

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)  
*préparée à l'Institut Fourier*  
*Laboratoire de mathématiques*  
*UNR 5582 CNRS-UJF*

**VARIATIONS DE QUOTIENTS  
GÉOMÉTRIQUES  
ET APPLICATIONS**

**Nicolas RESSAYRE**

*Soutenue à Grenoble le 16 octobre 2000 devant le jury :*

Michel BRION (CNRS, Grenoble I), Directeur  
Étienne GHYS (CNRS, ENS Lyon)  
Dominique LUNA (Grenoble I)  
Emanuel PEYRE (Grenoble I)  
Joseph LE POTIER (Institut Mathématiques de Jussieu)

*Au vu des rapports de Hanspeter KRAFT et Joseph LE POTIER*



## Remerciements

Je remercie en premier lieu Michel Brion qui dès mes premiers pas en recherche (lors de mon DEA) m'a fait partager sa grande expérience des mathématiques. Merci Michel de m'avoir fait cadeau de sujets de DEA et de Thèse très ouverts. Merci aussi pour ta disponibilité étonnante compte tenu de tes nombreuses activités et pour tes conseils toujours très utiles.

Hanspeter Kraft, je vous remercie pour cette journée fort sympathique à Basel, pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail et pour le temps que vous avez passé à lire cette thèse. C'est un grand honneur que Joseph Le Potier m'a fait en acceptant d'être rapporteur de cette thèse alors que nous n'avions jamais eu le plaisir de nous rencontrer auparavant. Étienne Ghys et Emmanuel Peyre, je vous remercie de m'avoir fait le plaisir et l'honneur de participer à mon jury. Merci Dominique Luna pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail durant ces trois années : il m'a été à la fois utile et réconfortant. C'est pour moi un grand plaisir de vous compter parmi les membres de mon jury.

Je voudrais aussi remercier tout le personnel de l'Institut Fourier, et plus spécialement Arlette Guttin-Lombard, pour leur gentillesse et leur aide (il en a fallu en quatre ans) dans toutes les tâches administratives.

Je n'oublierai pas tous mes collègues et néanmoins amis qui ont partagé avec moi les joies et les doutes qui vont de paire avec l'apprentissage de la recherche. Dans l'ordre chronologique, il y a eu Luc Hillairet, Stéphane Pin, Julien Maubon, Ariane Mézard, Stéphane Vénéreau, Constantin Vernicos, Paolo Bellingeri... J'adresse un merci tout particulier à Stéphane Pin pour toutes ces heures passées à parler de maths.

Séverine, ma dernière pensée est pour toi. En sachant me partager avec cette maîtresse que l'on appelle mathématique, en partageant mes doutes et mes joies... tu m'as permis d'accomplir ce travail.



## Une brève introduction

Cette thèse est constituée de deux parties relativement disjointes dont le point commun est la théorie géométrique des invariants.

En effet, durant mon DEA, j'ai lu et modestement participé à un article <sup>1</sup> de I. Dolgachev et Y. Hu. Ce travail étudie les variations de quotients dans un cadre général : un groupe réductif  $G$  agit sur une variété normale projective  $X$ . Au cours de ma thèse, je me suis attaché à répondre à des questions suggérées par I. Dolgachev sur ce sujet. Ceci m'a conduit à rédiger l'article « The GIT-equivalence for  $G$ -line bundles » qui constitue la première partie de cette thèse.

Dans la seconde partie, on se donne un groupe réductif  $G$  et un sous-groupe sphérique  $H$  de  $G$ . Alors, nous proposons d'étudier les plongements projectifs de l'espace homogène  $G/H$  en les réalisant comme des quotients de plongements projectifs de  $G$ .

---

<sup>1</sup>DOLGACHEV, I. et HU, Y. avec une appendice de RESSAYRE, N. Variation of geometric invariant theory quotients. *Inst. Hautes études Sci. Publ. Math.* , 87 : 5–56, 1998



# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>I</b> | <b>La TGI-équivalence pour les <math>G</math>-fibrés en droites</b>            | <b>11</b> |
| 1        | The numerical criterion . . . . .  | 16        |
| 1.1      | The functions $\mu$ . . . . .  | 16        |
| 1.2      | Definition of the functions $M^\bullet(x)$ . . . . .                           | 17        |
| 1.3      | $M^\bullet(x)$ for a torus action . . . . .                                    | 17        |
| 1.4      | Properties of $M^\bullet(x)$ . . . . .   | 18        |
| 1.5      | Stratification of $X$ induced from $L$ . . . . .                               | 19        |
| 2        | The $G$ -ample cone . . . . .  | 20        |
| 2.1      | Algebraic equivalence for $G$ -line bundles . . . . .                          | 20        |
| 2.2      | A first property of the map $l \mapsto X^{\text{ss}}(l)$ . . . . .             | 22        |
| 3        | The stability set of a point . . . . .   | 22        |
| 3.1      | A lemma on $\mu$ . . . . .   | 23        |
| 3.2      | A first result of rationality . . . . .  | 23        |
| 3.3      | Geometry of $\Omega(x)$ . . . . .  | 24        |
| 4        | Geometry of the GIT-classes . . . . .  | 27        |
| 4.1      | A fundamental lemma . . . . .  | 27        |
| 4.2      | The geometry of a GIT-class . . . . .  | 28        |
| 4.3      | The inclusion relations $X^{\text{ss}}(F) \subset X^{\text{ss}}(F')$ . . . . . | 29        |
| 5        | Global geometry of the GIT-classes . . . . .                                   | 30        |
| 5.1      | A notion of wall and chamber . . . . .   | 30        |
| 5.2      | The GIT-fan . . . . .  | 31        |
| 5.3      | Existence of stable points . . . . .   | 31        |
| 6        | The morphisms induced by inclusions . . . . .                                  | 32        |
| 6.1      | The fibers of the morphisms induced by inclusions . . . . .                    | 33        |
| 6.2      | The stabilizers of pivotal points and the stability sets . . . . .             | 36        |
| 6.3      | The case where the stabilizer of a pivotal point is a torus . . . . .          | 38        |
| 6.4      | Actions of $k^* \times \text{SL}(2)$ . . . . .                                 | 40        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>II</b> | <b>Plongements d'espaces homogènes sphériques et<br/>Théorie Géométrique des Invariants</b> | <b>51</b> |
| <b>1</b>  | <b>Introduction</b>   | <b>53</b> |
| <b>2</b>  | <b>Généralités sur les variétés sphériques</b>  | <b>59</b> |
| 2.1       | Introduction . . . . .  | 59        |
| 2.2       | Plongements d'un espace homogène sphérique donné . . . . .                                  | 60        |
| 2.3       | Espaces homogènes sphériques sobres . . . . .   | 63        |
| 2.4       | Structure locale des variétés sphériques . . . . .  | 64        |
| 2.5       | Sur les plongements sans couleur de $G/H$ . . . . .   | 65        |
| 2.6       | Sur les polytopes moments d'une variété sphérique . . . . .                                 | 68        |
| 2.7       | Sur l'action de $B$ sur $G/H$ . . . . .   | 71        |
| 2.8       | Préliminaires sur les diviseurs . . . . .   | 77        |
| <b>3</b>  | <b>Vecteurs d'un <math>G</math>-module propres pour un sous-groupe<br/>sphérique</b>        | <b>79</b> |
| 3.1       | Introduction . . . . .  | 79        |
| 3.2       | Vecteurs propres de $H$ dans les $G$ -modules simples . . . . .                             | 79        |
| 3.2.1     | Fonctions rationnelles sur $G$ propres pour $B \times H$ . . . . .                          | 79        |
| 3.2.2     | Vecteurs propres de $H$ . . . . .   | 84        |
| 3.3       | Polyèdres moments de $G/H$ . . . . .  | 85        |
| 3.3.1     | Le groupe $\text{Pic}^G(G/H)$ . . . . .   | 86        |
| 3.3.2     | Le polyèdre $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$ . . . . .                                   | 86        |
| 3.3.3     | Un exemple : l'espace homogène $\text{SL}(2)^3/\Delta \text{SL}(2)$ . . . . .               | 87        |
| 3.3.4     | Sur les zéros des sections de $\mathcal{L}_\chi$ . . . . .                                  | 89        |
| 3.3.5     | Polytopes moments d'un plongement de $G/H$ . . . . .  | 90        |
| <b>4</b>  | <b>Sur les plongements des groupes</b>  | <b>93</b> |
| 4.1       | Introduction . . . . .  | 93        |
| 4.2       | Couleurs et Valuations . . . . .  | 93        |
| 4.3       | Les polytopes moments de plongements de $G$ . . . . .                                       | 94        |
| 4.4       | Sur les orbites de $G \times G$ dans les plongements sans couleur de<br>$G$ . . . . .       | 96        |
| 4.5       | Sur le groupe de Picard d'un plongement simple de $G$ . . . . .                             | 97        |
| <b>5</b>  | <b>Quotients de <math>G</math>-variétés par un sous-groupe sphérique</b>                    | <b>99</b> |
| 5.1       | Le cas affine . . . . .   | 99        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.1.1    | Construction générale . . . . .   | 99         |
| 5.1.2    | Le cas d'un sous-groupe sphérique . . . . .   | 102        |
| 5.2      | Le cas projectif . . . . .  | 103        |
| 5.2.1    | Construction générale . . . . .   | 103        |
| 5.2.2    | La notion de points stables . . . . .   | 104        |
| 5.2.3    | Le groupe des fibrés en droites $H$ -linéarisés sur $X$ . . . . .   | 105        |
| 5.2.4    | Quotients par un sous-groupe sphérique . . . . .  | 107        |
| <b>6</b> | <b>Quels plongements projectifs de <math>G/H</math> peut-on obtenir comme quotients de plongements projectifs de <math>G</math> ?</b> | <b>111</b> |
| 6.1      | Une solution à ce problème . . . . .  | 111        |
| 6.2      | Remarques sur la démonstration du théorème 4 . . . . .  | 114        |
| 6.3      | Espaces homogènes sphériques relevables . . . . .   | 116        |
| <b>7</b> | <b>Quotients de plongements projectifs de <math>G</math> par un sous-groupe sphérique</b>   | <b>121</b> |
| 7.1      | Introduction . . . . .  | 121        |
| 7.2      | Polytope moment du quotient . . . . .   | 122        |
| 7.3      | Orbites de $G$ dans $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$ et orbites de $G \times G$ dans $X$                                  | 125        |
| 7.4      | Sur la préimage de certains ouverts . . . . .   | 128        |
| 7.5      | Trois exemples . . . . .  | 130        |
| 7.5.1    | $SL(3)/GL(2)$ . . . . .   | 130        |
| 7.5.2    | $SL(3)/SO(3)$ . . . . .   | 132        |
| 7.5.3    | $G = PSL(3) \times PSL(3)$ et $H = \Delta PSL(3)$ . . . . .   | 135        |
| <b>8</b> | <b>Action de <math>B \times H</math> dans un plongement de <math>G</math></b>   | <b>137</b> |
| 8.1      | Introduction . . . . .  | 137        |
| 8.2      | Action de $B \times H$ dans certains $G \times G$ -espaces homogènes . . . . .  | 137        |
| 8.3      | Action des sous-groupes paraboliques dans $\mathcal{BH}(\mathcal{O})$ . . . . .   | 142        |
| 8.4      | Sur le complémentaire de l'orbite ouverte de $B \times H$ dans $\mathcal{O}$ . . . . .  | 145        |
| 8.4.1    | Réductions . . . . .  | 145        |
| 8.4.2    | Le complémentaire de l'orbite ouverte de $B \times H$ dans $\mathcal{O}$  | 145        |
| 8.4.3    | Équations dans $G \times G$ des $\widehat{D}$ et des $\widehat{E}$ . . . . .  | 146        |
| 8.4.4    | Action de $G \times \{1\}$ sur $\widehat{D}$ et $\widehat{E}$ . . . . .   | 150        |
| 8.5      | Récapitulatif . . . . .   | 151        |
| 8.6      | Diviseurs stables par $B \times H$ dans un plongement de $G$ . . . . .  | 153        |

|                 |  |            |
|-----------------|--|------------|
| <b>9</b>        | <b>Retour sur le quotient d'un plongement de <math>G</math> par <math>H</math></b> | <b>157</b> |
| 9.1             | Introduction . . . . .   | 157        |
| 9.2             | Sur la préimage par $\pi$ d'ouverts de $Y$ . . . . .                               | 157        |
| 9.3             | Stabilité et plongements sans couleurs . . . . .                                   | 159        |
| 9.4             | Quelques exemples . . . . .  | 161        |
| 9.4.1           | Introduction . . . . .   | 161        |
| 9.4.2           | $SP(4)/k^* \times SL(2)$ . . . . .   | 162        |
| <b>10</b>       | <b>Une construction de « bons quotients »</b>                                      | <b>165</b> |
| 10.1            | Introduction . . . . .   | 165        |
| 10.2            | Exemples . . . . .   | 165        |
| 10.2.1          | Introduction . . . . .   | 165        |
| 10.2.2          | $SL(3)/GL(2)$ . . . . .  | 166        |
| 10.2.3          | $SL(4)/SP(4)$ . . . . .  | 167        |
| 10.2.4          | Les couples de droites non coplanaires de $\mathbb{P}^3$ . . . . .                 | 168        |
| 10.3            | Sur le cône des valuations de $G/H$ . . . . .                                      | 172        |
| 10.4            | Plongement canonique de $G/H$ comme quotient de celui de $G$ . . . . .             | 175        |
| 10.5            | Construction de compactifications sans couleur de $G/H$ par quotients. . . . .     | 179        |
| 10.6            | Description locale du morphisme $\pi$ donné par le théorème 7 . . . . .            | 181        |
| 10.7            | Une première application . . . . .   | 186        |
| <b>11</b>       | <b>Application à l'étude de <math>\mathcal{B}(G/H)</math></b>                      | <b>189</b> |
| 11.1            | Introduction . . . . .   | 189        |
| 11.2            | Interprétation géométrique de $\Gamma(G/H)$ . . . . .                              | 189        |
| 11.2.1          | Une question sur $[\overline{V}^X]$ . . . . .                                      | 193        |
| <b>Annexe A</b> | <b>Un espace homogène sphérique</b>  | <b>195</b> |
| A.1             | Introduction . . . . .   | 195        |
| A.2             | $SP(4)$ . . . . .  | 195        |
| A.3             | $SP(4)/k^* \times SP(2)$ . . . . .   | 197        |
| A.4             | Action d'un sous-groupe de Borel de $G$ sur $\mathbb{P}(V)$ . . . . .              | 201        |
| A.5             | Action de $H$ sur $G/P_\beta$ et $G/P_\alpha$ . . . . .                            | 202        |
| A.6             | Action de $B$ sur $G/H$ . . . . .  | 203        |
| A.7             | Action du normalisateur de $H$ dans $G$ . . . . .                                  | 204        |
| A.8             | Graphe d'incidence des orbites de $B$ dans $G/H$ . . . . .                         | 205        |

## Première partie

# LA TGI-ÉQUIVALENCE POUR LES $G$ -FIBRÉS EN DROITES<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>*Partie publiée* : The GIT-equivalence for  $G$ -line bundles. *Geom. Dedicata*, 81 : 295-324, 2000



## The GIT-equivalence for $G$ -line bundles

**Abstract.** Let  $X$  be a projective variety with an action of a reductive group  $G$ . Each ample  $G$ -line bundle  $L$  on  $X$  defines an open subset  $X^{\text{ss}}(L)$  of semi-stable points. Following Dolgachev and Hu, define a GIT-class as the set of algebraic equivalence classes of  $L$ 's with fixed  $X^{\text{ss}}(L)$ . We show that the GIT-classes are the relative interiors of rational polyhedral convex cones, which form a fan in the  $G$ -ample cone. We also study the corresponding variations of quotients  $X^{\text{ss}}(L)//G$ . This sharpens results of Thaddeus and Dolgachev-Hu.

Keywords :

geometric invariant theory ; linearization of the group action ; Luna slice theorem

Classification :

14L30 Group actions on varieties or schemes

14D25 Geometric invariants

### Introduction

Let  $G$  be a reductive linear algebraic group acting algebraically on a projective variety  $X$ , both defined over an algebraically closed field  $k$ . Let  $L$  be an ample  $G$ -linearized line bundle on  $X$ . Geometric Invariant Theory (GIT) associates to  $L$  a “quotient”  $Y(L)$  of  $X$  by  $G$  :

$$Y(L) = \text{Proj} \left( \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes n})^G \right). \quad (1)$$

There is a natural  $G$ -invariant rational map  $\pi : X \dashrightarrow Y(L)$ . The set where  $\pi$  is defined is :

$$X^{\text{ss}}(L) = \{x \in X : \exists n > 0 \text{ and } \sigma \in \Gamma(X, L^{\otimes n})^G \text{ such that } \sigma(x) \neq 0\}.$$

Points of  $X^{\text{ss}}(L)$  are said to be *semistable* for  $L$ . Actually, the map  $\pi$  is the gluing of categorical quotients of open affine  $G$ -stable subsets of  $X^{\text{ss}}(L)$ . As a consequence, each fiber of  $\pi$  contains a unique closed  $G$ -orbit in  $X^{\text{ss}}(L)$ , and  $(Y(L), \pi)$  is a categorical quotient. In particular,  $Y(L)$  only depends on  $X^{\text{ss}}(L)$  and is denoted by  $X^{\text{ss}}(L)//G$ . We also define the open set of *stable* points :

$$X^{\text{s}}(L) = \{x \in X^{\text{ss}}(L) \text{ such that } G_x \text{ is finite and } G \cdot x \text{ is closed in } X^{\text{ss}}(L)\},$$

where  $G_x$  is the stabilizer of  $x$ . It turns out that  $\pi^{-1}(\pi(x)) = G \cdot x$ , for all  $x \in X^{\text{s}}(L)$ . We refer to [1] or [2] for the classical properties of this GIT-quotient.

Observe that the GIT-quotient is not canonical : it depends on a choice of an ample  $G$ -linearized line bundle  $L$  over  $X$  (sometimes called a polarization of  $X$ ). During the last ten years, the question of variation of quotient  $X^{\text{ss}}(L)//G$  under change of the ample  $G$ -linearized line bundle  $L$  has been an active research subject. M. Brion and C. Procesi (see [3]) for a torus action and M. Thaddeus (see [4]) for the action of a reductive group have studied the question when the linearization varies but the line bundle does not. Recently, I. Dolgachev and Y. Hu obtained in [5] some results when  $L$  runs over all ample  $G$ -linearized line bundles. They defined the notion of GIT-equivalence : two ample  $G$ -linearized line bundles  $L_1$  and  $L_2$  are said to be *GIT-equivalent* if and only if  $X^{\text{ss}}(L_1) = X^{\text{ss}}(L_2)$ . Using  $G$ -homological equivalence, they introduced a convex cone in a finite dimensional real vector space : the  *$G$ -ample cone*. The rational points of this cone give all GIT-quotients. The first theorem of [5] shows that only a finite number of GIT-quotients can be obtained when  $L$  varies. A second problem is to understand the geometry of the variation of quotient. For this, given three ample  $G$ -linearized line bundles  $L_-, L_0, L_+$  such that  $X^{\text{ss}}(L_-) \subset X^{\text{ss}}(L_0) \supset X^{\text{ss}}(L_+)$ , one studies the transformation :

$$\begin{array}{ccc}
X^{\text{ss}}(L_-)//G & \dashrightarrow & X^{\text{ss}}(L_+)//G \\
\searrow \phi_- & & \swarrow \phi_+ \\
& & X^{\text{ss}}(L_0)//G
\end{array}$$

where the morphisms  $\phi_{\pm}$  are induced by the inclusions. In [6], C. Walter gives a local model in étale topology for such a transformation.

The goal of this paper is to study the geometry of the GIT-equivalence classes and its links with the inclusions  $X^{\text{ss}}(L_1) \subset X^{\text{ss}}(L_2)$ . Our results generalize and refine those of Thaddeus and Dolgachev-Hu (see [4] and [5]). More precisely, if  $C^G(X)$  denotes the  $G$ -ample cone, we show the following :

**Theorem** *Let  $G$  be a reductive algebraic group acting algebraically on a normal projective variety  $X$ . Then :*

(i) *For all  $l_0 \in C^G(X)$ ,*

$$C(l_0) = \{l \in C^G(X) \text{ such that } X^{\text{ss}}(l_0) \subset X^{\text{ss}}(l)\}$$

*is a closed convex rational polyhedral cone in  $C^G(X)$ .*

(ii) *The cones  $C(l)$  form a fan covering  $C^G(X)$  (the GIT-fan).*

(iii) *The GIT-equivalence classes are the relative interiors of these cones.*

Our proof only use Geometric Invariant Theory contained in [2] and some classical results on instability. In particular, the theorem is true over any algebraically closed field and for any normal variety  $X$ . If the characteristic is zero, we deduce from Slice Étale Theorem of Luna, some relations between the geometry of the GIT-equivalence classes and the fibers of the morphisms  $X^{\text{ss}}(L_1)//G \longrightarrow X^{\text{ss}}(L_2)//G$  induced by inclusions  $X^{\text{ss}}(L_1) \subset X^{\text{ss}}(L_2)$ .

We begin with recalling the numerical criterion of stability due to Mumford. Then, we give some properties of this criterion due to Kempf, Kirwan, Mumford, Ness, Hesselink etc. The first section ends with the finiteness theorem of I. Dolgachev and Y. Hu. Following [5] and [4], in a second section we introduce the algebraic equivalence for  $G$ -linearized line bundles and the  $G$ -ample cone. The third section is devoted to the study of stability in the closure of an orbit. In the fourth and fifth sections, we study the geometry

of the GIT-classes. Theorem 4 summarizes our results by introducing the GIT-fan. Finally, we fix our attention on the fibers of morphisms  $\phi$  induced by inclusions of sets of semistable points : we describe these fibers in the case where  $G$  is a torus or  $\mathrm{SL}(2)$  and we give examples for  $G = k^* \times \mathrm{SL}(2)$ .

**Acknowledgments.** I would like to thank I. Dolgachev and Y. Hu for their questions which directed me and for their interest in my work. Thanks also to C. Walter for useful discussions and to M. Maican for his constructive remarks. I am especially grateful to Michel Brion who initiated me into Geometric Invariant Theory and who gave me precious advice during the preparation of this article.

## 1 The numerical criterion

In this section we collect the notions and the results of Geometric Invariant Theory (see [2]) which will be used throughout this paper. We work over an algebraically closed field  $k$  of arbitrary characteristic.

### 1.1 The functions $\mu$

Let  $G$  be a reductive linear algebraic group acting algebraically on a normal irreducible projective variety  $X$ . As in [2], we denote by  $\mathrm{Pic}^G(X)$  the group of  $G$ -linearized line bundles on  $X$ . Let  $L \in \mathrm{Pic}^G(X)$ . Let  $x$  be a point in  $X$  and  $\lambda$  be a one-parameter subgroup of  $G$ . Since  $X$  is complete,  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x$  exists; let  $x_0$  denote this limit. The image of  $\lambda$  fixes  $x_0$  and so the group  $k^\times$  acts via  $\lambda$  on the fiber  $L_{x_0}$ . This action defines a character of  $k^\times$ , that is, an element of  $\mathbb{Z}$  denoted by  $\mu^L(x, \lambda)$ . One can immediately prove that the numbers  $\mu^L(x, \lambda)$  satisfy the following properties :

- (i)  $\mu^L(g \cdot x, g \cdot \lambda \cdot g^{-1}) = \mu^L(x, \lambda)$  for any  $g \in G$ ;
- (ii) for fixed  $x$  and  $\lambda$ , the map  $L \mapsto \mu^L(x, \lambda)$  is a homomorphism from  $\mathrm{Pic}^G(X)$  to  $\mathbb{Z}$ .

The numbers  $\mu^L(x, \lambda)$  are used in [2] to give a numerical criterion for stability with respect to an ample  $G$ -linearized line bundle  $L$  :

$$\begin{aligned} x \in X^{\mathrm{ss}}(L) &\iff \mu^L(x, \lambda) \leq 0 \text{ for all one-parameter subgroups } \lambda, \\ x \in X^{\mathrm{s}}(L) &\iff \mu^L(x, \lambda) < 0 \text{ for all non trivial } \lambda. \end{aligned}$$

## 1.2 Definition of the functions $M^\bullet(x)$

Let  $T$  be a maximal torus of  $G$ . Denote the set of one-parameter subgroups of  $T$  (resp.  $G$ ) by  $\mathcal{X}_*(T)$  (resp.  $\mathcal{X}_*(G)$ ). We denote the real vector space  $\mathcal{X}_*(T) \otimes \mathbb{R}$  by  $\mathcal{X}_*(T)_\mathbb{R}$ . The Weyl group  $W$  of  $T$  acts linearly on  $\mathcal{X}_*(T)_\mathbb{R}$ . Since  $W$  is finite, there exists a  $W$ -invariant Euclidean norm  $\|\cdot\|$  on  $\mathcal{X}_*(T)_\mathbb{R}$ . On the other hand, if  $\lambda \in \mathcal{X}_*(G)$  there exists  $g \in G$  such that  $g \cdot \lambda \cdot g^{-1} \in \mathcal{X}_*(T)$ . Moreover, if two elements of  $\mathcal{X}_*(T)$  are conjugate by an element of  $G$ , then they are by an element of the normalizer of  $T$  (see Lemma 2.8 in [2]). This allows us to define the norm of  $\lambda$  by  $\|\lambda\| = \|g \cdot \lambda \cdot g^{-1}\|$ .

Let  $L \in \text{Pic}^G(X)$ . We can now introduce the following notation :

$$\bar{\mu}^L(x, \lambda) = \frac{\mu^L(x, \lambda)}{\|\lambda\|}, \quad M^L(x) = \sup_{\lambda \in \mathcal{X}_*(G)} \bar{\mu}^L(x, \lambda).$$

Actually, it is shown in [5] that  $M^L(x)$  is finite. The functions  $M^\bullet(x) : \text{Pic}^G(X) \rightarrow \mathbb{R}$  will play a central role in the rest of the paper.

## 1.3 $M^\bullet(x)$ for a torus action

In this subsection we assume that  $G = T$  is a torus. Let  $L$  be an ample  $T$ -linearized line bundle on  $X$ . Then, there exist a  $T$ -module  $V$  and a positive integer  $n$  such that  $X \subset \mathbb{P}(V)$  and  $L^{\otimes n} = \mathcal{O}(1)|_X$ . Replacing  $L$  by  $L^{\otimes n}$  does not change  $\bar{\mu}^L$  and we may assume that  $n = 1$ . We set  $V_\chi = \{v \in V \text{ such that } \forall t \in T \ t \cdot v = \chi(t)v\}$ . Then, we have :

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}^*(T)} V_\chi.$$

Let  $x \in X$  and  $v \in V$  such that  $[v] = x$ . There exist unique vectors  $v_\chi \in V_\chi$  such that  $v = \sum_\chi v_\chi$ . If  $\lambda \in \mathcal{X}_*(T)$  then there exists, for all  $\chi \in \mathcal{X}^*(T)$ , an integer  $\langle \lambda, \chi \rangle$  such that for all  $t \in T$ , we have :

$$\lambda(t) \cdot v = \sum_{\chi \in \mathcal{X}^*(T)} t^{\langle \lambda, \chi \rangle} v_\chi.$$

We identify  $\mathcal{X}^*(T)$  and  $\mathcal{X}_*(T)$  with  $\mathbb{Z}^r$  in such a way that  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is the standard inner product in  $\mathbb{Z}^r$ .

Set  $\text{st}(x) = \{\chi \in \mathcal{X}^*(T) \text{ such that } v_\chi \neq 0\}$ . We have :

$$\mu^L(x, \lambda) = \min_{\chi \in \text{st}(x)} \langle \lambda, \chi \rangle.$$

The following proposition due to L. Ness gives a pleasant interpretation of the number  $M^L(x)$  :

**Proposition 1.1** (see [7]) *With the above notation, we have :*

- (i) *The point  $x$  is unstable if and only if  $0$  does not belong to the convex hull of  $\text{st}(x)$ . In this case,  $M^L(x)$  is the distance from  $0$  to this convex hull.*
- (ii) *If  $x$  is semistable, the opposite of  $M^L(x)$  is the distance from  $0$  to the boundary of this convex hull.*
- (iii) *There exists  $\lambda \in \mathcal{X}_*(T)$  such that  $\bar{\mu}^L(x, \lambda) = M^L(x)$ . If moreover  $\lambda$  is indivisible, we call it an adapted one-parameter subgroup for  $x$ .*
- (iv) *If  $x$  is unstable, there exists a unique adapted one-parameter subgroup for  $x$ .*

## 1.4 Properties of $M^\bullet(x)$

**Lemma 1.1** (Lemma 3.4 in [7]) *Let  $L$  be an ample  $G$ -linearized line bundle and  $T$  be a maximal torus of  $G$ . We denote by  $r_T : \text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}^T(X)$  the partial forgetful map.*

*Then, for all  $x \in X$ , the set of the numbers  $M^{r_T(L)}(g \cdot x)$  for  $g \in G$  is finite and  $M^L(x) = \max_{g \in G} M^{r_T(L)}(g \cdot x)$ .*

An indivisible one-parameter subgroup  $\lambda$  of  $G$  is said to be *adapted for  $x$  and  $L$*  if and only if  $\bar{\mu}^L(x, \lambda) = M^L(x)$ . Denote by  $\Lambda^L(x)$  the set of adapted one-parameter subgroups for  $x$ .

**Corollary 1.1** (i) *The numbers  $M^L(x)$  are finite (even if  $L$  is not ample, see Proposition 1.1.6 in [5]).*

(ii) *If  $L$  is ample,  $\Lambda^L(x)$  is not empty.*

Now, we can reformulate the numerical criterion for stability : if  $L$  is ample, we have

$$X^{\text{ss}}(L) = \{x \in X : M^L(x) \leq 0\}, \quad X^s(L) = \{x \in X : M^L(x) < 0\}.$$

To a one-parameter subgroup  $\lambda$  of  $G$ , we associate the parabolic subgroup (see [2]) :

$$P(\lambda) = \left\{ g \in G \text{ such that } \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t).g.\lambda(t)^{-1} \text{ exists in } G \right\}.$$

Then, for  $g \in P(\lambda)$ , we have  $\mu^L(x, \lambda) = \mu^L(x, g \cdot \lambda \cdot g^{-1})$ . The following theorem due to G. Kempf is a generalization of the last assertion of Proposition 1.1.

**Theorem 1** (see [8]) *Let  $x$  be an unstable point for an ample  $G$ -linearized line bundle  $L$ . Then :*

- (i) *All the  $P(\lambda)$  for  $\lambda \in \Lambda^L(x)$  are equal. We denote by  $P^L(x)$  this subgroup.*
- (ii) *Any two elements of  $\Lambda^L(x)$  are conjugate by an element of  $P^L(x)$ .*

We will also use the following theorem of L. Ness.

**Theorem 2** (Theorem 9.3 in [9]) *Let  $x$  and  $L$  be as in the above theorem. Let  $\lambda$  be an adapted one-parameter subgroup for  $x$  and  $L$ . We consider  $y = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x$ . Then :*

- (i)  $\lambda \in \Lambda^L(y)$ ,
- (ii)  $M^L(x) = M^L(y)$ .

## 1.5 Stratification of $X$ induced from $L$

If  $d > 0$  and  $\langle \tau \rangle$  is a conjugacy class of one-parameter subgroups of  $G$ , we set :

$$S_{d, \langle \tau \rangle}^L = \{x \in X \text{ such that } M^L(x) = d \text{ and } \Lambda^L(x) \cap \langle \tau \rangle \neq \emptyset\}.$$

If  $\mathcal{T}$  is the set of conjugacy classes of one-parameter subgroups, the previous section gives us the following decomposition of  $X$  :

$$X = X^{\text{ss}}(L) \cup \bigcup_{d > 0, \langle \tau \rangle \in \mathcal{T}} S_{d, \langle \tau \rangle}^L.$$

W. Hesselink showed in [10] that this union is a finite stratification by  $G$ -stable locally closed subvarieties of  $X$ . We will call it the *stratification induced from  $L$* .

Using this stratification, I. Dolgachev and Y. Hu have shown the following fundamental finiteness theorem (see Theorem 1.3.9 in [5]) :

**Theorem 3** (i) *The set of locally closed subvarieties  $S$  of  $X$  which can be realized as the stratum  $S_{d, \langle \tau \rangle}^L$  for some ample  $L \in \text{Pic}^G(X)$ ,  $d > 0$  and  $\tau \in \mathcal{X}_*(G)$  is finite.*

- (ii) *There is a finite number of open subsets of  $X$  which can be realized as the set of semistable points with respect to some ample  $G$ -linearized line bundle is finite.*

## 2 The $G$ -ample cone

### 2.1 Algebraic equivalence for $G$ -line bundles

Following I. Dolgachev and Y. Hu, we introduce the  $G$ -ample cone. As M. Thaddeus in [4], we use algebraic equivalence of  $G$ -line bundles instead of homological equivalence.

Two elements  $L_1$  and  $L_2$  of  $\text{Pic}^G(X)$  are said to be  $G$ -algebraically equivalent if there exist a connected variety  $S$ , points  $t_1, t_2 \in S$ , and a  $G$ -linearized line bundle  $L$  on  $S \times X$  such that  $L|_{\{t_1\} \times X} = L_1$  and  $L|_{\{t_2\} \times X} = L_2$ . Here,  $G$  acts on  $S \times X$  via its action on the second factor. Let  $\text{NS}^G(X)$  denote the quotient of  $\text{Pic}^G(X)$  by this equivalence relation. The following proposition is analogous to Lemma 2.3.5 in [5].

**Proposition 2.1** *Let  $x \in X$  and  $\lambda \in \mathcal{X}_*(G)$ . Let  $L_1, L_2 \in \text{Pic}^G(X)$  be  $G$ -algebraically equivalent. Then,  $\mu^{L_1}(x, \lambda) = \mu^{L_2}(x, \lambda)$ .*

**Proof :** Let  $S, L, t_1$  and  $t_2$  be as in the definition of the  $G$ -algebraic equivalence. Denote by  $y$  the point  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x$ . The group  $k^\times$  acts via  $\lambda$  on the fibers  $L_{(t,y)}$  for all  $t \in S$ . Consider the map  $S \rightarrow \mathbb{Z}, t \mapsto \mu^L((t, y), \lambda)$ . Obviously, this map is locally constant. By connectness of  $S$  we obtain  $\mu^{L_1}(x, \lambda) = \mu^L((t_1, y), \lambda) = \mu^L((t_2, y), \lambda) = \mu^{L_2}(x, \lambda)$ .  $\square$

We denote by  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}$  (resp.  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}}$ ) the vector space  $\text{NS}^G(X) \otimes \mathbb{R}$  (resp.  $\text{NS}^G(X) \otimes \mathbb{Q}$ ). A point  $l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}$  is said to be *rational* if it belongs to  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}}$ . The forgetful map  $\text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$  descends to  $f : \text{NS}^G(X) \rightarrow \text{NS}(X)$ . We denote by  $\mathcal{X}^*(G)_{\mathbb{R}}$  (resp.  $\mathcal{X}^*(G)_{\mathbb{Q}}$ ) the vector space  $\mathcal{X}^*(G) \otimes \mathbb{R}$  (resp.  $\mathcal{X}^*(G) \otimes \mathbb{Q}$ ). M. Thaddeus has proved in [4] the following :

**Proposition 2.2** *The map  $f$  induces an exact sequence :*

$$0 \rightarrow \mathcal{X}^*(G)_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{NS}(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow 0$$

In particular,  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}$  is a finite dimensional real vector space. Proposition 2.1 allows us to define  $\mu^\bullet(x, \lambda) : \text{NS}^G(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  and  $M^\bullet(x) : \text{NS}^G(X) \rightarrow \mathbb{R}$ . By linearity, we can define  $\mu^\bullet(x, \lambda) : \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ . The function  $M^\bullet(x) : \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  is defined by the formula  $M^l(x) = \sup_{\lambda} \bar{\mu}^l(x, \lambda)$ .

**Lemma 2.1** *Let  $x \in X$ . The function  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, l \mapsto M^l(x)$  is convex and positively homogeneous. In particular, it is continuous.*

**Proof :** The function  $M^\bullet(x)$  is the suprema of a family of linear forms.  $\square$

If  $l \in \text{NS}^G(X)_\mathbb{R}$ , we set

$$\begin{aligned} X^{\text{ss}}(l) &= \{x \in X \text{ such that } M^l(x) \leq 0\}, \\ X^s(l) &= \{x \in X \text{ such that } M^l(x) < 0\}. \end{aligned}$$

We denote by  $\text{NS}^G(X)_\mathbb{R}^+$  the convex cone generated by the classes of ample  $G$ -linearized line bundles in  $\text{NS}^G(X)_\mathbb{R}$ . This cone is open in  $\text{NS}^G(X)_\mathbb{R}$ . Indeed, it is the preimage by  $f$  of the ample cone, a strictly convex open cone in  $\text{NS}(X)_\mathbb{R}$ . A point  $l$  in  $\text{NS}^G(X)_\mathbb{R}$  is said to be *ample* if and only if it belongs to  $\text{NS}^G(X)_\mathbb{R}^+$ .

A point  $l \in \text{NS}^G(X)_\mathbb{R}^+$  is said to be *effective* if and only if  $X^{\text{ss}}(l)$  is not empty. The set of effective points of  $\text{NS}^G(X)_\mathbb{R}^+$  is denoted by  $C^G(X)$  and called the  *$G$ -ample cone*. It is shown in [5] that the  $G$ -ample cone is convex. It may happen that  $C^G(X)$  does not generate  $\text{NS}^G(X)_\mathbb{R}$ ; for example if  $G$  is a product  $H \times k^*$  and  $k^*$  acts trivially on  $X$ .

As in [5], two points  $l$  and  $l'$  in  $C^G(X)$  are said to be *GIT-equivalent* if and only if  $X^{\text{ss}}(l) = X^{\text{ss}}(l')$ . If  $l_0 \in \text{NS}^G(X)_\mathbb{R}^+$ , the *GIT-class* of  $l_0$  is the set of all  $l \in \text{NS}^G(X)_\mathbb{R}^+$  that are GIT-equivalent to  $l_0$ . The purpose of this paper is to describe the map  $l \in C^G(X) \mapsto X^{\text{ss}}(l)$ . More precisely, we will describe the geometry of the GIT-classes.

**Remark :** Let  $l \in C^G(X)$ . If  $l \in \text{NS}^G(X)_\mathbb{Q}^+$ , there exists an ample  $G$ -linearized line bundle  $L$  on  $X$  such that  $X^{\text{ss}}(l) = X^{\text{ss}}(L)$  and  $X^s(l) = X^s(L)$ . So, we have an algebraic quotient  $X^{\text{ss}}(l)//G$  with all the properties of Geometric Invariant Theory. For example, if  $l$  is rational then the sets  $X^{\text{ss}}(l)$  and  $X^s(l)$  are open and a point  $x \in X^{\text{ss}}(l)$  belongs to  $X^s(l)$  if and only if its stabilizer is finite and its orbit is closed in  $X^{\text{ss}}(l)$ . At this step of the paper, we do not know if these properties hold for  $X^{\text{ss}}(l)$  and  $X^s(l)$  when  $l$  is not rational in  $C^G(X)$ . This will often lead us to assume that  $l$  is rational. Actually, this assumption will turn out to be unnecessary because Proposition 4.1 will show that any  $l$  in  $C^G(X)$  is GIT-equivalent to a rational one.

## 2.2 A first property of the map $l \mapsto X^{\text{ss}}(l)$

The following proposition is a result of local monotonicity of the maps  $l \mapsto X^{\text{ss}}(l)$  and  $l \mapsto X^{\text{s}}(l)$ .

**Proposition 2.3** *Let  $l_0$  be a point in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$ . There exists a neighborhood  $V$  of  $l_0$  such that  $X^{\text{s}}(l_0) \subset X^{\text{s}}(l) \subset X^{\text{ss}}(l) \subset X^{\text{ss}}(l_0)$  for all rational  $l$  in  $V$ .*

**Proof :** By Theorem 3, there exist finitely many open subsets  $X_1^{\text{s}}, \dots, X_n^{\text{s}}$  of  $X$  such that  $X^{\text{s}}(l)$  is one of them for all  $l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}}^+$ . We order these sets such that :

- (i)  $X^{\text{s}}(l_0) \not\subset X_i^{\text{s}}$  for  $i = 1, \dots, p$
- (ii)  $X^{\text{s}}(l_0) \subset X_i^{\text{s}}$  for  $i = p + 1, \dots, n$ .

Let us fix points  $x_1, \dots, x_p$  in  $X^{\text{s}}(l_0)$  such that  $x_i \notin X_i^{\text{s}}$  for all  $i = 1, \dots, p$ . By continuity of the functions  $M^\bullet(x_i)$ , there exist neighborhoods  $V_{x_1}, \dots, V_{x_p}$  of  $l_0$  in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$  such that :

$$\forall l \in V_{x_i} \cap \text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}} \quad x_i \in X^{\text{s}}(l).$$

Let  $V$  denote the intersection of the  $V_{x_i}$ . For all  $l \in V \cap \text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}}$ ,  $X^{\text{s}}(l)$  is different from  $X_i^{\text{s}}$  for all  $i = 1, \dots, p$ . Therefore,  $X^{\text{s}}(l)$  is one of the sets  $X_{p+1}^{\text{s}}, \dots, X_n^{\text{s}}$  and contains  $X^{\text{s}}(l_0)$ .

Let  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence of balls centered at  $l_0$  and contained in  $V$  such that the sequence of radii converges to zero. Let  $X_1^{\text{ss}}, \dots, X_k^{\text{ss}}$  be the open subsets of  $X$  such that  $X^{\text{ss}}(l)$  is one of them for all  $l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}}^+$ . We set :

$$I_n = \{i \mid 1 \leq i \leq k, \exists l \in B_n \cap \text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}} \text{ such that } l \neq l_0 \text{ and } X^{\text{ss}}(l) = X_i^{\text{ss}}\}$$

The sequence  $(I_n)$  is decreasing. Since the sets  $I_n$  are finite, the sequence  $I_n$  is stationary for  $n \gg 0$  (say for  $n \geq N$ ).

Let  $l \in B_N \cap \text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}}$  and  $x \in X^{\text{ss}}(l)$ . For all  $n$ , there exists  $l_n \in B_n$  such that  $x \in X^{\text{ss}}(l_n) = X^{\text{ss}}(l)$ . Since the sequence  $l_n$  converges to  $l_0$  and the function  $M^\bullet(x)$  is continuous, we have  $M^{l_0}(x) \leq 0$ ; that is  $x \in X^{\text{ss}}(l_0)$ . And so  $X^{\text{ss}}(l) \subset X^{\text{ss}}(l_0)$ . □

## 3 The stability set of a point

**Definition** If  $x \in X$ , the set  $\{l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+ \text{ such that } x \in X^{\text{ss}}(l)\}$  is denoted by  $\Omega(x)$ . Observe that  $\Omega(x) = \{l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+ \text{ such that } M^l(x) \leq 0\}$ . The set  $\Omega(x)$  is called *the stability set of  $x$* .

The aim of this section is to describe the geometry of the stability sets. In other words, we fix a point  $x \in X$  and study the semistability of this point when  $l$  varies in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$ . Let  $\overline{G \cdot x}$  denote the closure of the orbit of  $x$ . In fact, the study of  $\Omega(x)$  will lead us to consider the GIT-classes of the  $G$ -variety  $\overline{G \cdot x}$ .

### 3.1 A lemma on $\mu$

**Lemma 3.1** *Let  $l$  be a rational point in the  $G$ -ample cone. Let  $x \in X^{\text{ss}}(l)$  and  $\lambda \in \mathcal{X}_*(G)$ . We denote by  $z$  the point  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x$ .*

*If  $z$  is unstable for  $l$  then  $\mu^l(x, \lambda) < 0$ .*

**Proof :** There exist a  $G$ -module  $V$  and a positive integer  $n$  such that  $X$  can be embedded into  $\mathbb{P}(V)$  and the algebraic equivalence class of the restriction of  $\mathcal{O}(1)$  to  $X$  is  $l^{\otimes n}$ . Replacing  $l$  by  $l^{\otimes n}$ , we may assume that  $n = 1$ .

Let us assume that  $\mu^l(x, \lambda)$  is non negative. Since  $x$  is semistable for  $l$ , we have  $\mu^l(x, \lambda) = 0$ . Let  $\tilde{x}$  be a non zero point on the line  $x$  in  $V$ . Since  $\mu^l(x, \lambda) = 0$ ,  $\lambda(t).\tilde{x}$  tends to a non zero point  $\tilde{z}$  on the line  $z$ . In particular,  $\tilde{z}$  lies in the closure,  $\overline{G.\tilde{x}}$  in  $V$  of  $G.\tilde{x}$ . But  $x$  is semistable, so that  $0 \notin \overline{G.\tilde{x}}$ . So  $0$  does not lie in the closure of  $G.\tilde{z}$ , so that  $z$  is semistable for  $l$ . The lemma follows.  $\square$

### 3.2 A first result of rationality

**Proposition 3.1** *Let  $x \in X$ . The stability set  $\Omega(x)$  of  $x$  is a convex cone and is closed in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$ . Moreover, the span of  $\Omega(x)$  is a rational vector subspace of  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}$ . In particular,  $\Omega(x)$  is the closure of its rational points.*

**Proof :** The first assertion is obvious because the function  $M^\bullet(x)$  is convex and positively homogeneous. The last assertion is a direct consequence of the first ones. Let us prove the second one. Let  $F \subset \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}$  be the minimal rational vector subspace such that  $\Omega(x)$  is contained in  $F$ . Suppose that  $\Omega(x)$  does not span  $F$ .

Since  $\Omega(x)$  is convex, its interior as a subset of  $F$  is empty. This implies that  $M^l(x) = 0$ , for all  $l \in \Omega(x)$ . Let  $l$  be a point in  $\Omega(x)$ . There exists a sequence  $(l_n)$  of points in  $F$  not in  $\Omega(x)$  which converges to  $l$ . Since  $F$  is rational, we may assume that all  $l_n$  are rational points.

By Theorem 3, by extracting a subsequence, we may assume that all  $l_n$  induce the same stratification  $s$ . For all  $n$ ,  $x$  is unstable for  $l_n$ . So there exists a non open stratum  $S$  of  $s$  containing  $x$ . Let  $\lambda_0 \in \Lambda^{l_0}(x)$  and  $y = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_0(t) \cdot x$ . By Theorem 2,  $y \in S$ , and so for all  $n$  we have  $M^{l_n}(x) = M^{l_n}(y)$ . But now, the continuity of the functions  $M^\bullet(x)$  and  $M^\bullet(y)$  implies that  $M^l(y) = M^l(x) = 0$ .

Since  $\lambda_0$  fixes  $y$ , we have  $\mu^l(y, -\lambda_0) = -\mu^l(y, \lambda_0)$ . So,  $M^l(y) = 0$  implies  $\mu^l(x, \lambda_0) = \mu^l(y, \lambda_0) = 0$ . But  $\mu^{l_0}(x, \lambda_0) > 0$ , so  $\mu^\bullet(x, \lambda_0)$  is not zero on  $F$ . Therefore, the equation  $\mu^\bullet(x, \lambda_0) = 0$  defines an hyperplane of  $F$  containing  $l$ .

Moreover, the functions  $\mu^\bullet(x, \lambda)$  are rational on  $\text{NS}^G(X)_\mathbb{Q}$ . In particular, the set of the functions equal to  $\mu^\bullet(x, \lambda)$  for some one-parameter subgroup  $\lambda$  is countable. Hence,  $\Omega(x)$  is contained in a countable union of hyperplanes of  $F$ . But  $\Omega(x)$  is convex, thus  $\Omega(x)$  is contained in such an hyperplane. Therefore,  $\Omega(x)$  is contained in a rational hyperplane of  $F$ . Since  $F$  is minimal, this is a contradiction. The second assertion of the proposition is proved.  $\square$

Note that Proposition 3.1 is proved in [5] in the special case when the codimension of  $\Omega(x)$  is equal to one.

**Corollary 3.1** *The number of stability sets is finite.*

**Proof :** It is clear that the stability set of each point of  $X$  is a union of GIT-classes. So, by Theorem 3, there exists only a finite number of sets of the form  $\Omega(x) \cap \text{NS}^G(X)_\mathbb{Q}$  for  $x \in X$ . Since Proposition 3.1 shows that  $\Omega(x)$  is the closure of  $\Omega(x) \cap \text{NS}^G(X)_\mathbb{Q}$ , the corollary is proved.  $\square$

We also mention the well-known (see [5])

**Corollary 3.2** *The  $G$ -ample cone  $C^G(X)$  is closed in  $\text{NS}^G(X)_\mathbb{R}^+$ .*

**Proof :** Since  $C^G(X) = \cup_{x \in X} \Omega(x)$ , Proposition 3.1 and Corollary 3.1 imply that  $C^G(X)$  is closed in  $\text{NS}^G(X)_\mathbb{R}^+$ .  $\square$

### 3.3 Geometry of $\Omega(x)$

The following lemma is essential in the study of the geometry of the stability sets.

**Lemma 3.2** *Let  $x \in X$  and  $z \in \overline{G \cdot x} - G \cdot x$ . We assume that there exists a rational point  $l_0 \in C^G(x)$  such that  $G \cdot z$  is closed in  $X^{ss}(l_0)$ . Then, there*

exists  $\lambda \in \mathcal{X}_*(G)$  such that

- (i)  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \in G \cdot z$
- (ii)  $\Omega(x) \subset \{l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} \text{ such that } \mu^l(x, \lambda) \leq 0\}$
- (iii)  $\Omega(z) = \{l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} \text{ such that } \mu^l(x, \lambda) = 0\} \cap \Omega(x)$

**Proof :** The Hilbert-Mumford theorem (see [2]) applied to  $X^{\text{ss}}(l_0)$  gives us a  $\lambda \in \mathcal{X}_*(G)$  such that  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \in G \cdot z$ . Denote by  $z'$  this limit. Since the image of  $\lambda$  fixes  $z'$ , if  $z' \in X^{\text{ss}}(l)$  then  $\mu^l(z', \lambda)$  and  $\mu^l(z', -\lambda) = -\mu^l(z', \lambda)$  are negative or zero. So we have  $\Omega(z) = \Omega(z') \subset \{l \text{ such that } \mu^l(z', \lambda) = \mu^l(x, \lambda) = 0\}$ .

Let  $l$  be a rational point in the stability set of  $z$ . Since  $X^{\text{ss}}(l)$  is open and  $z \in \overline{G \cdot x}$ , we have  $l \in \Omega(x)$ . But now, Proposition 3.1 implies that  $\Omega(z)$  is contained in  $\Omega(x)$ . The inclusion  $\Omega(x) \subset \{l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} \text{ such that } \mu^l(x, \lambda) \leq 0\}$  is obvious ; it implies that  $\Omega(z) \subset \{l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} \text{ such that } \mu^l(x, \lambda) \leq 0\} \cap \Omega(x)$ . We show the opposite inclusion.

Let  $l$  be a rational point in  $\Omega(x)$  such that  $\mu^l(x, \lambda) = 0$ . Then, Lemma 3.1 shows that  $z$  is semistable for  $l$ . So  $l$  belongs to the stability set of  $z$ . We conclude by density of rational points in  $\{l \text{ such that } \mu^l(x, \lambda) = 0\} \cap \Omega(x)$  (which is the intersection of  $\Omega(x)$  and a rational hyperplane).  $\square$

**Definition** A *polyhedral cone* in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$  is a subset of  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$  defined by a finite number of linear inequalities. Such a cone is said to be *rational* if the inequalities can be chosen to be rational. Let  $C$  be a polyhedral cone in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$ . If  $f$  is a linear form on  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}$  non negative on  $C$ , the set of the points  $c$  in  $C$  such that  $f(c) = 0$  is said to be a *face* of  $C$ .

**Proposition 3.2** *Let  $x \in X$ .*

- (i) *There exists  $y \in \overline{G \cdot x}$  such that  $l$  belongs to the relative interior of  $\Omega(y)$  if and only if  $G \cdot y$  is closed in  $X^{\text{ss}}(l)$ . Moreover,  $\Omega(x) = \Omega(y)$ .*
- (ii) *The stability set of  $x$  is a convex rational polyhedral cone in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$ .*
- (iii) *The faces of  $\Omega(x)$  are exactly the sets  $\Omega(y)$  with  $y \in \overline{G \cdot x}$ .*

**Proof :** Let  $l_0$  be a rational point in the relative interior of  $\Omega(x)$ . Let  $y \in \overline{G \cdot x}$  such that  $G \cdot y$  is closed in  $X^{\text{ss}}(l_0)$ . Lemma 3.2 shows that  $\Omega(y)$  is a face of  $\Omega(x)$ . Since  $l_0 \in \Omega(y)$ , we have  $\Omega(x) = \Omega(y)$ . In particular, for all  $z \in X$  there exists  $z' \in \overline{G \cdot z}$  such that  $\Omega(z) = \Omega(z')$  and  $G \cdot z'$  is closed in  $X^{\text{ss}}(l)$  for some rational point  $l \in C^G(X)$ . Now, Lemma 3.2 shows that the sets  $\Omega(z)$  with  $z \in \overline{G \cdot x}$  are faces of  $\Omega(x)$ .

Let  $l$  be a point in the relative boundary of  $\Omega(y)$ . By Proposition 3.1, there exists a sequence  $(l_n)_{n \geq 1}$  of rational points in the vector space spanned by  $\Omega(y)$ , but out of  $\Omega(y)$ , which converges to  $l$ . By Theorem 3, by extracting a subsequence we may assume that all  $l_n$  induce the same stratification. Now, like in the proof of Proposition 3.1, we choose  $\lambda_l \in \Lambda^{l_1}(y)$  and we set  $z_l = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_l(t) \cdot y$ . Then,  $z_l \in \overline{G \cdot y}$  and  $l \in \Omega(z_l)$ . Moreover,  $\Omega(z_l)$  is contained in the hyperplane of  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}$  with equation  $\mu^\bullet(y, \lambda_l) = 0$ , whereas  $\Omega(y)$  is not. Thus  $l$  belongs to  $\Omega(z_l)$  which is a proper face of  $\Omega(y)$ .

We just proved that the relative boundary of  $\Omega(y)$  is the union of its faces  $\Omega(z)$  for some  $z \in \overline{G \cdot y}$ . Now, Proposition 3.1 and Corollary 3.1 imply the second assertion of the proposition.

Moreover, any face of codimension one of  $\Omega(y)$  is equal to  $\Omega(z)$  for some  $z \in \overline{G \cdot y}$ . By induction on the codimension of the face, this proves that any face of  $\Omega(y)$  is equal to  $\Omega(z)$  for some  $z \in \overline{G \cdot y}$ .

Let us prove that  $y$  satisfies the first assertion of the proposition. The above discussion shows that if  $l$  belongs to the relative boundary of  $\Omega(y)$  then  $G \cdot y$  is not closed in  $X^{\text{ss}}(l)$  (because  $z_l \in (\overline{G \cdot y} - G \cdot y) \cap X^{\text{ss}}(l)$ ). Conversely, let  $l'$  be a point in  $\Omega(y)$  such that  $G \cdot y$  is not closed in  $X^{\text{ss}}(l')$ . There exists  $z' \in (\overline{G \cdot y} - G \cdot y) \cap X^{\text{ss}}(l')$ . Since  $G \cdot y$  is closed in  $X^{\text{ss}}(l_0)$ ,  $z' \notin X^{\text{ss}}(l_0)$  and  $\Omega(z')$  is a proper face of  $\Omega(y)$ . Moreover,  $\Omega(z')$  contains  $l'$ . Thus  $l'$  does not belong to the relative interior of  $\Omega(y)$ .  $\square$

**Definition** A point  $x$  is said to be *pivotal for  $l$*  if  $x$  is semistable for  $l$  (or for the GIT-class,  $F$  of  $l$ ) and  $G \cdot x$  is closed in  $X^{\text{ss}}(l)$ . A point  $x$  is said to be *pivotal for  $\Omega$*  if  $\Omega$  is the stability set of  $x$  and  $x$  is pivotal for some (or any) point in the relative interior of  $\Omega$ .

Let us remark that I. Dolgachev and Y. Hu use in [5] a notion of pivotal point which is close to ours.

### Remark

- (i) Note that the GIT-class of a point  $l$  in  $C^G(X)$  only depends on its relative position with the different stability sets. So Proposition 3.2 and Corollary 3.1 imply that any point in  $C^G(X)$  is GIT-equivalent to a rational one in  $C^G(X)$ . In particular, the second assertion of Theorem 3, Proposition 2.3 and Lemmas 3.1 hold for any real point in  $C^G(X)$ .
- (ii) Let us assume for a moment that  $X$  is a smooth complex variety. Let  $K$  be a maximal compact subgroup of  $G$ . Let  $\omega$  be a  $K$ -invariant Kählerian

symplectic form on  $X$  and let  $\phi$  be a moment map for the action of  $K$ . In this situation,  $X^{\text{ss}}(\omega, \phi) = \{x \in X \text{ such that } \overline{G \cdot x} \cap \phi^{-1}(0) \neq \emptyset\}$  is called the set of semistable points. Then,  $X^{\text{ss}}(\omega, \phi)//G$  is a complex space, homeomorphic to  $\phi^{-1}(0)/K$ . It turns out that  $X^{\text{ss}}(\omega, \phi)//G$  only depends on the class of  $\omega$  in  $H^2(X, \mathbb{R})$  and on the choice of  $\phi$  (see, for example Theorem 2.3.8 of [5]). On the other hand,  $\text{NS}(X)_{\mathbb{R}}$  is a subspace of  $H^2(X, \mathbb{R})$ . The theory of Kempf-Ness shows that if  $L$  and  $\omega$  have the same class in  $H^2(X, \mathbb{R})$ , then the complex spaces  $X^{\text{ss}}(\omega, \phi)//G$  and  $X^{\text{ss}}(L)//G$  are isomorphic. So, the previous proposition shows that if the class of  $\omega$  belongs to  $\text{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ , the complex space  $X^{\text{ss}}(\omega, \phi)//G$  is a projective algebraic variety. More generally, P. Heinzner and L. Migliorini showed in [11] that for all  $(\omega, \phi)$  the set  $X^{\text{ss}}(\omega, \phi)$  is equal to  $X^{\text{ss}}(L)$  for some ample  $G$ -linearized line bundle  $L$ .

## 4 Geometry of the GIT-classes

### 4.1 A fundamental lemma

Up to now, we have studied the stability sets  $\Omega(x)$  and for this the quasi-homogeneous varieties  $\overline{G \cdot x}$ . For an arbitrary  $X$ , the GIT-class of a point  $l$  in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$  depends on the relative positions of  $l$  and the stability sets of the points of  $X$ . To show how the various stability sets are related, the main tool is the following :

**Lemma 4.1** *Let  $l_1$  and  $l_2$  be two points in the  $G$ -ample cone such that the set  $X^{\text{ss}}(l_1)$  is contained in  $X^{\text{ss}}(l_2)$ . Let  $x$  be a pivotal point for  $l_2$ .*

*Then there exists a pivotal point  $y$  for  $l_1$  such that  $x \in \overline{G \cdot y}$ . Moreover,  $X^{\text{s}}(l_2)$  is contained in  $X^{\text{s}}(l_1)$ .*

**Proof :** Let us consider the following commutative diagram :

$$\begin{array}{ccc}
 X^{\text{ss}}(l_1) & \xrightarrow{\text{inclusion}} & X^{\text{ss}}(l_2) \\
 \downarrow \pi_{l_1} & & \downarrow \pi_{l_2} \\
 X^{\text{ss}}(l_1)//G & \xrightarrow{\phi} & X^{\text{ss}}(l_2)//G
 \end{array}$$

The image of  $\phi$  is equal to  $\pi_{l_2}(X^{\text{ss}}(l_1))$ . Moreover,  $\pi_{l_2}$  is surjective and  $X^{\text{ss}}(l_1)$  is dense in  $X^{\text{ss}}(l_2)$ . So  $\phi$  is dominant. Since  $X^{\text{ss}}(l_1)//G$  is complete,  $\phi$  is surjective.

Therefore, there exists  $y \in X^{\text{ss}}(l_1)$  such that  $\phi(\pi_{l_1}(y)) = \pi_{l_2}(x)$ . Since  $y \in \overline{\pi_{l_2}^{-1}(\pi_{l_2}(x))}$  and  $G \cdot x$  is the unique closed orbit in  $\overline{\pi_{l_2}^{-1}(\pi_{l_2}(x))}$ , we have  $x \in \overline{G \cdot y}$ . Moreover,  $x \in \overline{G \cdot y'}$  for all  $y' \in X^{\text{ss}}(l_1) \cap \overline{G \cdot y}$ . Therefore we can find  $y$  such that  $G \cdot y$  is closed in  $X^{\text{ss}}(l_1)$  and  $x \in \overline{G \cdot y}$ . This proves the first assertion of the lemma.

Let  $x$  be a stable point for  $l_2$  and let  $y$  be as above. Since  $G_x$  is finite,  $G \cdot x = G \cdot y$  and  $x$  is semistable for  $l_1$ . Moreover,  $G \cdot x$  is closed in  $X^{\text{ss}}(l_2)$  and hence in  $X^{\text{ss}}(l_1)$ . Thus,  $x$  is stable for  $l_1$ .  $\square$

## 4.2 The geometry of a GIT-class

Let  $F$  be a GIT-class. We denote by  $X^{\text{ss}}(F)$  (resp.  $X^s(F)$ ) the subset  $X^{\text{ss}}(l)$  (resp.  $X^s(l)$ ) of  $X$  for some (or any)  $l \in F$ .

**Lemma 4.2** *Let  $F$  be a GIT-class. Then,*

$$F = \bigcap_{x \text{ pivotal for } F} \text{RelInt}(\Omega(x))$$

where  $\text{RelInt}(\Omega(x))$  is the relative interior of the stability set of  $x$ .

**Proof :** The first assertion of Proposition 3.2 shows that  $F$  is contained in the intersection in the lemma. Conversely, let  $l$  be a point in this intersection. Then,  $X^{\text{ss}}(l)$  contains each closed orbit of  $X^{\text{ss}}(F)$ , so  $X^{\text{ss}}(F)$  is contained in  $X^{\text{ss}}(l)$ . Let  $x \in X^{\text{ss}}(l)$  such that  $G \cdot x$  is closed in  $X^{\text{ss}}(l)$ . By Lemma 4.1, there exists  $y \in X^{\text{ss}}(F)$  such that  $x \in \overline{G \cdot y}$  and  $G \cdot y$  is closed in  $X^{\text{ss}}(F)$ . By assumption,  $l$  belongs to the relative interior of the stability set of  $y$ . Then, Proposition 3.2 implies that  $G \cdot y$  is closed in  $X^{\text{ss}}(l)$ . So  $x \in G \cdot y$ , and  $X^{\text{ss}}(l) = X^{\text{ss}}(F)$ . The lemma is proved.  $\square$

**Proposition 4.1** *Any GIT-class is the relative interior of a rational polyhedral cone in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$ .*

**Proof :** The proposition follows immediately from Lemma 4.2, Proposition 3.2 and Corollary 3.1.  $\square$

### 4.3 The inclusion relations $X^{\text{ss}}(F) \subset X^{\text{ss}}(F')$

**Proposition 4.2** *Let  $F$  and  $F'$  be two GIT-classes. The following assertions are equivalent :*

- (i)  $F'$  intersects the closure of  $F$  in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$
- (ii)  $F'$  is contained in the closure of  $F$  in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$
- (iii)  $X^{\text{ss}}(F)$  is contained in  $X^{\text{ss}}(F')$

**Proof :** It is sufficient to prove that

$$l \in \overline{F} \iff X^{\text{ss}}(F) \subset X^{\text{ss}}(l),$$

where  $\overline{F}$  denotes the closure of  $F$  in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$ .

If  $l \in \overline{F}$ , the continuity of the functions  $M^\bullet(x)$  implies that  $X^{\text{ss}}(F)$  is contained in  $X^{\text{ss}}(l)$ . Conversely, let  $l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$  be such that  $X^{\text{ss}}(F) \subset X^{\text{ss}}(l)$ . Let  $l_0$  be in  $F$ . Let  $x$  be a pivotal point for  $F$ . By Lemma 4.2,  $l_0$  belongs to the relative interior of  $\Omega(x)$ . Moreover, the closure of  $F$  is contained in  $\Omega(x)$ . Then, the segment  $[l_0; l]$  is contained in the relative interior of  $\Omega(x)$ . Now, Lemma 4.2 shows that  $[l_0; l]$  is contained in  $F$ . The proposition follows.  $\square$

**Proposition 4.3** *The relative interior of a face of a GIT-class is a GIT-class.*

**Proof :** Let  $F$  be a GIT-class. By induction on the codimension of the face in  $F$ , it is sufficient to prove the proposition for the maximal faces of  $F$ . Let  $F'$  be the relative interior of a maximal face of  $F$ .

Proposition 4.2 shows that the closure of  $F$  is an union of GIT-classes. But, by Proposition 4.1,  $F$  is the relative interior of its closure. Therefore, the relative boundary of  $F$  is an union of GIT-classes. Since, by Proposition 4.1 the GIT-classes are convex, this implies that the closure of  $F'$  is an union of GIT-classes. Moreover, the GIT-classes are open in their closure. So,  $F'$  is an union of GIT-classes. Thus, it is sufficient to prove that if  $l_1$  and  $l_2$  belong to  $F'$ , then they are GIT-equivalent.

Let  $y$  be a pivotal point for  $l_1$ . Let us prove that  $l_2$  belongs to  $\Omega(y)$ . If  $y$  is semistable for  $F$  then  $l_2$  belongs to the closed cone  $\Omega(y)$ . Otherwise, by Lemma 4.1 there exists a pivotal point  $x$  for  $F$  such that  $y \in \overline{G \cdot x} - G \cdot x$ . Indeed, by Proposition 4.2,  $X^{\text{ss}}(F)$  is contained in  $X^{\text{ss}}(l_1)$ . In particular, by Lemma 3.2, there exists  $\lambda \in \mathcal{X}_*(G)$  such that  $\Omega(y) = \Omega(x) \cap \{l \in$

$\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}$  such that  $\mu^l(x, \lambda) = 0$  and, if  $l$  belongs to the relative interior of  $\Omega(x)$  then  $\mu^l(x, \lambda) < 0$ . But, the first assertion of Proposition 3.2 shows that  $F$  is contained in the relative interior of  $\Omega(x)$ . Thus, the intersection between the closure of  $F$  and  $\Omega(y)$  is a proper face of  $F$  containing  $l_1$ . Then,  $\overline{F} \cap \Omega(y) = \overline{F'}$ . In particular,  $l_2$  belongs to  $\Omega(y)$ .

We just proved that all pivotal points for  $l_1$  are semistable for  $l_2$ . This implies that  $X^{\text{ss}}(l_1)$  is contained in  $X^{\text{ss}}(l_2)$ . By symmetry,  $l_1$  and  $l_2$  are GIT-equivalent. The proposition is proved.  $\square$

## 5 Global geometry of the GIT-classes

### 5.1 A notion of wall and chamber

In this section, we introduce a notion of wall and chamber. Definitions close to ours have been considered by I. Dolgachev and Y. Hu in [5] and by M. Thaddeus in [4].

**Definition** A *wall* is a stability set of codimension one in  $C^G(X)$ . A *chamber* is a GIT-class of codimension 0 in  $C^G(X)$ .

By continuity of the functions  $M^\bullet(x)$ , the GIT-classes such that  $X^{\text{ss}} = X^s$  are chambers (they are the chambers in the sense of [5]). But, with our definition, all the chambers are not like that : it is easy to find a  $G$ -action such that no GIT-class satisfies  $X^{\text{ss}} = X^s$ . The appendix of [5] gives an example where some chambers satisfy  $X^{\text{ss}} = X^s$  and another does not.

**Proposition 5.1** *The chambers are the connected components of the complement in  $C^G(X)$  of the union of the walls. The GIT-classes are the relative interiors of the faces of the chambers.*

**Proof :** The union of the closures of the chambers is closed. So its complement is an open subset of  $C^G(X)$  covered by the GIT-classes of codimension greater than one : this complement is empty. So each GIT-class meets the closure of a chamber. Proposition 4.3 implies now the second assertion of the proposition. Moreover, each face of codimension one of a chamber is included in a wall. So, the  $G$ -ample cone is the disjoint union of the walls and the chambers. The proposition follows immediately.  $\square$

Proposition 5.1 implies that if we can determine the walls, we know all the GIT-classes. This remark is useful to calculate the GIT-classes on examples.

## 5.2 The GIT-fan

**Definition** A fan  $\Delta$  in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$  is a finite set of rational convex polyhedral cones in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$  such that

- (i) each face of a cone in  $\Delta$  is also a cone in  $\Delta$ ;
- (ii) The intersection of two cones in  $\Delta$  is a face of each of them.

Most results of this paper about geometry of GIT-classes are summarized in the following theorem announced in the introduction :

**Theorem 4** *Let  $G$  be a reductive algebraic group acting algebraically on a normal projective variety  $X$ . Then :*

- (i) For all  $l_0 \in C^G(X)$ ,

$$C(l_0) = \{l \in C^G(X) \text{ such that } X^{\text{ss}}(l_0) \subset X^{\text{ss}}(l)\}$$

*is a closed convex rational polyhedral cone in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$ .*

- (ii) *The cones  $C(l)$  form a fan covering  $C^G(X)$ .*
- (iii) *The GIT-classes are the relative interior of these cones.*

*This fan is called the GIT-fan for the action of  $G$  on  $X$ .*

**Proof :** This theorem is a direct consequence of Propositions 4.1, 4.2, 4.3 and 5.1.  $\square$

## 5.3 Existence of stable points

The following proposition gives an easy criterion on  $l$  for the existence of stable points. It was first proved by I. Dolgachev and Y.Hu with slightly different assumptions (see Propositions 3.2.8 and 3.3.5 in [5]).

**Proposition 5.2** *We assume that there exists  $l_0 \in C^G(X)$  such that  $X^s(l_0)$  is not empty. Then, for  $l \in C^G(X)$ ,  $X^s(l)$  is not empty if and only if  $l$  belongs to the interior of  $C^G(X)$ .*

**Proof :** Let  $l$  be a point in  $C^G(X)$  such that  $X^s(l)$  is not empty. Let  $x \in X^s(l)$ . By continuity, the function  $M^\bullet(x)$  is negative on a neighborhood of  $l$ . Hence,  $l$  belongs to the interior of  $C^G(X)$ .

Conversely, let  $l$  be a point in the interior of  $C^G(X)$ . There exists a point  $l_1$  in  $C^G(X)$  such that  $l$  belongs to the interval  $]l_1; l_0]$ . Since the sets  $X^{\text{ss}}(l_1)$  and  $X^s(l_0)$  are open and non empty, there exists  $y \in X^{\text{ss}}(l_1) \cap X^s(l_0)$ . Then, by convexity of the function  $M^\bullet(y)$ ,  $y$  is stable for  $l$ . The proposition is proved.  $\square$

## 6 The morphisms induced by inclusions

Propositions 4.2 and 5.1 show that for any GIT-class  $F$  there exists a chamber  $C$  such that  $X^{\text{ss}}(C) \subset X^{\text{ss}}(F)$ . As a consequence, there exists a morphism  $\phi : X^{\text{ss}}(C)//G \rightarrow X^{\text{ss}}(F)//G$ . So, the quotients corresponding to chambers dominate the other quotients.

It could be interesting to compare two quotients corresponding to two distinct chambers  $C$  and  $C'$ . In this situation, there exists a sequence of chambers  $C = C_0, C_1, \dots, C_m = C'$  such that for all  $i = 1, \dots, m$ ,  $C_{i-1} \cap C_i$  is a maximal face of  $C_{i-1}$  and  $C_i$ ; we denote by  $F_i$  the relative interior of this face. Then, by Theorem 4, we have :  $X^{\text{ss}}(C_0) \subset X^{\text{ss}}(F_1) \supset X^{\text{ss}}(C_1) \subset X^{\text{ss}}(F_2) \supset \dots \subset X^{\text{ss}}(F_m) \supset X^{\text{ss}}(C_m)$ . These inclusions induce a sequence of surjective morphisms :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X^{\text{ss}}(C_0)//G & & X^{\text{ss}}(C_1)//G & & \dots & & X^{\text{ss}}(C_m)//G \\
 & \searrow \phi_{-,1} & & \swarrow \phi_{+,1} & & \searrow \phi_{-,2} & & \swarrow \phi_{+,m} \\
 & & X^{\text{ss}}(F_1)//G & & \dots & & X^{\text{ss}}(F_m)//G
 \end{array} \tag{2}$$

Observe that if there exists  $l_0 \in C^G(X)$  such that  $X^s(l_0)$  is not empty, then by Proposition 5.2,  $X^s(F_i)$  is not empty, for all  $i = 1, \dots, m$ . In particular, the morphisms  $\phi_{\pm,i}$  are birational. These morphisms are studied in [3], [4], [5] and [6] in various degrees of generality. In this section, our aim is to study the geometry of the fibers of the morphisms  $\phi_{\pm,i}$  in the special case when the characteristic of  $k$  is zero.

More generally, let us fix two effective ample  $G$ -linearized line bundles  $L_1$  and  $L_2$  on  $X$  such that  $X^{\text{ss}}(L_1) \subset X^{\text{ss}}(L_2)$ . Consider the following commutative diagram :

$$\begin{array}{ccc}
 X^{\text{ss}}(L_1) & \xrightarrow{\text{inclusion}} & X^{\text{ss}}(L_2) \\
 \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\
 X^{\text{ss}}(L_1)//G & \xrightarrow{\phi} & X^{\text{ss}}(L_2)//G
 \end{array} \tag{3}$$

From now on, we assume the characteristic is zero. We will obtain general descriptions of the fibers of  $\phi$  in terms of quotients of affine subvarieties of  $X$  by stabilizers of pivotal points for  $L_2$ . Then, we will come back to the situation in (2) and produce pathological examples.

## 6.1 The fibers of the morphisms induced by inclusions

If  $H$  is an algebraic group, we denote by  $H^\circ$  the neutral component of  $H$ . If  $V$  is an  $H$ -module, the set of all  $v \in V$  such that  $0 \in \overline{H \cdot v}$  is called the *nilcone* of  $V$ . Let  $H$  be a reductive group and  $Y$  be a  $H$ -variety. If  $\chi$  denotes a character of  $H$ , we denote by  $L_\chi$  the trivial line bundle on  $Y$  linearized by :  $h \cdot (y, t) = (h \cdot y, \chi(h)t)$  for all  $h \in H$ ,  $y \in Y$  and  $t \in k$ . If  $Y$  is affine, we denote by  $Y//H$  the affine quotient, namely  $\text{Spec}(k[Y]^H)$ .

**Lemma 6.1** *Let  $H$  be a reductive group and  $\Sigma$  be an affine  $H$ -variety (non necessarily irreducible) with a fixed point  $x$ . We assume that  $\{x\}$  is the only closed orbit of  $H$  in  $\Sigma$ . Then :*

- (i) *The map  $\mathcal{X}^*(H) \rightarrow \text{Pic}^H(\Sigma)$ ,  $\chi \mapsto L_\chi$  is an isomorphism.*
- (ii) *We have  $\Sigma^{\text{ss}}(L_\chi) = \Sigma$  if and only if  $\chi$  is of finite order.*

**Proof :** Let  $L$  be a linearized line bundle on  $\Sigma$ . The action of  $H$  on the fiber  $L_x$  gives a character  $\chi$  of  $H$ . Since  $\Sigma$  is affine, there exists a section  $s$  of  $L$  such that  $s(x) \neq 0$ . The set of zeroes of  $s$  is closed,  $H$ -stable and does not contain  $x$  : it is empty. So  $L$  is trivial as a line bundle. This implies the first assertion.

Let  $L_\chi \in \text{Pic}^H(\Sigma)$  such that  $\Sigma^{\text{ss}}(L_\chi) = \Sigma$ . By definition, for some  $n > 0$ , there exists  $s \in \Gamma(\Sigma, L_\chi^{\otimes n})^H$  such that  $s(x) \neq 0$ . This shows that  $n\chi$  is trivial. The second assertion of the lemma follows.  $\square$

**Proposition 6.1** *Let  $L_1, L_2, \pi_1, \pi_2$  and  $\phi$  like in Diagram 3. Let  $x$  be a pivotal point for  $L_2$  which is not semistable for  $L_1$ . We denote by  $H$  the stabilizer of  $x$ . Set  $\Sigma = \{y \in X \text{ such that } x \in \overline{H \cdot y}\}$ . Then,*

- (i)  $H$  is reductive,
- (ii)  $\Sigma$  is affine,
- (iii)  $\phi^{-1}(\pi_2(x))$  is isomorphic to  $\Sigma^{\text{ss}}(L_{1|\Sigma})//H$ .

Moreover, there exists a unique character  $\chi$  of  $H$  of infinite order such that  $L_{1|\Sigma} = L_\chi$  in  $\text{Pic}^H(\Sigma)$ . If, in addition  $X$  is smooth then the  $H$ -variety  $\Sigma$  is isomorphic to the nilcone of an  $H$ -module.

**Proof :** Set  $Z = \pi_2^{-1}(\pi_2(x))$ . Then  $Z$  is affine. Since  $G \cdot x$  is closed in  $Z$ , it is affine. Hence, Matsushima's theorem shows that  $H$  is reductive.

Let  $\pi : Z \rightarrow Z//H$  denote the quotient map. Since  $X^{\text{ss}}(L_2)$  is open in  $X$  and contains  $x$ ,  $\Sigma$  is contained in  $X^{\text{ss}}(L_2)$ . Then,  $\Sigma$  is contained in  $Z$  and  $\pi^{-1}(\pi(x)) = \Sigma$ . In particular,  $\Sigma$  is affine.

Since  $Z$  is affine and contains  $G \cdot x$  as a unique closed orbit of  $G$ , the Etale Slice Theorem of Luna (see Theorem 6.6 in [12]) shows that  $Z$  is equivariantly isomorphic to the fiber product  $G \times_H \Sigma$ . But, by the commutativity of Diagram 3 and the surjectivity of  $\pi_1$ , the fiber  $\phi^{-1}(\pi_2(x))$  is equal to  $\pi_1(X^{\text{ss}}(L_1) \cap Z)$ .

Since  $Z$  is  $G$ -stable and closed in  $X^{\text{ss}}(L_1)$ ,  $\pi_1(Z \cap X^{\text{ss}}(L_1))$  is isomorphic to  $Z^{\text{ss}}(L_{1|Z})//G$ . Moreover, for all  $L \in \text{Pic}^G(G \times_H \Sigma)$  the restriction map from  $\Gamma(G \times_H \Sigma, L)^G$  to  $\Gamma(\Sigma, L_{|\Sigma})^H$  is an isomorphism. We conclude that :

$$Y \simeq Z^{\text{ss}}(L_{1|Z})//G \simeq \Sigma^{\text{ss}}(L_{1|\Sigma})//H.$$

By Lemma 6.1, there exists a unique  $\chi \in \mathcal{X}^*(H)$  such that  $L_{1|\Sigma} = L_\chi$ . Since  $x \notin \Sigma^{\text{ss}}(L_{1|\Sigma})$ , Lemma 6.1 shows that  $\chi$  is of infinite order.

If in addition  $X$  is smooth, the Etale Slice Theorem shows that  $\Sigma$  is equivariantly isomorphic to the nilcone of the normal space  $T_x X/T_x(G \cdot x)$  to  $G \cdot x$  in  $X$  at the point  $x$ . The proposition is proved.  $\square$

**Remark :** Conversely, let  $H$  be a reductive group,  $\chi$  be a character of infinite order of  $H$  and  $\mathcal{N}$  be the nilcone of an  $H$ -module  $V$ . Then, the variety  $\mathcal{N}^{\text{ss}}(L_\chi)//H$  occurs as a fiber of a morphism  $\phi$  like in Proposition 6.1.

Indeed, let  $X = \mathbb{P}(V \oplus k)$ . We define an action of  $H$  on  $X$  and a linearization of  $\mathcal{O}(1)$  by the formula :  $h \cdot (v, t) = (h \cdot v, t)$  for all  $h \in H, v \in V$

and  $t \in k$ . We denote by  $L$  the line bundle  $\mathcal{O}(1)$  so linearized. Let  $\pi : X^{\text{ss}}(L) \rightarrow X^{\text{ss}}(L)//G$  be the quotient map. It is easy to show that  $\pi^{-1}(\pi([0 : 1])) = \mathcal{N}$ . On the other hand, by Proposition 2.3, for  $n$  large enough,  $X^{\text{ss}}(L^{\otimes n} \otimes \chi)$  is contained in  $X^{\text{ss}}(L)$ . Let  $\phi$  denote the induced morphism from  $X^{\text{ss}}(L^{\otimes n} \otimes \chi)//G$  to  $X^{\text{ss}}(L)//G$ . Then, by Proposition 6.1,  $\phi^{-1}(\pi([0 : 1]))$  is isomorphic to  $\mathcal{N}^{\text{ss}}(L_\chi)//H$ .

**Proposition 6.2** *We assume that  $G$  is connected. We use the notation and assumptions of Proposition 6.1. Let  $Y$  be an irreducible component of  $\phi^{-1}(\pi_2(x))$ . Then, there exists an irreducible component  $S$  of  $\Sigma$  such that  $\pi_1(X^{\text{ss}}(L_1) \cap \overline{G \cdot S})$  is equal to  $Y$ .*

*Let  $H_S$  denote the stabilizer of  $S$  in  $H$ . Let  $\chi$  be as in Proposition 6.1 and  $K_S = \text{Ker}\chi \cap H_S$ . Then, we have :*

(i) *the group  $H_S/K_S \simeq k^*$  acts on  $S//K_S$  with a unique closed orbit which is a fixed point.*

(ii)  $k[S//K_S] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} k[S//K_S]_n$ , where

$$k[S//K_S]_n = \{f \in k[S] \text{ such that } h \cdot f = (\chi(h))^n f \quad \forall h \in H_S\}.$$

(iii)  $S^{\text{ss}}(L_{1|S})//H_S$  is equal to  $\text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} k[S//H_S]_n)$ .

*Moreover, there exists a birational finite morphism from  $S^{\text{ss}}(L_{1|S})//H_S$  onto  $Y$ .*

**Proof :** Since by Proposition 6.1,  $\phi^{-1}(\pi_2(x)) \simeq \Sigma^{\text{ss}}(L_{1|\Sigma})//H$ , the first assertion is obvious. Consider the surjective map :

$$\begin{aligned} \theta : H \times_{H_S} S &\longrightarrow H \cdot S \\ (h : s) &\longmapsto h \cdot s. \end{aligned}$$

Since  $H^\circ$  stabilizes  $S$ ,  $H/H_S$  is finite. In particular, as a variety (without action of  $H$ ), the fiber product  $H \times_{H_S} S$  is isomorphic to  $H/H_S \times S$ .

Let  $(H \cdot S)_0$  denote the set of all  $x \in H \cdot S$  which belong to an unique irreducible component of  $H \cdot S$ . Set  $S_0 = (H \cdot S)_0 \cap S$ . One can easily prove that the restriction of  $\theta$  to  $H \times_{H_S} S_0$  is an isomorphism onto  $(H \cdot S)_0$ . Thus,  $\theta$  is finite, surjective and birational.

The restriction map  $\rho : \text{Pic}^H(H \times_{H_S} S) \rightarrow \text{Pic}^{H_S}(S)$  is an isomorphism. We also denote by  $L_{1|S}$  the  $H$ -linearized line bundle  $L$  on  $H \times_{H_S} S$  such that  $\rho(L) = L_{1|S}$ . Then,  $\theta$  induces a finite birational morphism :

$$\bar{\theta} : (H \times_{H_S} S)^{\text{ss}}(L_{1|S})//H \longrightarrow (H \cdot S)^{\text{ss}}(L_{1|H \cdot S})//H \simeq Y.$$

Since  $G$  has a unique closed orbit in  $\pi_2^{-1}(\pi_2(x))$ , the point  $x$  is the unique closed orbit of  $H$  in  $\Sigma$ . As a consequence,  $\{x\}$  is the unique closed orbit of  $H_S$  in  $S$ . Now,  $k[S//K_S]^{H_S/K_S} = k[S]^{H_S}$  is equal to  $k$ . As a consequence,  $S//K_S$  contains a unique closed orbit of  $H_S/K_S$ .

Since  $\chi$  is of infinite order, it induces an isomorphism between  $H_S/K_S$  and  $k^*$ . In particular, the rational  $H_S/K_S$ -module  $k[S//K_S]$  is equal to  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} k[S//K_S]_n$ . Let  $n$  be a negative integer and  $f \in k[S//K_S]_n$ . By assumption,  $S^{\text{ss}}(L_\chi) = X^{\text{ss}}(L_1) \cap S$  is not empty; so there exists  $n_0 > 0$  such that  $k[S//K_S]_{n_0}$  contains a non zero function  $f_0$ . Then  $f^{n_0} f_0^n$  belongs to  $k[S//K_S]_0 = k[S]^{H_S}$  and must be constant. By evaluating at  $x$  this implies that  $f = 0$ . Assertion (ii) follows immediately.

Since  $\Gamma(S, L_\chi^{\otimes n}) = k[S//K_S]_n$  and  $L_{1|S} = L_\chi$ , we have :

$$(H \times_{H_S} S)^{\text{ss}}(L_{1|S})//H \simeq S^{\text{ss}}(L_{1|S})//H_S \simeq \text{Proj} \left( \bigoplus_{n \geq 0} k[S//K_S]_n \right).$$

Now, the proposition follows from the properties of  $\bar{\theta}$ . □

**Remark :** We will give an example where  $\bar{\theta}$  is not an isomorphism in Section 6.4.

## 6.2 The stabilizers of pivotal points and the stability sets

**Proposition 6.3** *Let  $x \in X$ . Then there exists a point  $y \in X$  such that :*

- (i)  $x \in \overline{G \cdot y}$
- (ii)  $\Omega(x) \subset \Omega(y)$
- (iii) the interior of  $\Omega(y)$  in  $C^G(X)$  is not empty
- (iv) there exists a character  $\chi$  of infinite order of  $G_x$  such that  $G_y$  is contained in the kernel of  $\chi$ .

**Proof :** Let us prove the three first assertion by induction on the codimension of  $\Omega(x)$ . If this codimension is zero, then we can take  $y = x$ . Otherwise, let  $l$  be a point in  $\Omega(x)$ . Since the codimension of  $\Omega(x)$  in  $C^G(X)$  is at least one, there exists a line  $\mathcal{D}$  such that  $\mathcal{D} \cap \Omega(x) = \{l\}$  and  $\mathcal{D} \cap C^G(X) \neq \{l\}$ . Moreover, by Proposition 2.3, there exists  $l' \in \mathcal{D}$  such that  $l' \neq l$  and

$X^{\text{ss}}(l') \subset X^{\text{ss}}(l)$ . Lemma 4.1 gives  $x' \in X^{\text{ss}}(l')$  such that  $x \in \overline{G \cdot x'}$ . But now, since  $l' \notin \Omega(x)$ ,  $\Omega(x)$  is a proper face of  $\Omega(x')$ . By induction, the proposition holds for  $\Omega(x')$ . Therefore, there exists  $y \in X$  which satisfies the three first conditions of the proposition.

Let us prove that replacing  $y$  by a point of  $G \cdot y$ , we can obtain the last condition. Let  $l_1$  (resp.  $l_2$ ) be in the relative interior of  $\Omega(y)$  (resp.  $\Omega(x)$ ). Consider the  $G$ -variety  $\overline{G \cdot y}$  denoted by  $X_y$ . Since  $G \cdot y$  is dense in  $X_y$ , the variety  $X_y^{\text{ss}}(l_2|_{X_y})//G$  is a point. In particular,  $X_y^{\text{ss}}(l_2|_{X_y})$  is affine and contains  $G \cdot x$  as unique closed orbit. Let  $\Sigma = \{z \in X_y^{\text{ss}}(l_2|_{X_y}) \text{ such that } x \in \overline{G_x \cdot z}\}$ . By the Etale Slice Theorem, the  $G$ -variety  $X_y^{\text{ss}}(l_2|_{X_y})$  is isomorphic to  $G \times_{G_x} \Sigma$ . Replacing  $y$  by a point in  $G \cdot y$ , we may assume that  $y \in \Sigma$ . Then,  $G_y$  is contained in  $G_x$ .

Let  $L_1$  be a  $G$ -linearized line bundle on  $X$  in the homological class  $l_1$ . Let  $\chi$  be the character of  $G_x$  which gives the action of  $G_x$  on the fiber  $L_{1x}$ . Then, by Proposition 6.1, the restriction of  $L_1$  to  $\Sigma$  is  $L_\chi$  and the order of  $\chi$  is infinite. Moreover,  $y$  is semistable for  $L_1$ . Thus, there exist a positive integer  $n$  and  $f \in k[\Sigma]$  such that  $h \cdot f = \chi(h)^n f$  for all  $h \in G_x$  and  $f(y) \neq 0$ . In particular, the restriction of  $n\chi$  to  $G_y$  is trivial. The character  $n\chi$  satisfies the condition (iv) of the proposition.  $\square$

**Proposition 6.4** *Let  $x$  be a point of  $X$  which is pivotal for its stability set. Then the rank of the character group of  $G_x$  is at least the codimension of  $\Omega(x)$  in the  $G$ -ample cone.*

**Proof :** Let  $y$  be a point of  $X$  which satisfies the conditions of Proposition 6.3. Let  $c$  denote the codimension of  $\Omega(x)$  in  $C^G(X)$ . There exists a sequence  $\Omega(x) = \Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_c = \Omega(y)$  of faces of  $\Omega(y)$  such that for all  $i = 1, \dots, c$ , the codimension of  $\Omega_{i-1}$  in  $\Omega_i$  is equal to one. For all  $i = 0, \dots, c$ , let  $l_i$  be a point in the relative interior of  $\Omega_i$ .

Let  $H$  denote the stabilizer of  $x$  in  $G$ . Consider  $X_y = \overline{G \cdot y}$  and  $\Sigma_y = \{z \in X_y \text{ such that } x \in \overline{H \cdot z}\}$ . By Proposition 3.2, for all  $i = 1, \dots, c$ ,  $X_y^{\text{ss}}(l_i|_{X_y})$  is strictly contained in  $X_y^{\text{ss}}(l_{i-1}|_{X_y})$ . Then,  $X^{\text{ss}}(l_0) \cap X_y \simeq G \times_H \Sigma_y$  implies that  $\Sigma_y^{\text{ss}}(l_i|_{\Sigma_y})$  is strictly contained in  $\Sigma_y^{\text{ss}}(l_{i-1}|_{\Sigma_y})$ .

On the other hand, replacing  $y$  by a point in  $G \cdot y$ , we may assume the  $y \in \Sigma_y$ . Let  $S_y$  be an irreducible component of  $\Sigma_y$  containing  $y$ . We consider on  $S_y$  the action of the neutral component  $H^\circ$  of  $H$ . Since  $X^{\text{ss}}(l_0) \cap X_y$  is isomorphic to the fiber product  $G \times_H \Sigma_y$ ,  $G \times_H (H \cdot S_y)$  contains  $G \cdot y$ . Then,  $\Sigma_y = H \cdot S_y$  and thus, for all  $i = 0, \dots, c$ , we have  $\Sigma_y^{\text{ss}}(l_i|_{\Sigma_y}) = H \cdot S_y^{\text{ss}}(l_i|_{S_y})$ . In particular,  $S_y^{\text{ss}}(l_i|_{S_y})$  is strictly contained in  $S_y^{\text{ss}}(l_{i-1}|_{S_y})$ , for all  $i = 1, \dots, c$ .

But by Theorem 4, this implies that the  $(l_i)_{0 \leq i \leq c}$  are affinely independent in  $\text{NS}^{H^\circ}(S_y)_{\mathbb{R}}$ . Moreover, by Proposition 6.1, for all  $i = 0, \dots, c$ , there exists a character  $\chi_i$  of  $G_x$  such that  $L_{\chi_i}$  belongs to the class  $l_{i|\Sigma_y}$ . Thus,  $\chi_0, \dots, \chi_c$  are affinely independent. The Proposition follows.  $\square$

**Remark :** 1. Proposition 6.4 is false with  $\Omega(x)$  replaced by a GIT-class. See for example : a linear action of the two dimensional torus  $T$  on  $\mathbb{P}^3$  such that no weight is contained in the convex hull of the three others.

2. If the codimension of  $\Omega(x)$  is equal to the rank of  $G$ , Proposition 6.4 implies that the neutral component of the stabilizer of  $x$  is a torus. Arguing as in the proof of the last assertion of Proposition 6.3, this implies that for all  $y \in X$  such that  $x \in \overline{G \cdot y}$ , the neutral component of  $G_y$  is a torus. In this case, we will give a more precise description of the fibers of  $\phi$  in the next subsection.

### 6.3 The case where the stabilizer of a pivotal point is a torus

**Proposition 6.5** *With the notation of Propositions 6.1 and 6.2, if  $H^\circ$  is a torus, then :*

- (i) *there exists a one-parameter subgroup  $\lambda$  of  $H$  such that  $S$  is an irreducible component of  $\{y \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)y = x\}$ .*
- (ii) *If in addition  $X$  is smooth, then  $S$  is equivariantly isomorphic to a  $H_S$ -module and  $S^{\text{ss}}(L_1|_S)//H_S$  is the quotient of a projective toric variety by a finite group. Moreover, this quotient is the normalization of  $Y$ .*
- (iii) *If in addition the rank of  $H^\circ$  is equal to one, then  $\phi^{-1}(\pi_2(x))$  is isomorphic to the quotient of a weighted projective space by a finite group.*

**Proof :** The first assertion is a well-known fact about torus actions. Let us assume that  $X$  is smooth. Then,  $\Sigma$  is isomorphic to a nilcone for the action of the torus  $H^\circ$ . In particular, the irreducible component  $S$  of  $\Sigma$  is equivariantly isomorphic to an  $H_S$ -module, denoted by  $V$ .

Let  $\mathcal{T}$  be a maximal torus of  $\text{GL}(V)$  containing the image of  $H^\circ$ . Let  $L_V$  denote the restriction (after identification of  $V$  with  $S$ ) of  $L_1$  to  $V$ . The semistability of a point  $v$  in  $V$  for  $L_V$  depends only on the weights of  $v$  for the action of  $H^\circ$ . In particular,  $\mathcal{T}$  stabilizes the open set  $V^{\text{ss}}(L_V)$ . Moreover, the actions of  $H^\circ$  and of  $\mathcal{T}$  on  $V$  commute. Hence,  $\mathcal{T}$  acts on  $V^{\text{ss}}(L_V)//H^\circ$ . Because  $\mathcal{T}$  has a dense orbit in  $V$ , it has a dense orbit in  $V^{\text{ss}}(L_V)//H^\circ$ , too. Thus,

$S^{\text{ss}}(L_{1|S})//H_S$  is the quotient of the projective toric variety  $V^{\text{ss}}(L_V)//H^\circ$  by the finite group  $H_S/H^\circ$ . Moreover, this quotient is normal. Then, the birational finite morphism of Proposition 6.2 is the normalization of  $Y$ .

From now on, we assume in addition that  $H^\circ$  is isomorphic to  $k^*$ . Then,  $S$  is isomorphic to a  $k^*$ -module and by Proposition 6.2,  $S^{\text{ss}}(L_{1|S})//H_S$  is the quotient of a weighted projective space by  $H_S/H^\circ$ . Moreover, an easy study of the linear actions of  $k^*$  shows that  $\Sigma$  has at most two irreducible components, and that  $\Sigma \cap V^{\text{ss}}(L_{1|V})$  is contained in one irreducible component of  $\Sigma$ . In particular, with the notation of Proposition 6.2,  $H_S = H$ . But, by Proposition 6.1,  $\phi^{-1}(\pi_2(x))$  is isomorphic to  $\Sigma^{\text{ss}}(L_{1|\Sigma})//H$ . Then,  $\phi^{-1}(\pi_2(x))$  is isomorphic to  $S^{\text{ss}}(L_{1|S})//H$ . Assertion (iii) of the proposition is proved.  $\square$

**Remark :** With additional assumptions, Part (iii) of Proposition 6.5 was proved, by different methods, by M. Thaddeus in [4] and by I. Dolgachev and Y. Hu in [5]. In particular, I. Dolgachev and Y. Hu have shown that the assumptions of Proposition 6.5 are fulfilled for the diagonal action of  $G$  on  $X \times G/B$ , where  $B$  is a Borel subgroup of  $G$ .

The following proposition is an application of Propositions 6.4 and 6.5 to the actions of  $\text{SL}(2)$ .

**Proposition 6.6** *Let  $X$  be a  $\text{SL}(2)$ -variety. Then :*

- (i) *Any wall is the intersection of an hyperplane and  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$ .*
- (ii) *Let  $\phi$  be a morphism like in Diagram 3. We assume that  $X$  is smooth. Then the fibers of  $\phi$  are weighted projective spaces.*

**Proof :** Since the rank of  $\text{SL}(2)$  is equal to one, Proposition 6.4 shows that the codimension of  $\Omega(x)$  is less than one for all  $x \in X$ . Now, by Proposition 3.2, a wall cannot have a boundary in  $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$ . The first assertion follows immediately.

From now on, we assume that  $X$  is smooth. Let  $L_1, L_2, \pi_1, \pi_2, \phi, x, H$  and  $\Sigma$  like in Propositions 6.1. Then,  $H$  is a reductive subgroup of  $\text{SL}(2)$  which has a character of infinite order. This implies easily that  $H$  is a maximal torus of  $\text{SL}(2)$ . Then, Propositions 6.1 and 6.2 shows that  $\phi^{-1}(\pi_2(x))$  is isomorphic to a weighted projective space.  $\square$

As an example, we refer to [13] for a detailed study of the diagonal action of  $\text{SL}(2)$  on  $(\mathbb{P}^1)^n$ .

## 6.4 Actions of $k^* \times \mathbf{SL}(2)$

We use the notation of Proposition 6.1. Let  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) denote the GIT-class of  $L_1$  (resp.  $L_2$ ). Proposition 6.1 shows that the fibers of  $\phi$  are simpler when  $H$  is small. Moreover, Propositions 6.3 and 6.4 show that  $H$  is small when the dimension of  $\Omega(x)$  is large. As a consequence, natural restrictions in the study of the morphism  $\phi$  are :

$$\begin{aligned} (H_1) \quad & F_1 \text{ is a chamber} \\ (H_2) \quad & \text{codim}(F_2) = 1 \end{aligned}$$

where  $\text{codim}(F_2)$  is the codimension of  $F_2$  in  $C^G(X)$ . Moreover, these assumptions are fulfilled for the morphisms  $\phi_{\pm,i}$  considered in Diagram 2. On the other hand, Propositions 6.1 and 6.5 are more precise if  $X$  is smooth.

Actually, in [5] and [4] the assumption  $(H_1)$  is replaced by :  $X^{\text{ss}}(F_1) = X^s(F_1)$ . Yet, if one wants to apply Construction 2 to two chambers  $C$  and  $C'$  such that  $X^{\text{ss}}(C) = X^s(C)$  and  $X^{\text{ss}}(C') = X^s(C')$ , one may have to consider chambers  $C_i$  such that  $X^{\text{ss}}(C_i) \neq X^s(C_i)$ . This happens indeed for  $G = k^* \times \mathbf{SL}(2)$ , see the example in the appendix of [5].

On the other hand, if  $G$  is a torus and  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  hold, then the fibers of  $\phi$  are weighted projective spaces (this follows from [5] or from Proposition 6.5). The same holds if  $G = \mathbf{SL}(2)$  by Proposition 6.6. Yet, the following examples show that for the actions of  $k^* \times \mathbf{SL}(2)$  on a smooth variety, various varieties can occur as fibers of  $\phi$ , even under the assumptions  $(H_1)$  and  $(H_2)$ . We will give two examples where the morphism  $\phi$  satisfies Assumptions  $(H_1)$  and  $(H_2)$ , whereas  $\phi$  has

- (i) a reducible fiber, or
- (ii) an irreducible and non normal fiber.

We will need the following technical lemma.

**Lemma 6.2** *Let  $V$  be a finite dimensional vector space. Let  $V_+$  and  $V_-$  be two vector subspaces. Let  $H$  be a reductive group acting on  $V_+ \cup V_-$ . Let  $H_+$  denote the stabilizer of  $V_+$  in  $H$ . We assume that  $V_+ \cup V_- = H \cdot V_+$  and that  $H/H_+$  acts trivially on  $(V_+ \cap V_-)//H_+$ . Then, we have :*

$$(V_+ \cup V_-)//H \simeq V_+//H_+.$$

**Proof :** We claim that the restriction maps from  $k[V_+ \cup V_-]$  to  $k[V_+]$  and  $k[V_-]$  induces an isomorphism :

$$k[V_+ \cup V_-] \simeq \left\{ (f_+, f_-) \in k[V_+] \times k[V_-] \text{ such that } f_{+|_{V_+ \cap V_-}} = f_{-|_{V_+ \cap V_-}} \right\}.$$

Indeed, let  $f_{\pm} \in k[V_{\pm}]$  such that  $f_{+|V_+ \cap V_-} = f_{-|V_+ \cap V_-}$ . Let  $W$  be a vector subspace of  $V$  and  $W_{\pm}$  be two vector subspaces of  $V_{\pm}$  such that  $V = W \oplus W_+ \oplus W_- \oplus (V_+ \cap V_-)$ . We define a function  $\tilde{f}$  on  $V$  by the formula :  $\tilde{f}(w + w_+ + w_- + v) = f_+(w_+ + v) + f_-(w_- + v) - f_+(v)$  for all  $w \in W$ ,  $w_{\pm} \in W_{\pm}$  and  $v \in V_+ \cap V_-$ . Then,  $\tilde{f}$  is regular on  $V$  and the restrictions of  $\tilde{f}$  to  $V_+$  and  $V_-$  are respectively equal to  $f_+$  and  $f_-$ . The claim follows easily.

Now, we consider the morphism  $\theta : H \times_{H_+} V_+ \longrightarrow V_+ \cup V_-$  induced by the action of  $H$  on  $V_+ \cup V_-$ . Via the comorphism  $\theta^*$  of  $\theta$ ,  $k[V_+ \cup V_-]$  is identified to a subalgebra of  $k[H \times_{H_+} V_+]$ . In particular,  $\theta^*(k[V_+ \cup V_-]^H) \subset k[H \times_{H_+} V_+]^H \simeq k[V_+]^{H_+}$ .

It is sufficient to prove that  $\theta^*(k[V_+ \cup V_-]^H) = k[H \times_{H_+} V_+]^H$ . Let  $f \in k[H \times_{H_+} V_+]^H$ . Let  $s \in V_+$  and  $h \in H$  such that  $h \cdot s \in V_+$ . Consider the quotient map,  $\pi : V_+ \longrightarrow V_+ // H_+$ . If  $h \in H_+$ , then  $\pi(s) = \pi(h \cdot s)$ . Otherwise,  $h \cdot s \in V_+ \cap V_-$ . But  $H/H_+$  acts trivially on  $(V_+ \cap V_-) // H_+$ . Then,  $\pi(s) = \pi(h \cdot s)$ . Thus, for all  $s \in V_+$  and  $h \in H$  such that  $h \cdot s \in V_+$ , we have  $f(1 : s) = f(1 : h \cdot s)$ . Now, the claim implies that  $f$  belongs to  $\theta^*(k[V_+ \cup V_-]^H)$ . The lemma follows immediately.  $\square$

**Examples** We begin by fixing some notation. From now on,  $G$  denotes the group  $k^* \times \text{SL}(2)$ . Let  $\chi_0$  denote the character of  $G$  defined by  $\chi_0(t, g) = t$  for all  $t \in k^*$  and  $g \in \text{SL}(2)$ . Let  $T$  be the maximal torus of  $\text{SL}(2)$  of diagonal matrices and  $N(T)$  be its normalizer.

Let  $n \in \mathbb{Z}$  and  $d \in \mathbb{N}$ . We denote by  $V_d$  the  $\text{SL}(2)$ -module of binary forms of degree  $d$  in variables  $a$  and  $b$ . We define an action of  $k^*$  on  $V_d$  which commutes to the action of  $\text{SL}(2)$  by the formula :  $t \cdot v = t^n v$  for all  $t \in k^*$  and  $v \in V_d$ . We obtain a  $G$ -module denoted by  $V_{d,n}$ .

Let  $W$  be a  $G$ -module (two specific choices of  $W$  will be given below). Set

$$X = \mathbb{P}(V_{2,0}) \times \mathbb{P}(W \oplus V_{0,1}).$$

Let  $\pi_1 : X \longrightarrow \mathbb{P}(V_{2,0})$  and  $\pi_2 : X \longrightarrow \mathbb{P}(W \oplus V_{0,1})$  denote the projection maps. Set  $L_1 = \pi_1^*(\mathcal{O}(1))$  and  $L_2 = \pi_2^*(\mathcal{O}(1))$ . We linearize  $L_1$  and  $L_2$  canonically; that is, such that  $\Gamma(X, L_1)^*$  is  $G$ -isomorphic to  $V_{2,0}$  and  $\Gamma(X, L_2)^*$  to  $W \oplus V_{0,1}$ . With the notation of Section 6.1, we have :  $\text{Pic}^G(X) = \text{NS}^G(X) = \mathbb{Z}L_1 \oplus \mathbb{Z}L_2 \oplus \mathbb{Z}L_{\chi_0}$ . Let  $\mathbb{R}_{>0}$  denote the interval  $]0; +\infty[$ . Then,

$$\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}_{>0}L_1 + \mathbb{R}_{>0}L_2 + \mathbb{R}L_{\chi_0}.$$

The decomposition of  $V_2$  in eigenspaces for the action of  $T$  is  $V_2 = k.a^2 \oplus k.ab \oplus k.b^2$ . Denote the elements of  $X$  by  $([f], [(w, \tau)])$  where  $f \in V_2$ ,  $w \in W$  and  $\tau \in V_{0,1}$ . Consider

$$x_0 = ([ab], [(0, 1)]).$$

The stabilizer of  $x_0$  is  $k^* \times N(T)$ . We identify, as vector spaces,  $T_{x_0}X$  with  $(k.a^2 \oplus k.b^2) \times W$ , and  $T_{x_0}(G \cdot x_0)$  with  $k.a^2 \oplus k.b^2$ . In particular,  $T_{x_0}X/T_{x_0}(G \cdot x_0)$  is isomorphic to  $W$  as a vector space. Let  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  denote the morphism induced by the action of  $G$  on  $W$ . We denote by  $W \otimes -\chi_0$  the representation of  $k^* \times N(T)$  given by  $\tilde{\rho} : k^* \times N(T) \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ ,  $(t_0, t_1) \mapsto t_0^{-1}\rho((t_0, t_1))$ . Then, we have the following isomorphism of  $k^* \times N(T)$ -modules :

$$T_{x_0}X/T_{x_0}(G \cdot x_0) \simeq W \otimes -\chi_0.$$

Let  $m$  and  $n$  be positive integers. Let  $V^{m,n}$  denote the  $G$ -module  $V_{2,0}^{\otimes m} \otimes (W \oplus V_{0,1})^{\otimes n}$ . Consider the Segre embedding  $i$  of  $X$  in  $\mathbb{P}(V^{m,n})$ . Let  $L_{m,n}$  be the line bundle  $\mathcal{O}(1)$  on  $\mathbb{P}(V^{m,n})$  canonically linearized; in particular,  $i^*(L_{m,n}) = mL_1 + nL_2$  in  $\mathrm{Pic}^G(X)$ .

Let us use the notation of Section 1.3 for the action of  $k^* \times T$  on  $V^{m,n}$ . For all  $x \in X$ , the vertices of  $\mathrm{Conv}(\mathrm{st}(i_{m,n}(x)))$  belong to the set :

$$\mathcal{V} = \{m\alpha + n\beta \text{ such that } \alpha \in \mathrm{st}(V_{2,0}) \text{ and } \beta \in \mathrm{st}(W \oplus V_{0,1})\}.$$

Let  $\chi_1$  denote the character of  $k^* \times T$  defined by  $\chi_1(t_0, t_1) = t_1$  for all  $(t_0, t_1) \in k^* \times T$ . Then,  $\mathcal{X}^*(k^* \times T) = \mathbb{Z}\chi_0 \oplus \mathbb{Z}\chi_1$ . We have  $\mathrm{st}(i_{m,n}(x_0)) = \{n\chi_0\}$ . Moreover, for all  $g \in G$ ,  $n\chi_0$  belongs to  $\mathrm{st}(i_{m,n}(g \cdot x_0))$ . One can easily conclude that a point  $L_1 + qL_2 + \theta L_{\chi_0} \in \mathrm{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}^+$  belongs to  $\Omega(x_0)$  if and only if  $q = \theta$ .

### A first choice of $W$

Set

$$W = V_{1,-3} \oplus V_{1,-1} \oplus V_{1,1} \oplus V_{1,3}.$$

The weights of the action of  $k^* \times T$  on  $W \otimes -\chi_0$  are the crosses on Figure 1. The meaning of the polytopes  $\mathcal{N}_{1,u}$ ,  $\mathcal{N}_{2,u}$  and  $\mathcal{N}_{3,d}$  on Figure 1 will be explained later.

Set  $q = n/m$ . The set  $\mathcal{V}$  is represented by crosses on Figure 2 after dilatation of ratio  $1/m$ .

Set  $l_0 = L_1 + 36(L_2 + L_{\chi_0})$ . Note that  $l_0$  belongs to  $\Omega(x_0)$ . Set  $l_- = l_0 - L_{\chi_0}$  and  $l_+ = l_0 + L_{\chi_0}$ . We denote respectively by  $C_{\pm}$  the GIT-class of  $l_{\pm}$ . One

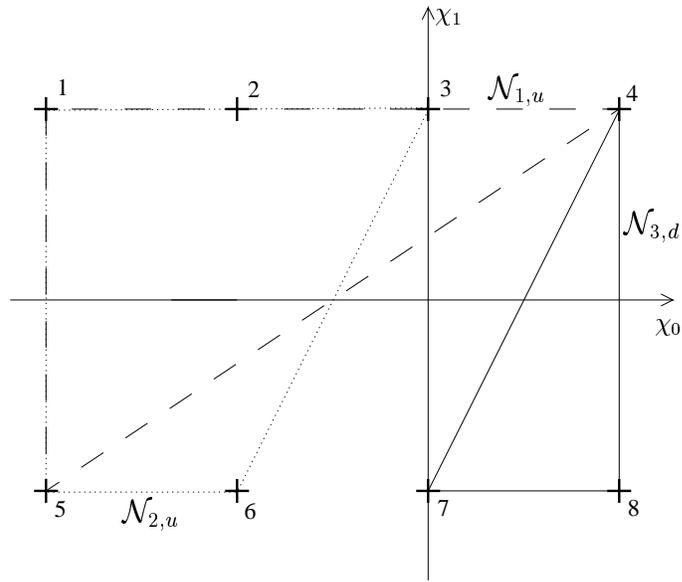


FIG. 1 – Weights of  $k^* \times T$  in  $W \otimes -\chi_0$ .

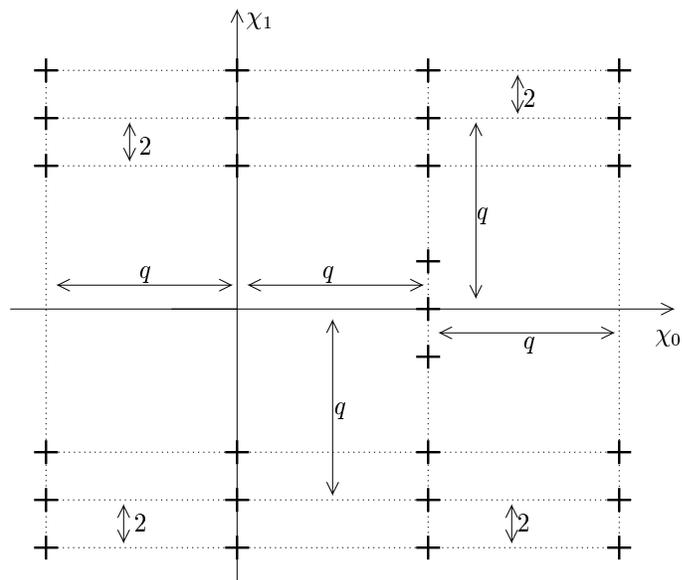


FIG. 2 – The set  $\mathcal{V}$ .

can easily see on Figure 2 that for  $q = 36$  the points  $35\chi_0$  and  $37\chi_0$  do not belong to the boundary of a polytope with vertices in  $\mathcal{V}$ . We conclude that  $C_+$  and  $C_-$  are chambers such that  $X^{\text{ss}}(C_{\pm}) = X^{\text{s}}(C_{\pm})$ . By similar arguments one can show that the GIT-class  $F_0$  of  $l_0$  is a face of  $C_+$  and  $C_-$ . Moreover, the codimension of  $F_0$  in  $C^G(X)$  is equal to one. In particular, we have :  $X^{\text{ss}}(C_-) \subset X^{\text{ss}}(F_0) \supset X^{\text{ss}}(C_+)$ . These inclusions induce a diagram :

$$\begin{array}{ccc} X^{\text{ss}}(C_-)//G & & X^{\text{ss}}(C_+)//G \\ & \searrow \phi_- & \swarrow \phi_+ \\ & X^{\text{ss}}(F_0)//G & \end{array}$$

Let  $\mathcal{N}$  denote the nilcone of  $W \otimes -\chi_0$  for the action of  $k^* \times N(T)$ . Let  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_8)$  be a base of  $W$  of eigenvectors for  $k^* \times T$  such that the weight of  $\epsilon_i$  is the cross  $i$  on Figure 1. Let  $(x_1, \dots, x_8)$  denote the dual basis of  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_8)$ . A vector  $v \in W$  belongs to  $\mathcal{N}$  if and only if 0 does not belong to the convex hull of the weights of  $v$  for  $k^* \times T$ . In particular, the irreducible components of  $\mathcal{N}$  correspond to the maximal convex hulls of weights of  $k^* \times T$  which do not contain 0. We obtain six irreducible components for  $\mathcal{N}$ . The equations of these six components are :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{N}_{1,u} : x_6 = x_7 = x_8 = 0 & \mathcal{N}_{1,d} : x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ \mathcal{N}_{2,u} : x_4 = x_7 = x_8 = 0 & \mathcal{N}_{2,d} : x_3 = x_4 = x_8 = 0 \\ \mathcal{N}_{3,u} : x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = 0 & \mathcal{N}_{3,d} : x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0 \end{array}$$

The convex hull of the weights of the action of  $k^* \times T$  on  $\mathcal{N}_{1,u}$ ,  $\mathcal{N}_{2,u}$  and  $\mathcal{N}_{3,d}$  are represented on Figure 1.

Proposition 6.1 shows that :

$$\phi_{\pm}^{-1}(\pi_0(x_0)) \simeq \mathcal{N}^{\text{ss}}(L_{\pm\chi_0}) // (k^* \times N(T)). \quad (4)$$

In particular,

$$\phi_+^{-1}(\pi_0(x_0)) \simeq (\mathcal{N}_{3,u} \cup \mathcal{N}_{3,d})^{\text{ss}}(L_{\chi_0}) // (k^* \times N(T)).$$

Moreover, by Lemma 6.2, we have  $(\mathcal{N}_{3,u} \cup \mathcal{N}_{3,d}) // N(T) \simeq \mathcal{N}_{3,u} // T$ . This implies that  $\phi_+^{-1}(\pi_0(x_0)) \simeq \mathcal{N}_{3,u}^{\text{ss}}(L_{\chi_0}) // (k^* \times T)$ . In particular, this fiber is a projective toric variety of dimension one. Then, we have

$$\phi_+^{-1}(\pi_0(x_0)) \simeq \mathbb{P}^1.$$

By Isomorphism 4,  $(\mathcal{N}_{1,u} \cup \mathcal{N}_{1,d})^{\text{ss}}(L_{-\chi_0}) // (k^* \times N(T))$  is isomorphic to an irreducible component of  $\phi^{-1}(\pi_0(x_0))$ . Write  $k[\mathcal{N}_{1,u}] = k[x_1, \dots, x_5]$ . The vector space  $k[\mathcal{N}_{1,u}]^T$  is generated by the monomials  $x_1^{n_1} \cdots x_5^{n_5}$  such that  $n_1 + \cdots + n_4 = n_5$ . Moreover, the weight of such a monomial for  $k^* \times T$  is  $-2(4n_1 + 3n_2 + 2n_3 + n_4)\chi_0$ . In particular, the quotient  $\mathcal{N}_{1,u}^{\text{ss}}(L_{-\chi_0}) // (k^* \times T)$  is isomorphic to the weighted projective space  $\mathbb{P}(1, 2, 3, 4)$  and  $N(T)/T$  acts trivially on  $(\mathcal{N}_{1,u} \cap \mathcal{N}_{1,d}) // T$ . Then, Lemma 6.2 allows us to conclude that this irreducible component of  $\phi^{-1}(\pi_0(x_0))$  is isomorphic to  $\mathbb{P}(1, 2, 3, 4)$ .

Let  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  denote the set of non negative real numbers. If  $d$  is a non negative integer, we denote by  $\mathcal{P}_d$  the set of  $(n_1, n_2, n_3, n_5, n_6) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^5$  such that :

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 &= n_5 + n_6 \\ \text{and } 4(n_1 + n_5) + 2n_2 + 2n_6 &= d. \end{aligned}$$

Then,  $\mathcal{P}_d$  is a convex polytope.

One can easily prove that  $\mathcal{N}_{2,u}^{\text{ss}}(L_{-\chi_0}) // (k^* \times T)$  is isomorphic to

$$\text{Proj} \left( \bigoplus_{d \geq 0} \bigoplus_{(n_1, n_2, n_3, n_5, n_6) \in \mathcal{P}_d \cap \mathbb{Z}^5} k \cdot x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} x_5^{n_5} x_6^{n_6} \right).$$

Since the polytopes  $\mathcal{P}_d$  are not simplicial, this toric variety is not a weighted projective space. Moreover, Isomorphism 4 and Lemma 6.2 imply that an irreducible component of  $\phi^{-1}(\pi_0(x_0))$  is isomorphic to this toric variety.

### A second choice of $W$

Set

$$W = V_{1,-1} \oplus V_{1,1} \oplus V_{3,3}.$$

The weights of the action of  $k^* \times T$  on  $W \otimes -\chi_0$  are the crosses on Figure 3.

As in the previous example, we set  $l_0 = L_1 + 36(L_2 + L_{\chi_0})$ ,  $l_{\pm} = l_0 \pm L_{\chi_0}$ . The GIT-classes of  $l_{\pm}$  are two chambers  $C_{\pm}$  and the GIT-class of  $l_0$  is a maximal face  $F_0$  of  $C_+$  and  $C_-$ , too. Let  $\phi_+ : X^{\text{ss}}(C_+) // G \rightarrow X^{\text{ss}}(F_0) // G$  denote the morphism induced by the inclusion  $X^{\text{ss}}(C_+) \subset X^{\text{ss}}(F_0)$ .

The nilcone  $\mathcal{N}$  of  $W \otimes -\chi_0$  has four irreducible components. With obvious notation, the equations of these components are :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{1,u} : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0 & \quad \mathcal{N}_{1,d} : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_8 = 0 \\ \mathcal{N}_{2,u} : x_5 = x_6 = x_7 = 0 & \quad \mathcal{N}_{2,d} : x_6 = x_7 = x_8 = 0 \end{aligned}$$

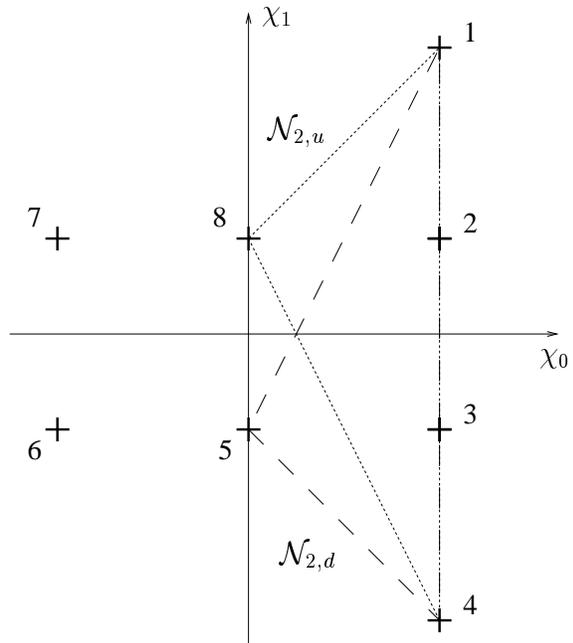


FIG. 3 – Weights of  $k^* \times T$  in  $W \otimes -\chi_0$ .

By Proposition 6.1, we have :

$$\phi_+^{-1}(\pi_0(x_0)) \simeq (\mathcal{N}_{2,u} \cup \mathcal{N}_{2,d})^{\text{ss}}(L_{\chi_0}) // (k^* \times N(T)).$$

Moreover, by Proposition 6.2, the natural map

$$\bar{\theta} : \mathcal{N}_{2,u}^{\text{ss}}(L_{\chi_0}) // (k^* \times T) \longrightarrow (\mathcal{N}_{2,u} \cup \mathcal{N}_{2,d})^{\text{ss}}(L_{\chi_0}) // (k^* \times N(T))$$

is birational and finite.

The restriction of  $\bar{\theta}$  to  $(\mathcal{N}_{2,u} \cap \mathcal{N}_{2,d})^{\text{ss}}(L_{\chi_0}) // (k^* \times T)$  is the quotient by the action of  $N(T)/T$ . But we have :

$$k[\mathcal{N}_{2,u} \cap \mathcal{N}_{2,d}]^T = k[x_1x_4, x_2x_3, x_1x_3^3, x_4x_2^3].$$

Let  $\alpha : k[X_1, X_2, X_3, X_4] \longrightarrow k[x_1x_4, x_2x_3, x_1x_3^3, x_4x_2^3]$  be the morphism defined by  $\alpha(X_1) = x_1x_4$ ,  $\alpha(X_2) = x_2x_3$ ,  $\alpha(X_3) = x_1x_3^3$  and  $\alpha(X_4) = x_4x_2^3$ . Then,  $\alpha$  induces an isomorphism  $\bar{\alpha}$  from  $k[X_1, X_2, X_3, X_4]/(X_3X_4 - X_1X_2^3)$  onto  $k[\mathcal{N}_{2,u} \cap \mathcal{N}_{2,d}]^T$ .

Moreover,

$$k[\mathcal{N}_{2,u} \cap \mathcal{N}_{2,d}]^{N(T)} = \bar{\alpha}(k[X_1, X_2, X_3 + X_4]),$$

which is strictly contained in  $k[\mathcal{N}_{2,u} \cap \mathcal{N}_{2,d}]^T$ .

In particular,  $\bar{\theta}$  is not an isomorphism. Since,  $\mathcal{N}_{2,u}^{\text{ss}}(L_{\chi_0}) // (k^* \times T)$  is normal, this implies that  $\phi_+^{-1}(\pi_0(x_0))$  is irreducible but not normal.



# Bibliographie

1. KRAFT, H. Geometrische Methoden in der Invariantentheorie. Braunschweig-Weisbaden, Vieweg, 1985.
2. FOGARTY, J. MUMFORD, D. and KIRWAN, F. *Geometric Invariant Theory*. Springer Verlag, New York, 3d edition, 1994.
3. BRION, M. and PROCESI, C. Action d'un tore dans une variété projective. In Duflo M. Joseph A. Connes, A. and R. Rentschler, editors, *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory*, pages 509–539. Birkhäuser, 1990.
4. THADDEUS, M. Geometric invariant theory and flips. *J. of Amer. Math. Soc.*, 9(3) :691–723, 1996.
5. DOLGACHEV, I. and HU, Y. Variation of Geometric Invariant Theory Quotients. *Pub. IHES*, pages 5–56, 1998.
6. WALTER, C. Variation of Quotients and Etale Slices in Geometric Invariant Theory. *Preprint*, 1998.
7. NESS, L. Mumford's numerical function and stable projective hypersurfaces. In *Algebraic geometry*, pages 417–453, Copenhagen, 1978. Springer Lecture Notes in Math., 732.
8. KEMPF, G. Instability in invariant theory. *Ann. of Math.*, 108 :2607–2617, 1978.
9. NESS, L. A stratification of the null cone via the moment map. *Amer. Jour. of Math.*, 106 :1281–1325, 1984.
10. HESSELINK, W. Desingularization of varieties of null forms. *Inven. Math.*, 55 :141–163, 1979.
11. HEIZNER, P. and MIGLIORINI, L. Projectivity of moment map quotients. *Preprint*, (dg-ga/9712008), Dec 1997.

12. VINBERG, V.L. and POPOV, E.B. Invariant Theory. In *Algebraic Geometry IV*, number 55 in Encyclopedia in Mathematical Sciences, pages 123–238. Springer-Verlag, 1994.
13. POLITO, M.  $SL(2, \mathbb{C})$ -quotients de  $(\mathbb{P}^1)^n$ . *C.R. Acad. Sci. Paris*, 321(I) :1577–1582, 1995.

-  $\diamond$  -

Deuxième partie

**PLONGEMENTS  
D'ESPACES HOMOGENES SPHERIQUES  
ET  
THEORIE GEOMETRIQUE  
DES INVARIANTS**



# Chapitre 1

## Introduction

Donnons pour commencer une idée des motivations lointaines de ce travail. Posons pour cela une très jolie question :

Combien de coniques du plan projectif complexe  
sont tangentes à 5 coniques données ?

L'histoire de cette question d'apparence très simple commence en 1848 lorsque Steiner affirme que lorsque les 5 coniques sont en position générale, la réponse est 7776 (c'est-à-dire  $6^5$ ). Quelques années plus tard, en 1864, Chasles le contredit et donne la réponse de 3264. Bien que ce dernier résultat soit exact, le calcul de Chasles était peu rigoureux et assez mal compris ; si bien que cette question a été revisitée de nombreuses fois à travers les années. Cependant, il a fallu attendre 1974(!) et un travail de Kleiman (voir [31]) pour obtenir une démonstration complète du résultat de Chasles. On pourra consulter [32] pour plus d'informations.

La question en dimension trois est : combien de quadriques sont tangentes à 9 quadriques données ? Le nombre 666 841 088 a été avancé par Schubert en 1870 et justifié rigoureusement seulement en 1980.

L'exemple le plus impressionnant que je connaisse est le suivant. En 1874, Schubert a affirmé que 5 819 539 783 680 cubiques gauches étaient tangentes à 12 quadriques données en position générale!!! En 1987, S. Kleiman, S. Stromme et S. Xambo ont esquissé dans [30] une vérification du résultat de Schubert.

Les trois questions ci-dessus font partie de ce domaine passionnant des mathématiques qu'est la géométrie énumérative. Plus généralement, on cherche parmi un ensemble  $\mathcal{E}$  d'objets géométriques, combien vérifient des

conditions imposées. Il n'est pas rare que  $\mathcal{E}$  soit un espace homogène sous l'action d'un groupe algébrique (intuitivement, ceci signifie que  $\mathcal{E}$  est un ensemble d'objets de même nature) : par exemple les sous-espaces linéaires de dimension donnée d'un espace projectif, les quadriques non dégénérées ou les coniques d'un espace projectif de dimension quelconque... Un aspect du 15<sup>ème</sup> problème de Hilbert est alors de donner une base rigoureuse au « calcul de Schubert » sur les espaces homogènes. Ceci est une des motivations qui ces 20 dernières années a poussé de nombreux mathématiciens à étudier les compactifications d'espaces homogènes algébriques. Plus précisément, si on désigne par  $G/H$  l'espace homogène considéré, C. De Concini et C. Procesi ont défini dans [18] le groupe des conditions  $C^*(G/H)$  qui explique « l'algèbre des conditions » utilisée implicitement par Chasles et Schubert. De plus, dans le cas où  $G/H$  est symétrique (i.e.  $G$  est réductif et  $H$  est l'ensemble des points fixes d'une involution de  $G$ ), C. De Concini et C. Procesi déduisent de l'étude de  $C^*(G/H)$  une interprétation du « calcul de Schubert » en termes de limites des anneaux de cohomologies des compactifications équivariantes de  $G/H$ . La description de ces algèbres de cohomologies est le sujet de nombreux articles (voir par exemple [4, 20, 17, 18, 19, 36]). Malgré tous ces travaux, des zones d'ombre importantes persistent.

Motivés par ces questions de géométrie énumérative, nous proposons dans ce travail d'utiliser la Théorie Géométrique des Invariants pour étudier certaines compactifications d'espace homogènes algébriques. Commençons par préciser le type d'espaces homogènes concernés par cette thèse.

Soit  $G$  un groupe algébrique réductif et  $H$  un sous-groupe algébrique de  $G$ . On appelle plongement de l'espace homogène  $G/H$ , une variété algébrique normale munie d'une action de  $G$  et contenant  $G/H$  comme orbite ouverte. En 1983, dans [38], D. Luna et T. Vust ont jeté les bases d'une théorie des plongements d'espaces homogènes. Le cas sphérique, c'est-à-dire lorsqu'un sous-groupe de Borel de  $G$  admet une orbite dense dans  $G/H$  a depuis fait l'objet d'une attention particulière. Des exemples d'espaces homogènes sphériques sont les variétés de drapeaux, les tores ou encore les espaces symétriques. Généralisant la théorie des variétés toriques, D. Luna et T. Vust mais aussi M. Brion, F. Knop et F. Pauer ont développé une théorie particulièrement agréable qui classe les plongements d'un espace homogène sphérique donné. Par ailleurs, M. Brion remarque dans l'introduction de [9] que l'interprétation sus-citée (voir [18]) de  $C^*(G/H)$  en termes de cohomologie des plongements de  $G/H$  est encore valable lorsque  $G/H$  est sphérique.

C'est pour ces raisons que nous nous intéresserons par la suite aux espaces homogènes sphériques et à leurs compactifications.

Nous pouvons remarquer qu'hormis les variétés toriques et les variétés de drapeaux, les compactifications projectives d'espaces homogènes sphériques les mieux comprises sont sans doute celles d'un groupe semi-simple  $G$  vu comme espace homogène sous l'action de  $G \times G$  par multiplication à gauche et à droite (voir [13, 17, 36]). Notre approche pour étudier les compactifications projectives d'un espace homogène sphérique,  $G/H$  consiste à les réaliser comme quotient sous l'action de  $H$  de compactifications de  $G$ .

Afin d'appliquer le programme exposé ci-dessus, il convient de définir des « quotients » d'une compactification projective  $X$  de  $G$  sous l'action de  $H$  à droite. Lorsque  $H$  est réductif, la Théorie Géométrique des Invariants associe à chaque fibré en droites ample et  $G \times H$ -linéarisé  $\mathcal{L}$  sur  $X$ , un ouvert  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  qui admet un quotient catégorique  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  sous l'action de  $\{1\} \times H$ . De plus, le morphisme quotient  $\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \rightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  est alors  $G$ -équivariant. Si maintenant  $H$  n'est pas réductif, en utilisant des résultats exposés dans [24], on peut faire la même construction que si  $H$  est réductif et définir  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$ ,  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  et  $\pi$ . Ainsi, contrairement à ce que l'on pourrait penser, il n'est pas a priori nécessaire de supposer que  $H$  est réductif pour donner un sens au programme proposé.

Nous pouvons maintenant préciser les objectifs de cette thèse. Partant d'un plongement projectif  $Y$  de  $G/H$ , on se propose de construire une compactification  $X$  de  $G$  munie d'un fibré en droites  $\mathcal{L}$  ample et  $G \times H$ -linéarisé telle que la  $G$ -variété quotient  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  soit isomorphe à  $Y$ .

La première question que l'on se pose est : pour quels plongements  $Y$  existent-ils  $X$  et  $\mathcal{L}$  tels que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H = Y$ ? Nous répondons à cette question par le

**Théorème** *Soit  $G$  un groupe réductif et  $H$  un sous-groupe sphérique de  $G$ . On suppose que l'action de  $G$  sur  $G/H$  a un noyau fini. Soit  $Y$  un plongement projectif de  $G/H$ . Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe un plongement projectif  $X$  de  $G$  et un fibré en droites ample et  $G \times H$ -linéarisé  $\mathcal{L}$  sur  $X$  tels que*

$$Y = X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H.$$

- (ii) *Pour tout diviseur premier  $D$  stable par  $G$  de  $Y$ , la valuation  $\nu_D$  du corps  $k(G/H)$  s'étend en une valuation  $G \times G$ -invariante de  $k(G)$ .*

La démonstration de ce théorème s'inspire fortement d'un travail de E. Renner (voir [42]) qui, utilisant des méthodes de monoïdes algébriques, propose, sous certaines hypothèses une construction pour  $X$  et  $\mathcal{L}$ . Cependant, l'étude d'exemples montre qu'il manque des hypothèses au théorème principal de cet article. Remarquons par ailleurs que le théorème ci-dessus était déjà connu lorsque  $G$  est adjoint,  $H$  est un sous-groupe symétrique de  $G$  et  $Y$  est le plongement magnifique (voir [17] pour une définition de ce plongement) de  $G/H$ . En effet, S. Kannan a montré dans [28] que dans ce cas, il existe sur le plongement magnifique  $X$  de  $G$  un fibré en droites  $\mathcal{L}$  ample et  $G \times H$ -linéarisé tel que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  soit le plongement magnifique de  $G/H$ .

L'étude de quelques exemples (voir la section 7.5) montre que les quotients donnés par la démonstration du théorème précédent (c'est-à-dire par la construction de E. Renner) sont rarement des quotients géométriques, c'est-à-dire que les fibres du morphisme quotient  $\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow Y$  ne sont pas en général des orbites de  $\{1\} \times H$ . On se pose alors la question suivante : étant donné  $Y$  un plongement projectif de  $G/H$  vérifiant le théorème précédent, peut-on trouver  $X$  et  $\mathcal{L}$  tels que  $Y$  soit le quotient géométrique de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  ?

De nombreux articles (voir [29, 46, 2, 27, 1, 3, 45]) traitent du cas où  $G$  est un tore. Ainsi, diverses approches parmi lesquelles figure la Théorie Géométrique des Invariants, ont été explorés pour définir des « quotients » d'une variété torique sous l'action d'un sous-tore du grand tore. Ces travaux révèlent de sérieuses difficultés dans le cas torique.

À l'opposé des tores parmi les espaces homogènes sphériques figurent les espaces homogènes sobres (voir la section 2.3) pour lesquels  $\text{Aut}^G(G/H)$  est fini. C'est pour les plongements toroïdaux (voir 2.5) de ces espaces homogènes que nous avons répondu à la question précédente par le

**Théorème** *Soit  $G$  un groupe semi-simple et  $G/H$  un espace homogène sphérique sobre. Soit  $Y$  un plongement projectif et toroïdal de  $G/H$ .*

*Si toute valuation  $G$ -invariante de  $k(G/H)$  s'étend en une valuation  $G \times G$ -invariante de  $k(G)$  alors :*

*il existe un plongement  $X$  de  $G \times G/\Delta G$  projectif, toroïdal et muni d'un fibré en droites ample et  $G \times H$ -linéarisé  $\mathcal{L}$  tel que le quotient,*

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$$

*de  $X$  par  $\{1\} \times H$  associé à  $\mathcal{L}$  vérifie :*

- (i)  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H = Y$ ,*
- (ii)  $\forall x \in X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \quad \pi^{-1}(\pi(x)) = (\{1\} \times H).x$ ,*

(iii)  $\pi$  est surjective.

Dans le premier chapitre, nous exposons les définitions et les résultats préliminaires dont nous aurons besoin par la suite. En particulier, nous introduisons les définitions et les théorèmes qui classifient les plongements d'un espace homogène sphérique donné. Nous décrivons aussi la géométrie locale de ces plongements. Nous étudions la classe des plongements « toroïdaux » (ou sans couleur) qui joue un rôle privilégié dans la théorie et dans notre travail. Nous portons ensuite notre attention sur les plongements quasi-projectifs et étudions les polyèdres moments associés à des fibrés en droites amples et  $G$ -linéarisés. Nous donnons aussi les principales propriétés du graphe  $\Gamma(G/H)$  dont les sommets sont les orbites d'un sous-groupe de Borel de  $G$  dans  $G/H$ . Pour finir ce chapitre, nous montrons deux résultats sur les diviseurs d'un espace homogène. Ces derniers nous seront utiles lorsque nous voudrons calculer le lieu des zéros de sections de fibrés en droites sur les plongements de  $G$ .

Les quotients de compactifications d'un groupe  $G$  par un sous-groupe sphérique  $H$  sont définis par des algèbres d'éléments  $H$ -invariants dans certaines  $G$ -algèbres. Nous nous attachons donc dans le deuxième chapitre à décrire l'ensemble des  $G$ -modules simples qui contiennent un invariant de  $H$  ou plus généralement, un vecteur propre de poids donné pour  $H$ . Nous appliquons ce résultat à la description de polyèdres moments de plongements de  $G/H$ .

Comme il est bien évident que l'espace homogène sphérique  $G$  (sous l'action de  $G \times G$  par multiplication à gauche et à droite) joue un rôle central dans notre travail, nous rassemblons dans le chapitre 3 des résultats utiles le concernant.

Le chapitre 4 n'a pas de raison d'être lorsque  $H$  est réductif. En effet, nous y exposons la construction de la Théorie Géométrique des Invariants pour l'action d'un sous-groupe sphérique d'un groupe réductif.

Dans le cinquième chapitre, nous montrons le premier résultat significatif de ce travail en répondant à la question : quels plongements projectifs d'un espace homogène sphérique donné  $G/H$  peuvent-ils être réalisés comme quotient de plongements projectifs de  $G$  ?

Dans les chapitres six à huit, nous changeons de point de vue. Plus précisément, on se donne un plongement  $X$  de  $G$  et un fibré en droites  $\mathcal{L}$  ample et  $G \times H$ -linéarisé sur  $X$ . On étudie alors le quotient  $\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \rightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  associé. Dans le chapitre 6, nous décrivons un polytope moment

$\mathbf{P}(X, \mathcal{L})^H$  de la  $G$ -variété  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$ . Nous donnons ensuite un critère pour que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  soit un plongement de  $G/H$ . Nous expliquons aussi comment on peut lire quelques propriétés du morphisme  $\pi$  sur le polytope moment de  $X$  associé à  $\mathcal{L}$  et sur  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})^H$ . Dans le chapitre 7, on se donne un plongement toroïdal  $X$  de  $G$  et un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$ . On s'intéresse alors aux diviseurs stables par  $B \times H$  dans  $X$ . Fort des résultats du chapitre 7, dans le huitième nous pouvons calculer le lieu des zéros de sections  $B \times H$ -équivariantes d'un fibré  $\mathcal{L}$  sur  $X$  et obtenir sous certaines hypothèses un critère pour que  $\pi$  soit un quotient géométrique (voir la proposition 9.3.1).

Dans le chapitre 9, nous montrons que si un plongement projectif sans couleur  $Y$  d'un espace homogène sphérique sobre peut être obtenu comme quotient d'un plongement de  $G$ , alors il est le quotient géométrique d'un plongement de  $G$ . Pour cela nous commençons par expliquer notre construction sur quelques exemples, nous traitons ensuite le cas où  $Y$  est le plongement canonique de  $G/H$ , puis montrons le théorème. Nous utilisons aussi ce théorème pour décrire les isotropies dans  $G$  des points de  $Y$ .

Dans un dernier chapitre, nous nous intéressons aux adhérences des orbites de  $B \times H$  dans un plongement toroïdal de  $G$ .

Dans une annexe, nous expliquons sur un exemple qui nous est utile dans notre travail, comment on peut calculer les différents objets considérés dans la théorie des plongements d'un espace homogène sphérique.

# Chapitre 2

## Généralités sur les variétés sphériques

### 2.1 Introduction

Fixons un corps de base  $k$  algébriquement clos et de caractéristique nulle. Soit  $G$  un groupe algébrique réductif connexe. On appelle  $G$ -variété, une variété algébrique munie d'une action algébrique de  $G$ . On dira qu'une  $G$ -variété normale est *sphérique* si elle contient une orbite dense d'un sous-groupe de Borel de  $G$ . On dira qu'un sous-groupe  $H$  de  $G$  est *sphérique* si l'espace homogène  $G/H$  est sphérique. On se donne  $H$  un tel sous-groupe de  $G$ .

On appelle *plongement* de l'espace homogène  $G/H$ , un couple  $(X, x)$  où  $X$  est une  $G$ -variété normale et  $x$  un point de  $X$  dont l'orbite par  $G$  est ouverte et dont le stabilisateur dans  $G$  est  $H$ . On dira que  $x$  est le *point base* du plongement. La théorie de Luna-Vust (voir [38]) des plongements d'espaces homogènes est particulièrement développée dans le cas sphérique. Les principales références sont [16, 33, 10, 11, 14, 9]. L'essentiel des résultats de cette théorie sont également exposés dans le cours de M. Brion, [12].

Nous commençons par rappeler quelques résultats de la théorie des plongements des espaces homogènes sphériques et énonçons un théorème qui décrit la structure locale d'une variété sphérique. Nous nous intéressons aussi aux polytopes moments des variétés sphériques projectives. Nous rappelons aussi quelques résultats concernant l'action d'un sous-groupe de Borel de  $G$  dans un espace homogène sphérique  $G/H$ . Pour finir cette section, nous nous

intéressons aux diviseurs d'un espace homogène.

## 2.2 Plongements d'un espace homogène sphérique donné

**2.2.1** — Soit  $G$  un groupe réductif connexe et  $H$  un sous-groupe sphérique de  $G$ . Nous commençons par définir la notion de rang de l'espace homogène  $G/H$ .

Fixons un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  tel que  $BH$  est dense dans  $G$ . On dira que  $B$  est *opposé* à  $H$ .

Considérons le corps des fractions  $k(G/H)$  de  $G/H$ . On note  $k(G/H)^{(B)}$  l'ensemble des fonctions rationnelles sur  $G/H$  qui sont propres pour l'action de  $B$ . Si  $\Gamma$  est un groupe algébrique, on note  $\mathcal{X}(\Gamma)$  le groupe  $\text{Hom}(\Gamma, k^*)$  de ses caractères multiplicatifs. Considérons alors :

$$\phi : k(G/H)^{(B)} \longrightarrow \mathcal{X}(B),$$

qui à une fonction de  $k(G/H)^{(B)}$  associe son poids pour l'action de  $B$ . Remarquons que l'image de  $\phi$  est incluse dans :

$$\mathcal{X}(B)^{B \cap H} := \{\gamma \in \mathcal{X}(B) : \gamma|_{B \cap H} = 1\}.$$

Inversement, si  $\gamma$  appartient à  $\mathcal{X}(B)^{B \cap H}$ , la formule :

$$f(bH/H) = \gamma(b^{-1}) \quad \forall b \in B,$$

définit une fonction régulière sur  $BH/H \simeq B/(B \cap H)$ , vecteur propre de  $B$  de poids  $\gamma$ . Comme  $BH/H$  est dense dans  $G$ , on en déduit que l'image de  $\phi$  est  $\mathcal{X}(B)^{B \cap H}$ . De plus, le noyau de  $\phi$  est réduit aux fonctions constantes non nulles sur  $G/H$ . Ainsi, on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow k^* \longrightarrow k(G/H)^{(B)} \xrightarrow{\phi} \mathcal{X}(B)^{B \cap H} \longrightarrow 0.$$

Le rang du groupe  $\mathcal{X}(B)^{B \cap H}$  est appelé le *rang de  $G/H$*  et noté  $\text{rg}(G/H)$ .

**Exemple.** Soit  $G$  un groupe réductif et  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$ . Choisissons  $T$  un tore maximal de  $G$  inclus dans  $B$ , et  $B^-$  le sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $B$  et contenant  $T$ . Alors,  $B^-B/B$  est dense dans  $G/B$

qui est donc un espace homogène sphérique. De plus, comme  $B \cap B^- = T$ , le rang de  $G/B$  est nul. Plus généralement (voir [12]), on montre qu'un espace homogène sphérique est complet si et seulement si son rang est 0.

**2.2.2** — Un diviseur premier stable par  $B$  dans  $G/H$  est appelé une *couleur* de  $G/H$ . On pose alors :

$$\mathcal{D}(G/H) := \{\text{couleurs de } G/H\}.$$

**Exemple.** Considérons à nouveau l'espace homogène  $G/B$ . Soit  $T$  et  $B^-$  comme dans l'exemple ci-dessus. Considérons  $W := N(T)/T$ , le groupe de Weyl de  $T$ . Soit  $\Sigma$  l'ensemble des racines simples de  $(B, T)$ . Si  $\alpha \in \Sigma$ , on note  $s_\alpha$  la réflexion simple de  $W$  associée à  $\alpha$ . Alors, la décomposition de Bruhat montre que  $\mathcal{D}(G/B) = \{\overline{B^- s_\alpha B/B} : \alpha \in \Sigma\}$ .

**2.2.3** — Soit  $\nu$  une valuation du corps  $k(G/H)$  triviale sur  $k$  et à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Alors, la restriction de  $\nu$  à  $k(G/H)^{(B)}$  passe au quotient en une application  $\bar{\nu} : \mathcal{X}(B)^{B \cap H} \rightarrow \mathbb{Z}$ . On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} k(G/H)^{(B)} & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{Z} \\ \downarrow \phi & \nearrow \bar{\nu} & \\ \mathcal{X}(B)^{B \cap H} & & \end{array}$$

Notons  $\mathcal{V}(G/H)$  l'ensemble des valuations normalisées et  $G$ -invariantes du corps  $k(G/H)$ . Il est alors montré dans [33] ou dans [12] que l'application  $\nu \mapsto \bar{\nu}$  induit une injection de  $\mathcal{V}(G/H)$  dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$ . On considère alors le cône convexe  $\mathcal{CV}(G/H)$  de  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  engendré par l'image de  $\mathcal{V}(G/H)$ .

Soit  $D$  est un élément de  $\mathcal{D}(G/H)$  et  $f$  une fonction de  $k(G/H)$ . On notera  $\nu_D(f)$  l'ordre de  $f$  le long de  $D$  (c'est-à-dire que si  $f$  s'annule le long de  $D$ ,  $\nu_D(f)$  est l'ordre du zéro, si  $D$  est un pôle de  $f$ ,  $\nu_D(f)$  est l'opposé de l'ordre de ce pôle et  $\nu_D(f)$  vaut zéro sinon). Le diviseur  $D$  est alors le centre dans  $G/H$  de la valuation  $\nu_D$ .

**2.2.4** — On se donne maintenant un plongement,  $(X, x)$  de  $G/H$ . On dit que  $X$  est *simple* s'il contient une unique orbite fermée de  $G$ .

Soit  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G$  dans  $X$ . L'ensemble

$$X_{\mathcal{O}} := \{x \in X : \overline{G.x} \text{ contient } \mathcal{O}\}$$

est ouvert dans  $X$  (en effet,  $X$  ne contient qu'un nombre fini d'orbites de  $G$ ). De plus,  $X_{\mathcal{O}}$  contient  $\mathcal{O}$  comme unique orbite fermée. Ainsi,  $X$  est recouvert par des plongements simples.

Rappelons la théorie de Luna-Vust des plongements simples de l'espace homogène  $G/H$ . Fixons  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G$  dans  $X$  et intéressons nous à  $X_{\mathcal{O}}$ . On considère l'ensemble :

$$\mathcal{D}(X, \mathcal{O}) := \{D \in \mathcal{D}(G/H) : \mathcal{O} \text{ est inclus dans l'adhérence de } D\}.$$

Les éléments de  $\mathcal{D}(X, \mathcal{O})$  sont appelés les *couleurs* du plongement  $X_{\mathcal{O}}$  ou de l'orbite  $\mathcal{O}$ .

On considère également le cône convexe  $\mathcal{CV}(X, \mathcal{O})$  de  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  engendré par les valuations de  $\mathcal{V}(G/H)$  qui ont un centre dans  $X_{\mathcal{O}}$ . On dira que  $\mathcal{CV}(X, \mathcal{O})$  est le *cône des valuations* du plongement  $X_{\mathcal{O}}$ .

On note  $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$  le cône convexe de  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  engendré par  $\mathcal{CV}(X, \mathcal{O})$  et les  $\overline{\nu}_D$  (avec les notations du paragraphe précédent) pour  $D$  dans  $\mathcal{D}(X, \mathcal{O})$ .

Nous donnons une dernière définition avant d'énoncer le théorème de classification des plongements simples de  $G/H$ .

**Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  un cône convexe saillant dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  et  $\mathcal{D}$  une partie de  $\mathcal{D}(G/H)$ . Le couple  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  est appelé *cône colorié* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Le cône convexe  $\mathcal{C}$  est engendré par les  $\overline{\nu}_D$  pour  $D \in \mathcal{D}$  et un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{CV}(G/H)$ .
- L'intérieur relatif de  $\mathcal{C}$  rencontre  $\mathcal{CV}(G/H)$ .

On a alors le

**Théorème 1** *L'application  $(X, x) \mapsto (\mathcal{C}(X, \mathcal{O}), \mathcal{D}(X, \mathcal{O}))$  (où  $\mathcal{O}$  est l'orbite fermée de  $G$  dans  $X$ ) définit une bijection des classes d'isomorphisme de plongements simples de  $G/H$ , sur les cônes coloriés.*

**2.2.5** — Revenons à la situation d'un plongement  $X$  non nécessairement simple de  $G/H$ . Il s'agit alors de comprendre comment se comportent les couples  $(\mathcal{C}(X, \mathcal{O}), \mathcal{D}(X, \mathcal{O}))$  lorsque  $\mathcal{O}$  parcourt l'ensemble des orbites de  $G$  dans  $X$ . Ceci conduit à la définition suivante :

**Définition.** Une *face coloriée* d'un cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  est un cône colorié  $(\mathcal{C}', \mathcal{D}')$  tel que  $\mathcal{C}'$  est une face de  $\mathcal{C}$ , et tel que  $\mathcal{D}' = \{D \in \mathcal{D} : \overline{\nu_D} \in \mathcal{C}'\}$ .

On a alors la

**Proposition 2.2.1** *Soit  $X$  un plongement simple de  $G/H$  dont l'orbite fermée est  $\mathcal{O}_0$ . Alors, l'application  $\mathcal{O} \mapsto (\mathcal{C}(X, \mathcal{O}), \mathcal{D}(X, \mathcal{O}))$  est une bijection de l'ensemble des orbites de  $G$  dans  $X$ , sur l'ensemble des faces coloriées de  $(\mathcal{C}(X, \mathcal{O}_0), \mathcal{D}(X, \mathcal{O}_0))$ .*

On pose alors la

**Définition.** Un *éventail colorié* est un ensemble  $\mathcal{F}$  de cônes coloriés qui vérifie les conditions suivantes :

- (i) Toute face coloriée d'un cône colorié de  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{F}$ .
- (ii) Pour tout  $\nu \in \mathcal{CV}(G/H)$  il existe au plus un cône colorié de  $\mathcal{F}$  contenant  $\nu$  dans son intérieur relatif.

Soit  $(X, x)$  un plongement de  $G/H$ . Posons :

$$\mathcal{F}(X) := \left\{ (\mathcal{C}(X, \mathcal{O}), \mathcal{D}(X, \mathcal{O})) : \mathcal{O} \text{ est une orbite de } G \text{ dans } X \right\}.$$

**Théorème 2** *L'application  $(X, x) \mapsto \mathcal{F}(X)$  est une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphismes de plongements de  $G/H$ , sur l'ensemble des éventails coloriés.*

## 2.3 Espaces homogènes sphériques sobres

La proposition 4.4.1 de [12] est la :

**Proposition 2.3.1** *Pour tout espace homogène sphérique  $G/H$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le groupe  $H$  est d'indice fini dans son normalisateur.*
- (ii) *Le cône  $\mathcal{CV}(G/H)$  est saillant.*
- (iii) *Il existe un plongement complet simple de  $G/H$ .*

*L'espace homogène  $G/H$  sera dit sobre s'il vérifie ces conditions.*

On note  $N_G(H)$  le normalisateur de  $H$ . Le théorème 4.3 de [12] montre que le groupe  $N_G(H)/H$  est diagonalisable. Ainsi, tout espace homogène sphérique se fibre sur un espace homogène sphérique sobre avec un tore comme fibre. Ceci explique le rôle particulier que jouent les espaces homogènes sphériques sobres dans la théorie.

Soit  $G/H$  un espace homogène sphérique sobre. Le théorème 1 montre qu'il existe un unique plongement simple  $Y$  de  $G/H$  d'orbite fermée  $\mathcal{O}$  tel que  $\mathcal{D}(Y, \mathcal{O})$  est vide et  $\mathcal{C}(Y, \mathcal{O}) = \mathcal{CV}(G/H)$ . On dira que  $Y$  est le *plongement canonique de  $G/H$* . La proposition suivante affirme alors que  $Y$  est un plongement complet simple privilégié de  $G/H$ .

**Proposition 2.3.2** *Soit  $G/H$  un espace homogène sphérique sobre et  $Y$  son plongement canonique. Alors, on a :*

- (i) *La variété  $Y$  est projective.*
- (ii) *Pour tout plongement  $X$  de  $G/H$  qui est simple et complet il existe un morphisme  $G$ -équivariant,  $\phi : Y \rightarrow X$ .*

## 2.4 Structure locale des variétés sphériques

Soit  $X$  une variété sphérique et  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G$  dans  $X$ . On peut montrer que  $\mathcal{O}$  est sphérique ; on note alors  $\mathcal{O}_B^\circ$  l'orbite ouverte de  $B$  dans  $\mathcal{O}$ . L'ensemble

$$X_{\mathcal{O},B} := \{x \in X : \overline{B.x} \text{ contient } \mathcal{O}\}$$

est un ouvert affine stable par  $B$  dans  $X$  qui contient  $\mathcal{O}_B^\circ$  comme unique orbite fermée de  $B$ . On a en fait plusieurs caractérisations équivalentes de  $X_{\mathcal{O},B}$  :

**Proposition 2.4.1**

- (i) *Le complémentaire de  $X_{\mathcal{O},B}$  dans  $X_{\mathcal{O}}$  est la réunion des adhérences des  $D \in \mathcal{D}(G/H)$  qui ne contiennent pas  $\mathcal{O}$ .*
- (ii) *L'ouvert  $X_{\mathcal{O},B}$  est l'intersection de tous les ouverts stables par  $B$  qui rencontrent  $\mathcal{O}$ .*

**Preuve :** La première assertion découle de la proposition 2.2 de [12]. Pour la seconde, il s'agit de montrer que  $X_{\mathcal{O},B}$  est inclus dans tout ouvert  $U$  de  $X_{\mathcal{O}}$ , stable par  $B$  et qui rencontre  $\mathcal{O}$ . Mais ceci découle de fait que  $\mathcal{O}_B^\circ$  est l'unique orbite fermée de  $B$  dans  $X_{\mathcal{O},B}$  et que  $\mathcal{O}_B^\circ$  est inclus dans  $U$ .

□

Posons :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{O}} &:= \{g \in G : g.X_{\mathcal{O},B} = X_{\mathcal{O},B}\} \\ &= \{g \in G : \forall D \in \mathcal{D}(G/H) - \mathcal{D}(X, \mathcal{O}) \quad g.D = D\}. \end{aligned}$$

Alors,  $P_{\mathcal{O}}$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$ . Notons  $P_{\mathcal{O}}^u$  le radical unipotent de  $P_{\mathcal{O}}$ . On peut alors décrire la structure de  $X_{\mathcal{O},B}$  (voir [12], théorème 2.3) en termes d'une variété sphérique affine « plus petite » que  $X$ .

**Théorème 3** *Avec les notations précédentes, il existe un sous-groupe de Levi  $L$  de  $P_{\mathcal{O}}$  et une sous-variété  $S$  fermée dans  $X_{\mathcal{O},B}$  qui vérifient :*

- (i)  $S$  contient le point base de  $X$ ,
- (ii)  $S$  est stable par  $L$ , et
- (iii) l'application

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{O}}^u \times S &\longrightarrow X_{\mathcal{O},B} \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

*est un isomorphisme  $P_{\mathcal{O}}$ -équivariant.*

*De plus,  $S$  est une  $L$ -variété sphérique affine, et  $S \cap \mathcal{O}$  est une unique orbite de  $L$  fixée point par point par le sous-groupe dérivé de  $L$ .*

**Remarque :** La variété  $S$  est entièrement déterminée par  $L$ . En effet,  $S$  est l'adhérence dans  $X_{\mathcal{O},B}$  de l'orbite par  $L$  du point base de  $X$ .

## 2.5 Sur les plongements sans couleur de $G/H$

**2.5.1** — Soit  $X$  un plongement de  $G/H$ . On dira qu'une orbite  $\mathcal{O}$  de  $G$  dans  $X$  est *sans couleur* si l'ensemble  $\mathcal{D}(X, \mathcal{O})$  est vide. On dira que  $X$  est *sans couleur* si toute orbite de  $G$  dans  $X$  est sans couleur.

Soit  $\mathcal{O}$  une orbite sans couleur de  $G$  dans  $X$ . Alors, on a :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{O}} &= P_{G/H} \\ &= \{g \in G : \forall D \in \mathcal{D}(G/H) \quad g.D = D\}. \end{aligned}$$

Dans le cas d'un plongement sans couleur, le théorème 3 prend une forme plus agréable :

**Corollaire 2.5.1** *Reprenons les notations du théorème 3 et supposons que  $\mathcal{O}$  est sans couleur. Alors, la sous-variété  $S$  du théorème 3 vérifie :*

- (i) *Le groupe dérivé de  $L$  agit trivialement sur  $S$ . En particulier,  $S$  est une variété torique pour un quotient de  $L/[L; L]$ .*
- (ii) *Toute orbite de  $G$  dans  $X_{\mathcal{O}}$  intersecte transversalement  $S$  en une orbite de  $L$ .*

*En particulier, si on note  $[L; L]$  le sous-groupe dérivé de  $L$ , on a :*

$$P_{G/H} \cap H = L \cap H \supseteq [L; L].$$

Le corollaire 2.5.1 montre que la structure locale des orbites de  $G$  dans  $X_{\mathcal{O}}$  est « la même » que celle des orbites du quotient de  $L$  par son groupe dérivé dans  $S$  : on dit quelquefois qu'une variété sphérique sans couleur est *toroïdale*. Ces variétés ont bon nombre de propriétés particulières. On en rappelle ici quelques-unes.

**2.5.2** — La première assertion de la proposition 2.4.2 de [12] est la

**Proposition 2.5.1** *Soit  $X$  un plongement de  $G/H$ . Alors, il existe un plongement sans couleur  $\tilde{X}$  de  $G/H$  et un morphisme  $G$ -équivariant birationnel projectif (et donc surjectif)  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ .*

La proposition 2.5.1 montre la place importante que tiennent les plongements sans couleur de  $G/H$  parmi tous les plongements. Elle justifie le fait qu'on leur porte une attention particulière (voir le théorème 7).

**2.5.3** — Il est montré dans [15] ou [12] la

**Proposition 2.5.2** *Il existe au moins un sous-groupe de Levi  $L_{G/H}$  de  $P_{G/H}$  remplissant les deux conditions suivantes :*

- (i) *Si on note  $[L_{G/H}; L_{G/H}]$  le sous-groupe dérivé de  $L_{G/H}$ , alors :*

$$P_{G/H} \cap H = L_{G/H} \cap H \supseteq [L_{G/H}; L_{G/H}].$$

- (ii) *Soit  $C$  le centre connexe de  $L_{G/H}$ . Alors, pour tout plongement  $(X, x)$  de  $G/H$ , l'ensemble  $P_{G/H}^u \cdot \overline{C \cdot x}$  (où  $\overline{C \cdot x}$  est l'adhérence de  $C \cdot x$  dans  $X$ ) contient un ouvert de toute orbite de  $G$  dans  $X$ .*

Les sous-groupes de Levi  $L_{G/H}$  de la proposition 2.5.2 vérifient le corollaire 2.5.1 pour tout plongement simple et sans couleur  $X_{\mathcal{O}}$ . De tels sous-groupes de Levi de  $P_{G/H}$  seront dit *adaptés à  $G/H$* .

**2.5.4** — Une propriété particulière et bien agréable des orbites sans couleur de  $G$  dans un plongement de  $G/H$  est la

**Proposition 2.5.3** *Soit  $X$  un plongement de  $G/H$  et  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G$  sans couleur dans  $X$ . Soit  $\mathcal{O}_B^\circ$  l'orbite ouverte de  $B$  dans  $\mathcal{O}$ .*

*Alors, on a :*

$$P_{G/H} = \{g \in G : g \cdot \mathcal{O}_B^\circ \subseteq \mathcal{O}_B^\circ\}.$$

**Preuve :** Commençons par remarquer qu'il existe un plongement simple sans couleur et contenant  $X_{\mathcal{O}}$  dont l'orbite fermée  $Z$  est projective. Ceci résulte par exemple du théorème 1. Ainsi, on peut supposer que  $X$  contient une orbite projective sans couleur  $Z$ . Comme  $Z$  est sans couleur,  $P_{G/H} = \text{Stab}_G(X_{Z,B})$ , où  $\text{Stab}_G$  désigne le stabilisateur dans  $G$ . Mais alors,  $P_{G/H} \subseteq \text{Stab}_G(X_{Z,B} \cap \mathcal{O}) = \text{Stab}_G(\mathcal{O}_B^\circ)$ . Par ailleurs,  $\text{Stab}_G(X_{Z,B} \cap \mathcal{O}) \subseteq \text{Stab}_G(X_{Z,B} \cap \overline{\mathcal{O}}) \subseteq \text{Stab}_G(X_{Z,B} \cap Z) = \text{Stab}_G(Z_B^\circ)$ . Or le corollaire 2.5.1 montre que  $P^u$  se plonge comme ouvert dans  $Z$ . On en déduit que le stabilisateur de  $Z \cap S$  est un sous-groupe parabolique opposé à  $P_{G/H}$ . Mais alors,  $\text{Stab}_G(Z_B^\circ) = P_{G/H}$ . La proposition en découle.  $\square$

**2.5.5** — Soit  $L_{G/H}$  un sous-groupe de Levi de  $P_{G/H}$  adapté à  $G/H$  et  $C_{G/H} = C$  son centre connexe. Alors, comme le sous-groupe dérivé de  $L_{G/H}$  est inclus dans  $H$ , le groupe  $\mathcal{X}(B)^{B \cap H}$  s'identifie à  $\mathcal{X}(C)^{C \cap H} = \mathcal{X}(C/C \cap H)$ . En particulier, l'ensemble  $\mathcal{X}_*(C/C \cap H)$  des sous-groupes à un paramètre de  $C/C \cap H$  s'injecte canoniquement dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$ . La proposition suivante est tirée de [15].

**Proposition 2.5.4** *Soit  $(X, x)$  un plongement de  $G/H$  et  $\mathcal{O}$  une orbite sans couleur de  $G$  dans  $X$ . Soit  $\lambda \in \mathcal{X}_*(C/C \cap H)$ . Alors, se valent :*

- (i)  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x$  existe et appartient à l'orbite ouverte de  $B$  dans  $\mathcal{O}$ .
- (ii)  $-\lambda$  appartient à l'intérieur relatif de  $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$ .

**2.5.6** — Si  $\mathcal{O}$  est une orbite de  $G$  dans  $X$ , alors  $\mathcal{O}$  est un espace homogène sphérique. En particulier, on a défini  $\text{rg}(\mathcal{O})$ . On a alors le

**Lemme 2.5.1** *Soit  $X$  un plongement sans couleur de  $G/H$  et  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G$  dans  $X$ . Alors, on a :*

$$\text{rg}(X) - \text{rg}(\mathcal{O}) = \dim(X) - \dim(\mathcal{O}),$$

où  $\dim(X)$  (resp.  $\dim(\mathcal{O})$ ) est la dimension de  $X$  (resp.  $\mathcal{O}$ ).

**Preuve :** Le lemme étant vrai pour les variétés toriques, il est une conséquence directe du corollaire 2.5.1.  $\square$

## 2.6 Sur les polytopes moments d'une variété sphérique

**2.6.1** — Si  $\Gamma$  est un groupe abélien, on notera  $\Gamma_{\mathbb{Q}}$  le produit tensoriel sur  $\mathbb{Z}$  de  $\Gamma$  par  $\mathbb{Q}$ . Notons  $P^+$  l'ensemble des poids dominants de  $(G, B)$ . Si  $\gamma$  appartient à  $P^+$ , on note  $V_{\gamma}$  le  $G$ -module simple de plus haut poids  $\gamma$  pour  $B$ .

Soit  $X$  un plongement quasi-projectif de  $G/H$  et  $B$  un sous-groupe de Borel opposé à  $H$ . On fixe un fibré en droites,  $\mathcal{L}$  ample et  $G$ -linéarisé sur  $X$ . Pour tout entier  $n$  strictement positif, l'espace vectoriel  $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  des sections de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  est un  $G$ -module rationnel. On considère alors :

$$\mathbf{P}(X, \mathcal{L}) := \{p \in \mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}} : \exists n > 0, np \in P^+, V_{np} \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})\},$$

où  $V_{np} \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  signifie que le  $G$ -module  $V_{np}$  s'injecte de manière équivariante dans  $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ .

Dans un espace vectoriel rationnel, l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est appelée un *polytope*; une partie définie par un nombre fini d'inéquations linéaires est appelée *polyèdre*. En particulier, un polytope est un polyèdre borné. On peut alors énoncer la (voir [12];1.2)

**Proposition 2.6.1** *L'ensemble  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  est un polyèdre convexe dans  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}$  qui engendre un espace affine de direction  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}^{B \cap H}$ . Si de plus  $X$  est projective,  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  est un polytope.*

On appelle  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  le *polyèdre moment* (resp. *polytope moment* si  $X$  est projective) de  $X$  associé à  $\mathcal{L}$ .

Si  $X'$  est un ouvert ou un fermé stable par  $G$  de  $X$ , on pose :

$$\mathbf{P}(X', \mathcal{L}) := \mathbf{P}(X', \mathcal{L}|_{X'}).$$

On montre alors la

### Proposition 2.6.2

- (i) *Si  $\mathcal{O}$  est une orbite de  $G$  dans  $X$ ,  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L})$  est une face de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ . Une telle face sera dite orbitale.*

(ii) Si  $X'$  est un ouvert stable par  $G$  dans  $X$  alors  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  est inclus dans  $\mathbf{P}(X', \mathcal{L})$ .

(iii) De plus,

$$\mathbf{P}(X, \mathcal{L}) = \bigcap \mathbf{P}(X_Z, \mathcal{L}),$$

où l'intersection porte sur les orbites fermées  $Z$  de  $G$  dans  $X$ .

**Preuve :** Pour la première assertion nous renvoyons à la proposition 5.3.2 de [12].

La restriction de  $X$  à  $X'$  des sections d'un fibré étant injective, la seconde assertion est évidente.

Concernant la dernière assertion, il suffit de montrer que l'intersection des  $\mathbf{P}(X_Z, \mathcal{L})$  est incluse dans  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ . Fixons un point  $p$  dans cette intersection. Alors, il existe un entier  $n$  tel que pour toute orbite fermée  $Z$  de  $G$  dans  $X$ , le fibré  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  admet une section  $\sigma_Z$  régulière sur  $X_Z$  de poids  $np$  pour  $B$ . Soit  $y$  dans l'orbite ouverte de  $B$  dans  $X$ . Quitte à changer les  $\sigma_Z$  par des multiples, on peut supposer que  $\sigma_Z(y) = \sigma_{Z'}(y)$  pour tout couple  $(Z, Z')$  d'orbites fermées. Comme les  $X_Z$  recouvrent  $X$  et les  $\sigma_Z$  coïncident sur l'ouvert  $B.y$ , on peut définir :

$$\begin{aligned} \sigma : X &\longrightarrow \mathcal{L} \\ x &\longmapsto \sigma_Z(x) \quad \text{si } x \in X_Z. \end{aligned}$$

Alors,  $\sigma$  est une section de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  sur  $X$  de poids  $np$  pour  $B$  et  $p$  appartient à  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ .  $\square$

**2.6.2** — Afin de donner une première description de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ , nous introduisons quelques notations supplémentaires.

Soit  $\mathcal{V}(X)$  l'ensemble des valuations normalisées et  $G$ -invariantes du corps  $k(G/H)$  qui ont un centre de codimension 1 dans  $X$ . Si  $\nu \in \mathcal{V}(X)$ , on note  $X_\nu$  le centre de  $\nu$ .

Soit  $\sigma_\circ$  une section de  $\mathcal{L}$  de poids  $\gamma(\sigma_\circ)$  pour  $B$ . Alors, le diviseur de  $\sigma$  s'écrit :

$$\operatorname{div}(\sigma_\circ) = \sum_{\nu \in \mathcal{V}(X)} n_\nu X_\nu + \sum_{D \in \mathcal{D}(G/H)} n_D \bar{D},$$

où les  $n_\nu$  et les  $n_D$  sont des entiers positifs ou nuls. La proposition 5.3.1 de [12] est alors :

**Proposition 2.6.3** Avec les notations précédentes,  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  est l'ensemble des  $\gamma(\sigma_\circ) + p$  où  $p \in \mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}^{B \cap H}$  vérifiant les deux conditions :

- (i)  $\langle \bar{\nu}, p \rangle + n_\nu \geq 0 \quad \forall \nu \in \mathcal{V}(X).$
- (ii)  $\langle \bar{\nu}_D, p \rangle + n_D \geq 0 \quad \forall D \in \mathcal{D}(G/H).$

**2.6.3** — On suppose désormais que  $X$  est projective. Dans ce paragraphe, on se donne une face  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ .

Soit  $p$  un point dans l'intérieur relatif de  $\mathbf{F}$ . Posons

$$-p + \mathbf{P}(X, \mathcal{L}) := \{-p + q : q \in \mathbf{P}(X, \mathcal{L})\}.$$

Alors, la proposition 2.6.1 montre que  $-p + \mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  est inclus dans  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}^{B \cap H}$ . De plus, son cône dual,  $(-p + \mathbf{P}(X, \mathcal{L}))^\vee$  dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  ne dépend que de  $\mathbf{F}$ . On appelle ce cône le *cône dual de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  vu de  $\mathbf{F}$*  et on le note :

$$\mathcal{C}(\mathbf{F}) := (-p + \mathbf{P}(X, \mathcal{L}))^\vee.$$

Soit  $n$  un entier strictement positif et  $\sigma$  une section de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  de poids  $np$  pour l'action de  $B$ . On pose :

$$X_\sigma := \{x \in X : \sigma(x) \neq 0\}.$$

Il est prouvé dans [12](5.3) que  $X_\sigma$  ne dépend en fait que de  $\mathbf{F}$ ; on pose  $X_{\mathbf{F}} := X_\sigma$ . De plus,  $X_{\mathbf{F}}$  est un ouvert affine stable par  $B$ . Enfin, il existe une unique orbite minimale de  $G$  qui rencontre  $X_{\mathbf{F}}$ , on la notera  $\mathcal{O}(\mathbf{F})$ .

**Proposition 2.6.4** Avec les notations ci-dessus, on a :

- (i) Si  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  sont deux orbites de  $G$  dans  $X$ , alors :

$$\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2}, \mathcal{L}) = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_1}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_2}, \mathcal{L}).$$

- (ii)  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\mathbf{F})}, \mathcal{L})$  est la face orbitale minimale de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  qui contient  $\mathbf{F}$ .
- (iii) Soit  $p \in \mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ ,  $n$  un entier strictement positif et  $\sigma$  une section de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  de poids  $np$  pour  $B$ . Alors,  $p \in \mathbf{F}$  si et seulement si  $X_{\mathbf{F}} \subset X_\sigma$ .
- (iv) Si  $\mathbf{F} = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L})$ , pour une orbite  $\mathcal{O}$  de  $G$  dans  $X$ , alors :

$$\mathcal{O}(\mathbf{F}) = \mathcal{O} \quad , \quad X_{\mathbf{F}} = X_{\mathcal{O}, B} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(\mathbf{F}) = \mathcal{C}(X, \mathcal{O}).$$

- (v) L'application  $\mathcal{O} \mapsto \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L})$  est une bijection de l'ensemble des orbites de  $G$  dans  $X$ , sur l'ensemble des faces  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  telles que l'intérieur relatif du cône  $\mathcal{C}(\mathbf{F})$  rencontre  $\mathcal{CV}(G/H)$ .

**Preuve :** La proposition 2.6.2 appliquée à  $\overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2}$  inclus dans les variétés sphériques  $\overline{\mathcal{O}_1}$  et  $\overline{\mathcal{O}_2}$  montre que :

$$\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2}, \mathcal{L}) \subset \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_1}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_2}, \mathcal{L}).$$

Pour montrer l'inclusion inverse, fixons  $p$  dans le membre de droite. Soit  $n$  un entier positif et  $\sigma$  une section de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  de poids  $np$  pour  $B$ . Considérons

$$X_\sigma := \{x \in X : \sigma(x) \neq 0\}.$$

D'après [12] paragraphe 5.3, il existe une orbite  $\mathcal{O}$  de  $G$  dans  $X$  telle que  $G.X_\sigma = X_\mathcal{O}$ . Comme  $p$  appartient à  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_i}, \mathcal{L})$  pour  $i = 1, 2$ ,  $\mathcal{O}$  est incluse dans  $\overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2}$ . Alors,  $p$  appartient à  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2}, \mathcal{L})$  et la première assertion est démontrée.

La seconde assertion découle immédiatement de la première. Évidemment,  $X_\mathbf{F} \subseteq X_\sigma$  est équivalent à  $\{x \in X : \sigma(x) = 0\} \subseteq X - X_\mathbf{F}$ . Mais alors, la troisième assertion découle aisément de la proposition 2.6.3.

Les deux dernières assertions sont la proposition 5.3.2 de [12].  $\square$

**Remarque :** L'assertion (iv) de la proposition dit en particulier qu'une face  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  est orbitale si et seulement si l'intérieur relatif de  $\mathcal{C}(\mathbf{F})$  rencontre  $\mathcal{CV}(G/H)$ .

## 2.7 Sur l'action de $B$ sur $G/H$

### 2.7.1 — Considérons

$$\mathcal{B}(G/H) := \{\text{sous-variétés irréductibles de } G/H \text{ stables par } B\}.$$

En fait, l'ensemble  $\mathcal{B}(G/H)$  est fini et chaque élément  $V$  de  $\mathcal{B}(G/H)$  contient une unique orbite ouverte de  $B$ , que l'on note  $V^\circ$ .

Si  $V \in \mathcal{B}(G/H)$ , on note  $k(V)^{(B)}$  le groupe des fonctions rationnelles sur  $V$  propres pour l'action de  $B$ . Alors, le groupe abélien  $k(V)^{(B)}/k^*$  est de type fini. Généralisant la définition de  $\text{rg}(G/H)$ , on définit le *rang de  $V$*  par la formule :

$$\text{rg}(V) := \text{rang}(k(V)^{(B)}/k^*).$$

On s'intéresse à l'action sur  $\mathcal{B}(G/H)$  des sous-groupes paraboliques contenant  $B$ . Fixons  $T$  un tore maximal de  $B$ . Soit  $\alpha$  une racine simple de  $(B, T)$ .

Considérons  $P_\alpha$  le sous-groupe parabolique minimal de  $G$  contenant  $B$  associé à  $\alpha$ . Soit  $V$  et  $V'$  dans  $\mathcal{B}(G/H)$ . Si  $V \neq V'$  et  $P_\alpha V = V'$  on dira que  $\alpha$  monte  $V$  sur  $V'$ . On considère alors :

$$f_{V,\alpha} : P_\alpha \times_B V \longrightarrow P_\alpha/B$$

le fibré de base  $P_\alpha/B$  (i.e. la droite projective) et de fibre  $V$ . L'application  $P_\alpha \times V \longrightarrow V'$ ,  $(p, v) \mapsto pv$  induit un morphisme surjectif :

$$\pi_{V,\alpha} : P_\alpha \times_B V \longrightarrow V'.$$

Comme  $P_\alpha V^\circ$  est une orbite de  $P_\alpha$  de dimension un de plus que  $V$ , le morphisme  $\pi_{V,\alpha}$  se restreint en un morphisme fini  $P_\alpha \times_B V^\circ \longrightarrow P_\alpha V^\circ$ ; notons  $d(V, \alpha)$  le degré de cette restriction.

Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} P_\alpha \times_B V & & \\ \downarrow (p,v) \mapsto (pB/B, pv) & \searrow \pi_{V,\alpha} & \\ P_\alpha/B \times V' & \xrightarrow{(pB/B, v') \mapsto v'} & V'. \end{array}$$

La flèche verticale est en fait une immersion fermée.

Pour décrire l'ensemble des orbites de  $B$  dans  $P_\alpha V^\circ$ , fixons  $v \in V^\circ$ . Alors  $P_\alpha v^\circ = P_\alpha v$  et on a les bijections canoniques suivantes :

$$\begin{aligned} \{\text{orbites de } B \text{ dans } P_\alpha V^\circ\} &= \{\text{orbites de } P_\alpha \text{ dans } P_\alpha/B \times P_\alpha V^\circ\} \\ &= \{\text{orbites de } (P_\alpha)_v \text{ dans } P_\alpha/B\}, \end{aligned}$$

où  $(P_\alpha)_v$  est le stabilisateur dans  $P_\alpha$  de  $v$ .

Par ailleurs, l'action de  $(P_\alpha)_v$  sur  $P_\alpha/B$  induit un morphisme

$$\phi : (P_\alpha)_v \longrightarrow \text{Aut}(P_\alpha/B) \simeq \text{PSL}(2).$$

De plus, comme  $(P_\alpha V^\circ)/B$  est fini, l'image  $\text{Im}\phi$  de  $\phi$  est un sous-groupe sphérique de  $\text{PSL}(2)$ . On distingue alors 3 cas, suivant l'image de  $\phi$  :

- $\text{Im}\phi$  est un tore maximal de  $\text{PSL}(2)$ . On dit alors que  $(V, \alpha)$  est de type  $T$ .
- $\text{Im}\phi$  est le normalisateur d'un tore maximal de  $\text{PSL}(2)$ . On dit alors que  $(V, \alpha)$  est de type  $N(T)$ .

- $\text{Im}\phi$  contient un sous-groupe unipotent maximal de  $\text{PSL}(2)$ . On dit alors que  $(V, \alpha)$  est de type  $U$ .

On obtient alors :

- Type  $T$  :  $P_\alpha V^\circ = V^\circ \cup V'^\circ \cup V''^\circ$  avec  $V'' \in \mathcal{B}(G/H)$  de même dimension que  $V$  et  $d(V, \alpha) = 1$ . De plus,  $\text{rg}(V) = \text{rg}(V') = \text{rg}(V'') - 1$ .
- Type  $N(T)$  :  $P_\alpha V^\circ = V^\circ \cup V'^\circ$  et  $d(V, \alpha) = 2$ . De plus,  $\text{rg}(V) = \text{rg}(V') - 1$ .
- Type  $U$  :  $P_\alpha V^\circ = V^\circ \cup V'^\circ$  et  $d(V, \alpha) = 1$ . De plus,  $\text{rg}(V) = \text{rg}(V')$ .

**2.7.2** — On construit alors un graphe orienté  $\Gamma(G/H)$  comme suit :

**Définition.** Les sommets de  $\Gamma(G/H)$  sont les éléments de  $\mathcal{B}(G/H)$ . Deux sommets  $V$  et  $V'$  sont reliés par une arête indexée par  $\alpha$  si  $\alpha$  monte  $V$  sur  $V'$ . De plus, cette arête est simple (resp. double) si le degré de  $\pi_{V, \alpha}$  est 1 (resp. 2).

D'après ce qui précède, tout graphe  $\Gamma(G/H)$  est construit à partir des trois « briques » élémentaires suivantes :

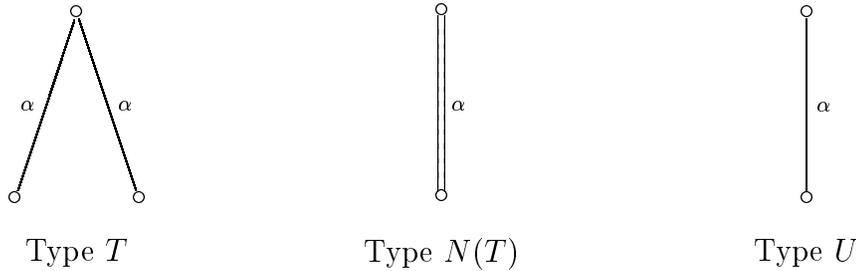


FIG. 2.1 – Briques élémentaires de  $\Gamma(G/H)$ .

On montre alors facilement la

**Proposition 2.7.1** *Avec les notations introduites ci-dessus, on a :*

- (i) *Le graphe  $\Gamma(G/H)$  est connexe. Plus précisément, pour tout  $V \in \mathcal{B}(G/H)$  différente de  $G/H$ , il existe une racine simple qui monte  $V$ .*
- (ii) *Soit  $\alpha, \beta$  deux racines simples et  $V, V' \in \mathcal{B}(G/H)$ . Si  $\alpha$  monte  $V$  sur  $V'$  et  $\beta$  monte  $V'$  alors  $\alpha \neq \beta$ .*

La proposition suivante de M. Brion (voir [8]) décrit les arêtes possibles entre deux sommets fixés.

**Proposition 2.7.2** *Soit  $V, V' \in \mathcal{B}(G/H)$ . On suppose qu'il existe deux racines distinctes  $\alpha$  et  $\beta$  qui montent  $V$  sur  $V'$ . Alors, soit  $(V, \alpha)$  et  $(V, \beta)$*

sont tous deux de type  $T$ , soit ils sont tous deux de type  $U$  et  $\alpha$  et  $\beta$  sont orthogonales.

Nous utiliserons la définition suivante :

**Définition** Soit  $V, V' \in \mathcal{B}(G/H)$  et  $w \in W$ . On dit que  $w$  monte  $V$  sur  $V'$  si le morphisme :

$$\pi_{V,w} : \overline{BwB} \times_B V \longrightarrow V',$$

est surjectif et génériquement fini. On notera alors,  $d(V, w)$  le degré de  $\pi_{V,w}$ .

Remarquons que si  $\alpha$  est une racine simple et  $s_\alpha \in W$  la réflexion simple correspondante, alors  $\alpha$  monte  $V$  sur  $V'$  si et seulement si  $s_\alpha$  monte  $V$  sur  $V'$ . De plus, dans ce cas on a :  $d(V, \alpha) = d(V, s_\alpha)$ .

**2.7.3** — Pour construire le graphe  $\Gamma(G/H)$ , nous avons choisi un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  et un tore maximal  $T$  inclus dans  $B$ . Dans ce paragraphe, nous adoptons un point de vue intrinsèque sur cette construction et montrons que  $\Gamma(G/H)$  ne dépend (comme la notation le laisse entendre) que de l'espace homogène  $G/H$ .

Considérons l'espace homogène  $\mathcal{B}$  des sous-groupes de Borel de  $G$ . Alors, le groupe  $G$  agit diagonalement sur  $\mathcal{B} \times G/H$  et  $\mathcal{B}(G/H)$  s'identifie canoniquement à l'ensemble des sous-variétés de  $\mathcal{B} \times G/H$  qui sont stables par  $G$ .

Identifions à présent  $\Delta$  à l'ensemble des classes de conjugaisons de sous-groupes paraboliques minimaux de  $G$ . Avec les notations des paragraphes précédents, si  $\alpha \in \Delta$ ,  $P_\alpha$  est alors un représentant de  $\alpha$ . À tout élément  $\alpha$  de  $\Delta$ , correspond un espace homogène complet que l'on note  $\mathcal{P}_\alpha$ . Comme un sous-groupe de Borel de  $G$  n'a qu'un point fixe dans  $\mathcal{P}_\alpha$ , il existe un unique morphisme  $G$ -équivariant :

$$\phi_\alpha : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{P}_\alpha.$$

Posons également,  $\tilde{\phi}_\alpha : \mathcal{B} \times G/H \longrightarrow \mathcal{P}_\alpha \times G/H$ ,  $(x, y) \longmapsto (\phi_\alpha(x), y)$ .

Soit  $V$  et  $V'$  deux sous-variétés de  $\mathcal{B} \times G/H$  stables par  $G$ . Alors,  $\alpha$  monte  $V$  sur  $V'$  si  $V$  est strictement inclus dans  $V'$  et si  $\tilde{\phi}_\alpha(V) = \tilde{\phi}_\alpha(V')$ . Alors, avec les notations du paragraphe 2.7.1,  $d(V, \alpha)$  est le degré de la restriction de  $\tilde{\phi}_\alpha$  à  $V$ . Ceci montre que l'on peut construire  $\Gamma(G/H)$  de manière intrinsèque et donc que la définition donnée au paragraphe précédent ne dépend ni de  $B$  ni de  $T$ .

**2.7.4 — Exemple** Considérons le groupe  $G = \mathrm{SL}(3)$ . Soit  $V = k^3$  le  $G$ -module standard et  $V^*$  son dual. On note  $\mathbb{P}^2$  pour  $\mathbb{P}(V)$  et on identifie

l'ensemble des droites de  $\mathbb{P}^2$  à  $(\mathbb{P}^2)^\vee := \mathbb{P}(V^*)$ . Alors,  $G$  opère transitivement sur

$$\mathcal{O} := \{(a, b, d) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^2)^\vee : a \notin d \text{ et } b \in d\}.$$

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $V$  et  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  sa base duale. Fixons dans  $\mathcal{O}$ , le point

$$x := ([e_1 + e_2 + e_3], [e_3], [e_1^*]).$$

Alors,  $(\mathcal{O}, x)$  s'identifie à  $(G/H, H/H)$  où  $H$  est le stabilisateur dans  $G$  de  $x$ . Remarquons que  $H$  est conjugué au stabilisateur dans  $G$  de  $([e_1], [e_2], [e_1^*])$  c'est-à-dire au sous-groupe de  $G$  constitué des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Considérons le sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  constitué des matrices triangulaires supérieures. Alors,  $B \cap H = \{\lambda I_3 : \lambda^3 = 1\}$ . Vu les dimensions on en déduit que  $G/H$  est un espace homogène sphérique de rang 2, et que  $B$  est opposé à  $H$ .

Par ailleurs, les deux paraboliqes minimaux de  $G$  contenant  $B$  sont :

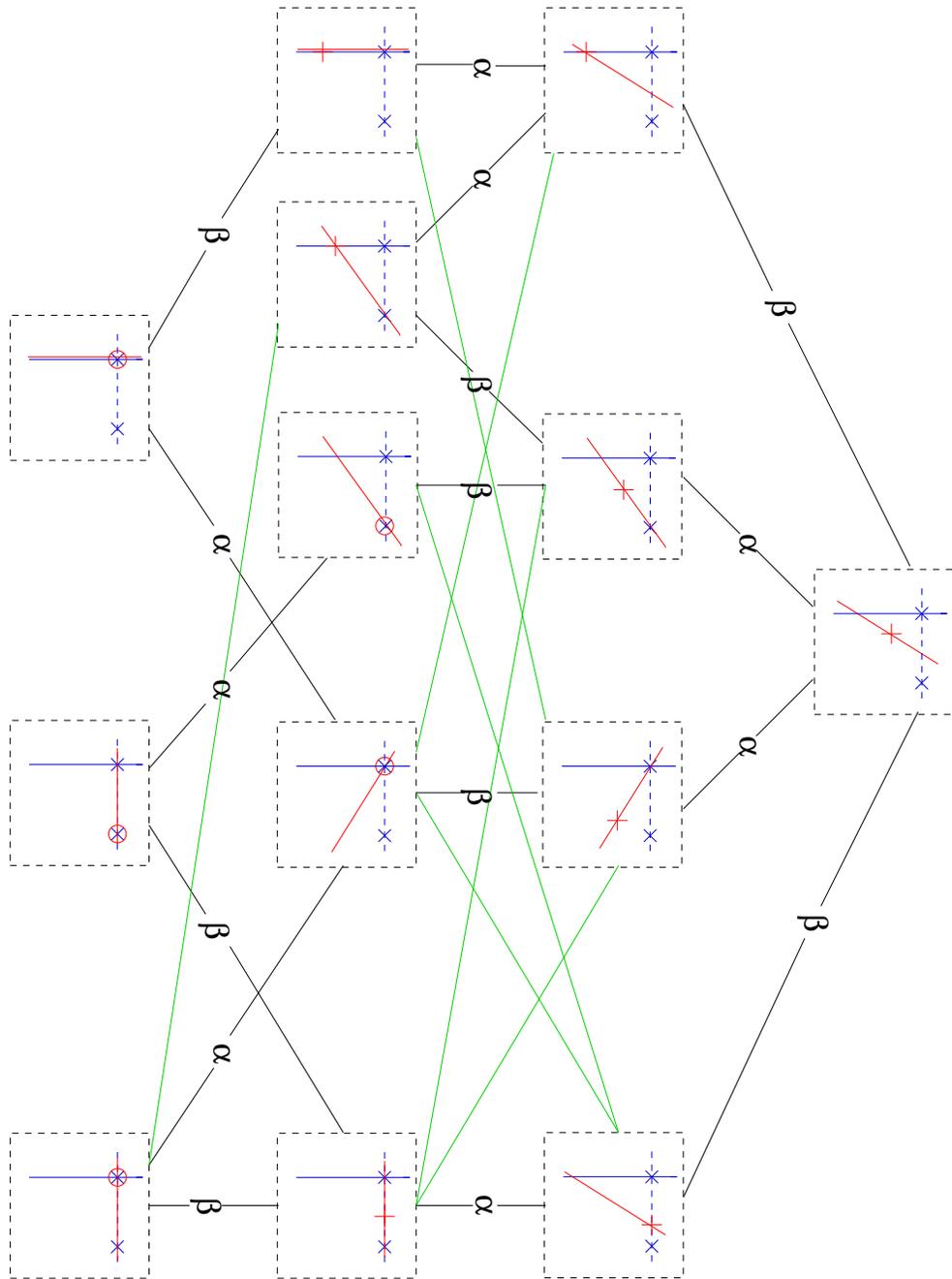
$$P_\alpha := \text{Stab}_G([e_1]),$$

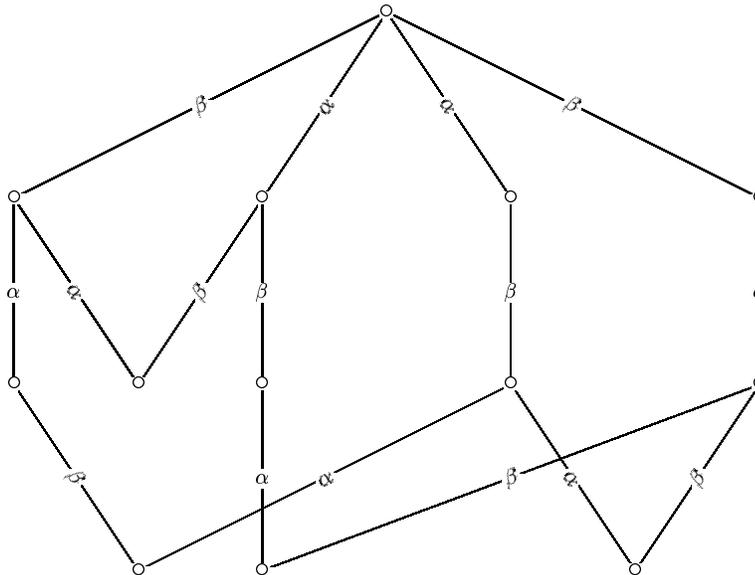
et

$$P_\beta := \text{Stab}_G([e_3^*]).$$

Les orbites de  $B$  dans  $G/H$  sont paramétrées par les positions relatives d'un drapeau de  $\mathbb{P}^2$  et de  $x \in \mathcal{O}$ . De même les orbites de  $P_\alpha$  (resp.  $P_\beta$ ) dans  $G/H$  sont paramétrées par les positions relatives d'un point de  $\mathbb{P}^2$  (resp. d'une droite de  $\mathbb{P}^2$ ) et de  $x \in \mathcal{O}$ . On en déduit le graphe de la figure 2.2 sur laquelle on a dessiné des représentants de chaque orbite de  $B$  dans  $G/H$ , les relations d'inclusion d'adhérences et les relations du type  $P_\alpha V = V'$  et  $P_\beta V = V'$ .

Pour avoir le graphe  $\Gamma(G/H)$ , il nous reste à montrer qu'il n'y a pas d'arêtes de type  $N(T)$ . Or reconnaissant « les briques de type  $T$  », on peut calculer (de proche en proche) le rang de chaque élément de  $\mathcal{B}(G/H)$ . On en déduit alors que toutes les arêtes sont simples. On obtient le graphe  $\Gamma(G/H)$  ci-dessous :

FIG. 2.2 –  $\Gamma(G/H)$



## 2.8 Préliminaires sur les diviseurs

**2.8.1** — Commençons par introduire une notation. Soit  $\phi : X \rightarrow Y$  un morphisme surjectif entre deux variétés normales. On note  $\phi^*$  le morphisme naturel du groupe des diviseurs de  $Y$  vers celui des diviseurs de  $X$  (voir [25] ou [43]).

Soit  $\Gamma$  un groupe algébrique linéaire,  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-groupes fermés de  $\Gamma$  tels que  $H_1 \subseteq H_2$ . Considérons l'application naturelle :

$$\phi : \Gamma/H_1 \rightarrow \Gamma/H_2.$$

On a le

**Lemme 2.8.1** *Avec les notations précédentes, on se donne  $D$  un diviseur premier de  $\Gamma/H_2$ .*

*Alors,  $\phi^*(D)$  est la somme avec multiplicité 1 des composantes irréductibles de  $\phi^{-1}(D)$ .*

*Si de plus,  $H_2/H_1$  est connexe,  $\phi^*(D)$  est premier.*

**Preuve :** Supposons par l'absurde qu'il existe une composante irréductible  $E$  de  $\phi^{-1}(D)$  telle que le diviseur  $\phi^*(D) - 2E$  est effectif.

Comme toutes les fibres de  $\phi$  ont la même dimension,  $\phi(E)$  est dense dans  $D$ . Alors, il existe un point  $x$  de  $E$  tel que  $\phi(x)$  est lisse dans  $D$ . Comme  $\Gamma/H_2$  est lisse, il existe une équation locale  $f \in \mathcal{O}_{\Gamma/H_2, \phi(x)}$  de  $D$  au voisinage de  $\phi(x)$ . De même, il existe une équation locale  $g \in \mathcal{O}_{\Gamma/H_1, x}$  de  $E$  au voisinage de  $x$ . De plus, comme  $\phi^*(D) - 2E$  est effectif,  $h := \frac{f \circ \phi}{g^2}$  appartient à  $\mathcal{O}_{\Gamma/H_1, x}$ . Mais alors, la différentielle de  $f \circ \phi$  en  $x$  est nulle. Par ailleurs, comme  $\phi$  est  $\Gamma$ -équivariante, la différentielle de  $\phi$  en tout point de  $\Gamma/H_1$  est surjective. On en déduit que la différentielle de  $f$  au point  $\phi(x)$  est nulle. Ceci contredit la lissité de  $D$  en  $\phi(x)$ .

On a bien montré que  $\phi^*(D)$  est la somme avec multiplicité 1 des composantes irréductibles de  $\phi^{-1}(D)$ . Si de plus,  $H_2/H_1$  est connexe, toutes les fibres de  $\phi$  sont irréductibles. Alors,  $\phi^{-1}(D)$  est irréductible.  $\square$

**2.8.2**— On suppose maintenant que  $\Gamma = G$  est réductif et connexe. On se donne aussi  $H$  un sous-groupe sphérique de  $G$ . On considère  $H^\circ$ , la composante neutre de  $H$ . Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $H^\circ$ .

**Lemme 2.8.2** *Soit  $D$  une couleur de  $G/H$ . On considère l'application naturelle induite par l'inclusion de  $H^\circ$  dans  $H$  :*

$$\phi : G/H^\circ \longrightarrow G/H.$$

*Alors,  $\phi^*(D)$  est soit une couleur de  $G/H^\circ$ , soit la somme de deux couleurs distinctes de  $G/H^\circ$ .*

**Preuve :** Utilisant le lemme 2.8.1, il suffit de montrer que  $\phi^{-1}(D)$  a au plus deux composantes irréductibles. Pour ce faire choisissons un tore maximal  $T$  de  $B$ . Alors,  $B$  est opposé à  $H$  et d'après la proposition 2.7.1 il existe une racine simple  $\alpha$  de  $(B, T)$  qui monte  $D$  sur  $G/H$ .

Soit  $P_\alpha$  le sous-groupe parabolique minimal de  $G$  contenant  $B$  associé à  $\alpha$ . On a :  $P_\alpha \cdot \phi^{-1}(D) = G/H^\circ$ . Comme de plus, toutes les composantes irréductibles de  $\phi^{-1}(D)$  sont permutées par l'action de  $H$  par multiplication à droite, ceci implique que  $\alpha$  monte toutes les composantes de  $\phi^{-1}(D)$  sur  $G/H^\circ$ . Soit  $E$  une telle composante. On en déduit que si  $(E, \alpha)$  est de type  $U$  ou  $N(T)$ ,  $\phi^{-1}(D)$  est irréductible. Si  $(E, \alpha)$  est de type  $T$  alors  $\phi^{-1}(D)$  a au plus deux composantes irréductibles. Le lemme est démontré.  $\square$

# Chapitre 3

## Vecteurs d'un $G$ -module propres pour un sous-groupe sphérique

### 3.1 Introduction

Dans cette section, on suppose que  $G$  est semi-simple. On se donne toujours un sous-groupe sphérique  $H$  de  $G$ . Soit  $V$  un  $G$ -module et  $\chi$  un caractère de  $H$ . On se pose la question suivante : existe-t-il un vecteur non nul  $v$  de  $V$  tel que pour tout  $h$  dans  $H$ , on ait  $h.v = \chi(h)v$  ?

Notons que T. Vust dans [47] a résolu cette question dans le cas symétrique.

### 3.2 Vecteurs propres de $H$ dans les $G$ -modules simples

#### 3.2.1 Fonctions rationnelles sur $G$ propres pour $B \times H$

**3.2.1.1** — Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $H$ . On considère sur  $G$  l'action de  $B \times H$  définie par la formule :  $(b, h).g = bgh^{-1}$ . On note  $k(G)^{(B \times H)}$ , l'ensemble des fonctions rationnelles sur  $G$  qui sont propres pour l'action de  $B \times H$ . Si  $f \in k(G)^{(B \times H)}$  est de poids  $(\gamma, \chi)$  alors  $f|_{B \cap H} =$

$f(1) \cdot \gamma|_{B \cap H}^{-1} = f(1) \cdot \chi|_{B \cap H}$ . En particulier,  $\gamma|_{B \cap H} = -\chi|_{B \cap H}$ . Posons donc :

$$\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H) := \{(\gamma, \chi) \in \mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}(H) : \gamma|_{B \cap H} = -\chi|_{B \cap H}\}.$$

On note respectivement  $\rho_B$  et  $\rho_H$  les morphismes de projection du produit  $\mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}(H)$  vers  $\mathcal{X}(B)$  et  $\mathcal{X}(H)$ . On notera encore  $\rho_B$  et  $\rho_H$  leurs restrictions à  $\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H)$ . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H) & \xrightarrow{\rho_H} & \mathcal{X}(H) \xrightarrow{\chi \mapsto -\chi} \mathcal{X}(H) \\ \rho_B \downarrow & & \downarrow \text{restriction} \\ \mathcal{X}(B) & \xrightarrow{\text{restriction}} & \mathcal{X}(B \cap H) \end{array}$$

Considérons l'application  $\tau : k(G)^{(B \times H)} \longrightarrow \mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H)$  qui à toute fonction propre associe son poids pour  $B \times H$ . Comme  $BH$  est dense dans  $G$ , le noyau de  $\tau$  est l'ensemble des fonctions constantes non nulles.

Réciproquement, si  $(\gamma, \chi)$  appartient à  $\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H)$ , la formule :  $f(b^{-1}h) = \gamma(b)\chi(h)$  définit une fonction rationnelle sur  $G$ , vecteur propre de  $B \times H$  de poids  $(\gamma, \chi)$  et valant 1 en l'élément neutre de  $G$  : on note  $[\gamma : \chi]$  cette fonction. Alors,  $\tau$  est surjective et on obtient la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow k^* \longrightarrow k(G)^{(B \times H)} \xrightarrow{\tau} \mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H) \longrightarrow 0.$$

Remarquons que l'application  $(\gamma, \chi) \mapsto [\gamma : \chi]$  scinde la suite exacte.

**3.2.1.2** — On s'intéresse maintenant à l'intersection de  $k(G)^{(B \times H)}$  et de  $k[G]$  que l'on note  $k[G]^{(B \times H)}$ . Pour cela, nous considérons

$$\zeta : \tilde{G} \longrightarrow G,$$

le revêtement universel de  $G$ . Posons  $\tilde{B} = \zeta^{-1}(B)$  et  $\tilde{H} = \zeta^{-1}(H)$ . Remarquons que via  $\zeta$ , le groupe  $\tilde{G}$  agit transitivement sur  $G/H$ . L'isotropie du point  $H/H$  dans  $\tilde{G}$  est précisément  $\tilde{H}$ . Nous utiliserons les notations introduites dans le paragraphe précédent aussi bien pour  $\tilde{G}/\tilde{H}$  que pour  $G/H$ . On remarque que  $\mathcal{D}(\tilde{G}/\tilde{H})$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{D}(G/H)$ . On vérifie aussi que la composition par  $\zeta$  induit une inclusion :

$$\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H) \xrightarrow{\zeta^*} \mathcal{X}(\tilde{B}) \times_{\mathcal{X}(\tilde{B} \cap \tilde{H})} \mathcal{X}(\tilde{H}).$$

Par la suite, nous considérerons  $\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H)$  comme un sous-groupe de  $\mathcal{X}(\tilde{B}) \times_{\mathcal{X}(\tilde{B} \cap \tilde{H})} \mathcal{X}(\tilde{H})$ .

**Remarque :** Si  $G$  est  $\mathrm{PSL}(2)$  et  $H$  le tore maximal de  $G$ ,  $\zeta^*$  n'est pas surjective.

Rappelons que par normalité de  $G$ , une fonction rationnelle  $f$  sur  $G$  est régulière si et seulement si son diviseur,  $\mathrm{div}(f)$  est effectif. Nous nous intéressons donc aux diviseurs stables par  $B \times H$  dans  $G$ .

Soit  $D \in \mathcal{D}(G/H)$  un diviseur premier stable par  $B$  dans  $G/H$ . Considérons

$$q : G \longrightarrow G/H,$$

l'application orbite. On note  $\tilde{D}$  l'image réciproque du diviseur  $D$  par  $\zeta \circ q$ . Comme  $\tilde{G}$  est semi-simple et simplement connexe, il existe une unique fonction régulière  $f_D$  sur  $\tilde{G}$  telle que :

$$\mathrm{div}(f_D) = \tilde{D} \quad \text{et} \quad f_D(1) = 1.$$

Comme  $\tilde{D}$  est stable par  $\tilde{B} \times \tilde{H}$  et par unicité, la fonction  $f_D$  est propre pour  $\tilde{B} \times \tilde{H}$ . Notons  $(\gamma_D, \chi_D)$  le poids de  $f_D$  dans  $\mathcal{X}(\tilde{B}) \times_{\mathcal{X}(\tilde{B} \cap \tilde{H})} \mathcal{X}(\tilde{H})$ .

**Lemme 3.2.1** *Avec les notations ci-dessus, l'application :*

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\tilde{B}) \times_{\mathcal{X}(\tilde{B} \cap \tilde{H})} \mathcal{X}(\tilde{H}) &\longrightarrow \bigoplus_{D \in \mathcal{D}(G/H)} \mathbb{Z}\tilde{D} \\ (\gamma, \chi) &\longmapsto \mathrm{div}([\gamma : \chi]) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme de groupes.*

**Preuve :** Comme  $\tilde{G}$  est semi-simple, toute fonction rationnelle,  $f$  sur  $\tilde{G}$  est déterminée à une constante multiplicative près par  $\mathrm{div}(f)$ . Si de plus,  $f$  est vecteur propre de  $\tilde{B} \times \tilde{H}$ , on a :

$$\mathrm{div}(f) \in \bigoplus_{D \in \mathcal{D}(G/H)} \mathbb{Z}\tilde{D}.$$

Ceci montre que l'application du lemme est bien définie et injective. De plus, par définition,  $\mathrm{div}([\gamma_D : \chi_D]) = \tilde{D}$ . Ainsi, le morphisme du lemme est surjectif.  $\square$

On peut alors caractériser les éléments de  $k[G]^{(B \times H)}$ .

**Lemme 3.2.2** *Soit  $(\gamma, \chi)$  dans  $\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H)$ . Avec les notations introduites ci-dessus, la fonction  $[\gamma : \chi]$  est régulière sur  $G$  si et seulement si*

$$(\gamma, \chi) \in \bigoplus_{D \in \mathcal{D}(G/H)} \mathbb{N}(\gamma_D, \chi_D).$$

*Comme annoncé, nous avons omis le  $\zeta^*$ .*

**Preuve :** Considérons :

$$\tilde{G} \xrightarrow{\zeta} G \xrightarrow{[\gamma : \chi]} k.$$

La fonction  $[\gamma : \chi]$  est régulière si et seulement si  $\text{div}(\zeta \circ [\gamma : \chi])$  est effectif. Le lemme découle alors du lemme 3.2.1.  $\square$

**3.2.1.3 — Exemple** Considérons à nouveau l'espace homogène  $G/H$  du paragraphe 2.7.4. Reprenons en particulier les notations de ce paragraphe. Dans ce paragraphe, nous allons calculer les caractères de la forme  $\gamma_D$  et  $\chi_D$  associés aux couleurs de  $G/H$ . Nous en déduirons les restrictions à  $\mathcal{X}(B)^{B \cap H}$  des valuations  $\nu_D$ . Nous calculerons également le cône  $\mathcal{CV}(G/H)$ .

Équations des couleurs de  $G/H$

Soit  $T$  le tore maximal de  $G$  constitué des matrices diagonales. Les restrictions à  $T$  des deux poids fondamentaux  $\omega_\alpha$  et  $\omega_\beta$  de  $(G, B)$  sont :

$$\forall \text{diag}(t, u, v) \in T \quad \begin{aligned} \omega_\alpha(\text{diag}(t, u, v)) &= t \\ \omega_\beta(\text{diag}(t, u, v)) &= v^{-1}. \end{aligned}$$

Le groupe  $H$  agit sur la droite de  $V$  (resp. de  $V^*$ ) engendrée par  $e_1 + e_2 + e_3$  (resp. par  $e_2^* - e_1^*$ ) par un caractère que l'on note  $\chi_\alpha$  (resp.  $\chi_\beta$ ). On vérifie alors aisément que  $\mathcal{X}(H) = \mathbb{Z}\chi_\alpha \oplus \mathbb{Z}\chi_\beta$ . Notons que  $H$  agit sur la droite de  $V$  (resp. de  $V^*$ ) engendré par  $e_3$  (resp. par  $e_1^*$ ) par le caractère  $\chi_\beta - \chi_\alpha$  (resp.  $-\chi_\alpha$ ).

Considérons  $B_1^- := \text{Stab}_G([e_3], [e_1^*])$ . Alors,  $B_1^-$  est un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $B$ . De plus,  $B_1^-$  contient  $H$  et  $B_1^-/H$  est isomorphe à  $\mathbb{A}^2$ . Alors,  $D_\alpha^1 := \overline{Bs_\alpha B_1^-}/H$  est un diviseur premier de  $G/H$  stable par  $B$ . De plus, son équation  $f_{D_\alpha^1}$  est un vecteur propre pour  $B \times B_1^-$  de poids  $(\omega_\alpha, -\omega_\alpha)$ . Comme la restriction de  $-\omega_\alpha$  à  $H$  est  $-\chi_\alpha$ , on en déduit que :  $(\gamma_{D_\alpha^1}, \chi_{D_\alpha^1}) = (\omega_\alpha, -\chi_\alpha)$ .

De même,  $D_\beta^1 := \overline{Bs_\beta B_1^-}/H$  est une couleur de  $G/H$ . Comme la restriction de  $\omega_\beta$  à  $H$  est  $\chi_\beta - \chi_\alpha$ , on a :  $(\gamma_{D_\beta^1}, \chi_{D_\beta^1}) = (\omega_\beta, \chi_\alpha - \chi_\beta)$ .

Considérons  $B_2^- := \text{Stab}_G([e_1 + e_2 + e_3], [e_2^* - e_1^*])$ . Alors,  $B_2^-$  est un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $B$ . De plus,  $B_2^-$  contient  $H$  et  $B_2^-/H$  est encore isomorphe à  $\mathbb{A}^2$ . Alors,  $D_\alpha^2 := \overline{Bs_\alpha B_2^-}/H$  est une couleur de  $G/H$  telle que  $(\gamma_{D_\alpha^2}, \chi_{D_\alpha^2}) = (\omega_\alpha, -\chi_\beta)$ . De même,  $D_\beta^2 := \overline{Bs_\beta B_2^-}/H$  est une couleur de  $G/H$  telle que  $(\gamma_{D_\beta^2}, \chi_{D_\beta^2}) = (\omega_\beta, \chi_\alpha)$ .

Ainsi, les 4 équations des couleurs de  $G/H$  sont :

$$\begin{pmatrix} (\omega_\alpha, -\chi_\alpha) & (\omega_\beta, \chi_\alpha - \chi_\beta) \\ (\omega_\alpha, -\chi_\beta) & (\omega_\beta, \chi_\alpha) \end{pmatrix}.$$

Remarquons que  $H$  est d'indice fini dans son normalisateur. On va alors décrire explicitement le plongement canonique de  $G/H$ .

### Plongement canonique de $G/H$

Considérons

$$X := \{(a_1, a_2, d_1, d_2) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^2)^\vee \times (\mathbb{P}^2)^\vee : a_1 \in d_1 \text{ et } a_2 \in d_1 \cap d_2\}$$

et  $x = ([e_1 + e_2 + e_3], [e_3], [e_1^*], [e_2^* - e_1^*])$ . Il est clair que  $(X, x)$  est un plongement projectif de  $G/H$ . De plus,  $X$  contient 4 orbites de  $G$  :

- $G.x \simeq G/H = \{(a_2, a_2, d_1, d_2) \in X : a_2 \neq a_1 \text{ et } d_1 \neq d_2\}$ .
- $\mathcal{O}_1 := \{(a_1, a_1, d_1, d_2) \in X : d_1 \neq d_2\}$ .
- $\mathcal{O}_2 := \{(a_1, a_2, d_1, d_1) \in X : a_1 \neq a_2\}$ .
- $Z := \{(a_1, a_1, d_1, d_1) \in X\}$ .

Sur la figure 3.1, nous avons représenté un point  $z$  de  $Z$  et le drapeau de  $\mathbb{P}^2$  fixé par  $B$ .

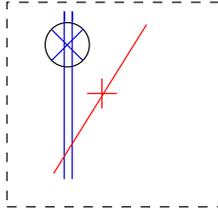


FIG. 3.1 – Un point de  $Z$  et un drapeau de  $\mathbb{P}^2$

On voit alors sur la figure 2.2 qu'aucune couleur de  $G/H$  ne contient  $z$  dans son adhérence. En particulier, l'orbite  $Z$  du plongement  $X$  de  $G/H$  est sans couleur. Comme  $X$  est projective, on en déduit que  $X$  est le plongement canonique de  $G/H$ .

Cône des valuations de  $G/H$

Considérons les deux sous-groupes à un paramètre de  $T$  suivant :

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &:= \text{diag}(t, t, t^{-2}), \\ \lambda_2(t) &:= \text{diag}(t^2, t^{-1}, t^{-1}).\end{aligned}$$

Alors, pour  $i = 1$  ou  $2$ , la limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_i(t).x$  appartient à l'orbite ouverte de  $B$  dans  $\mathcal{O}_i$ . Mais alors, pour  $i = 1$  ou  $2$ , la proposition 2.5.4 montre que la demi-droite engendrée par l'image dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  de la valuation associée à  $\overline{\mathcal{O}_i}$  coïncide avec celle engendrée par  $-\lambda_i$ . Ainsi, on obtient le cône des valuations et les images des valuations associées aux couleurs de la figure 3.2.

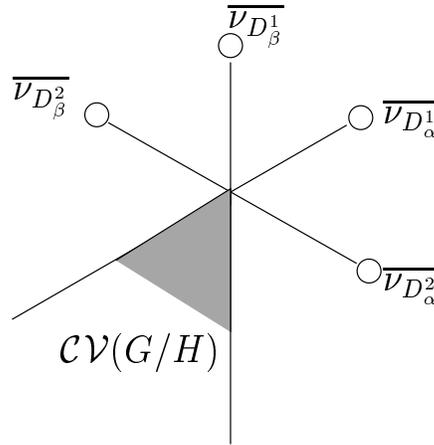


FIG. 3.2 –  $\mathcal{CV}(G/H)$  et  $\overline{\nu}_D$  pour  $D \in \mathcal{D}(G/H)$

### 3.2.2 Vecteurs propres de $H$

Soit  $V$  un  $G$ -module. Posons

$$V^{H,\chi} := \{v \in V : \forall h \in H \quad h.v = \chi(h)v\},$$

et

$$\Gamma_\chi := \{\gamma \in P^+ : (V_\gamma^*)^{H,\chi} \neq 0\}.$$

La proposition suivante donne une description de  $\Gamma_\chi$ .

**Proposition 3.2.1** *Avec les notations précédentes,  $\Gamma_\chi$  est l'ensemble des poids  $\gamma$  de  $\rho_B(\rho_H^{-1}(\chi))$  tels que :*

$$(\gamma, \chi) \in \bigoplus_{D \in \mathcal{D}(G/H)} \mathbb{N}(\gamma_D, \chi_D).$$

*De plus, pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma_\chi$ , la dimension de  $(V_\gamma^*)^{H, \chi}$  vaut 1.*

**Preuve :** Soit  $\gamma$  dans  $\Gamma_\chi$  et  $\nu$  non nul dans  $(V_\gamma^*)^{H, \chi}$ . Soit  $v$  dans  $V_\gamma$ , vecteur propre de poids  $\gamma$  pour  $B$ . Notons  $f$  la fonction régulière sur  $G$  définie par  $g \mapsto \nu(gv)$ . Comme  $f$  est propre de poids  $(\gamma, \chi)$  pour  $B \times H$ , le poids  $\gamma$  appartient à  $\rho_B(\rho_H^{-1}(\chi))$ . De plus, comme  $f$  est régulière sur  $G$ , le lemme 3.2.2 donne :

$$(\gamma, \chi) \in \bigoplus_{D \in \mathcal{D}(G/H)} \mathbb{N}(\gamma_D, \chi_D).$$

Par ailleurs,  $f$  est déterminée à une constante multiplicative près par le couple  $(\gamma, \chi)$ . Il en est donc de même pour  $\nu$  et la dimension de  $(V_\gamma^*)^{H, \chi}$  vaut 1.

Réciproquement, soit  $\gamma$  dans  $\rho_B(\rho_H^{-1}(\chi))$  tel que  $(\gamma, \chi)$  appartient à la somme  $\bigoplus_{D \in \mathcal{D}(G/H)} \mathbb{N}(\gamma_D, \chi_D)$ . Alors  $[\gamma : \chi]$  est régulière sur  $G$ . Or, d'après le théorème de Frobenius, le  $G \times G$ -module  $k[G]$  est isomorphe à :

$$\bigoplus_{\lambda \in P^+} V_\lambda \otimes V_\lambda^*.$$

On a alors :

$$k[G]^{(B \times H)} \simeq \prod_{\lambda \in P^+} V_\lambda^{(B)} \otimes V_\lambda^{*(H)}. \quad (3.1)$$

Ainsi,  $[\gamma : \chi]$  est de la forme  $g \mapsto \nu(gv)$  pour  $\nu$  dans  $(V_\gamma^*)^{H, \chi}$  et  $v$  dans  $V_\gamma^{(B)}$ . Alors,  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_\chi$ .  $\square$

### 3.3 Polyèdres moments de $G/H$

Nous allons maintenant appliquer la proposition 3.2.1 à l'étude des polyèdres moments de  $G/H$ . Nous regarderons ensuite les liens entre ces polyèdres moments et les polytopes moments de plongements projectifs de  $G/H$ .

### 3.3.1 Le groupe $\text{Pic}^G(G/H)$

Nous allons rappeler un isomorphisme entre  $\text{Pic}^G(G/H)$  et le groupe  $\mathcal{X}(H)$  des caractères de  $H$ . Pour plus de détails veuillez vous reporter à [34].

Soit  $\chi$  un caractère de  $H$ . On considère  $G \times k$  muni de l'action de  $G \times H$  définie par :

$$(g, h).(g', \tau) = (gg'h^{-1}, \chi(h)\tau),$$

pour tout  $g, g' \in G$ ,  $h \in H$  et  $\tau \in k$ . Le quotient de  $G \times k$  par  $\{1\} \times H$  existe ; on le note  $\mathcal{L}_\chi$ . La projection de  $G \times k$  sur  $G$  induit une application  $p$  de  $\mathcal{L}_\chi$  sur  $G/H$ . On peut alors montrer que  $p : \mathcal{L}_\chi \rightarrow G/H$  est un fibré en droites. De plus, l'action de  $G \times \{1\}$  sur  $G \times k$  induit une linéarisation du fibré en droites  $\mathcal{L}_\chi$ .

On a alors le lemme suivant :

**Lemme 3.3.1** *L'application :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(H) & \longrightarrow & \text{Pic}^G(G/H) \\ \chi & \longmapsto & \mathcal{L}_\chi \end{array}$$

*est un isomorphisme de groupes.*

Remarquons qu'étant donné  $\mathcal{L}$  dans  $\text{Pic}^G(G/H)$ , on retrouve  $\chi$  comme le poids de l'action de  $H$  sur la fibre au-dessus de  $H/H$  dans  $\mathcal{L}$ .

### 3.3.2 Le polyèdre $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$

Commençons par fixer quelques notations. On note encore  $\rho_B$  et  $\rho_H$  les applications canoniques de  $\mathcal{X}(B)_\mathbb{Q} \times \mathcal{X}(H)_\mathbb{Q}$  ou  $(\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H))_\mathbb{Q}$  vers  $\mathcal{X}(B)_\mathbb{Q}$  et  $\mathcal{X}(H)_\mathbb{Q}$  respectivement.

Étant donné  $\chi$  dans  $\mathcal{X}(H)$ , on rappelle que :

$$\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi) = \{p \in \mathcal{X}(B)_\mathbb{Q} : \exists n > 0, np \in P^+, V_{np} \hookrightarrow \Gamma(G/H, \mathcal{L}_{n\chi})\}.$$

Le lemme suivant donne une description de cet ensemble qui redémontre qu'il s'agit d'un polyèdre.

**Lemme 3.3.2** *On a :*

$$\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi) = \rho_B \left( \rho_H^{-1}(-\chi) \cap \bigoplus_{D \in \mathcal{D}(G/H)} \mathbb{Q}^+(\gamma_D, \chi_D) \right).$$

**Preuve :** Soit  $f$  dans  $k[G]$ . L'application  $G \longrightarrow G \times k, g \mapsto (g, f(g))$  est notée  $F$ . Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times k & \longrightarrow & \mathcal{L}_\chi \\ \uparrow F & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

Comme le quotient de  $G \times k$  par  $H$  est catégorique,  $F$  induit par ce diagramme une section de  $\mathcal{L}_\chi$  si et seulement si  $h.f = \chi(h^{-1})f$  pour tout  $h$  dans  $H$ . Ceci montre (voir [34]) que le  $G$ -module  $\Gamma(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  s'identifie à :

$$\{f \in k[G] : \forall h \in H \quad h.f = \chi(h^{-1})f\}.$$

Mais alors, le théorème de décomposition du  $G \times G$ -module  $k[G]$  de Frobenius montre que :

$$\Gamma(G/H, \mathcal{L}_{n\chi}) = \bigoplus_{\gamma \in P^+} V_\gamma \otimes (V_\gamma^*)^{H, -n\chi}.$$

Le lemme découle alors de la proposition 3.2.1. □

### 3.3.3 Un exemple : l'espace homogène $\mathbf{SL}(2)^3/\Delta \mathbf{SL}(2)$

**3.3.3.1** — Considérons le groupe  $G = \mathbf{SL}(2) \times \mathbf{SL}(2) \times \mathbf{SL}(2)$ . On note  $H = \Delta\mathbf{SL}(2)$  le sous-groupe de  $G$  formé des triplets,  $(g, g, g)$  pour  $g \in \mathbf{SL}(2)$ . Nous allons montrer que  $H$  est un sous-groupe sphérique de  $G$  et nous allons calculer le polyèdre  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0)$ .

**3.3.3.2** — Le groupe  $G$  agit sur  $(\mathbb{P}^1)^3$  par :

$$(g_1, g_2, g_3).(x_1, x_2, x_3) = (g_1.x_1, g_2.x_2, g_3.x_3).$$

En écrivant  $\mathbb{P}^1 = k \cup \infty$ , considérons le point  $x = (0, 1, \infty)$  dans  $(\mathbb{P}^1)^3$ . Le stabilisateur de  $x$  dans  $G$  est un sous-groupe de Borel de  $G$ . Par la suite, on notera  $B$  ce sous-groupe de  $G$ . Ainsi, on identifie  $((\mathbb{P}^1)^3, x)$  à la variété des drapeaux  $(G/B, B/B)$ .

Fixons  $T$  un tore maximal de  $G$  inclus dans  $B$ . On note alors,  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$  les poids fondamentaux associés au couple  $(B, T)$ . On a alors :

$$\mathcal{X}(B) = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \oplus \mathbb{Z}\omega_3.$$

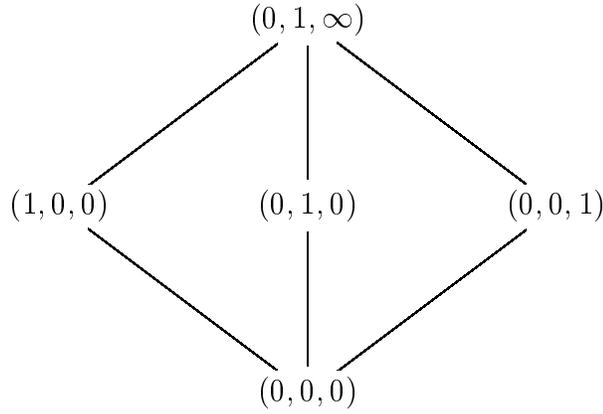
De plus, l'ensemble  $P^+$  des poids dominants est :

$$P^+ = \mathbb{N}\omega_1 \oplus \mathbb{N}\omega_2 \oplus \mathbb{N}\omega_3.$$

Considérons également  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  les racines simples de  $(B, T)$ . Pour  $i = 1, 2$  ou  $3$ , on notera  $P_{\alpha_i}$  le sous-groupe parabolique minimal de  $G$  contenant  $B$  associé à la racine  $\alpha_i$  :

$$P_{\alpha_1} = \mathrm{SL}(2) \times B \times B, \quad P_{\alpha_2} = B \times \mathrm{SL}(2) \times B, \quad P_{\alpha_3} = B \times B \times \mathrm{SL}(2).$$

**3.3.3.3** — Le sous-groupe  $H$  agit sur  $G/B = (\mathbb{P}^1)^3$  avec 5 orbites. Dans le diagramme suivant, nous avons choisi un représentant par orbite et tracé les incidences de ces 5 orbites.



Ceci montre en particulier que  $H$  est sphérique. De plus,  $G/H$  a trois couleurs  $D_1, D_2$  et  $D_3$  dans l'ordre du diagramme.

**3.3.3.4** — Le sous-groupe  $H \cap B$  est le stabilisateur dans  $H$  de  $x$  ; il vaut :

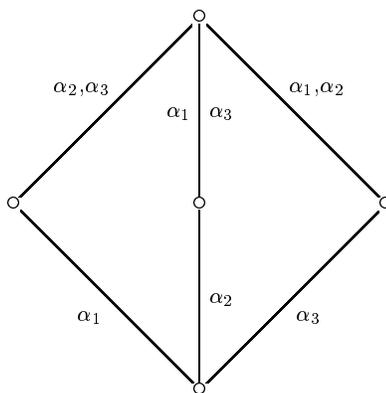
$$H \cap B = \pm(I_2, I_2, I_2),$$

où  $I_2$  est la matrice identité de  $\mathrm{SL}(2)$ . On en déduit que :

$$\mathcal{X}(B)^{B \cap H} = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3 : n_1 + n_2 + n_3 \text{ est pair}\}.$$

Il est alors facile de voir que :

$$f_{D_1} = [\omega_2 + \omega_3 : 0], \quad f_{D_2} = [\omega_1 + \omega_3 : 0] \quad \text{et} \quad f_{D_3} = [\omega_1 + \omega_2 : 0].$$

FIG. 3.3 – Le graphe  $\Gamma(G/H)$ .

On en déduit que  $D_1$  est stable par  $P_{\alpha_1}$  et que  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  montent  $D_1$  sur  $G/H$ . On en déduit aisément, avec la proposition 2.7.1 que le graphe  $\Gamma(G/H)$  est comme sur la figure 3.3.

Par ailleurs, les équations des  $f_{D_i}$  montrent que le polyèdre moment  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0)$  est un cône inclus dans  $P^+$  dont une section affine est représentée sur la figure 3.4.

### 3.3.4 Sur les zéros des sections de $\mathcal{L}_\chi$

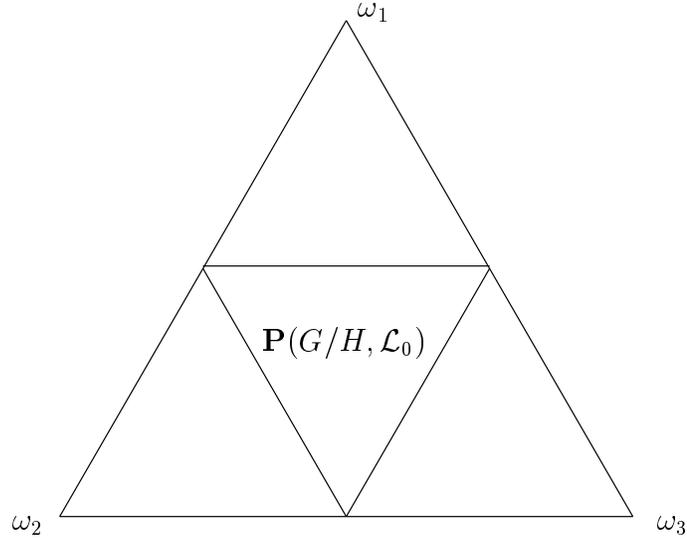
Par la suite, nous ferons de la Théorie Géométrique des Invariants. Nous serons amenés à calculer des lieux de zéros de sections de fibrés en droites. Montrons d'ores et déjà le

**Lemme 3.3.3** *Soit  $\chi$  un caractère de  $H$  et  $p$  un point de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$ . Il existe des nombres rationnels  $k_D$  positifs ou nuls tels que :*

$$(p, \chi) = \sum_{D \in \mathcal{D}(G/H)} k_D (\gamma_D, \chi_D).$$

*Soit  $n$  un entier strictement positif et  $\sigma$  une section de  $\mathcal{L}_\chi^{\otimes n}$  de poids  $np$  pour  $B$ . Alors, on a :*

$$\{x \in G/H : \sigma(x) = 0\} = \bigcup_{k_D > 0} D.$$

FIG. 3.4 –  $P^+$  et  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0)$ 

**Preuve :** On a  $(np, n\chi) = \sum_{D \in \mathcal{D}(G/H)} nk_D(\gamma_D, \chi_D)$  et les  $nk_D$  sont tous entiers. Avec les notations de la section 3.2, considérons la fonction  $f$  rationnelle sur  $G$  définie par :

$$f = \prod_{D \in \mathcal{D}(G/H)} [\gamma_D : \chi_D]^{nk_D}.$$

Quitte à remplacer  $f$  par un multiple, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times k & \longrightarrow & \mathcal{L}_{n\chi} \\ \uparrow g \mapsto (g, f(g)) & & \uparrow \sigma \\ G & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

En particulier,  $\{x \in G/H : \sigma(x) = 0\}$  est l'image dans  $G/H$  de  $\{g \in G : f(g) = 0\}$ . Le lemme suit immédiatement.  $\square$

### 3.3.5 Polytopes moments d'un plongement de $G/H$

**3.3.5.1** — Soit  $X$  un plongement projectif de  $G/H$  et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et  $G$ -linéarisé sur  $X$ . Nous nous intéressons à nouveau au polytope

$\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ .

Soit  $\chi$  le caractère de  $H$  tel que la restriction de  $\mathcal{L}$  à  $G/H$  soit égale à  $\mathcal{L}_\chi$ . Si  $\mathbf{P}$  est un polytope inclus dans  $\mathcal{X}(B)_\mathbb{Q}$ , on note

$$\mathbf{P} \times \chi := \{(p, \chi) \in \mathcal{X}(B)_\mathbb{Q} \times \mathcal{X}(H)_\mathbb{Q} : p \in \mathbf{P}\}.$$

Soit  $\mathbf{F}$  une face de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ . Comme dans la proposition 2.6.4, on considère l'ouvert  $X_{\mathbf{F}}$ . Posons :

$$\mathcal{D}_{\mathbf{F}} := \{D \in \mathcal{D}(G/H) : D \text{ rencontre } X_{\mathbf{F}}\}.$$

Nous pouvons maintenant préciser les résultats de la proposition 2.6.4.

**Proposition 3.3.1** *Soit  $\mathbf{F}$  une face de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ . On utilise les notations de la proposition 2.6.4 ainsi que celles introduites ci-dessus. Alors, on a :*

$$(i) \quad \mathbf{F} \times \chi = \left( \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\mathbf{F})}, \mathcal{L}) \times \chi \right) \cap \bigoplus_{D \notin \mathcal{D}_{\mathbf{F}}} \mathbb{Q}^+(\gamma_D, \chi_D).$$

(ii) *Si de plus,  $\mathbf{F} = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L})$ , alors :*

$$\mathcal{D}_{\mathbf{F}} = \mathcal{D}(X, \mathcal{O}).$$

**Preuve :** La proposition 2.6.4 montre que  $\mathbf{F}$  est incluse dans  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\mathbf{F})}, \mathcal{L})$ . De plus, le lemme 3.3.3 montre que  $\mathbf{F} \times \chi$  est inclus dans  $\bigoplus_{D \notin \mathcal{D}_{\mathbf{F}}} \mathbb{Q}^+(\gamma_D, \chi_D)$ . Ainsi,  $\mathbf{F} \times \chi$  est inclus dans l'intersection de l'énoncé. Soit  $(p, \chi)$  un point de cette intersection. Soit  $n$  un entier strictement positif et  $\sigma$  une section de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  de poids  $np$  pour  $B$ . Alors, le lemme 3.3.3 montre que pour tout  $D \in \mathcal{D}(G/H)$ , si la restriction de  $\sigma$  à  $D$  est nulle alors  $D$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}_{\mathbf{F}}$ . Comme de plus,  $\sigma$  est non nulle sur  $\mathcal{O}(\mathbf{F})$ , on en déduit que  $X_{\mathbf{F}}$  est inclus dans  $X_\sigma$ . Mais alors, la proposition 2.6.4 permet de finir la preuve de la première assertion.

Supposons que  $\mathbf{F} = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L})$ . D'après la proposition 2.6.4,  $X_{\mathbf{F}}$  est égal à  $X_{\mathcal{O}, B}$ . Mais alors,  $\mathcal{D}_{\mathbf{F}} = \mathcal{D}(X, \mathcal{O})$  est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.1.  $\square$

**Remarque :** Soit  $(X, x)$  un plongement projectif de  $G/H$  et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et  $G$ -linéarisé sur  $X$ . Les propositions 2.6.4 et 3.3.1 permettent de déterminer l'éventail colorié de  $X$  à partir du polytope  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ .

**3.3.5.2** — Les propositions 2.6.1 et 2.6.2 impliquent que si  $Z$  est une orbite projective de  $G$  dans  $X$ , le polytope  $\mathbf{P}(Z, \mathcal{L})$  est un sommet de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ . La proposition suivante exprime  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  en fonction de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  et de ses sommets qui sont de la forme  $\mathbf{P}(Z, \mathcal{L})$ .

**Proposition 3.3.2** *Soit  $X$  un plongement projectif de  $G/H$  et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et  $G$ -linéarisé sur  $X$ . Alors, on a :*

$$\mathbf{P}(X, \mathcal{L}) = \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_X) \cap \bigcap_{Z \text{ orbite fermée de } X} \left( \mathbf{P}(Z, \mathcal{L}) + \mathcal{C}(X, Z)^\vee \right)$$

**Preuve :** L'inclusion de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  dans la grande intersection est une conséquence immédiate des propositions 2.6.2 et 2.6.4.

Soit  $p$  un point de l'intersection de l'énoncé. Quitte à remplacer  $\mathcal{L}$  par une puissance, on suppose qu'il existe  $\sigma_\circ$  une section de  $\mathcal{L}$  de poids  $\gamma(\sigma_\circ)$  pour  $B$  et  $f$  une fonction rationnelle sur  $G/H$  de poids  $p - \gamma(\sigma_\circ)$  pour  $B$ . Avec les notations de la proposition 2.6.3, comme  $p$  appartient à  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_X)$ , on a :

$$\forall D \in \mathcal{D}(G/H) \quad \langle \overline{\nu}_D, p - \gamma(\sigma_\circ) \rangle + n_D \geq 0.$$

Soit  $\nu \in \mathcal{V}(X)$  et  $Z$  une orbite fermée de  $G$  dans  $X_\nu$ . Alors, comme  $p$  appartient à  $\mathbf{P}(Z, \mathcal{L}) + \mathcal{C}(X, Z)^\vee$ , on a :

$$\langle \overline{\nu}, p - \gamma(\sigma_\circ) \rangle + n_\nu \geq 0.$$

Mais alors, la proposition 2.6.3 permet de conclure. □

# Chapitre 4

## Sur les plongements des groupes

### 4.1 Introduction

Soit  $G$  un groupe algébrique réductif connex. Le groupe  $G \times G$  opère transitivement dans  $G$  par :  $(g_1, g_2).g = g_1 g g_2^{-1}$ . L'isotropie de l'élément neutre de  $G$  est la diagonale

$$\Delta G := \{(g, g) : g \in G\},$$

dans  $G \times G$ . Dans la suite de ce travail l'espace homogène  $G \times G / \Delta G$  et ses plongements jouent un rôle central. Dans cette section, nous regroupons quelques résultats utiles les concernant.

### 4.2 Couleurs et Valuations

Soit  $B$  et  $B^-$  deux sous-groupes de Borel opposés de  $G$ . Notons  $T$  leur intersection. Posons :

$$\mathbf{G} := G \times G \quad \mathbf{H} := \Delta G \quad \mathbf{T} := T \times T \quad \mathbf{B} := B \times B^-.$$

D'après la décomposition de Bruhat,  $BB^-$  est dense dans  $G$ . Alors, l'espace homogène  $G \times G / \Delta G$  est sphérique et  $\mathbf{B}$  est opposé à  $\mathbf{H}$ .

Comme  $\mathbf{B} \cap \mathbf{H} = \{(t, t) : t \in T\}$ , en identifiant  $\mathcal{X}(B \times B^-)$  à  $\mathcal{X}(T) \times \mathcal{X}(T)$ , on obtient :

$$\mathcal{X}(\mathbf{B})^{\mathbf{B} \cap \mathbf{H}} = \{(\gamma, -\gamma) : \gamma \in \mathcal{X}(T)\}.$$

En particulier, le rang de l'espace homogène sphérique  $G = G \times G/\Delta G$  est le rang du groupe  $G$  au sens ordinaire. Dorénavant, on identifie  $\mathcal{X}(\mathbf{B})^{\mathbf{B} \cap \mathbf{H}}$  à  $\mathcal{X}(B)$  par  $(\gamma, -\gamma) \mapsto \gamma$ . Alors,  $\text{Hom}(\mathcal{X}(\mathbf{B})^{\mathbf{B} \cap \mathbf{H}}, \mathbb{Q})$  s'identifie à  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q})$ .

Soit  $\Sigma$  l'ensemble des racines simples associées au couple  $(B, T)$ . On note  $W := N(T)/T$ , le groupe de Weyl de  $T$ . Soit  $\alpha \in \Sigma$ . On note  $s_\alpha$  la réflexion simple du groupe  $W$  associée à  $\alpha$ . On note  $\alpha^\vee$  la coracine associée à  $\alpha$  et  $\omega_{\alpha^\vee}$  le poids fondamental de la coracine  $\alpha^\vee$ . Ainsi,  $(\omega_{\alpha^\vee})_{\alpha \in \Sigma}$  est la base duale de la base  $(\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$  de  $\mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}$ .

Considérons l'adhérence  $D_\alpha$  dans  $G$  de  $Bs_\alpha B^-$ . Alors, la décomposition de Bruhat (voir [26]; 31.1) montre que :

$$\mathcal{D}(G \times G/\Delta G) = \{D_\alpha : \alpha \in \Delta\}.$$

Nous supposons désormais que  $G$  est semi-simple. Alors, nous avons défini

$$\gamma_{D_\alpha} = \omega_\alpha \in \mathcal{X}(B) \simeq \mathcal{X}(\mathbf{B})^{\mathbf{B} \cap \mathbf{H}},$$

où  $\omega_\alpha$  est le poids fondamental de  $(T, B)$  associé à  $\alpha$ . On en déduit que  $\overline{\nu_{D_\alpha}} \in \text{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q})$  est la coracine  $\alpha^\vee$  associée à  $\alpha$ . De plus, avec les notations de la proposition 2.5.2, on a :

$$P_{\mathbf{G}/\mathbf{H}} = \mathbf{B} \quad \text{et} \quad L_{G/H} = \mathbf{T}.$$

Par ailleurs, on peut trouver dans [12];4.1 une démonstration du fait que le cône  $\mathcal{CV}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$  s'identifie à la chambre de Weyl négative :

$$\mathcal{CV}(G \times G/\Delta G) = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Q}^- \omega_{\alpha^\vee}.$$

### 4.3 Les polytopes moments de plongements de $G$

Le groupe  $\text{Pic}^{\mathbf{G}}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$  est trivial. Pour le fibré trivial  $\mathcal{L}_0$  sur  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ , le lemme 3.3.2 montre que :

$$\mathbf{P}(\mathbf{G}/\mathbf{H}, \mathcal{L}_0) = \{(p, -p) : p \in \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Q}^+ \omega_\alpha\}.$$

Dorénavant, on plonge  $\mathbf{P}(\mathbf{G}/\mathbf{H}, \mathcal{L}_0)$  et plus généralement tout polyèdre moment d'un plongement de  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  dans  $\mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}$ , par  $(p, -p) \mapsto p$ . Alors le

polyèdre  $\mathbf{P}(\mathbf{G}/\mathbf{H}, \mathcal{L}_0)$  s'identifie au cône convexe  $P_{\mathbb{Q}}^+$  engendré par l'ensemble des poids dominants de  $(B, T)$ .

Soit  $X$  un plongement projectif sans couleur de  $G \times G/\Delta G$  et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et  $G \times G$ -linéarisé sur  $X$ . Considérons  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L}) \subseteq \mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}$ , le polytope moment correspondant. Si  $\mathbf{F}$  est une face de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ , on note  $\mathcal{C}(\mathbf{F}) \subseteq \text{Hom}(\mathcal{X}(T), \mathbb{Q})$  le cône dual de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  vu de  $\mathbf{F}$  (voir le paragraphe 2.6.3). Alors, lorsque  $\mathbf{F}$  décrit l'ensemble des faces de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ , les cônes  $\mathcal{C}(\mathbf{F})$  forment un éventail noté  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(X, \mathcal{L}))$ . De plus, comme  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  est borné, les cônes de cet éventail recouvrent  $\text{Hom}(\mathcal{X}(T), \mathbb{Q})$ .

Si  $I$  est une partie de  $\Sigma$  et  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ , on note  $\mathcal{C}(I, \mathcal{O})$  le cône convexe de  $\text{Hom}(\mathcal{X}(T), \mathbb{Q})$  engendré par le cône  $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$  et les vecteurs  $\alpha^\vee$  pour  $\alpha \in I$ . La proposition suivante décrit alors les cônes de  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(X, \mathcal{L}))$ .

**Proposition 4.3.1** *Soit  $X$  un plongement projectif et sans couleur de  $G$ . Soit  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et  $G \times G$ -linéarisé sur  $X$ . Reprenons les notations introduites ci-dessus.*

*Alors, l'éventail  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(X, \mathcal{L}))$  est constitué des cônes de la forme  $\mathcal{C}(I, \mathcal{O})$  où  $\mathcal{O}$  est une orbite de  $G \times G$  dans  $X$  et  $I$  une partie de  $\Sigma$  telles que :*

$$\mathcal{C}(X, \mathcal{O}) \subseteq \bigoplus_{\beta \notin I} \mathbb{Q}\omega_{\beta^\vee}.$$

**Preuve :** Pour toute orbite  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $X$ , la proposition 2.6.4 montre que  $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$  appartient à  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(X, \mathcal{L}))$ . Par ailleurs, la proposition 3.3.2 donne :

$$\mathbf{P}(X, \mathcal{L}) = P_{\mathbb{Q}}^+ \cap \bigcap_{Z \text{ orbite fermée de } G \times G \text{ dans } X} \mathbf{P}(Z, \mathcal{L}) + \mathcal{C}(X, Z)^\vee.$$

On en déduit que chaque arête de  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(X, \mathcal{L}))$  est soit  $\mathbb{Q}^+\alpha^\vee$  pour  $\alpha \in \Sigma$ , soit une arête de  $\mathcal{F}(X)$  (c'est-à-dire une demi-droite incluse dans  $\bigoplus_{\beta \in \Sigma} \mathbb{Q}^-\omega_{\beta^\vee}$ ).

Montrons alors que tout cône  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(X, \mathcal{L}))$  est comme dans l'énoncé de la proposition. D'après ce qui précède, il existe une partie  $I$  de  $\Sigma$  et une orbite  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $X$  telles que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{O})$ .

Si  $I$  est vide il n'y a rien à démontrer. Si  $I$  est non vide, comme  $X$  est sans couleur, la proposition 2.6.4 montre que l'intérieur relatif de  $\mathcal{C}$  ne rencontre pas  $\mathcal{CV}(G \times G/\Delta G) = \bigoplus_{\beta \in \Sigma} \mathbb{Q}^-\omega_{\beta^\vee}$ . Comme  $\alpha^\vee$  est orthogonal à  $\omega_{\beta^\vee}$  pour toute racine simple  $\beta \neq \alpha$ , on en déduit que :

$$\mathcal{C}(X, \mathcal{O}) \subseteq \bigoplus_{\beta \notin I} \mathbb{Q}^-\omega_{\beta^\vee}.$$

Réciproquement, soit  $I$  et  $\mathcal{O}$  comme dans l'énoncé de la proposition. Alors, on a :

$$\mathcal{C}(I, \mathcal{O}) \cap \bigoplus_{\beta \in \Sigma} \mathbb{Q}^+ \beta^\vee = \bigoplus_{\beta \in I} \mathbb{Q}^+ \beta^\vee,$$

et

$$\mathcal{C}(I, \mathcal{O}) \cap \mathcal{CV}(G \times G/\Delta G) = \mathcal{C}(X, \mathcal{O}).$$

On en déduit aisément que  $\mathcal{C}(I, \mathcal{O})$  est un cône de  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(X, \mathcal{L}))$ .  $\square$

## 4.4 Sur les orbites de $G \times G$ dans les plongements sans couleur de $G$

**4.4.1** — On note  $\mathcal{X}_*(T)$  le groupe constitué des sous-groupes à un paramètre de  $T$ . Si  $\lambda \in \mathcal{X}_*(T)$ , on pose :

$$P(\lambda) := \{g \in G : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t^{-1}) \text{ existe}\}.$$

D'après [39],  $P(\lambda)$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  dont le radical unipotent est :

$$P^u(\lambda) := \{g \in G : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t^{-1}) = 1\}.$$

De plus,  $P(-\lambda)$  est opposé à  $P(\lambda)$  et leur sous-groupe de Levi commun est le centralisateur  $L(\lambda)$  de l'image de  $\lambda$ . Enfin, on note  $C(\lambda)$  le centre connexe de  $L(\lambda)$ .

D'après [39],  $P(\lambda)$  contient  $B$  si et seulement si  $\lambda$  est dominant.

**4.4.2** — Soit  $X$  un plongement sans couleur de  $G \times G/\Delta G$  et  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ . Soit  $U$  (resp.  $U^-$ ) le radical unipotent de  $B$  (resp.  $B^-$ ). Alors, le théorème 3 montre qu'il existe une sous-variété  $S$  stable par  $\mathbf{T}$  telle que l'application canonique :

$$U \times U^- \times S \longrightarrow X_{\mathcal{O}, \mathbf{B}}$$

soit un isomorphisme. De plus,  $S$  est un plongement affine de  $T \times T/T$  dont l'orbite fermée est  $S \cap \mathcal{O}$ . Alors, il existe un sous-groupe à un paramètre  $\lambda$  de  $T$  tel que  $z := \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)$  existe et appartient à  $S \cap \mathcal{O}$ .

Le théorème A1 de [13] implique la proposition suivante sous des hypothèses sensiblement plus fortes. Cependant, la démonstration de [13] s'applique sans changement et montre la

**Proposition 4.4.1** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

*L'isotropie de  $z$  dans  $G \times G$  est le produit semi-direct de  $P^u(\lambda) \times P^u(-\lambda)$  par  $\Delta L(\lambda) \times (C(\lambda) \times \{1\})_z$ . En particulier,  $P(\lambda)$  ne dépend que de  $\mathcal{O}$  ; on le note  $P(\mathcal{O})$ .*

D'après [13], puisque  $\lambda$  est dominant,  $P(\lambda)$  contient  $B$ . Alors,  $P(\lambda)$  est engendré par les sous-groupes paraboliques minimaux du type  $P_\alpha$  pour  $\alpha \in \Sigma$  qu'il contient. Une autre description de  $P(\lambda)$  est donc :

$$\forall \alpha \in \Sigma \quad P_\alpha \subseteq P(\lambda) \iff \langle \lambda, \alpha \rangle = 0.$$

Avec les notations de la proposition 4.4.1, le lemme suivant donne alors une caractérisation de  $P(\mathcal{O})$  dans la cas où  $X$  est projectif.

**Lemme 4.4.1** *Soit  $X$  un plongement projectif et sans couleur de  $G \times G / \Delta G$  et  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ . Soit  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et  $G \times G$ -linéarisé sur  $X$ . Soit  $\alpha$  une racine simple de  $(B, T)$ . Alors, se valent :*

- (i)  $\{p \in \mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}} : \alpha^\vee(p) = 0\} \cap \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L}) \neq \emptyset$ .
- (ii)  $P_\alpha \subseteq P(\mathcal{O})$ .

**Preuve :** D'après la proposition 4.3.1, la première assertion du lemme est équivalente à :  $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$  est inclus dans  $\bigoplus_{\beta \neq \alpha} \mathbb{Q}\omega_{\beta^\vee}$ .

Soit  $\lambda$  comme dans la proposition 4.4.1. D'après la proposition 2.5.4,  $\lambda$  appartient à l'intérieur relatif de  $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$ . Mais alors, l'assertion (i) est équivalente à  $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$ . Le lemme suit.  $\square$

## 4.5 Sur le groupe de Picard d'un plongement simple de $G$

Soit  $X$  un plongement simple de  $G \times G / \Delta G$  dont l'orbite fermée  $Z$  est projective. Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats concernant le groupe de Picard de  $X$ . On peut trouver des démonstrations complètes dans [12] ou [9].

Considérons

$$\zeta : \tilde{G} \longrightarrow G,$$

le revêtement universel de  $G$ . Notons,  $\tilde{B}^-$  le sous-groupe de Borel de  $\tilde{G}$  égal à  $\zeta^{-1}(B^-)$ . L'équation de  $\zeta^*(\overline{Bs_\alpha B^-})$  dans  $k[\tilde{G}]$  est un vecteur propre pour  $\tilde{B} \times \tilde{B}^-$  de poids  $(\omega_\alpha, -\omega_\alpha)$ .

Il est montré dans [12] que :

$$\mathrm{Pic}(X) = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Z}[\overline{Bs_\alpha B^-}].$$

De plus, il est montré dans [34] que  $\mathrm{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$  est canoniquement isomorphe à  $\mathrm{Pic}(X)$ . Considérons le morphisme,  $\rho_Z$  de restriction de  $\mathrm{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$  vers  $\mathrm{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(Z)$ .

L'orbite  $Z$  est isomorphe à  $\tilde{G}/\tilde{B} \times \tilde{G}/\tilde{B}^-$  (ceci est par exemple un corollaire de la proposition 4.4.1). Mais alors, le lemme 3.3.1 montre que  $\mathrm{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(Z)$  est isomorphe à  $\mathcal{X}(\tilde{B}) \times \mathcal{X}(\tilde{B}^-)$ . Ainsi, on peut définir  $\bar{\rho}_Z$  par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) & \xrightarrow{\rho_Z} & \mathrm{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(Z) \\ \downarrow & & \uparrow (\lambda, \mu) \mapsto \mathcal{L}_{(\lambda, \mu)} \\ \mathrm{Pic}(X) & \xrightarrow{\bar{\rho}_Z} & \mathcal{X}(\tilde{B}) \times \mathcal{X}(\tilde{B}^-), \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes. On montre alors que :

$$\bar{\rho}_Z([\overline{Bs_\alpha B^-}]) = (\omega_\alpha, -\omega_\alpha).$$

Ceci implique en particulier que  $\bar{\rho}_Z$  induit un isomorphisme de groupes :

$$\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathcal{X}(\tilde{B}) \simeq \{(\lambda, -\lambda) : \lambda \in \mathcal{X}(\tilde{B})\}.$$

Si  $\lambda$  est un caractère de  $\tilde{B}$ , on notera  $\mathcal{L}_\lambda$  l'unique fibré en droites sur  $X$  tel que  $\bar{\rho}_Z(\mathcal{L}_\lambda) = (\lambda, -\lambda)$ . On dira qu'un poids dominant  $\lambda$  est *régulier* s'il n'est orthogonal à aucune coracine (c'est-à-dire que lorsqu'on l'écrit comme combinaison linéaire des poids fondamentaux, aucun coefficient ne s'annule). Alors, le corollaire 5.1 de [12] appliqué à l'espace homogène  $G \times G/\Delta G$  est la

**Proposition 4.5.1** *Soit  $X$  un plongement simple de  $G \times G/\Delta G$  dont l'orbite fermée  $Z$  est projective. Avec les notations ci-dessus, on a :*

- (i) *Le morphisme  $\mathcal{X}(\tilde{B}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ ,  $\lambda \longmapsto \mathcal{L}_\lambda$  est un isomorphisme.*
- (ii) *Si  $\lambda \in \mathcal{X}(\tilde{B})$ ,  $\mathcal{L}_\lambda$  est engendré par ses sections (resp. ample) si et seulement si  $\lambda$  est dominant (resp. dominant régulier).*

# Chapitre 5

## Quotients de $G$ -variétés par un sous-groupe sphérique

### 5.1 Le cas affine

#### 5.1.1 Construction générale

Soit  $X$  une variété affine munie d'une action d'un groupe algébrique linéaire  $H$ . Si  $H$  est réductif, la Théorie Géométrique des Invariants construit un quotient catégorique de  $X$  par  $H$ . Si l'algèbre,  $k[X]^H$  des fonctions régulières invariantes sur  $X$  est de type fini, la construction a encore un sens. Dans cette section, on fait l'hypothèse que  $k[X]^H$  est de type fini et on étudie quelques propriétés de ce « quotient catégorique ». Commençons par définir :

$$X//H := \text{Spec}(k[X]^H).$$

L'inclusion de  $k[X]^H$  dans  $k[X]$  induit un morphisme  $H$ -invariant :

$$\pi : X \longrightarrow X//H.$$

Le couple  $(X//H, \pi)$  sera appelé le *quotient* de  $X$  par  $H$ .

**Proposition 5.1.1** *L'application  $\pi$  ainsi définie vérifie :*

- (i) *Si  $Y$  est une variété affine et  $\phi : X \longrightarrow Y$  est un morphisme  $H$ -invariant, alors il existe un unique morphisme  $\tilde{\phi} : X//H \longrightarrow Y$  tel que*

le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\phi} & Y \\
 \downarrow \pi & & \nearrow \tilde{\phi} \\
 X//H & & 
 \end{array}$$

- (ii) Si  $X$  est normale,  $X//H$  l'est aussi.
- (iii) Si  $X$  est normale,  $\pi$  est surjective en codimension 1.
- (iv) Si  $U$  est un ouvert de  $X//H$ , alors  $k[\pi^{-1}(U)]^H = k[U]$ .

**Preuve :** Assertion (i) : Comme  $\phi$  est invariante par l'action de  $H$ , l'image de  $k[Y]$  dans  $k[X]$  par la composition,  $\phi^*$  par  $\phi$  est incluse dans  $k[X]^H$ . L'assertion (i) suit alors facilement.

Assertion (ii) : Il s'agit de montrer que l'anneau  $k[X]^H$  est intégralement fermé dans son corps des fractions. Soit  $f$  un élément du corps des fractions de  $k[X]^H$  qui est entier sur  $k[X]^H$ . Comme  $X$  est normale et  $f$  est entier sur  $k[X]$ , la fonction  $f$  est régulière sur  $X$ . Mais  $f$  appartient à  $k(X)^H$ , donc  $f$  appartient à  $k[X]^H$ .

Assertion (iv) : Nous reproduisons ici la preuve du théorème 4.8 de [41] qui est énoncé avec  $H$  réductif. Il est suffisant de prouver l'assertion lorsque  $U = \{x \in X//H : f(x) \neq 0\}$  (avec  $f \in k[X]^H$ ) puisque ces ouverts forment une base de la topologie de  $X//H$ . Si  $A$  est un anneau et  $a$  un élément de  $A$ , on note  $A_a$  le localisé de  $A$  en  $a$ . Alors, on a :  $k[U] = k[X//H]_f$  et  $k[\pi^{-1}(U)] = k[X]_f$ . Alors, l'assertion (iv) découle de l'égalité évidente :  $(k[X]^H)_f = (k[X]_f)^H$ .

Assertion (iii) : Supposons par l'absurde qu'il existe  $D$  une sous-variété de codimension 1 dans  $X//H$  incluse dans l'adhérence de  $X//H - \pi(X)$ . Comme  $X$  est normale, on peut trouver un ouvert affine  $U$  de  $X//H$  qui rencontre  $D$  et  $f$  une fonction régulière sur  $U$  telle que :

$$U \cap D = \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

Notons  $\pi^*$  l'inclusion de  $k[X]^H$  dans  $k[X]$ . Considérons

$$\tilde{D} = \pi^{-1}(D \cap U) = \{x \in \pi^{-1}(U) : \pi^*(f)(x) = 0\}.$$

Si  $A$  est un anneau et  $a$  un élément de  $A$ , on note  $a.A$  l'idéal de  $A$  engendré par  $a$ . Comme  $\pi^*(k[U]) = k[\pi^{-1}(U)] \cap k(X)^H$  et  $f$  appartient à  $k(X)^H$ , on a :

$$(\pi^*(f).k[\pi^{-1}(U)]) \cap k(X)^H = \pi^*(f.k[U]).$$

Ceci montre que  $k[U]/f.k[U]$  s'injecte dans  $k[\pi^{-1}(U)]/f.k[\pi^{-1}(U)]$  ou encore que  $\pi(\tilde{D})$  est dense dans  $D$ . Contradiction.  $\square$

**Remarque :** Si  $H$  est réductif, l'hypothèse «  $Y$  affine » dans la première assertion de la proposition 5.1.1 est inutile. Cependant, on ne peut la supprimer en général. En effet, si  $X = G$  est un groupe réductif,  $H = B$  est un sous-groupe de Borel de  $G$  alors la variété quotient  $G//B$  est un point et le morphisme canonique  $G \rightarrow G/B$  ne se factorise pas.

Si  $Y$  est une variété, on notera  $\dim(Y)$  la dimension de  $Y$ . Nous utiliserons également le

**Lemme 5.1.1** *Soit  $\pi : X \rightarrow X//H$  le quotient de  $X$  par  $H$ . Soit  $d$  la dimension générique des orbites de  $H$  dans  $X$ . Alors, si  $X$  est normale, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\dim(X//H) + d = \dim(X)$ .
- (ii) *Au-dessus d'un ouvert non vide de  $X//H$ , chaque fibre de  $\pi$  contient une unique orbite ouverte et dense de  $H$ .*

**Preuve :**  $(ii) \Rightarrow (i)$ . Supposons qu'il existe un ouvert  $U$  de  $X//H$  comme dans l'énoncé. Alors, on a :  $\dim(U) + d = \dim(\pi^{-1}(U))$ ; ce qui implique l'assertion (i).

$(i) \Rightarrow (ii)$ . Considérons le corps des fractions,  $\text{Frac}(k[X]^H)$  de l'anneau  $k[X]^H$ . On se propose de montrer que  $\text{Frac}(k[X]^H)$  est égal au corps  $k(X)^H$  des fonctions rationnelles sur  $X$  invariantes par  $H$ .

Le degré de transcendance de  $\text{Frac}(k[X]^H)$  est la dimension de  $X//H$ . Or, le théorème de Rosenlicht (voir par exemple [41], théorème 2.3) montre que le degré de transcendance du corps  $k(X)^H$  est  $\dim(X) - d$ . Mais alors, l'assertion (i) montre que l'extension de  $\text{Frac}(k[X]^H)$  par  $k(X)^H$  est finie.

Soit  $f$  un élément de  $k(X)^H$ . Il existe alors  $a_0, \dots, a_k$  dans  $k[X]^H$  tels que :

$$a_0 f^k + a_1 f^{k-1} + \dots + a_k = 0.$$

En multipliant par  $a_0^{k-1}$ , on s'aperçoit que  $a_0 f$  est entier sur  $k[X]$ . Mais alors, comme  $X$  est normale,  $a_0 f$  est régulière sur  $X$ . Ainsi,  $f$  qui est égal à  $\frac{a_0 f}{a_0}$  appartient à  $\text{Frac}(k[X]^H)$ . On a montré que  $\text{Frac}(k[X]^H) = k(X)^H$ . Le théorème de Rosenlicht montre alors l'assertion (ii).  $\square$

### 5.1.2 Le cas d'un sous-groupe sphérique

Soit  $G$  un groupe réductif et  $H$  un sous-groupe sphérique de  $G$ . On se donne une variété affine,  $X$  munie d'une action algébrique de  $G$ . L'objet de cette sous-section est de définir et d'étudier un quotient catégorique de  $X$  par  $H$ .

Le théorème 9.3 de [24] établit la

**Proposition 5.1.2** *Soit  $G$  un groupe réductif et  $H$  un sous-groupe sphérique de  $G$ . Soit  $A$  une algèbre de type fini munie d'une action de  $G$ . Alors, l'algèbre  $A^H$  des invariants est de type fini.*

La proposition 5.1.2 montre en particulier que l'algèbre  $k[X]^H$  des fonctions régulières sur  $X$  invariantes sous l'action de  $H$  est de type fini.

On peut alors définir :

$$\pi : X \longrightarrow X//H.$$

En plus de la proposition 5.1.1, l'application  $\pi$  ci-dessus vérifie la

**Proposition 5.1.3** *Soit  $Z$  une sous-variété fermée de  $X$  stable par  $G$ . Le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi} & \overline{\pi(Z)} \hookrightarrow X//H \\ \downarrow & \nearrow & \\ Z//H & & \end{array}$$

*induit un isomorphisme de  $Z//H$  sur l'adhérence  $\overline{\pi(Z)}$  de  $\pi(Z)$  dans  $X//H$ .*

**Preuve :** Considérons  $\rho : k[X] \longrightarrow k[Z]$ , le morphisme de restriction. Comme  $G$  est réductif et  $\rho$  est surjectif, il existe un sous  $G$ -module,  $M$  de  $k[X]$  tel que  $\rho$  induit un isomorphisme de  $G$ -modules entre  $M$  et  $k[Z]$ . On

en déduit immédiatement que  $\rho$  induit une surjection de  $k[X]^H$  sur  $k[Z]^H$ . La proposition en découle.  $\square$

**Remarque :** Regardons l'exemple suivant :  $X = G$  muni de l'action du groupe  $G$  par multiplication à droite et  $H$  est un sous-groupe unipotent maximal de  $G$ . Alors,  $\pi(X) = G/H$  n'est pas affine. Ainsi, dans ce cas,  $\pi$  n'est pas surjective.

## 5.2 Le cas projectif

### 5.2.1 Construction générale

Soit  $X$  une variété projective munie de l'action d'un groupe algébrique linéaire  $H$ . Soit  $\mathcal{L}$  un fibré  $H$ -linéarisé sur  $X$  tel que l'algèbre

$$\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^H$$

est de type fini. On peut alors poser :

$$Y(\mathcal{L}) = \text{Proj} \left( \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^H \right).$$

Remarquons que  $Y(\mathcal{L}) = Y(\mathcal{L}^{\otimes m})$  pour tout entier  $m > 0$ . Soit

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = \{x \in X : \exists n > 0, \sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^H \quad \sigma(x) \neq 0\}.$$

L'inclusion de  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^H$  dans  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  induit un morphisme dominant  $H$ -invariant :

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow Y(\mathcal{L}).$$

On appelle le couple  $(Y(\mathcal{L}), \pi)$  le *quotient* de  $X$  par  $H$  associé à  $\mathcal{L}$ .

**Proposition 5.2.1** *L'application  $\pi$  ainsi définie vérifie :*

- (i) *L'application  $\pi$  est affine. De plus, pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y(\mathcal{L})$ , on a :  $k[\pi^{-1}(U)]^H = k[U]$ .*

- (ii) Si  $Y$  est une variété et  $\phi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow Y$  est un morphisme affine  $H$ -invariant, alors il existe un unique morphisme  $\tilde{\phi} : Y(\mathcal{L}) \longrightarrow Y$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ Y(\mathcal{L}) & & \end{array}$$

En particulier,  $Y(\mathcal{L})$  ne dépend que de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  et on pose :

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H := Y(\mathcal{L}).$$

- (iii) Si  $X$  est normale,  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  l'est aussi.  
 (iv) Si  $X$  est normale,  $\pi$  est surjective en codimension 1.

**Preuve :** L'application  $\pi$  est affine car elle provient d'une inclusion d'algèbres graduées. Si  $\sigma$  appartient à  $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^H$  (pour un entier positif  $n$ ), l'assertion (i) est évidemment vérifiée pour  $U = \{x \in X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H : \sigma(x) \neq 0\}$ . Comme les ouverts de ce type recouvrent  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$ , le cas affine (voir la proposition 5.1.1) permet alors de montrer l'assertion (i).

Les autres assertions de la proposition se déduisent aisément de la première et de la proposition 5.1.1.  $\square$

## 5.2.2 La notion de points stables

Avec les notations ci-dessus, on pose :

$$X^s(\mathcal{L}) := \{x \in X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) : \pi^{-1}(\pi(x)) = H.x\}.$$

Un point de  $X^s(\mathcal{L})$  sera dit *stable* pour  $\mathcal{L}$ . Un point de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  qui n'est pas stable sera dit *strictement semi-stable*. On a alors la

**Proposition 5.2.2** *On suppose qu'il existe un point de  $X$  dont l'isotropie dans  $H$  est finie. Soit  $x$  dans  $X^s(\mathcal{L})$ .*

*Alors,  $H.x$  est fermé dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  et le stabilisateur de  $x$  dans  $H$  est fini.*

**Preuve :** Il est clair que  $H.x = \pi^{-1}(\pi(x))$  est fermé dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$ . De plus, l'hypothèse implique que les fibres de  $\pi$  sont de dimension supérieure ou égale à celle de  $H$ . Mais alors, comme  $\pi^{-1}(\pi(x)) = H.x$ , génériquement les fibres de  $\pi$  ont la même dimension que  $H$ . Ceci implique que le stabilisateur dans  $H$  de  $x$  est fini.  $\square$

**Remarque :** Dans le cas où  $H$  est réductif, il est bien connu (voir [39] ou [35]) que la proposition 5.2.2 admet une réciproque. Plus précisément, supposons que  $H$  est réductif et que son isotropie dans  $X$  est génériquement finie. Alors, si  $H.x$  est fermé dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  et si le stabilisateur de  $x$  dans  $H$  est fini, le point  $x$  est stable pour  $\mathcal{L}$ . Cette réciproque est fautive en général. Pour s'en convaincre regardons l'exemple suivant.

**Exemple** Considérons le groupe additif  $H = k$  et l'espace vectoriel

$$V = \{ax^2 + bxy + cy^2 : a, b, c \in k\}$$

des polynômes en  $x$  et  $y$  homogènes de degré 2. Alors,  $H$  agit linéairement sur  $V$  par la formule :

$$t.(ax^2 + bxy + cy^2) = ax^2 + bx(y + tx) + c(y + tx)^2.$$

On vérifie alors que :

$$k[V]^H = k[c, b^2 - 4ac].$$

Alors, le quotient de  $V$  par  $H$  est :

$$\begin{array}{ccc} \pi : & V & \longrightarrow k^2 \\ & ax^2 + bxy + cy^2 & \longmapsto (c, b^2 - 4ac). \end{array}$$

Ainsi, on a :

$$\pi^{-1}(0, 1) = H.(x^2 + xy) \cup H.(x^2 - xy).$$

Alors,  $H.(x^2 + xy)$  est fermée de dimension 1 dans  $V$  et  $\pi^{-1}(\pi(x^2 + xy))$  est la réunion de deux orbites de  $H$ .

### 5.2.3 Le groupe des fibrés en droites $H$ -linéarisés sur $X$

Soit  $G$  un groupe réductif et  $H$  un sous-groupe sphérique de  $G$ . On se donne maintenant une variété projective  $X$  munie d'une action algébrique de  $G$ .

On note  $\text{Pic}^H(X)$  (resp.  $\text{Pic}^G(X)$ ) le groupe des fibrés en droites  $H$ -linéarisés (resp.  $G$ -linéarisés) sur  $X$ . On note  $r_H : \text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}^H(X)$  le morphisme de restriction de l'action de  $G$  à  $H$ . On note  $r$  le morphisme de  $\text{Pic}^H(X)$  vers  $\text{Pic}(X)$  qui oublie l'action de  $H$ . Soit  $\mathcal{X}(H)$  le groupe des caractères de  $H$ . On considère le morphisme  $i : \mathcal{X}(H) \rightarrow \text{Pic}^H(X)$  qui associe à un caractère  $\chi$  de  $H$  le fibré trivial sur  $X$  linéarisé par la formule :

$$h.(x, \tau) = (h.x, \chi(h)\tau) \quad \forall h \in H, x \in X \text{ et } \tau \in k.$$

**Proposition 5.2.3** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(i) *La suite :*

$$0 \rightarrow \mathcal{X}(H) \xrightarrow{i} \text{Pic}^H(X) \xrightarrow{r} \text{Pic}(X)$$

*est exacte.*

(ii) *De plus, la suite :*

$$0 \rightarrow \mathcal{X}(H)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{i} \text{Pic}^H(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{r} \text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow 0$$

*est exacte.*

(iii) *Le morphisme*

$$\begin{aligned} \phi : \text{Pic}^G(X) \times \mathcal{X}(H) &\longrightarrow \text{Pic}^H(X) \\ (\mathcal{L}, \chi) &\longmapsto r_H(\mathcal{L}) \otimes i(\chi) \end{aligned}$$

*induit après produit tensoriel avec  $\mathbb{Q}$  une surjection.*

**Preuve :** L'assertion (i) est un corollaire immédiat de [34]. La deuxième assertion découle également de [34].

Soit  $\mathcal{L}_0$  dans  $\text{Pic}^H(X)$ . D'après l'assertion (ii) appliquée au groupe  $G$ , il existe un entier  $m$  strictement positif tel que  $r(\mathcal{L}_0)^{\otimes m}$  admet une  $G$ -linéarisation. Soit  $\mathcal{L}$  dans  $\text{Pic}^G(X)$  tel que :

$$r(\mathcal{L}_0^{\otimes m}) = r \circ r_H(\mathcal{L}).$$

La première assertion montre alors qu'il existe un caractère  $\chi$  de  $H$  tel que :

$$\mathcal{L}_0^{\otimes m} = r_H(\mathcal{L}) \otimes i(\chi).$$

La dernière assertion est démontrée. □

## 5.2.4 Quotients par un sous-groupe sphérique

**5.2.4.1** — Soit  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et  $H$ -linéarisé sur  $X$ . On veut définir un quotient de  $X$  par  $H$  associé au fibré en droites  $\mathcal{L}$ .

Pour cela nous introduisons quelques notations. Si  $\chi$  est un caractère de  $H$  et  $V$  est un  $G$ -module, on rappelle que :

$$V^{H,\chi} = \{v \in V : \forall h \in H \quad h.v = \chi(h)v\},$$

et on pose

$$V^H := \{v \in V : \forall h \in H \quad h.v = v\}.$$

On a alors le :

**Lemme 5.2.1** *L'algèbre  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^H$  est de type fini.*

**Preuve :** D'après la proposition 5.2.3, il existe un entier strictement positif  $m$ , un élément  $\mathcal{L}_0$  de  $\text{Pic}^G(X)$  et un caractère  $\chi$  de  $H$  tels que :

$$\mathcal{L}^{\otimes m} = r_H(\mathcal{L}_0) \otimes i(\chi).$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes mn})^H &= \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, r_H(\mathcal{L}_0^{\otimes n}) \otimes i(n\chi))^H \\ &\simeq \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}_0^{\otimes n})^{H, -n\chi}. \end{aligned}$$

Rappelons que l'algèbre  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}_0^{\otimes n})$  est une  $G$ -algèbre graduée. En d'autres termes, l'action de  $k^*$  induite par la graduation commute à celle de  $G$ . On peut donc munir  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}_0^{\otimes n})$  d'une action de  $G \times k^*$ . Considérons  $H_\chi$  le sous-groupe de  $G \times k^*$  défini par :

$$H_\chi = \{(h, \chi(h)) : h \in H\}.$$

On a alors, pour tout entier  $n$  :

$$\Gamma(X, \mathcal{L}_0^{\otimes n})^{H, -n\chi} = \Gamma(X, \mathcal{L}_0^{\otimes n})^{H_\chi}.$$

Ainsi,

$$\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes mn})^H \simeq \left( \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}_0^{\otimes n}) \right)^{H_\chi}.$$

De plus, si  $B$  est un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $H$ , il est immédiat que  $B \times k^*$  est un sous-groupe de Borel de  $G \times k^*$  opposé à  $H_\chi$ . En particulier, le sous-groupe  $H_\chi$  de  $G \times k^*$  est sphérique. L'algèbre  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}_0^{\otimes n})$  étant de type fini, la proposition 5.1.2 montre que  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes mn})^H$  est de type fini.

Par ailleurs, l'anneau  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^H$  est une extension entière de  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes mn})^H$ . On peut alors conclure avec le théorème 2 du chapitre V (§3.2) de [6] (voir aussi [21]).  $\square$

**5.2.4.2** — Grâce au lemme 5.2.1, comme dans la section 5.2.1, on peut définir :

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H.$$

L'application  $\pi$  ainsi définie vérifie la

**Proposition 5.2.4** *Soit  $Z$  une sous-variété fermée stable par  $G$  dans  $X$ . On note  $\mathcal{L}|_Z$  le fibré en droites  $H$ -linéarisé obtenu par restriction de  $\mathcal{L}$ . Alors,  $Z^{\text{ss}}(\mathcal{L}|_Z) = Z \cap X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$ . De plus, le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} Z^{\text{ss}}(\mathcal{L}|_Z) = Z \cap X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\pi} & \overline{\pi(Z)} \hookrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H \\ \downarrow & \nearrow & \\ Z^{\text{ss}}(\mathcal{L}|_Z)//H & & \end{array}$$

*induit un isomorphisme de la variété  $Z^{\text{ss}}(\mathcal{L}|_Z)//H$  sur l'adhérence  $\overline{\pi(Z)}$  dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  de l'image par  $\pi$  de  $Z \cap X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$ .*

**Preuve :** La démonstration est identique à celle de la proposition 5.1.3.  $\square$

**5.2.4.3** — Dans ce paragraphe, nous allons construire un fibré ample sur  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  associé à une puissance de  $\mathcal{L}$ .

La proposition 3 du chapitre III (§1) de [5] est le résultat d'algèbre commutative suivant :

**Lemme 5.2.2** *Soit  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  une algèbre graduée de type fini. Alors, il existe un entier  $p > 0$  tel que l'algèbre*

$$\bigoplus_{n \geq 0} A_{np}$$

soit engendrée par ses éléments de degré un (i.e. par  $A_p$ ).

Nous appliquons ce lemme pour dire qu'il existe un entier  $m > 0$  tel que  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes mn})^H$  est engendrée par ses éléments de degré un. En identifiant canoniquement  $\mathbb{P}((\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})^H)^*)$  à l'espace projectif des hyperplans de  $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})^H$ , considérons alors :

$$\begin{aligned} \phi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H &\longrightarrow \mathbb{P}((\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})^H)^*) \\ y &\longmapsto \{\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})^H : \sigma(y) = 0\}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que  $\phi$  est une immersion fermée. Posons :

$$\mathcal{L}^{\otimes m} // H := \phi^*(\mathcal{O}(1)).$$

Alors,  $\mathcal{L}^{\otimes m} // H$  est un fibré en droites très ample sur  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$ . De plus, on a un isomorphisme canonique :

$$\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H, (\mathcal{L}^{\otimes m} // H)^{\otimes n}) \simeq \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes mn})^H,$$

et

$$\pi^*(\mathcal{L}^{\otimes m} // H) = \mathcal{L}^{\otimes m}|_{X^{\text{ss}}(\mathcal{L})}.$$



# Chapitre 6

## Quels plongements projectifs de $G/H$ peut-on obtenir comme quotients de plongements projectifs de $G$ ?

### 6.1 Une solution à ce problème

Soit  $G$  un groupe algébrique semi-simple connexe. Comme dans la section 4, regardons  $G$  comme un espace homogène sphérique sous l'action de  $G \times G$ .

Soit  $H$  un sous-groupe sphérique de  $G$ . On se donne également un plongement projectif  $Y$  de  $G/H$ . Le théorème suivant répond à la question :  $Y$  peut-il être obtenu comme quotient (au sens de la section 5.2.4.2) d'un plongement projectif de  $G \times G/\Delta G$  ?

Commençons par poser quelques notations. Si  $E$  est un diviseur premier d'une variété normale  $X$ , on note  $\nu_E$  la valuation normalisée de  $k(X)$  dont le centre est  $E$ . On dira qu'une action de  $G$  est *quasi-fidèle* si son noyau est fini.

**Théorème 4** *On suppose que l'action de  $G$  sur  $G/H$  est quasi-fidèle. Soit  $(Y, y)$  un plongement projectif de  $G/H$ . Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe un plongement projectif  $X$  de  $G$  et un fibré en droites ample et  $G \times H$ -linéarisé  $\mathcal{L}$  sur  $X$  tels que*

$$Y = X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H.$$

(ii) Pour tout diviseur premier  $D$  stable par  $G$  de  $Y$ , la valuation  $\nu_D$  de  $k(G/H)$  s'étend en une valuation  $G \times G$ -invariante de  $k(G)$ .

**Preuve :** (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Considérons  $\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \rightarrow Y$  le morphisme quotient. Soit  $D$  un diviseur premier stable par  $G$  de  $Y$ . Comme  $\pi$  est surjective en codimension 1,  $\pi^{-1}(D)$  est une réunion de diviseurs premiers de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$ .

De plus, comme  $\pi$  est équivariante pour l'action de  $G$ ,  $\pi(G) = G/H$  et la variété  $\pi^{-1}(D)$  est incluse dans le complémentaire de  $G$  dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$ . Par conséquent,  $\pi^{-1}(D)$  est l'intersection de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  et d'une réunion de diviseurs premiers de  $X$  stables par  $G \times G$ . Choisissons  $E$  une composante irréductible de  $\pi^{-1}(D)$  qui domine  $D$ .

Si  $K$  est un corps, on note  $\mathcal{V}(K)$  l'ensemble des valuations normalisées du corps  $K$ . Considérons  $\pi_* : \mathcal{V}(k(X)) \rightarrow \mathcal{V}(k(Y))$  l'application associée au morphisme  $\pi^* : k(Y) \rightarrow k(X)$  de composition avec  $\pi$ . On a alors :  $\nu_D = \pi_*(\nu_E)$ . Comme  $\pi$  est équivariante pour l'action de  $G$ ,  $\pi|_G$  est le quotient de  $G$  par  $H$  et  $\pi_*$  est la restriction de  $k(G)$  à  $k(G/H)$ . Mais alors,  $\nu_E$  est une valuation  $G \times G$ -invariante de  $k(G)$  qui prolonge  $\nu_D$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Choisissons un fibré en droites  $\mathcal{M}$  ample et  $G$ -linéarisé sur  $Y$ . Quitte à remplacer  $\mathcal{M}$  par une puissance assez grande, on peut supposer que  $Y$  se plonge dans  $\mathbb{P}(V)$  où  $V = \Gamma(Y, \mathcal{M})^*$ . D'après l'exercice 5.1.4. de [25], on peut de plus supposer que le cône affine,  $\tilde{Y}$  au-dessus de  $Y$  dans  $V$  est normal.

Soit  $\tilde{y}$  dans  $V$  non nul au-dessus de  $y$ . Le groupe  $k^*$  agit sur  $V$  par multiplication scalaire. Cette action commute à celle de  $G$ , ce qui munit  $V$  d'une action de  $G \times k^*$ . De plus,  $H$  agit sur la droite  $k.\tilde{y}$  via un caractère  $\chi$ . Le stabilisateur de  $\tilde{y}$  dans  $G \times k^*$  est alors  $H_{-\chi} = \{(h, \chi(h^{-1})) : h \in H\}$ .

On note  $\rho$  l'application de  $G$  vers  $\text{PGL}(V)$  et on pose  $G^1 = \rho(G)$ . On considère  $X^1$  l'adhérence de  $G^1$  dans  $\mathbb{P}(\text{End}(V))$ . On note  $\tilde{X}^1$  le cône affine au-dessus de  $X^1$  dans  $\text{End}(V)$ . Considérons

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : \tilde{X}^1 &\longrightarrow \tilde{Y} \\ m &\longmapsto m.\tilde{y} \end{aligned}$$

Montrons alors le

**Fait 1** : La codimension de  $\tilde{Y} - \overline{\tilde{\psi}(\tilde{X}^1)}$  est supérieure ou égale à 2.

Pour cela, supposons par l'absurde qu'il existe  $\tilde{D}$  un diviseur premier dans cette adhérence. Comme  $\tilde{\psi}$  est équivariante pour l'action de  $G \times k^*$ ,  $\tilde{D}$  est stable par  $G \times k^*$ . Ainsi,  $\tilde{D}$  est le cône affine au-dessus d'un diviseur  $D$  premier stable par  $G$  dans  $Y$ .

Soit  $\tilde{X}_{\text{ss}}^1$  la préimage de  $\tilde{Y} - \{0\}$  par  $\tilde{\psi}$  et  $X_{\text{ss}}$  l'image de  $\tilde{X}_{\text{ss}}^1$  dans  $X^1$ . Le morphisme  $\tilde{\psi}$  induit une application  $\psi : X_{\text{ss}}^1 \rightarrow Y$ . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\rho} & G^1 & \hookrightarrow & X_{\text{ss}}^1 \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \psi \\ & & G/H & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

Par hypothèse,  $\nu_D$  est la restriction à  $k(G)^H$  d'une valuation  $\nu$  invariante par  $G \times G$  de  $k(G)$ . Comme  $X^1$  est complète,  $\rho_*(\nu)$  a un centre  $Z$  dans  $X^1$ . Mais alors,  $\psi_*(\nu) = \nu_D$  et donc  $\psi(Z)$  est dense dans  $D$ . Ce qui constitue une contradiction.

Soit  $\mathcal{L}^1$  la restriction à  $X^1$  du fibré en droites  $\mathcal{O}(1)$  sur  $\mathbb{P}(\text{End}(V))$ . Via l'application  $\rho$ ,  $k(X^1)$  se plonge dans  $k(G)$ . Considérons  $X$  la normalisation de  $X^1$  dans  $k(G)$  et  $\phi : X \rightarrow X^1$  le morphisme correspondant. Considérons sur  $X$  le fibré en droites  $\mathcal{L} = \phi^*(\mathcal{L}^1)$ . Comme l'action de  $G$  dans  $G/H$  (et donc dans  $\mathbb{P}(V)$ ) est quasi-fidèle, les applications  $\rho$  et  $\phi$  sont finies. Mais alors,  $\mathcal{L}$  est ample. Donc, quitte à remplacer  $\mathcal{M}$  (et donc  $\mathcal{L}^1$  et  $\mathcal{L}$ ) par une puissance, on peut supposer que  $X$  se plonge dans  $\mathbb{P}(\Gamma(X, \mathcal{L})^*)$ . Soit  $\tilde{X}$  le cône affine au-dessus de  $X$  dans  $\Gamma(X, \mathcal{L})^*$ . Il existe alors  $\tilde{\phi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}^1$  qui est  $k^*$ -équivariante et telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{X}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\phi} & X^1 \end{array}$$

De plus,  $\mathcal{L}^1$  est  $G \times G$ -linéarisé, il en est donc de même pour  $\mathcal{L}$ . Ainsi, il existe sur  $\tilde{X}$  une action canonique de  $G \times G$  telle que le diagramme précédent soit équivariant. Mais alors,  $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$  passe au quotient par  $H_{-\chi}$ , ce qui donne

le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{X}^1 & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{Y} \\
 & \searrow \pi & & \nearrow \eta & \\
 & & \tilde{X} // H_{-\chi} & & 
 \end{array}$$

L'application  $\eta$  ainsi définie est équivariante pour l'action de  $G \times k^*$  et donc le stabilisateur de  $\pi(1)$  dans  $G \times k^*$  est inclus dans celui de  $\tilde{y}$  c'est-à-dire dans  $H_{-\chi}$ . Comme  $\pi$  est le quotient par  $H_{-\chi}$ , on en déduit que  $\eta$  induit un isomorphisme de l'orbite par  $G \times k^*$  de  $\pi(1)$  vers celle de  $\tilde{y}$ . En particulier,  $\eta$  est birationnelle.

De plus, d'après le Fait 1 et la surjectivité de  $\phi$ , l'application  $\eta$  est surjective en codimension 1. Comme  $\tilde{Y}$  est normale, le lemme de Richardson (voir [41]) implique alors que  $\eta$  est un isomorphisme. La variété  $Y$  est alors le quotient  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) // H$ .  $\square$

**Remarque :** 1) Pour situer un peu la condition (ii) du théorème 4, notons qu'une valuation  $G$ -invariante  $\nu$  de  $k(G)^H$  s'étend toujours en une valuation  $G$ -invariante (pour l'action induite par la multiplication à gauche) du corps  $k(G)$  (voir [33] ou [12]). En revanche, comme le montre l'exemple de l'annexe A, il n'existe pas toujours de valuation  $G \times G$ -invariante sur  $k(G)$  qui étende  $\nu$ . Ainsi, la condition (ii) du théorème n'est pas toujours satisfaite.

2) La construction utilisée dans la démonstration du théorème 4 est essentiellement due à L. Renner (voir [42]). Ainsi, le théorème principal de [42] est « équivalent » au théorème 4 ci-dessus. Cependant, dans l'article de L. Renner la condition (ii) est omise, et  $H$  est supposé semi-simple.

## 6.2 Remarques sur la démonstration du théorème 4

**6.2.1** — La preuve du théorème 4 ((ii)  $\Rightarrow$  (i)) est constructive et donne en fait un résultat plus précis que le théorème. En effet, on a le

**Corollaire 6.2.1** *Reprenons les notations du théorème 4. Supposons que pour tout diviseur premier  $D$  stable par  $G$  de  $Y$ , la valuation  $\nu_D$  de  $k(G/H)$*

s'étend en une valuation  $G \times G$ -invariante de  $k(G)$ . Fixons également un fibré en droites  $\mathcal{M}$  ample et  $G$ -linéarisé sur  $Y$ . Alors, il existe un plongement projectif  $X$  de  $G$  et un fibré en droites  $G \times H$ -linéarisé  $\mathcal{L}$  sur  $X$  tels que :

- (i) La variété quotient  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  est isomorphe à  $Y$ .
- (ii) Le morphisme quotient  $\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow Y$  est surjectif.
- (iii) Il existe un entier strictement positif,  $n$  tel que  $\pi^*(\mathcal{M}^{\otimes n}) = \mathcal{L}|_{X^{\text{ss}}(\mathcal{L})}$ .
- (iv) L'ouvert  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  rencontre toutes les orbites de  $\{1\} \times G$  dans  $X$ .

**Preuve :** Nous reprenons toutes les notations de la fin de la preuve « (ii)  $\Rightarrow$  (i) » du théorème 4. On a déjà montré que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H = Y$ . De plus, comme  $\eta$  est surjective,  $\pi$  l'est aussi. Par ailleurs, on a  $\tilde{X}//H = \tilde{Y}$ . Mais alors,  $\pi^*(\mathcal{M}) = \mathcal{L}|_{X^{\text{ss}}(\mathcal{L})}$  (rappelons qu'au cours de la démonstration du théorème 4, on a remplacé plusieurs fois  $\mathcal{M}$  par une puissance).

Il reste à montrer que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  rencontre toutes les orbites de  $\{1\} \times G$  dans  $X$ . Soit  $x \in X$ . Soit  $m \in \text{End}(V)$  au-dessus de  $\phi(x)$ . Alors, comme  $G.\tilde{y}$  engendre l'espace vectoriel  $V$ , il existe  $g \in G$  tel que  $m(g\tilde{y}) \neq 0$ . Mais alors,  $(1, g^{-1}).x$  est semi-stable pour  $\mathcal{L}$ .  $\square$

**6.2.2 — Exemple** Soit  $G = \text{SL}(3)$  et  $H$  le sous-groupe de  $G$  constitué des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Alors,  $H$  est un sous-groupe sphérique (et même symétrique) de  $G$ .

Soit  $V$  le  $G$ -module standard et  $V^*$  son dual. Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $V$  et  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  sa base duale. Alors,  $(\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*), ([e_1], [e_1^*]))$  est un plongement de  $G/H$ . Considérons le fibré ample  $\mathcal{M} = \mathcal{O}(1) \times \mathcal{O}(1)$  sur  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ . Alors,  $\mathcal{M}$  admet une unique  $G$ -linéarisation induite par les actions linéaires de  $G$  sur  $V$  et  $V^*$ .

La variété  $X^1$  de la démonstration du théorème 4 se plonge dans l'espace projectif  $\mathbb{P}(\text{End}(V \otimes V^*))$ . Alors,  $X^1$  est le plongement canonique de  $PSL(3)$  (voir par exemple [17]). Si on plonge  $X^1$  dans  $\mathbb{P}(\text{End}(V)) \times \mathbb{P}(\text{End}(V^*))$ , on obtient avec les notations de la démonstration du théorème 4 :

$$\begin{array}{ccc} \pi : X \xrightarrow{\phi} X^1 \hookrightarrow \mathbb{P}(\text{End}(V)) \times \mathbb{P}(\text{End}(V^*)) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*) \\ & & \longmapsto ([u(e_1)], [e_1^* \circ u]). \end{array}$$

Le fibré  $\mathcal{L}^1$  sur  $X^1$  donné par la démonstration du théorème 4 est ici la restriction du fibré  $\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1)$  sur  $\mathbb{P}(\text{End}(V) \times \mathbb{P}(\text{End}(V^*)))$ . De plus,  $\mathcal{L} = \phi^*(\mathcal{L}^1)$ . Remarquons que l’assertion (iv) du corollaire 6.2.1 montre que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  contient au moins 4 orbites de  $G \times H$ , alors que  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$  contient 2 orbites de  $G$ . On en déduit que sur cet exemple :

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \neq X^s(\mathcal{L}).$$

Dans la suite de ce travail, nous allons étudier plus en détail les quotients de plongements de groupes par des sous-groupes sphériques. L’objectif essentiel est de réaliser des plongements projectifs d’espaces homogènes sphériques comme des quotients sans points strictement semi-stables de compactifications de groupes. Ainsi, le théorème 7 donnera une solution à ce problème.

### 6.3 Espaces homogènes sphériques relevables

Le théorème 4 nous incite à poser la définition suivante :

**Définition** Un espace homogène sphérique  $G/H$  sera dit *relevable* si toute valuation  $G$ -invariante de  $k(G/H)$  s’étend en une valuation  $G \times G$ -invariante de  $k(G)$ .

On a alors la proposition suivante :

**Proposition 6.3.1** *Soit  $G$  un groupe algébrique semi-simple. On a :*

- (i) *Soit  $H_1 \subset H_2$  deux sous-groupes sphériques. Alors, si  $G/H_1$  est relevable alors  $G/H_2$  l’est aussi.*
- (ii) *Soit  $H_1 \subset H_2$  deux sous-groupes sphériques tels que  $H_1$  est d’indice fini dans  $H_2$ . Alors,  $G/H_1$  est relevable si et seulement si  $G/H_2$  l’est.*
- (iii) *Si  $H$  est symétrique alors  $G/H$  est relevable.*

**Preuve :** Assertions (i) : Soit  $\nu$  une valuation  $G$ -invariante de  $k(G/H_2)$ . Alors, d’après le corollaire 3.1.1 de [12], il existe une valuation  $\bar{\nu}$  de  $k(G)$  qui est  $G \times \{1\}$ -invariante et dont la restriction à  $k(G/H_2)$  est  $\nu$ . Comme  $G/H_1$  est relevable, la restriction de  $\bar{\nu}$  à  $k(G/H_1)$  s’étend en une valuation  $G \times G$ -invariante de  $k(G)$ . L’assertion (i) suit.

Assertions (ii) : Soit  $B$  un sous-groupe de Borel opposé à  $H_1$  et donc à  $H_2$ . Avec nos hypothèses,  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H_1}, \mathbb{Q})$  s’identifie canoniquement à  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H_2}, \mathbb{Q})$ . Par ailleurs, le corollaire 3.1.1 de [12] montre que

$\mathcal{V}(G/H_1)$  s'envoie sur  $\mathcal{V}(G/H_2)$  par cette identification. Comme  $\mathcal{V}(G/H_i)$  s'injecte dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H_i}, \mathbb{Q})$  pour  $i = 1$  ou  $2$ , ceci montre que  $\mathcal{V}(G/H_1)$  s'identifie à  $\mathcal{V}(G/H_2)$ . Mais alors, l'assertion (ii) devient évidente.

Assertions (iii) : Grâce à l'assertion (ii), on peut supposer que  $G$  est adjoint et que  $G/H$  admet un plongement magnifique  $\overline{X}$ , avec les notations de [17]. Soit  $\mathcal{L}$  un fibré ample et  $G$ -linéarisé sur  $\overline{X}$ . Considérons  $p$  le sommet du polytope moment  $\mathbf{P}(\overline{X}, \mathcal{L})$  correspondant à l'orbite fermée de  $G$  dans  $\overline{X}$ . La proposition 8.2 de [17] permet de décrire le cône convexe engendré par  $-p + \mathbf{P}(\overline{X}, \mathcal{L})$ . On peut alors remarquer que ce cône est l'intersection de  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}^{B \cap H}$  et du cône de  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}$  engendré par les racines négatives. Mais alors, la proposition 3.3.1 permet de conclure.  $\square$

**Remarque :** Dans [28], S. Kannan a montré que le plongement canonique d'un espace homogène symétrique pouvait s'obtenir comme quotient du plongement canonique du groupe. Le théorème 4 et la proposition 6.3.1 permettent essentiellement de retrouver ce résultat.

**Proposition 6.3.2** *Soit  $G/H$  un espace homogène sphérique sobre. Alors, si  $H$  est résoluble  $G/H$  est relevable.*

**Preuve :** Soit  $(Y, x)$  le plongement canonique de  $G/H$ . Soit  $B^-$  un sous-groupe de Borel de  $G$  contenant  $H$ . Alors, d'après [33] ou [12] l'application naturelle  $G/H \rightarrow G/B^-$  se prolonge en un morphisme  $G$ -équivariant

$$\phi : Y \rightarrow G/B^-.$$

Considérons la  $B^-$ -variété  $\Sigma = \phi^{-1}(B^-/B^-)$ .

Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $H$  et donc à  $B^-$ . Posons  $T = B \cap B^-$ . Notons  $U$  le radical unipotent de  $B$ . Alors, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} U \times \Sigma & \xrightarrow[\text{isomorphisme}]{(u,s) \mapsto us} & U.\Sigma \\ \downarrow (u,s) \mapsto u & & \downarrow \phi \\ U & \xrightarrow{u \mapsto uB^-/B^-} & G/B^- \end{array}$$

De plus,  $U.\Sigma$  est ouvert dans  $Y$ . Alors,  $T.x$  est dense dans  $\Sigma$  qui est donc une variété torique. De plus, comme  $Y$  contient une unique orbite fermée de  $G$ ,  $\Sigma$  contient une unique orbite fermée de  $B^-$ . Cette orbite étant projective, c'est un point fixe que l'on note  $z$ . Considérons  $\Sigma_z$  l'ouvert affine stable par  $T$  et contenant  $z$ . Alors, d'après le diagramme précédent,  $U \times \Sigma_z$  est isomorphe à l'ouvert  $Y_{G,z,B}$ . On en déduit que le cône  $\mathcal{CV}(G/H)$  est le cône  $\mathcal{C}$  associé à la variété torique  $\Sigma_z$ .

Nous voulons calculer les arêtes du cône  $\mathcal{C}^\vee$  engendré par les poids de l'action de  $T$  dans  $k[\Sigma_z]$ . Soit  $y$  un point de  $\Sigma_z$  tel que  $\dim(T.y) = 1$ . Considérons le morphisme de restriction :

$$\rho : k[\Sigma_z]^{(T)} \longrightarrow k[\overline{T.y}^{\Sigma_z}]^{(T)}.$$

Comme  $\rho$  est surjectif, la demi-droite engendré par les poids de  $T$  dans  $k[\overline{T.y}^{\Sigma_z}]$  est incluse dans  $\mathcal{C}^\vee$ . De plus, la théorie classique des variétés toriques (voir [23] ou [40]) montre cette demi-droite est une arête de  $\mathcal{C}^\vee$  et que réciproquement toute arête de  $\mathcal{C}^\vee$  s'obtient ainsi. Il s'agit alors de calculer les poids de l'action de  $T$  dans  $k[\overline{T.y}^{\Sigma_z}]$ .

Pour cela considérons l'adhérence  $S$  de  $T.y$  dans  $\Sigma$ . Comme  $Y$  est sans couleur, tous les diviseurs stables par  $T$  de  $\Sigma$  qui contiennent  $z$  sont stables par  $B^-$ . Mais alors,  $S$  est stable par  $B^-$ . Comme  $S$  est une variété torique de dimension 1,  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ . De plus,  $B^-.y$  est isomorphe soit à  $k$  soit à  $k^*$ . Or, si  $B^-.y$  est isomorphe à  $k^*$ ,  $B^-$  a deux points fixes dans  $S$ ; ce qui est impossible. On a donc montré que  $B^-.y$  est isomorphe à  $k$ .

Soit  $B_y^-$  (resp.  $T_y$ ) le stabilisateur de  $y$  dans  $B^-$  (resp.  $T$ ). Comme  $B^-.y \simeq k$ ,  $B_y^-$  ne contient pas le radical unipotent de  $B^-$ . Alors, il existe une racine simple  $\alpha$  de  $(B^-, T)$  telle que le sous-groupe unipotent à un paramètre  $U_\alpha$  de  $B^-$  associé à  $\alpha$  ne fixe pas  $y$ . Montrons que la restriction de  $\alpha$  à  $T_y$  est triviale. Soit  $\xi : k \longrightarrow U_\alpha$  l'isomorphisme canonique. Comme  $T.y$  est ouvert dans  $\Sigma$ , il existe  $\epsilon \in k^*$  et  $t_0 \in T$  tels que  $\xi(\epsilon).y = t_0.y$ . Soit  $t \in T_y$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \xi(\epsilon).y &= ut.y = tu.y = t.\xi(\epsilon).y \\ &= t\xi(\epsilon)t^{-1}.y \\ &= \xi(\alpha(t)\epsilon).y \end{aligned} \tag{6.1}$$

Par ailleurs, comme  $k$  n'admet pas de sous-groupe strict,  $B_y \cap U_\alpha$  est trivial. Mais alors, l'égalité 6.1 implique que  $\alpha(t) = 1$ . Ainsi,  $\alpha$  est trivial sur

$T_y$ . Mais alors,  $\alpha$  ou  $-\alpha$  est un poids du  $T$ -module  $k[\Sigma_z \cap S]$ . Par ailleurs, il est montré dans [15] (voir aussi la section 4.2 de [12]) que  $\mathcal{C}^\vee$  est inclus dans le cône engendré par les racines négatives. On en déduit que  $\alpha$  est un poids du  $T$ -module  $k[\Sigma_z \cap S]$ .

Nous avons donc montré que les arêtes du cône dual de  $\mathcal{CV}(G/H)$  contiennent toutes une racine simple de  $(B^-, T)$ . La proposition suit facilement.  $\square$



# Chapitre 7

## Quotients de plongements projectifs de $G$ par un sous-groupe sphérique

### 7.1 Introduction

On se donne encore un groupe semi-simple  $G$  et un sous-groupe sphérique  $H$  de  $G$ .

Dans la section 6, nous partions d'un plongement projectif de  $G/H$  que nous essayions de réaliser comme quotient d'un plongement de  $G$ . À l'inverse, dans cette section nous partons d'un plongement projectif  $X$  de  $G \times G/\Delta G$ .

Fixons  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et  $G \times G$ -linéarisé sur  $X$  et  $\chi$  un caractère de  $H$ . Reprenons les notations de la proposition 5.2.3 pour le sous-groupe  $G \times H$  de  $G \times G$ . Comme le groupe  $\mathcal{X}(G)$  est trivial,  $r_{G \times H}$  est injectif. Afin d'alléger les notations, on notera  $\mathcal{L} \otimes \chi$  pour  $r_{G \times H}(\mathcal{L}) \otimes i(\chi)$ . Alors, la proposition 5.2.3 montre que tout fibré  $G \times H$ -linéarisé sur  $X$  admet une puissance de la forme  $\mathcal{L} \otimes \chi$ .

On s'intéresse ici au quotient de  $X$  par  $\{1\} \times H$  associé au fibré  $\mathcal{L} \otimes \chi$  comme dans la section 5.2.1 :

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H.$$

Il est alors clair que l'action de  $G \times \{1\}$  dans  $X$  stabilise l'ouvert  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)$  et induit une action de  $G$  dans le quotient  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$ . De plus, comme  $B \times H$  a une orbite dense dans  $X$ , la variété  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  est sphérique.

Par ailleurs, quitte à remplacer  $\mathcal{L} \otimes \chi$  par une puissance, on suppose (avec les notations du paragraphe 5.2.4.3) qu'il existe un « quotient »,  $(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  de  $\mathcal{L} \otimes \chi$  par  $\{1\} \times H$ . Mais alors, le fibré ample  $(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  sur  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  hérite d'une  $G$ -linéarisation. Dans cette section, afin d'alléger les notations, on pose

$$Y := X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_Y := (\mathcal{L} \otimes \chi)//H.$$

Dans toute la section 7, on considère le quotient :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} \otimes \chi & \longrightarrow & \mathcal{L}_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

Nous commençons cette section en décrivant le polytope moment de  $Y$  associé au fibré  $\mathcal{L}_Y$ . On notera  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L} \otimes \chi)^H$  ce polytope. Nous nous intéressons ensuite à l'image par  $\pi$  des orbites de  $G \times G$  dans  $X$  ainsi qu'à la préimage des orbites de  $G$  dans  $Y$ . Pour terminer cette section, nous déterminerons les préimages par  $\pi$  des ouverts de  $Y$  de la forme  $Y_\Omega$  ou  $Y_{\Omega, B}$ , où  $\Omega$  est une orbite de  $G$  dans  $Y$ .

## 7.2 Polytope moment du quotient

**7.2.1** — Soit  $B$  un sous-groupe de Borel opposé à  $H$  et  $B^-$  un sous-groupe de Borel opposé à  $B$ . Posons  $T = B \cap B^-$ . On note alors  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  le polytope moment de la  $G \times G$ -variété  $X$  associé au fibré en droites  $\mathcal{L}$ . Les points de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  sont de la forme  $(p, -p)$  pour  $p$  dans  $\mathcal{X}(B)_\mathbb{Q}$ . Si on plonge  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  dans  $\mathcal{X}(B)_\mathbb{Q}$  par  $(p, -p) \mapsto p$ , on a :

$$\mathbf{P}(X, \mathcal{L}) = \{p \in \mathcal{X}(B)_\mathbb{Q} : \exists n > 0, np \in P^+, V_{np} \otimes V_{np}^* \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})\}.$$

Rappelons que  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L} \otimes \chi)^H$  désigne le polytope moment de la  $G$ -variété  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  associé au fibré  $(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$ . On a alors :

$$\mathbf{P}(X, \mathcal{L} \otimes \chi)^H = \{p \in \mathcal{X}(B)_\mathbb{Q} : \exists n > 0, np \in P^+, V_{np} \hookrightarrow \Gamma(X, (\mathcal{L} \otimes \chi)^{\otimes n})^H\}.$$

Avec les notations du lemme 3.3.2, on a donc :

$$\mathbf{P}(X, \mathcal{L} \otimes \chi)^H = \{p \in \mathcal{X}(B)_\mathbb{Q} : \exists n > 0, np \in \Gamma_{n\chi} \text{ et } V_{np} \otimes V_{np}^* \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})\}.$$

Or, par définition,  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  est l'ensemble des  $p \in \mathcal{X}(B)_\mathbb{Q}$  tels que :  $\exists n > 0 \quad np \in \Gamma_{n\chi}$ . D'où le

**Théorème 5** *Soit  $G$  un groupe semi-simple et  $H$  un sous-groupe sphérique de  $G$ . On se donne  $X$  un plongement projectif de  $G \times G/\Delta G$ . Soit  $\mathcal{L}_0$  un fibré ample et  $G \times H$ -linéarisé sur  $X$ .*

*Alors, il existe un entier  $m$  strictement positif, un fibré en droites ample et  $G \times G$ -linéarisé  $\mathcal{L}$  sur  $X$  et un caractère  $\chi$  de  $H$  tels que :*

$$\mathcal{L}_0^{\otimes m} = \mathcal{L} \otimes \chi,$$

et tel que le fibré quotient  $(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  existe.

De plus, le polytope moment de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  associé au fibré en droites  $(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  est :

$$\mathbf{P}(X, \mathcal{L} \otimes \chi)^H = \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi) \cap \mathbf{P}(X, \mathcal{L}).$$

Dans la suite de cette section, nous allons voir comment lire un certain nombre de propriétés de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  et  $\pi$  sur les polytopes  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ ,  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  et  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L} \otimes \chi)^H$ . Nous nous intéressons ainsi aux questions suivantes :

- La  $G$ -variété  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  est-elle un plongement de  $G/H$  ?
- Si oui, quel est son éventail coloré ?
- Quelle est l'image par  $\pi$  d'une orbite de  $G \times G$  dans  $X$  ?
- Quelle est la préimage par  $\pi$  d'une orbite de  $G$  dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  ?
- Quel est l'ouvert  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)$  ?

**7.2.2** — Répondons à la première question ci-dessus par le

**Corollaire 7.2.1** *La variété  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  est un plongement de  $G/H$  si et seulement si  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  rencontre l'intérieur relatif de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$ .*

**Preuve :** Si  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  est un plongement de  $G/H$ , le théorème 5 et la proposition 2.6.1 impliquent facilement que  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  rencontre l'intérieur relatif de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$ .

Réciproquement, supposons que  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  rencontre l'intérieur relatif de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$ . Soit  $I$  l'isotropie dans  $G$  de  $\pi(1)$ . Comme  $\pi$  est invariante par  $\{1\} \times H$ , le sous-groupe  $I$  contient  $H$ . En particulier,  $I$  est sphérique et  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)//H$  est un plongement de  $G/I$ . D'après la proposition 2.6.1,  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  est d'intérieur non vide dans  $\mathcal{X}(B)_\mathbb{Q}$ . Alors, la direction de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L} \otimes \chi)^H$  est celle de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  c'est-à-dire  $\mathcal{X}(B)_\mathbb{Q}^{B \cap H}$ . En particulier,

le rang de  $G/I$  est égal à celui de  $G/H$ . Le théorème 3.4.3 de [12] montre alors que  $H$  est d'indice fini dans  $I$ . Mais alors, le lemme 5.1.1 montre que les fibres de  $\pi$  au-dessus de  $G/I \subset X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) // H$  contiennent une unique orbite ouverte et dense de  $H$ . Il est alors facile de voir que  $H = I$ .  $\square$

**7.2.3** — Remarquons que lorsque la condition du corollaire 7.2.1 est remplie, le théorème 5 donne un polytope moment du plongement  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) // H$  de  $G/H$ . Mais alors, les propositions 2.6.4 et 3.3.1 nous permettent de déterminer l'éventail colorié de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) // H$ . Regardons l'exemple suivant :

**Exemple.** Considérons  $G = \text{SP}(4)$  et  $H = k^* \times \text{SL}(2)$  le sous-groupe sphérique de  $G$  étudié dans l'appendice A.

Soit  $B$  un sous-groupe de Borel opposé à  $H$  et  $T$  un tore maximal de  $B$ . Soit  $\omega_\alpha$  et  $\omega_\beta$  les poids fondamentaux associés à  $(B, T)$ .

Soit  $X$  le plongement canonique de  $\text{SP}(4)$ . Soit  $\mathcal{L}$  le fibré en droites ample sur  $X$  et  $G \times G$ -linéarisé que l'on a noté  $\mathcal{L}_{2\omega_\alpha + 5\omega_\beta}$  dans la proposition 4.5.1. Considérons

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi_0) \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi_0) // H,$$

où  $\chi_0$  est un générateur de  $\mathcal{X}(H)$ .

Les polytopes  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ ,  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_{\chi_0})$  et  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L} \otimes \chi_0)^H$  sont alors comme sur la figure 7.1.

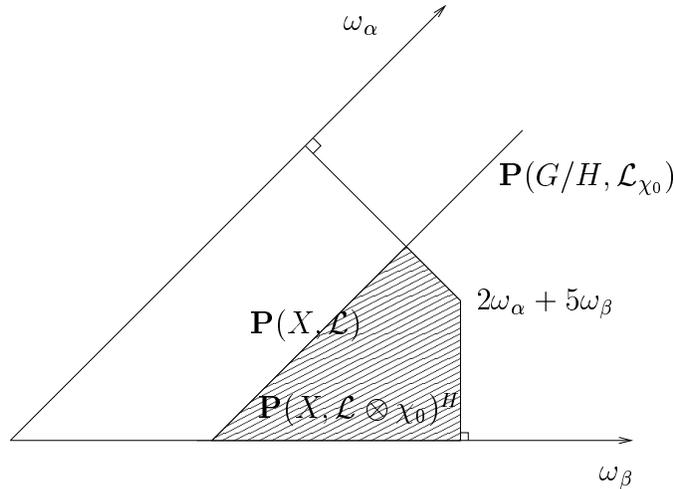
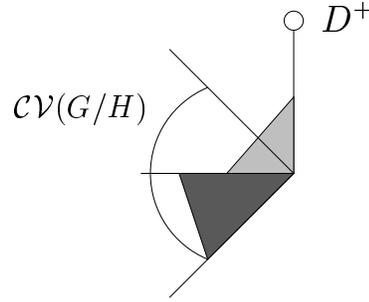


FIG. 7.1 – Le polytope  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L} \otimes \chi_0)^H$

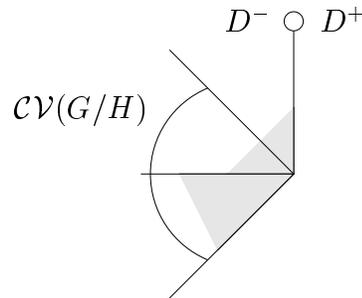
On obtient alors l'éventail colorié de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi_0) // H$  sur la figure 7.2.

FIG. 7.2 – Éventail de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi_0) // H$ .

Un autre exemple est le quotient :

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) // H,$$

associé au fibré en droites  $\mathcal{L} \in \text{Pic}^{G \times G}(X) \subset \text{Pic}^{G \times H}(X)$ . Comme  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0)$  est le cône engendré par  $\omega_\alpha$  et  $\omega_\beta$ , le polytope  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})^H$  s'identifie à  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ . L'éventail de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) // H$  est alors tracé sur la figure 7.3.

FIG. 7.3 – Éventail de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) // H$ .

### 7.3 Orbites de $G$ dans $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) // H$ et orbites de $G \times G$ dans $X$

**7.3.1** — Revenons aux notations de la section 7.1 et fixons une orbite  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $X$  qui rencontre l'ouvert  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)$ . On s'intéresse à l'ensemble  $\pi(\mathcal{O} \cap X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi))$  que l'on note plus simplement  $\pi(\mathcal{O})$ .

Nous montrerons dans le corollaire 8.2.1 que  $\mathcal{O}$  contient une orbite ouverte de  $G \times H$  (et même de  $B \times H$ ). Nous admettons pour l'instant ce résultat. Fixons  $x$  un point de  $\mathcal{O}$  dont l'orbite par  $G \times H$  est dense dans  $\mathcal{O}$ . Comme  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)$  est ouvert et stable par  $G \times H$ ,  $x$  est alors semi-stable. De plus, on a la

**Proposition 7.3.1** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

- (i)  $\overline{\pi(\mathcal{O})} = \overline{G \cdot \pi(x)}$ ,
- (ii)  $\mathbf{P}(\overline{G \cdot \pi(x)}, \mathcal{L}_Y) = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$ .

**Preuve :** Comme la variété  $\overline{\pi(\mathcal{O})}$  est irréductible et stable par  $G$ , elle est l'adhérence d'une orbite de  $G$  dans  $Y$ . Or, comme  $(G \times H) \cdot x$  est dense dans  $\mathcal{O}$ ,  $G \cdot \pi(x)$  est dense dans  $\overline{\pi(\mathcal{O})}$ . La première assertion de la proposition suit.

Considérons maintenant la restriction de  $\pi$  à  $\overline{\mathcal{O}} \cap X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)$ . D'après la proposition 5.2.4, l'image de cette restriction est isomorphe à  $\overline{\mathcal{O}}^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) // H$ . Mais alors, la démonstration du théorème 5 montre que :

$$\mathbf{P}(\overline{\pi(\mathcal{O})}, \mathcal{L}_Y) = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi).$$

□

**7.3.2** — Fixons maintenant  $\Omega$  une orbite de  $G$  dans  $Y$ . Nous allons lui associer une orbite,  $\mathcal{O}(\Omega)$  de  $G \times G$  dans  $X$  telle que  $\overline{\pi(\mathcal{O}(\Omega))}$  contienne  $\Omega$ .

Pour cela, rappelons quelques notations de la section 2. Considérons le plus petit ouvert  $Y_\Omega$  stable par  $G$  de  $Y$  contenant  $\Omega$ , et l'ensemble  $\mathcal{D}(Y, \Omega)$  des couleurs du plongement simple  $Y_\Omega$  de  $G/H$ . Posons :

$$\mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega)) := \{\gamma \in \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi) : (\gamma, \chi) \in \sum_{D \notin \mathcal{D}(Y, \Omega)} \mathbb{Q} \cdot (\gamma_D, \chi_D)\},$$

la face minimale de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  qui contient  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y)$ . Soit  $p$  un point de l'intérieur relatif de  $\mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega))$ . Soit  $n$  un entier positif et  $\sigma$  une section de  $\mathcal{L}_\chi^{\otimes n}$  de poids  $np$  pour l'action de  $B$ . On a alors, d'après le lemme 3.3.3 :

$$\{x \in G/H : \sigma(x) = 0\} = \bigcup_{D \notin \mathcal{D}(Y, \Omega)} D.$$

Nous pouvons maintenant énoncer la :

**Proposition 7.3.2** *Avec les notations introduites ci-dessus, on a :*

- (i) Parmi les orbites,  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $X$  telles que  $\pi(\mathcal{O})$  contient  $\Omega$  dans son adhérence il en existe une minimale (pour l'ordre induit par l'inclusion des adhérences); on la note  $\mathcal{O}(\Omega)$ .
- (ii) De plus,  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L})$  est la plus petite face orbitale de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  qui contienne  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y)$ .
- (iii) On a aussi :  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y) = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega))$ .
- (iv) Si  $\Omega$  est sans couleur dans  $Y$ , alors  $\overline{\pi(\mathcal{O}(\Omega))} = \overline{\Omega}$ . En particulier,  $\Omega$  est inclus dans l'image de  $\pi$ .

**Preuve :** Soit  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  dans  $X$  et  $x$  un point de  $\mathcal{O}$  dont l'orbite par  $G \times H$  est ouverte dans  $\mathcal{O}$ . La proposition 7.3.1 montre que :

$$\Omega \subseteq \overline{\pi(\mathcal{O})} \iff \Omega \subseteq \overline{G.\pi(x)}.$$

De plus, si  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  sont deux orbites de  $G \times G$  dans  $x$ , d'après la proposition 2.6.2, on a :

$$\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_1}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_2}, \mathcal{L}) = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2}, \mathcal{L}).$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} \Omega \subseteq \overline{\pi(\mathcal{O})} &\iff \mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y) \subseteq \mathbf{P}(\overline{G.\pi(x)}, \mathcal{L}_Y) \\ &\iff \mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y) \subseteq \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_X) \\ &\iff \mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y) \subseteq \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L}). \end{aligned} \quad (1)$$

La proposition 2.6.2 montre alors qu'il existe une orbite  $\mathcal{O}(\Omega)$  de  $G \times G$  dans  $X$  vérifiant (1) et minimale pour cette propriété. On a donc montré les deux premières assertions de la proposition.

Par ailleurs, on a :

$$\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y) \subseteq \mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega)).$$

Comme  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega))$  est une face de  $\mathbf{P}(Y, \mathcal{L}_Y)$ , on en déduit que  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y)$  est une face de  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega))$ . Or,  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y)$  rencontre l'intérieur relatif de  $\mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega))$ . On en déduit qu'il existe une face,  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L})$  telle que :

$$\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y) = \mathbf{F} \cap \mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega)).$$

Avec les notations de la proposition 2.6.4, par minimalité de  $\mathcal{O}(\Omega)$ , on a donc :  $\mathcal{O}(\mathbf{F}) = \mathcal{O}(\Omega)$ . Soit  $P_{\mathbf{F}}^+$  la face minimale de  $P^+$  qui rencontre  $\mathbf{F}$ .

Comme  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  est inclus dans  $P^+$  et  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y)$  est inclus dans  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega))$  est inclus dans  $P_{\mathbf{F}}^+$ . Mais alors, la proposition 2.6.4 implique que :

$$\mathbf{F} \cap \mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega)) = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{F}(\mathcal{D}(Y, \Omega)).$$

Ceci démontre l'assertion (iii).

D'après l'assertion (iii), si  $\Omega$  est sans couleur on a :

$$\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y) = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L}) \cap \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi).$$

Mais alors, la proposition 7.3.1 montre la dernière assertion de la proposition.  $\square$

**Remarque :** Nous supposons le temps de cette remarque que  $H$  est réductif. Alors,  $\pi$  est surjective. De plus, si  $y$  est un point de  $\Omega$  et  $x$  un point de l'unique orbite fermée de  $\{1\} \times H$  dans  $\pi^{-1}(y)$ , alors,  $\mathcal{O}(\Omega)$  est l'orbite par  $G \times G$  de  $x$ .

Soit  $\rho : \text{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  l'application de restriction. On peut alors énoncer le

**Lemme 7.3.1** *Avec les notations de la proposition 7.3.2, on a :*

$$\rho(\mathcal{C}(X, \mathcal{O}(\Omega))) \subseteq \mathcal{C}(Y, \Omega).$$

**Preuve :** Soit  $p$  un point de l'intérieur relatif de  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y)$ . D'après la proposition 2.6.4,  $\mathcal{C}(Y, \Omega)$  est le dual de  $-p + \mathbf{P}(Y, \mathcal{L}_Y)$  dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$ . Comme  $\mathbf{P}(Y, \mathcal{L}_Y)$  est inclus dans  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ ,  $\mathcal{C}(Y, \Omega)$  contient l'image par  $\rho$  du dual dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q})$  de  $-p + \mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ . Comme  $p$  appartient à  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L})$ , la proposition 2.6.4 appliquée à  $X$  et  $\mathcal{O}(\Omega)$  termine la démonstration du lemme.  $\square$

## 7.4 Sur la préimage de certains ouverts

Nous nous intéressons maintenant à l'ouvert  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)$ . Comme la variété  $Y$  est recouverte par les ouverts du type  $Y_\Omega$  pour  $\Omega$  orbite de  $G$  dans  $Y$ , l'ouvert  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)$  est recouvert par les  $\pi^{-1}(Y_\Omega)$ . La proposition 7.4.1 donnera une première description de ces ouverts.

Rappelons les notations de la section 3.2 :  $\zeta : \tilde{G} \longrightarrow G$  est le revêtement universel de  $G$  et  $q : G \longrightarrow G/H$  l'application orbite. Soit  $D$  une couleur de

$G/H$ . On considère  $\tilde{D}$  la préimage de  $D$  par l'application  $q \circ \zeta$ . On notera  $\overline{D}^X$  l'adhérence de  $\zeta(\tilde{D})$  dans  $X$ . Alors,  $\overline{D}^X$  est un diviseur premier de  $X$ , stable par  $B \times H$ . On considérera aussi  $\Omega_{\overline{D}^X}$ , la réunion des orbites de  $G \times \{1\}$  dans  $X$  qui sont incluses dans  $\overline{D}^X$ .

Soit  $Y_{\Omega, B}$  l'ouvert affine stable par  $B$  minimal (voir la section 2.4) qui rencontre  $\Omega$ . Avec ces notations, on a la

**Proposition 7.4.1** *On a :*

$$\pi^{-1}(Y_{\Omega, B}) = X_{\mathcal{O}(\Omega)} - \bigcup_{D \notin \mathcal{D}(Y, \Omega)} \overline{D}^X,$$

et

$$\pi^{-1}(Y_{\Omega}) = X_{\mathcal{O}(\Omega)} - \bigcup_{D \notin \mathcal{D}(Y, \Omega)} \Omega_{\overline{D}^X}.$$

**Preuve :** Soit  $p$  un point dans l'intérieur relatif de  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y)$ . Soit  $n$  un entier positif et  $\sigma$  une section de  $\mathcal{L}_Y^{\otimes n}$  vecteur propre de poids  $np$  pour  $B$ . Alors, la deuxième assertion de la proposition 2.6.4 montre que :

$$Y_{\Omega, B} = Y - \{y \in Y : \sigma(y) = 0\}.$$

D'un autre point de vue,  $\sigma$  est une section de  $\Gamma(X, (\mathcal{L} \otimes \chi)^{\otimes n})$  et

$$\pi^{-1}(Y_{\Omega, B}) = X - \{x \in X : \sigma(x) = 0\}.$$

Par ailleurs, si  $\mathcal{O}$  est une orbite de  $G \times G$  dans  $X$  qui rencontre  $\pi^{-1}(Y_{\Omega, B})$  alors  $\overline{\pi(\mathcal{O})}$  est stable par  $G$  et contient  $\Omega$ . Donc, par définition de  $\mathcal{O}(\Omega)$  (voir la proposition 7.3.2), on a :

$$\pi^{-1}(Y_{\Omega, B}) \subseteq X_{\mathcal{O}(\Omega)}.$$

Ainsi,

$$\pi^{-1}(Y_{\Omega, B}) = X_{\mathcal{O}(\Omega)} - \{x \in X : \sigma(x) = 0\}. \quad (7.1)$$

On s'intéresse donc à l'hypersurface de  $X$  définie par  $\sigma(x) = 0$ . Soit  $M$  une composante irréductible de cette hypersurface qui ne rencontre pas  $G \subseteq X$ . Comme  $M$  est de codimension 1,  $M$  est alors stable par  $G \times G$ . Comme

$\pi^{-1}(Y_{\Omega,B})$  rencontre  $\mathcal{O}(\Omega)$ , l'égalité 7.1 montre alors que  $M$  est inclus dans le complémentaire de  $X_{\mathcal{O}(\Omega)}$  dans  $X$ . On en déduit que :

$$\pi^{-1}(Y_{\Omega,B}) = X_{\mathcal{O}(\Omega)} - \overline{\{x \in G : \sigma(x) = 0\}}.$$

De plus, comme  $p$  est dans l'intérieur relatif de  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y)$ , on a :

$$\{y \in G/H : \sigma(y) = 0\} = \bigcup_{D \notin \mathcal{D}(Y,\Omega)} D.$$

La première assertion de la proposition est démontrée.

Comme  $Y_{\Omega} = G.Y_{\Omega,B}$ ,  $\pi^{-1}(Y_{\Omega})$  vaut  $X_{\mathcal{O}(\Omega)}$  privé de la réunion des orbites de  $G \times \{1\}$  incluses dans  $\cup_{D \notin \mathcal{D}(Y,\Omega)} \overline{D}^X$ . Or  $G$  est connexe, donc si une orbite de  $G \times \{1\}$  est incluse dans cette réunion alors elle est incluse dans l'un des  $\overline{D}^X$ . Ainsi,

$$\pi^{-1}(Y_{\Omega}) = X_{\mathcal{O}(\Omega)} - \bigcup_{D \notin \mathcal{D}(Y,\Omega)} \Omega_{\overline{D}^X}.$$

□

## 7.5 Trois exemples

### 7.5.1 $\mathrm{SL}(3)/\mathrm{GL}(2)$

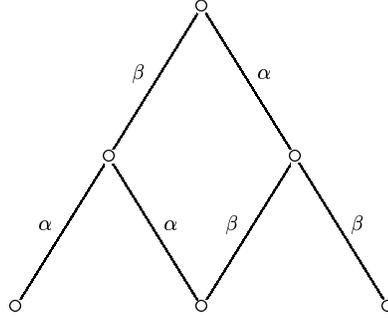
Revenons sur l'exemple 6.2.2 et posons  $G = \mathrm{SL}(3)$ . Rappelons que  $(e_1, e_2, e_3)$  est la base canonique du  $G$ -module standard  $V$  et  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  est sa base duale. Ici, nous considérons  $H$  le stabilisateur dans  $G$  de

$$([e_1 + e_3], [e_1^*]) \in \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^2)^\vee$$

c'est-à-dire un conjugué du sous-groupe considéré au paragraphe 6.2.2.

Soit  $B$  le sous-groupe de Borel de  $G$  constitué des matrices triangulaires supérieures et  $T$  le tore constitué des matrices diagonales. Alors, les deux sous-groupes paraboliques associés aux racines simples  $\alpha$  et  $\beta$  de  $(B, T)$  sont  $P_\alpha = \mathrm{Stab}_G([e_1])$  et  $P_\beta = \mathrm{Stab}_G([e_3^*])$ .

On vérifie que  $B$  est opposé à  $H$ . Alors, le graphe  $\Gamma(G/H)$  se calcule aisément par les méthodes utilisées dans l'exemple 2.7.4. On obtient :



Remarquons que  $\mathcal{X}(H)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . De plus, il existe un générateur  $\chi_0$  de  $\mathcal{X}(H)$  tel que les équations des couleurs de  $G/H$  soient :

$$[\omega_\alpha : \chi_0] \quad \text{et} \quad [\omega_\beta : -\chi_0],$$

où comme d'habitude  $\omega_\alpha$  et  $\omega_\beta$  sont les poids fondamentaux de  $(B, T)$ .

Avec le lemme 3.3.2, on en déduit que, pour tout entier  $n$ , on a :

- $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_{n\chi_0}) = n\omega_\alpha + \mathbb{Q}^+(\omega_\alpha + \omega_\beta)$ , si  $n > 0$ ,
- $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_{n\chi_0}) = -n\omega_\beta + \mathbb{Q}^+(\omega_\alpha + \omega_\beta)$ , si  $n < 0$  et
- $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0) = \mathbb{Q}^+(\omega_\alpha + \omega_\beta)$ .

Considérons le plongement canonique  $X$  de  $G \times G/\Delta G$ . Avec les notations de la section 4.5, on considère sur  $X$  les deux fibrés en droites  $G \times G$ -linéarisés,  $\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}_{6\omega_\alpha + 6\omega_\beta}$  et  $\mathcal{L}_2 := \mathcal{L}_{4\omega_\alpha + 8\omega_\beta}$ . Considérons alors pour  $i = 1, 2$  le morphisme quotient :

$$\pi_i : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_i) \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_i)//H.$$

Considérons également

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1 \otimes 6\chi_0) \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1 \otimes 6\chi_0)//H.$$

Sur la figure 7.4, nous avons représenté les deux polytopes moments  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L}_i)$  pour  $i = 1, 2$ , ainsi que certains polyèdres moments sur  $G/H$ . Alors, le corollaire 7.2.1 montre que les trois variétés  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_i)//H$  pour  $i = 1, 2$  et  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1 \otimes 6\chi_0)//H$  sont des plongements de  $G/H$ . Mais alors, les propositions 2.6.4 et 3.3.1 montrent que les trois variétés sus-citées sont isomorphes au plongement canonique de  $G/H$ .

Remarquons que trois faces orbitales strictes de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L}_1)$  ont la même intersection avec  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0)$ . Mais alors, la proposition 7.3.1 montre que les

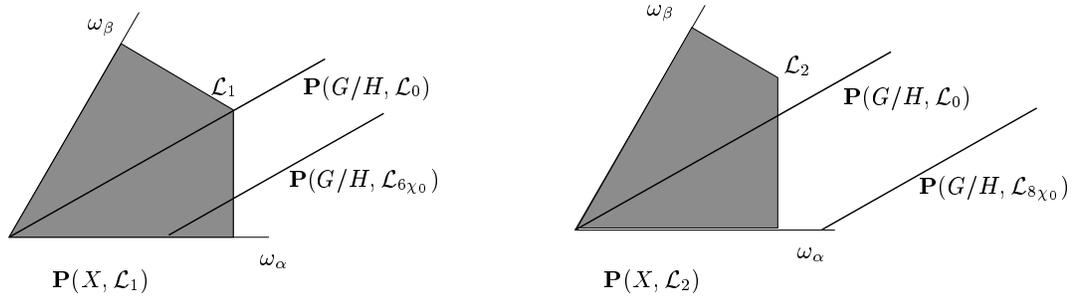


FIG. 7.4 – Polytopes moments sur  $X$  et polyèdres moments sur  $G/H$

trois orbites correspondantes s'envoient par  $\pi_1$  sur l'orbite fermée  $Z$  de  $G$  dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1)//H$ . Ainsi,  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1)$  contient des points strictement semi-stables.

Soit  $\mathcal{O}_0$  l'orbite de  $G \times G$  dans  $X$  telle que pour  $i = 1, 2$ ,  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}_0, \mathcal{L}_i)$  est la face verticale de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L}_i)$ . Alors, la proposition 7.3.1 montre que seule l'orbite  $\mathcal{O}_0$  de  $G \times G$  dans  $X$  vérifie :  $\pi_2(\mathcal{O}_0 \cap X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_2)) = Z$ . En d'autres termes, on a :  $\mathcal{O}(Z) = \mathcal{O}_0$  avec les notations de la proposition 7.3.2. On peut même montrer que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_2) = X^s(\mathcal{L}_2)$ .

De même, pour le fibré en droites  $\mathcal{L}_1 \otimes 6\chi_0$ , on a :  $\mathcal{O}(Z) = \mathcal{O}_0$ . On peut là encore montrer que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1 \otimes 6\chi_0) = X^s(\mathcal{L}_1 \otimes 6\chi_0)$ .

Sur cet exemple, nous avons réalisé le plongement canonique de  $G/H$  comme quotient sans point strictement semi-stable du plongement canonique de  $G$ .

### 7.5.2 $\text{SL}(3)/\text{SO}(3)$

Soit  $G = \text{SL}(3)$  et  $V$  le  $G$ -module standard. Posons

$$H = \{g \in G : {}^t g g = I_3\} \simeq \text{SO}(3),$$

où  ${}^t g$  est la transposée de la matrice  $g$  et  $I_3$  est l'élément unité de  $G$ . Alors,  $H$  est un sous-groupe sphérique (et même symétrique) de  $G$ . Remarquons que  $H$  est le stabilisateur dans  $G$  de la forme quadratique  $q$  donnée dans la base canonique de  $V$  par la formule :  $q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x^2 + y^2 + z^2$ .

Soit  $B$  le sous-groupe de Borel de  $G$  formé des matrices triangulaires supérieures et  $T$  le tore maximal de  $B$  constitué des matrices diagonales.

Alors,  $B \cap H$  est l'ensemble des matrices de  $G$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, le rang de  $G/H$  est 2. Comme de plus le groupe des caractères de  $H$  est trivial on a :

$$\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H) \simeq \mathcal{X}(B)^{B \cap H} = \mathbb{Z}2\omega_\alpha \oplus \mathbb{Z}2\omega_\beta,$$

où  $\omega_\alpha$  et  $\omega_\beta$  sont les poids fondamentaux de  $(B, T)$ . En particulier,  $\mathcal{D}(G/H)$  est formé de deux éléments.

Soit  $(p \subset d) \in \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^2)^\vee$  un drapeau de  $\mathbb{P}^2$ . Notons  $p^\perp$  (resp.  $d^\perp$ ) l'orthogonal de  $p$  (resp.  $d$ ) pour la forme quadratique  $q$ . Alors,  $(d^\perp \subset p^\perp)$  est un drapeau de  $\mathbb{P}^2$ , appelé drapeau orthogonal à  $(p \subset d)$ . On montre que l'orbite par  $H$  d'un drapeau de  $\mathbb{P}(V)$  ne dépend que de la position relative de ce drapeau et de son orthogonal. On en déduit, avec l'argument habituel sur les rangs que le graphe  $\Gamma(G/H)$  est le suivant :



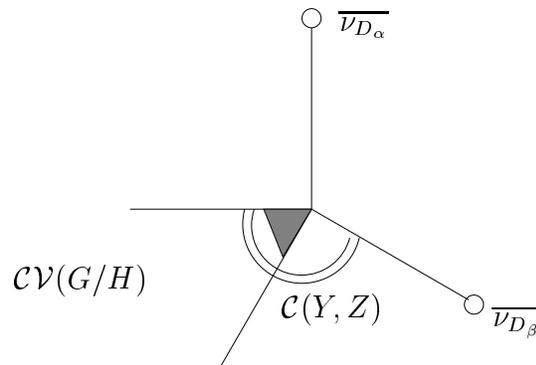
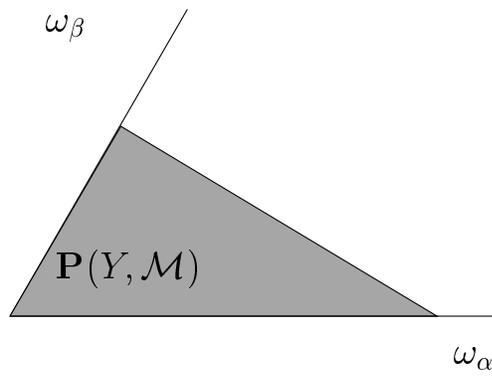
En particulier, les poids des équations dans  $\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H) \simeq \mathcal{X}(B)^{B \cap H}$  des couleurs, que l'on note  $D_\alpha$  et  $D_\beta$  de  $G/H$  sont :

$$\gamma_{D_\alpha} = 2\omega_\alpha \quad \text{et} \quad \gamma_{D_\beta} = 2\omega_\beta.$$

On en déduit que le polyèdre  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0)$  est le cône  $P_{\mathbb{Q}}^+$  engendré par  $P^+$ .

Soit  $Y$  le plongement simple de  $G/H$  d'orbite fermée  $Z$  tel que  $\mathcal{D}(Y, Z) = \{D_\beta\}$  et  $\mathcal{C}(Y, Z)$  est représenté sur la figure 7.5. En fait, on peut vérifier que  $Y$  est l'espace projectif des formes quadratiques en trois variables.

Les polytopes moments sur  $Y$  pour des fibrés amples  $\mathcal{M}$  sont tous à homothétie près comme sur la figure 7.6.

FIG. 7.5 – Cône colorié de  $Y$ FIG. 7.6 – Polytope moment de  $Y$

Considérons un plongement  $X$  de  $G \times G/\Delta G$  et un fibré en droites  $\mathcal{L}$  ample et  $G \times H$ -linéarisé sur  $X$  tels que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  est isomorphe à  $Y$ . L'existence de  $X$  et de  $\mathcal{L}$  découle du théorème 4. Alors, comme  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0)$  est égal à  $P_{\mathbb{Q}}^+$ , le théorème 5 montre que le polytope  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  s'identifie à un polytope de la forme  $\mathbf{P}(Y, \mathcal{M})$ . On en déduit que  $X$  est nécessairement l'unique plongement simple et complet de  $G \times G/\Delta G$  dont l'orbite fermée a  $\overline{Bs_{\beta}B^-}$  (voir la section 4 pour les notations) comme couleur. En fait,  $X$  est la normalisation dans  $k(G)$  de  $\mathbb{P}(\text{End}(V))$ .

Considérons l'orbite fermée  $\mathcal{O}_0$  de  $G \times G$  dans  $X$ . Les isotropies dans  $G \times G$  des points de  $\mathcal{O}_0$  sont des produits de 2 sous-groupes paraboliques minimaux et opposés de  $G$ . En particulier, l'isotropie pour l'action de  $\{1\} \times H$  des points de  $\mathcal{O}_0$  est infinie. Par ailleurs, comme  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0)$  rencontre  $\mathbf{P}(\mathcal{O}_0, \mathcal{L})$ , l'orbite  $\mathcal{O}_0$  contient des points semi-stables. Alors, la proposition 5.2.2 montre que :

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \neq X^{\text{s}}(\mathcal{L}).$$

Dans cet exemple, nous sommes parti du plongement  $Y$  de  $G/H$  qui peut être réalisé comme quotient d'un plongement  $X$  du groupe  $G$ . Nous avons montré qu'il est impossible d'imposer que pour ce quotient tous les points semi-stables soient stables. Il semble que ceci soit lié au fait qu'une orbite avec couleur de  $G \times G/\Delta G$  dans  $X$  admette des points semi-stables. En effet, l'argument utilisé dans cet exemple fonctionne en général et montre qu'une orbite fermée avec couleur d'un plongement de  $G$  ne peut contenir de point stable pour l'action d'un sous-groupe sphérique. Ainsi, dans la suite nous fixerons notre attention sur les plongements sans couleurs de  $G \times G/\Delta G$ .

Cependant, comme le montre l'exemple suivant, il est possible que des orbites avec couleur de  $G \times G/\Delta G$  contiennent des points stables. Évidemment ces orbites de  $G \times G$  ne sont pas fermées.

### 7.5.3 $G = \text{PSL}(3) \times \text{PSL}(3)$ et $H = \Delta\text{PSL}(3)$

Considérons le groupe  $G = \text{PSL}(3) \times \text{PSL}(3)$  et  $H$  le sous-groupe diagonal de  $G$ . Ici,  $V$  est encore le  $\text{SL}(3)$ -module standard. Alors,  $G$  se plonge dans  $X = \mathbb{P}(\text{End}(V)) \times \mathbb{P}(\text{End}(V))$ . Considérons sur  $X$  le fibré en droites  $\mathcal{L} := \mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{O}(4)$  muni de la  $G \times G$ -linéarisation induite par l'action linéaire de  $\text{SL}(3)$  sur  $V$ . Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $\text{PSL}(3)$ . Alors, le polytope moment  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  se plonge canoniquement (voir la section 4) dans  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}$ . Le polytope  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  est alors le produit de deux polytopes comme

sur la figure 7.7.

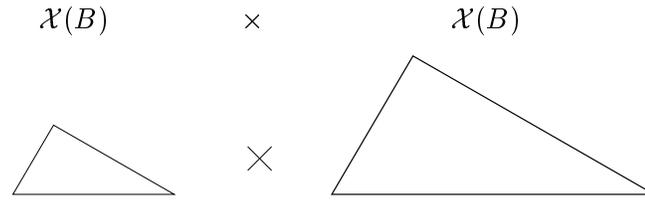


FIG. 7.7 – Le polytope  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$

Par ailleurs, on montre aisément que le polyèdre  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0)$  est le cône  $P_{\mathbb{Q}}^+$  plongé diagonalement dans  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}$ . Alors, une face orbitale de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  rencontre  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_0)$  si et seulement si elle est le produit d'une face du petit polytope de la figure 7.7 par le grand. On en déduit que l'ouvert  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  est inclus dans  $\mathbb{P}(\text{End}(V)) \times \text{PSL}(3)$ . Il est alors immédiat que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = X^s(\mathcal{L})$ . De plus, si  $\mathcal{O}_0$  désigne l'orbite fermée de  $G$  dans  $\mathbb{P}(\text{End}(V))$ , alors l'orbite  $\mathcal{O}_0 \times \text{PSL}(3)$  de  $G \times G$  dans  $X$  contient des points stables et a une couleur dans  $X$ .

# Chapitre 8

## Action de $B \times H$ dans un plongement de $G$

### 8.1 Introduction

Fixons encore un groupe semi-simple  $G$  et un sous-groupe sphérique  $H$  de  $G$ . Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $H$ .

Soit  $X$  un plongement projectif de  $G \times G/\Delta G$ ,  $\mathcal{L}$  un fibré en droites amples et  $G \times H$ -linéarisé sur  $X$  et  $\chi$  un caractère de  $H$ . La proposition 7.4.1 montre que les diviseurs stables par  $B \times H$  dans  $X$  ont un rôle à jouer dans la description de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi)$ . Dans cette section, nous étudions ces diviseurs lorsque  $X$  est sans couleur. Nous commençons par étudier l'action de  $B \times H$  dans une orbite de  $G \times G$ .

### 8.2 Action de $B \times H$ dans certains $G \times G$ -espaces homogènes

**8.2.1** — Fixons deux sous-groupes paraboliques opposés,  $P$  et  $Q$ . Notons  $L$  leur sous-groupe de Levi commun. On se donne également  $C$  un sous-groupe du centre connexe de  $L$ . Posons

$$I = (P^u \times Q^u) \rtimes (\Delta L \times (\{1\} \times C)).$$

Motivé par la proposition 4.4.1, dans cette section, nous allons étudier l'action de  $B \times H$  sur le  $G \times G$ -espace homogène  $\mathcal{O} := (G \times G)/I$ . Soulignons que

dans cette sous-section, nous ne supposons pas que  $\mathcal{O}$  est une orbite de  $G \times G$  dans un plongement de  $G \times G/\Delta G$ , mais simplement que  $\mathcal{O}$  est un espace homogène de « la même forme » que ces orbites.

Si  $(g_1, g_2)$  est dans  $G \times G$ , on notera  $\overline{(g_1, g_2)}$  la classe  $(g_1, g_2)I/I$ . Considérons  $p_1$  (resp.  $p_2$ ) la projection de  $\mathcal{O}$  sur  $G/P$  (resp.  $G/Q$ ) induite par l'inclusion de  $I$  dans  $P \times G$  (resp.  $G \times Q$ ).

Quitte à changer de point base dans  $\mathcal{O}$  nous supposons que :

$$B \subseteq Q.$$

Nous allons regarder les orbites de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$  en utilisant l'application  $p_1$ . Soit  $x$  un point de  $\mathcal{O}$ . Alors,  $p_1((B \times H).x)$  est une orbite de  $B$  dans  $G/P$ .

Afin de paramétrer les orbites de  $B$  dans  $G/P$ , nous fixons quelques notations. Soit  $T$  un tore maximal de  $B \cap L$ . Notons  $\Phi_L$  l'ensemble des racines de  $(L, T)$ ,  $\Phi_L^+$  celles de  $(B \cap L, T)$  et  $\Phi^+$  celles de  $(B, T)$ . Notons  $W = N_G(T)/T$ , le groupe de Weyl de  $T$ . Posons :

$$W^L = \{w \in W : w.\Phi_L^+ \subseteq \Phi^+\}.$$

La décomposition de Bruhat (voir [26] ou [44]) affirme alors que :

$$G/P = \coprod_{w \in W^L} BwP/P.$$

Ainsi, on identifie  $W^L$  à  $\mathcal{B}(G/P)$  par  $w \mapsto \overline{BwP}/P$ .

Le groupe de Weyl  $W$  est engendré par les réflexions simples associées aux racines simples de  $(B, T)$ . Si  $w$  appartient à  $W$ , on note  $l(w)$  et on appelle *longueur de  $w$*  le nombre minimal de réflexions simples nécessaires pour écrire  $w$  comme produit de réflexions simples. L'interprétation géométrique de cette longueur est :

$$l(w) = \dim(G/P) - \dim(BwP/P).$$

Notons :

$$q_{P^u} : P \longrightarrow P/P^u,$$

l'application canonique. Remarquons que  $q_{P^u}$  induit un isomorphisme de groupes de  $L$  sur  $P/P^u$ . Nous utiliserons les propriétés suivantes de  $q_{P^u}$  :

**Lemme 8.2.1** *Soit  $w$  dans  $W^L$ .*

- (i) Le sous-groupe  $w^{-1}Bw$  contient  $B \cap L$ .
- (ii) On a :  $q_{P^u}(P \cap w^{-1}Bw) = q_{P^u}(B \cap L)$ .  
Soit  $\alpha$  une racine simple de  $(B, T)$ . Posons  $\beta = w^{-1}\alpha$ .
- (iii) Si  $\beta \notin \Phi_L^+$  alors  $q_{P^u}(P \cap w^{-1}P_\alpha w) = q_{P^u}(B \cap L)$ .
- (iv) Si  $\beta \in \Phi_L^+$  alors  $\beta$  est une racine simple de  $(B \cap L, T)$  et  $P_\beta \cap L$  est le sous-groupe parabolique minimal contenant  $B \cap L$  associé à  $L$ . De plus,  $q_{P^u}(P \cap w^{-1}P_\alpha w) = q_{P^u}(P_\beta \cap L)$ .

**Preuve :** Assertion (i) : Le tore  $T$  est inclus dans  $B \cap L$  et dans  $w^{-1}Bw$ . Mais alors, comme  $\Phi_L^+ \subseteq w^{-1}\Phi^+$ , l'algèbre de Lie de  $B \cap L$  est incluse dans celle de  $w^{-1}Bw$ . Or  $B \cap L$  est connexe donc  $w^{-1}Bw$  contient  $B \cap L$ .

Assertion (ii) : Le groupe  $q_{P^u}(P \cap w^{-1}Bw)$  est résoluble puisque  $P \cap w^{-1}Bw$  l'est. Or la première assertion montre que  $q_{P^u}(P \cap w^{-1}Bw)$  contient l'image par  $q_{P^u}$  de  $B \cap L$ . Comme la restriction de  $q_{P^u}$  à  $L$  est un isomorphisme,  $q_{P^u}(B \cap L)$  est un sous-groupe de Borel de  $P/P^u$  et la deuxième assertion suit.

Assertions (iii) et (iv) : Les poids de l'algèbre de Lie de  $q_{P^u}(P \cap w^{-1}P_\alpha w)$  sont :

$$\left[ (w^{-1}\Phi^+ \cup \{-\beta\}) \cap (\Phi^- \cup \Phi_L^+) \right] - \Phi(P^u),$$

où  $\Phi^- = -\Phi^+$  et  $\Phi(P^u)$  est l'ensemble des racines de  $(P^u, T)$ . De plus, l'assertion (ii) montre que

$$\left[ (w^{-1}\Phi^+) \cap (\Phi^- \cup \Phi_L^+) \right] - \Phi(P^u) = \Phi_L^+.$$

Alors l'assertion (iii) suit facilement. Si  $\beta \in \Phi_L^+$  alors  $q_{P^u}(P \cap w^{-1}P_\alpha w)$  est isomorphe à un sous-groupe parabolique de  $L$  dont les racines pour  $T$  sont  $\Phi_L^+ \cup \{-\beta\}$ . On en déduit que  $\beta$  est une racine simple de  $(B \cap L, T)$ , puis la dernière assertion du lemme.  $\square$

**8.2.2** — Rappelons que  $q : G \rightarrow G/H$  est l'application orbite et  $\mathcal{B}(G/H)$  est l'ensemble des adhérences d'orbites de  $B$  dans  $G/H$ . Notons  $\mathcal{BH}(\mathcal{O})$  l'ensemble des adhérences d'orbites de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$ . Nous pouvons maintenant déterminer  $\mathcal{BH}(\mathcal{O})$ .

**Proposition 8.2.1** (i) *L'application*

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow p_1^{-1}(P/P) \\ g &\longmapsto (1, g) \cdot (1, 1) \end{aligned}$$

induit un isomorphisme de  $G/Q^u C$  sur  $p_1^{-1}(P/P)$ .

(ii) Les orbites de  $G \times \{1\}$  dans  $\mathcal{O}$  sont les fibres de  $p_2$ .

(iii) Soit  $w \in W^L$  et  $V \in \mathcal{B}(G/H)$ . Choisissons  $\hat{w} \in BwP$  et  $v$  dans l'orbite ouverte de  $B \times H$  dans  $q^{-1}(V) \subset G$ . Alors, l'orbite  $(B \times H).(\hat{w}, v)I/I$  de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$  ne dépend que du couple  $(w, V)$ . On notera  $\mathcal{BH}^\circ(w, V)$  cette orbite et  $\mathcal{BH}_\mathcal{O}(w, V)$  son adhérence dans  $\mathcal{O}$ .

(iv) Rappelons que  $\mathcal{B}(G/P)$  s'identifie à  $W^L$ . Alors, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(G/P) \times \mathcal{B}(G/H) &\longrightarrow \mathcal{BH}^\circ(\mathcal{O}) \\ (w, V) &\longmapsto \mathcal{BH}_\mathcal{O}(w, V) \end{aligned}$$

est une bijection.

**Preuve :** Assertion (i) : Soit  $x$  dans  $p_1^{-1}(P/P)$ . Alors,  $x$  s'écrit  $\overline{(p, g)}$  avec  $p \in P$  et  $g \in G$ . Or  $P = LP^u$  et il existe  $l \in L$  et  $p^u \in P^u$  tels que  $p = lp^u$ . Mais alors,  $\overline{(p, g)} = \overline{(1, gl^{-1})}$ . Ceci montre la surjectivité de  $\phi$ . La première assertion du lemme découle alors du fait que le stabilisateur dans  $(\{1\} \times G)$  de  $\overline{(1, 1)}$  vaut  $\{1\} \times (Q^u C)$ .

Assertion (ii) : Nous venons de montrer que les fibres de  $p_1$  sont des  $\{1\} \times G$ -espaces homogènes. La deuxième assertion se démontre de manière analogue.

Montrons ensemble les deux dernières assertions. Soit  $w$  dans  $W^L$  et  $\hat{w}$  dans  $BwP$ . Considérons l'ensemble  $\mathcal{BH}^w(\mathcal{O})$  des adhérences d'orbites de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$  dont l'image par  $p_1$  est  $\overline{BwP}/P$ . En traduisant par  $(\hat{w}^{-1}, 1)$ , on identifie  $\mathcal{BH}^w(\mathcal{O})$  à :

$$\{\text{orbites de } w^{-1}Bw \times H \text{ dans } p_1^{-1}(BP/P)\}.$$

Comme  $p_1$  est  $G \times \{1\}$ -équivariant et  $\{1\} \times G$ -invariant, en intersectant avec  $p_1^{-1}(P/P)$ , on identifie alors  $\mathcal{BH}^w(\mathcal{O})$  à :

$$\{\text{orbites de } (w^{-1}Bw \cap P) \times H \text{ dans } p_1^{-1}(P/P)\}.$$

Ensuite, comme  $q_{P^u}(w^{-1}Bw \cap P) = q_{P^u}(B \cap L)$  et  $B = Q^u.(B \cap L)$ , en prenant la préimage par  $\phi$ , on identifie alors  $\mathcal{BH}^w(\mathcal{O})$  à :

$$\{\text{orbites de } H \times B \text{ dans } G\}.$$

Ainsi, on a montré que l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{BH}^w(\mathcal{O}) &\longrightarrow \{\text{orbites de } H \times B \text{ dans } G\} \\ \overline{(B \times H).x}^{\mathcal{O}} &\longmapsto \phi^{-1}\left[p_1^{-1}(P/P) \cap ((\hat{w}^{-1}, 1).(B \times H).x)\right] \end{aligned}$$

est une bijection. Les deux dernières assertions de la proposition suivent facilement.  $\square$

**Corollaire 8.2.1** *Soit  $X$  un plongement de l'espace homogène  $G \times G/\Delta G$ . Alors,  $B \times H$  n'a qu'un nombre fini d'orbites dans  $X$ .*

**Preuve :** D'après la proposition 2.5.1, il existe  $\tilde{X}$  un plongement sans couleur de  $G \times G/\Delta G$  et un morphisme surjectif et  $G \times G$ -équivariant de  $\tilde{X}$  sur  $X$ . Donc, il suffit de montrer le corollaire pour  $\tilde{X}$ . Or, grâce à la proposition 4.4.1, la proposition 8.2.1 s'applique à chaque orbite de  $G \times G$  dans  $\tilde{X}$  : le corollaire est démontré.  $\square$

**8.2.3** — Nous allons calculer la codimension dans  $\mathcal{O}$  des éléments de  $\mathcal{BH}^{\circ}(\mathcal{O})$ . Pour cela fixons quelques notations. Si  $Y$  est une variété, rappelons que  $\dim(Y)$  désigne la dimension de  $Y$ . Soit  $w \in W^L$  et  $V \in \mathcal{B}(G/H)$ , on pose alors :

$$\text{codim}_{G/H}(V) := \dim(G/H) - \dim(V),$$

$$\text{codim}_{G/P}(BwP/P) := \dim(G/P) - \dim(BwP/P) = l(w),$$

et

$$\text{codim}_{\mathcal{O}}(\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)) := \dim(\mathcal{O}) - \dim(\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)).$$

On a alors le :

**Lemme 8.2.2** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\text{codim}_{\mathcal{O}}(\mathcal{B} \times \mathcal{H}_{\mathcal{O}}(w, V)) = \text{codim}_{G/P}(BwP/P) + \text{codim}_{G/H}(V).$$

**Preuve :** Reprenons les notations de la proposition 8.2.1. La preuve de la proposition 8.2.1 montre que la dimension de  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)$  est égale à

$$\dim(BwP/P) + \dim\left(p_1^{-1}(P/P) \cap \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(1, V)\right).$$

Comme  $p_1^{-1}(P/P)$  est isomorphe à  $G/Q^u C$ , on a :

$$\dim\left(p_1^{-1}(P/P) \cap \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(1, V)\right) = \dim(V) + \dim(B) - \dim(Q^u C).$$

De plus, on vérifie aisément que  $\dim(\mathcal{O}) = \dim(G) - \dim(C)$ . En mettant ces égalités bouts à bouts, et utilisant le fait que  $\dim(G/P) = \dim(Q^u)$  on obtient le lemme.  $\square$

### 8.3 Action des sous-groupes paraboliques dans $\mathcal{BH}(\mathcal{O})$

Nous reprenons les notations de la section précédente. Soit  $\Sigma$  l'ensemble des racines simples associées à  $(B, T)$ . Soit  $\alpha$  dans  $\Sigma$ ,  $w$  dans  $W^L$  et  $V$  dans  $\mathcal{B}(G/H)$ . Notons  $P_\alpha$  le sous-groupe parabolique minimal de  $G$  contenant  $B$  associé à  $\alpha$ . Avec les notations de la proposition 8.2.1, posons :

$$P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V) := (P_\alpha \times \{1\}) \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V).$$

On dira que  $\alpha$  monte  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)$  si la dimension de  $P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)$  est strictement supérieure à celle de  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)$ .

Considérons sur  $P_\alpha \times \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)$  l'action de  $B$  définie par la formule :  $b.(p, x) = (pb^{-1}, bx)$ . Alors, il existe une variété quotient,  $P_\alpha \times_B \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)$  qui se fibre sur  $P_\alpha/B$ . Considérons alors l'application :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{O}, \alpha} : P_\alpha \times_B \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V) &\longrightarrow P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V) \\ (p, x)B &\longmapsto (p, 1).x \end{aligned}$$

Lorsque  $\alpha$  monte  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)$ , la proposition suivante décrit les orbites de  $B \times H$  incluses dans  $P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)$  et donne le degré,  $\deg(\pi_{\mathcal{O}, \alpha})$  de l'application  $\pi_{\mathcal{O}, \alpha}$ .

**Proposition 8.3.1** *Soit  $\alpha \in \Sigma$ ,  $w \in W^L$  et  $V \in \mathcal{B}(G/H)$ . Alors,  $\alpha$  monte  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(w, V)$  si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :*

- (i)  $\alpha$  monte  $\overline{BwP}/P$  dans  $\Gamma(G/P)$  i.e.  $s_\alpha \cdot w \in W^L$  et  $l(s_\alpha w) < l(w)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^\circ(w, V) &= \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^\circ(w, V) \cup \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^\circ(s_\alpha w, V) \\ \text{et } \deg(\pi_{\mathcal{O}, \alpha}) &= 1. \end{aligned}$$

- (ii)  $P_\alpha$  stabilise  $BwP/P$  (i.e.  $s_\alpha w \notin W^L$ ) et  $w^{-1}\alpha$  (qui est alors une racine simple de  $L$ ) monte  $V$ . Posons  $\beta = w^{-1}\alpha$ . On a alors :

$$\begin{aligned} P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^\circ(w, V) &= \bigcup_{V' \circ \subseteq P_\beta \cdot V^\circ} \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^\circ(w, V') \\ \text{et } \deg(\pi_{\mathcal{O}, \alpha}) &= d(V, \beta). \end{aligned}$$

**Preuve :** Cas (i) : Supposons que  $\alpha$  monte  $BwP/P$ .

Le groupe  $\overline{B}$  agit diagonalement sur le produit  $P_\alpha \times BwP/P$  et la variété quotient  $P_\alpha \times_B BwP/P$  existe. De plus, il existe une fibration  $f : P_\alpha \times_B BwP/P \rightarrow P_\alpha/B$ . Considérons  $\tilde{p}_1$ , l'application canonique telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 P_\alpha \times_B \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{O}, \alpha}} & P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V) \\
 \downarrow \tilde{p}_1 & & \downarrow p_1 \\
 P_\alpha \times_B BwP/P & \xrightarrow{\text{isomorphisme}} & P_\alpha wP/P \\
 \downarrow f & & \\
 P_\alpha/B & & 
 \end{array}$$

Notons  $\eta = f \circ \tilde{p}_1$ . On voit alors que chaque fibre de  $\pi_{\mathcal{O}, \alpha}$  est incluse dans une fibre de  $\eta$ . On en déduit facilement que  $\pi_{\mathcal{O}, \alpha}$  est un isomorphisme puis que  $P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V) = \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V) \cup \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(s_\alpha w, V)$ .

Cas (ii) : Supposons que  $P_\alpha wP/P = BwP/P$ . Commençons par montrer que  $\beta$  appartient à  $\Phi_L^+$ . Comme  $P_\alpha wP/P = BwP/P$ , la dimension du stabilisateur  $P_\alpha \cap (wPw^{-1})$  de  $wP/P$  dans  $P_\alpha$  est strictement supérieure à celle de  $B \cap (wPw^{-1})$ . En regardant les algèbres de Lie ceci montre que  $-\alpha$  appartient à  $w \cdot \Phi_L^-$ . Cqfd.

Soit  $v$  dans  $G$  tel que  $vH/H$  appartient à l'orbite ouverte de  $B$  dans  $V$  et soit  $\hat{w}$  dans  $BwP$ . Alors, toutes les orbites de  $B \times H$  incluses dans  $P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V)$  rencontrent  $p_1^{-1}(wP/P)$ . De plus, on a :

$$(\hat{w}^{-1}, 1) \cdot \left[ P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V) \cap p_1^{-1}(wP/P) \right] = ((P \cap w^{-1}P_\alpha w) \times H) \cdot (1, v^{-1})I/I.$$

Or, comme  $\beta \in \Phi_L^+$ , le lemme 8.2.1 montre que  $\beta$  est une racine simple de  $L$  et que  $q_{P^\alpha}(P \cap w^{-1}P_\alpha w)$  s'identifie au sous-groupe parabolique minimal de  $L$  contenant  $B \cap L$  associé  $\beta$  (c'est-à-dire à  $P_\beta \cap L$ ). On en déduit que :

$$P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V) = \bigcup_{V' \subseteq P_\beta \cdot V} \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V').$$

En particulier,  $\alpha$  monte  $\mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V)$  si et seulement si  $\beta$  monte  $V$ .

Supposons que  $\beta$  monte  $V$  et calculons le degré  $d$  de  $\pi_{\mathcal{O}, \alpha}$ . Pour cela, considérons :

$$\begin{array}{ccc} P_\alpha \times_B \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{O}, \alpha}} & P_\alpha \cdot \mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V) \\ & & \downarrow p_1 \\ & & BwP/P. \end{array}$$

Soit  $\hat{w}$  et  $v$  comme ci-dessus. Le degré  $d$  de  $\pi_{\mathcal{O}, \alpha}$  est celui de sa restriction au-dessus de  $wP/P$  :

$$\begin{array}{ccc} (P_\alpha \cap wPw^{-1}) \times_{B \cap wPw^{-1}} ((B \cap wPw^{-1}) \times H) \cdot (\hat{w}, v)I/I & & \\ \downarrow & & \\ ((P_\alpha \cap wPw^{-1}) \times H) \cdot (\hat{w}, v)I/I & & \end{array}$$

En appliquant  $(\hat{w}^{-1}, 1)$ , on obtient que  $d$  est le degré de l'application naturelle :

$$\begin{array}{ccc} (w^{-1}P_\alpha w \cap P) \times_{w^{-1}Bw \cap P} ((w^{-1}Bw \cap P) \times H) \cdot (1, v)I/I & & \\ \downarrow & & \\ ((w^{-1}P_\alpha w \cap P) \times H) \cdot (1, v)I/I. & & \end{array}$$

Mais alors, le lemme 11.2.2 et le fait que  $I$  contient  $P^u \times \{1\}$  impliquent que  $d$  est le degré de l'application :

$$\eta : P_\beta \times_B (B \times H) \cdot (1, v)I/I \longrightarrow (P_\beta \times H) \cdot (1, v)I/I.$$

Par ailleurs, le cardinal de la fibre  $\eta^{-1}((1, v)I/I)$  est  $d(V, \beta)$ . On a montré que le degré de  $\pi_{\mathcal{O}, \alpha}$  est  $d(V, \beta)$ .

Pour terminer la démonstration du lemme il reste à montrer que si  $\alpha$  monte  $\overline{Bs_\alpha w P}/P$  sur  $\overline{BwP}/P$  alors  $\alpha$  ne monte pas  $\mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(w, V)$ . Mais ceci découle immédiatement du Cas (i) ci-dessus appliqué à  $\mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(s_\alpha w, V)$ .  $\square$

## 8.4 Sur le complémentaire de l'orbite ouverte de $B \times H$ dans $\mathcal{O}$

### 8.4.1 Réductions

**8.4.1.1** — Dans cette sous-section, nous allons décrire les composantes irréductibles du complémentaire de l'orbite ouverte de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$ . Notons qu'avec la convention,  $B$  inclus dans  $Q$  choisie,  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^{\circ}(1, G/H) = (B \times H).I/I$  est l'orbite ouverte de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$ .

**8.4.1.2** — Considérons le revêtement universel de  $G$  :

$$\zeta : \tilde{G} \longrightarrow G.$$

Posons alors,  $\tilde{P} := \zeta^{-1}(P)$ ,  $\tilde{Q} := \zeta^{-1}(Q)$ ,  $\tilde{L} := \zeta^{-1}(L)$  et  $\tilde{C} := \zeta^{-1}(C)$ . Alors,  $\mathcal{O}$  est un  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -espace homogène et l'isotropie de  $I/I \in \mathcal{O}$  dans  $\tilde{G} \times \tilde{G}$  est  $\zeta^{-1}(I)$ . De plus, si  $\tilde{B} := \zeta^{-1}(B)$  et  $\tilde{H} := \zeta^{-1}(H)$ , on a :

$$\forall x \in \mathcal{O} \quad (B \times H).x = (\tilde{B} \times \tilde{H}).x.$$

Quitte à remplacer  $G$  par  $\tilde{G}$ ,  $B$  par  $\tilde{B}$  et  $H$  par  $\tilde{H}$ , nous supposons dans la section 8.4 que  $G$  est simplement connexe.

**8.4.1.3** — Nous considérons  $H^{\circ}$  la composante neutre de  $H$ . L'action de  $\{1\} \times H$  sur  $\mathcal{O}$  induit une action de  $H/H^{\circ}$  sur l'ensemble des orbites de  $B \times H^{\circ}$  dans  $\mathcal{O}$ . Comme cette action respecte la dimension, on a :

$$(B \times H^{\circ}).I/I = (B \times H).I/I.$$

Dans la suite de la section 8.4, quitte à remplacer  $H$  par  $H^{\circ}$ , nous supposons que  $H$  est connexe.

### 8.4.2 Le complémentaire de l'orbite ouverte de $B \times H$ dans $\mathcal{O}$

Soit  $D$  une couleur de  $G/H$ . Alors,  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(1, D)$  est fermé, irréductible, stable par  $B \times H$  et de codimension 1 dans  $\mathcal{O}$ . On en déduit que  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(1, D)$  est une composante irréductible du complémentaire de l'orbite ouverte de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$ . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $\mathcal{O}$ , on notera  $\hat{D}$  pour

$\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(1, D)$ . Reprenons les notations de la proposition 8.2.1. Remarquons qu'alors :

$$\widehat{D} \cap p_1^{-1}(P/P) = \phi(\widetilde{D}^{-1}),$$

où  $\widetilde{D}^{-1}$  est l'image de  $q^{-1}(D)$  par  $g \mapsto g^{-1}$ .

Soit maintenant  $E$  une couleur de  $G/P$ . On écrit  $E = \overline{Bs_{\alpha}P}/P$  où  $s_{\alpha}$  est une réflexion simple de  $W^L$ . Alors,  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(s_{\alpha}, G/H)$  est une composante irréductible de codimension 1 du complémentaire de l'orbite ouverte de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$ . Nous noterons quelquefois  $\widehat{E}$  pour  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(s_{\alpha}, G/H)$ . Remarquons que :

$$\widehat{E} = p_1^{-1}(E).$$

On a alors le

**Lemme 8.4.1** *Avec les notations introduites ci-dessus, si  $H$  est connexe, on a :*

$$\mathcal{O} = (B \times H).I/I \cup \bigcup_{D \in \mathcal{D}(G/H)} \widehat{D} \cup \bigcup_{E \in \mathcal{D}(G/P)} \widehat{E}.$$

**Preuve :** Soit  $M$  une composante irréductible du complémentaire de l'orbite ouverte de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$ . Comme  $M$  est stable par  $B \times \{1\}$ , il y a deux possibilités : soit  $p_1(M)$  est inclus dans  $G/P - BP/P$ , soit  $p_1(M)$  est dense dans  $G/P$ .

Dans le premier cas, il est clair que  $M$  est la préimage par  $p_1$  d'une composante irréductible de  $G/P - BP/P$ . Comme  $BP/P$  est affine,  $M$  est alors de la forme  $p_1^{-1}(E)$  pour  $E$  diviseur stable par  $B$  dans  $G/P$ . Alors,  $M = \widehat{E}$ .

Supposons que  $p_1(M)$  est dense dans  $G/P$ . Alors la proposition 8.2.1 montre que  $\phi^{-1}(M \cap p_1^{-1}(P/P))$  est une composante irréductible de  $G - HB$  c'est-à-dire de la forme  $\widetilde{D}^{-1}$  pour une couleur  $D$  de  $G/H$ . Il est alors facile de voir que :  $M = \widehat{D}$ . Le lemme est démontré.  $\square$

### 8.4.3 Équations dans $G \times G$ des $\widehat{D}$ et des $\widehat{E}$

8.4.3.1 — Considérons l'application :

$$q_{G \times G} : G \times G \longrightarrow \mathcal{O} \\ (g_1, g_2) \longmapsto \overline{(g_1, g_2)} = (g_1, g_2)I/I.$$

Avec les notations de la section précédente, dans celle-ci, nous considérons  $\widehat{D}$  et  $\widehat{E}$  comme des diviseurs premiers dans  $\mathcal{O}$ . Nous allons calculer les équations

dans  $k[G \times G]$  des images réciproques  $q_{G \times G}^*(\widehat{D})$  et  $q_{G \times G}^*(\widehat{E})$  de ces diviseurs par  $q_{G \times G}$ .

Pour cela, nous introduisons quelques notations. Posons :

$$I^\bullet = (P^u \times Q^u) \rtimes \Delta L \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^\bullet = G \times G / I^\bullet.$$

L'application  $q_{G \times G}$  se factorise alors par :

$$G \times G \longrightarrow \mathcal{O}^\bullet \xrightarrow{\eta} \mathcal{O}$$

On déduit facilement du lemme 8.4.1 appliqué à  $\mathcal{O}^\bullet$  et à  $\mathcal{O}$ , que si  $D$  appartient à  $\mathcal{D}(G/H)$  (resp.  $E$  appartient à  $\mathcal{D}(G/P)$ ), on a :  $\eta^{-1}(\widehat{D}) = \mathcal{BH}_{\mathcal{O}^\bullet}(1, D)$  et  $\eta^{-1}(\widehat{E}) = \mathcal{BH}_{\mathcal{O}^\bullet}(E, G/H)$ . En particulier,  $\eta^{-1}(\widehat{D})$  et  $\eta^{-1}(\widehat{E})$  sont irréductibles. Mais alors, le lemme 2.8.1 montre que :

$$\eta^*(\widehat{D}) = \eta^{-1}(\widehat{D}) \quad \text{et} \quad \eta^*(\widehat{E}) = \eta^{-1}(\widehat{E}).$$

Ainsi, pour calculer les équations de  $q_{G \times G}^*(\widehat{D})$  et de  $q_{G \times G}^*(\widehat{E})$ , quitte à remplacer  $I$  par  $I^\bullet$ , on peut supposer que  $I = (P^u \times Q^u) \rtimes \Delta L$  c'est-à-dire que  $C$  est trivial. Dans la suite de la section 8.4 afin d'alléger les notations, nous ferons cette hypothèse.

**8.4.3.2** — Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(I) & \longrightarrow & \mathcal{X}(\Delta L) \\ & & \downarrow \\ \mathcal{X}(P) & \longrightarrow & \mathcal{X}(L) \longleftarrow \mathcal{X}(Q) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des morphismes de restriction et la flèche verticale l'isomorphisme canonique. Par ce diagramme,  $\mathcal{X}(I)$ ,  $\mathcal{X}(P)$  et  $\mathcal{X}(Q)$  s'identifient à  $\mathcal{X}(L)$ . Par la suite nous ferons ces identifications de manière implicite.

Soit  $D$  dans  $\mathcal{D}(G/H)$ . L'équation,  $f_{\widehat{D}}$  de  $q_{G \times G}^*(\widehat{D})$  telle que  $f_{\widehat{D}}(1, 1) = 1$  est un vecteur propre pour  $B \times H$  et  $I$ . Ce qui nous donne un élément de  $\mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}(H) \times \mathcal{X}(L)$  (puisque  $\mathcal{X}(I) = \mathcal{X}(L)$ ). De plus, comme  $(B \times H).I/I$  est dense dans  $\mathcal{O}$ , ce caractère détermine  $f_{\widehat{D}}$ . De même, si  $E$  appartient à  $\mathcal{D}(G/P)$ , on lui associe un élément de  $\mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}(H) \times \mathcal{X}(L)$  qui s'identifie à l'équation  $f_{\widehat{E}}$  de  $q_{G \times G}^*(\widehat{E})$ . Dans cette section, nous allons calculer les

éléments (que l'on note encore  $f_{\widehat{D}}$  et  $f_{\widehat{E}}$ ) de  $\mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}(H) \times \mathcal{X}(L)$  correspondant à  $f_{\widehat{D}}$  et  $f_{\widehat{E}}$ .

**8.4.3.3** — Commençons par montrer le

**Lemme 8.4.2** *Nous rappelons que  $G$  est simplement connexe,  $H$  est connexe et  $C$  est trivial. Soit  $D$  dans  $\mathcal{D}(G/H)$ . Considérons ici :*

$$\begin{aligned} q_2 : G &\longrightarrow \mathcal{O} \\ g &\longmapsto \overline{(1, g)}. \end{aligned}$$

Alors, avec les notations ci-dessus, on a :  $q_2^*(\widehat{D}) = \widetilde{D}^{-1}$ .

**Preuve :** Reprenons les notations de la proposition 8.2.1. Nous posons le temps de cette preuve :

$$U := p_1^{-1}(BP/P) \quad \text{et} \quad S := p_1^{-1}(P/P).$$

Alors,  $U$  est ouvert dans  $\mathcal{O}$  et rencontre  $\widehat{D}$ . Il suffit donc de calculer  $q_2^*(U \cap \widehat{D})$ .

Remarquons que  $S$  est stable par  $B \cap L$  et considérons l'action de  $B \cap L$  sur  $B$  par multiplication à droite. Alors,  $B \cap L$  agit diagonalement sur le produit  $B \times S$ . Il existe alors un quotient de  $B \times S$  par  $B \cap L$  que l'on note  $B \times_{B \cap L} S$ . Si  $b \in B$  et  $s \in S$ , on notera  $\overline{(b, s)} \in B \times_{B \cap L} S$  l'orbite de  $(b, s)$  par  $B \cap L$ . Comme  $U$  est stable par  $B$ , l'application ci-dessous est bien définie :

$$\begin{aligned} \xi : B \times_{B \cap L} S &\longrightarrow U \\ \overline{(b, s)} &\longmapsto b.s \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $\xi$  est bijective, puis par normalité de  $U$  que  $\xi$  est un isomorphisme. Alors, par définition de  $\widehat{D}$ , on a :

$$\xi^*(\widehat{D} \cap U) = 1. \left( B \times_{B \cap L} \phi(\widetilde{D}^{-1}) \right).$$

Considérons maintenant

$$\begin{aligned} i : S &\longrightarrow B \times_{B \cap L} S \\ s &\longmapsto \overline{(1, s)}. \end{aligned}$$

On a :  $i^* \left( B \times_{B \cap L} \phi(\widetilde{D}^{-1}) \right) = 1. \phi(\widetilde{D}^{-1})$ . Pour conclure, on factorise l'application  $q_2$  par :

$$G \longrightarrow G/Q^u \xrightarrow{\phi} S \xrightarrow{i} B \times_{B \cap L} S \xrightarrow{\xi} U \hookrightarrow \mathcal{O}.$$

Alors, le lemme 2.8.1 permet de conclure.  $\square$

On peut maintenant calculer  $f_{\widehat{E}}$  et  $f_{\widehat{D}}$ .

Type I :  $E$  est une couleur de  $G/P$ .

D'après la décomposition de Bruhat, on sait que  $E$  est de la forme  $\overline{Bs_\alpha P/P}$  pour  $\alpha$  racine simple telle que  $\omega_\alpha$  s'étend à  $P$ . De plus, l'équation de  $\overline{Bs_\alpha P}$  dans  $G$  est propre pour  $B \times P$  de poids  $(\omega_\alpha, -\omega_\alpha)$ . Par ailleurs, le lemme 2.8.1 montre que  $\widehat{E} = p_1^*(E)$ , et  $q_{G \times G}^*(\widehat{E}) = \overline{Bs_\alpha P} \times G$ . Ainsi :

$$f_{\widehat{E}} = (\omega_\alpha, 0, -\omega_\alpha).$$

Type II :  $D$  est une couleur de  $G/H$ .

Soit  $[\gamma : \chi]$  l'équation de  $\widetilde{D}$  dans  $G$ . Montrons que la formule :

$$f((b, h).i) = \gamma(b)\chi(h) \quad \forall b \in B, h \in H \text{ et } i \in I$$

définit une fonction rationnelle sur  $G \times G$ , propre pour  $(B \times H) \times I$  de poids  $(\gamma, \chi, 0)$ .

Comme  $(B \times H).I$  est dense dans  $G \times G$ , il suffit de montrer que si  $(b, h)$  appartient à  $I$  alors  $\gamma(b)\chi(h) = 1$ . Comme  $B \cap P = B \cap L$ , tout élément de  $(B \times H) \cap I$  est de la forme  $(b_l, q^u b_l)$  avec  $b_l \in B \cap L$ ,  $q^u \in Q^u$  et  $q^u b_l \in H$ . Comme  $(\gamma, \chi)$  appartient à  $\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H)$  et  $q^u b_l$  à  $B \cap H$ , on a  $\chi(q^u b_l)^{-1} = \gamma(q^u b_l) = \gamma(b_l)$  et  $(\gamma, \chi)(b_l, q^u b_l) = 1$ . Ainsi, il existe  $f$  dans  $k(G \times G)$  de poids  $(\gamma, \chi, 0)$  pour  $(B \times H) \times I$  et telle que  $f(1) = 1$ .

Considérons  $D_f = \text{div}(f)$ , le diviseur stable par  $(B \times H) \times I$  de  $G \times G$  d'équation  $f$ . Soit  $h \in H$  et  $b \in B$ . On peut écrire  $b = q^u b_l$ , avec  $q^u \in Q^u$  et  $b_l \in B \cap L$ . Comme  $(b_l, b) \in I$ , on a :

$$\begin{aligned} f(1, hb) &= f((b_l^{-1}, h).(b_l, b)) \\ &= f((b_l^{-1}, h)) \\ &= \gamma(b_l^{-1}).\chi(h) \\ &= \gamma(b^{-1}).\chi(h). \end{aligned}$$

On en déduit que  $i_2^*(D_f) = \widetilde{D}^{-1}$  où  $i_2 : G \longrightarrow G \times G$ ,  $g \mapsto (1, g)$ . Comme de plus  $D_f$  est stable par  $(B \times H) \times I$ , les lemmes 8.4.2 et 8.4.1 montrent

qu'il est de la forme :

$$D_f = q_{G \times G}^*(\widehat{D}) + \sum_{E \in \mathcal{D}(G/P)} n_E \cdot q_{G \times G}^*(\widehat{E}),$$

où les  $n_E$  sont des entiers. Pour tout  $E$  dans  $\mathcal{D}(G/P)$ , on note  $\widetilde{E}$  sa préimage par l'application orbite  $G \rightarrow G/P$ . Soit  $\lambda$  le caractère de  $P$  tel que  $[\lambda : -\lambda]$  est l'équation dans  $G$  de  $\sum n_E \widetilde{E}$ . Connaissant les équations des diviseurs de  $\mathcal{O}$  de type I, on en déduit que :

$$f_{\widehat{D}} = (\gamma - \lambda, \chi, \lambda).$$

Afin de calculer  $\lambda$ , rappelons quelques notations :  $\Sigma$  désigne l'ensemble des racines simples de  $(B, T)$  et si  $\alpha$  appartient à  $\Sigma$ ,  $\omega_\alpha$  est le poids fondamental qui lui correspond. Alors,  $\gamma$  s'écrit  $\sum_{\alpha \in \Sigma} k_\alpha \omega_\alpha$  avec  $k_\alpha$  dans  $\mathbb{N}$ . Considérons  $\Sigma(L)$  l'ensemble des racines simples de  $(B \cap L, T)$ . Soit  $\alpha \in \Sigma - \Sigma(L)$ . D'après la proposition 8.3.1,  $\widehat{D}$  est stable par  $P_\alpha$ . Donc l'équation de  $\widehat{D}$  est vecteur propre de  $P_\alpha$  et  $\gamma - \lambda$  est orthogonal à  $\alpha$ .

Par ailleurs, comme  $\lambda$  est un caractère de  $P$ , il est combinaison linéaire des  $\omega_\alpha$  pour  $\alpha \in \Sigma - \Sigma(L)$ . On en déduit que  $\lambda = \sum_{\alpha \in \Sigma - \Sigma(L)} k_\alpha \omega_\alpha$ . En particulier,  $\lambda$  ne dépend que de  $\gamma$  et de  $P$ ; on pose :

$$\gamma^P := \sum_{\alpha \in \Sigma - \Sigma(L)} k_\alpha \omega_\alpha.$$

Alors, on a montré que (rappelons que  $\gamma = \gamma_D$  et  $\chi = \chi_D$ ) :

$$f_{\widehat{D}} = (\gamma_D - \gamma_D^P, \chi_D, \gamma_D^P).$$

Remarquons que si  $D$  est stable par  $Q$ ,  $\gamma_D^P = \gamma_D$  et

$$f_{\widehat{D}} = (0, \chi_D, \gamma_D).$$

En particulier, dans ce cas, on a :  $\widehat{D} = p_2^{-1}(\widetilde{D}^{-1}/Q)$ .

#### 8.4.4 Action de $G \times \{1\}$ sur $\widehat{D}$ et $\widehat{E}$

Pour chacun des diviseurs  $D$  dans  $\mathcal{D}(G/H)$ , afin de décrire l'orbite ouverte de  $G \times H$  dans  $\mathcal{O}$ , nous aurons besoin de connaître  $(G \times \{1\}).\widehat{D}$ , ainsi que

la réunion,  $\Omega_{\widehat{D}}$  des orbites de  $G \times \{1\}$  incluses dans  $\widehat{D}$ . De même, si  $E$  est une couleur de  $G/P$ , nous déterminerons  $(G \times \{1\}).\widehat{E}$  et la réunion,  $\Omega_{\widehat{E}}$  des orbites de  $G \times \{1\}$  incluses dans  $\widehat{E}$ . Rappelons que nous supposons ici que  $G$  est simplement connexe,  $C$  est trivial et  $H$  est connexe.

### Type I

Comme  $\widehat{E}$  contient une fibre de  $p_1$ ,  $(G \times \{1\}).\widehat{E}$  les contient toutes et  $(G \times \{1\}).\widehat{E} = \mathcal{O}$ . De plus,  $\widehat{E}$  est stable par  $B \times G$  donc s'il contenait une orbite de  $G \times \{1\}$ , il contiendrait  $\mathcal{O}$ ! Ainsi,  $\Omega_{\widehat{E}}$  est vide.

### Type II

Si  $D$  est stable par  $Q$ , comme  $\widehat{D}$  est stable par  $G \times \{1\}$ , on a :

$$(G \times \{1\}).\widehat{D} = \Omega_{\widehat{D}} = \widehat{D}.$$

Si  $D$  n'est pas stable par  $Q$ , comme l'application  $G \times_B \widehat{D} \longrightarrow (G \times \{1\}).\widehat{D}$  est propre,  $(G \times \{1\}).\widehat{D}$  est fermé dans  $\mathcal{O}$ . De plus, on a

$$\phi^{-1}((G \times \{1\}).\widehat{D} \cap p_1^{-1}(P/P)) \supseteq \phi^{-1}(P.\widehat{D} \cap p_1^{-1}(P/P)).$$

Comme  $\phi^{-1}((G \times \{1\}).\widehat{D} \cap p_1^{-1}(P/P))$  est stable par  $Q$ , on en déduit que  $(G \times \{1\}).\widehat{D} = \mathcal{O}$ .

Par ailleurs, chaque orbite de  $G \times \{1\}$  incluse dans  $\widehat{D}$  rencontre  $p_1^{-1}(P/P)$ . Supposons que  $y \in \widehat{D} \cap p_1^{-1}(P/P)$  et  $(G \times \{1\}).y$  est inclus dans  $\widehat{D}$ . D'après la proposition 8.2.1, il existe  $\tilde{y} \in G$  tel que  $(1, \tilde{y}) = y$ . On a alors :

$$\phi^{-1}(P \times \{1\}.y) = \tilde{y}Q \subseteq \tilde{D}^{-1}.$$

Réciproquement, si  $\tilde{y}Q$  est inclus dans  $\tilde{D}^{-1}$ , alors  $(P \times H).\overline{(1, \tilde{y})}$  et donc  $(BP \times H).\overline{(1, \tilde{y})}$  sont inclus dans  $\widehat{D}$ . Comme  $BP$  est dense dans  $G$ , on en déduit que :

$$(G \times \{1\}).\overline{(1, \tilde{y})} \subseteq \widehat{D}.$$

Ainsi, l'ensemble des orbites de  $G \times H$  incluses dans  $\widehat{D}$  est en bijection avec celui des orbites de  $Q$  incluses dans  $D$ .

## 8.5 Récapitulatif

Au cours de la section 8.4 nous avons étudié le complémentaire de l'orbite ouverte de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$ . Nous avons montré que les composantes

irréductibles de ce complémentaire étaient de codimension 1 dans  $\mathcal{O}$ ; nous avons paramétré ces composantes irréductibles par les couleurs des espaces homogènes  $G/H$  et  $G/P$ ; et nous avons déterminé les « équations » de ces dernières. Nous nous sommes également intéressés au complémentaire de l'orbite ouverte de  $G \times H$  dans  $\mathcal{O}$ . Ayant effectué un grand nombre de réductions afin d'alléger les notations pendant les démonstrations, nous résumons maintenant les résultats obtenus. Pour cela revenons à la situation générale :

- $G$  semi-simple. On note  $\zeta : \tilde{G} \rightarrow G$  le revêtement universel de  $G$ .
- $I = (P^u \times Q^u) \times (\Delta L \times (\{1\} \times C))$ .
- $H$  non nécessairement connexe. On note  $H^\circ$  la composante neutre de  $H$ .

Nous noterons  $D^\circ$  les éléments de  $\mathcal{D}(G/H^\circ)$ . Posons :

$$\begin{aligned} \tilde{B} &:= \zeta^{-1}(B) & , & & \tilde{L} &:= \zeta^{-1}(L) \\ \tilde{P} &:= \zeta^{-1}(P) & \text{et} & & \tilde{H}^\circ &:= \zeta^{-1}(H^\circ). \end{aligned}$$

De plus, si  $D$  appartient à  $\mathcal{D}(G/H)$ , on note  $\Omega_D^Q$  pour la réunion des orbites de  $Q$  incluses dans  $D$ .

Rappelons que  $p_1 : \mathcal{O} \rightarrow G/P$  est l'application induite par l'inclusion de  $I$  dans  $P \times G$ . Considérons à nouveau l'application  $\phi : G \rightarrow p_1^{-1}(P/P)$  définie dans la proposition 8.2.1.

Compte tenu des réductions de la section 8.4.1, les résultats de la section 8.4 sont résumés dans le tableau suivant.

| Composantes irréductibles du complémentaire de $(B \times H).I/I$ dans $\mathcal{O}$                        |                                      |  |
|---|--------------------------------------|--|
| Paramètre   | $E \in \mathcal{D}(G/P)$             | $D^\circ \in \mathcal{D}(G/H^\circ)$   |
| équation dans<br>$\mathcal{X}(\tilde{B}) \times \mathcal{X}(\tilde{H}^\circ) \times \mathcal{X}(\tilde{L})$ | $(\omega_\alpha, 0, -\omega_\alpha)$ | $(\gamma_{D^\circ} - \gamma_{D^\circ}^P, \chi_{D^\circ}, \gamma_{D^\circ}^P)$          |
| Image par<br>$G \times \{1\}$   | $\mathcal{O}$                        | $\widehat{D}^\circ$ si $D^\circ$ est stable par $Q$<br>$\mathcal{O}$ sinon             |
| Préimage par $\phi$ de<br>$\Omega \cap p_1^{-1}(P/P)$   | $\emptyset$                          | $\widehat{D}^\circ^{-1}$ si $D^\circ$ est stable par $Q$<br>$\Omega_{D^\circ}^Q$ sinon |

## 8.6 Diviseurs stables par $B \times H$ dans un plongement de $G$

**8.6.1** — Soit  $X$  un plongement sans couleur et simple de  $G \times G/\Delta G$  dont l'orbite fermée  $Z$  est complète. Dans cette section, nous allons étudier les diviseurs stables par  $B \times H$  dans  $X$  ainsi que leurs intersections avec une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ .

Afin d'alléger les notations et quitte à considérer  $H^\circ$ , nous supposons à nouveau que  $H$  est connexe. Un diviseur stable par  $B \times H$  dans  $X$  est alors combinaison linéaire de diviseurs premiers stables par  $B \times H$ .

Soit  $D$  une couleur de  $G/H$ . Rappelons que  $\overline{D}^X$  est l'adhérence dans  $X$  de la préimage dans  $G$  de  $D$ . Dans cette section nous allons calculer l'intersection de  $\overline{D}^X$  avec les orbites de  $G \times G$  dans  $X$ . Pour cela, nous exhiberons un fibré en droites qui admet une section dont  $\overline{D}^X$  est le diviseur. Ensuite, nous calculerons la restriction de cette section à toute orbite de  $G \times G$  dans  $X$ . Commençons par quelques mises au point concernant les fibrés en droites sur  $X$ .

**8.6.2** — Considérons  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ . Soit  $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{L}, \tilde{C}$  et  $\tilde{I}$  comme dans le paragraphe 8.2.1 tels que  $\mathcal{O}$  soit isomorphe comme  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -espace homogène à  $\tilde{G} \times \tilde{G}/\tilde{I}$ . Le groupe  $\mathcal{X}(\tilde{I})$  s'identifie alors à  $\mathcal{X}(\tilde{L}) \times \mathcal{X}(\tilde{C})$  via le morphisme de restriction de  $\mathcal{X}(\tilde{I})$  sur  $\mathcal{X}(\Delta\tilde{L} \times (\{1\} \times \tilde{C}))$ .

Généralisant le point de vue de la section 4.5, nous considérons ici le morphisme de restriction  $\rho_{\mathcal{O}} : \text{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \longrightarrow \text{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\mathcal{O})$ . On a encore un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{O}}} & \text{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\mathcal{O}) \\ \downarrow & & \uparrow (\lambda, \mu) \mapsto \mathcal{L}_{(\lambda, \mu)} \\ \text{Pic}(X) & \xrightarrow{\bar{\rho}_{\mathcal{O}}} & \mathcal{X}(\tilde{I}) \simeq \mathcal{X}(\tilde{L}) \times \mathcal{X}(\tilde{C}). \end{array}$$

La proposition suivante s'intéresse au morphisme de restriction :

$$\bar{\rho}_{\mathcal{O}} : \text{Pic}(X) \longrightarrow \mathcal{X}(\tilde{L}) \times \mathcal{X}(\tilde{C}).$$

Rappelons que si  $\lambda$  est un caractère de  $\tilde{B}$ ,  $\mathcal{L}_{\lambda}$  désigne l'unique fibré en droites sur  $X$  tel que  $\bar{\rho}_Z = (\lambda, -\lambda)$  (voir la section 4.5).

**Proposition 8.6.1** *Soit  $\lambda$  un caractère de  $\tilde{B}$ . Avec les notations introduites ci-dessus, on a :*

$$\bar{\rho}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_\lambda) = (0, -\lambda|_{\tilde{C}})$$

où  $(0, -\lambda|_{\tilde{C}}) \in \mathcal{X}(\tilde{L}) \times \mathcal{X}(\tilde{C}) \simeq \mathcal{X}(\tilde{I})$ .

**Preuve :** Soit  $X_{Z, B \times B^-}$  l'ouvert affine stable par  $B \times B^-$  qui rencontre  $Z$ . D'après le corollaire 2.5.1, il existe une sous-variété fermée  $S$  de  $X_{Z, B \times B^-}$  stable par  $T \times T$  qui rencontre  $Z$  en un seul point  $z$  et telle que  $X_{Z, B \times B^-}$  est isomorphe comme  $B \times B^-$ -variété à  $U \times U^- \times S$ . La variété  $S$  est un plongement affine de  $T \times T/\Delta T$ , en particulier son groupe de Picard est trivial. Ainsi,

$$\mathcal{L}_{\lambda|_S} \simeq S \times k, \tag{8.1}$$

en tant que fibré en droites sur  $S$  sans linéarisation. De plus, la  $\tilde{T} \times \tilde{T}$ -linéarisation de  $\mathcal{L}_{\lambda|_S}$  obtenue par restriction de la  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -linéarisation de  $\mathcal{L}_\lambda$  est un caractère de  $\tilde{T} \times \tilde{T}$  : c'est celui donné par l'action de  $\tilde{T} \times \tilde{T}$  sur la fibre au-dessus de  $z$  dans  $\mathcal{L}_\lambda$ . Puisque  $z$  est le point de  $Z$  stabilisé par  $B^- \times B$  et  $\mathcal{L}_{\lambda|_Z} = \mathcal{L}_{(\lambda, -\lambda)}$ , le groupe  $\tilde{T} \times \tilde{T}$  agit sur  $(\mathcal{L}_\lambda)_z$  par  $(\lambda, -\lambda)$ .

D'après la proposition 4.4.1, il existe  $x$  dans  $S \cap \mathcal{O}$  fixé par  $\tilde{I}$ . Mais alors, d'après l'isomorphisme 8.1, le stabilisateur dans  $\tilde{T} \times \tilde{T}$  de  $x$  agit sur la fibre au-dessus de  $x$  comme sur celle au-dessus de  $z$  c'est-à-dire par  $(\lambda, -\lambda)$ . On en déduit que  $\Delta\tilde{L}$  agit trivialement sur cette fibre et que  $\tilde{C}$  agit par  $-\lambda|_{\tilde{C}}$ . La proposition est démontrée.  $\square$

**8.6.3** — Soit  $D$  dans  $\mathcal{D}(G/H)$ . Alors  $\overline{D}^X$  est un diviseur premier de  $X$ . Le but de cette sous-section est de trouver une « équation » (c'est-à-dire une section d'un fibré en droites) de  $\overline{D}^X$  dans  $X$  et de  $\overline{D}^X \cap \mathcal{O}$  dans  $\mathcal{O}$ .

Soit  $\tilde{D}$  la préimage de  $D$  dans  $\tilde{G}$ . Soit  $(\gamma_D, \chi_D)$  les caractères de l'équation de  $\tilde{D}$  dans  $\tilde{G}$  pour l'action de  $\tilde{B} \times \tilde{H}$ . Considérons  $\mathcal{L}_{\gamma_D}$  le fibré en droites  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -linéarisé associé à  $\gamma_D$  (voir la proposition 4.5.1 pour la notation). Comme  $\gamma_D$  est dominant,  $\mathcal{L}_{\gamma_D}$  est engendré par ses sections globales. En particulier, le morphisme de restriction de  $\Gamma(X, \mathcal{L}_{\gamma_D})$  vers  $\Gamma(Z, \rho_Z(\mathcal{L}_{\gamma_D}))$  est non nul. Or  $\Gamma(Z, \rho_Z(\mathcal{L}_{\gamma_D}))$  est isomorphe à  $V_{\gamma_D} \otimes V_{\gamma_D}^*$  comme  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -module. On en déduit que  $V_{\gamma_D} \otimes V_{\gamma_D}^*$  apparaît dans la décomposition en  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -modules

simples de  $\Gamma(X, \mathcal{L}_{\gamma_D})$ . Par ailleurs,  $\Gamma(X, \mathcal{L}_{\gamma_D})$  est un  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -module sans multiplicité. Il existe alors une injection  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -équivariante  $i$  de  $V_{\gamma_D} \otimes V_{\gamma_D}^*$  dans  $\Gamma(X, \mathcal{L}_{\gamma_D})$ , unique à un scalaire près.

Nous avons vu au cours de la démonstration de la proposition 3.2.1 qu'il existe dans  $V_{\gamma_D}^*$  une forme  $\nu$  de poids  $\chi_D$  pour l'action de  $H$ . Soit  $v$  un vecteur de plus haut poids pour  $B$  dans  $V_{\gamma_D}$ . Posons  $\sigma = i(v \otimes \nu)$ . On se propose de montrer le

**Lemme 8.6.1** *Avec les notations introduites ci-dessus, on a :*

$$\operatorname{div}(\sigma) = \overline{D}^X.$$

**Preuve :** Notons pour simplifier  $\mathcal{L}$  plutôt que  $\mathcal{L}_{\gamma_D}$ . Considérons

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L} & \\ & \downarrow & \uparrow \\ & \tilde{G} & \xrightarrow{\zeta} G \end{array}$$

(The diagram shows a vertical arrow from  $\mathcal{L}$  to  $\tilde{G}$  and a horizontal arrow from  $\tilde{G}$  to  $G$  labeled  $\zeta$ . A dashed vertical arrow points from  $\mathcal{L}$  to  $G$  and is labeled  $\sigma|_G$ .)

Comme  $\operatorname{Pic}(\tilde{G})$  est trivial,  $\Gamma(\tilde{G}, \zeta^*(\mathcal{L}|_G))$  est isomorphe comme  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -module à  $k[\tilde{G}]$ . Or  $\sigma \circ \zeta$  est une section propre pour  $\tilde{B} \times \tilde{H}$  de poids  $(\gamma_D, \chi_D)$  : c'est l'équation de  $\tilde{D}$ . Ainsi,

$$\operatorname{div}(\sigma|_G \circ \zeta) = \tilde{D}.$$

De plus, comme  $\tilde{B}$  contient le centre de  $\tilde{G}$  (et donc le noyau de  $\zeta$ ),  $\tilde{D}$  est irréductible. Mais alors, le lemme 2.8.1 montre que :

$$\zeta^*(\zeta(\tilde{D})) = \tilde{D}.$$

On en déduit que

$$\operatorname{div}(\sigma|_G) = \zeta(\tilde{D}).$$

Comme  $\rho_Z \circ i$  est un isomorphisme de  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -modules,  $\rho_Z(\sigma)$  est non identiquement nulle sur  $Z$ . En particulier, le support de  $\operatorname{div}(\sigma)$  ne contient pas de diviseurs stables par  $G \times G$  (rappelons que  $Z$  est l'unique orbite fermée de  $G \times G$  dans  $X$ ).

Comme tout diviseur qui n'est pas stable par  $G \times G$  rencontre  $G$ , on conclut que  $\text{div}(\sigma) = \overline{D}^X$ .  $\square$

On peut maintenant montrer la proposition

**Proposition 8.6.2** *On suppose ici que  $H$  est connexe. On se donne un plongement  $X$  de  $G \times G/\Delta G$  et une orbite sans couleur  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $X$ . On reprend les notations de la proposition 8.2.1 pour  $\mathcal{O}$ . Soit  $D$  une couleur de  $G/H$ . On définit  $\overline{D}^X$  comme ci-dessus.*

*Alors le diviseur de l'intersection  $\overline{D}^X \cap \mathcal{O}$  est la somme de  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(G/P, D)$  et de diviseurs de la forme  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}(E, G/H)$  avec  $E \in \mathcal{D}(G/P)$ .*

**Preuve :** Remarquons qu'il existe un cône saillant  $\mathcal{C}$  d'intérieur non vide tel que :  $\mathcal{C}$  est inclus dans  $\mathcal{CV}(G \times G/\Delta G)$ ,  $\mathcal{C}$  est d'intérieur non vide et  $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$  est une face de  $\mathcal{C}$ . Considérons  $X'$  le plongement de  $G$  associé à  $(\mathcal{C}, \emptyset)$  par le théorème 1. Alors, d'après la proposition 2.2.1,  $X_{\mathcal{O}}$  s'injecte dans  $X'$ . De plus,  $X'$  a une orbite fermée projective. Ainsi, quitte à remplacer  $X$  par  $X'$ , on peut supposer que  $X$  a une orbite projective  $Z$ .

Reprenons alors les notations de la section 8.6. La section  $\rho_{\mathcal{O}}(\sigma)$  de  $\mathcal{L}_{(0, \gamma_D)}$  sur  $\mathcal{O}$  est d'après le lemme 8.6.1 une équation de  $\overline{D}^X \cap \mathcal{O}$ . En particulier, le caractère dans  $\mathcal{X}(\tilde{B}) \times \mathcal{X}(\tilde{H}) \times \mathcal{X}(\tilde{I})$  de l'équation de la préimage de  $\overline{D}^X \cap \mathcal{O}$  dans  $\tilde{G} \times \tilde{G}$  est :

$$(\gamma_D, \chi_D, 0).$$

En écrivant :

$$(\gamma_D, \chi_D, 0) = (\gamma_D - \gamma_D^P, \chi_D, \gamma_D^P) + (\gamma_D^P, 0, -\gamma_D^P),$$

on obtient la proposition.  $\square$

# Chapitre 9

## Retour sur le quotient d'un plongement de $G$ par $H$

### 9.1 Introduction

Fort de la proposition 8.6.2, nous revenons à la situation de la proposition 7.4.1. Reprenons donc les notations de la section 7 :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} \otimes \chi & \longrightarrow & \mathcal{L}_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) & \xrightarrow{\pi} & X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) // H =: Y \end{array}$$

On suppose que  $Y$  contient  $G/H$  (voir le corollaire 7.2.1).

### 9.2 Sur la préimage par $\pi$ d'ouverts de $Y$

Soit  $\Omega$  une orbite de  $G$  dans  $Y$ . On considère  $\mathcal{O}(\Omega)$  l'orbite de  $G \times G$  donnée par la proposition 7.3.2. Fixons  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  sans couleur dans  $X_{\mathcal{O}(\Omega)}$ . On s'intéresse dans cette section à l'intersection de  $\pi^{-1}(Y_\Omega)$  et de  $\mathcal{O}$ .

On reprend les notations de la proposition 8.2.1 pour l'orbite  $\mathcal{O}$ . Comme  $\pi^{-1}(Y_\Omega)$  est stable par  $G \times \{1\}$ , pour connaître  $\pi^{-1}(Y_\Omega) \cap \mathcal{O}$ , il suffit de

connaître son intersection avec  $p_1^{-1}(P/P)$ . La proposition suivante donne une description de cet ensemble.

**Proposition 9.2.1** *Si  $D$  est dans  $\mathcal{D}(G/H)$ , comme dans la section 8.4.4, on note  $\Omega_D^Q$  la réunion des orbites de  $Q$  incluses dans  $D$ .*

*Avec les notations de la proposition 8.2.1 appliquées à l'orbite  $\mathcal{O}$ , on a :*

$$(\phi^{-1}(\pi^{-1}(Y_\Omega) \cap p_1^{-1}(P/P)))^{-1} / H = G/H - \bigcup_{D \notin \mathcal{D}(Y, \Omega)} \Omega_D^Q.$$

**Preuve :** Comme  $\mathcal{O}$  est incluse dans  $X_{\mathcal{O}(\Omega)}$ , la proposition 7.4.1 montre que :

$$\mathcal{O} \cap \pi^{-1}(Y_\Omega) = \mathcal{O} - \bigcup_{D \notin \mathcal{D}(Y, \Omega)} \Omega_{\overline{D}^X} \cap \mathcal{O},$$

où  $\Omega_{\overline{D}^X}$  est la réunion des orbites de  $G \times \{1\}$  incluses dans  $\overline{D}^X$ .

Considérons l'application  $\eta : G/H^\circ \rightarrow G/H$  induit par l'inclusion de  $H^\circ$  dans  $H$ . Soit  $D \in \mathcal{D}(G/H)$ . Considérons  $\tilde{D}$  la préimage de  $D$  dans  $\tilde{G}$  par  $\zeta \circ q$ . Posons, avec les notations de la proposition 8.2.1 :

$$\hat{D} = \mathcal{B}\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(1, D).$$

Le lemme 2.8.2 montre que  $\eta^{-1}(D)$  est soit une couleur de  $G/H^\circ$ , soit la réunion de deux couleurs de  $G/H^\circ$ . La proposition 8.6.2 montre alors que  $\overline{D}^X \cap \mathcal{O}$  est la réunion de  $\hat{D}$  et de certaines fibres de  $p_1$ . En particulier, une orbite de  $G \times \{1\}$  est incluse dans  $\overline{D}^X \cap \mathcal{O}$  si et seulement si elle est incluse dans  $\hat{D}$ . Mais alors, la proposition découle de la description donnée dans la section 8.5 de  $\Omega_{\hat{D}} \cap p_1^{-1}(P/P)$ .  $\square$

Cette proposition dont l'énoncé est un peu lourd se simplifie dans le cas intéressant où  $\Omega$  et  $\mathcal{O}(\Omega)$  sont sans couleur :

**Corollaire 9.2.1** *On suppose ici que  $\Omega$  et  $\mathcal{O}(\Omega)$  sont sans couleur. Alors, l'intersection  $\pi^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega)$  est l'orbite ouverte de  $G \times H$  dans  $\mathcal{O}(\Omega)$ .*

**Preuve :** D'après la proposition 7.3.2, l'orbite  $\Omega$  est incluse dans l'image de  $\pi$ . Alors, la proposition précédente montre que l'ensemble des orbites de  $G \times H$  dans  $\pi^{-1}(Y_\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega)$  est en bijection avec celui des orbites de  $Q$  dans :

$$G/H - \bigcup_{D \in \mathcal{D}(G/H)} \Omega_D^Q.$$

Or  $G/H - QH/H \subseteq G/H - BH/H = \cup_{D \in \mathcal{D}(G/H)} D$ . Le corollaire suit alors facilement.  $\square$

### 9.3 Stabilité et plongements sans couleurs

Dans un cas particulier, la proposition 9.3.1 ci-dessous donne un critère en termes de polyèdres moments sur  $X$  et  $G/H$  pour que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi) = X^{\text{s}}(\mathcal{L} \otimes \chi)$ .

Commençons par donner quelques définitions. Soit  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $\mathbf{P}$  un polyèdre de  $\mathcal{E}$ . On appellera *dimension de  $\mathbf{P}$* , et on notera  $\dim(\mathbf{P})$  la dimension de l'espace affine engendré par  $\mathbf{P}$ . Si  $\mathbf{Q}$  est un deuxième polyèdre, on dira que l'intersection de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  est *transverse* si et seulement si :

$$\dim(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) = \dim(\mathcal{E}) - \dim(\mathbf{P}) - \dim(\mathbf{Q}).$$

**Proposition 9.3.1** *On se place dans la situation de la section 9.1 et on se donne une orbite  $\Omega$  de  $G$  dans  $Y$ . On suppose alors que  $\Omega$  et  $\mathcal{O}(\Omega)$  (voir la proposition 7.3.2) sont sans couleur.*

*Alors, avec les notations de la proposition 2.6.2, on a :  $\pi^{-1}(\Omega)$  est inclus dans  $X^{\text{s}}(\mathcal{L})$  si et seulement si l'intersection de  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L})$  et de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  est transverse.*

*De plus, dans ce cas,  $\pi^{-1}(Y_\Omega)$  rencontre chaque orbite de  $G \times G$  dans  $X_{\mathcal{O}(\Omega)}$  en exactement une orbite de  $G \times H$ .*

**Preuve :** Remarquons que la proposition 2.6.1 implique que le rang de  $\Omega$  (resp.  $\mathcal{O}(\Omega)$ ) est la dimension de l'espace affine engendré par  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y)$  (resp.  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L})$ ). Il est alors aisé de voir que la condition de transversalité de l'énoncé est équivalente à :

$$\text{rg}(G/H) - \text{rg}(\Omega) = \text{rg}(G) - \text{rg}(\mathcal{O}(\Omega)).$$

D'après le lemme 2.5.1, ceci est encore équivalent à :

$$\dim(G/H) - \dim(\Omega) = \dim(G) - \dim(\mathcal{O}(\Omega)). \quad (9.1)$$

Par ailleurs, la proposition 7.3.2 montre que :

$$\overline{\pi(\mathcal{O}(\Omega) \cap X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi))} = \overline{\Omega}.$$

On en déduit que génériquement les fibres de  $\pi$  au-dessus de  $\overline{\Omega}$  ont pour dimension

$$\dim(\mathcal{O}(\Omega)) - \dim(\Omega).$$

En particulier, la fibre au-dessus de tout point  $y$  de  $\Omega$  a cette dimension. Mais alors, la condition 9.1 est équivalente à :

$$\dim(\pi^{-1}(y)) = \dim(H).$$

En particulier, ceci montre avec la proposition 5.2.2 que si  $\pi^{-1}(y)$  est inclus dans  $X^s(\mathcal{L})$  alors la condition de transversalité est remplie.

Pour montrer la réciproque, supposons que l'intersection de  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L})$  et de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  est transverse c'est-à-dire que  $\dim(\pi^{-1}(y)) = \dim(H)$ . La proposition 7.3.1 implique alors que la fibre  $\pi^{-1}(y)$  est incluse dans  $\mathcal{O}(\Omega)$ .

Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $H$ . On considère  $P_{G/H}$  le stabilisateur dans  $G$  de  $BH/H$ . On se donne alors un sous-groupe de Levi,  $L_{G/H}$  de  $P_{G/H}$  adapté à  $G/H$  (voir la proposition 2.5.2). Soit  $T_{G/H}$  un tore maximal de  $L_{G/H}$  inclus dans  $B$ .

D'après la proposition 4.4.1, on peut trouver un point  $x$  de  $\mathcal{O}(\Omega)$  dont l'isotropie dans  $G \times G$  est :

$$I = (P^u \times Q^u) \times (\Delta L \times (\{1\} \times C)),$$

- où  $Q$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$ ,
- $P$  est l'unique sous-groupe parabolique de  $G$  opposé à  $Q$   
et contenant  $T_{G/H}$ ,
- $L$  est le Levi commun à  $P$  et  $Q$ , et
- $C$  est un sous-groupe du centre connexe de  $L$ .

Montrons que  $P_{G/H} \subseteq Q$ .

Soit  $\alpha$  une racine simple de  $(B, T_{G/H})$  telle que  $P_\alpha \subseteq P_{G/H}$ . Alors, le sous-groupe parabolique minimal  $P_\alpha$  associé à  $\alpha$  stabilise chaque couleur de  $G/H$ . Ainsi les poids pour  $B$  des équations de ces couleurs appartiennent à l'orthogonal,  $\alpha^{\vee\perp}$  de la coracine  $\alpha^\vee$ . Le lemme 3.3.2 montre alors que  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  est inclus dans  $\alpha^{\vee\perp}$ . Mais alors,  $\mathbf{P}(\mathcal{O}(\Omega), \mathcal{L}) \cap \alpha^{\vee\perp}$  contient  $\mathbf{P}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}_Y)$  et le lemme 4.4.1 montre que  $P_\alpha$  est inclus dans  $Q$ . Finalement,  $P_{G/H}$  est inclus dans  $Q$ .

On se propose de déduire de cette inclusion l'

**Assertion 1** : L'isotropie générique de  $\{1\} \times H$  dans  $\mathcal{O}(\Omega)$  est finie.

Comme  $(G \times H).I/I$  est ouvert dans  $\mathcal{O}(\Omega)$ , l'isotropie générique de l'action de  $\{1\} \times H$  dans  $\mathcal{O}(\Omega)$  est  $I \cap (\{1\} \times H)$  qui est isomorphe à  $H \cap Q^u C$ . Or

$Q^u$  est inclus dans  $P_{G/H}^u$  et  $C$  est inclus dans  $L_{G/H}$ . Mais alors, la proposition 2.5.2 implique que :

$$H \cap Q^u C = H \cap C.$$

D'après la proposition 2.6.1, la direction de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  est  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}^{B \cap H}$  et celle de  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{L})$  est  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}^{B \cap C}$ . Ainsi, l'hypothèse montre que  $\mathcal{X}(T_{G/H})^{T_{G/H} \cap H} \cap \mathcal{X}(T_{G/H})^C$  est finie; ce qui implique que  $H \cap C$  est fini. Ceci termine la démonstration de l'Assertion 1.

Soit  $U$  un ouvert affine inclus dans  $\Omega$  (par exemple l'orbite ouverte d'un sous-groupe de Borel de  $G$  dans  $\Omega$ ). Alors, la restriction de  $\pi$  à  $\pi^{-1}(U)$  est, d'après la proposition 5.2.1 le quotient de la variété affine  $\pi^{-1}(U)$  par  $\{1\} \times H$ .

De plus, d'après le corollaire 9.2.1,  $\pi^{-1}(U)$  est inclus dans l'orbite ouverte de  $G \times H$  dans  $\mathcal{O}(\Omega)$ . En particulier, ceci montre que  $\pi^{-1}(U)$  est lisse. Mais alors, l'Assertion 1, le fait que  $\dim(\mathcal{O}(\Omega)) - \dim(\Omega) = \dim(H)$  et le lemme 5.1.1 montrent que, génériquement, les fibres de  $\pi$  au-dessus de  $U$  contiennent une unique orbite ouverte et dense de  $H$ . Le fait que  $\pi^{-1}(U)$  soit inclus dans l'orbite ouverte de  $G \times H$  dans  $\mathcal{O}(\Omega)$  implique alors qu'au-dessus de  $U$ , les fibres de  $\pi$  soient des orbites de  $H$ . La proposition est démontrée.  $\square$

## 9.4 Quelques exemples

### 9.4.1 Introduction

Fixons  $\mathcal{L}$  un fibré en droites  $G \times H$ -linéarisé sur  $X$ . On considère alors  $\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \rightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$ . Dans cette sous-section, nous appliquons les résultats que nous avons obtenu afin de déterminer sur des exemples si :

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = X^{\text{s}}(\mathcal{L}).$$

Nous noterons  $X^{\text{sss}}(\mathcal{L})$  le complémentaire de  $X^{\text{s}}(\mathcal{L})$  dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$ . Nous commençons par le lemme suivant :

**Lemme 9.4.1** *Si  $H$  est réductif, se valent :*

- (i)  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = X^{\text{s}}(\mathcal{L})$
- (ii) *pour toute orbite fermée  $Z$  de  $G$  dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$ , l'ensemble  $\pi^{-1}(Z)$  est réduit à une orbite de  $G \times H$  dans  $X$ .*

**Preuve :** L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) est triviale. Réciproquement, soit  $Z$  une orbite fermée de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  telle que  $\pi^{-1}(Z)$  est une orbite de  $G \times H$  dans  $X$ . Alors, les orbites de  $\{1\} \times H$  dans  $\pi^{-1}(Z)$  sont toutes de même dimension. Or, chaque fibre de  $\pi$  contient une unique orbite fermée de  $\{1\} \times H$ . Donc, les fibres au-dessus des points de  $Z$  sont des orbites de  $\{1\} \times H$  et  $\pi^{-1}(Z)$  est inclus dans  $X^{\text{s}}(\mathcal{L})$ .

De plus,  $\pi(X^{\text{s}}(\mathcal{L}))$  est un ouvert stable par  $G$  dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$ . Or, si (ii) est vérifié, l'argument ci-dessus montre que  $\pi(X^{\text{s}}(\mathcal{L}))$  rencontre toutes les orbites fermées de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$ . Ainsi, (ii)  $\Rightarrow$  (i) est démontrée.  $\square$

### 9.4.2 $\text{SP}(4)/k^* \times \text{SL}(2)$

Considérons  $G = \text{SP}(4)$  et  $H = k^* \times \text{SL}(2)$  le sous-groupe sphérique de  $G$  étudié dans l'appendice A.

Soit  $X$  le plongement canonique de  $\text{SP}(4)$ . Reprenons les notations de l'appendice A. Soit  $\mathcal{O}_0$  l'orbite de  $G \times G$  de codimension 1 dans  $X$  qui se fibre sur  $G/P_\alpha$ . Soit  $\mathcal{L}$  le fibré en droites ample sur  $X$  noté  $\mathcal{L}_{2\omega_\alpha+5\omega_\beta}$  dans la proposition 4.5.1. Considérons  $\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi_0) \rightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi_0)//H$ .

Sur la figure 7.1, nous avons déjà dessiné les polytopes  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ ,  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_{\chi_0})$ ,  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L} \otimes \chi_0)^H$ . L'éventail de  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi_0)//H$  est dessiné sur la figure 7.2. De plus,  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_0}, \mathcal{L})$  est la face verticale de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$ .

Remarquons que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi_0)//H$  contient deux orbites fermées de  $G$ , une sans couleur que l'on note  $Z_1$  et une autre que l'on note  $Z_2$ . Le corollaire 9.2.1 appliqué à  $Z_1$  montre que  $\pi^{-1}(Z_1)$  est l'orbite ouverte de  $G \times H$  dans l'orbite fermée de  $G \times G$  dans  $X$ .

La proposition 7.3.2 montre que  $\mathcal{O}(Z_2) = \mathcal{O}$ . De plus, la proposition 7.4.1 donne :

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(Y_{Z_2}) &= X_{\mathcal{O}} \cap \pi^{-1}(Y_{Z_2}) \\ &= G \cup (\mathcal{O} \cap \pi^{-1}(Y_{Z_2})). \end{aligned}$$

On applique alors la proposition 9.2.1 : l'ensemble des orbites de  $G \times H$  dans  $\mathcal{O} \cap \pi^{-1}(Y_{Z_2})$  est en bijection avec celui des orbites de  $P_\alpha \times H$  dans

$$G/H - (\Omega_D^{P_\alpha} \cup \Omega_D^{P_\alpha^-}).$$

On vérifie alors sur le graphe d'incidence 11.7 des orbites de  $B$  dans  $G/H$  que cet ensemble contient 2 orbites de  $P_\alpha \times H$ . Ainsi,  $Y_{Z_2}$  contient 3 orbites de  $G$  et  $\pi^{-1}(Y_{Z_2})$  en contient 3 de  $G \times H$ . On en déduit que  $\pi^{-1}(Z_2)$  est

réduit à une orbite de  $G \times H$  puis avec le lemme 9.4.1 que :

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L} \otimes \chi_0) = X^{\text{s}}(\mathcal{L} \otimes \chi_0).$$

**9.4.2.1** — On s'intéresse maintenant à  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$ . Nous avons représenté son éventail sur la figure 7.3. On note  $Z_2$  l'orbite fermée de  $G$  dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  ayant deux couleurs.

L'ensemble des orbites de  $G \times H$  dans  $\pi^{-1}(Z_2)$  est cette fois en bijection avec celui des orbites de  $P_\alpha \times H$  dans :

$$(G/H - P_\alpha H/H) - \Omega_D^{P_\alpha}.$$

Avec le diagramme 11.7, on voit alors que  $\pi^{-1}(Z_2)$  contient deux orbites de  $G \times H$ . Ainsi,

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \neq X^{\text{s}}(\mathcal{L}).$$



# Chapitre 10

## Une construction de « bons quotients »

### 10.1 Introduction

Soit  $G$  un groupe algébrique semi-simple et  $H$  un sous-groupe sphérique sobre de  $G$ . Dans cette section, on part d'un plongement projectif  $Y$  de  $G/H$ , et on essaie de le réaliser comme quotient d'un plongement  $X$  de  $G \times G/\Delta G$ . A la différence du théorème 4, on veut que tout point semi-stable de  $X$  soit stable. En d'autres termes, on veut que les fibres du morphisme quotient soient des orbites de  $\{1\} \times H$ . Par ailleurs, afin d'utiliser la proposition 9.3.1, nous supposons que  $Y$  est sans couleur (voir aussi l'exemple 7.5.2).

Nous commençons cette section en regardant quelques exemples. Nous montrerons aussi quelques résultats utiles sur le cône des valuations de  $G/H$ . Nous réalisons ensuite le plongement canonique de  $G/H$  comme quotient de celui de  $G \times G/\Delta G$ . Ensuite, nous généralisons cette construction à tout plongement projectif et sans couleur de  $G/H$ .

### 10.2 Exemples

#### 10.2.1 Introduction

Nous commençons cette section en l'idée de départ qui nous permettra de démontrer le théorème 6. Nous donnerons des exemples qui montrent les difficultés que l'on peut rencontrer.

Soit  $G/H$  un espace homogène sphérique sobre et relevable. Considérons alors les plongements canoniques  $Y$  de  $G/H$  et  $X$  de  $G \times G/\Delta G$ . Nous voulons exhiber un fibré en droites  $G \times H$ -linéarisé et ample sur  $X$  tel que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = X^s(\mathcal{L})$  et  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H = Y$ .

Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $H$  et  $T$  un tore maximal de  $B$ . Nous commençons, à l'instar de la démonstration du théorème 4 par choisir un fibré en droites  $\mathcal{M}$  ample et  $G$ -linéarisé sur  $Y$ . Soit  $\chi$  le caractère de  $H$  tel que la restriction de  $\mathcal{M}$  à  $G/H$  soit  $\mathcal{L}_\chi$  avec les notations du lemme 3.3.1. La restriction à l'orbite fermée  $Z$  de  $G$  dans  $Y$  donne un caractère  $\gamma_0$  de  $B$ . En fait,  $\gamma_0$  est le sommet de  $\mathbf{P}(Y, \mathcal{M})$  correspondant à  $Z$ .

Le premier candidat pour  $\mathcal{L}$  est le fibré  $\mathcal{L}_{\gamma_0} \otimes \chi$  avec les notations de la section 4.5. Regardons un premier exemple.

### 10.2.2 $\text{SL}(3)/\text{GL}(2)$

Revenons en effet à l'exemple 6.2.2. Choisissons un fibré en droites ample  $\mathcal{M}$  sur  $Y$  tel que le polytope  $\mathbf{P}(Y, \mathcal{M})$  soit comme sur la figure 10.1. Alors, le polytope  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L}_{\gamma_0})$  est aussi représenté sur la figure 10.1.

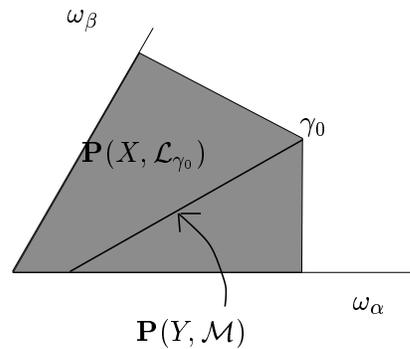


FIG. 10.1 – Les polytopes  $\mathbf{P}(Y, \mathcal{M})$  et  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L}_{\gamma_0})$

Alors, nous avons bien  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_{\gamma_0} \otimes \chi)//H = Y$ . Mais, comme nous l'avons déjà remarqué dans le paragraphe 6.2.2, nous n'avons pas  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_{\gamma_0} \otimes \chi) = X^s(\mathcal{L}_{\gamma_0} \otimes \chi)$ . En revanche, la proposition 9.3.1 montre que si on remplace le caractère  $\gamma_0$  par un caractère  $\gamma$  suffisamment proche, on a bien  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\gamma \otimes \chi) = X^s(\mathcal{L}_\gamma \otimes \chi)$  et  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\gamma \otimes \chi)//H = Y$ .

La démonstration du théorème 6 est basée sur cet exemple ; nous exhiberons un caractère rationnel  $\gamma$  dans  $\mathcal{X}(B)_\mathbb{Q}$  proche de  $\gamma_0$  et vérifiant :

$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\gamma \otimes \chi) // H = Y$  et  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\gamma \otimes \chi) = X^s(\mathcal{L}_\gamma \otimes \chi)$ . Cependant tout n'est pas toujours aussi simple que dans le cas  $\text{SL}(3)/\text{GL}(2)$ . Donnons deux exemples qui illustrent deux types de difficultés qui surviennent dans le choix de  $\gamma$ .

### 10.2.3 $\text{SL}(4)/\text{SP}(4)$

**10.2.3.1** — Soit  $G = \text{SL}(4)$  et  $V$  le  $G$ -module standard. On considère sur  $V$  la forme bilinéaire antisymétrique  $\omega$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $H \simeq \text{SP}(4)$  le sous-groupe de  $G$  qui stabilise  $w$ .

Considérons le sous groupe de Borel  $B$  de  $G$  constitué des matrices triangulaires supérieures et le tore maximal  $T$  formé des matrices diagonales. Les poids fondamentaux  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  de  $(B, T)$  sont les caractères de  $T$  définis par les formules :

$$\begin{aligned} \omega_1(\text{diag}(t_1, \dots, t_4)) &= t_1, \\ \omega_2(\text{diag}(t_1, \dots, t_4)) &= t_1 t_2, \text{ et} \\ \omega_3(\text{diag}(t_1, \dots, t_4)) &= t_1 t_2 t_3. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on montre aisément que :

$$B \cap H = \left\{ \left( \begin{array}{cc|cc} t & a & & 0 \\ 0 & t^{-1} & & \\ \hline & & u & b \\ 0 & & 0 & u^{-1} \end{array} \right) : u, t \in k^* \text{ et } a, b \in k \right\}.$$

Alors,  $BH$  est dense dans  $G$ . En d'autres termes,  $G/H$  est un espace homogène sphérique et  $B$  est opposé à  $H$ . En fait,  $H$  est même un sous-groupe symétrique de  $G$ . De plus, on a :

$$\mathcal{X}(B)^{B \cap H} = \mathbb{Z}\omega_2.$$

**10.2.3.2** — Reprenons les notations de l'introduction 10.2.1 pour notre exemple. Ici, quel que soit le fibré  $\mathcal{M}$ , le caractère  $\gamma_0$  est un multiple de  $\omega_2$  ; en particulier, le fibré en droites  $\mathcal{L}_{\gamma_0}$  sur  $X$  n'est pas ample. Ainsi, la condition  $\mathcal{L}_\gamma$  est ample n'est pas automatique au voisinage de  $\gamma_0$ . Le rôle du lemme 10.3.1 ci-dessous est de tenir compte de ce phénomène.

### 10.2.4 Les couples de droites non coplanaires de $\mathbb{P}^3$

**10.2.4.1** — Rappels et notations sur  $\mathrm{SL}(4)$ .

Dans cette section,  $G$  désigne le groupe  $\mathrm{SL}(4)$ . Alors  $G$  agit transitivement sur les couples de droites non coplanaires de  $\mathbb{P}^3$ . Nous allons étudier ce  $G$ -espace homogène. Commençons par fixer quelques notations à propos de  $G$ .

Dans la suite de cette section  $B$  désigne le sous-groupe de Borel de  $G$  constitué des matrices triangulaires supérieures ;  $T$  l'ensemble des matrices diagonales de  $G$ . Pour  $i = 1, \dots, 4$ , notons  $\varepsilon_i$  le caractère de  $T$  défini par  $\varepsilon_i(\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_4)) = t_i$ . Alors, les racines simples associées à  $(B, T)$  sont :

$$\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \quad \alpha_3 := \varepsilon_3 - \varepsilon_4.$$

Si on note  $\omega_i$  le poids fondamental associé à  $\alpha_i$ , on a :

$$\omega_1 = \varepsilon_1 \quad \omega_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \omega_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Soit  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique du  $G$ -module standard  $V$ . Considérons  $[e_1] \subset [e_1 \wedge e_2] \subset [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3]$  le drapeau canonique de  $\mathbb{P}^3$ . Alors,  $B$  est le stabilisateur dans  $G$  de ce drapeau. De plus, les paraboliens minimaux de  $G$  contenant  $B$  sont :

$$\begin{aligned} P_{\alpha_1} &= \mathrm{Stab}_G([e_1 \wedge e_2] \subset [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3]), \\ P_{\alpha_2} &= \mathrm{Stab}_G([e_1] \subset [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3]), \\ P_{\alpha_3} &= \mathrm{Stab}_G([e_1] \subset [e_1 \wedge e_2]). \end{aligned}$$

**10.2.4.2** — Montrons que l'espace homogène des couples de droites non coplanaires de  $\mathbb{P}^3$  est symétrique.

Fixons

$$d_+ := [e_1 + e_4 \wedge e_1 + e_3] \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \quad d_- := [e_1 - e_4 \wedge e_1 - e_3] \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 V).$$

Soit  $H$  le stabilisateur dans  $G$  du couple  $(d_+, d_-)$ . Alors,  $H$  est conjugué dans  $G$  au centralisateur de la matrice  $\mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$ . Ainsi  $G/H$  est un espace homogène symétrique.

**10.2.4.3** — Calculons une « base » du groupe  $\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H)$ .

On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} B \cap H &= \{\mathrm{diag}(t, u, u, t) \in G : t, u \in k^*\} \\ &= \{\mathrm{diag}(t, \varepsilon t^{-1}, \varepsilon t^{-1}, t) \in G : t \in k^* \text{ et } \varepsilon = \pm 1\}. \end{aligned}$$

Vu les dimensions, on en déduit que  $B$  est opposé à  $H$ .

Soit  $\chi_{\pm}$  le caractère de  $H$  qui à tout élément  $h$  de  $H$  associe le déterminant de la restriction de  $h$  au plan  $d_{\pm}$  de  $V$ . Alors,  $\chi_{-} = -\chi_{+}$ . Il est aisé de voir que  $\chi_{+}$  engendre  $\mathcal{X}(H)$ . De plus, pour tout  $t \in k^*$  et  $\varepsilon = \pm 1$ , on a  $\chi_{+}(\text{diag}(t, \varepsilon t^{-1}, \varepsilon t^{-1}, t)) = \varepsilon$ .

Soit  $\gamma$  et  $\chi$  des caractères de  $B$  et  $H$  respectivement. On écrit  $\gamma = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3$  et  $\chi = m\chi_{+}$  où  $n_1, n_2, n_3$  et  $m$  sont des entiers. On déduit aisément de ce qui précède que :

$$(\gamma, \chi) \in \mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H) \iff n_1 = n_3 \text{ et } n_2 \equiv m \pmod{2}.$$

Mais alors, on a :

$$\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H) = \mathbb{Z}(\omega_1 + \omega_3, 0) \oplus \mathbb{Z}(\omega_2, \chi_{+}) \oplus \mathbb{Z}(\omega_2, \chi_{-}).$$

**10.2.4.4** — Déterminons les couleurs de l'espace homogène sphérique  $G/H$  pour le sous-groupe de Borel opposé  $B$ .

Les orbites de  $B$  dans  $G/H$  sont décrites par les positions relatives d'un drapeau de  $\mathbb{P}^3$  et du couple  $(d_{+}, d_{-})$ . En particulier, sur la figure 10.2 est dessiné un représentant de l'orbite ouverte de  $B$  dans  $G/H$ .

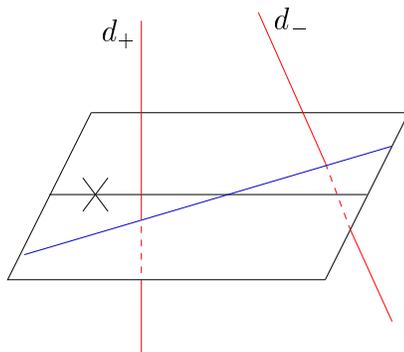
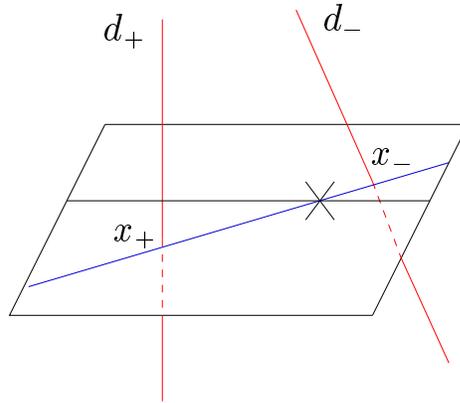


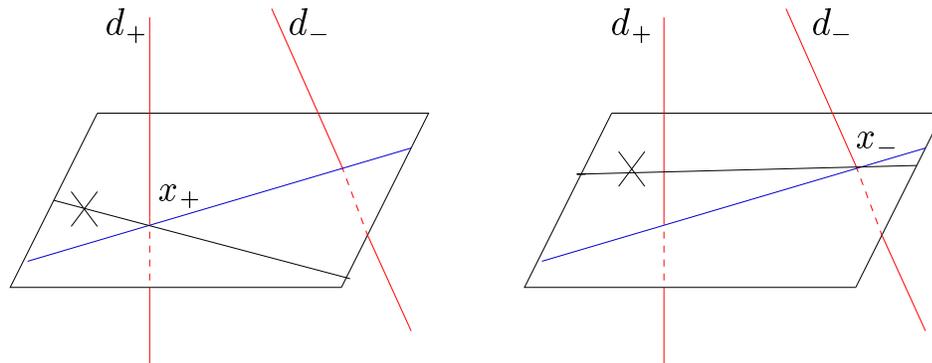
FIG. 10.2 – Un point de  $G/H$  et un de  $G/B$  en position générique

Pour chaque couple de  $G/B \times G/H$ , l'intersection de  $d_{\pm}$  avec le plan du drapeau est un point particulier que l'on note  $x_{\pm}$ . Lorsque le point du drapeau bouge sur la droite ou lorsque le plan du drapeau tourne autour de la droite, partant de la situation générique de la figure 10.2, on peut aligner les trois points  $x_{-}$ ,  $x_{+}$  et le point du drapeau comme sur la figure 10.3. Notons  $D^{\circ}$  l'orbite de  $B$  dans  $G/H$  dont un représentant est la figure 10.3.

FIG. 10.3 – Un représentant de  $D^\circ$ 

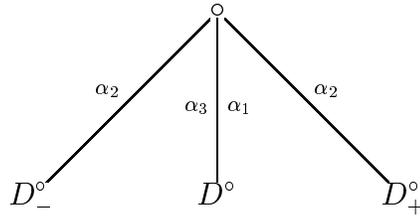
Vu la description des sous-groupes  $P_{\alpha_i}$  donnée dans le paragraphe précédent, on a montré que  $P_{\alpha_1}D^\circ$  est égal à  $P_{\alpha_3}D^\circ$  et contient  $BH/H$ .

Lorsque la droite du drapeau bouge et le point et le plan restent fixes, partant de la situation de la figure 10.2, les points  $x_+$  ou  $x_-$  peuvent atterrir sur la droite du drapeau comme sur la figure 10.4. Notons  $D_+^\circ$  et  $D_-^\circ$  les orbites de  $B$  dans  $G/H$  correspondantes à ces deux situations.

FIG. 10.4 – Des représentants de  $D_+^\circ$  et  $D_-^\circ$ 

Alors, l'action des paraboliques minimaux sur l'orbite ouverte de  $B$  dans  $G/H$  se résume dans le graphe ci-dessous :

**10.2.4.5** — Dans ce paragraphe, nous allons calculer les équations des couleurs de  $G/H$ .

FIG. 10.5 –  $\Gamma(G/H)$  en codimension 1.

Notons  $D$  (resp.  $D_{\pm}$ ) l'adhérence de  $D^{\circ}$  (resp.  $D_{\pm}^{\circ}$ ) dans  $G/H$ . Nous avons montré dans le paragraphe précédent que :

$$\mathcal{D}(G/H) = \{D, D_-, D_+\}.$$

Le normalisateur de  $H$  agit sur  $G/H$  en permutant  $d_+$  et  $d_-$  ; ainsi, il agit sur  $\mathcal{D}(G/H)$  en fixant  $D$  et permutant  $D_-$  et  $D_+$ . On en déduit que  $\chi_D = 0$  et  $\chi_{D_-} = -\chi_{D_+}$ , avec les notations du paragraphe 3.2.1.2.

Par ailleurs, l'action des paraboliques minimaux donnée par la figure 10.5 impose :  $\gamma_{D_{\pm}} \in \mathbb{N}\omega_2$  et  $\gamma_D \in \mathbb{N}\omega_1 + \mathbb{N}\omega_3$ .

Toutes ces contraintes et le fait que les équations des couleurs de  $G/H$  forment une base de  $\mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H)$  imposent que :

$$(\gamma_D, \chi_D) = (\omega_1 + \omega_3, 0) \quad \text{et} \quad (\gamma_{D_{\pm}}, \chi_{D_{\pm}}) = (\omega_2, \pm\chi_+).$$

#### 10.2.4.6 — Polyèdres moments sur $G/H$ .

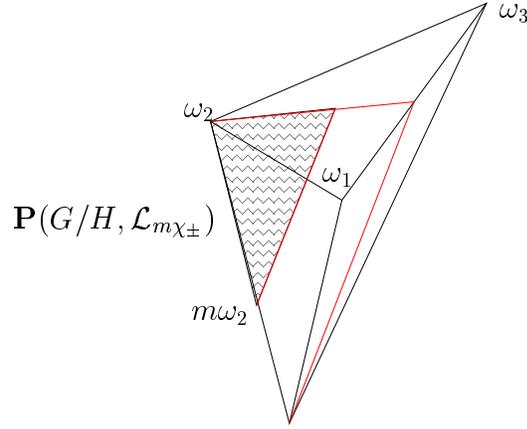
Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Utilisant le lemme 3.3.2, on montre que :

$$\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_{m\chi_{\pm}}) = \{(m + 2a)\omega_2 + b(\omega_1 + \omega_3) : a, b \geq 0\}.$$

Sur la figure 10.6, sont représentés l'ensemble des poids dominants  $P^+$  de  $(B, T)$  et le polyèdre  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_{m\chi_{\pm}})$ .

**10.2.4.7** — Reprenons les notations de l'introduction 10.2.1 pour notre exemple. En particulier, on fixe  $\mathcal{M}$  un fibré en droites ample et  $G$ -linéarisé sur  $Y$ . Alors, le caractère  $\gamma_0$  est un point dans l'intérieur relatif de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_{\chi})$ . On montre alors aisément que :

$$\mathbf{P}(Y, \mathcal{M}) = \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_{\chi}) \cap \mathbf{P}(X, \mathcal{L}_{\gamma_0}).$$

FIG. 10.6 – Le polyèdre  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_{m\chi_{\pm}})$ .

Ainsi,  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_{\gamma_0} \otimes \chi)//H = Y$ .

En revanche, on peut trouver  $\gamma$  aussi proche que l'on veut de  $\gamma_0$  pour lequel  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_{\chi}) \cap \mathbf{P}(X, \mathcal{L}_{\gamma})$  soit un pentagone. Dans ce cas, la variété quotient  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_{\gamma} \otimes \chi)//H$  n'est pas isomorphe à  $Y$ .

Nous verrons dans la démonstration du théorème 6 qu'il est toujours possible de trouver  $\gamma$  proche de  $\gamma_0$  tel que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_{\gamma} \otimes \chi)//H$  soit isomorphe à  $Y$ . Comme le montre notre exemple, il faut pour cela bien choisir  $\gamma$ . Le lemme 10.3.2 est la partie clef de ce choix.

### 10.3 Sur le cône des valuations de $G/H$

Revenons à la situation générale. Ainsi,  $G$  désigne un groupe algébrique semi-simple et  $H$  un sous-groupe sphérique sobre de  $G$ . Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $H$  et  $T$  un tore maximal inclus dans  $B$ . On note alors  $\Sigma$  l'ensemble des racines simples de  $(B, T)$  et  $W = N_G(T)/T$  le groupe de Weyl associé à  $T$ . Si  $\alpha$  est une racine de  $(G, T)$ , on note  $\alpha^\vee$  la coracine associée. On considérera aussi  $\omega_{\alpha^\vee}$  le poids fondamental associé à la coracine  $\alpha^\vee$ . Ainsi,  $(\omega_{\alpha^\vee})_{\alpha \in \Sigma}$  est la base duale de la base  $\Sigma$  de  $\mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}$ . Afin, d'alléger les notations, nous posons  $\alpha^* := \omega_{\alpha^\vee}$ .

Fixons également un produit scalaire sur  $\mathcal{X}(T) \otimes \mathbb{R}$  invariant sous l'action de  $W$ . Considérons le sous-groupe parabolique

$$P_{G/H} = \{g \in G : g.BH \subseteq BH\}.$$

Notons  $\Sigma(P_{G/H})$  l'ensemble des racines simples  $\alpha$  telles que  $P_\alpha$  est inclus dans  $P_{G/H}$ . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Q}^+ \alpha^* & \hookrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q}) \\ \uparrow & & \downarrow \rho_P^B \\ \sum_{\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q}^+ \alpha^* & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{X}(P_{G/H}), \mathbb{Q}), \end{array}$$

où  $\rho_P^B$  est le morphisme de restriction induit par l'inclusion de  $\mathcal{X}(P_{G/H})$  dans  $\mathcal{X}(B)$ . On a alors le :

**Lemme 10.3.1**

- (i) La famille  $(\rho_P^B(\alpha^*))_{\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})}$  est une base de  $\text{Hom}(\mathcal{X}(P_{G/H}), \mathbb{Q})$ .
- (ii) De plus,

$$\rho_P^B \left( \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Q}^+ \alpha^* \right) = \sum_{\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q}^+ \rho_P^B(\alpha^*).$$

**Preuve :** Commençons par dualiser le problème. Le dual de l'espace  $\sum_{\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q} \alpha^*$  vaut  $\sum_{\alpha \in \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q} \alpha$  qui est l'orthogonal du groupe  $\mathcal{X}(P_{G/H})$  pour le produit scalaire  $W$ -invariant. Ceci montre la première assertion du lemme.

Maintenant, pour montrer le lemme il suffit de voir que les cônes duaux dans  $\mathcal{X}(P_{G/H})_{\mathbb{Q}}$  de  $\sum_{\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q}^+ \rho_P^B(\alpha^*)$  et de  $\rho_P^B(\sum_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Q}^+ \alpha^*)$  sont égaux. Ainsi, il s'agit de montrer que :

$$\mathcal{X}(P_{G/H})_{\mathbb{Q}} \cap \left( \sum_{\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q}^+ \alpha + \sum_{\alpha \in \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q} \alpha \right) = \mathcal{X}(P_{G/H})_{\mathbb{Q}} \cap \left( \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Q}^+ \alpha \right).$$

L'inclusion du membre de droite dans celui de gauche est évidente. Pour montrer l'autre, fixons  $\gamma = \sum_{\alpha \in \Sigma} x_\alpha \alpha$  avec  $x_\alpha \in \mathbb{Q}^+$  si  $\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})$  et  $x_\alpha \in \mathbb{Q}$  si  $\alpha \in \Sigma(P_{G/H})$ . Montrons qu'alors  $x_\alpha$  est positif ou nul pour tout  $\alpha$ .

Comme  $\mathcal{X}(P_{G/H})_{\mathbb{Q}}$  est l'orthogonal de  $\Sigma(P_{G/H})$ , on a :  $\langle \beta^\vee, \gamma \rangle = 0$  pour tout  $\beta$  dans  $\Sigma(P_{G/H})$ . Mais alors, pour tout  $\beta$  dans  $\Sigma(P_{G/H})$ , on a :

$$\langle \beta^\vee, \sum_{\alpha \in \Sigma(P_{G/H})} x_\alpha \alpha \rangle = - \sum_{\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})} \langle \beta^\vee, \alpha \rangle x_\alpha.$$

De plus, pour tout  $\alpha$  et  $\beta$  distincts dans  $\Sigma$ ,  $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle$  est négatif ou nul (voir [7]). Or, pour tout  $\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})$ ,  $x_\alpha$  est positif ou nul. Ainsi :

$$\forall \beta \in \Sigma(P_{G/H}) \quad \langle \beta^\vee, \sum_{\alpha \in \Sigma(P_{G/H})} x_\alpha \alpha \rangle \geq 0.$$

On peut alors appliquer le lemme 6 du chapitre 5, no 3.5 de [7] à la base  $\Sigma(P_{G/H})$ . On obtient la seconde assertion du lemme.  $\square$

Comme  $G/H - BH/H$  est la réunion des couleurs de  $G/H$  et  $P_{G/H}$  est connexe, chaque élément  $D$  de  $\mathcal{D}(G/H)$  est stable par  $P_{G/H}$ . Ainsi, pour chaque équation  $[\gamma_D : \chi_D]$  d'une couleur  $D$  de  $G/H$ , le caractère  $\gamma_D$  s'étend à  $P_{G/H}$ . De plus, le lemme 3.2.1 montre que chaque caractère de  $\mathcal{X}(B)^{B \cap H}$  est une combinaison linéaire des  $\gamma_D$ . On a donc :

$$\mathcal{X}(B)^{B \cap H} \subseteq \mathcal{X}(P_{G/H}) \subseteq \mathcal{X}(B).$$

En dualisant on obtient :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q}) \xrightarrow{\rho_P^B} \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(P_{G/H}), \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q}).$$

Par ailleurs, on a une flèche de restriction

$$\rho : \mathcal{CV}(G \times G/\Delta G) \longrightarrow \mathcal{CV}(G/H)$$

induite par l'inclusion de  $k(G/H)$  dans  $k(G)$ .

On peut maintenant montrer le

**Lemme 10.3.2** *Avec les notations ci-dessus, on suppose que  $G/H$  est sobre et relevable (i.e. que  $\mathcal{CV}(G/H)$  est saillant et  $\rho : \mathcal{CV}(G \times G/\Delta G) \longrightarrow \mathcal{CV}(G/H)$  est surjective).*

*Alors, on peut choisir une partie  $\Sigma_{G/H}$  de  $\Sigma - \Sigma(P_{G/H})$  telle que par le*

diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{CV}(G \times G/\Delta G) & \hookrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q}) & \longleftarrow & \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Q}^- \alpha^* \\
\downarrow \rho & & \downarrow \rho_P^B & & \uparrow \cup \\
& & \text{Hom}(\mathcal{X}(P_{G/H}), \mathbb{Q}) & \longleftarrow & \sum_{\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q}^- \alpha^* \\
& & \downarrow & & \uparrow \cup \\
\mathcal{CV}(G/H) & \hookrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q}) & \longleftarrow & \sum_{\alpha \in \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^- \alpha^*
\end{array}$$

les images dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  des cônes  $\mathcal{CV}(G/H)$  et  $\sum_{\alpha \in \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^- \alpha^*$  coïncident. De plus, les flèches précédées du symbole  $\subset$  sont injectives.

**Preuve :** D'après le lemme 10.3.1, l'hypothèse de surjectivité de  $\rho$  implique que les images dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  de  $\sum_{\alpha \notin \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q}^- \alpha^*$  et de  $\mathcal{CV}(G/H)$  coïncident. En effet, l'image de  $\mathcal{CV}(G \times G/\Delta G)$  dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q})$  est  $\sum_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Q}^- \alpha^*$  (voir la section 4).

D'après [10], comme  $G/H$  est sobre, le cône  $\mathcal{CV}(G/H)$  est simplicial. Pour tout  $\mathbb{Q}^+ \gamma$  générateur de  $\mathcal{CV}(G/H)$ , on peut trouver une racine  $\alpha$  dans  $\Sigma - \Sigma(P_{G/H})$  telle que  $\mathbb{Q}^- \alpha^*$  s'envoie sur  $\mathbb{Q}^+ \gamma$  dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  par le diagramme du lemme. On fait un tel choix pour chaque générateur de  $\mathcal{CV}(G/H)$  et on obtient ainsi  $\Sigma_{G/H}$  inclus dans  $\Sigma - \Sigma(P_{G/H})$  qui vérifie la condition du lemme.  $\square$

## 10.4 Plongement canonique de $G/H$ comme quotient de celui de $G$

**Théorème 6** Soit  $G$  un groupe semi-simple et  $G/H$  un espace homogène sphérique sobre et relevable. Considérons  $\overline{Y}$  le plongement canonique de  $G/H$  et  $\overline{X}$  celui de  $G \times G/\Delta G$ . Alors :

Il existe un fibré en droites  $\mathcal{L}$  ample et  $G \times H$ -linéarisé sur  $\overline{X}$  tel que le quotient  $\pi : \overline{X}^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow \overline{X}^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  de  $\overline{X}$  par  $\{1\} \times H$  associé à  $\mathcal{L}$  vérifie :

- (i)  $\overline{X}^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H = \overline{Y}$ ,
- (ii)  $\overline{X}^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = \overline{X}^{\text{s}}(\mathcal{L})$ ,
- (iii)  $\pi$  est surjective.

**Preuve :** Soit  $\mathcal{M}$  un fibré ample et  $G$ -linéarisé sur  $\overline{Y}$ . Nous reprenons les notations de la section 10.3. Soit  $P_{G/H}^-$  le sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $T$  et opposé à  $P_{G/H}$ . Alors, d'après la proposition 2.5.3, l'orbite fermée de  $\overline{Y}$  est  $G/P_{G/H}^-$ . Notons  $\gamma_0$  le caractère de  $P_{G/H}^-$  tel que, avec les notations du lemme 3.3.1 la restriction de  $\mathcal{M}$  à  $G/P_{G/H}^-$  soit égale à  $\mathcal{L}_{\gamma_0}$ .

On a alors le :

**Fait 1 :** l'ensemble  $\gamma_0 + \sum_{\alpha \notin \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^{+*} \alpha$  contient un poids rationnel dominant et régulier.

Comme  $\Sigma_{G/H}$  est inclus dans le complémentaire de  $\Sigma(P_{G/H})$  dans  $\Sigma$ , il suffit de montrer que le cône  $\gamma_0 + \sum_{\alpha \in \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q}^{+*} \alpha$  vérifie le Fait 1. Comme la restriction de  $\mathcal{M}$  à  $G/P_{G/H}^-$  qui est égale à  $\mathcal{L}_{\gamma_0}$  est ample,  $\gamma_0$  appartient à l'intérieur relatif du cône convexe engendré par  $P^+ \cap \mathcal{X}(P_{G/H})$ .

Notons  $P_{\mathbb{Q}}^+$  le cône convexe de  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}$  engendré par  $P^+$ . Alors,  $\mathbb{Q}^- \alpha^\vee$  est le cône dual de la face  $\sum_{\beta \neq \alpha} \mathbb{Q}^+ \omega_\beta$  de  $P_{\mathbb{Q}}^+$ . On en déduit que le dual du cône  $-\gamma_0 + P_{\mathbb{Q}}^+$  est égal à  $\sum_{\alpha \in \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q}^- \alpha^\vee$ .

Si  $\gamma_0 + \sum_{\alpha \notin \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^{+*} \alpha$  ne rencontre pas l'intérieur de  $P_{\mathbb{Q}}^+$  alors l'intérieur de  $-\gamma_0 + P_{\mathbb{Q}}^+$  ne rencontre pas  $\sum_{\alpha \notin \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^{+*} \alpha$ . Mais alors, il existe  $\sigma$  dans  $\sum_{\alpha \in \Sigma(P_{G/H})} \mathbb{Q}^- \alpha^\vee$  qui est strictement négatif sur  $\sum_{\beta \notin \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^{+*} \beta$ . Ce qui est absurde, puisque  $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle$  est négatif ou nul.

Quitte à remplacer  $\mathcal{M}$  par un multiple, le Fait 1 montre que l'on peut trouver  $\eta$  dans  $\mathcal{X}(B)$  qui appartient à  $\gamma_0 + \sum_{\alpha \notin \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^{+*} \alpha$  et à l'intérieur de  $P_{\mathbb{Q}}^+$ . On écrit  $\eta = \sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha^\eta \omega_\alpha$  avec  $n_\alpha^\eta$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Considérons  $\mathcal{L}_\eta$  le fibré en droites  $G \times G$ -linéarisé sur  $\overline{X}$  associé à  $\sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha^\eta [\overline{B s_\alpha B^{-\overline{X}}}]$ . Quitte à remplacer  $\mathcal{M}$  et donc  $\mathcal{L}_\eta$  par une puissance, on suppose que  $\mathcal{L}_\eta$  admet une  $G \times G$ -linéarisation. D'après la proposition 4.5.1, comme  $\eta$  est strictement dominant,  $\mathcal{L}_\eta$  est ample. Notons  $\chi$  le caractère de  $H$  tel que la restriction de  $\mathcal{M}$  à  $G/H$  soit égale à  $\mathcal{L}_\chi$  (voir lemme 3.3.1 pour la notation). Nous allons montrer que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\eta \otimes \chi$  a les propriétés annoncées par le théorème.

Remarquons pour commencer que la proposition 2.6.2 montre ici que :

$$\mathbf{P}(\overline{X}, \mathcal{L}_\eta) = P_{\mathbb{Q}}^+ \cap \left( \eta + \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Q}^- \alpha \right).$$

Mais alors, on a :

$$\gamma_0 \in \mathbf{P}(\overline{X}, \mathcal{L}_\eta) \cap \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi).$$

Si on note  $\mathcal{O}_0$  l'orbite de  $G \times G$  dans  $\overline{X}$  telle que

$$\mathcal{C}(\overline{X}, \mathcal{O}_0) = \sum_{\alpha \in \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^- \alpha^*,$$

on a le

Fait 2 : Toute orbite  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $\overline{X}$  telle que  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L}_\eta)$  contient  $\gamma_0$  est incluse dans  $\overline{X}_{\mathcal{O}_0}$ .

Soit  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  dans  $\overline{X}$  telle que  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L}_\eta)$  contient  $\gamma_0$ . Si  $\alpha$  est une racine simple, on note  $\overline{X}_\alpha$  le centre dans  $\overline{X}$  de la valuation de  $\mathcal{CV}(G \times G/\Delta G)$  dont l'image dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q})$  est  $-\omega_\alpha^\vee$ . Il existe alors un sous-ensemble  $I$  de  $\Sigma$  tel que (voir, par exemple [17]) :

$$\overline{\mathcal{O}} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{X}_\alpha.$$

On a alors :

$$\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L}_\eta) = \left( \eta + \sum_{\alpha \notin I} \mathbb{Q} \alpha \right) \cap \mathbf{P}(\overline{X}, \mathcal{L}_\eta).$$

Mais alors, le Fait 1 implique que

$$\gamma_0 - \eta \in \left( \sum_{\alpha \notin I} \mathbb{Q} \alpha \right) \cap \left( \sum_{\alpha \notin \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^- \alpha \right).$$

Donc  $\Sigma - \Sigma_{G/H} \subseteq \Sigma - I$  et  $I$  est inclus dans  $\Sigma_{G/H}$ . Ainsi,  $\mathcal{O}$  contient  $\mathcal{O}_0$  dans son adhérence.

De plus, on a le

Fait 3 :  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_0}, \mathcal{L}_\eta) \cap \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi) = \{\gamma_0\}$ .

Le direction de l'espace affine  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}_0}, \mathcal{L}_\eta)$  est  $\sum_{\alpha \notin \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q} \alpha$ . Or celle de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  est  $\mathcal{X}(B)_{\mathbb{Q}}^{B \cap H}$ . Comme d'après le lemme 10.3.1,  $\sum_{\alpha \in \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^- \alpha^*$

s'injecte dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$ , ces deux directions sont en somme directe. Mais alors,  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}_0, \mathcal{L}_\eta) \cap \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  est soit vide, soit réduit à un point. De plus, la démonstration du Fait 2 montre que  $\gamma_0$  appartient à cette intersection. Le fait 3 est démontré.

On peut alors montrer le

**Fait 4** :  $\overline{\mathcal{X}}^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\eta \otimes \chi) // H = \overline{\mathcal{Y}}$ .

Considérons  $\pi : \overline{\mathcal{X}}^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\eta \otimes \chi) \longrightarrow \overline{\mathcal{X}}^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\eta \otimes \chi) // H$  le morphisme quotient. Quitte à remplacer  $\mathcal{M}$  par une puissance, on suppose qu'il existe un quotient  $\mathcal{L}_Y$  de  $\mathcal{L}_\eta \otimes \chi$  par  $\{1\} \times H$ . Soit  $x$  un point de l'orbite ouverte de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}_0$ . D'après la proposition 7.3.1, on a :

$$\mathbf{P}(\overline{G \cdot \pi(x)}, \mathcal{L}_Y) = \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}_0, \mathcal{L}_\eta) \cap \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi).$$

Mais alors, le Fait 3 et la proposition 2.6.1 montrent que  $G \cdot \pi(x)$  est de rang 0. En particulier,  $G \cdot \pi(x)$  est fermée dans  $\overline{\mathcal{X}}^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\eta \otimes \chi) // H$ .

Par ailleurs, la proposition 3.3.1 appliquée à l'orbite fermée de  $G$  dans  $\overline{\mathcal{Y}}$  pour le fibré  $\mathcal{M}$  montre que  $(\gamma_0, \chi)$  appartient à l'intérieur du cône

$$\sum_{D \in \mathcal{D}(G/H)} \mathbb{Q}^+(\gamma_D, \chi_D).$$

Mais alors, la même proposition montre que  $G \cdot \pi(x)$  est sans couleur dans  $\overline{\mathcal{X}}^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\eta \otimes \chi) // H$ .

De plus, si on note  $\rho_{G/H}^B : \text{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  le morphisme de restriction, on a :

$$\begin{aligned} \left( -\gamma_0 + \mathbf{P}(\overline{\mathcal{X}}^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\eta \otimes \chi) // H, \mathcal{L}_Y) \right)^\vee &\supseteq \rho_{G/H}^B \left( (-\gamma_0 + \mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}_0, \mathcal{L}_\eta))^\vee \right) \\ &\supseteq \rho_{G/H}^B \left( \sum_{\alpha \in \Sigma_{G/H}} \mathbb{Q}^- \alpha^* \right). \end{aligned}$$

On conclut grâce à la proposition 2.6.4 que  $G \cdot \pi(x)$  est la seule orbite fermée de  $G$  dans  $\overline{\mathcal{X}}^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\eta \otimes \chi) // H$ , puis que :

$$\overline{\mathcal{X}}^{\text{ss}}(\mathcal{L}_\eta \otimes \chi) // H = \overline{\mathcal{Y}}.$$

En particulier, comme  $\overline{\mathcal{Y}}$  est sans couleur, la proposition 7.3.2 montre que  $\pi$  est surjective.

Il reste à montrer le

**Fait 5** : Tous les points semi-stables sont stables.

On a vu au cours de la preuve du Fait 3 que les directions de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  et de  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}_0, \mathcal{L}_\eta)$  sont en somme directe. Mais alors la proposition 2.6.2 montre que pour toute orbite  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $\overline{X}_{\mathcal{O}_0}$  l'intersection de  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$  et de  $\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{L}_\eta)$  est transverse. On conclut alors grâce à la proposition 9.3.1 et au Fait 2.  $\square$

## 10.5 Construction de compactifications sans couleur de $G/H$ par quotients.

On peut généraliser le théorème 6 au cas d'un plongement sans couleur de  $G/H$  :

**Théorème 7** *Soit  $G$  un groupe semi-simple et  $G/H$  un espace homogène sphérique sobre et relevable. Soit  $Y$  un plongement projectif et sans couleur de  $G/H$ . Alors :*

*il existe un plongement projectif et sans couleur  $X$  de  $G \times G/\Delta G$  et un fibré en droites  $\mathcal{L}$  ample et  $G \times H$ -linéarisé sur  $X$  tels que le quotient,*

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$$

de  $X$  par  $\{1\} \times H$  associé à  $\mathcal{L}$  vérifie :

- (i)  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H = Y$ ,
- (ii)  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = X^s(\mathcal{L})$ ,
- (iii)  $\pi$  est surjective.

**Preuve :** 1<sup>ière</sup> étape : construction de  $X$ .

Considérons comme dans le lemme 10.3.2, l'application  $\rho$  de restriction :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{CV}(G \times G/\Delta G) & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{CV}(G/H). \end{array}$$

Soit  $\mathcal{F}(Y)$  l'éventail associé à  $Y$  dans le théorème 2. Les cônes de la forme  $\tilde{\rho}^{-1}(\mathcal{C})$  pour  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{F}(Y)$  et leurs faces constituent un éventail. On note  $\tilde{\rho}^{-1}(\mathcal{F}(Y))$  cet éventail. Comme  $Y$  est sans couleur,  $\mathcal{F}(Y)$  définit

une partition de  $\mathcal{CV}(G/H)$ . Or, on a supposé que  $\tilde{\rho}^{-1}(\mathcal{CV}(G/H)) = \mathcal{CV}(G \times G/\Delta G)$ . Ainsi,  $\tilde{\rho}^{-1}(\mathcal{F}(Y))$  définit une partition de  $\mathcal{CV}(G \times G/\Delta G)$ . Comme  $\mathcal{CV}(G \times G/\Delta G)$  est saillant, il en est de même pour tous les cônes de  $\tilde{\rho}^{-1}(\mathcal{F}(Y))$ . Ainsi,  $\tilde{\rho}^{-1}(\mathcal{F}(Y))$  est l'éventail associée à un plongement complet et sans couleur de  $G \times G/\Delta G$ . Notons  $X$  ce plongement de  $G \times G/\Delta G$ .

2ième étape : Montrons que la variété  $X$  est projective.

Le corollaire 5.2.2 de [12] donne un critère en termes d'éventail colorié pour la projectivité d'un plongement d'un espace homogène sphérique. Appliqué à  $Y$ , il implique qu'il existe une fonction

$$l : \mathcal{CV}(G/H) \longrightarrow \mathbb{Q},$$

qui est linéaire sur chaque cône de  $\mathcal{F}(Y)$  et strictement convexe lorsqu'on passe d'un cône à un autre. Considérons alors,

$$l \circ \rho : \mathcal{CV}(G \times G/\Delta G) \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

Il est clair que  $l \circ \rho$  est linéaire sur les cônes de  $\tilde{\rho}^{-1}(\mathcal{F}(Y))$  et qu'elle est strictement convexe. Comme  $X$  est complète, le corollaire 5.2.2 de [12] montre alors que  $X$  est projective.

3ième étape : Choix du fibré en droites.

Comme  $X$  est sans couleur, si on note  $\overline{X}$  le plongement canonique de  $G \times G/\Delta G$ , il existe (voir [12], théorème 2) un morphisme

$$\psi : X \longrightarrow \overline{X},$$

birationnel et  $G \times G$ -équivariant.

Soit  $\mathcal{L}_1$  un fibré en droites ample et  $G \times H$ -linéarisé sur  $\overline{X}$  vérifiant le théorème 6. D'après la proposition 5.2.3, quitte à remplacer  $\mathcal{L}_1$  par une puissance, on peut l'écrire sous la forme  $\mathcal{L}_2 \otimes \chi$  avec  $\mathcal{L}_2$  dans  $\text{Pic}^{G \times G}(X)$  et  $\chi$  dans  $\mathcal{X}(H)$ . Commençons par regarder le fibré en droites  $\psi^*(\mathcal{L}_2)$  sur  $X$ .

Soit  $\Omega_0$  l'orbite fermée de  $G$  dans  $\overline{Y}$ . Considérons l'orbite  $\mathcal{O}(\Omega_0)$  de  $G \times G$  dans  $\overline{X}$  définie dans la proposition 7.3.2. Alors, l'ouvert  $\overline{X}^{\text{ss}}(\mathcal{L}_2 \otimes \chi)$  de  $\overline{X}$  est inclus dans  $\overline{X}_{\mathcal{O}(\Omega_0)}$  et rencontre  $\mathcal{O}(\Omega_0)$ . On en déduit que pour toute orbite  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $X$ , on a :

$$\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \psi^*(\mathcal{L}_2)) \cap \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi) \neq \emptyset \iff \mathcal{O} \subseteq \psi^{-1}(\overline{X}_{\mathcal{O}(\Omega_0)}). \quad (10.1)$$

Comme de plus, les intersections 10.1 sont transverses, on en déduit qu'il existe un voisinage  $U$  de  $\psi^*(\mathcal{L}_2)$  dans  $\text{Pic}^{G \times G}(X)_{\mathbb{Q}}$  tel que pour tout  $\mathcal{M}$  dans  $U$ , on ait :

$$\mathbf{P}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{M}) \cap \mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi) \neq \emptyset \iff \mathcal{O} \subseteq \psi^{-1}(\overline{\mathcal{X}}_{\mathcal{O}(\Omega_0)}). \quad (10.2)$$

Par ailleurs, le fibré  $\psi^*(\mathcal{L}_2)$  est engendré par ses sections sur  $X$ . Alors, le corollaire 5.2.2 de [12] montre que  $U$  contient un fibré ample  $\mathcal{L}_2^\varepsilon$  sur  $X$ . Nous allons montrer que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2^\varepsilon \otimes \chi$  vérifie le théorème.

4ième étape : Vérification.

Considérons :

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H.$$

Soit  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  qui est fermée dans  $\psi^{-1}(\overline{\mathcal{X}}_{\mathcal{O}(\Omega_0)})$ . Considérons l'orbite ouverte  $\Omega$  de  $G$  dans  $\pi(\mathcal{O})$ . Comme  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  est inclus dans  $\psi^{-1}(\overline{\mathcal{X}}_{\mathcal{O}(\Omega_0)})$  on a nécessairement  $\mathcal{O}(\Omega) = \mathcal{O}$ . Mais alors, le lemme 7.3.1 montre que le cône  $\mathcal{C}(X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H, \Omega)$  contient  $\rho(\mathcal{C}(X, \mathcal{O}))$ . En particulier, comme la restriction de  $\rho$  à  $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{O}(\Omega_0))$  (qui contient  $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$ ) est injective, ceci montre que le cône  $\mathcal{C}(X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H, \Omega)$  est d'intérieur non vide dans  $\mathcal{CV}(G/H)$ . Ainsi, l'orbite  $\Omega$  est complète et  $\pi(\mathcal{O}) = \Omega$ .

Comme les cônes de la forme  $\rho(\mathcal{C}(X, \mathcal{O}))$  pour  $\mathcal{O}$  une orbite fermée de  $G \times G$  dans  $\psi^{-1}(\overline{\mathcal{X}}_{\mathcal{O}(\Omega_0)})$  recouvrent  $\mathcal{CV}(G/H)$ , nous venons d'établir une correspondance parfaite entre les orbites fermées de  $G \times G$  dans  $\psi^{-1}(\overline{\mathcal{X}}_{\mathcal{O}(\Omega_0)})$  et les orbites complètes de  $G$  dans  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$ . En particulier, la première étape montre que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//H$  est isomorphe à  $Y$ . Alors, la proposition 7.3.2 montre que  $\pi$  est surjective.

Il est maintenant aisé de voir avec la proposition 9.3.1 que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = X^s(\mathcal{L})$ .  $\square$

## 10.6 Description locale du morphisme $\pi$ donné par le théorème 7

**10.6.1** — Commençons par montrer deux lemmes concernant les plongements de  $G \times G/\Delta G$ .

Soit  $X$  un plongement projectif sans couleur de  $G \times G/\Delta G$ . Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$ ,  $T$  un tore maximal inclus dans  $B$ , et  $B^-$  le

sous-groupe de Borel opposé à  $B$  contenant  $T$ . Soit  $U$  (resp.  $U^-$ ) le radical unipotent de  $B$  (resp.  $B^-$ ). Posons

$$X_{B \times B^-} := \bigcup X_{\mathcal{O}, B \times B^-},$$

où la réunion porte sur les orbites  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $X$ . Soit  $S$  l'adhérence de  $T$  dans  $X_{B \times B^-}$ . Alors, le théorème 3 montre que l'application

$$\begin{aligned} \iota : U \times U^- \times S &\longrightarrow X_{B \times B^-} \\ (u, u^-, s) &\longmapsto (u, u^-).s \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Pour chaque orbite  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $X$ , l'intersection  $S \cap \mathcal{O}$  est une orbite de  $T$  dans la variété torique  $S$ . Soit  $x_{\mathcal{O}}$  le point de  $S \cap \mathcal{O}$  obtenu du point base  $x$  par limite d'un sous-groupe à un paramètre de  $T$  (voir [23]). La proposition 4.4.1 donne deux sous-groupes paraboliques opposés  $P_{\mathcal{O}}$  et  $Q_{\mathcal{O}}$  tels que l'isotropie de  $x_{\mathcal{O}}$  dans  $G \times G$  est :

$$I_{\mathcal{O}} := (P_{\mathcal{O}}^u \times Q_{\mathcal{O}}^u) \rtimes (\Delta L_{\mathcal{O}}.(C_{\mathcal{O}} \times \{1\})),$$

où  $L_{\mathcal{O}} = P_{\mathcal{O}} \cap Q_{\mathcal{O}}$  et  $C_{\mathcal{O}}$  est un sous-groupe du centre connexe de  $L_{\mathcal{O}}$ . On reprend alors les notations de la proposition 8.2.1 pour  $\mathcal{O} = G \times G/I_{\mathcal{O}}$ . En particulier, si  $V \in \mathcal{B}(G/H)$  et  $w \in W^{P_{\mathcal{O}}}$ , on pose :

$$\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^{\circ}(w, V) := (B \times H).(\hat{w}, g)I_{\mathcal{O}}/I_{\mathcal{O}},$$

où  $\hat{w} \in BwP_{\mathcal{O}}$  et  $g \in G$  tel que  $q(g) \in V$ . Posons également

$$X_{B \times G} := (\{1\} \times G).X_{B \times B^-}.$$

On a alors le

**Lemme 10.6.1** *Soit  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ . Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$X_{B \times G} \cap \mathcal{O} = \bigcup_{V \in \mathcal{B}(G/H)} \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^{\circ}(1, V).$$

**Preuve :** Rappelons que  $\mathcal{O}_{B \times B^-}^{\circ}$  désigne l'orbite ouverte de  $B \times B^-$  dans  $\mathcal{O}$ . Alors, on a :  $X_{B \times B^-} \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}_{B \times B^-}^{\circ}$ . Mais alors,  $X_{B \times G} \cap \mathcal{O}$  est l'orbite ouverte de  $B \times G$  dans  $\mathcal{O}$ . Avec les notations de la proposition 8.2.1, on obtient alors  $X_{B \times G} \cap \mathcal{O} = p_1^{-1}(BP_{\mathcal{O}}/P_{\mathcal{O}})$ . Le lemme suit facilement.  $\square$

**Lemme 10.6.2** *Soit  $\mathcal{O}$  une orbite fermée de  $G \times G$  dans  $X$ . Il existe une fibration localement triviale,*

$$\psi : X_{\mathcal{O}, B \times G} \longrightarrow G/B,$$

*qui est  $\{1\} \times G$ -équivariante et  $B \times \{1\}$ -invariante. De plus, pour toute orbite  $\mathcal{O}'$  de  $G \times G$  dans  $X_{\mathcal{O}}$ , chaque fibre de  $\psi$  rencontre  $\mathcal{O}'$  en une orbite de  $B \times \{1\}$ .*

**Preuve :** Soit  $\mathcal{L}$  un fibré ample et  $G \times G$ -linéarisé sur  $X$ . Considérons la variété quotient  $Y$  de  $X$  par  $U \times \{1\}$  associée à  $\mathcal{L}$  et

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow Y,$$

le morphisme quotient. Quitte à remplacer  $\mathcal{L}$  par une puissance, on suppose de plus que  $\mathcal{L}$  admet un quotient  $\mathcal{L} // U$ .

Pour le fibré trivial  $\mathcal{L}_0$  sur  $G/U$ , le polyèdre  $\mathbf{P}(G/U, \mathcal{L}_0)$  est le cône engendré par les poids dominants. Ainsi grâce au théorème 5 on identifie  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  et  $\mathbf{P}(Y, \mathcal{L} // U)$ . Alors, le sommet  $\mathbf{P}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$  de  $\mathbf{P}(X, \mathcal{L})$  est un sommet orbital de  $\mathbf{P}(Y, \mathcal{L} // U)$ ; notons  $Z$  l'orbite fermée de  $G$  dans  $Y$  correspondante. Les propositions 7.3.2 et 7.3.1 montrent que  $\mathcal{O}(Z) = \mathcal{O}$  et que  $Z$  est dans l'image de  $\pi$ . De plus,  $X_{\mathcal{O}, B \times G}$  rencontre chaque orbite de  $G \times G$  dans  $X_{\mathcal{O}}$  en une unique orbite de  $U \times G$ . Mais alors, la proposition 9.3.1 montre que  $\pi^{-1}(Y_Z) = X_{\mathcal{O}, B \times G}$ . Considérons la restriction de  $\pi$  à  $X_{\mathcal{O}, B \times G}$  :

$$\bar{\pi} : X_{\mathcal{O}, B \times G} \longrightarrow Y_Z.$$

Remarquons que  $Y_Z$  est un plongement simple et sans couleur de  $G/U$ . Alors [33] ou [12] montrent que l'application canonique  $G/U \longrightarrow G/B$  se prolonge en un morphisme  $G$ -invariant  $\theta : Y_Z \longrightarrow G/B$ . Montrons que  $\psi = \theta \circ \bar{\pi}$  a les propriétés du lemme.

Soit  $\mathcal{O}_1$  une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ . Il existe un point  $x$  de  $\mathcal{O}_1$  dont l'isotropie dans  $G \times G$  est  $(P^u \times Q^u) \rtimes \Delta L.(C \times \{1\})$ , où  $P$  et  $Q$  sont deux sous-groupe paraboliques opposés de  $G$ ,  $L = P \cap Q$  et  $C$  est un sous-groupe du centre connexe de  $L$ . De plus, quitte à changer  $x$  sur  $\mathcal{O}_1$ , on peut supposer que  $B$  est inclus dans  $Q$ . Alors,  $(B \times G).x$  est l'orbite ouverte de  $B \times G$  dans  $\mathcal{O}_1$ , c'est-à-dire  $(B \times G).x = \mathcal{O}_1 \cap X_{\mathcal{O}, B \times G}$ . Comme  $\psi$  est  $U$ -invariante et  $G$ -équivariante, on a :  $\psi((b, g).x) = gB/B$ . On en déduit facilement que  $\psi^{-1}(BB^-/B^-) \cap \mathcal{O}_1$  est l'orbite ouverte de  $B \times B^-$  dans  $\mathcal{O}_1$ . Mais alors, on a  $\psi^{-1}(BB^-/B^-) = X_{\mathcal{O}, B \times B^-}$ .

Considérons alors la variété  $S$  et l'isomorphisme  $\eta$  donnée par le théorème 3. On définit  $\bar{\psi}$  par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathcal{O}, B \times B^-} & \xrightarrow{\psi} & B^- B/B \\ \uparrow \eta & & \uparrow u \mapsto uB/B \\ U \times U^- \times S & \xrightarrow{\bar{\psi}} & U^- \end{array}$$

Comme  $\bar{\psi}$  est invariante par  $U \times \{1\}$  et équivariante pour l'action de  $\{1\} \times B^-$ , on a :  $\bar{\psi}(u, u^-, s) = u^-$  pour tout  $(u, u^-, s) \in U \times U^- \times S$ . Mais alors,  $\bar{\psi}$  est invariante par  $B \times \{1\}$ . Comme  $G/B$  est recouvert par les  $gU^-B/B$  pour  $g \in G$  et  $\psi$  est  $\{1\} \times G$ -équivariante, le lemme suit alors facilement.  $\square$

**Remarque :** Notons qu'il n'était pas indispensable de considérer le quotient par  $U$  de  $X$  pour construire l'application  $\psi$ . En effet, on peut aussi remarquer que l'application  $G \rightarrow G/B, g \mapsto g^{-1}B/B$  est une application rationnelle  $B \times \{1\}$ -invariante,  $\{1\} \times G$ -équivariante, définie sur  $X_{\mathcal{O}, B \times B^-}$  et donc sur  $X_{\mathcal{O}, B \times G}$ .

**10.6.2** — Soit  $X, \mathcal{L}, Y$  et  $\pi$  comme dans le théorème 7. Dans cette sous-section, nous nous intéressons à la structure locale du morphisme

$$\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \rightarrow Y.$$

Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $H$  et  $Z$  une orbite fermée de  $G$  dans  $Y$ . On a le

**Lemme 10.6.3** *Avec les notations introduites ci-dessus et celles des propositions 7.3.2 et 8.2.1, on a :*

(i) *Soit  $\mathcal{O}$  est une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ . Si  $\bar{\mathcal{O}}$  contient  $\mathcal{O}(Z)$  alors :*

$$\pi^{-1}(Y_{Z,B}) \cap \mathcal{O} = \mathcal{BH}_O^\circ(1, G/H).$$

*Sinon, l'intersection est vide.*

(ii) *Soit  $\psi : X_{\mathcal{O}(Z), B \times G} \rightarrow G/B$  le morphisme donné par le lemme 10.6.2. Alors, on a :*

$$\pi^{-1}(Y_{Z,B}) = \psi^{-1}(HB/B).$$

**Preuve :** D'après la proposition 9.3.1,  $\pi^{-1}(Y_Z) \cap \mathcal{O}$  est une orbite de  $G \times H$  si  $\overline{\mathcal{O}}$  contient  $\mathcal{O}(Z)$  et est vide sinon. Comme les fibres de  $\pi$  sont des orbites de  $\{1\} \times H$  dans  $X$ , on en déduit aisément la première assertion du lemme.

Pour la seconde, il suffit de montrer que pour chaque orbite  $\mathcal{O}$  de  $G \times G$  dans  $X_{\mathcal{O}(Z)}$ ,  $\psi^{-1}(HB/B) \cap \mathcal{O}$  est réduit à une orbite de  $B \times H$ . Ce qui résulte immédiatement du lemme 10.6.2.  $\square$

**10.6.3** — On s'intéresse maintenant à la restriction de  $\pi$  au-dessus de  $Y_{Z,B}$  :

$$\pi_{Z,B} : \pi^{-1}(Y_{Z,B}) \longrightarrow Y_{Z,B}.$$

Commençons par fixer quelques notations. Soit  $L$  un sous-groupe de Levi de  $P_{G/H}$  adapté à  $G/H$  et  $T$  un tore maximal de  $L_{G/H}$ . Soit  $S$  l'adhérence de  $T$  dans  $X_{\mathcal{O}(Z), B \times B^-}$ . Notons  $p : S \longrightarrow S//T \cap H$  le quotient de la variété affine  $S$  sous l'action de  $T \cap H$  par multiplication à droite.

Soit  $U$  (resp.  $P_{G/H}^u$ ) le radical unipotent de  $B$  (resp.  $P_{G/H}$ ). Posons :  $\zeta : U \longrightarrow P_{G/H}^u$  l'unique application  $P_{G/H}^u$ -équivariant telle que  $\zeta(L \cap U) = 1$ . Soit  $S$  l'adhérence de  $T$  dans  $X_{\mathcal{O}(Z), B \times B^-}$ . Notons  $\bar{\eta} : U \times S \longrightarrow \psi^{-1}(B/B)$  l'application orbite. Alors (voir par exemple la démonstration du lemme 10.6.2)  $\bar{\eta}$  est un isomorphisme  $B$ -équivariant. On a alors la

**Proposition 10.6.1** *Avec les notations introduites ci-dessus,  $\psi^{-1}(B/B)$  rencontre toutes les orbites de  $\{1\} \times H$  dans  $\pi^{-1}(Y_{Z,B})$ . De plus, la restriction de  $\pi$  à  $\psi^{-1}(B/B)$  est décrite par le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(B/B) & \xrightarrow{\pi} & Y_{Z,B} \\ \uparrow \bar{\eta} & & \uparrow \\ U \times S & \xrightarrow{(\zeta, p)} & P_{G/H}^u \times (S//T \cap H), \end{array}$$

sur lequel les flèches verticales sont des isomorphismes  $B$ -équivariants.

**Preuve :** Soit  $S_1$  l'adhérence de  $T/T \cap H$  dans  $Y_{Z,B}$ . Le théorème 3 montre que l'action de  $P_{G/H}^u$  sur  $Y_{Z,B}$  induit un isomorphisme :  $P_{G/H}^u \times S_1 \longrightarrow Y_{Z,B}$ . Montrons que  $\pi(S) = S_1$ .

Le lemme 10.6.3 montre que  $\psi^{-1}(B/B)$  rencontre toutes les orbites de  $\{1\} \times H$  dans  $\pi^{-1}(Y_{Z,B})$ . Mais alors, l'image par  $\pi$  de  $\psi^{-1}(B/B)$  est  $Y_{Z,B}$ . On en déduit que  $\pi(S)$  rencontre toutes les orbites de  $U$  dans  $Y_{Z,B}$ . De plus, comme  $T$  est dense dans  $S$ ,  $T/T \cap H$  est dense dans  $\pi(S)$ . Mais alors,  $\pi(S)$  est inclus dans  $S_1$ . Comme  $S$  est stable par  $T$  on en déduit que  $\pi(S) = S_1$ .

Définissons  $\theta$  par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi} & S_1 \\ \downarrow p & & \nearrow \theta \\ S//(T \cap H) & & \end{array}$$

Comme  $\pi(S) = S_1$ , l'application  $\theta$  est surjective. Par ailleurs,  $S_1$  contient  $T/T \cap H$ . Mais alors,  $\theta$  est birationnelle. De plus, d'après le théorème 3,  $S_1$  est affine et normale. Le théorème principal de Zariski montre alors que  $\theta$  est un isomorphisme. La proposition suit.  $\square$

## 10.7 Une première application

**10.7.1** — Dans cette section, nous appliquons le théorème 7 pour décrire les groupes d'isotropie d'orbites de  $G$  dans les plongements de  $G/H$ . Nous généralisons ainsi la proposition 4.4.1.

**Corollaire 10.7.1** *Soit  $G$  un groupe semi-simple et  $G/H$  un espace homogène sphérique sobre et relevable.*

*Soit  $Y$  un plongement projectif et sans couleur de  $G/H$ . Fixons  $y$  un point de  $Y$ . Alors il existe deux sous-groupes paraboliques opposés  $P$  et  $Q$ , et un sous-groupe  $C$  du centre connexe du Levi  $L = P \cap Q$  tels que :*

$$\begin{aligned} G_y &= q_{P^u}^{-1}(q_{Q^u}(Q \cap H)).C \\ &= P^u.C.(L \cap Q^u(Q \cap H)), \end{aligned}$$

*où  $q_{P^u} : P \rightarrow L$  et  $q_{Q^u} : Q \rightarrow L$  sont les morphismes quotients par les radicaux unipotents de  $P$  et  $Q$  respectivement.*

**Preuve :** Soit  $X$  un plongement de  $G \times G/\Delta G$  et  $\mathcal{L}$  une fibré en droites sur  $X$  vérifiant le théorème 7. Soit  $x \in X$  tel que  $\pi(x) = y$ . Alors, d'après la proposition 4.4.1, il existe deux sous-groupes paraboliques opposés  $P$  et  $Q$  et un sous-groupe  $C$  du centre connexe de  $L = P \cap Q$  tels que l'isotropie de  $x$  dans  $G \times G$  soit :

$$I := (P^u \times Q^u) \rtimes (\Delta L \times (C \times \{1\})),$$

où  $P^u$  et  $Q^u$  sont les radicaux unipotents de  $P$  et  $Q$ .

Mais alors, comme  $\pi^{-1}(y) = (\{1\} \times H).x$ , on a :

$$G_y = \{g \in G : (g, 1)I \cap (\{1\} \times H) \neq \emptyset\}.$$

On en déduit immédiatement le corollaire. □

### 10.7.2 — Exemple

Considérons à nouveau l'espace homogène  $\mathrm{SL}(3)/\mathrm{GL}(2)$  du paragraphe 6.2.2 (on le note  $G/H$ ). Le plongement canonique  $Y$  de  $G/H$  est  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ . Alors, si  $y$  appartient à l'orbite fermée de  $G$  dans  $Y$ , l'isotropie  $G_y$  de  $y$  dans  $G$  est un sous-groupe de Borel de  $G$ .

Cependant, le sous-groupe parabolique  $P$  donné par la démonstration du corollaire 10.7.1 n'est pas un sous-groupe de Borel de  $G$  ! En fait, il n'est même pas unique à conjugaison près : la classe de  $P$  peut être l'une ou l'autre des deux classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques minimaux de  $G$ .

**10.7.3** — Montrons par un exemple que le corollaire devient faux si l'on supprime l'hypothèse :  $G/H$  est relevable.

**Exemple.** Considérons à nouveau  $G = \mathrm{SP}(4)$  et  $H = k^* \times \mathrm{Sl}(2)$ . On reprend les notations de l'appendice A dans laquelle, il est montré que le plongement canonique de  $G/H$  contient l'orbite de  $G$  suivante :

$$\mathcal{O} := \{(d, p) \in \mathbb{P}(V) \times \mathrm{Gr}_2(V) : d \subseteq p \text{ et } \omega|_p \neq 0\}.$$

Le stabilisateur  $G_y$  de  $y = ([e_1], [e_1 \wedge e_2]) \in \mathcal{O}$  est le sous-groupe de  $G$  constitué des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} t & * & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

En particulier, le radical unipotent de  $G_y$  est de dimension 1. Il n'existe donc pas de sous-groupe parabolique strict  $P$  de  $G$  tel que  $P^u \subset G_y \subset P$ . Ainsi, le résultat du corollaire 10.7.1 est faux pour le plongement canonique de  $\mathrm{SP}(4)/k^* \times \mathrm{Sl}(2)$ . Heureusement, comme le prouve l'annexe A, les hypothèses du corollaire 10.7.1 ne sont pas vérifiées non plus par  $Y$  !

**10.7.4** — Introduisons quelques notations afin d'exprimer autrement le corollaire 10.7.1. Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  et  $L$  un sous-groupe de Levi de  $P$ . Soit  $L_H$  un sous-groupe sphérique de  $L$ . On note  $q_{P^u} : P \rightarrow L$ , comme dans le corollaire 10.7.1. On définit alors sur  $G \times L/L_H$ , une action de  $P$  par la formule :  $p.(g, lL_H) = (gp^{-1}, q_{P^u}(p)lL_H)$ . Le quotient de  $G \times L/L_H$  par  $P$  existe : on le note  $G \times_P L/L_H$ . Alors,  $G \times_P L/L_H$  est un  $G$ -espace homogène sphérique. Ce procédé pour obtenir des espace homogènes sphériques est appelé *induction parabolique*. Il a notamment été étudié dans [13, 48] ou [37].

Avec les notations ci-dessus, le corollaire 10.7.1 montre que :

$$G.y \simeq G \times_P L / (q_{Q^u}(Q \cap H)C).G \times_P L /_{C.(L \cap Q^u.(Q \cap H))}.$$

# Chapitre 11

## Application à l'étude de $\mathcal{B}(G/H)$

### 11.1 Introduction

On désigne toujours par  $G$  un groupe algébrique semi-simple et par  $H$  un sous-groupe sphérique de  $G$ . On fixe également un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  opposé à  $H$ .

On se donne un plongement  $X$  projectif et sans couleur de  $G \times G/\Delta G$ . Si  $V \in \mathcal{B}(G/H)$ , on note  $\overline{V}^X$  l'adhérence de  $q^{-1}(V)$  dans  $X$ , où  $q : G \rightarrow G/H$  est l'application orbite. Dans cette section, on s'intéresse à l'intersection de  $\overline{V}^X$  avec les orbites de  $G \times G$  dans  $X$ . Autrement dit, nous allons généraliser la proposition 8.6.2 à un élément de  $\mathcal{B}(G/H)$  qui n'est pas une couleur. Ceci nous donnera une nouvelle interprétation géométrique du graphe  $\Gamma(G/H)$ .

### 11.2 Interprétation géométrique de $\Gamma(G/H)$

**11.2.1** — Commençons cette section par donner quelques notations. Si  $Z$  est une sous-variété fermée de  $X$ , on notera  $[Z]$  la classe de  $Z$  dans l'anneau de Chow  $A^*(X)$  gradué par la codimension. Le produit de deux éléments  $[Z]$  et  $[Z']$  de  $A^*(X)$  est noté  $[Z].[Z']$ .

Soit  $Z$  et  $Z'$  deux sous-variétés de  $X$ . Soit  $C$  une composante irréductible de  $Z \cap Z'$ . Si l'intersection de  $Z$  et de  $Z'$  le long de  $C$  est propre (c'est-à-dire que  $C$  a la dimension attendue), on note  $i(Z, Z', C)$  la multiplicité d'intersection de  $Z$  et  $Z'$  le long de  $C$ .

**11.2.2** — Soit  $V$  dans  $\mathcal{B}(G/H)$ . On rappelle que  $V^\circ$  désigne l'orbite ou-

verte de  $B$  dans  $V$ . On note  $\overline{V}^X$  l'adhérence de  $q^{-1}(V) \subset G$  dans  $X$ . Avec ces notations on a le :

**Lemme 11.2.1** *Soit  $X$  un plongement lisse et sans couleur de  $G \times G/\Delta G$  et  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ . Soit  $V \in \mathcal{B}(G/H)$ . Alors, pour tout  $V' \in \mathcal{B}(G/H)$ ,  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^{\circ}(1, V'^{\circ})$  est inclus dans  $\overline{\mathcal{O}} \cap \overline{V}^X$  si et seulement si  $V'$  est inclus dans  $V$ .*

*De plus,  $i(\overline{\mathcal{O}} \cdot \overline{V}^X, \overline{\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^{\circ}(1, V)}^X) = 1$ .*

**Preuve :** Notons  $\tilde{V}^{-1}$  l'image de  $q^{-1}(V)$  par l'automorphisme inverse :  $G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$ . Alors,  $\tilde{V}^{-1}$  est stable par  $H \times B$  dans  $G$  : notons  $V_B$  son image dans  $G/B$ . Soit  $g_0 \in G$ . Commençons par calculer  $\psi^{-1}(g_0 U^{-} B/B \cap V_B)$ . Pour cela considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} U \times U^{-} \times S & \xrightarrow{\iota} & X_{B \times B^{-}} \hookrightarrow X_{B \times G} \\ & & \downarrow \overline{\psi} \qquad \downarrow \psi \\ & & U^{-} B/B \hookrightarrow G/B. \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(g_0 U^{-} B/B \cap V_B) &= (1, g_0) \cdot \psi^{-1}(U^{-} B/B \cap g_0^{-1} V_B) \\ &= (1, g_0) \cdot \overline{\psi}^{-1}(g_0^{-1} V_B) \\ &= (1, g_0) \cdot \iota \left( U \times (U^{-} \cap g_0^{-1} \tilde{V}^{-1}) \times S \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Rappelons que  $x_{\mathcal{O}}$  est un point de  $S \cap \mathcal{O}$ . Alors, l'égalité (1) montre que les points de  $\psi^{-1}(g_0 U^{-} B/B \cap V_B) \cap \mathcal{O}$  s'écrivent  $(b, g) \cdot x_{\mathcal{O}}$  avec  $b \in B$  et  $g \in \tilde{V}^{-1} \cap g_0 U^{-}$ . Ainsi,

$$\psi^{-1}(g_0 U^{-} B/B \cap V_B) \cap \mathcal{O} = \left( (1, g_0) \cdot \mathcal{O}_{B \times B^{-}}^{\circ} \right) \cap \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^{\circ}(1, V).$$

Comme  $G/B$  est recouvert par les ouverts de la forme  $g_0 U^{-} B/B$ , on a montré que :

$$\psi^{-1}(V_B) \cap \mathcal{O} = \mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^{\circ}(1, V).$$

De plus, pour tout  $V' \in \mathcal{B}(G/H)$ ,  $\mathcal{BH}_{\mathcal{O}}^{\circ}(1, V')$  est inclus dans  $X_{B \times G}$ . La première assertion du lemme suit alors facilement.

Enfin, si on choisit  $g_0 \in G$  tel que  $g_0 U^-$  rencontre  $\tilde{V}^{-1}$ , l'égalité (1) implique aisément que la multiplicité d'intersection de  $\overline{\mathcal{O}}$  et de  $\overline{V}^X$  le long de  $\overline{\mathcal{B}\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(1, V)^X}$  est égale à celle de  $U \times (U^- \cap g_0^{-1} \tilde{V}^{-1}) \times S$  et de  $U \times U^- \times (\overline{\mathcal{O}} \cap S)$  le long de  $U \times (U^- \cap g_0^{-1} \tilde{V}^{-1}) \times (\overline{\mathcal{O}} \cap S)$ . De plus, comme  $X$  est lisse,  $S$  l'est aussi et l'intersection de  $\overline{\mathcal{O}} \cap S$  et de  $S$  est transverse. Comme  $g_0^{-1} \tilde{V}^{-1} \cap U^-$  est isomorphe à un ouvert de  $V_B \subset G/B$ , l'intersection de  $U^-$  et de  $g_0^{-1} \tilde{V}^{-1} \cap U^-$  est transverse également. Le lemme est démontré.  $\square$

**11.2.3** — Nous pouvons maintenant montrer le

**Théorème 8** *Soit  $X$  un plongement sans couleur de  $G \times G/\Delta G$  et  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ . Soit  $V \in \mathcal{B}(G/H)$ . Alors, l'intersection de  $\overline{\mathcal{O}}^X$  et de  $\overline{V}^X$  est propre. De plus, dans l'anneau de Chow de  $X$ , on a :*

$$[\overline{\mathcal{O}}^X] \cdot [\overline{V}^X] = \sum d(V, w^{-1}) [\overline{\mathcal{B}\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(w, V')^X}],$$

où la somme porte sur les couples  $(w, V') \in W^{Po} \times \mathcal{B}(G/H)$  tels que  $w^{-1}$  monte  $V$  sur  $V'$ .

**Preuve :** Soit  $C$  une composante irréductible de  $\overline{\mathcal{O}}^X \cap \overline{V}^X$  qui rencontre  $\mathcal{O}$ . Alors  $C$  est de la forme  $\overline{\mathcal{B}\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(w, V_1)^X}$  pour  $w \in W^{Po}$  et  $V_1 \in \mathcal{B}(G/H)$ . Si  $w = 1$ , le lemme 11.2.1 montre que  $V_1 = V$  et  $i(\overline{\mathcal{O}}^X \cdot \overline{V}^X, C) = 1$ . Supposons que  $w$  est non trivial et fixons  $\alpha$  une racine simple de  $(B, T)$  telle que  $\alpha$  monte  $\overline{BwP}/P$ . Comme  $V$  et  $\mathcal{O}$  sont stables par  $B \times \{1\}$  et  $P_\alpha/B$  est complet, la variété

$$(P_\alpha \times \{1\}) \cdot (\overline{\mathcal{O}}^X \cap \overline{V}^X) = \overline{(P_\alpha \times \{1\}) \cdot V^X} \cap \overline{\mathcal{O}}^X$$

contient  $(P_\alpha \times \{1\})C$  comme composante irréductible. En particulier,  $\alpha$  monte  $V$ .

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \pi : P_\alpha \times_B X & \longrightarrow & X \\ \downarrow \sim & \nearrow & \uparrow \\ P_\alpha/B \times X & \xrightarrow{(pB/B, x) \mapsto x} & \end{array}$$

La proposition 8.3.1 appliquée dans  $G$  puis dans  $\mathcal{O}$  montre que, dans l'anneau de Chow de  $X$ , on a :

$$\pi_* [P_\alpha \times_B \overline{V}^X] = d(V, s_\alpha) [P_\alpha \overline{V}^X],$$

et

$$\pi_*[P_\alpha \times_B C] = [P_\alpha C].$$

De plus, comme  $\overline{\mathcal{O}}^X$  est stable par  $P_\alpha$ , on a  $\pi^*[\overline{\mathcal{O}}^X] = [P_\alpha \times_B \overline{\mathcal{O}}^X]$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} d(V, s_\alpha)[P_\alpha \overline{V}^X].[\overline{\mathcal{O}}^X] &= \pi_* \left( [P_\alpha \times_B \overline{V}^X].\pi^*[\overline{\mathcal{O}}^X] \right) \\ &= \pi_* \left( [P_\alpha \times_B \overline{V}^X].[P_\alpha \times_B \overline{\mathcal{O}}^X] \right) \end{aligned}$$

De plus, d'après la proposition 8.3.1, si  $C'$  est l'adhérence dans  $X$  d'une orbite de  $B \times H$  dans  $\mathcal{O}$  telle que  $P_\alpha C' = P_\alpha C$ , alors  $C = C'$ . Mais alors, on a montré que :

$$i(\overline{V}^X.\overline{\mathcal{O}}^X, C) = d(V, s_\alpha).i\left(\overline{(P_\alpha \times \{1\}).\overline{V}^X.\overline{\mathcal{O}}^X}, (P_\alpha \times \{1\}).C\right).$$

Par récurrence sur la codimension de  $BwP/P$  dans  $G/P$ , et utilisant le lemme 11.2.1, on obtient : pour tout  $\tau \in W$  tel que  $\tau$  monte  $BwP/P$  à  $G/P$ , on a

$$i(\overline{V}^X.\overline{\mathcal{O}}^X, C) = d(V, \tau).$$

De plus,  $(B\tau B \times \{1\})C = \overline{\mathcal{BH}_\mathcal{O}^\circ(1, V_1)^X}$  est une composante irréductible de  $\overline{B\tau V}^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ . Alors le lemme 11.2.1 montre que  $V_1^\circ$  est l'orbite ouverte de  $B$  dans  $B\tau V$ .

Comme pour tout  $w \in W^P$ , le seul élément de  $W$  qui monte  $BwP/P$  sur  $G/P$  est  $w^{-1}$ , nous avons montré le théorème pour les composantes irréductibles de  $\overline{\mathcal{O}}^X \cap \overline{V}^X$  qui rencontrent  $\mathcal{O}$ .

Supposons qu'il existe une composante irréductible  $C$  de  $\overline{\mathcal{O}}^X \cap \overline{V}^X$  incluse dans  $\overline{\mathcal{O}}^X - \mathcal{O}$ . Considérons l'orbite  $\mathcal{O}'$  de  $G \times G$  dans  $X$  telle que  $\mathcal{O} \cap \overline{V}^X$  est ouvert dans  $\overline{V}^X$ . La preuve ci-dessus appliquée à l'intersection  $\overline{\mathcal{O}}^X \cap \overline{V}^X$  et le lemme 8.2.2 montrent que :

$$\dim(\mathcal{O}') - \dim(C) = \dim(G/H) - \dim(V).$$

En particulier,  $\dim(C) < \dim(\mathcal{O}) + \dim(\overline{V}^X) - \dim(X)$ . Cette inégalité est impossible pour une composante irréductible de  $\overline{\mathcal{O}}^X \cap \overline{V}^X$ .  $\square$

**Remarque :** Pour rendre à Cesar ce qui appartient à M. Brion, signalons que l'argument utilisé dans la preuve du théorème 8 est une adaptation simple de celui employé par M. Brion dans [13].

### 11.2.1 Une question sur $[\overline{V}^X]$

Il est bien connu des spécialistes que le groupe de Chow de  $X$  est engendré par les classes de sous-variétés stables par  $B \times B^-$  dans  $X$ . Si  $V$  est un élément de  $\mathcal{B}(G/H)$  on peut alors vouloir écrire  $[\overline{V}^X]$  comme une combinaison linéaire de sous-variétés stables par  $B \times B^-$ .

Dans le même esprit, M. Brion a montré (voir [13]) que dans le groupe de Chow  $A^*(G/B)$ , on a :

$$[V_B] = \sum_{w \text{ monte } V \text{ sur } G/H} d(V, w) [\overline{B^- w B / B}].$$

Une question naturelle est de savoir si l'égalité

$$[\overline{V}^X] = \sum_{w \text{ monte } V \text{ sur } G/H} d(V, w) [\overline{B w^{-1} B^-}] \quad (11.1)$$

est vraie dans  $A^*(X)$ .

Notons  $c$  le membre de droite de l'égalité 11.1. Nous ne savons pas si cette égalité est satisfaite. En revanche, nous pouvons montrer le lemme suivant qui permet d'espérer une réponse positive.

**Lemme 11.2.2** *Soit  $Z$  une orbite fermée de  $G \times G$  dans  $X$ . Alors, avec les notations ci-dessus, dans  $A^*(X)$ , on a :*

$$[\overline{V}^X].[Z] = c.[Z]$$

**Preuve :** D'après le théorème 8, on a :

$$[\overline{V}^X].[Z] = \sum_{w \text{ monte } V \text{ sur } V'} d(V, w) [\overline{B w^{-1} B^- / B^- \times V'_B}].$$

Or, d'après [13], on a :

$$[V'_B] = \sum_{\tau \text{ monte } V' \text{ sur } G/H} d(V', \tau) [\overline{B^- \tau B / B}].$$

Alors, on obtient :

$$[\overline{V}^X].[Z] = \sum d(V, w) d(V', \tau) [\overline{B w^{-1} B^- / B^- \times B^- \tau B / B}], \quad (11.2)$$

où la somme porte sur les couples  $(w, \tau) \in W^2$  tels que  $w$  monte  $V$  sur  $V'$  et  $\tau$  monte  $V'$  sur  $G/H$  dans  $\Gamma(G/H)$ .

À un couple  $(w, \tau)$  apparaissant dans cette somme on associe le couple  $(w_1, \tau_1) \in W \times W$  défini par :

$$\begin{cases} w_1 = \tau w \\ \tau_1 = w \end{cases} \qquad \begin{cases} w = \tau_1 \\ \tau = w_1 \tau_1^{-1} \end{cases} \qquad (11.3)$$

Alors,  $w_1$  monte  $V$  sur  $G/H$  et  $l(\tau_1) + l(w_1 \tau_1^{-1}) = l(w_1)$ . Réciproquement, à tout couple  $(w_1, \tau_1)$  satisfaisant ces conditions on peut associer par les formules 11.3 un couple  $(w, \tau)$  apparaissant dans la somme 11.2. De plus, la condition «  $l(\tau_1) + l(w_1 \tau_1^{-1}) = l(w_1)$  » est équivalente à «  $\tau_1^{-1}$  monte  $\overline{Bw_1^{-1}B^-}/B$  dans  $\Gamma(G/B^-)$  ». On en déduit que :

$$[\overline{V}^X].[Z] = \sum_{\substack{w_1 \text{ monte } V \text{ sur } G/H \\ \tau_1 \text{ monte } \overline{Bw_1^{-1}B^-}/B^-}} d(V, w_1)[\overline{B\tau_1^{-1}B^-}/B^- \times \overline{B^-w_1\tau_1^{-1}B}/B].$$

Par ailleurs, on a :

$$c.[Z] = \sum_{w \text{ monte } V \text{ sur } G/H} d(V, w)[\overline{Bw^{-1}B^-}].[Z].$$

On applique alors le théorème 8 pour  $H = B^-$  à chaque  $[\overline{Bw^{-1}B^-}].[Z]$ . On obtient :

$$c.[Z] = \sum_{\substack{w \text{ monte } V \text{ sur } G/H \\ \tau \text{ monte } \overline{Bw^{-1}B^-}/B^-}} d(V, w)[\overline{B\tau^{-1}B^-}/B^- \times \overline{B^-w\tau^{-1}B}/B].$$

Le lemme est démontré.  $\square$

Soit  $D$  une couleur de  $G/H$ . Le lemme 8.6.1 montre que  $\overline{D}^X$  est un diviseur de Cartier de  $X$  et calcule le fibré en droites associé (il s'agit de  $\mathcal{L}_{\gamma_D}$  avec les notations usuelles). On en déduit facilement que l'égalité 11.1 est satisfaite lorsque  $V = D$  est une couleur.

# Annexe A

## Un espace homogène sphérique

### A.1 Introduction

Dans cette annexe, nous allons calculer les données combinatoires (le cône des valuations  $\mathcal{CV}(G/H)$ , l'ensemble des couleurs  $\mathcal{D}(G/H)$ , le graphe  $\Gamma(G/H)$  etc ...) associées à un espace homogène sphérique donné. Bien que la plupart des choses calculées ici soit déjà connues, il est intéressant de voir les techniques utilisées pour calculer ces objets. De plus, cet exemple nous a servi de guide dans notre travail. Il est le premier exemple d'espace homogène sobre non releuable (voir la remarque suivant le théorème 4). Dans le paragraphe 7.2.3, nous illustrons le théorème 5 sur cet exemple. Nous avons également considéré cet exemple dans les sections 9.4.2 et 10.7.

### A.2 $\mathbf{SP}(4)$

Soit  $V = \mathbb{C}^4$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_4)$  la base canonique de  $V$ . Dans toute la suite, si  $v \in V$  est non nul, on notera  $[v]$  la classe de  $v$  dans  $\mathbb{P}(V)$ . On considérera aussi  $\wedge^2 V$ , le produit extérieur de  $V$  avec lui-même. On plonge la Grassmannienne des droites de  $\mathbb{P}(V)$  ou des plans de  $V$  dans  $\mathbb{P}(\wedge^2 V)$ . Ainsi, on notera  $[v \wedge w]$  le plan engendré par  $v$  et  $w$  dans  $V$ .

Considérons,  $\omega$  la forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur  $V$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère  $G = \mathbf{SP}(4)$  le stabilisateur de  $\omega$  dans  $\mathbf{GL}(4)$ . Dans cette section, nous exhiberons un tore maximal de  $G$ , un sous-groupe de Borel de  $G$  ainsi que les racines de  $(G, T)$  et  $(B, T)$ . Nous déterminerons également les poids fondamentaux. On peut bien entendu trouver ces résultats dans la littérature (voir par exemple [22]).

Un sous-groupe de Borel et un tore maximal de  $G$

Soit  $B$  le stabilisateur dans  $G$  de  $[e_1]$  et  $[e_1 \wedge e_3]$ . On vérifie alors aisément que  $G/B$  est l'ensemble des couples  $(d, p)$  où  $d$  est une droite de  $V$  incluse dans le 2-plan isotrope  $p$  (isotrope signifie que la restriction de  $\omega$  à  $p$  est nulle). En particulier,  $G/B$  est compact et  $B$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ . De plus,  $B$  stabilise l'orthogonal de  $e_1$  et donc un drapeau complet de  $V$ . Ainsi,  $B$  est résoluble. Finalement,  $B$  est un sous-groupe de Borel de  $G$ .

En écrivant  $\omega(v_i, v_j) = \omega(e_i, e_j)$  pour tous les couples  $(v_i, v_j)$  de vecteurs colonnes de  $B$ , on montre aisément que

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} t & a & d & e \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b & u & f \\ 0 & c & 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \text{ telle que } dt^{-1} + uc = cf - et^{-1} - bu^{-1} = 0 \right\}.$$

Considérons alors l'application :

$$i : k^* \times k^* \longrightarrow B \\ (t, u) \longmapsto \begin{pmatrix} t & & & \\ & t^{-1} & & \\ & & u & \\ & & & u^{-1} \end{pmatrix}.$$

L'image de  $i$  est un tore de  $B$  que l'on note  $T$ . Soit  $\chi_1$  et  $\chi_2$  les caractères de  $T$  définis par

$$\chi_1(i(t, u)) = t \text{ et } \chi_2(i(t, u)) = u \quad \forall t, u \in k^*.$$

On a alors :  $\mathcal{X}(T) = \mathbb{Z}\chi_1 \oplus \mathbb{Z}\chi_2$ .

Considérons  $\alpha = \chi_1 - \chi_2$  et  $\beta = 2\chi_2$ . Posons,

$$u_{2\alpha+\beta} = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 \end{array} \right) \quad u_\beta = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$u_\alpha = \left( \begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & -1 & & 0 \end{array} \right) \quad u_{\alpha+\beta} = \left( \begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

On montre facilement que  $u_\alpha$ ,  $u_\beta$ ,  $u_{\alpha+\beta}$  et  $u_{2\alpha+\beta}$  sont des vecteurs propres pour l'action de  $T$  par conjugaison respectivement de poids  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha + \beta$  et  $2\alpha + \beta$ . De plus, on a :

$$\text{Lie}(B) = \text{Lie}(T) \oplus k.u_{2\alpha+\beta} \oplus k.u_\beta \oplus k.u_\alpha \oplus k.u_{\alpha+\beta}.$$

On en déduit que  $T$  est un tore maximal de  $G$  et que l'ensemble  $\Phi^+$  des racines positives vaut :

$$\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta\}.$$

Mais alors,  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines simples de  $(B, T)$ .

On calcule alors :

$$h_\alpha = [u_\alpha, {}^t u_\alpha] = \text{diag}(1, -1, -1, 1) \quad \text{et} \quad h_\beta = [u_\beta, {}^t u_\beta] = \text{diag}(0, 0, 1, -1).$$

On vérifie aisément que  $\alpha(h_\alpha) = \beta(h_\beta) = 2$ . Mais alors,  $h_\alpha$  et  $h_\beta$  sont les coracines de  $(G, B)$  et  $(\omega_\alpha, \omega_\beta)$  est la base duale de  $(h_\alpha, h_\beta)$ . On en déduit que  $\omega_\alpha = \chi_1 + \chi_2$  et  $\omega_\beta = \chi_1$ .

On a montré que les racines et poids fondamentaux de  $(B, T)$  sont comme sur la figure 11.1.

On vérifie alors que sur cette figure,  $\omega_\alpha$  (resp.  $\omega_\beta$ ) est orthogonal à  $\alpha$  (resp. à  $\beta$ ). Ainsi, tout produit scalaire induit par cette figure (il faut choisir une longueur) est invariant par le groupe de Weyl.

### A.3 $\text{SP}(4)/k^* \times \text{SP}(2)$

**A.3.1** — Soit  $H$  le stabilisateur dans  $\text{SP}(4)$  du couple de points  $([e_2], [e_1 + e_2 + e_4])$  de  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)$ . L'espace homogène  $G/H$  s'identifie naturellement à l'ensemble des couples  $(d, d')$  de  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)$  tels que  $d$  et  $d'$  ne sont pas orthogonales pour  $\omega$ .

En particulier,  $H$  est conjugué au stabilisateur de  $([e_1], [e_2])$  : il est isomorphe à  $k^* \times \text{SP}(2)$  c'est-à-dire à  $k^* \times \text{SL}(2)$ .

Par ailleurs, il est facile de voir que  $B \cap H = \{\pm I_4\}$ . Mais alors,

$$\begin{aligned} \dim(BH) &= \dim B + \dim H - \dim(B \cap H) \\ &= 10 \\ &= 2 \dim B - \dim T \\ &= \dim G. \end{aligned}$$

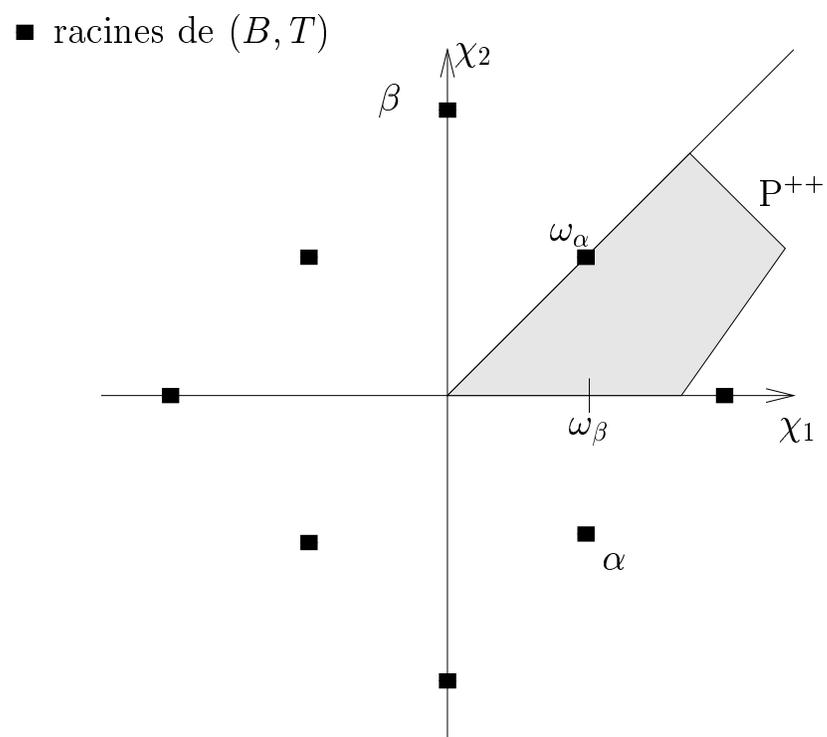


FIG. 11.1 – Système de racines de  $SP(4)$ .

Ainsi, l'espace homogène  $G/H$  est sphérique de rang 2.

**A.3.2** — Commençons par calculer les couleurs de  $G/H$ .

Soit  $\chi_0$  un générateur du groupe des caractères de  $H$  qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . On vérifie alors aisément que :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(B) \times_{\mathcal{X}(B \cap H)} \mathcal{X}(H) &= \{(a\omega_\alpha + b\omega_\beta, n\chi_0) : b - n \in 2\mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z}(\omega_\alpha, 0) + \mathbb{Z}(\omega_\beta, \chi_0) + \mathbb{Z}(\omega_\beta, -\chi_0). \end{aligned}$$

Or, comme  $V = V_{\omega_\beta} = V_{\omega_\beta}^*$ ,  $(V_{\omega_\beta}^* \otimes \chi_0)^H$  et  $(V_{\omega_\beta}^* \otimes -\chi_0)^H$  ne sont pas réduits à 0 (ils contiennent respectivement  $e_2$  et  $e_1 + e_2 + e_4$ ). De plus, comme  $(\bigwedge^2 V)^H = (k \oplus V_{\omega_\alpha})^H$  contient  $e_2 \wedge (e_1 + e_4)$ ,  $(V_{\omega_\alpha}^*)^H$  n'est pas réduit à 0. Ceci définit des fonctions  $[\omega_\alpha : 0]$  et  $[\omega_\beta : \pm\chi_0]$  régulières sur  $G$ . Par ailleurs, pour toute couleur  $D$  de  $G/H$ ,  $\gamma_D$  est dominant. On en déduit que les fonctions  $[\omega_\alpha : 0]$  et  $[\omega_\beta : \pm\chi_0]$  sont les équations de couleurs notées respectivement  $D$  et  $D^\pm$ .

Comme  $2[\omega_\beta : 0] = [\omega_\beta : \chi_0] + [\omega_\beta : -\chi_0]$ , avec les notations du paragraphe 2.2.3, on voit que :

$$\begin{aligned} \overline{\nu_D} &= \alpha^\vee \\ \overline{\nu_{D^\pm}} &= \frac{\beta^\vee}{2}. \end{aligned}$$

**A.3.3** — Calculons maintenant  $\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi)$ .

Soit  $\chi = n\chi_0$  (avec  $n \in \mathbb{Z}$ ) un caractère de  $H$ . D'après le lemme 3.3.2,  $\Gamma_\chi$  est l'ensemble des  $a\omega_\alpha + b\omega_\beta$  tels qu'il existe  $x, y$  et  $z$  dans  $\mathbb{N}$  vérifiant :

$$(a\omega_\alpha + b\omega_\beta, n\chi_0) = x(\omega_\alpha, 0) + y(\omega_\beta, \chi_0) + z(\omega_\beta, -\chi_0).$$

Ainsi,

$$\Gamma_\chi = \{a\omega_\alpha + b\omega_\beta : a \in \mathbb{N}, b - n \in 2\mathbb{Z} \text{ et } b \geq |n|\}.$$

Mais alors,

$$\mathbf{P}(G/H, \mathcal{L}_\chi) = \{a\omega_\alpha + b\omega_\beta : a \geq 0 \text{ et } b \geq |n|\}.$$

**A.3.4** — Nous allons calculer le cône,  $\mathcal{CV}(G/H)$  des valuations de  $G/H$ . Notons  $\text{Gr}_2(V)$  la grassmannienne des 2-plans dans  $V$ . Considérons

$$X = \{(d, d', p) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \times \text{Gr}_2(V) \text{ tels que } d, d' \in p\}.$$

On montre aisément que le groupe  $G$  agit sur  $X$  avec 4 orbites :

$$\begin{aligned} \{(d, d', p) : \omega(d, d') \neq 0\} &\simeq G/H = G.([e_2], [e_1 + e_2 + e_4], [e_2 \wedge e_1 + e_4]) \\ \{(d, d', p) : \omega(d, d') = 0 \text{ et } d \neq d'\} &= G.([e_2], [e_2 + e_4], [e_2 \wedge e_4]) \\ \{(d, d, p) : \omega|_p \neq 0\} &= G.([e_2], [e_2], [e_2 \wedge e_1 + e_4]) \\ \{(d, d, p) : \omega|_p = 0\} &= G.([e_2], [e_2], [e_2 \wedge e_4]) \end{aligned}$$

Le graphe d'incidence de ces orbites est représenté sur la figure 11.2. Afin d'alléger cette figure, nous avons omis les [ ].

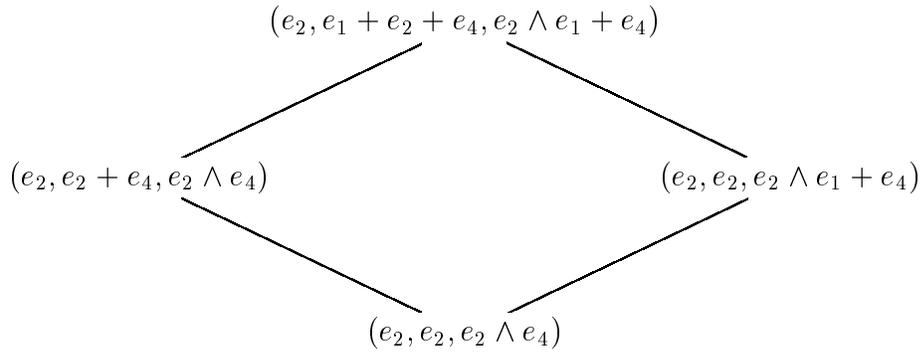


FIG. 11.2 – Incidences des orbites de  $G$  dans  $X$ .

En particulier,  $X$  est un plongement de  $G/H$  dont le point base est  $x = ([e_2], [e_1 + e_2 + e_4], [e_2 \wedge (e_1 + e_4)])$ . Comme  $X$  est complet, simple, contient 4 orbites dont deux sont de codimension 1 et une de codimension 2 et comme le rang de  $G/H$  est 2,  $X$  est le plongement canonique de  $G/H$ . Notons  $Z$  l'orbite fermée de  $G$  dans  $X$ . Mais alors, le cône  $\mathcal{C}(X, Z)$  n'est autre que  $\mathcal{CV}(G/H)$ .

On considère le sous-groupe à un paramètre de  $T$  défini par la formule :  $\nu_1(t) = i(t, t^{-1})$  où  $i$  est l'isomorphisme sus-cité entre  $k^* \times k^*$  et  $T$ . On a :

$$\nu_1(t).x \xrightarrow{t \rightarrow 0} ([e_2], [e_2 + e_4], [e_2 \wedge e_4]) =: x_1.$$

Or le stabilisateur dans  $B$  de  $x_1$  est de dimension 1. En particulier,  $B.x_1$  est dense dans  $G.x_1$ . La proposition 2.5.4 montre que, via les identifications usuelles, les images dans  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  de  $-\nu$  et de la valuation de  $k(G/H)$  dont le centre dans  $X$  est  $\overline{G.x_1}$  engendrent le même cône. De même,

$\nu_2(t) = i(t, t)$  s'identifie à l'opposé de la valuation associée au diviseur  $\overline{G.x_2}$  où  $x_2 = ([e_2], [e_2], [e_2 \wedge e_1 + e_4])$ . Ceci montre que :

$$\mathcal{CV}(G/H) = \mathbb{Q}^+ i(t^{-1}, t) + \mathbb{Q}^+ i(t^{-1}, t^{-1}).$$

Sur la figure 11.3, nous avons représenté la base  $(\lambda_1, \lambda_2)$  duale de  $(\chi_1, \chi_2)$ , le cône  $\mathcal{CV}(G/H)$  et les éléments  $\overline{\nu_D}$  et  $\overline{\nu_{D^\pm}}$  de  $\text{Hom}(\mathcal{X}(B)^{B \cap H}, \mathbb{Q})$  associés aux couleurs de  $G/H$ .

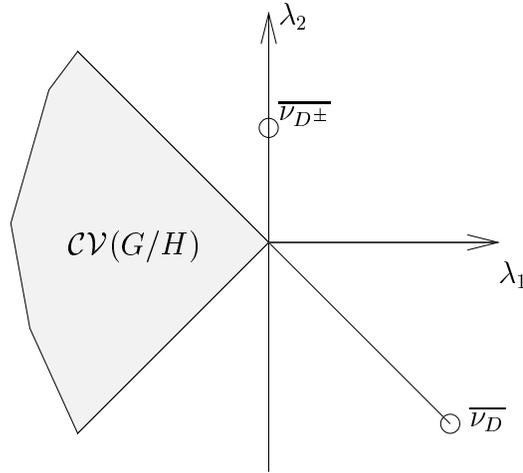


FIG. 11.3 – Cône des valuations de  $\text{SP}(4)/k^* \times \text{SP}(2)$ .

#### A.4 Action d'un sous-groupe de Borel de $G$ sur $\mathbb{P}(V)$

Il est facile de voir que  $B$  agit sur  $\mathbb{P}(V)$  avec 4 orbites; chacune étant dans l'adhérence de celles de dimensions supérieures :

| Description   | Représentant | Dimension |
|---|--------------|-----------|
| $\{[v] : \omega(v, e_1) \neq 0\}$                   | $= B.[e_2]$  | 3         |
| $\{[v] : \omega(v, e_1) = 0, v \notin [e_1, e_3]\}$ | $= B.[e_4]$  | 2         |
| $\{[v] : v \in [e_1, e_3], v \notin [e_1]\}$        | $= B.[e_3]$  | 1         |
| $[e_1]$   | $= B.[e_1]$  | 0         |

Les stabilisateurs des représentants sont :

$$B_{[e_2]} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & * \\ 0 & 0 & 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \quad B_{[e_4]} = \begin{pmatrix} t & * & * & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & * \\ 0 & * & 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$$

$$B_{[e_3]} = \begin{pmatrix} t & * & 0 & * \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & * & u & * \\ 0 & 0 & 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \quad B_{[e_1]} = B$$

### A.5 Action de $H$ sur $G/P_\beta$ et $G/P_\alpha$

– L'espace homogène  $G/P_\alpha$  s'identifie à  $\mathbb{P}(V)$ . L'orbite par  $H$  d'un point de  $\mathbb{P}(V)$  dépend uniquement de sa position par rapport aux points  $[e_1]$  et  $[e_2]$  et à leurs orthogonaux pour  $\omega$ . On obtient 7 orbites, dont les incidences sont représentées sur la figure 11.4.

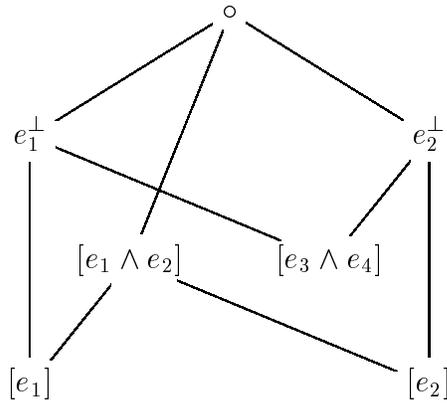


FIG. 11.4 – Incidences des orbites de  $H$  dans  $G/P_\alpha$ .

– On voit ici l'espace homogène  $G/P_\beta$  comme l'ensemble des 2-plans de  $V$  isotropes pour  $\omega$ . On notera  $\mathcal{P}$  un tel plan.

**Lemme 11.2.3** *Si  $\mathcal{P}$  est un plan isotrope de  $V$  alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\mathcal{P} \cap [e_1 \wedge e_2] \neq \{0\}$
- (ii)  $\mathcal{P} \cap [e_3 \wedge e_4] \neq \{0\}$

**Preuve :** Par « symétrie » il suffit de montrer que (i) implique (ii). Supposons donc que  $\mathcal{P} \cap [e_1 \wedge e_2] \neq \{0\}$ . Comme  $\mathcal{P}$  est isotrope,  $\mathcal{P} \cap [e_1 \wedge e_2]$  est alors une droite que l'on note  $\mathcal{D}$ . De plus,  $\mathcal{P}$  est inclus dans l'orthogonal de  $\mathcal{D}$  qui est engendré comme espace vectoriel par  $e_3, e_4$  et  $\mathcal{D}$ . Il est alors facile de voir que  $\mathcal{P} \cap [e_3 \wedge e_4]$  est non nul.  $\square$

On en déduit que  $H$  agit sur  $G/P_\beta$  avec 4 orbites dont les incidences sont représentées sur la figure 11.5.

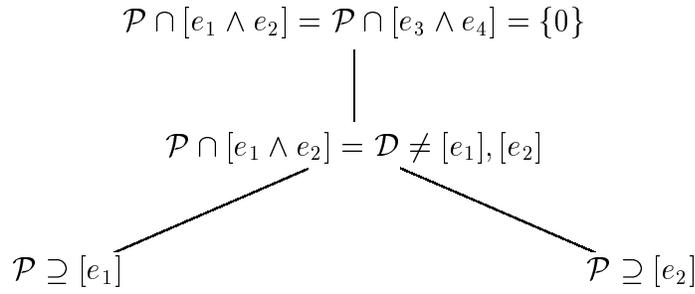


FIG. 11.5 – Incidences des orbites de  $H$  dans  $G/P_\beta$ .

## A.6 Action de $B$ sur $G/H$

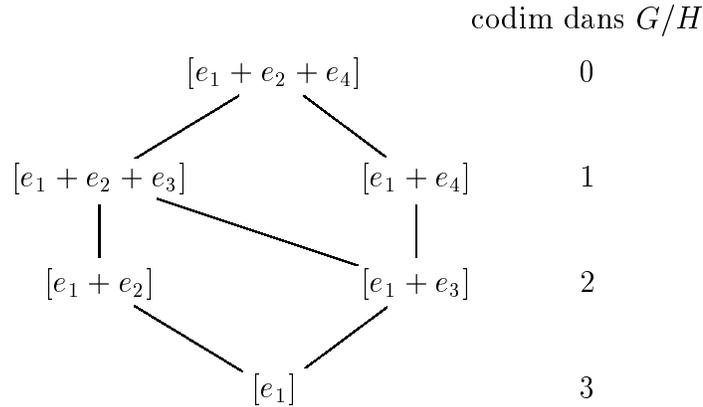
On voit  $G/H$  comme  $\{([v], [w]) \text{ tels que } \omega(v, w) \neq 0\}$ . Notons  $p$  la projection de  $G/H$  sur  $\mathbb{P}(V)$  définie par  $([v], [w]) \mapsto [v]$ ;  $p$  est surjective. D'après la section A.4, chaque orbite de  $B$  dans  $G/H$  correspond à une orbite de  $B_{[e_i]}$  dans  $p^{-1}([e_i])$  pour  $i = 1, 2, 3$  ou  $4$ .

- Les orbites de  $B_{[e_1]} = B$  dans  $p^{-1}([e_1]) = \mathbb{P}(V) - e_1^\perp$ .

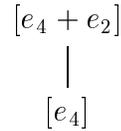
Il n'y en a qu'une, celle de  $[e_2]$ .

- Les orbites de  $B_{[e_2]}$  dans  $p^{-1}([e_2]) = \mathbb{P}(V) - e_2^\perp$ .

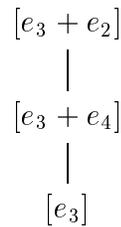
Il y en a 6. Sur la figure suivante nous avons choisi un représentant par orbite de  $B_{[e_2]}$  dans  $\mathbb{P}(V) - e_2^\perp$  et tracé les incidences entre ces orbites.



- Les orbites de  $B_{[e_3]}$  dans  $p^{-1}([e_3]) = \mathbb{P}(V) - e_3^\perp$ .  
Il y en a 2. En voici des représentants et leurs incidences :



- Les orbites de  $B_{[e_4]}$  dans  $p^{-1}([e_4]) = \mathbb{P}(V) - e_4^\perp$ .  
Il y en a 3 dont des représentants sont :



## A.7 Action du normalisateur de $H$ dans $G$

En général, le normalisateur,  $N_G(H)$  de  $H$  dans  $G$  agit sur  $G/H$  par « multiplication à droite ». Comme  $H$  agit trivialement, cette action induit une action de  $N_G(H)/H$  sur  $G/H$ . Cette action commute à celle de  $G$  et permute les orbites de  $B$  dans  $G/H$ .

Ici,  $N_G(H)/H$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . De plus, l'élément non trivial  $\sigma$  de  $N_G(H)/H$  agit sur  $G/H$  par :  $\sigma.([v], [w]) = ([w], [v])$ . Il est alors facile de

calculer l'image par  $\sigma$  des orbites  $\mathcal{O}$  de  $B$  dans  $G/H$  en remarquant de plus que  $\mathcal{O}$  et  $\sigma.\mathcal{O}$  ont la même dimension. Dans le tableau suivant, comme dans la section précédente, nous avons choisi un point sur chaque orbite  $\mathcal{O}$  de  $B$  dans  $G/H$ . On a :

| un point de $\mathcal{O}$    | un point de $\sigma.\mathcal{O}$ |
|------------------------------|----------------------------------|
| $([e_2], [e_1 + e_2 + e_4])$ | $([e_2], [e_1 + e_2 + e_4])$     |
| $([e_2], [e_1 + e_2 + e_3])$ | $([e_2], [e_1 + e_2 + e_3])$     |
| $([e_2], [e_1 + e_2])$       | $([e_2], [e_1 + e_2])$           |
| $([e_4], [e_3 + e_4])$       | $([e_4], [e_3 + e_4])$           |
| $([e_2], [e_1 + e_4])$       | $([e_4], [e_3 + e_2])$           |
| $([e_2], [e_1 + e_3])$       | $([e_3], [e_4 + e_2])$           |
| $([e_2], [e_1])$             | $([e_1], [e_2])$                 |
| $([e_4], [e_3])$             | $([e_3], [e_4])$                 |

Les diviseurs  $D^\pm$  sont des images réciproques de diviseurs de  $\mathbb{P}(V)$  par les projections  $p$  et  $p \circ \sigma$ . On en déduit que  $\sigma.D^+ = D^-$ . Mais alors,  $D$  est le seul diviseur stable par  $B$  fixé par  $\sigma$ . Ainsi, on a (quitte à échanger les noms de  $D^+$  et  $D^-$ ) :

$$\begin{aligned}
 - D &= \overline{B.([e_2], [e_1 + e_2 + e_3])} \\
 - D^+ &= \overline{B.([e_4], [e_3 + e_2])} \\
 - D^- &= \overline{B.([e_2], [e_1 + e_4])}
 \end{aligned}$$

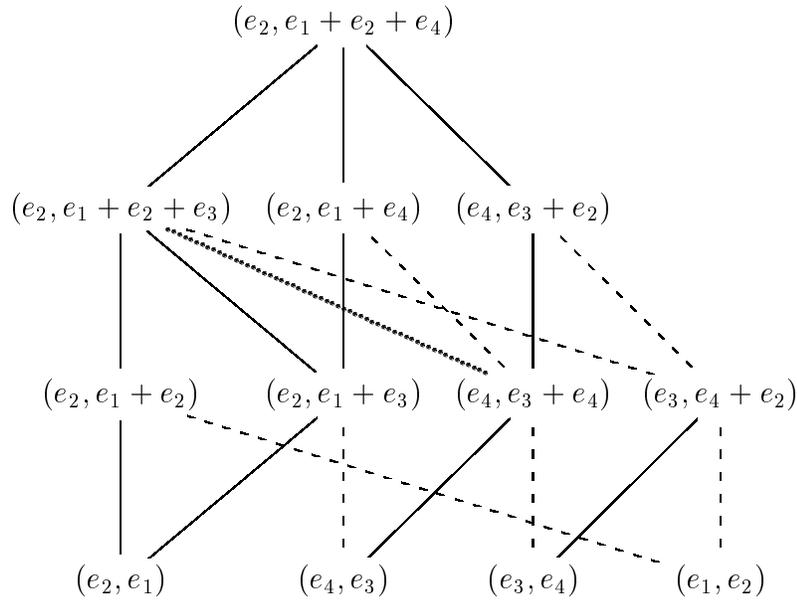
## A.8 Graphe d'incidence des orbites de $B$ dans $G/H$

En juxtaposant les graphes d'incidences obtenues dans la section A.6, on trouve les incidences suivantes en trait continu. Les incidences en pointillé sont ensuite obtenues par l'action de  $\sigma$ . L'incidence en ... sera justifiée ultérieurement.

Afin d'alléger le graphe, on sous-entend les [ ].

**Remarque :** 1. Connaissant les incidences des orbites de  $B$  dans  $\mathbb{P}(V)$ , en appliquant  $p$ , on voit que les incidences manquantes vont forcément de gauche à droite en descendant.

2. Nous montrerons qu'il ne manque en fait aucune incidence sur le graphe ci-dessus.

FIG. 11.6 – Incidences des orbites de  $B$  dans  $G/H$ .

Dans cette section, nous allons montrer que toutes les incidences entre orbites de  $B$  dans  $G/H$  sont représentées sur la figure 11.6. Nous déterminerons également le graphe  $\Gamma(G/H)$  défini dans la section 2.7. Pour cela, nous partons de l'orbite ouverte de  $B$  dans  $G/H$  et descendons « intervalle par intervalle » jusqu'aux orbites fermées. Dans un premier temps, nous ne regardons pas si les arêtes de  $\Gamma(G/H)$  sont simples ou doubles. Le résultat final est représenté sur la figure 11.7.

#### Incidences du premier intervalle

Vu son équation,  $D$  est stable par  $P_\beta$ . La proposition 2.7.1 implique que  $P_\alpha.D = G/H$ . De même, on obtient  $P_\alpha.D^\pm = D^\pm$  et  $P_\beta.D^\pm = G/H$ . Nous connaissons alors les arêtes de  $\Gamma(G/H)$  descendant de l'orbite ouverte de  $B$  dans  $G/H$ .

#### Incidences du deuxième intervalle

Vu le graphe 11.6, tous les diviseurs se rencontrent deux à deux. Mais alors,  $D \cap D^\pm$  et  $D^+ \cap D^-$  sont purs de codimension 2. On va calculer ces trois intersections.

- Vu la remarque A.8,  $([e_2], [e_1 + e_2])$  n'appartient ni à  $D^+$  ni à  $D^-$ . Mais alors, la proposition 2.7.1 impose que  $P_\beta \cdot ([e_2], [e_1 + e_2])$  est dense dans  $D$ .
- Vu la remarque A.8,  $([e_2], [e_1 + e_3])$  n'appartient pas à  $D^+$ . Par l'action de  $\sigma$ , on en déduit que  $([e_3], [e_4 + e_2])$  n'appartient pas à  $D^-$ . Ainsi,  $B \cdot ([e_4], [e_3 + e_4])$  est dense dans  $D^+ \cap D^-$ .  
De plus,  $D^+ \cap D^-$  est stable par  $P_\alpha$  et donc donne par  $P_\beta$  un diviseur stable par  $P_\beta : P_\beta \cdot ([e_4], [e_3 + e_4])$  est dense dans  $D$ .
- Remarquons que l'on a à ce moment toutes les incidences du deuxième intervalle : celles qui n'apparaissent pas sont impossibles (quitte à appliquer  $\sigma$ ) par la remarque A.8
- Comme  $D$  est stable par  $P_\beta$ , on a :  $P_\beta(D \cap D^+) = D \cap P_\beta \cdot D^+ = D$ . De même on montre que :

$$\begin{array}{ll} P_\beta(D \cap D^+) = D & P_\alpha(D \cap D^+) = D^+ \\ P_\beta(D \cap D^-) = D & P_\alpha(D \cap D^-) = D^- \end{array}$$

- Si  $P_\beta \cdot ([e_2], [e_1 + e_3])$  était dense dans  $D$ , de l'action de  $\sigma$  on déduirait que  $P_\beta \cdot ([e_3], [e_4 + e_2])$  est dense dans  $D$  : ceci ferait trois «  $\alpha$  » au-dessous de  $D$  ; c'est impossible. Donc, l'adhérence de l'orbite de  $([e_2], [e_1 + e_3])$  est stable par  $P_\beta$  et la proposition 2.7.1 implique  $P_\alpha \cdot ([e_2], [e_1 + e_3])$  est dense dans  $D^-$ .
- On obtient les autres actions de  $P_\beta$  et  $P_\alpha$  du deuxième intervalle par l'action de  $\sigma$ .

#### Incidences du troisième intervalle

- D'après la remarque A.8, on connaît toutes les orbites au-dessus de  $([e_2], [e_1])$ .
- De même,  $([e_4], [e_3])$  n'est pas en dessous de  $([e_3], [e_4 + e_2])$ . De plus, comme  $e_1$  est dans l'espace vectoriel engendré par tout couple de l'orbite  $B \cdot ([e_2], [e_1 + e_2])$ ,  $([e_4], [e_3])$  n'est pas dans l'adhérence de cette orbite de  $B$ . On a donc toutes les incidences du dernier étage.
- L'action de  $H$  sur  $\mathbb{P}(V) = G/P_\alpha$  montre qu'il existe 2 orbites de  $B$  dans  $G/H$  fermées stables par  $P_\alpha$  ; l'une étant dans  $D^+$  privé de  $D^-$  et l'autre dans  $D^-$  privé de  $D^+$ .

On en déduit aisément que  $([e_1, e_2])$  et  $([e_2, e_1])$  sont stables par  $P_\alpha$  alors que  $([e_3, e_4])$  et  $([e_4, e_3])$  ne le sont pas.

La proposition 2.7.1 impose que les adhérences dans  $G/H$  de  $P_\beta \cdot ([e_1, e_2])$  et de  $B \cdot ([e_2], [e_1 + e_3])$  coïncident ainsi que celles de  $P_\alpha \cdot ([e_4, e_3])$  et de  $B \cdot ([e_4], [e_3 + e_4])$ .

– On déduit de l'action de  $H$  sur  $G/P_\beta$  qu'aucune orbite fermée de  $B$  dans  $G/H$  n'est stable par  $P_\beta$ . Mais alors, la proposition 2.7.1 impose que les adhérences de  $P_\beta \cdot ([e_4, e_3])$  et de  $B \cdot ([e_2], [e_1 + e_3])$  coïncident. On connaît maintenant par l'action de  $\sigma$  les images par  $P_\beta$  et  $P_\alpha$  de chaque orbite de  $B$  dans  $G/H$ . Le diagramme d'incidence que l'on obtient est :

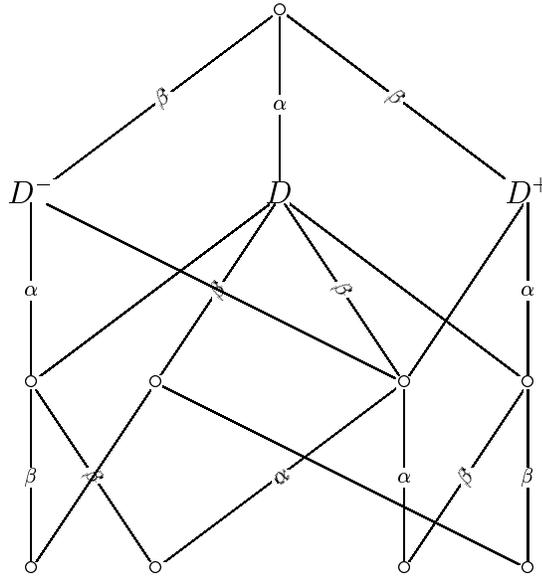


FIG. 11.7 – Le graphe  $\Gamma(G/H)$  et les incidences de  $\mathcal{B}(G/H)$ .

Sachant que les arêtes de type  $T$  diminuent le rang de 1 (voir la section 2.7), on peut facilement calculer le rang de chaque sommet du graphe de la figure 11.7. On en déduit alors que toutes les arêtes de  $\Gamma(G/H)$  sont de type  $T$  ou  $U$ . Ainsi, on obtient  $\Gamma(G/H)$  de la figure 11.7 en enlevant simplement les arêtes que ne sont étiquetées ni par  $\alpha$  ni par  $\beta$ .

Par ailleurs, connaissant l'action de  $N_G(H)/H$  sur  $\mathcal{B}(G/H)$ , il est facile de déduire le graphe  $\Gamma(G/N_G(H))$  de  $\Gamma(G/H)$ . On obtient alors :

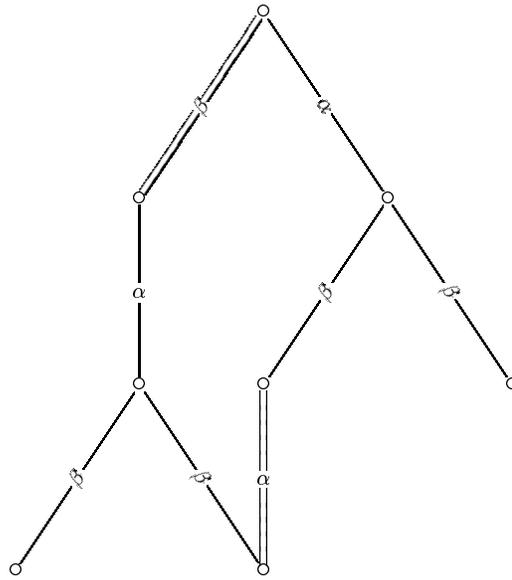


FIG. 11.8 – Le graphe  $\Gamma(G/N_G(H))$ .



# Bibliographie

1. A'CAMPO-NEUEN, A. et HAUSEN, J. Examples and counterexamples for existence of categorical quotients. arXiv.math.AG/0002096.
2. A'CAMPO-NEUEN, A. et HAUSEN, J. Quotients of toric varieties by the action of a subtorus. *Tohoku Math. J. (2)*, 51(1) :1–12, 1999.
3. A'CAMPO-NEUEN, BERCHTOLD et HAUSEN. Categorical quotients of simplicial toric varieties. arXiv.math.AG/0001131.
4. BIFET, E., DE CONCINI, C. et PROCESI, C. Cohomology of regular embeddings. *Adv. Math.*, 82(1) :1–34, 1990.
5. BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique. Fascicule XXVIII. Algèbre commutative. Chapitre 3 : Graduations, filtrations et topologies. Chapitre 4 : Idéaux premiers associés et décomposition primaire.* Hermann, Paris, 1961. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1293.
6. BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5 : Entiers. Chapitre 6 : Valuations.* Hermann, Paris, 1964. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1308.
7. BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VI : systèmes de racines.* Hermann, Paris, 1968.
8. BRION, M. On orbit closures of borel subgroups in spherical varieties. Prépub. Institut Fourier, n° 488.
9. BRION, M. Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques. *Duke Math. J.*, 58(2) :397–424, 1989.
10. BRION, M. Vers une généralisation des espaces symétriques. *J. Algebra*, 134(1) :115–143, 1990.

11. BRION, M. Spherical varieties. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 753–760, Basel, 1995. Birkhäuser.
12. BRION, M. Variétés Sphériques. *notes de la session de la S. M. F. "Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques"*, Grenoble, pages 1–60, 1997.
13. BRION, M. The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition. *Comment. Math. Helv.*, 73(1) :137–174, 1998.
14. BRION, M. et LUNA, D. Sur la structure locale des variétés sphériques. *Bull. Soc. Math. France*, 115(2) :211–226, 1987.
15. BRION, M. et PROCESI, C. Action d'un tore dans une variété projective. In A. Joseph A. Connes, M. Duflo and R. Rentschler, editors, *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory*, pages 509–539. Birkhäuser, 1990.
16. BRION M., LUNA D. et VUST, T. Espaces homogènes sphériques. *Invent. Math.*, 84(3) :617–632, 1986.
17. DE CONCINI, C. et PROCESI, C. Complete symmetric varieties. In *Invariant theory (Montecatini, 1982)*, pages 1–44. Springer, Berlin, 1983.
18. DE CONCINI, C. et PROCESI, C. Complete symmetric varieties. II. Intersection theory. In *Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983)*, pages 481–513. North-Holland, Amsterdam, 1985.
19. DE CONCINI, C. et PROCESI, C. Cohomology of compactifications of algebraic groups. *Duke Math. J.*, 53(3) :585–594, 1986.
20. DE CONCINI C., GORESKY M., MACPHERSON R. et PROCESI C. On the geometry of quadrics and their degenerations. *Comment. Math. Helv.*, 63(3) :337–413, 1988.
21. EISENBUD, D. *Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1995.
22. FULTON, W. et HARRIS, J. *Representation theory*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
23. FULTON, W. *Introduction to toric varieties*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. The William H. Roever Lectures in Geometry.

24. GROSSHANS, J.D. *Algebraic Homogeneous Spaces and Invariant Theory*. Springer, New York, 1997.
25. HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, New York, 1977.
26. HUMPHREYS, J.E. *Linear algebraic groups*. Springer Verlag, New York, 1975.
27. HU YI. Combinatorics and quotients of toric varieties. arXiv.math.AG/0004171.
28. KANNAN, S. Remarks on the wonderful compactification of semisimple algebraic groups. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 1999.
29. KAPRANOV M.M., STURMFELDS B. et ZELEVINSKY A.V. Quotients of toric varieties. *Math. Ann.*, 290 :643–655, 1991.
30. KLEIMAN S., STROMME S. A. et XAMBÓ S. Sketch of a verification of Schubert's number 5 819 539 783 680 of twisted cubics. In *Space curves (Rocca di Papa, 1985)*, pages 156–180. Springer, Berlin, 1987.
31. KLEIMAN, STEVEN L. Problem 15 : rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus. pages 445–482. Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII, 1976.
32. KLEIMAN, STEVEN L. Chasles's enumerative theory of conics : a historical introduction. In *Studies in algebraic geometry*, pages 117–138. Math. Assoc. America, Washington, D.C., 1980.
33. KNOP, F. The Luna-Vust theory of spherical embeddings. In *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989)*, pages 225–249, Madras, 1991. Manoj Prakashan.
34. KNOP F., KRAFT H. et VUST T. The Picard group of a  $G$ -variety. In *Algebraic transformation group and invariant theory*, pages 77–87. Birkhäuser, 1984.
35. KRAFT, H. *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1984.
36. LITTELMANN, P. et PROCESI, C. Equivariant cohomology of wonderful compactifications. In *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989)*, pages 219–262. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
37. LUNA, D. Toute variété magnifique est sphérique. *Transform. Groups*, 1(3) :249–258, 1996.

38. LUNA, D. et VUST, T. Plongements d'espaces homogènes. *Comment. Math. Helv.*, 58(2) :186–245, 1983.
39. MUMFORD, D. FOGARTY, J. et KIRWAN, F. *Geometric Invariant Theory*. Springer Verlag, New York, 3d edition, 1994.
40. ODA, T. *Convex bodies and algebraic geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.
41. POPOV, V. L. et VINBERG, È. B. Invariant theory. In *Algebraic geometry, 4 (Russian)*, pages 137–314, 315. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1989.
42. RENNER, LEX E. Reductive embeddings. In *Group actions and invariant theory (Montreal, PQ, 1988)*, pages 175–192. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
43. SHAFAREVICH, IGOR R. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.
44. SPRINGER, T. A. *Linear algebraic groups*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.
45. ŚWIECICKA, J. Quotients of toric varieties by actions of subtori. *Colloq. Math.*, 82(1) :105–116, 1999.
46. THADDEUS, M. Toric quotients and flips. In *Topology, geometry and field theory*, pages 193–213. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994.
47. VUST, T. Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes. *Bull. Soc. Math. France*, 102 :317–333, 1974.
48. WASSERMAN, B. Wonderful varieties of rank two. *Transform. Groups*, 1(4) :375–403, 1996.

-  $\diamond$  -