsque  $q$  est entier, ce théorème se relit comme une majoration de la première valeur propre du Laplacien à poids pour la condition au bord de Dirichlet sur toute boule de rayon  $r$ , par la première valeur propre du Laplacien riemannien pour la condition au bord de Dirichlet sur une boule de rayon  $r$  dans l'espace modèle  $\mathbb{M}_\delta^{n+q}$ .

### E.3.2 Minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger et généralisation de l'inégalité de Lévy-Gromov

En reprenant la preuve de l'extension aux variétés riemanniennes fermées satisfaisant  $\text{Ricci} \geq (n - 1)$ , de l'inégalité isopérimétrique de Paul Lévy donnée par M. Gromov dans [Gr1], nous observons qu'elle repose essentiellement sur l'inégalité de Heintze-Karcher. Par conséquent, la même démonstration, en remplaçant  $n$  par  $n + q$  permet de proposer une nouvelle preuve de la généralisation de l'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov déjà obtenue au chapitre 3 par intégration de l'inéquation différentielle généralisée (3.45) (voir le théorème 3.4.18)

**Théorème E.3.3** *Soit  $(M, g, \psi)$  une variété riemannienne complète à densité, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M, g)_\psi}^q \geq (n + q - 1)\delta g \quad , \quad (\delta, q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

Alors,

$$h_{(M,g,psi)} \geq h_{(S_\delta^{n+q}, can)}.$$

Par ailleurs, la minoration de la constante isopérimétrique de Cheeger donnée par S. Gallot dans le théorème 6.15 de [G1] et rappelée dans le théorème 1.4.4 se généralise elle aussi :

**Théorème E.3.4** *Soit  $(M,g,\psi)$  une variété riemannienne complète à densité, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M,g)_\psi}^q \geq (n+q-1)\delta g \quad , \quad (\delta, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

Alors,

$$h_C(M,g,\psi) \geq \frac{1}{\int_0^{\frac{\text{diam}(M,g)}{2}} c_\delta(u)^{n+q-1} du}.$$

Lors de l'intégration de l'inéquation différentielle généralisée (3.50), dans l'esprit du théorème de comparaison 2.4.12, nous observons que seule la minoration du profil persiste puisque la fonction  $h_{(M,g,\psi)}^{\frac{n+q-1}{n+q}}$  a une dérivée infinie en 0 (cette perturbation est imputable à l'hypothèse de courbure-dimension qui suggère la comparaison avec un espace modèle de dimension  $n+q$ ). Ainsi, la minoration (2.44) du corollaire 2.4.14 s'étend sous l'hypothèse  $C(n+q-1, n+q)$  et donne

$$\forall \beta \in ]0, 1[ \quad , \quad \left( \frac{h_C(M,g,\psi)}{h_C(S^{n+q}, can)} \right)^{\frac{1}{n+q}} \leq \frac{h_{(M,g,\psi)}(\beta)}{h_{(S^{n+q}, can)}(\beta)}.$$

En particulier, cette minoration permet d'affiner l'inégalité de trou spectral du corollaire 3.4.20 et d'étendre l'inégalité (2.48) du théorème 2.5.2 en donnant

$$\lambda_1(M,g,\psi) \geq (n+q) \left( \frac{h_C(M,g,\psi)}{h_C(S^{n+q}, can)} \right)^{\frac{2}{n+q}}.$$

### E.3.3 Majoration du $\lambda_1(M,g,\psi)$ en fonction de la constante isopérimétrique de Cheeger

Nous pouvons généraliser le théorème 1.2 de [B] où P. Buser obtient une majoration du trou spectral en fonction de la constante isopérimétrique de Cheeger, d'un minorant uniforme de la courbure de Ricci et de la dimension de la variété.

**Théorème E.3.5** *Soit  $(M,g,\psi)$  une variété riemannienne fermée à densité, de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que*

$$\text{Ricci}_{(M,g)_\psi}^q \geq (n+q-1)\delta g \quad , \quad (\delta, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

Alors

$$\lambda_1(M,g,\psi) \leq c_1(n) (\delta h_C(M,g,\psi) + h_C(M,g,\psi)^2),$$

où  $c_1(n)$  est une constante qui ne dépend que de la dimension  $n$  de la variété.

## Annexe F

# Symmetrization of Warped Products

Let  $(M^n, g)$  be a closed  $n$ -dimensional ( $n \geq 2$ ) Riemannian manifold. In order to study the isoperimetric properties of  $(M, g)$ , one defines the isoperimetric profile  $h_{(M, g)}$  of  $(M, g)$  in the following way: fix  $h_{(M, g)}(0) = h_{(M, g)}(1) = 0$  and for all  $\beta \in ]0, 1[$ ,

$$h_{(M, g)}(\beta) = \inf \left\{ \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol}(M, g)} / \Omega \subset M, \text{vol}(\Omega) = \beta \text{vol}(M, g) \right\}$$

where the infimum is taken over domains  $\Omega$  with smooth boundary. An open set  $\Omega$  such that  $\text{vol}(\Omega) = \beta \text{vol}(M, g)$  and  $\frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol}(M, g)} = h_{(M, g)}(\beta)$  is called an isoperimetric domain.

In [Ro], A. Ros develops a symmetrization technique that makes it possible to get a lower bound of the profile of a product of  $m$ - $m$ -spaces in terms of lower bounds of the profile of these  $m$ - $m$ -spaces. In this note I want to generalize this symmetrization device so as to succeed in giving a lower bound of the profile of warped products.

Let  $(M, g^M)$  and  $(P, g^P)$  be two closed Riemannian manifolds, and let  $\varphi$  be a function in  $C^0(M, \mathbb{R}_+^*)$ . We are interested in considering the warped product of these manifolds denoted by  $M \times_\varphi P$ . Let  $d_M$ ,  $d_P$  and  $d_\varphi$  respectively stand for the Riemannian distances on  $M$ ,  $P$  and  $M \times_\varphi P$ . Let  $\mu_M$  and  $\mu_P$  denote the canonical Riemannian probability measures on  $M$  and  $P$ .

$$\begin{aligned} \pi_M &: M \times_\varphi P \longrightarrow M \\ & \quad (m, p) \longmapsto m \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \pi_P &: M \times_\varphi P \longrightarrow P \\ & \quad (m, p) \longmapsto p \end{aligned}$$

are the canonical projections onto  $M$  and  $P$ .

**Lemma F.0.6** *For any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\eta = \eta(\varepsilon, \varphi)$  such that on the one hand, for any couple  $(m_1, m_2)$  in  $M^2$  and any couple  $(p_1, p_2)$  in  $P^2$ , if  $d(m_1, m_2) \leq \eta$ , then*

$$d_\varphi((m_1, p_1), (m_2, p_2))^2 \leq d_M(m_1, m_2)^2 + (\varphi(m_1) + \varepsilon)^2 d_P(p_1, p_2)^2,$$

*and on the other hand, for any couple  $(m_1, m_2)$  in  $M^2$  and any couple  $(p_1, p_2)$  in  $P^2$ , if  $d_\varphi((m_1, p_1), (m_2, p_2)) \leq \eta$ , then*

$$d_\varphi((m_1, p_1), (m_2, p_2))^2 \geq d_M(m_1, m_2)^2 + (\varphi(m_1) - \varepsilon)^2 d_P(p_1, p_2)^2.$$

**Demonstration.** From uniform continuity of  $\varphi$  on the compact manifold  $M$ , for any  $\varepsilon > 0$ , there is  $\eta > 0$  such that  $d(m_1, m_2) \leq \eta$  entails  $|\varphi(m_1) - \varphi(m_2)| \leq \varepsilon$ . As a

consequence, on any subset  $B(m, \eta) \times P$  of  $M \times P$ , the warped product metric is pinched between two product metrics:

$$\forall (m', p) \in B(m, \eta) \times P \quad , \quad g_{m'}^M + (\varphi(m) - \varepsilon)^2 g_p^P \leq g_{m'}^M + \varphi(m')^2 g_p^P \leq g_{m'}^M + (\varphi(m) + \varepsilon)^2 g_p^P.$$

The upper bound on distances arises from the upper bound on the metric. As to the lower bound, it comes from the fact that if  $d_\varphi((m_1, p_1), (m_2, p_2)) \leq \eta$ , then  $d_M(m_1, m_2) \leq \eta$  so that along a minimizing way joining a point in  $B_\varphi((m_1, p_1), \eta)$  to  $(m_1, p_1)$ , we remain in  $B(m_1, \eta) \times P$  and we can therefore use the preceding lower bound on the metric of the warped product to claim that

$$d_\varphi((m_1, p_1), (m_2, p_2))^2 \geq d_M(m_1, m_2)^2 + (\varphi(m_1) - \varepsilon)^2 d_P(p_1, p_2)^2.$$

□

**Theorem F.0.1** *If we suppose that*

$$h_{(P, g^P)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})},$$

then

$$h_{M \times_\varphi P} \geq h_{M \times_\varphi \mathbb{S}^n}.$$

**Demonstration.**

Let  $\Omega$  be an open set in  $M \times_\varphi P$ . Set, for any  $m \in M$ ,

$$\Omega(m) := \pi_P(\Omega \cap \pi_M^{-1}(\{m\})).$$

Fix  $s \in \mathbb{S}^n$  and define the symmetrized set  $\Omega^* \subset M \times_\varphi \mathbb{S}^n$  as

$$\Omega^* := \coprod_{m \in M} \{m\} \times \Omega(m)^*$$

with

$$\Omega(m)^* := B\left(s, r(\mu_P(\Omega(m)))\right) \subset \mathbb{S}^n$$

where the function  $r(\beta)$  is the radius of a spherical cap on  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$  whose Riemannian probability measure is  $\beta$ .

Then it is quite easy to see that  $\Omega$  and  $\Omega^*$  have the same probability measure.

We are then interested in comparing their outer Minkowski content. With this aim in view, we study closed tubular neighbourhoods.

**Lemma F.0.7** *For any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\eta_\varepsilon > 0$  such that*

$$\forall \eta \leq \eta_\varepsilon \quad , \quad \left( \{m\} \times \Omega(m)^* \right)_{\eta(1-\varepsilon)} \subset \left[ \left( \{m\} \times \Omega(m) \right)_\eta \right]^*.$$

**Demonstration.**

The use of Lemma F.0.6 gives  $\eta_\varepsilon > 0$  such that for any couple  $(m_1, m_2)$  in  $M^2$  and any couple  $(p_1, p_2)$  in  $P^2$ , if  $d_\varphi((m_1, p_1), (m_2, p_2)) \leq \eta_\varepsilon$ , then

$$d_M(m_1, m_2)^2 + (\varphi(m_1) - \varepsilon)^2 d_P(p_1, p_2)^2 \leq d_\varphi((m_1, p_1), (m_2, p_2))^2 \leq d_M(m_1, m_2)^2 + (\varphi(m_1) + \varepsilon)^2 d_P(p_1, p_2)^2.$$

From this, we obtain that if  $m' \in M$  satisfies  $d_M(m, m') = t \leq \eta$ , then

$$\left( \Omega(m) \right)_{\frac{\sqrt{\eta^2 - t^2}}{\varphi(m) + \varepsilon}} \subset \pi_P \left( \pi_M^{-1}(m') \cap \left( \{m\} \times \Omega(m) \right)_\eta \right). \quad (\text{F.1})$$

Because of the assumption on the profile of  $P$ , we have

$$\mu_P \left( \left( \Omega(m) \right)_{\frac{\sqrt{\eta^2 - t^2}}{\varphi(m) + \varepsilon}} \right) \geq \mu_{\mathbb{S}^n} \left( \left( \Omega(m)^* \right)_{\frac{\sqrt{\eta^2 - t^2}}{\varphi(m) + \varepsilon}} \right). \quad (\text{F.2})$$

Set

$$\delta(\varepsilon) := 4\varepsilon \sup_{m \in M} \frac{\varphi(m)}{(\varphi(m) + \varepsilon)^2},$$

and

$$\tilde{\eta} = \eta \sqrt{1 - \delta(\varepsilon)}$$

then observe that

$$\forall t \leq \tilde{\eta} \quad , \quad \frac{\sqrt{\eta^2 - t^2}}{\varphi(m) + \varepsilon} \geq \frac{\sqrt{\tilde{\eta}^2 - t^2}}{\varphi(m) - \varepsilon},$$

hence

$$\left( \Omega(m)^* \right)_{\frac{\sqrt{\tilde{\eta}^2 - t^2}}{\varphi(m) - \varepsilon}} \subset \left( \Omega(m)^* \right)_{\frac{\sqrt{\eta^2 - t^2}}{\varphi(m) + \varepsilon}}. \quad (\text{F.3})$$

Moreover, using Lemma F.0.7, we observe that if  $m' \in M$  satisfies  $d_M(m, m') = t \leq \tilde{\eta}$ , then

$$\pi_{\mathbb{S}^n} \left( \pi_M^{-1}(m') \cap \left( \{m\} \times \Omega(m)^* \right)_{\tilde{\eta}} \right) \subset \left( \Omega(m)^* \right)_{\frac{\sqrt{\tilde{\eta}^2 - t^2}}{\varphi(m) - \varepsilon}}. \quad (\text{F.4})$$

Putting (F.1), (F.2), (F.3) and (F.4) together, if  $m' \in M$  satisfies  $d_M(m, m') = t \leq \tilde{\eta}$ , we get

$$\mu_{\mathbb{S}^n} \left[ \pi_{\mathbb{S}^n} \left( \pi_M^{-1}(m') \cap \left( \{m\} \times \Omega(m)^* \right)_{\tilde{\eta}} \right) \right] \leq \mu_P \left[ \pi_P \left( \pi_M^{-1}(m') \cap \left( \{m\} \times \Omega(m) \right)_{\eta} \right) \right],$$

which therefore entails

$$\left( \{m\} \times \Omega(m)^* \right)_{\tilde{\eta}} \subset \left[ \left( \{m\} \times \Omega(m) \right)_{\eta} \right]^*$$

and makes the lemma true.  $\square$

From Lemma F.0.7, it becomes obvious that for any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\eta_\varepsilon$  such that

$$\forall \eta \leq \eta_\varepsilon \quad , \quad \left( \Omega^* \right)_{\eta(1-\varepsilon)} \subset \left( \Omega_\eta \right)^*$$

and then

$$\mu_{M \times \varphi P}^+(\partial\Omega) \geq (1 - \varepsilon) \mu_{M \times \varphi \mathbb{S}^n}^+(\partial\Omega^*),$$

which gives the isoperimetric estimate when  $\varepsilon$  tends to zero.  $\square$

One would wonder what can be said in a non compact setting, for cones for instance. If the domain  $\Omega$  doesn't contain the vertex the same symmetrization argument works and shows that its perimeter is higher than that of its symmetric. If the domain contains the vertex, approximate it by domains that don't contain the vertex with almost the same volume and perimeter and use a limit argument. Indeed, problems appear when the infimum of  $\varphi$  on  $\pi_M(\Omega)$  is zero. We can therefore say that, if we suppose that

$$h_{(P, g^P)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})},$$

then,

$$\forall V \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad I_{\mathbb{R}_+ \times_\varphi P}(V) \geq \frac{\text{vol}(M,g)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})} h_{\mathbb{R}_+ \times_\varphi \mathbb{S}^n} \left( \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})}{\text{vol}(M,g)} V \right),$$

which yields, if  $\varphi(r) = r$

$$\forall V \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad I_{\mathbb{R}_+ \times_\varphi P}(V) \geq \frac{\text{vol}(M,g)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})} h_{(\mathbb{R}^{n+1}, \text{can})} \left( \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})}{\text{vol}(M,g)} V \right).$$

This result immediately shows the minimizing property of balls centered in the vertex on cones, a conclusion shown differently and previously by F. Morgan and M. Ritoré in [MR].

The result of Theorem F.0.1 can be generalized with the same proof for weighted isoperimetric problem on smooth manifolds:

**Theorem F.0.2** *Let  $(P, g^P, \psi_P)$  be and  $(M, g^M, \psi_M)$  be mm-spaces i. e. Riemannian manifolds with smooth positive densities. If we suppose*

$$h_{(P, g^P, \psi_P)} \geq h_{(\mathbb{S}^n, \text{can})},$$

then

$$h_{(M \times_\varphi P, \psi_M, \psi_P)} \geq h_{(M \times_\varphi \mathbb{S}^n, \psi_M)}.$$

Moreover, the comparison space can be different from  $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ , the only thing we must know is that it satisfies the conditions given by A. Ros in [Ro], when he defines a large family of model spaces (see also the definition 3.1.4), and it must also be endowed with a Riemannian structure in order to give sense to the warped product.



# Annexe G

## Isoperimetric comparison theorems for convex bodies

by Vincent BAYLE and César ROSALES.

We prove that the isoperimetric profile of a convex domain  $\Omega$  with compact closure in a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$  satisfies a second order differential inequality which only depends on the dimension of the manifold and on a lower bound on the Ricci curvature of  $\Omega$ . Regularity properties of the profile and topological consequences on isoperimetric regions arise naturally from this differential point of view.

Moreover, by integrating the differential inequality we obtain sharp comparison theorems: not only can we derive an inequality which should be compared with Lévy-Gromov Inequality but we also show that if  $\text{Ricci} \geq n\delta$  on  $\Omega$ , then the profile of  $\Omega$  is bounded from above by the profile of the half-space  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  in the simply connected space form with constant sectional curvature  $\delta$ . As consequence of isoperimetric comparisons we obtain geometric estimations for the volume and the diameter of  $\Omega$ , and for the first non-zero Neumann eigenvalue for the Laplace operator on  $\Omega$ .

### G.1 Introduction

Let  $\Omega$  be a domain (connected open set) with non-empty boundary of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . The so-called *partitioning problem* in  $\Omega$  consists on finding, for a given  $V < \text{vol}(\Omega)$ , a minimum of the perimeter functional  $\mathcal{P}(\cdot, \Omega)$  in the class of sets in  $\Omega$  that enclose volume  $V$ . Here  $\text{vol}(E)$  is the  $(n+1)$ -dimensional Hausdorff measure of a set  $E \subseteq M$  and  $\mathcal{P}(E, \Omega)$  denotes the *perimeter of  $E$  relative to  $\Omega$* , which essentially measures the area of  $\partial E \cap \Omega$  (see Section G.2 for a precise definition). Solutions to the partitioning problem are called *isoperimetric regions* or *minimizers* in  $\Omega$  of volume  $V$ .

The partitioning problem is object of an intensive study. The first questions taken into consideration were related to the existence and regularity of minimizers. In the light of standard results in Geometric Measure Theory [M1], inside a smooth domain  $\Omega$  with compact closure, minimizers do exist for any given volume and their boundaries are smooth, up to a closed set of singularities with high Hausdorff codimension, (see Proposition G.2.3 for a precise statement). Recently, geometric and topological properties of minimizers have been studied by A. Ros and E. Vergasta [RV] and P. Sternberg and K. Zumbrun [SZ2] inside a Euclidean convex body, and by M. Ritoré and C. Rosales [RR] inside Euclidean cones. However, in spite of the last advances, the complete description of isoperimetric regions has been achieved only for certain convex domains such

as half-spaces in the simply connected space forms, Euclidean balls, Euclidean slabs, and Euclidean convex cones, among others. A beautiful survey containing most of the results above, including recent progress and open questions is the one by A. Ros [Ro].

Much of the information concerning the partitioning problem is contained in the *isoperimetric profile of  $\Omega$* : the function  $I_\Omega(V)$  which assigns to  $V$  the least-perimeter separation of volume  $V$  in  $\Omega$ . In this paper, assuming that  $\Omega$  is a convex domain with compact closure in  $(M^{n+1}, g)$ , we prove regularity properties of the profile, connectivity results for minimizers and for their boundaries, and above all, we obtain sharp lower and upper bounds for the isoperimetric profile involving the infimum of the Ricci curvature of  $\Omega$ .

We begin this work with a preliminary section where we introduce the notation and give some basic results. For example, Proposition G.2.1 is an adaptation to the partitioning problem of a result by P. Bérard and D. Meyer [BM] in which it is shown that the isoperimetric profile  $I_\Omega$  approaches asymptotically the profile of the half-space in  $\mathbb{R}^{n+1}$  for small volumes. We also summarize existence and regularity results for isoperimetric regions in Proposition G.2.3, and state an analytic comparison result for the solutions of a differential inequality (Theorem G.2.5) that will be useful in Section G.4.

In Section G.3, inspired by previous results by C. Bavard and P. Pansu [BP], P. Sternberg and K. Zumbrun [SZ2], F. Morgan and D. Johnson [MJ], and V. Bayle [Ba2], we prove (Theorem G.3.1) that the renormalized isoperimetric profile  $Y_\Omega = I_\Omega^{(n+1)/n}$  of a smooth convex domain  $\Omega$  with compact closure satisfies a second order differential inequality of the type

$$Y_\Omega'' \leq C Y_\Omega^{(1-n)/(1+n)}, \tag{G.1}$$

where  $C$  is a constant depending on the dimension of the ambient manifold and on a lower bound on the Ricci curvature over  $\Omega$ .

The idea of the proof of (G.1) relies on a local comparison of  $Y_\Omega$  with the renormalized profile  $P(V)^{(n+1)/n}$  associated to the deformation of a minimizer  $E$  -which exists by the compactness of  $\bar{\Omega}$ - given by equidistant hypersurfaces to  $\partial E \cap \Omega$ . Some technical difficulties arise due to the possible presence in high dimensions of singularities in  $\partial E \cap \Omega$ . These difficulties are solved by an approximation argument consisting in the construction of “almost parallel variations” (Lemma G.3.1). This scheme of proof was previously used in [MJ] and [Ba2] to get a differential inequality for the isoperimetric profile of a closed Riemannian manifold, and in [RR] to characterize isoperimetric regions in smooth convex cones. As in [RR], our proof differs from those of [MJ] and [Ba2] in the presence of a boundary term involving the second fundamental form of  $\partial\Omega$  which can be controlled by using the convexity of  $\Omega$ .

From the differential inequality (G.1), that yields concavity of the profile under the assumption of non-negative Ricci curvature on  $\Omega$  (Theorem G.3.4), we derive regularity properties of the profile (Proposition G.3.6) and topological consequences related to the connectivity of minimizers and isoperimetric hypersurfaces (Propositions G.3.10 and G.3.8). Similar previous results for closed Riemannian manifolds and for convex bodies in the Euclidean setting were established in [BP], [MJ], [SZ2], [K] and [Ba2].

In Section G.4 we use analytic arguments to obtain geometric comparison theorems. As a matter of fact, integration of the differential inequality (G.1) makes possible to compare the isoperimetric profile of a smooth convex domain  $\Omega$  with compact closure and  $\text{Ricci} \geq n\delta$ , with an exact solution of the differential equation associated to (G.1) that satisfies either the same initial conditions or the same boundary conditions. On the

one hand we prove in Theorem G.4.1 the isoperimetric inequality

$$I_\Omega(V) \leq I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(V), \quad V \in [0, \text{vol}(\Omega)], \quad (\text{G.2})$$

where  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  is a half-space in the simply connected space form with constant sectional curvature  $\delta$ . In Remark G.4.5 we indicate that the geometric arguments employed by F. Morgan and D. Johnson in [MJ, Theorem 3.5] can be adapted to prove that (G.2) is also valid for unbounded convex domains. In Theorem G.4.6 we show that equality in (G.2) for some  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega)]$  implies that  $\partial\Omega$  is a totally geodesic hypersurface and  $\Omega$  has constant sectional curvature  $\delta$  in a neighborhood of  $\partial\Omega$ .

On the other hand, in Corollary G.4.9 we deduce a lower bound for the profile that should be compared with Lévy–Gromov inequality [Gr]. In precise terms, we prove that any Borel set  $E$  contained in a smooth convex body  $\Omega$  with Ricci  $\geq n\delta > 0$ , satisfies

$$\frac{\mathcal{P}(E, \Omega)}{\text{vol}(\Omega)} \geq \frac{\mathcal{P}(E^*, \mathbb{H}_\delta^{n+1})}{\text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})}, \quad (\text{G.3})$$

where  $E^* \subseteq \mathbb{H}_\delta^{n+1}$  is a half-ball centered at  $\partial\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  with  $\text{vol}(E)/\text{vol}(\Omega) = \text{vol}(E^*)/\text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$ . Moreover, inequality (G.3) is sharp since equality for a proper set  $E \subset \Omega$  implies that  $\Omega$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .

Our isoperimetric inequalities in Section G.4 can be used, as in [Ga] and [Ba2], to derive comparison theorems for convex bodies involving geometric quantities such as the volume or the diameter, see Theorem G.2.7, Remark G.4.2 and Theorem G.4.12. Furthermore, by reproducing the symmetrization arguments in [BM, Théorème 5] we prove in Theorem G.4.14 that if Ricci  $\geq n\delta > 0$  on  $\Omega$ , then the lowest non-zero eigenvalue for the Laplace operator in  $\Omega$  with Neumann boundary condition is bounded from below by the one of the half-sphere  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  of radius  $1/\sqrt{\delta}$ , with equality if and only if  $\Omega$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .

Finally, we have added in a last section as an appendix a geometric proof of inequality (G.2) for the case of a smooth convex body  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

As mentioned in [SZ2], in addition to the geometric interest of this work, we remark that the partitioning problem can be linked with a well-studied variational question related to phase transitions (see also [SZ1]).

*Acknowledgements.* The idea of this work was conceived while V. Bayle was visiting the University of Granada in the spring of 2003. The first author was supported by the Marie Curie Research Training Networks “EDGE”, HPRN-CT-2000-00101. The second author was supported by MCyT-Feder research project BFM2001-3489. Both authors express their deep thanks to Manuel Ritoré for his encouragement and helpful comments during the preparation of these notes.

## G.2 Preliminaries

### G.2.1 The isoperimetric profile

Let  $\Omega$  be a smooth domain (connected open set) with compact closure  $\bar{\Omega}$  contained in a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . The  $(n+1)$ -dimensional and the  $k$ -dimensional Hausdorff measures of a Borel set  $E \subseteq M$  will be denoted by  $\text{vol}(E)$  and  $\mathcal{H}_k(E)$  respectively. For any measurable set  $E \subseteq M$ , let  $\mathcal{P}(E, \Omega)$  be the De Giorgi *perimeter* of  $E$  relative to  $\Omega$ , defined as

$$\mathcal{P}(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \text{div} Y \, d\mathcal{H}_{n+1} : g(Y, Y) \leq 1 \right\},$$

where  $Y$  is a smooth vector field over  $M$  with compact support contained in  $\Omega$ , and  $\operatorname{div} Y$  is the divergence of  $Y$  [Ch2, p. 140]. If, for instance,  $E$  has  $C^2$  boundary, then  $\mathcal{P}(E, \Omega) = \mathcal{H}_n(\partial E \cap \Omega)$  by the Gauss–Green theorem.

A set  $E \subseteq M$  is said to be of *finite perimeter in  $\Omega$*  if  $\mathcal{P}(E, \Omega) < \infty$ . We refer to the reader to [Gi], [Z] and [Ch3] for background about perimeter, sets of finite perimeter, and their use in the context of the Geometric Measure Theory.

The *isoperimetric profile* of  $\Omega$  is the function  $I_\Omega : [0, \operatorname{vol}(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  given by

$$I_\Omega(V) = \inf \{ \mathcal{P}(E, \Omega) : E \subseteq \Omega, \operatorname{vol}(E) = V \},$$

where the infimum is taken over sets of finite perimeter in  $\Omega$ . We define the *renormalized isoperimetric profile* of  $\Omega$  as the function  $Y_\Omega = I_\Omega^{(n+1)/n}$ .

Through this paper we shall use the following basic properties of the isoperimetric profile

- $I_\Omega$  is a non-negative function which only vanishes at  $V = 0$  and  $V = \operatorname{vol}(\Omega)$ .
- $I_\Omega(V) = I_\Omega(\operatorname{vol}(\Omega) - V)$ ,  $V \in [0, \operatorname{vol}(\Omega)]$ .
- $I_\Omega$  is a lower semicontinuous function [Gi, Theorems 1.9 and 1.19].

The following proposition is an adaptation of a result by P. Bérard and D. Meyer [BM, App. C], in which the cited authors show that the isoperimetric profile of a closed manifold  $(M^{n+1}, g)$  (i.e., a compact Riemannian manifold without boundary) asymptotically approaches the profile of  $\mathbb{R}^{n+1}$  for small volumes.

**Proposition G.2.1** *Let  $\Omega$  be a smooth domain with compact closure and non-empty boundary in a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . Denote by  $\mathbb{H}^{n+1}$  the half-space  $\{x_{n+1} > 0\}$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Then, the asymptotic behaviour of the isoperimetric profile of  $\Omega$  at the origin is*

$$I_\Omega(V) \underset[V > 0]{V \rightarrow 0} \sim I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V) = 2^{-1/(n+1)} \gamma_{n+1} V^{n/(n+1)},$$

where  $\gamma_{n+1} = \mathcal{H}_n(\mathbb{S}^n) / \mathcal{H}_{n+1}(B(1))^{n/(n+1)}$  stands for the  $(n+1)$ -dimensional Euclidean isoperimetric constant.

As a consequence, the right derivative of the renormalized profile at the origin is given by

$$(Y_\Omega)'_r(0) = 2^{-1/n} \gamma_{n+1}^{(n+1)/n}.$$

*Proof.* The only change with respect to the proof by P. Bérard and D. Meyer that must be taken into account consists in proving a localization lemma as in [BM, p. 531] for any small geodesic ball  $B$  centered at  $\partial\Omega$  and intersected with  $\Omega$ . In precise terms, we need to show that inside  $B \cap \Omega$  the isoperimetric inequality for the relative perimeter infinitesimally behaves as in  $\mathbb{H}^{n+1}$ . This property comes from the fact that  $B \cap \Omega$  is almost isometric to a half-ball in  $\mathbb{H}^{n+1}$  centered at  $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ . Finally, a compactness argument as in [BM] allows us to pass from the localization lemmata to a global isoperimetric inequality.  $\square$

**Remark G.2.2** *The asymptotic behaviour in the proposition above provides upper and lower bounds on the profile for small volumes. In fact, for any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $V(\Omega, \varepsilon) > 0$  such that*

$$(1 - \varepsilon) I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V) \leq I_\Omega(V) \leq (1 + \varepsilon) I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V), \quad \text{whenever } V \leq V(\Omega, \varepsilon).$$

The last inequality and the one given in [BM, App. C] imply that a set  $E$  in  $\Omega$  such that  $\mathcal{P}(E, \Omega) = I_\Omega(V)$  for a small volume  $V$ , must touch the boundary of  $\Omega$ .

Now, we introduce another notion of isoperimetric profile (see [Gr], [Ga] and [Ba2]), which is sometimes more relevant in order to obtain comparison theorems. It is given by the function  $h_\Omega : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , defined for all  $\beta$  in  $[0,1]$  by

$$h_\Omega(\beta) = \frac{I_\Omega(\beta \text{vol}(\Omega))}{\text{vol}(\Omega)}. \quad (\text{G.4})$$

This point of view, which somehow corresponds to the choice of a probability measure on  $\Omega$ , will be considered in the proof of a Lévy-Gromov type inequality (Theorem G.4.8).

### G.2.2 Isoperimetric regions: existence and regularity

Let  $\Omega$  be a smooth domain of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . An *isoperimetric region* -or simply a *minimizer*- in  $\Omega$  for volume  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$  is a set  $E \subseteq \Omega$  such that  $\text{vol}(E) = V$  and  $\mathcal{P}(E, \Omega) = I_\Omega(V)$ .

In the following proposition we summarize some results from Geometric Measure Theory concerning the existence and regularity of isoperimetric regions in  $\Omega$ .

**Proposition G.2.3** ([Gi], [GMT], [G1], [M2], [Bo]) *Let  $\Omega$  be a smooth domain with compact closure in a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . For any  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$  there is an open set  $E \subset \Omega$  which minimizes the perimeter relative to  $\Omega$  for volume  $V$ . The boundary  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  can be written as a disjoint union  $\Sigma \cup \Sigma_0$ , where  $\Sigma$  is the regular part of  $\Lambda$  and  $\Sigma_0 = \Lambda - \Sigma$  is the set of singularities. Precisely, we have*

1.  $\Sigma \cap \Omega$  is a smooth, embedded hypersurface with constant mean curvature.
2. If  $p \in \Sigma \cap \partial\Omega$ , then  $\Sigma$  is a smooth, embedded hypersurface with boundary contained in  $\partial\Omega$  in a neighborhood of  $p$ ; in this neighborhood  $\Sigma$  has constant mean curvature and meets  $\partial\Omega$  orthogonally.
3.  $\Sigma_0$  is a closed set of Hausdorff dimension less than or equal to  $n - 7$ .
4. At every point  $q \in \Sigma_0$  there is a tangent minimal cone  $C \subset T_q M$  different from a hyperplane. The square sum  $|\sigma|^2 = k_1^2 + \dots + k_n^2$  of the principal curvatures of  $\Sigma$  tends to  $\infty$  when we approach  $q$  from  $\Sigma$ .

In the preceding proposition the regular set  $\Sigma$  is defined as follows: for  $p \in \Sigma$  there is a neighborhood  $W$  of  $p$  in  $\Sigma$  such that  $W$  is a smooth, embedded hypersurface without boundary or with boundary contained in  $\partial\Omega$ . Note that a consequence of the proposition above is the absence of interior points in  $\Sigma$  meeting  $\partial\Omega$  tangentially, see [G2].

**Remark G.2.4** *The regular hypersurface  $\Sigma$  associated to a minimizer in  $\Omega$  need not meet the boundary of  $\Omega$ . An example illustrating this situation can be found at the end of Section 2 in [RR].*

### G.2.3 An analytic comparison result

Let  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  be a function defined on an open interval. For any  $x_0 \in I$  we denote by  $\overline{D^2 f}(x_0)$  the *upper second derivative* of  $f$  at  $x_0$ , defined by

$$\overline{D^2 f}(x_0) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}. \quad (\text{G.5})$$

The main tool that we shall employ in Section G.4 to derive comparison theorems from differential inequalities is the following technical result. A detailed development is included in [Ba1] and will appear in a forthcoming paper.

**Theorem G.2.5** *Let  $f, g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous functions with positive values on  $(0, a)$ . Let  $H : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  be the function  $H(x) = -\alpha\delta x^{(2-\alpha)/\alpha}$ , where  $\delta \in \mathbb{R}$  and  $\alpha \geq 2$ . Suppose that  $f$  satisfies the second order differential inequality*

$$\overline{D^2 f}(x) \leq H[f(x)], \quad x \in (0, a),$$

while  $g$  is a  $C^2$ -function that satisfies the differential equation

$$g''(x) = H[g(x)], \quad x \in (0, a).$$

Then, we have

- (i) *If  $f(0) = g(0)$  and  $f(a) = g(a)$ , then  $f \geq g$  on  $[0, a]$ . Moreover, if  $f(x_0) = g(x_0)$  for some  $x_0 \in (0, a)$ , then  $f = g$  on  $[0, a]$ .*
- (ii) *If  $f(0) = g(0)$  and the right derivatives at the origin verify  $f'_r(0) \leq g'_r(0) < +\infty$ , then  $f \leq g$  on  $[0, a]$ . Moreover, if  $f(x_0) = g(x_0)$  for some  $x_0 \in (0, a]$ , then  $f = g$  on  $[0, x_0]$ .*

The theorem above can be seen as a generalization of the fact that a concave function  $f$  on  $[0, a]$  is pinched between any tangent line and the secant line passing through  $(0, f(0))$  and  $(a, f(a))$ .

## G.2.4 Convex domains in Riemannian manifolds

The term “convex domain” is used in different non-equivalent ways in the literature. We adopt the following definition:

Let  $\Omega$  be a domain of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . We say that  $\Omega$  is *convex* if any two points  $p, q \in \Omega$  can be joined by a minimizing geodesic of  $M$  which is contained in  $\Omega$ . A convex domain  $\Omega$  with compact closure in  $M$  will be called a *convex body*.

The convexity of a smooth domain  $\Omega$  implies the *local convexity* of  $\partial\Omega$ , which means that all the geodesics in  $M$  tangent to  $\partial\Omega$  are locally outside of  $\Omega$ . As R. Bishop proved ([Bi]), the local convexity of  $\partial\Omega$  is equivalent to an analytic condition (the so-called *infinitesimal convexity*) involving the second fundamental form of  $\partial\Omega$ . As a consequence, we have

*“A smooth convex domain  $\Omega$  of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$  satisfies that the second fundamental form  $\Pi_p$  of  $\partial\Omega$  with respect to the normal pointing into  $\Omega$  is positive semidefinite at any  $p \in \partial\Omega$ ”.*

**Remark G.2.6** *Most of the results of the paper in which the convexity of  $\Omega$  is assumed are also valid under the weaker condition that  $\Pi_p$  is positive semidefinite at any  $p \in \partial\Omega$ .*

The following result is an application to the setting of convex bodies of two well-known comparison theorems in Riemannian Geometry. It will be useful in order to show that our isoperimetric inequalities in Section G.4 are sharp.

**Theorem G.2.7** *Let  $\Omega$  be a smooth convex domain of a complete Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . Denote by  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  the  $(n+1)$ -dimensional half-sphere of radius  $1/\sqrt{\delta}$ . If the Ricci curvature of  $M$  satisfies  $\text{Ricci} \geq n\delta > 0$  on  $\Omega$ , then*

- (i)  $\overline{\Omega}$  is compact and  $\text{diam}(\Omega) \leq \pi/\sqrt{\delta}$  (Bonnet–Myers Theorem).
- (ii) *If  $\partial\Omega \neq \emptyset$  then  $\text{vol}(\Omega) \leq \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$  and equality implies that  $\partial\Omega$  is totally geodesic in  $M$  and  $\Omega$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  (Bishop’s Theorem).*

*Proof.* Assertion (i) is a consequence of the Bonnet–Myers theorem ([Ch2, Theorem 2.12]). Now we give an outline of the proof of (ii) which follows the arguments in [Ch2, Theorem 3.9]. Fix  $p \in \partial\Omega$  and call  $\nu$  to the unit normal vector to  $\partial\Omega$  at  $p$  pointing into  $\Omega$ . Denote  $\nu^+ = \{\eta \in T_p M : g_p(\eta, \eta) = 1, g_p(\eta, \nu) > 0\}$ . For any  $\eta \in \nu^+$  let  $\gamma_\eta$  be the unique geodesic in  $M$  such that  $\gamma_\eta(0) = p$  and  $\gamma'_\eta(0) = \eta$ . Let also denote

$$\begin{aligned} c(\eta) &= \sup \{t > 0 : \text{dist}(p, \gamma_\eta(t)) = t\}, \\ d(\eta) &= \sup \{t > 0 : \gamma_\eta((0, t]) \subset \Omega\}. \end{aligned}$$

Let  $C(p)$  be the cut locus of  $p$  in  $M$ . By the convexity of  $\Omega$  we have

$$\Omega \setminus C(p) = \{\gamma_\eta(t) : \eta \in \nu^+, t \in (0, m(\eta))\},$$

where  $m(\eta) = \min\{c(\eta), d(\eta)\}$  is continuous as function of  $\eta \in \nu^+$ . Call  $J(t, \eta)$  to the Jacobian determinant of the map  $(t, \eta) \in (0, \infty) \times \nu^+ \mapsto \gamma_\eta(t)$ . By using the integration formula for polar geodesic coordinates around  $p$  and Bishop's Theorem [Ch2, Theorem 3.8], we get

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \int_{\nu^+} \left( \int_0^{m(\eta)} J(t, \eta) dt \right) d\eta \leq \int_{\nu^+} \left( \int_0^{m(\eta)} S_\delta(t)^n dt \right) d\eta \quad (\text{G.6}) \\ &\leq \int_{\nu^+} \left( \int_0^{\pi/\sqrt{\delta}} S_\delta(t)^n dt \right) d\eta = \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1}), \end{aligned}$$

where  $S_\delta(t) = \sin(\sqrt{\delta}t)/\sqrt{\delta}$  and we have used (i) to write  $m(\eta) \leq \pi/\sqrt{\delta}$ .

If equality holds in (G.6), then  $m(\eta) = \pi/\sqrt{\delta}$  for all  $\eta \in \nu^+$  and  $\Omega \setminus C(p)$  has constant sectional curvature  $\delta$  with respect to any plane containing a tangent vector to a geodesic  $\gamma_\eta$ . As consequence,  $\Omega \setminus C(p)$  is a geodesic half-ball  $B$  centered at  $p$  with radius  $\pi/\sqrt{\delta}$  and we deduce, as in the local Cartan's theorem [Ch2, Exercise 3.1], that  $B$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ . From this, it is easy to see that  $\Omega \cap C(p) = \emptyset$  and  $\partial\Omega = \{\gamma_\eta(t) : \eta \in T_p(\partial\Omega), t \in [0, \pi/\sqrt{\delta}]\}$ .  $\square$

**Remark G.2.8** *In the theorem above we assume Ricci  $\geq n\delta > 0$  only in  $\Omega$ . In Section G.4 we shall see that the two geometric inequalities in Theorem G.2.7 can be obtained by using isoperimetric comparisons. In Theorem G.4.12 we characterize the half-spheres as the only convex domains for which equality in Theorem G.2.7 (i) holds.*

### G.3 The differential inequality

Let  $\Omega$  be a smooth convex body of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . Our main goal in this section is to prove that the renormalized isoperimetric profile  $Y_\Omega$  satisfies a differential inequality as that as in (G.1). We shall then derive some immediate consequences related to the regularity of the profile and the connectivity of isoperimetric regions in  $\Omega$ .

Let us start with the proof of the differential inequality. As we pointed out in Section G.1, the idea of the proof consists in a local comparison of  $Y_\Omega$  with the relative profiles associated to “almost parallel variations” of a minimizer  $E$  in  $\Omega$  for a fixed volume  $V_0$ . These variations will be constructed by using the following lemma

**Lemma G.3.1** *Let  $E$  be an isoperimetric region inside a smooth domain  $\Omega$  with compact closure in a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . Denote by  $\Sigma$  the regular part of*

$\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$ . Then, there is a sequence  $\{\varphi_\varepsilon : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}\}_{\varepsilon>0}$  of smooth functions with compact support in  $\Sigma$ , such that

- (i)  $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ ,  $\varepsilon > 0$ .
- (ii)  $\{\varphi_\varepsilon\} \rightarrow 1$  in the Sobolev space  $H^1(\Sigma)$ , that is

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}_n = \mathcal{P}(E, \Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 d\mathcal{H}_n = 0,$$

where  $\nabla \varphi_\varepsilon$  is the gradient of  $\varphi_\varepsilon$  relative to  $\Sigma$ .

- (iii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(p) = 1$ ,  $p \in \Sigma$ .

A complete proof of the lemma above when  $\Omega$  is a Euclidean domain can be found in [SZ2, Lemma 2.4]. The general case is treated in a similar way, see [MR] and [Ba2, Proposition 1.1] for further details. In [MR, Lemma 3.1] it was shown that the existence of  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  is guaranteed for a bounded, constant mean curvature hypersurface  $\Sigma$  with a closed singular set  $\Sigma_0 = \overline{\Sigma} - \Sigma$  such that  $\mathcal{H}_{n-2}(\Sigma_0) = 0$  or consisting of isolated points.

Now, we can prove the main result of this section. Recall that  $\overline{D^2 f}(x_0)$  denotes the upper second derivative of a function  $f$  at  $x_0$ , as defined in (G.5).

**Theorem G.3.1** *Let  $\Omega$  be a smooth convex body of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . Suppose that the Ricci curvature of  $M$  satisfies  $\text{Ricci} \geq n\delta$  on  $\Omega$ . Then, the renormalized isoperimetric profile  $Y_\Omega = I_\Omega^{(n+1)/n}$  verifies*

$$\overline{D^2 Y_\Omega}(V) \leq -(n+1) \delta Y_\Omega(V)^{(1-n)/(1+n)}, \quad V \in (0, \text{vol}(\Omega)). \quad (\text{G.7})$$

If equality holds for some  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$  then the boundary  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  of any minimizer  $E$  in  $\Omega$  of volume  $V_0$  is a smooth, totally umbilical hypersurface such that

$$\text{Ric}(N, N) \equiv n\delta \text{ on } \Lambda \quad \text{and} \quad \text{II}(N, N) \equiv 0 \text{ on } \Lambda \cap \partial\Omega,$$

where  $N$  is the unit normal to  $\Lambda$  which points into  $E$ , and  $\text{II}$  is the second fundamental form of  $\partial\Omega$  with respect to the inner normal.

Moreover, if  $\Omega$  coincides with the half-space  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  in the simply connected space form with constant sectional curvature  $\delta$ , then equality holds in (G.7) for any  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$ .

*Proof.* Fix  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$ . By Proposition G.2.3 there is a minimizer  $E$  in  $\Omega$  of volume  $V_0$ . By the same result, the regular part  $\Sigma$  of  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  is a smooth, embedded hypersurface which meets  $\partial\Omega$  orthogonally. The mean curvature of  $\Sigma$  with respect to the unit normal  $N$  pointing into  $E$  is a constant  $H_0$ . The boundary  $\Sigma \cap \partial\Omega$  could be empty, see Remark G.2.4. In this case, we adopt the convention that the integrals over  $\Sigma \cap \partial\Omega$  are all equal to 0.

Consider a sequence of functions  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  as obtained in Lemma G.3.1. Fix  $\varepsilon > 0$  and take a smooth vector field  $X_\varepsilon$  with compact support over  $M$ , such that  $X_\varepsilon(q) \in T_q(\partial\Omega)$  whenever  $q \in \partial\Omega$  and  $X_\varepsilon = \varphi_\varepsilon N$  in  $\Sigma$ . The flow of diffeomorphisms  $\{\phi_t\}_{t \in (-\gamma, \gamma)}$  of  $X_\varepsilon$  in  $\overline{\Omega}$  induces a variation  $\{E_t = \phi_t(E)\}_t$  of  $E$  through sets of finite perimeter contained in  $\Omega$ . Call  $\mathcal{P}_\varepsilon(t) = \mathcal{P}(E_t, \Omega)$  and  $V_\varepsilon(t) = \text{vol}(E_t)$ . By the first variation for perimeter and volume

$$\mathcal{P}'_\varepsilon(0) = \int_{\Sigma} \text{div}_\Sigma X_\varepsilon d\mathcal{H}_n = - \int_{\Sigma} n H_0 \varphi_\varepsilon d\mathcal{H}_n, \quad (\text{G.8})$$

$$V'_\varepsilon(0) = \int_E \text{div} X_\varepsilon d\mathcal{H}_{n+1} = - \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon d\mathcal{H}_n, \quad (\text{G.9})$$



where  $\operatorname{div}_\Sigma$  is the divergence relative to  $\Sigma$ . As  $V'_\varepsilon(0) < 0$ , we can write  $t$  as a function of the volume  $V = V(t)$  for  $V$  close to  $V_0$ ; hence, we can define  $\mathcal{P}_\varepsilon(V) = \mathcal{P}_\varepsilon[t(V)]$ .

Now, consider the function  $g_\varepsilon(V) = \mathcal{P}_\varepsilon(V)^{(n+1)/n}$  defined on a neighborhood of  $V_0$ . By using the definition of isoperimetric profile and the fact that  $E$  is a minimizer, it is clear that

$$Y_\Omega(V) \leq g_\varepsilon(V), \quad Y_\Omega(V_0) = g_\varepsilon(V_0),$$

from which we deduce

$$\overline{D^2 Y_\Omega}(V_0) \leq \overline{D^2 g_\varepsilon}(V_0) = \left(\frac{n+1}{n}\right) \mathcal{P}_\varepsilon(V_0)^{1/n} \left\{ \frac{1}{n} \mathcal{P}'_\varepsilon(V_0)^2 \mathcal{P}_\varepsilon(V_0)^{-1} + \mathcal{P}''_\varepsilon(V_0) \right\}. \quad (\text{G.10})$$

Now, we shall compute the derivatives  $\mathcal{P}'_\varepsilon(V_0)$  and  $\mathcal{P}''_\varepsilon(V_0)$ . The first one is calculated by using (G.8) and (G.9). We get

$$\mathcal{P}'_\varepsilon(V_0) = \mathcal{P}'_\varepsilon(0) V'_\varepsilon(0)^{-1} = nH_0. \quad (\text{G.11})$$

On the other hand, the calculation of  $\mathcal{P}''_\varepsilon(V_0)$  requires second variation of perimeter and volume. By following the proof of [SZ2, Theorem 2.5] (in fact, the only change is that a new term involving the Ricci curvature appears), it is obtained

$$\begin{aligned} \mathcal{P}''_\varepsilon(V_0) &= \left( \int_\Sigma \varphi_\varepsilon d\mathcal{H}_n \right)^{-2} \\ &\times \left[ \int_\Sigma (|\nabla \varphi_\varepsilon|^2 - (\operatorname{Ricci}(N, N) + |\sigma|^2) \varphi_\varepsilon^2) d\mathcal{H}_n - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \operatorname{II}(N, N) \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}_{n-1} \right], \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

where  $|\sigma|^2$  is the squared sum of the principal curvatures of  $\Sigma$  with respect to  $N$ , and  $\operatorname{II}$  is the second fundamental form of  $\partial\Omega$  with respect to the inner normal.

Now, if we take  $\limsup$  in the equality above when  $\varepsilon \rightarrow 0$  and we use Lemma G.3.1 together with Fatou's Lemma, we have

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}''_\varepsilon(V_0) &\leq -\mathcal{P}(E, \Omega)^{-2} \left[ \int_\Sigma (\operatorname{Ric}(N, N) + |\sigma|^2) d\mathcal{H}_n + \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \operatorname{II}(N, N) d\mathcal{H}_{n-1} \right] \\ &\leq -n(\delta + H_0^2) \mathcal{P}(E, \Omega)^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

where in the last inequality we have used the assumption on the Ricci curvature, the well-known inequality  $|\sigma|^2 \geq nH_0^2$ , and the convexity of  $\Omega$ .

Thus, if we pass to the limit in (G.10) and we use (G.11) together with (G.13), we deduce

$$\begin{aligned} \overline{D^2 Y_\Omega}(V_0) &\leq \left(\frac{n+1}{n}\right) \mathcal{P}(E, \Omega)^{1/n} \left\{ nH_0^2 \mathcal{P}(E, \Omega)^{-1} + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}''_\varepsilon(V_0) \right\} \\ &\leq -(n+1) \delta \mathcal{P}(E, \Omega)^{(1-n)/n} = -(n+1) \delta Y_\Omega(V_0)^{(1-n)/(1+n)}, \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

and (G.7) is proved. Moreover, if equality holds in (G.14) then we also have equality in (G.13), and so  $\Sigma$  is totally umbilical,  $\operatorname{Ricci}(N, N) \equiv n\delta$  on  $\Sigma$ , and  $\operatorname{II}(N, N) \equiv 0$  on  $\Sigma \cap \partial\Omega$ . Furthermore, the singular set  $\Sigma_0 = \Lambda - \Sigma$  is empty by Proposition G.2.3 (iv) since  $|\sigma|^2$  is bounded.

Finally, suppose that  $\Omega = \mathbb{H}_\delta^{n+1}$ . By reflecting with respect to  $\partial\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  we get that any minimizer in  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  is obtained by intersecting a geodesic ball  $B$  centered at  $\partial\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  with

$\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ . As  $\partial B$  is a totally umbilical hypersurface and  $\partial\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  is totally geodesic, we have equality in (G.13). On the other hand, equality holds in the first inequality of (G.14) since  $Y_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}$  equals the renormalized profile  $\mathcal{P}(V)^{(n+1)/n}$  given by parallel hypersurfaces to  $\partial B \cap \mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .  $\square$

**Remark G.3.2** *By using the profile  $h_\Omega$  defined in (G.4) we easily see that Theorem G.3.1 is also valid for the renormalized profile  $y_\Omega = h_\Omega^{(n+1)/n}$ . In particular,*

$$\overline{D^2 y_\Omega}(\beta) \leq -(n+1) \delta y_\Omega(\beta)^{(1-n)/(1+n)}, \quad \beta \in (0,1), \quad (\text{G.15})$$

with equality for all  $\beta \in (0,1)$  when  $\Omega$  coincides with  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  ( $\delta > 0$ ).

**Remark G.3.3** *Let  $M$  be a closed Riemannian manifold with  $\text{Ricci} \geq n\delta$ . Then,  $M$  can be seen as a convex body  $\Omega$  with  $\partial\Omega = \emptyset$ , and the proof of (G.7) remains valid with the only change that the terms involving  $\Sigma \cap \partial\Omega$  vanish. With a similar proof, V. Bayle [Ba2, Theorem 1.1] proved that (G.7) holds for the renormalized profile  $y_M = h_M^{(n+1)/n}$ . Another type of differential inequality for the isoperimetric profile  $I_M$  was previously established by F. Morgan and D. Johnson [MJ, Proposition 3.3].*

The remainder of this section is devoted to deduce some immediate consequences of Theorem G.3.1.

One of the easiest and most obvious applications of the differential inequality (G.7) is the following theorem. The proof only uses the fact that a lower semicontinuous function on an interval  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\overline{D^2 f} \leq 0$  in the interior of  $I$  must be concave ([Ba1]).

**Theorem G.3.4** *Let  $\Omega$  be a smooth convex body of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$  with non-negative Ricci curvature. Then, the renormalized profile of  $\Omega$  is concave. As consequence, the isoperimetric profile  $I_\Omega$  is concave and, therefore, increasing on  $[0, \text{vol}(\Omega)/2]$ .*

**Remark G.3.5** *The concavity of the profile of a smooth convex body  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  was obtained by P. Sternberg and K. Zumbrun [SZ2, Theorem 2.8]. The observation that, in fact, the renormalized profile of  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  is concave is due to E. Kuwert [K].*

Now, we generalize to the setting of convex bodies the regularity properties obtained for the isoperimetric profile of a closed Riemannian manifold (see [BP], [MJ] and [Ba2]). As an analytic outcome of Theorem G.3.4 we have that, under non-negative Ricci curvature, the isoperimetric profile of  $\Omega$  has the regularity properties of concave functions. In the following proposition we show that no assumption on the Ricci curvature is needed.

**Proposition G.3.6** *Let  $\Omega$  be a smooth convex body of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . Then the renormalized isoperimetric profile  $Y_\Omega$  has left and right derivatives satisfying*

$$(Y_\Omega)'_l(V) \geq (Y_\Omega)'_r(V), \quad V \in (0, \text{vol}(\Omega)).$$

As a consequence,  $(Y_\Omega)'_l(\text{vol}(\Omega)/2)$  is non-negative. Moreover,  $Y_\Omega$  is differentiable on the interval  $(0, \text{vol}(\Omega))$  except on an at most countable set.

As to the isoperimetric profile  $I_\Omega$ , it has left and right derivatives for every  $V$  in  $(0, \text{vol}(\Omega))$ , such that

$$(I_\Omega)'_l(V) \geq nH_E \geq (I_\Omega)'_r(V),$$

where  $H_E$  is the inward mean curvature associated to a minimizer  $E$  in  $\Omega$  of volume  $V$ . As a consequence,  $(I_\Omega)'_l(\text{vol}(\Omega)/2)$  is non-negative. Furthermore,  $I_\Omega$  is differentiable on  $(0, \text{vol}(\Omega))$  except on an at most countable set.

*Proof.* The regularity properties and the inequality between the side derivatives come from the differential inequality (G.7), which implies that locally around  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$  the renormalized profile  $Y_\Omega$  is concave, up to the addition of a constant times  $(V - V_0)^2$ . Now fix  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$  and take a minimizer  $E$  in  $\Omega$  of volume  $V_0$ . Let  $\mathcal{P}(V)$  be the relative profile associated to an almost parallel variation of  $E$  as constructed in the proof of Theorem G.3.1. It is obvious that  $I_\Omega(V) \leq \mathcal{P}(V)$  for  $V$  close to  $V_0$ , and  $I_\Omega(V_0) = \mathcal{P}(V_0)$ . As  $\mathcal{P}'(V_0) = nH_E$  (see (G.11)) we deduce that  $(I_\Omega)'_l(V_0) \geq nH_E \geq (I_\Omega)'_r(V_0)$ .  $\square$

**Remark G.3.7** *The asymptotic behaviour of the profile given in Proposition G.2.1 allows us to deduce the following consequences from Proposition G.3.6*

- (i)  $I_\Omega$  is continuous on  $[0, \text{vol}(\Omega)]$ .
- (ii)  $\lim_{V \rightarrow 0} (I_\Omega)'_r(V) = +\infty$ .
- (iii) *The inward mean curvature associated to a minimizer in  $\Omega$  explodes when the enclosed volume tends to zero.*

We finish this section by showing some topological restrictions related to the connectivity of minimizers inside a convex body. We derive them by using a well-known argument (see [SZ2] and [MJ]), which relies on the second variation formula of perimeter (G.12).

**Proposition G.3.8** *Let  $\Omega$  be a smooth convex body of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$  such that  $\text{Ricci} \geq n\delta$  on  $\Omega$ . Denote by  $\text{II}$  the second fundamental form of  $\partial\Omega$  with respect to the inner normal. Let  $E$  be an isoperimetric region in  $\Omega$ ,  $\Sigma$  the regular part of  $\overline{\partial E} \cap \overline{\Omega}$ , and  $N$  the normal to  $\Sigma$  pointing into  $E$ . Then*

- (i) *If  $\delta > 0$ , then  $\Sigma$  is connected.*
- (ii) *If  $\delta = 0$  and  $\Sigma$  consists of more than one component, then  $\Sigma$  is totally geodesic and we have  $\text{Ricci}(N, N) \equiv 0$  in  $\Sigma$  and  $\text{II}(N, N) \equiv 0$  in  $\Sigma \cap \partial\Omega$ . As consequence, if  $\Sigma$  is non-connected, and  $\Omega$  is strictly convex in the sense that  $\text{II} > 0$ , then  $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$ .*
- (iii) *If  $\delta \leq 0$ , then there exists  $V_1 \in (0, \text{vol}(\Omega))$  such that  $\Sigma$  is connected if  $\text{vol}(E) \leq V_1$ .*

*Proof.* Call  $V_0 = \text{vol}(E)$  and denote by  $H_0$  the mean curvature of  $\Sigma$  with respect to  $N$ . Let  $\Sigma'$  be a component of  $\Sigma$  and  $\{\varphi_\varepsilon\} \subset C_0^\infty(\Sigma')$  a sequence as in Lemma G.3.1. By following the proof of Theorem G.3.1 we consider almost parallel variations of  $E$  and the associated perimeter functions  $\mathcal{P}_\varepsilon(V)$ . Call  $\alpha(V_0) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varepsilon''(V_0)$ . From (G.13) we know that

$$(*) \quad \alpha(V_0) \leq -n(\delta + H_0^2) \mathcal{P}(E, \Omega)^{-1},$$

due to the hypothesis on the Ricci curvature, the convexity of  $\Omega$  and the inequality  $|\sigma|^2 \geq nH_0^2$ .

We assert that  $\alpha(V_0) < 0$  implies that  $\Sigma$  is connected. Otherwise, we would use almost parallel variations with  $\varepsilon \approx 0$  to expand one component  $\Sigma_1$  and shrink another one  $\Sigma_2$  so that the resulting variation preserves volume while reducing perimeter, see [SZ2, Theorem 2.6] for details; this would give us a contradiction with the minimality of  $E$ .

Now we distinguish two cases. If  $\delta \geq 0$ , then  $\alpha(V_0) \leq 0$  and an easy discussion of equality cases in (\*) proves the claim. If  $\delta \leq 0$ , then the explosion of the mean curvature for small volumes (Remark G.3.7 (iii)) yields the existence of  $V_1$  such that  $\alpha(V) < 0$  for  $V \in [0, V_1]$ .  $\square$

**Remark G.3.9** *Topological restrictions on isoperimetric hypersurfaces inside a Euclidean convex body were obtained by A. Ros and E. Vergasta [RV] and by P. Sternberg and K. Zumbrun [SZ2]. On the one hand, statement (ii) in the proposition above is proved*

in [SZ2, Theorem 2.6] for a convex body  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Furthermore, it is shown that strict convexity of  $\Omega$  implies that  $\Sigma$  is connected. We must point out that, in general, this cannot be achieved when  $\Omega$  is not a Euclidean domain since  $\Sigma \cap \partial\Omega$  could be empty, see Remark G.2.4. On the other hand, in [RV, Theorem 5] some conditions on the genus  $g$  and the number  $r$  of boundary components of  $\Sigma$  are obtained when  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . In precise terms, they proved that the only possible values for  $g$  and  $r$  are

- (i)  $g = 0$  and  $r = 1, 2$  or  $3$ ;
- (ii)  $g = 2$  or  $3$  and  $r = 1$ .

It has been recently conjectured that an isoperimetric hypersurface inside a strictly convex body of  $\mathbb{R}^3$  must be homeomorphic to a disk ([Ro]).

Let  $\Omega$  be a smooth convex body of a Riemannian manifold and let  $n\delta$  be a lower bound on the Ricci curvature of  $\Omega$ . By Proposition G.3.8 we have that a minimizer  $E$  in  $\Omega$  is connected when  $\delta > 0$ , or when  $\delta \leq 0$  and  $\text{vol}(E)$  is small enough. At first, the second variation of perimeter is not sufficient, in the case  $\delta \leq 0$ , to discard a minimizer with finitely many components bounded by totally geodesic hypersurfaces. However, by using that the profile is concave when  $\delta = 0$  we can prove

**Proposition G.3.10** *Let  $\Omega$  be a smooth convex body of a Riemannian manifold with non-negative Ricci curvature. Then, isoperimetric regions in  $\Omega$  are connected.*

*Proof.* Suppose that  $E$  is a minimizer of volume  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$  and that  $E_1$  is a connected component of  $E$  with volume  $V_1 < V_0$ . By the definition of isoperimetric profile and the fact that the set of singularities in  $\overline{\partial E \cap \Omega}$  does not contribute to perimeter, we get

$$I_\Omega(V_0) = \mathcal{P}(E, \Omega) = \mathcal{P}(E_1, \Omega) + \mathcal{P}(E - E_1, \Omega) \geq I_\Omega(V_1) + I_\Omega(V_0 - V_1).$$

On the other hand, the concavity of  $Y_\Omega$  (Theorem G.3.4) gives us

$$Y_\Omega(V_0) \leq Y_\Omega(V_1) + Y_\Omega(V_0 - V_1),$$

and so, as  $I_\Omega(V_1)$  and  $I_\Omega(V_0 - V_1)$  are positive, and since the function  $x \mapsto x^{\frac{n}{n+1}}$  is strictly concave, we deduce

$$I_\Omega(V_0) < I_\Omega(V_1) + I_\Omega(V_0 - V_1),$$

which leads us to a contradiction. This proves that  $V_1 = V_0$ , and  $E$  is therefore connected.  $\square$

## G.4 Comparison theorems

In this section, we shall integrate the differential inequality (G.7) in order to prove comparison theorems for the isoperimetric profile of a smooth convex body  $\Omega$  in a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . The underlying philosophy of these results consists in using the analytic Theorem G.2.5 to compare a profile  $f$ , which can be  $Y_\Omega$  or the function  $y_\Omega$  defined in Remark G.3.2, with a solution  $g$  of the differential equation associated to (G.7) having the same initial conditions or the same boundary values as  $f$ . In the first case we shall obtain an upper bound for the profile  $I_\Omega$ , while in the second one, we shall deduce a lower bound for  $h_\Omega$  that can be interpreted as a Lévy-Gromov type inequality. We must remark that both comparisons are quite different although they arise from the

same differential inequality. A detailed analysis of equality cases will allow us to deduce global geometric consequences on  $\Omega$ .

Through this section we also illustrate how to use our isoperimetric inequalities to deduce other geometric and analytic comparisons. In this way, we give alternative proofs of the inequalities in Theorem G.2.7, and we characterize the half-spheres as the only convex domains for which equality in Theorem G.2.7 (i) holds. Finally, we prove a comparison result for the first non-zero Neumann eigenvalue of the Laplace operator on  $\Omega$  that can be seen as a generalization of the Obata–Lichnerowicz theorem [Ch, Theorem 9, p. 82].

#### G.4.1 Upper bounds on the isoperimetric profile

**Theorem G.4.1** *Let  $\Omega$  be a smooth convex body with non-empty boundary of a complete Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . Suppose that the Ricci curvature of  $M$  satisfies  $\text{Ricci} \geq n\delta$  on  $\Omega$ . Then*

$$I_\Omega(V) \leq I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(V), \quad V \in [0, \text{vol}(\Omega)], \quad (\text{G.16})$$

where  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  is a half-space in the  $(n+1)$ -dimensional simply connected space form with constant sectional curvature  $\delta$ .

If equality holds in (G.16) for some  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega)]$ , then  $I_\Omega = I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}$  on  $[0, V_0]$ , and the boundary  $\overline{\partial E} \cap \Omega$  of any minimizer  $E$  in  $\Omega$  of volume  $V \in (0, V_0)$  is a smooth, totally umbilical hypersurface. Moreover, if  $V_0 = \text{vol}(\Omega)$  (which implies  $\delta > 0$ ) then  $\Omega$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .

*Proof.* The comparison arises from the fact that a continuous solution of the differential inequality (G.7) is bounded from above by a solution of the differential equation

$$f'' = -(n+1)\delta f^{(1-n)/(1+n)} \quad (\text{G.17})$$

with the same initial conditions (Theorem G.2.5). Then, by using that the renormalized profile of  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  satisfies (G.17) (see Theorem G.3.1) and taking into account the asymptotic behaviour of the renormalized profile  $Y_\Omega$  at the origin (Proposition G.2.1), we obtain

$$Y_\Omega(V) \leq Y_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(V), \quad V \in [0, \min\{\text{vol}(\Omega), \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})\}]. \quad (\text{G.18})$$

From the inequality above we get (G.16) once we show that  $\text{vol}(\Omega) \leq \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$ . This volume comparison is trivial if  $\delta \leq 0$  while in the case  $\delta > 0$ , the opposite inequality would allow us to deduce from (G.18) that  $Y_\Omega(\text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})) \leq 0$ , which is a contradiction since the profile is positive in  $(0, \text{vol}(\Omega))$ .

Finally, if both profiles coincide at  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$  then they must coincide in  $[0, V_0]$  by Theorem G.2.5. The umbilicity of a minimizer of volume  $V < V_0$  follows from the discussion, given in Theorem G.3.1, of equality cases in (G.7). If  $V_0 = \text{vol}(\Omega)$  then  $\text{vol}(\Omega) = \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$  and  $\Omega$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  by Theorem G.2.7 (ii).  $\square$

**Remark G.4.2** *Note that we have given another proof of the volume comparison  $\text{vol}(\Omega) \leq \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$  of Theorem G.2.7 (ii) by using the isoperimetric inequality (G.18).*

**Remark G.4.3** *When  $n = 1$  the differential inequality (G.7) turns out to be linear and Theorem G.16 follows since the function  $E(V) = Y_\Omega(V) - Y_{\mathbb{H}_\delta^2}(V)$  is concave on*

$[0, \text{vol}(\Omega)]$  and the tangent line at the origin coincides with the  $x$ -axis. After an explicit calculation of  $Y_{\mathbb{H}_\delta^2}$ , inequality (G.16) reads

$$I_\Omega^2(V) \leq V(2\pi - \delta V), \quad V \in [0, \text{vol}(\Omega)].$$

**Remark G.4.4** For a closed Riemannian manifold  $M$  with  $\text{Ricci} \geq n\delta$  the integration of the differential inequality (G.7) would give us the comparison

$$I_M \leq I_{\mathbb{M}_\delta^{n+1}}, \quad V \in [0, \text{vol}(M)], \tag{G.19}$$

where  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  stands for the  $(n+1)$ -dimensional simply connected space form with constant sectional curvature  $\delta$ . This result was previously proved by F. Morgan and D. Johnson [MJ, Theorem 3.4].

**Remark G.4.5** Inequality (G.16) is also valid for a smooth, unbounded, convex domain  $\Omega$  with non-empty boundary and  $\text{Ricci} \geq n\delta$ . This can be proved by showing, as was done in [MJ, Theorem 3.5] for closed Riemannian manifolds, that the perimeter in  $\Omega$  of a “half-ball”  $B = \Omega \cap B(p, r)$  centered at a point  $p \in \partial\Omega$  is less than or equal to the area of the geodesic half-ball  $\tilde{B}$  in  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  of the same volume, with equality only if  $B$  is isometric to  $\tilde{B}$  and  $\partial\Omega$  is geodesic at  $p$ . The arguments in the proof by F. Morgan and D. Johnson rely on comparison theorems involving the volume of metric balls ([Ch2, Theorem 3.9]) and the area of metric spheres ([Ch2, Proposition 3.3]). These theorems do not use the compactness of the ambient manifold and can be generalized to our setting by following the scheme in the proof of Theorem G.2.7.

This alternative proof of (G.16) also allows us to deduce geometric consequences on  $\Omega$  when we have equality in (G.16). We summarize them in the next result

**Theorem G.4.6** Let  $\Omega$  be a smooth convex domain with  $\text{Ricci} \geq n\delta$  in a complete Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . Then

- (i) If  $\Omega$  has non-empty boundary then (G.16) holds, and equality for some  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$  implies that  $\partial\Omega$  is totally geodesic in  $M$  and  $\Omega$  has constant sectional curvature  $\delta$  in a neighborhood of  $\partial\Omega$ .
- (ii) If  $\partial\Omega = \emptyset$  then (G.19) holds, and equality for some  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$  implies that  $M$  is isometric to a quotient of the simply connected space form  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  with constant sectional curvature  $\delta$ .

**Remark G.4.7** In general, we cannot improve statement (i) in the theorem above to the stronger conclusion that equality in (G.16) for some  $V_0$  implies that  $\Omega$  has constant sectional curvature  $\delta$ . For example, denote by  $\Omega$  the domain obtained from attaching the half-sphere of  $\mathbb{S}^2$  centered at the north pole to the compact cylinder  $\mathbb{S}^1 \times [-1, 0]$  through the circle  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ . It is clear that  $I_\Omega = I_{\mathbb{H}_0^2}$  for small values; however,  $\Omega$  is not a flat domain.

### G.4.2 A Lévy-Gromov type inequality for convex bodies

Let  $(M^{n+1}, g)$  be a closed Riemannian manifold with  $\text{Ricci} \geq n\delta > 0$ . Denote by  $h_M$  the profile of  $M$  as defined in (G.4). Lévy-Gromov inequality [Gr] states that

$$h_M(\beta) \geq h_{\mathbb{M}_\delta^{n+1}}(\beta), \quad \beta \in [0, 1], \tag{G.20}$$

where  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  is an  $(n+1)$ -dimensional sphere of radius  $1/\sqrt{\delta}$ . Moreover, if equality holds in (G.20) for some  $\beta \in (0, 1)$ , then  $M$  is isometric to  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ .

Inequality (G.20) can be obtained by integrating a differential inequality similar to (G.7), see [Ba1]. With a similar technique, we generalize (G.20) to the setting of convex bodies.

**Theorem G.4.8** *Let  $\Omega$  be a smooth convex body of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . Suppose that the Ricci curvature of  $M$  over  $\Omega$  satisfies  $\text{Ricci} \geq n\delta > 0$ . Then,*

$$h_\Omega(\beta) \geq h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(\beta), \quad \beta \in [0,1], \tag{G.21}$$

where  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  is an  $(n + 1)$ -dimensional half-sphere of radius  $1/\sqrt{\delta}$ .

Moreover, if  $\Omega$  has non-empty boundary then equality holds in (G.21) for some  $\beta_0 \in (0,1)$  if and only if  $\Omega$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .

*Proof.* The inequality follows from the fact, given in Theorem G.2.5 (i), that any function satisfying the differential inequality (G.15) is bounded from below by an exact solution of the corresponding differential equation with the same boundary values. Furthermore, if we have equality for some  $\beta_0 \in (0,1)$  then  $h_\Omega = h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}$  on  $[0,1]$ , and by the asymptotic behaviour of  $h_\Omega$  at the origin (Proposition G.2.1) we deduce that  $\text{vol}(\Omega) = \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$ . From statement (ii) in Theorem G.2.7 we conclude that  $\Omega$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .  $\square$

The preceding result can be given in the following alternative form

**Corollary G.4.9** *Let  $\Omega$  be a smooth convex body of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . Suppose that the Ricci curvature of  $M$  over  $\Omega$  satisfies  $\text{Ricci} \geq n\delta > 0$ . Then, for any Borel set  $E \subseteq \Omega$ , we have*

$$\frac{\mathcal{P}(E, \Omega)}{\text{vol}(\Omega)} \geq \frac{\mathcal{P}(E^*, \mathbb{H}_\delta^{n+1})}{\text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})},$$

where  $E^* \subseteq \mathbb{H}_\delta^{n+1}$  is a geodesic half-ball centered at  $\partial\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  such that

$$\frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(\Omega)} = \frac{\text{vol}(E^*)}{\text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})}.$$

Moreover, if  $\Omega$  has non-empty boundary and equality holds for some set  $E \subseteq \Omega$  with  $\text{vol}(E) \in (0, \text{vol}(\Omega))$ , then  $\Omega$  is isometric to an  $(n + 1)$ -dimensional half-sphere of radius  $1/\sqrt{\delta}$ .

**Remark G.4.10** *Let  $h_C(\Omega)$  be the Cheeger isoperimetric constant of a smooth convex body  $\Omega$  of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ , defined by*

$$h_C(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\mathcal{P}(E, \Omega)}{\min \{ \text{vol}(E), \text{vol}(\Omega \setminus E) \}} : \text{vol}(E) \in (0, \text{vol}(\Omega)) \right\}.$$

Note that

$$h_C(\Omega) = \inf \left\{ \frac{h_\Omega(\beta)}{\min \{ \beta, 1 - \beta \}} : \beta \in (0,1) \right\},$$

and so, if the Ricci curvature of  $M$  is non-negative on  $\Omega$ , we deduce by the concavity of the profile (Theorem G.3.4)

$$h_C(\Omega) = 2 h_\Omega(1/2),$$

which yields  $h_C(\Omega) \geq h_C(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$  when  $\text{Ricci} \geq n\delta > 0$  in  $\Omega$  by (G.21).

Now, by reproducing the arguments in [Ba2] (see also [Ba1]), we can refine Theorem G.4.8, so as to get, under the same assumption on the Ricci curvature,

$$h_\Omega(\beta) \geq \left[ \frac{h_C(\Omega)}{h_C(\mathbb{H}_\delta^{n+1})} \right]^{\frac{1}{n+1}} h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(\beta), \quad \beta \in [0,1]. \quad (\text{G.22})$$

Moreover, if there is  $\beta_0 \in (0,1)$  such that (G.22) is an equality, then  $\Omega$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .

### G.4.3 Some consequences of Theorem G.4.8

We first show how to use Theorem G.4.8 to give a characterization of equality cases in Theorem G.2.7 (i). We need a previous result (see [Ga] for closed Riemannian manifolds), linking the diameter of a domain  $\Omega$  and the profile  $h_\Omega$ .

**Lemma G.4.1** *The diameter of a smooth domain  $\Omega$  of a complete Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$  satisfies*

$$\text{diam}(\Omega) \leq \int_0^1 \frac{d\beta}{h_\Omega(\beta)},$$

with equality when  $\Omega$  coincides with an  $(n+1)$ -dimensional half-sphere.

*Proof.*

Suppose that  $\text{vol}(\Omega) < \infty$  (in other case  $h_\Omega \equiv 0$ ). If  $\Omega$  is unbounded then choose any point  $p_0 \in \Omega$ . If  $\Omega$  is bounded, fix a point  $p_0 \in \bar{\Omega}$  such that  $\text{dist}(p_0, p_1) = \text{diam}(\Omega)$  for some  $p_1 \in \bar{\Omega}$ . Denote by  $S_t$  and  $B_t$  the metric sphere and the metric open ball in  $M$  centered at  $p_0$  with radius  $t > 0$ . By the coarea formula [Ch3, Corollary I.3.1], the volume of a set  $E \subseteq M$  can be computed as

$$\text{vol}(E) = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_n(E \cap S_t) dt,$$

and so the function  $\beta(r) = \text{vol}(\Omega \cap B_r) / \text{vol}(\Omega)$  is absolutely continuous on  $[0, \text{diam}(\Omega)]$  and satisfies

$$\beta'(r) = \frac{\mathcal{H}_n(\Omega \cap S_r)}{\text{vol}(\Omega)} \geq \frac{\mathcal{P}(\Omega \cap B_r, \Omega)}{\text{vol}(\Omega)} \geq h_\Omega(\beta(r)), \quad (\text{G.23})$$

for almost all  $r \in [0, \text{diam}(\Omega)]$ , with equality when  $\Omega$  coincides with a half-sphere. The proof finishes by integrating in (G.23).  $\square$

**Remark G.4.11** *The asymptotic behaviour of  $h_\Omega$  at the origin (Proposition G.2.1) ensures that the upper bound on the diameter given in the lemma above is finite when  $\Omega$  is bounded.*

As a consequence of Lemma G.4.1 and Theorem G.4.8 we can prove for convex bodies the analogous of the well-known Topogonov–Cheng theorem [Ch2, Theorem 3.11] for closed Riemannian manifolds. Note that the following result is not a direct consequence of the aforementioned one for closed manifolds since we are assuming that  $\text{Ricci} \geq n\delta > 0$  only in  $\Omega$ .



**Theorem G.4.12** *Let  $\Omega$  be a smooth convex body with non-empty boundary of a Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . If the Ricci curvature of  $M$  satisfies  $\text{Ricci} \geq n\delta > 0$  on  $\Omega$ , then*

$$\text{diam}(\Omega) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}},$$

and equality holds if and only if  $\Omega$  is isometric to a half-sphere of radius  $1/\sqrt{\delta}$ .

**Remark G.4.13** *By following the arguments in [Ba2, Theorems 3.2 and 3.3] we could say that, for a smooth convex body  $\Omega$  with non-empty boundary and  $\text{Ricci} \geq n\delta > 0$ , having a diameter close to  $\pi/\sqrt{\delta}$  (resp. a volume close to  $\text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$ ) is equivalent to the fact that  $h_\Omega - h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}$  is uniformly close to 0 on  $[0, 1]$  (resp.  $h_\Omega/h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}$  is uniformly close to 1 on  $(0, 1)$ ). This means that almost maximality of the diameter or almost maximality of the volume both entail, in certain sense, almost minimality of the profile.*

We finish this section with an eigenvalues comparison theorem. The application of an isoperimetric inequality to obtain eigenvalues estimates (see [Ch, Theorem 2, p. 87]) was first given by G. B. Faber and E. Krahn for smooth Euclidean domains with compact closure. In [BM] and [BBG] it is shown how the ideas of G. B. Faber and E. Krahn, together with Lévy–Gromov inequality (G.20), lead to sharp estimates for the first eigenvalue of the Laplace operator with Dirichlet boundary condition on a smooth, bounded domain of a complete Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$  with  $\text{Ricci} \geq n\delta > 0$ . Other estimates for Dirichlet eigenvalues obtained in a similar way can be found in [Ga] and [Ba2].

In the setting of a smooth convex domain  $\Omega$  with  $\partial\Omega \neq \emptyset$ , the fact that isoperimetric hypersurfaces in the model  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  intersect the boundary orthogonally, seems to indicate that the Neumann boundary condition on  $\partial\Omega$  is more appropriated if we want to derive an eigenvalues comparison from inequality (G.21). In fact, we can prove

**Theorem G.4.14** *Let  $\Omega$  be a smooth convex body with non-empty boundary of a complete Riemannian manifold  $(M^{n+1}, g)$ . If the Ricci curvature of  $M$  satisfies  $\text{Ricci} \geq n\delta > 0$  on  $\Omega$ , then*

$$\lambda_1^N(\Omega) \geq \lambda_1^N(\mathbb{H}_\delta^{n+1}) = (n+1)\delta, \quad (\text{G.24})$$

where the notation  $\lambda_1^N(\Omega)$  stands for the lowest non-zero eigenvalue of the Laplace operator on  $\Omega$  with Neumann boundary condition on  $\partial\Omega$ . Moreover, if (G.24) is an equality, then  $\Omega$  is isometric to a half-sphere  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  of radius  $1/\sqrt{\delta}$ .

*Proof.* We give a brief description of the proof, which follows the symmetrization argument in [BM, Théorème 5]. For any non-trivial function  $u \in C^\infty(\Omega)$ , denote by  $R_\Omega(u)$  the Rayleigh quotient of  $u$ , given by

$$R_\Omega(u) = \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathcal{H}_{n+1} \right) \left( \int_\Omega u^2 d\mathcal{H}_{n+1} \right)^{-1}.$$

Due to the variational characterization of Neumann eigenvalues there exists a smooth, mean zero function  $u$  on  $\bar{\Omega}$  such that  $R_\Omega(u) = \lambda_1^N(\Omega)$  and  $\partial u / \partial \nu = 0$  on  $\partial\Omega$ , where  $\nu$  is the inward normal vector to  $\partial\Omega$ . Suppose that  $u$  has finitely many non-degenerate critical points (condition (ND)). The symmetrization technique allows us to construct, by using a suitable family of concentric half-balls in  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  centered at a fix boundary point, a function  $u^*$  defined on  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  such that

- (i)  $u^*$  is a non-trivial Sobolev function on  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .

- (ii)  $u^*$  has mean zero over  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .
- (iii)  $R_\Omega(u) \geq R_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(u^*)$  with equality if and only if  $\Omega$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  (here is the point where Theorem (G.4.8) is used).

By using statement (iii) and the variational characterization of Neumann eigenvalues, the proof of the theorem follows.

If  $u$  does not satisfy condition (ND), then we get (G.24) by approximation since  $\lambda_1^N(\Omega)$  is the limit of a sequence  $\{R_\Omega(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , where each  $u_n$  has mean zero and satisfies condition (ND). In this situation, the discussion of the equality case is not so obvious; we appeal to [BM, p. 520].  $\square$

**Remark G.4.15** *By using inequality (G.22) instead of (G.21) in the proof of Theorem G.4.14, we obtain*

$$\lambda_1^N(\Omega) \geq \left[ \frac{h_C(\Omega)}{h_C(\mathbb{H}_\delta^{n+1})} \right]^{\frac{2}{n+1}} \lambda_1^N(\mathbb{H}_\delta^{n+1}),$$

with equality if and only if  $\Omega$  is isometric to  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .

## G.5 Appendix: an alternative proof of inequality (G.16) in the euclidean case

Here we give a geometric proof of the fact that the isoperimetric profile of a convex body  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  is bounded from above by the profile of the half-space  $\mathbb{H}^{n+1} = \{x_{n+1} > 0\}$ . The proof relies on the fact that the local convexity of a domain  $\Omega$  around a boundary point implies  $I_\Omega \leq I_{\mathbb{H}^{n+1}}$  for small volumes.

**Proposition G.5.1** *Let  $\Omega$  be a smooth domain in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . If  $\Omega$  has a local supporting hyperplane at a point  $x \in \partial\Omega$ , then there exists  $V_0 > 0$  such that  $I_\Omega(V) \leq I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V)$ , whenever  $V \in [0, V_0]$ .*

*Proof.* We follow the proof in [RR, Proposition 3.6]. Denote by  $\mathcal{P}(r)$  and  $V(r)$  respectively the perimeter in  $\Omega$  and the volume of the ball  $B_r$  of radius  $r > 0$  centered at  $x$  intersected with  $\Omega$ . Let  $\tilde{V}(r)$  be the volume of the cone subtended by  $\partial B_r \cap \Omega$  and vertex at  $x$ . We have the relation

$$\mathcal{P}(r) = (n+1) \frac{\tilde{V}(r)}{r}.$$

On the one hand, since  $\Omega$  is locally convex around  $x$ , we have  $V(r) \geq \tilde{V}(r)$  for  $r$  small, so that

$$\mathcal{P}(r) = (n+1) \frac{\tilde{V}(r)}{r} \leq (n+1) \frac{V(r)}{r}.$$

On the other hand, if  $\mathcal{P}_e(r)$  and  $V_e(r)$  respectively are the area and the volume of a half-ball in  $\mathbb{H}^{n+1}$  of radius  $r > 0$ , we have

$$\frac{\mathcal{P}_e(r)}{V_e(r)} = \frac{n+1}{r},$$

and so

$$\frac{\mathcal{P}(r)}{V(r)} \leq \frac{\mathcal{P}_e(r)}{V_e(r)}.$$

Since  $V(r) \leq V_e(r)$  due to the local convexity of  $\Omega$  around  $x$ , we finally get

$$\frac{\mathcal{P}(r)}{V(r)^{n/(n+1)}} = \frac{\mathcal{P}(r)}{V(r)} V(r)^{1/(n+1)} \leq \frac{\mathcal{P}_e(r)}{V_e(r)} V_e(r)^{1/(n+1)} = \frac{\mathcal{P}_e(r)}{V_e(r)^{n/(n+1)}} = d_n,$$

where  $d_n$  is the constant that appears in the expression of the isoperimetric profile of the half-space  $I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V) = d_n V^{n/(n+1)}$ .

Hence, for small  $r$ , we obtain the relation  $\mathcal{P}(r) \leq I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V(r))$ , which proves the claim.  $\square$

*Proof of inequality (G.16):* Let  $\Omega$  be a smooth convex body in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . As the renormalized profile  $Y_{\mathbb{H}^{n+1}}$  is linear as function of  $V$ , and  $Y_\Omega$  is concave (Theorem G.3.4), the proof trivially follows from Proposition G.5.1.

**Remark G.5.2** *Though we have succeed in comparing the profiles for small volumes with geometric arguments, the global comparison has required global analytic properties of the profile.*

Vincent BAYLE  
 Institut Fourier  
 BP 74  
 38402 Saint Martin D'hères Cedex  
 France  
 vbayle@ujf-grenoble.fr  
 César ROSALES  
 Departamento de Geometría y Topología  
 Universidad de Granada  
 E-18071 Granada  
 España  
 crosales@ugr.es



# Bibliographie

- [BP] Christophe Bavard et Pierre Pansu, *Sur le volume minimal de  $\mathbb{R}^2$* , Ann. Sci. École. Norm. Sup. **19** (1986), no. 4, 479–490. MR 88b:53048
- [Ba1] Vincent Bayle, *Propriétés de concavité du profil isopérimétrique et applications*, Thèse de Doctorat. 2003.
- [Ba2] Vincent Bayle, *A Differential Inequality for the Isoperimetric Profile*, Int. Math. Res. Not. (to appear).
- [BBG] Pierre Bérard, Gérard Besson et Sylvestre Gallot, *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math. **80** (1985), no. 2, 295–308. MR 86j:58017
- [BM] Pierre Bérard et Daniel Meyer, *Inégalités isopérimétriques et applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15** (1982), no. 3, 513–541. MR 84h:58147
- [Bi] Richard L. Bishop, *Infinitesimal convexity implies local convexity*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974–75), 169–172. MR MR50:3154
- [Bo] Enrico Bombieri, *Regularity theory for almost minimal currents*, Arch. Rational Mech. Anal. **78** (1982), no. 2, 99–130. MR MR83i:49077
- [Ch] Isaac Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 115, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. MR 86g:58140
- [Ch2] ———, *Riemannian Geometry: a modern introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, no. 108, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR MR95j:53001
- [Ch3] ———, *Isoperimetric Inequalities. Differential Geometric and Analytic Perspectives*, Cambridge Tracts in Mathematics, no. 145, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR 2002h:58040
- [Ga] Sylvestre Gallot, *Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes*, Société Mathématique de France, Astérisque **163-164** (1988), 31–91. MR 90f:58173
- [Gi] Enrico Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984. MR 87a:58041
- [GMT] Eduardo Gonzalez, Umberto Massari, and Italo Tamanini, *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), no. 1, 25–37. MR 84d:49043
- [Gr] Misha Gromov, *Paul Lévy’s Isoperimetric Inequality*, Appendix C in Metric Structures for Riemannian and non Riemannian Spaces by M. Gromov, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999. MR 2000d:53065
- [G1] Michael Grüter, *Boundary regularity for solutions of a partitioning problem*, Arch. Rational Mech. Anal. **97** (1987), no. 3, 261–270. MR 87k:49050
- [G2] ———, *Optimal regularity for codimension one minimal surfaces with a free boundary*, Manuscripta Math. **58** (1987), no. 3, 295–343. MR 88m:49032

- [K] Ernst Kuwert, *Note on the Isoperimetric Profile of a Convex Body*, personal communication.
- [M1] Frank Morgan, *Geometric measure theory*, third ed., Academic Press Inc., San Diego, CA, 2000, A beginner's guide. MR 2001j:49001
- [M2] ———, *Regularity of isoperimetric hypersurfaces in Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
- [MJ] Frank Morgan and David L. Johnson, *Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), no. 3, 1017–1041. MR 2002e:53043
- [MR] Frank Morgan and Manuel Ritoré, *Isoperimetric regions in cones*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 6, 2327–2339 (electronic). MR 2003a:53089
- [RR] Manuel Ritoré and César Rosales, *Existence and characterization of regions minimizing perimeter under a volume constraint inside Euclidean cones*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear)
- [Ro] Antonio Ros, *The isoperimetric problem*, Lecture series given during the *Clay Mathematics Institute Summer School on the Global Theory of Minimal Surfaces* at the MSRI, Berkeley, California (2001).
- [RV] Antonio Ros and Enaldo Vergasta, *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary*, Geom. Dedicata **56** (1995), no. 1, 19–33. MR 96h:53013
- [SZ1] Peter Sternberg and Kevin Zumbrun, *Connectivity of phase boundaries in strictly convex domains*, Arch. Rational. Mech. Anal., **141** (1998), no.4, 375–400. MR 99c:49045
- [SZ2] ———, *On the connectivity of boundaries of sets minimizing perimeter subject to a volume constraint*, Comm. Anal. Geom. **7** (1999), no. 1, 199–220. MR 2000d:49062
- [Z] William P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1989, Sobolev spaces and functions of bounded variation. MR 91e:46046