

À *mes parents,*
ma famille,
s.s.z

Je tiens à remercier tout d'abord Yves Laurent qui a dirigé cette thèse avec patience. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour sa disponibilité et ses conseils.

Je remercie infiniment Bernard Malgrange qui me fait l'honneur et le plaisir de présider le jury.

Je remercie vivement Philippe Maisonobe d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse, et des conversations enrichissantes que nous avons eues.

Je suis très heureux que Teresa Monteiro-Fernandes ait accepté de faire un rapport sur ce travail. Je tiens à lui exprimer mes vifs remerciements.

Jean-Pierre Demailly me fait le plaisir de participer au jury. Qu'il soit chaleureusement remercié.

Je remercie particulièrement Myriam Charles qui a su transformer avec soin et patience mes notes mal écrites en le présent texte.

Mes remerciements vont également à Feng Pan, Lahcène Haddak, Jawher El Goul et Laurence Coudurier pour leur soutien et pour leur gentillesse.

SOMMAIRE

<i>Introduction</i>	7
Chapitre 1. HYPERFONCTIONS HOLOMORPHES À CROISSANCE GEVREY	11
1.1. Quelques notations	13
1.2. Hyperfonctions holomorphes formelles	13
1.3. Hyperfonctions holomorphes à croissance Gevrey	14
Chapitre 2. CYCLES MICROCARACTÉRISTIQUES	19
2.1. F_r -filtrations des $\mathcal{D}_{[X]}$ -modules cohérents	21
2.2. Le cycle analytique $\text{Irr}(r)(\tilde{\Sigma})$	25
Chapitre 3. VARIÉTÉS MICROCARACTÉRISTIQUES D'UN \mathcal{D}_X-MODULE PORTÉ PAR UNE HYPERSURFACE	29
3.1. Image directe d'un \mathcal{D}_X -module à gauche	31
3.2. Le cas d'un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module porté par une hypersurface	33
Chapitre 4. LOCALISATION	35
4.1. Filtration d'un $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -module	37
4.2. "Cycles microcaractéristiques" d'un $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -module	40
Chapitre 5. PASSAGE À L'INFINI	41
Chapitre 6. COMPORTEMENT DES SOLUTIONS VIS-À-VIS DU PASSAGE À L'INFINI	51
Chapitre 7. THÉORÈMES D'INDICE	57
Chapitre 8. MICROLOCALISATION	63
8.1. Microfonctions holomorphes	65
8.2. Transformations canoniques	66
8.3. Transformations monoïdales	67
8.4. Opérateurs microdifférentiels polynomiaux	70
8.5. Théorèmes d'indice microlocal	71
Bibliographie	75

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier le comportement par passage à l'infini de certains cycles analytiques attachés aux \mathcal{D} -modules algébriques.

En dimension un, et après les travaux de Malgrange sur l'irrégularité ([28] et [29]), cette situation a été étudiée en détails par Ramis [33], qui définit le polygone de Newton d'un opérateur différentiel linéaire à coefficients polynomiaux et montre que, sur ce polygone, on peut lire les indices de cet opérateur quand il agit sur les différents espaces d'ultra-distributions à support ponctuel et de séries formelles. Ce polygone est un sous-ensemble de \mathbb{Q}^2 qui se décompose en deux parties :

La première, que nous appelons "la partie positive" caractérise les solutions séries formelles de type Gevrey de l'opérateur.

La deuxième, "la partie négative", n'est définie que pour les opérateurs à coefficients algébriques.

Ramis montre dans [33] qu'elle caractérise le type exponentiel des solutions entières de l'équation.

En fait, il démontre le résultat pour "la partie positive" par un calcul direct, ensuite en faisant un passage à l'infini, il ramène le cas de "la partie négative" au cas précédent.

En dimension supérieure, cette situation est plus compliquée. Elle a été étudiée par Laurent dans [14], [15], [16] et [21] dans le cas des \mathcal{D} -modules analytiques.

Soient Y une sous-variété lisse d'une variété analytique complexe X et $\Lambda = T_Y^*X$ le fibré conormal à Y dans X . Si r est un rationnel tel que $1 \leq r \leq +\infty$, nous notons par $\mathcal{O}_{X|Y}(r)$ (resp. $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$) le faisceau des séries formelles (resp. hyperfonctions) à croissance Gevrey (voir [16]).

Si \mathcal{M} est un \mathcal{D}_X -module cohérent défini au voisinage de Y , on peut lui associer d'une part les faisceaux de solutions $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ et d'autre part les cycles caractéristiques $\tilde{\mathrm{ch}}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ qui sont des cycles analytiques de $T^*\Lambda$ et qui sont définis à partir de filtrations convenables sur \mathcal{M} [14]. Laurent montre dans [16] que, si \mathcal{M} est holonome, les complexes $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ sont des complexes de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y et l'indice du couple $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ n'est autre que l'obstruction d'Euler du cycle $\tilde{\mathrm{ch}}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$.

De la même manière qu'en dimension un [33], nous allons faire un passage à l'infini, ce qui ramène le cas des \mathcal{D} -modules algébriques au cas ci-dessus traité par Laurent.

Cela nous permet d'utiliser ses résultats pour avoir des théorèmes d'indice dans le cas algébrique, à savoir, les théorèmes (7.1) et (8.5.2).

Dans un premier temps, on s'intéresse au cas d'un fibré en droites X de base Y , on identifie Y à la section nulle de X et on note par $\Lambda = T_Y^*X$ le fibré conormal à Y dans X . Si (x, t) sont des coordonnées locales de X qui soient linéaires dans les fibres de $p : X \rightarrow Y$ et telles que $Y = \{t = 0\}$, alors (x, τ) et (x, τ, x^*, τ^*) seront respectivement les coordonnées locales de Λ et de $T^*\Lambda$. On désigne par $\mathcal{D}_{[X]}$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur X et polynomiaux dans les fibres de $p : X \rightarrow Y$.

Dans le premier chapitre, nous étendons les définitions des hyperfonctions à croissance Gevrey de [16] au cas où r est un rationnel de $[-\infty, +\infty]$. Nous commençons donc par définir le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}$ des hyperfonctions holomorphes formelles qui est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module, ensuite, nous introduisons les faisceaux $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ et $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ comme des sous-faisceaux de $\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}$ avec des majorations convenables. Nous terminons ce chapitre par une liste de faisceaux de fonctions holomorphes et de séries formelles qui ont un rapport avec les faisceaux $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$.

Dans le deuxième chapitre, nous reprenons les notions (introduites par Laurent dans [14] et [18]) de cycles microcaractéristiques d'un \mathcal{D}_X -module cohérent \mathcal{M} muni de bonnes F_r -filtrations, et du cycle analytique $\text{Irr}(r)(\widehat{\Sigma})$ associé à une variété lagrangienne H_r -homogène Σ (voir [18]).

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons aux variétés microcaractéristiques de type r ($1 \leq r \leq +\infty$) d'un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent porté par une hypersurface. Nous nous basons sur un théorème de Kashiwara (Théorème 3.2.1) pour démontrer qu'en fait ces variétés sont indépendantes du rationnel choisi.

Le chapitre 4 est consacré à construire de F_r -filtrations sur l'anneau $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ le localisé de $\mathcal{D}_{[X]}$ le long de Y , elles ont été déjà définies par Sabbah dans [35], mais ici, nous les définissons d'une autre manière. Nous terminons ce paragraphe en définissant les cycles microcaractéristiques d'un $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -module \mathcal{P} . En fait, si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent tel que $\mathcal{P} = \mathcal{M}[*Y]$, et si $\Sigma^{(r)'}(\mathcal{M})$ est la réunion des composantes irréductibles de la variété microcaractéristique $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} qui ne sont pas contenues dans $\{\tau^* = 0\}$, alors le cycle analytique de \mathcal{P} n'est autre que le cycle caractéristique associé à $\Sigma^{(r)'}(\mathcal{M})$.

Dans le chapitre 5, nous introduisons le passage à l'infini : si (x, t) et (x, s) sont deux systèmes de coordonnées locales sur X qui vérifient les propriétés précédentes, le passage à l'infini est l'application χ qui à $(x, t) \in X - Y$ associe $(x, s = 1/t) \in X - Y$. Elle induit un automorphisme d'une part sur $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ (en particulier sur $\mathcal{D}_{[X]|U}$) et d'autre part sur le fibré $T^*\Lambda \setminus \{\tau^* = 0\}$. Cela nous permet de transformer un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent par l'isomorphisme induit par χ et d'étudier ses cycles microcaractéristiques au cours de cette transformation (théorème 5.3).

Nous nous intéressons dans le chapitre 6 au comportement des solutions vis-à-vis

de cette transformation : en effet, comme χ est un isomorphisme, cela induit des isomorphismes entre les faisceaux de solutions (proposition 6.5).

Le chapitre 7 comporte le théorème central de cette thèse à savoir, si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome, le complexe $\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ pour $r \in [-\infty, +\infty]$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y , en plus l'indice du couple $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ est donné par l'obstruction d'Euler des cycles $\tilde{\operatorname{ch}}(r)(\mathcal{M})$ associés à \mathcal{M} .

Pour $r \in [1, +\infty]$, le résultat est donné par le corollaire 4.3.2 de [16]. Si $r \in [-\infty, 1]$, grâce au passage à l'infini, on trouve des résultats similaires.

Dans le chapitre 8, nous microlocalisons les constructions du paragraphe 1 : si X est un fibré vectoriel de rang quelconque sur Y , nous identifions Y à la section nulle de X et nous notons par $\Lambda = T_Y^*X$ et \mathbb{P}_Y^*X respectivement le fibré conormal à Y dans X et le fibré projectif associé ($T_Y^*X - Y/\mathbb{C}^*$).

Nous définissons donc les microfonctions holomorphes à croissance Gevrey. Ces dernières sont des $\mathcal{E}_{[X]}$ -modules. Le faisceau $\mathcal{E}_{[X]}$ a été introduit par Laurent dans [14] (pour la définition voir (8.4)).

Si X est un fibré de rang un sur Y , nous donnons un théorème d'indice microlocal, dans le cas d'un fibré de rang quelconque, la situation est plus compliquée. Nous sommes amenés à considérer les transformations monoïdales qui nous permettent d'associer à un faisceau constructible sur $\Lambda = T_Y^*X$, un cycle lagrangien (noté $\operatorname{Irr}(\tilde{\Sigma})$) de $T^*(\mathbb{P}_Y^*X)$.

Par conséquent, nous démontrons (théorème 8.5.2) que le complexe

$$\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M}, C_{Y|X}(r, 1)/C_{Y|X}(s, 1))$$

où \mathcal{M} est un $\mathcal{E}_{[X]}$ -module holonome, est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur $\dot{\Lambda}$ et le cycle caractéristique associé est donné par :

$$\sum_{r \leq p \leq s} \operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M})).$$

En particulier, nous obtenons un théorème analogue au théorème 7.1 (mais moins fin) dans le cas d'un fibré vectoriel de rang quelconque, à savoir le corollaire 8.5.3.

Chapitre 1

HYPERFONCTIONS HOLOMORPHES À CROISSANCE GEVREY

Soient X une variété analytique complexe et Y une sous-variété lisse de X . Les faisceaux $\mathcal{B}_{Y|X}^\infty$ et $\mathcal{B}_{Y|X}$ des hyperfonctions holomorphes sur Y ont été définis dans [36].

Dans [13], Laurent a généralisé ces définitions aux faisceaux $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ et $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ pour tout rationnel r tel que $1 \leq r \leq +\infty$. On propose dans ce paragraphe d'étendre ces dernières aux cas où r est un rationnel quelconque lorsque X est un fibré vectoriel de base Y .

1.1. Quelques notations.

Dans toute cette partie, nous supposons que X est un fibré vectoriel de base Y . Nous noterons $p : X \rightarrow Y$ la projection canonique et nous identifierons Y à la section nulle de X .

Nous noterons également par \mathcal{O}_X le faisceau des fonctions holomorphes sur X et par $\mathcal{O}_X[*Y]$ le faisceau des fonctions méromorphes sur X à pôles dans Y .

Si $\mathcal{O}_{[X]}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur X polynomiales dans les fibres de p , $\mathcal{D}_{[X]}$ sera celui des opérateurs différentiels sur X à coefficients dans $\mathcal{O}_{[X]}$.

1.2. Hyperfonctions holomorphes formelles.

Rappelons tout d'abord que $\mathcal{B}_{Y|X}^\infty$ (resp. $\mathcal{B}_{Y|X}$) est le groupe de cohomologie locale (resp. algébrique) de degré d (d est la codimension de Y dans X) de \mathcal{O}_X à support dans Y . Alors, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{Y|X}^\infty &= H_Y^d(\mathcal{O}_X) \\ \mathcal{B}_{Y|X} &= H_{[Y]}^d(\mathcal{O}_X).\end{aligned}$$

Si X est un fibré de rang un sur Y , $\mathcal{B}_{Y|X}^\infty$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur $X - Y$ modulo les fonctions holomorphes sur X . Quant à $\mathcal{B}_{Y|X}$, il n'est autre que le sous-faisceau de $\mathcal{B}_{Y|X}^\infty$ engendré par les fonctions méromorphes sur Y .

Identifions Y à la section nulle de X et choisissons des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_d)$ qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$.

Une section de $\mathcal{B}_{Y|X}^\infty$ (resp. $\mathcal{B}_{Y|X}$) sur un ouvert U (de coordonnées locales) de Y est une série formelle (resp. finie) $\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \delta^{(\alpha)}(t)$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall K \subset\subset U, \quad \exists C_{\varepsilon} > 0, \quad \sup_K |a_{\alpha}(x)| \leq C_{\varepsilon} \cdot \varepsilon^{|\alpha|} \cdot \frac{1}{|\alpha|!}.$$

Rappelons que si X est un fibré en droite sur Y , $\delta^{(\alpha)}(t)$ est la classe d'équivalence de la fonction méromorphe :

$$\Phi_{\alpha}(t) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{\alpha!}{(-t)^{\alpha+1}}.$$

D'autre part, si $y = a(x)$ et $s = b(x) \cdot t$ avec $b(x)$ une matrice de fonctions holomorphes inversible sur Y , est un changement de coordonnées du fibré X , on a $D_{s_k} = \sum_{i=1}^d a_i^k(x) D_{t_i}$ où les $a_i^k(x)$ sont des fonctions holomorphes sur Y . Donc les faisceaux $\sum_{|\alpha|=k} D_t^{|\alpha|} \mathcal{B}_{Y|X}^\infty$ pour tout $k \geq 0$ sont indépendants des coordonnées choisies.

On définit alors le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}$ des hyperfonctions holomorphes formelles par :

$$\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X} = \varprojlim_k \mathcal{B}_{Y|X}^\infty / \sum_{|\alpha|=k} D_t^{|\alpha|} \mathcal{B}_{Y|X}^\infty$$

où la limite projective est donnée via les applications :

$$f_k : \mathcal{B}_{Y|X}^\infty / \sum_{|\alpha|=k} D_t^{|\alpha|} \mathcal{B}_{Y|X}^\infty \longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X}^\infty / \sum_{|\alpha|=k-1} D_t^{|\alpha|} \mathcal{B}_{Y|X}^\infty.$$

PROPOSITION 1.2.1. — *Le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}_{[X]}$ -module.*

Preuve. — Soit P un élément de $\mathcal{D}_{[X]}$.

P envoie $\mathcal{B}_{Y|X}^\infty / \sum_{|\alpha|=k} D_t^{|\alpha|} \mathcal{B}_{Y|X}^\infty$ dans $\mathcal{B}_{Y|X}^\infty / \sum_{|\alpha|=k-m} D_t^{|\alpha|} \mathcal{B}_{Y|X}^\infty$, avec m le plus grand degré en t des coefficients de l'opérateur P . Comme cette opération est compatible avec les applications f_k , alors $\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}_{[X]}$ -module.

De la même manière, on définit le complété formel $\widehat{\mathcal{O}}_{X|Y}$ de \mathcal{O}_X le long de Y , si I_Y est l'idéal de définition de Y , alors

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X|Y} = \varprojlim_k \mathcal{O}_X / I_Y^k$$

la limite projective est donnée par les applications $g_k : I_Y^{k+1} \rightarrow I_Y^k$.

Supposons maintenant que X est un fibré en droites de base Y . Si on désigne par $\mathcal{O}_X[*Y][k]$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X[*Y]$, des fonctions méromorphes sur Y à pôles au plus d'ordre k , le faisceau $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$ des fonctions singulières formelles est donnée par :

$$\mathcal{O}_X(\widehat{*Y}) = \varprojlim_k \mathcal{O}_X[*Y][k]$$

où la limite est prise sur les fonctions $h_k : \mathcal{O}_X[*Y][k] \rightarrow \mathcal{O}_X[*Y][k-1]$.

Vu la compatibilité des applications g_k et h_k avec l'action de $\mathcal{D}_{[X]}$, les faisceaux $\widehat{\mathcal{O}}_{X|Y}$ et $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$ sont également des $\mathcal{D}_{[X]}$ -modules.

1.3. Hyperfonctions holomorphes à croissance Gevrey.

X est toujours un fibré vectoriel de base Y .

Si des coordonnées locales sont choisies sur un ouvert U suffisamment petit de Y , $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{B}}_{Y|X})$ s'identifie à l'ensemble des séries formelles $\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \delta^{(\alpha)}(t)$ où $\{a_{\alpha}(x)\}_{\alpha}$ est une suite de fonctions holomorphes sur U .

On définit les faisceaux $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ et $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ (pour $r \in \mathbb{Q}$) comme les sous-faisceaux de $\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}$ des séries $\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \delta^{(\alpha)}(t)$ qui vérifient respectivement :

$$\forall K \subset\subset U, \quad \exists C > 0, \quad \sup_K |a_{\alpha}(x)| \leq C^{|\alpha|} \cdot \frac{1}{(|\alpha|!)^r}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall K \subset\subset U, \quad \exists C_{\varepsilon} > 0, \quad \sup_K |a_{\alpha}(x)| \leq C_{\varepsilon} \cdot \varepsilon^{|\alpha|} \cdot \frac{1}{(|\alpha|!)^r}.$$

Un calcul direct montrerait que ces définitions sont indépendantes des coordonnées locales choisies. Nous ne le détaillerons pas car nous retrouverons ce résultat par une autre méthode au paragraphe 8.

On pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{Y|X}(-\infty) &\stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathcal{B}}_{Y|X} \\ \mathcal{B}_{Y|X}\{1\} &= \mathcal{B}_{Y|X}^{\infty} \\ \mathcal{B}_{Y|X}(+\infty) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}_{Y|X}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.3.1. — *Pour tout rationnel $-\infty \leq r \leq +\infty$, les faisceaux $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ et $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ sont des $\mathcal{D}_{[X]}$ -modules.*

Preuve. — Comme $\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module, il suffit donc de vérifier que dans un système de coordonnées locales, l'action de $\mathcal{D}_{[X]}$ sur $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ et $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ conserve les majorations du paragraphe 1.3.

Or un opérateur de $\mathcal{D}_{[X]}$ est une somme finie $\sum a_{\alpha\beta\gamma}(x) t^{\alpha} D_x^{\beta} D_t^{\gamma}$, donc il suffit de vérifier que les majorations sont conservées par les monômes $t^{\alpha} D_x^{\beta} D_t^{\gamma}$.

Soient U un ouvert de coordonnées de Y et V un voisinage de U dans X .

Soit $u = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha}(x) \delta^{(\alpha)}(t)$ une section de $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ sur U , donc pour tout compact K de U , il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sup_K |a_{\alpha}(x)| \leq C^{|\alpha|} \cdot \frac{1}{(|\alpha|!)^r}.$$

Mais $t^{\beta} u = \sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha+\beta}(x) (\alpha+\beta)!}{\alpha!} \delta^{(\alpha)}(t)$ et

$$\left| \frac{a_{\alpha+\beta}(x) (\alpha+\beta)!}{\alpha!} \right| \leq C^{|\alpha+\beta|} \cdot \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!} \cdot \frac{1}{(|\alpha+\beta|!)^r}.$$

Grâce à l'inégalité $\alpha! \beta! \leq (\alpha+\beta)! \leq 2^{|\alpha|+|\beta|} \cdot \alpha! \beta!$.

On obtient :

$$\left| \frac{a_{\alpha+\beta}(x)(\alpha+\beta)!}{\alpha!} \right| \leq C^{|\alpha|} \cdot \frac{1}{(|\alpha|!)^r}.$$

Pour l'action de D_x ou de D_t , la vérification se fait de la même manière, ce qui prouve le résultat.

Quant au faisceau $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ la démonstration est la même.

Prenons maintenant un fibré en droites X de base Y et r un rationnel tel que $-\infty \leq r \leq +\infty$. Considérons quelques faisceaux de fonctions holomorphes et de séries formelles qui vont nous être utiles :

- $\mathcal{O}_{X|Y}$: la restriction à Y du faisceau X .
- $\widehat{\mathcal{O}_{X|Y}}$: le complété formel le long de Y , voir (1.2).
- $\mathcal{O}_{X|Y}(r)$: le sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{O}_{X|Y}}$ dont les éléments s'écrivent dans une carte locale V sous la forme $u = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha(x)t^\alpha$ telle que $\sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha(x)t^\alpha/(\alpha!)^{r-1}$ ait un rayon de convergence non nul sur V .
On pose :
si $r = -\infty$ $\mathcal{O}_{X|Y}(-\infty) = \mathcal{O}_{[X]}$
si $r = +\infty$ $\mathcal{O}_{X|Y}(+\infty) = \widehat{\mathcal{O}_{X|Y}}$.
- $\mathcal{O}_X[*Y]$: le faisceau des fonctions méromorphes à pôles dans Y .
- $\mathcal{O}_X[*Y](r)$ = $\mathcal{O}_{X|Y}(r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[*Y]$ pour $r \in [1, +\infty]$.
- $\mathcal{O}_X(*Y)$ = $j^{-1}j_*\mathcal{O}_X(j : Y \hookrightarrow X)$ le faisceau des fonctions holomorphes à singularités essentielles sur Y .
- $\mathcal{O}_X(*Y)(1, r)$: le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X(*Y) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X|Y}(r)$ ($r \in [1, +\infty]$) dont les éléments s'écrivent en coordonnées locales $u = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_\alpha(x)t^\alpha$ telles que les séries $\sum_{\alpha < 0} a_\alpha(x)t^\alpha$ et $\sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha(x)t^\alpha/(\alpha!)^{r-1}$ aient des rayons de convergence non nuls.
- $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$: le faisceau des fonctions singulières formelles, voir (1.2).
- $\mathcal{O}_X(*Y)(r, 1)$: le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$ dont les éléments s'écrivent en coordonnées locales $u = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_\alpha(x)t^\alpha$ avec $\sum_{\alpha \leq 0} a_\alpha(x)t^\alpha/(-\alpha!)^{r-1} < \infty$.
On pose :
 $\mathcal{O}_X(*Y)(+\infty, 1) = \mathcal{O}_X[*Y]$
 $\mathcal{O}_X(*Y)(-\infty, 1) = \mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$.
- $\mathcal{O}_{[X]}(*Y)((r))$: le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$ dont les éléments se mettent localement sous la forme $\sum_{\alpha \leq m} a_\alpha(x)t^\alpha$ avec $m \geq 0$ et $\sum_{\alpha \leq 0} a_\alpha(x)t^\alpha/(-\alpha!)^{r-1} < +\infty$.
On pose :
 $\mathcal{O}_{[X]}(*Y)((1)) = \mathcal{O}_{[X]}(*Y)$.

PROPOSITION 1.3.2. — Soit r un rationnel tel que $-\infty \leq r \leq +\infty$. Les suites de $\mathcal{D}_{[X]}$ -modules suivantes sont exactes :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow \mathcal{O}_X(*Y)(r, 1) \longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X}(r) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow \mathcal{O}_X[*Y] \longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Chapitre 2

CYCLES MICROCARACTÉRISTIQUES

2.1. F_r -filtrations des $\mathcal{D}_{[X]}$ -modules cohérents.

La plupart des résultats énoncés ici se trouvent dans [14]. Dans ce paragraphe, on supposera que X est un fibré vectoriel de base Y . On notera $p : X \rightarrow Y$ la projection canonique et on identifiera Y à la section nulle de X .

$\mathcal{O}_{[X]}$ et $\mathcal{D}_{[X]}$ sont les faisceaux déjà définis dans (1.1). En choisissant des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_d)$ de X telles que $Y = \{t_1 = \dots = t_d = 0\}$, et en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $t = (t_1, \dots, t_d)$, un opérateur P de $\mathcal{D}_{[X]}$ s'écrit :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha\beta\gamma}(x) t^\alpha D_x^\beta D_t^\gamma$$

où la somme est finie en β et γ .

Le faisceau $\mathcal{D}_{[X]}$ est muni de deux filtrations canoniques. La première est la filtration usuelle (notée $(\mathcal{D}_{[X],m})_{m \geq 0}$) donnée par l'ordre des opérateurs. La deuxième est définie comme suit :

$$V_k \mathcal{D}_{[X]} = \{P \in \mathcal{D}_{[X]} / P I_Y^j \subset I_Y^{j-k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

où $I_Y = \{f \in \mathcal{O}_{X|Y} / f \text{ s'annule sur } Y\}$ et $I_Y^0 = \mathcal{O}_X$ pour $j \leq 0$.

En coordonnées locales, on constate que I_Y^j pour $j \geq 0$, est le faisceau des fonctions holomorphes qui s'écrivent $\sum_{|\alpha|=j} f(x,t) t^\alpha$, et on en déduit que pour cette filtration (appelée V -filtration) les opérateurs x_i, D_{x_i} sont d'ordre 0, t_i est d'ordre -1 et D_{t_i} est d'ordre $+1$.

Soient $r \in \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$ et $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, p et q sont premiers entre eux tels que $r = p/q$ [si $r = \pm\infty$, on prend $(p, q) = (\pm 1, 0)$].

On considère la filtration croissante $(F_r \mathcal{D}_{[X]})$ indexée par \mathbb{Z} :

$$F_r^k \mathcal{D}_{[X]} = \sum_{(p-q)m+q\ell \leq k} \mathcal{D}_{[X],\ell} \cap V_m \mathcal{D}_{[X]}.$$

Il est clair que, pour cette filtration, x_i est d'ordre 0, D_{x_i} est d'ordre q , t_i est d'ordre $(p - q)$ et D_{t_i} est d'ordre p .

Si (x, t) est un système de coordonnées locales de X tel que $Y = \{t = 0\}$, et si (x, t, ξ, τ) sont les coordonnées locales associées sur T^*X , alors le fibré conormal à Y dans X (noté Λ) est donné par :

$$\Lambda = \{(x, t, \xi, \tau) \in T^*X / t = \xi = 0\}.$$

On note par (x, τ, x^*, τ^*) les coordonnées locales induites sur $T^*\Lambda$.

Citons maintenant quelques résultats qui nous seront utiles :

Pour $r \in \mathbb{Q}$, l'anneau gradué $\text{gr}_{F_r} \mathcal{D}_{[X]}$ associé à cette filtration est isomorphe à $\tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{[T^* \Lambda | Y]}$, où $\mathcal{O}_{[T^* \Lambda | Y]}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{T^* \Lambda}$ des fonctions holomorphes sur $T^* \Lambda$ et polynomiales dans les fibres de $\tilde{\pi} : T^* \Lambda = T^*(T_Y^* X) \rightarrow Y$.

Si $r = \pm\infty$, on a $\text{gr}_{F_{-\infty}} \mathcal{D}_{[X]} \simeq \pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]} \simeq \text{gr}_{F_\infty} \mathcal{D}_{[X]}$, avec $\pi_0 : \Lambda \rightarrow Y$.

Désignons par $\sigma_k^{[r]}$ l'application "symbole principal d'ordre k " définie par :

$$\sigma_k^{[r]} : \text{gr}_{F_r}^k \mathcal{D}_{[X]} \longrightarrow \bigoplus_{(p-q)(j-i)+q_i=k} \pi_* \mathcal{O}_{[T^* \Lambda | Y]}(i, j)$$

où $\mathcal{O}_{[T^* \Lambda | Y]}(i, j)$ est l'anneau des polynômes en τ, x^*, τ^* dont les éléments s'écrivent $\sum f_{\beta\gamma\theta}(x) \tau^\beta x^{*\gamma} \tau^{*\theta}$ tels que $i = |\gamma| + |\theta|$ et $j = |\gamma| + |\beta|$.

Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent, on dit qu'une filtration $(\mathcal{M}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{M} est une bonne F_r -filtration si localement il existe des générateurs u_1, \dots, u_N de \mathcal{M} et des entiers k_1, \dots, k_N tels que :

$$\mathcal{M}_k = \sum_{i=1}^N F_r^{k-k_i} \mathcal{D}_{[X]} u_i.$$

On démontre (toujours dans [14]) que :

PROPOSITION 2.1.1.

1) Pour tout rationnel $-\infty \leq r \leq +\infty$, la filtration $F_r \mathcal{D}_{[X]}$ est noethérienne (au sens de la proposition 1.1.7 du chap. II de [33]).

2) Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent muni d'une bonne $F_r \mathcal{D}_{[X]}$ -filtration, le gradué associé est un $\text{gr}_{F_r} \mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent.

Rappelons maintenant quelques propriétés géométriques de $T^* \Lambda$:

Comme sous-variété de $T^* X$, Λ est munie d'une action de \mathbb{C}^* qui définit à son tour une action H_∞ de \mathbb{C}^* sur $T^* \Lambda$. D'autre part, en étant un fibré vectoriel, $T^* \Lambda$ est muni d'une action de \mathbb{C}^* , notée H_0 , différente de H_∞ et qui n'est autre que la multiplication dans les fibres de $T^* \Lambda \rightarrow \Lambda$. En coordonnées locales, ces actions s'écrivent ($r = p/q$) :

$$\begin{aligned} H_0(\lambda) &: (x, \tau, x^*, \tau^*) \longrightarrow (x, \tau, \lambda x^*, \lambda \tau^*) \\ H_\infty(\lambda) &: (x, \tau, x^*, \tau^*) \longrightarrow (x, \lambda \tau, \lambda x^*, \tau^*) \\ H_r(\lambda) &: (x, \tau, x^*, \tau^*) \longrightarrow (x, \lambda^p \tau, \lambda^q x^*, \lambda^{q-p} \tau^*). \end{aligned}$$

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent muni (pour $r \in \mathbb{Q}$) d'une bonne F_r -filtration. Le gradué (noté $\text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$) associé à cette dernière est donc un $\tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{[T^* \Lambda | Y]}$ -module cohérent.

À ce module on associe le support de $\mathcal{O}_{T^* \Lambda} \otimes \tilde{\pi}^{-1} \text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ qui est un sous-ensemble analytique de $T^* \Lambda$ indépendant du choix de la bonne filtration (une justification se trouve dans [14] et [16]).

On associe aussi à ce module un cycle analytique positif, cela signifie que chaque composante irréductible de $\mathcal{O}_{T^*\Lambda} \otimes \pi^{-1} \text{gr}_{F_r}(\mathcal{M})$ est affectée d'un entier positif : la multiplicité.

DÉFINITION 2.1.2. — Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent défini près de Y . Le cycle microcaractéristique de type r de \mathcal{M} que l'on note $\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est le cycle caractéristique de $\text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ pour une bonne $F_r \mathcal{D}_{[X]}$ -filtration $F_r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} .

La variété microcaractéristique de type r de \mathcal{M} est le support de $\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et sera notée $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$.

THÉORÈME 2.1.3. [14].

1) Les variétés microcaractéristiques $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ sont des sous-ensembles involutifs et H_r -homogènes de $T^*\Lambda$.

2) La dimension de $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est inférieure ou égale à celle de la variété caractéristique de \mathcal{M} .

3) Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent, alors pour tout $r \geq 1$, on a :

$$\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \mathcal{M}).$$

En fait, quand r varie, les variétés microcaractéristiques $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ ne sont qu'en nombre fini. Ce résultat très important que l'on va donner sous la forme suivante est démontré dans [14].

THÉORÈME ET DÉFINITION 2.1.4. — Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent. Il existe une suite finie $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_N = +\infty$ de nombres rationnels tels que la variété $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ soit indépendante de $r \in]r_i, r_{i+1}[$ pour $j = 1, \dots, N - 1$. Les nombres r_i sont appelés indices critiques de \mathcal{M} .

Remarque 2.1.5. — Si r n'est pas un indice critique, la variété $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est homogène pour plusieurs rationnels r et donc pour tout r , par conséquent $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est bihomogène (i.e. homogène pour H_0 et H_∞).

Soient $\text{ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})$ et $\text{ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ les variétés microcaractéristiques définies par :

$$\text{ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M}) = \Sigma_\Lambda^{(r+\varepsilon)}(\mathcal{M}) \quad \text{et} \quad \text{ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M}) = \Sigma_\Lambda^{(r-\varepsilon)}(\mathcal{M})$$

où $0 < \varepsilon \ll 1$.

Signalons que ces deux variétés sont toujours bihomogènes contrairement à la variété $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et si r n'est pas un indice critique de \mathcal{M} , on a :

$$\text{ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M}) = \Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \text{ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M}).$$

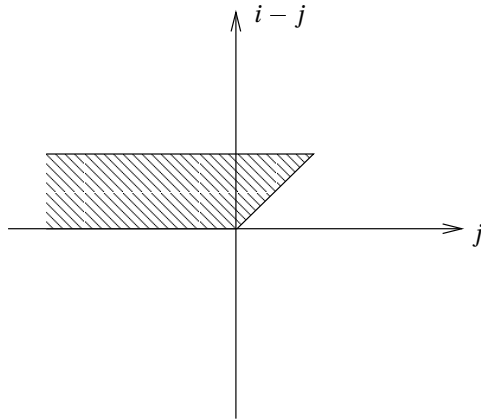
Si $r = \pm\infty$, nous savons que $\text{gr}_{F_{-\infty}} \mathcal{D}_{[X]} \simeq \pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]} \simeq \text{gr}_{F_{\infty}} \mathcal{D}_{[X]}$, nous notons alors $\check{\text{ch}}_{\Lambda}\{r\}(\mathcal{M}) = \check{\text{ch}}_{\Lambda}(r)(\mathcal{M})$ le cycle caractéristique de $\text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ pour ($r = \pm\infty$), considéré comme $\pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]}$ -module cohérent.

En particulier, si $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{[X]}/I$, où I est un idéal de type fini, et si on le munit de la filtration induite par $F_{r+\varepsilon} \mathcal{D}_{[X]}$, (resp. $F_{r-\varepsilon} \mathcal{D}_{[X]}$), pour un ε fixé vérifiant $\text{ch}_{\Lambda}\{r\}(\mathcal{M}) = \Sigma_{\Lambda}^{(r+\varepsilon)}(\mathcal{M})$ (resp. $\text{ch}_{\Lambda}(r)(\mathcal{M}) = \Sigma_{\Lambda}^{(r-\varepsilon)}(\mathcal{M})$) alors l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$ par les symboles de type r des éléments de I , noté $\sigma^{\{r\}}(I)$ (resp. $\sigma^{(r)}(I)$) est un $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$ -module cohérent.

Par conséquent, il existe localement un nombre fini d'opérateurs de I , Q_1, \dots, Q_N tels que les symboles $\sigma^{\{r\}}(Q_1), \dots, \sigma^{\{r\}}(Q_N)$ (resp. $\sigma^{(r)}(Q_1), \dots, \sigma^{(r)}(Q_N)$) engendrent $\sigma^{\{r\}}(I)$ (resp. $\sigma^{(r)}(I)$). Dans ce cas, les variétés microcaractéristiques $\text{ch}_{\Lambda}\{r\}(\mathcal{M})$ et $\text{ch}_{\Lambda}(r)(\mathcal{M})$ sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} \text{ch}_{\Lambda}\{r\}(\mathcal{M}) &= \{\theta \in T^*\Lambda / \sigma^{\{r\}}(Q_j)(\theta) = 0, \quad j = 1, \dots, N\} \\ \text{ch}_{\Lambda}(r)(\mathcal{M}) &= \{\theta \in T^*\Lambda / \sigma^{(r)}(Q_j)(\theta) = 0, \quad j = 1, \dots, N\} \end{aligned}$$

Exemple. — $X = \mathbb{C}, Y = \{0\}, \Lambda = T_{\{0\}}^* \mathbb{C}, P = x^2 D_x + 1$ (opérateur d'Euler).



Si $1 \leq r < 2$, $\sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(P) = \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P) = x^2 x^*$.

Si $r = 2$, $\sigma_{\Lambda}^{\{2\}}(P) = 1$; $\sigma_{\Lambda}^{(2)}(P) = x^2 x^*$.

Si $2 < r \leq +\infty$, $\sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(P) = \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P) = 1$.

2.2. Le cycle analytique $\text{Irr}(r)(\tilde{\Sigma})$.

Dans cette partie, on va étendre la notion du cycle analytique $\text{Irr}(r)(\tilde{\Sigma})$ introduite dans [18], au cas où r est un rationnel quelconque.

On considère une variété analytique complexe Y , un fibré vectoriel complexe Λ de rang un sur Y et le fibré cotangent $T^*\Lambda$ à Λ .

Soit r un nombre rationnel, et soit Σ un sous-ensemble analytique lagrangien de $T^*\Lambda$ qui est homogène pour H_r .

Rappelons que $\mathcal{O}_{|T^*\Lambda|Y}$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^*\Lambda$ qui sont polynomiales dans les fibres de la projection $\tilde{\pi} : T^*\Lambda \rightarrow Y$.

En coordonnées locales, une telle fonction s'écrit comme une somme finie :

$$f(x, \tau, x^*, \tau^*) = \sum a_{\alpha\beta\gamma}(x) \tau^\alpha x^{*\beta} \tau^{*\gamma}$$

où β est un multi-indice de \mathbb{N}^n tandis que α et γ sont des entiers.

Prenons alors chaque monôme de f , calculons l'entier $\alpha - \gamma$ et notons respectivement par k_0 et k_1 le plus petit et le plus grand de ces entiers relatifs. Associons à f les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma^+(f)(x, \tau, x^*, \tau^*) &= \sum_{\alpha-\gamma=k_1} a_{\alpha\beta\gamma}(x) \tau^\alpha x^{*\beta} \tau^{*\gamma} \\ \sigma^-(f)(x, \tau, x^*, \tau^*) &= \sum_{\alpha-\gamma=k_0} a_{\alpha\beta\gamma}(x) \tau^\alpha x^{*\beta} \tau^{*\gamma}. \end{aligned}$$

Soit I_Σ l'idéal de $\mathcal{O}_{|T^*\Lambda|Y}$ des fonctions qui s'annulent sur Σ et soit $\sigma^+(I_\Sigma)$ l'idéal engendré par les fonctions $\sigma^+(f)$ pour f dans I_Σ . L'ensemble des points de $T^*\Lambda$ où s'annulent toutes les fonctions de $\sigma^+(f)$ est une variété que nous appellerons Σ^+ et de même, on définit Σ^- en utilisant les fonctions $\sigma^-(f)$.

Les variétés Σ^+ et Σ^- sont non seulement H_r -homogènes mais bihomogènes (voir [18]).

D'autre part, si Σ est lagrangienne, Σ^+ et Σ^- le sont aussi (une justification se trouve dans [14]).

Rappelons aussi que la projection $\Lambda = T_Y^*X \rightarrow Y$ et le plongement $Y \rightarrow \Lambda$ définissent des applications :

$$\begin{aligned} T^*Y &\xleftarrow{p_1} (T^*Y) \times_Y \Lambda \xrightarrow{j_1} T^*\Lambda \\ T^*Y &\xleftarrow{p_2} (T^*\Lambda) \times_\Lambda Y \xrightarrow{j_2} T^*\Lambda. \end{aligned}$$

Les applications p_1 et p_2 sont des submersions tandis que j_1 et j_2 sont des plongements. En coordonnées locales, on a :

$$\begin{aligned} p_1(x, x^*, \tau) &= (x, x^*) & j_1(x, x^*, \tau) &= (x, \tau, x^*, 0) \\ p_2(x, x^*, \tau^*) &= (x, x^*) & j_2(x, x^*, \tau^*) &= (x, 0, x^*, \tau^*). \end{aligned}$$

La réunion de $j_1((T^*Y) \times_Y \Lambda)$ et $j_2((T^*\Lambda) \times_\Lambda Y)$ est une hypersurface S_Λ de $T^*\Lambda$ donnée par $\{\tau\tau^* = 0\}$.

Les variétés Σ^+ et Σ^- sont très particulières comme le prouve le lemme suivant (pour la démonstration, voir [18] ou [15]) :

LEMME 2.2.1. — Soit Σ une sous-variété lagrangienne bihomogène de $T^*\Lambda$. Il existe deux variétés lagrangiennes homogènes (au sens usuel) S_1 et S_2 de T^*Y telles que :

$$\Sigma = j_1 p_1^{-1} S_1 \cup j_2 p_2^{-1} S_2.$$

Revenons à notre variété lagrangienne H_r -homogène Σ . D'après ce qui précède, on peut lui associer deux variétés lagrangiennes bihomogènes Σ^+ et Σ^- qui se décomposent chacune, d'une manière unique, selon le lemme ci-dessus. On obtient donc quatre sous-variétés lagrangiennes homogènes de T^*Y , notées S_i^\pm , $i = 1, 2$.

Signalons que cette opération est également valable pour les cycles analytiques. À tout idéal de fonctions holomorphes sur une variété est associé un cycle positif dont le support est précisément l'ensemble des points où les fonctions de l'idéal s'annulent.

On considère donc un cycle analytique positif $\tilde{\Sigma}$ de $T^*\Lambda$ dont le support est la variété précédente Σ . On lui associe deux cycles analytiques positifs $\tilde{\Sigma}^\pm$ de la manière suivante :

Supposons *a priori* que Σ est irréductible et de multiplicité un. On lui associe l'idéal I_Σ puis les deux idéaux $\sigma^\pm(I_\Sigma)$, alors les cycles $\tilde{\Sigma}^\pm$ sont les cycles associés à ces idéaux.

Si $\tilde{\Sigma}$ est un cycle positif quelconque, il s'écrit :

$$\tilde{\Sigma} = \sum_k n_k \tilde{\Sigma}_k$$

avec $n_k \in \mathbb{N}$ et Σ_k irréductible, on pose alors :

$$\tilde{\Sigma}^\pm = \sum_k n_k \tilde{\Sigma}_k^\pm.$$

Les supports des cycles $\tilde{\Sigma}^\pm$ se décomposent suivant le lemme 2.2.1 et on peut donc écrire :

$$\tilde{\Sigma}^\pm = j_1 p_1^{-1} \tilde{S}_1^\pm + j_2 p_2^{-1} \tilde{S}_2^\pm$$

où \tilde{S}_i^\pm , $i = 1, 2$ sont des cycles analytiques positifs de supports lagrangiens homogènes dans T^*Y .

DÉFINITION 2.2.2. — Si $\tilde{\Sigma}$ est un cycle analytique lagrangien de $T^*\Lambda$, on définit le cycle analytique lagrangien $\text{Irr}(r)(\tilde{\Sigma})$ (pour $r \in \mathbb{Q}$) par :

$$\text{Irr}(r)(\tilde{\Sigma}) = \tilde{S}_1^- - \tilde{S}_2^- - \tilde{S}_1^+ + \tilde{S}_2^+$$

Remarques 2.2.3.

1) Si Σ est irréductible et bihomogène, il est clair que :

$$\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^+ = \tilde{\Sigma}^-$$

et donc $\text{Irr}(r)(\tilde{\Sigma}) = 0$.

2) Soit r un rationnel quelconque, si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent, la variété microcaractéristique $\text{ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ (resp. $\text{ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})$) n'est autre que la variété $\Sigma_{(r)}^-(\mathcal{M})$ (resp. $\Sigma_{(r)}^+(\mathcal{M})$).

Chapitre 3

VARIÉTÉS MICROCARACTÉRISTIQUES D'UN
 \mathcal{D}_X -MODULE PORTÉ PAR UNE HYPERSURFACE

On s'intéresse dans cette partie aux variétés microcaractéristiques de type r (déjà citées dans le paragraphe 2) d'un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module porté par une hypersurface Y . On va démontrer qu'en fait, ces variétés ne dépendent pas du rationnel choisi.

3.1. Image directe d'un \mathcal{D}_X -module à gauche.

Soient X une variété analytique complexe et Y une hypersurface de X . Notons par i l'injection de Y dans X et par $\Lambda = T_Y^*X$ le fibré conormal à Y dans X .

Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_Y -module (à gauche) cohérent, on définit son image directe par i , en posant :

$$i_+ \mathcal{M} = \mathbb{R}i_+ (\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M}).$$

$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}$ est le $(i^{-1}\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y)$ -bimodule $\Omega_Y^n \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_X^{i-1}} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{n-1}, \mathcal{D}_X)$ à support dans Y , n est la dimension de X et Ω_Y^n (resp. Ω_X^{n-1}) est le faisceau des n -formes (resp. $(n-1)$ -formes) holomorphes sur Y (resp. X).

On s'intéresse ici au cas où i est une immersion fermée. Dans ce cas, i_* n'est autre que le prolongement par 0 de \mathcal{M} , donc elle est exacte et par conséquent :

$$i_+ \mathcal{M} = i_* (\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M}).$$

En particulier, $i_+ \mathcal{D}_Y = i_* (\mathcal{D}_{X \leftarrow Y})$ est un \mathcal{D}_Y -module localement libre (voir [23]), et si on fixe une équation t de Y , il s'identifie au \mathcal{D}_X -module à gauche $\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X t$.

Choisissons des coordonnées locales (x, t) de X telles que $Y = \{t = 0\}$. Si (x, t, ξ, τ) sont les coordonnées correspondantes sur T^*X , (x, τ) et (x, τ, x^*, τ^*) seront celles induites sur $\Lambda = T_Y^*X$ et $T^*\Lambda$.

Rappelons que la projection $\Lambda \rightarrow Y$ définit les applications

$$T^*Y \xleftarrow{p_1} (T^*Y)_{X_Y \Lambda} \xrightarrow{j_1} T^*\Lambda.$$

Dans les coordonnées locales ci-dessus, ces dernières s'écrivent :

$$p_1(x, x^*, \tau) = (x, x^*) \quad \text{et} \quad j_1(x, x^*, \tau) = (x, \tau, x^*, 0).$$

LEMME 3.1.1. — Soient \mathcal{M} un \mathcal{D}_Y -module cohérent et r un rationnel supérieur ou égal à un. Si $\Sigma^{(r)}(i_+ \mathcal{M})$ et $\text{ch}(\mathcal{M})$ sont respectivement la variété microcaractéristique associée au gradué $\text{gr}_{F_r}(i_+ \mathcal{M})$ et la variété caractéristique de \mathcal{M} , et si $i : Y \hookrightarrow X$ est une injection fermée et lisse, alors :

$$\Sigma^{(r)}(i_+ \mathcal{M}) = j_1 p_1^{-1} \text{ch}(\mathcal{M}).$$

Preuve. — Soit r un rationnel supérieur ou égal à un. Supposons d'abord qu'il est entier et qu'il est égal à p .

Munissons \mathcal{D}_Y de la filtration $(\mathcal{D}_{Y,k})_{k \geq 0}$ donnée par l'ordre des opérateurs, cette dernière est noethérienne (au sens de la proposition 1.1.7. de [33]).

Soient \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent et $(\mathcal{M}_k)_{k \geq 0}$ une bonne filtration de \mathcal{M} sur un ouvert suffisamment petit, associée à la filtration $(\mathcal{D}_{Y,k})_{k \geq 0}$. Notons par $\text{ch}(\mathcal{M})$ la variété caractéristique de \mathcal{M} .

D'après ce qui précède, $i_+ \mathcal{D}_Y = i_*(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y})$ est un \mathcal{D}_X -module à gauche cohérent. Munissons \mathcal{D}_X de la filtration $(F_p \mathcal{D}_X)$ et le module $i_+ \mathcal{D}_Y$ de la bonne filtration (sur un ouvert de coordonnées locales) induite par cette dernière. D'autre part, $i_+ \mathcal{D}_Y$ est un \mathcal{D}_Y -module (à droite) localement libre. En plus, si on munit \mathcal{D}_Y de la filtration $(\mathcal{D}_{Y,k})_{k \geq 0}$ par l'ordre des opérateurs, la filtration $(F_p(i_+ \mathcal{D}_Y))$ citée plus haut est compatible avec celle de \mathcal{D}_Y pour la structure de \mathcal{D}_Y -module à droite, à savoir : si $P \in \mathcal{D}_{Y,\ell}$ et $u \in F_p^j(i_+ \mathcal{D}_Y)$ alors $u \cdot P \in F_p^{j+\ell}(i_+ \mathcal{D}_Y)$. Cette compatibilité se vérifie facilement en coordonnées locales.

Soient maintenant un \mathcal{D}_Y -module \mathcal{M} et une bonne filtration $(\mathcal{M}_k)_{k \geq 0}$ sur un ouvert assez petit, associée à la filtration $(\mathcal{D}_{Y,k})_{k \geq 0}$.

Il est clair que $(\mathcal{M}_k)_{k \geq 0}$ est l'image par un morphisme $\mathcal{D}_Y^N \xrightarrow{h} \mathcal{M} \rightarrow 0$ d'une filtration du type $(\mathcal{D}_Y^N)_k = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{D}_{Y,k-k_i}$. La suite $i_+ \mathcal{D}_Y^N \xrightarrow{h'} i_+ \mathcal{M} \rightarrow 0$ est exacte, donc d'après ce qui précède, et quitte à réduire notre ouvert au besoin, on peut munir $i_+ \mathcal{M}$ d'une bonne filtration (notée $(F_p(i_+ \mathcal{M}))$) associée à la filtration $(F_p \mathcal{D}_X)$.

En fait, le groupe $F_p^k(i_+ \mathcal{M})$ est l'image par h' de la somme $\bigoplus_m F_p^{k-k_m}(i_+ \mathcal{D}_Y^N)$, mais $F_p^{k-k_m}(i_+ \mathcal{D}_Y^N)$ n'est autre que $i_*(\bigoplus_{j+\ell \leq k-k_m} F_p^j \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes \mathcal{D}_{Y,\ell}^N)$, vu la compatibilité citée ci-dessus. Comme h' est le morphisme qui à $u \otimes v \in \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes \mathcal{D}_Y^N$ associe $u \otimes h(v) \in \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes \mathcal{M}$. Alors on obtient :

$$F_p^k(i_+ \mathcal{M}) = i_* \left(\bigoplus_{\substack{j+\ell \leq k-k_m \\ m}} F_p^j \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes \mathcal{M}_\ell \right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, on a la relation suivante entre les gradués :

$$\begin{aligned} \text{gr}_{F_p}(i_+ \mathcal{M}) &= i_*(\text{gr}_{F_p} \mathcal{D}_{X \leftarrow Y}) \otimes_{i_* \text{gr}_{\mathcal{D}_Y}} i_* \text{gr} \mathcal{M} \\ &= \frac{\mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}}{\mathcal{I}} \otimes_{i_* \mathcal{O}_{[T^* Y]}} i_* \text{gr} \mathcal{M} \end{aligned}$$

où $\mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}$ (resp. $\mathcal{O}_{[T^* Y]}$) est le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^* \Lambda$ (resp. $T^* Y$) et polynomiales dans les fibres de $T^* \Lambda \rightarrow \Lambda$ (resp. $T^* Y \rightarrow Y$), et \mathcal{I} est l'idéal de $\mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}$ engendré localement par τ^* .

La filtration $F_p(i_+ \mathcal{M})$ est une bonne filtration, alors le $\mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}$ -module $\text{gr}_{F_p}(i_+ \mathcal{M})$ est cohérent.

Si maintenant r est un rationnel quelconque qui s'écrit $r = p/q$, on se ramène au cas précédent en considérant la filtration $\tilde{\mathcal{D}}_{Y,k} = \mathcal{D}_{Y, \lfloor \frac{k}{q} \rfloor}$ où $\lfloor \frac{k}{q} \rfloor$ est la partie entière de $\frac{k}{q}$.

Donc d'après ce qui précède, on a :

$$\Sigma_{\Lambda}^{(r)}(i_+ \mathcal{M}) = j_1 p_1^{-1} \text{ch}(\mathcal{M}).$$

En coordonnées locales, il est clair que $(x, \tau, x^*, 0) \in \Sigma_{\Lambda}^{(r)}(i_+ \mathcal{M})$ si et seulement si $(x, x^*) \in \text{ch}(\mathcal{M})$.

3.2. Le cas d'un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module porté par une hypersurface.

Soient X une variété analytique complexe et Y une sous-variété lisse de X . Rappelons d'abord un théorème dû à Kashiwara, pour la démonstration, on renvoie à [10].

THÉORÈME 3.2.1. — *Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une injection lisse et fermée. Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_Y -module cohérent. Le foncteur $\mathcal{M} \rightarrow i_+ \mathcal{M}$ définit une équivalence de catégories :*

$$“\mathcal{D}_Y\text{-modules cohérents}” \longleftrightarrow “\mathcal{D}_X\text{-modules cohérents à supports dans } Y”.$$

Supposons maintenant que X est un fibré vectoriel de rang un de base Y . En utilisant le théorème ci-dessus et le lemme 3.1.1, on en déduit que :

COROLLAIRE 3.2.2. — *Soit L un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent à support dans Y . Soient r et r' deux rationnels supérieurs ou égaux à un. Si $\Sigma^{(r)}(L)$ et $\Sigma^{(r')}(L)$ sont les variétés microcaractéristiques associées respectivement aux gradués $\text{gr}_{F_r}(L)$ et $\text{gr}_{F_{r'}}(L)$, alors :*

$$\Sigma^{(r)}(L) = \Sigma^{(r')}(L).$$

Remarque 3.2.3. — La variété $\Sigma^{(r)}(L)$ est donc bihomogène et si p_1 et j_1 sont les applications (citées ultérieurement) définies par la projection $\Lambda \rightarrow Y$, alors :

$$\Sigma^{(r)}(L) = j_1 p_1^{-1} S_1^{(r)} \quad \text{et} \quad \tilde{\Sigma}^{(r)}(L) = j_1 p_1^{-1} \tilde{S}_1^{(r)}$$

où $\tilde{S}_1^{(r)}$ est un cycle homogène de T^*Y et $S_1^{(r)}$ son support.

En coordonnées locales, la variété $\Sigma^{(r)}(L)$ est contenue dans l'hypersurface $\{\tau^* = 0\}$.

Chapitre 4

LOCALISATION

Dans ce paragraphe, X est un fibré en droites de base Y . Fixons un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n, t) de X qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$.

Les fibrés $\Lambda = T_Y^*X$ et $T^*\Lambda$ ont pour coordonnées locales respectives (x, τ) et (x, τ, x^*, τ^*) .

4.1. Filtrations d'un $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -module.

Notons par $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels sur X à coefficients méromorphes sur Y et polynômiaux dans les fibres. Si P est un élément de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$, il s'écrit en coordonnées locales :

$$P = \sum_{\substack{|\beta|+|\gamma| \leq m \\ \alpha \in \mathbb{Z}}} a_{\alpha\beta\gamma}(x) t^\alpha D_x^\beta D_t^\gamma$$

où la somme en α est finie.

On constate que l'anneau $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ est donné localement par :

$$\mathcal{D}_{[X]}[*Y] = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} t^{-\alpha} \mathcal{D}_{[X]}.$$

Considérons pour $r \in [-\infty, +\infty]$ fixé les sous-groupes suivants :

$$F_r^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} t^{-\alpha} F_r^{k+(q-p)\alpha} \mathcal{D}_{[X]} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

où la somme est toujours finie en α .

Soient α, β, m, n, k et ℓ des entiers naturels qui vérifient :

$$k = p\alpha + (p - q)m \quad \text{et} \quad \ell = p\beta + (p - q)n.$$

Il est facile de voir que :

$$D_t^\alpha t^{-n} = t^{-(\alpha+n)} \left(\sum_{i=0}^{\alpha} a_i t^i D_t^i \right)$$

et

$$(t^{-n} D_t^\alpha)(t^{-n} D_t^\beta) = t^{-(\alpha+m+n)} \left(\sum_{i=0}^{\alpha} a_i t^i D_t^{i+\beta} \right)$$

avec $a_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \dots, \alpha$.

Mais le second membre de la deuxième égalité est dans $F_r^{k+\ell} \mathcal{D}_{[X]}[*Y]$, donc $F_r \mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ définit une filtration de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ telle que l'ordre de t^{-1} soit $p - q$.

En outre :

$$\mathfrak{g}_{F_r}^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y] = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} t^{-\alpha} \mathfrak{g}_{F_r}^{k+(q-p)\alpha} \mathcal{D}_{[X]}.$$

Si $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}(\lambda, \mu)$ désigne l'anneau des polynômes en τ, x^*, τ^* , dont les éléments s'écrivent $\sum f_{\beta\gamma\theta}(x) t^\alpha \tau^\beta x^{*\gamma} \tau^{*\theta}$ tels que $\lambda = |\gamma| + \theta$ et $\mu = |\gamma| + \beta$, alors on a l'isomorphisme suivant :

$$\mathfrak{g}_{F_r}^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y] = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \tau^{*-\alpha} \left(\bigoplus_{p\mu+(q-p)(\lambda-\alpha)=k} \tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}(\lambda, \mu) \right)$$

où $\tilde{\pi}$ est la projection $T^*\Lambda \rightarrow Y$.

Par conséquent, le gradué de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ associé à cette filtration est isomorphe à $\tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\tau^{*-1}]$, avec $\tilde{\pi} : T^*\Lambda \setminus \{\tau^* = 0\} \rightarrow Y$.

PROPOSITION 4.1.1. — *La filtration $F_r \mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ est noethérienne.*

Preuve. — Pour cela, d'après le chap. II, proposition 1.1.7, il suffit de montrer que pour tout $\theta \in X$, l'anneau de Rees $A_\theta = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (F_r^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y])_\theta T^k$ est noethérien.

Soit $\theta = (x_0, t_0) \in X$, les éléments de A_θ sont représentés par :

$$P(T) = \sum_k L_k T^k, \quad \text{avec } L_k \in F_r^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y]$$

où la somme est finie en k .

Il existe donc $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k$ dans \mathbb{N} et Q_i^k dans $F_r^{k+(q-p)\alpha_i^k} \mathcal{D}_{[X]}$ pour tout $i = 1, \dots, n$ tels que :

$$L_k = \sum_{i=1}^n t^{-\alpha_i^k} Q_i^k.$$

Mais Q_i^k s'écrit :

$$Q_i^k = \sum_{(p-q)(\theta-\beta)+q(|y|+\theta) \leq k+(q-p)\alpha_i^k} a_{\beta y \theta}(x) t^\beta D_x^y D_t^\theta.$$

Alors, en posant $m = k - (p-q)(\theta-\beta + \alpha_i^k)$ et en faisant le changement de variable $u = T^{q-p} t (D_u = T^{p-q} D_t)$, on obtient :

$$P(T) = \sum_m \left(\sum_{\substack{q(|y|+\theta) \leq m \\ i}} a_{\beta y \theta}(x) u^{\beta-\alpha_i^k} D_x^y D_u^\theta \right) T^m.$$

À m fixé, $\sum_{q(|y|+\theta) \leq m} a_{\beta y \theta}(x) u^{\beta-\alpha_i^k} D_x^y D_u^\theta$ est un opérateur différentiel à coefficients méromorphes.

Si $q = 1$, A_θ est isomorphe à l'anneau de Rees $\bigoplus_m \mathcal{D}_{[X]}[*Y]_{\tilde{\theta}, m} T^m$, où $(\mathcal{D}_{[X]}[*Y]_m)_m$ est la filtration de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ par l'ordre des opérateurs et $\tilde{\theta} = (x_0, u_0)$. Or cette filtration induite sur $\mathcal{D}_{[X]}$ est noethérienne (voir proposition 5.1.4 de [6]), donc son gradué $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$ est noethérien et par conséquent son localisé $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\tau^{*-1}]$ est noethérien. La filtration $(\mathcal{D}_{[X]}[*Y]_m)_m$ est bornée à gauche donc elle est noethérienne (voir théorème 1.26 de [2]). A_θ est un anneau noethérien.

Si $q > 1$, le résultat est le même, en considérant au lieu de la filtration usuelle, la filtration suivante :

$$\tilde{\mathcal{D}}_{[X]}[*Y]_{\tilde{\theta}, m} = \mathcal{D}_{[X]}[*Y]_{\tilde{\theta}, \lfloor \frac{m}{q} \rfloor} \quad \forall m \geq 0,$$

($\lfloor \frac{m}{q} \rfloor$ est la partie entière de $\frac{m}{q}$).

Gardons toujours les mêmes notations qu'on a données au début de ce paragraphe.

Soit I un idéal de type fini de $\mathcal{D}_{[X]}$. Munissons I de la filtration induite par $(F_r \mathcal{D}_{[X]})$ et posons $I' = \mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} I$.

PROPOSITION 4.1.2. — *Si $(F_r \mathcal{D}_{[X]}[*Y] \cap I')$ est la filtration induite par celle de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ sur I' , alors on a la relation suivante :*

$$\mathrm{gr}_{F_r}(I') = \mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}[\tau^{*-1}] \otimes_{\mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}} \mathrm{gr}_{F_r}(I).$$

Preuve. — I est un idéal de type fini de $\mathcal{D}_{[X]}$, la filtration $F_r \mathcal{D}_{[X]}$ est noethérienne, alors $\mathrm{gr}_{F_r}(I)$ est de type fini.

Soient Q_1, \dots, Q_N des éléments de I tels que $\sigma^{(r)}(Q_1), \dots, \sigma^{(r)}(Q_N)$ engendrent $\mathrm{gr}_{F_r}(I)$.

Comme Q_1, \dots, Q_N appartiennent à I' et $\mathrm{gr}_{F_r}(I')$ est un $\mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}[\tau^{*-1}]$ -module alors forcément :

$$\mathrm{gr}_{F_r}(I') \supset \mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}[\tau^{*-1}] \otimes_{\mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}} \mathrm{gr}_{F_r}(I).$$

Il reste à démontrer l'autre inclusion.

Supposons que I s'écrive $I = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_{[X]} P_i$ où P_i est d'ordre m_i pour la $F_r \mathcal{D}_{[X]}$ -filtration.

Soit $P \in F_r^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y] \cap I'$, il existe alors A_1, \dots, A_n dans $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ tels que :

$$P = \sum_{i=1}^n A_i P_i.$$

Supposons que tous les A_i appartiennent à $\mathcal{D}_{[X]}$; donc $P \in I$ et par conséquent $\sigma(P) \in \mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}[\tau^{*-1}] \otimes \mathrm{gr}_{F_r}(I)$.

S'il existe maintenant au moins un A_i qui n'appartient pas à $\mathcal{D}_{[X]}$ on multiplie P par une puissance convenable de t (par exemple t^q), ce qui donne :

$$t^q P = \sum_{i=1}^n (t^q A_i) P_i, \quad \text{où } t^q P_i \in \mathcal{D}_{[X]} \quad \forall i.$$

Mais d'après ce qui précède

$$\sigma^{[r]}(t^q P) \in \mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}[\tau^{*-1}] \otimes_{\mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}} \mathrm{gr}_{F_r}(I) \quad \text{et} \quad \sigma^{[r]}(P) = \frac{1}{\sigma^{[r]}(t^q)} \cdot \sigma^{[r]}(t^q P)$$

(t étant inversible dans $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$). Comme $\frac{1}{\sigma^{[r]}(t^q)}$ est dans $\mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}[\tau^{*-1}]$, alors $\sigma^{[r]}(P)$ appartient à $\mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}[\tau^{*-1}] \otimes_{\mathcal{O}_{[T^* \wedge |Y]}} \mathrm{gr}_{F_r}(I)$. Terminons cette partie par une proposition qui va nous permettre d'introduire le paragraphe suivant :

PROPOSITION 4.1.3. [14]. — Soit r un rationnel supérieur ou égal à un.

Si $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de $\mathcal{D}_{[X]}$ -modules cohérents, et si sur un ouvert U de $T^*\Lambda$ la codimension de $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est supérieure ou égale à d , alors on a sur cet ouvert U :

$$[\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})]_d = [\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}')]_d + [\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}'')]_d$$

où $[\tilde{C}]_d$ est la composante homogène de degré d du cycle \tilde{C} .

4.2. “Cycles microcaractéristiques” d’un $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -module.

X est toujours un fibré en droites de base Y . Identifions cette dernière à la section nulle de X . Choisissons des coordonnées locales (x, s) sur X qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{s = 0\}$, et notons par (x, ζ) et (x, ζ, x^*, ζ^*) les coordonnées locales respectives de $\Lambda = T_Y^*X$ et de $T^*\Lambda$.

Si Σ est une variété microcaractéristique d’un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent \mathcal{M} , nous désignerons par Σ' la réunion des composantes irréductibles de Σ qui ne sont pas contenues dans l’hypersurface $\{\zeta^* = 0\}$, et par $[\tilde{\Sigma}]'$ sera le cycle analytique correspondant.

Soit \mathcal{P} un $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -module cohérent. Nous supposerons de plus qu’il est cohérent vu comme un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module (cette situation n’est pas vraie en général, mais nous verrons que si $\mathcal{P}|_U$ où U est l’ouvert $X - Y$, est holonome, alors \mathcal{P} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent).

Localement, il existe un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent \mathcal{M} tel que $\mathcal{P} = \mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \mathcal{M}$. Nous définissons son cycle microcaractéristique de type (r) en tant que $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -module par :

$$[\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{P})] = [\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})]'.$$

Cette définition est indépendante du choix de \mathcal{M} . Pour cela, il suffit de remarquer que si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent tel que $\mathcal{M}[*Y] = \mathcal{P}$, alors on a une suite exacte de $\mathcal{D}_{[X]}$ -modules :

$$0 \longrightarrow H_0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow H_1 \longrightarrow 0$$

où H_0 et H_1 sont à supports dans Y .

D’après la proposition 4.1.3 et vu que $\Sigma_\Lambda^{(r)}(H_i) \subset \{\zeta^* = 0\}$, pour $i = 0, 1$ (remarque 3.2.3) alors :

$$[\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})]' = [\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{P})]'.$$

Dans cette égalité, $\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{P})$ est le cycle microcaractéristique de type (r) de \mathcal{P} vu comme $\mathcal{D}_{[X]}$ -module.

Par la suite, on ne fera plus la différence entre le cycle microcaractéristique $[\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{P})]$ du $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -module \mathcal{P} et le cycle microcaractéristique $[\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{P})]'$ cité ci-dessus.

Chapitre 5

PASSAGE À L'INFINI

Commençons tout d'abord par décrire ce passage ainsi que quelques unes de ses conséquences.

X est toujours un fibré de rang un de base Y . Localement, on identifie X au produit $Y \times \mathbb{C}$.

Dans tout ce chapitre, on se place sur un ouvert V de coordonnées locales (x, t) qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$. Soient (x, t, ξ, τ) les coordonnées locales induites sur T^*X . Si $\Lambda = T_Y^*X$ est le fibré conormal à Y dans X , on note par (x, τ, x^*, τ^*) les coordonnées locales correspondantes sur $T^*\Lambda$.

On désigne par χ et $\bar{\chi}$ respectivement l'isomorphisme ci-dessous et l'application cotangente associée :

$$\begin{aligned} \chi : Y \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow Y \times \mathbb{C}^* \\ (x, t) &\longrightarrow (x, s = 1/t) \\ \bar{\chi} : T^*(Y \times \mathbb{C}^*) &\longrightarrow T^*(Y \times \mathbb{C}^*) \\ (x, t, \xi, \tau) &\longrightarrow (x, s, \xi, \zeta) \end{aligned}$$

avec $\begin{cases} s = 1/t \\ \zeta = -t^2\tau \end{cases}$.

Soit $T_Y^*(X)$ (resp. $T_Y X$) le fibré conormal (resp. normal) à Y dans X . Les fibrés ci-dessus ont pour coordonnées locales respectives (x, τ) et $(x, \bar{\tau})$. X est un fibré vectoriel de base Y , on peut donc l'identifier à $T_Y X$ et, par conséquent, T^*X est isomorphe à $T^*(T_Y X)$.

Soient $(x, \bar{\tau}, x^*, \bar{\tau}^*)$ et (x, τ, x^*, τ^*) les coordonnées locales induites respectivement sur $T^*(T_Y X)$ et $T^*(T_Y^* X)$.

Les fibres $T_Y X$ et $T_Y^* X$ sont duaux donc il existe un isomorphisme canonique entre leurs fibrés cotangents.

Si on revient aux coordonnées locales, cet isomorphisme est donné par :

$$(x, \tau, x^*, \bar{\tau}^*) \longrightarrow (x, \bar{\tau}^*, x^*, -\bar{\tau}).$$

Par conséquent, il existe un isomorphisme local entre T^*X et $T^*(T_Y^* X)$ défini par :

$$(x, t, \xi, \tau) \longrightarrow (x, \tau, \xi, -t).$$

D'après ce qui précède, on peut exhiber le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Y \times \mathbb{C}^* & \longleftarrow & T^*X & \longrightarrow & T^*\Lambda \setminus \{\tau^* = 0\} \\ (x, t) & \longleftarrow & (x, t, \xi, \tau) & \longrightarrow & (x, \tau, x^*, \tau^*) \\ \downarrow \chi & & \downarrow \bar{\chi} & & \downarrow \Phi \\ (x, s) & \longleftarrow & (x, s, \xi, \zeta) & \longrightarrow & (x, \zeta, x^*, \zeta^*) \\ Y \times \mathbb{C}^* & \longleftarrow & T^*X & \longrightarrow & T^*\Lambda \setminus \{\zeta^* = 0\} \end{array}$$

avec $\Phi(x, \tau, x^*, \tau^*) = (x, \zeta, x^*, \zeta^*)$ tels que $\begin{cases} \zeta = -\tau\tau^{*2} \\ \zeta^* = 1/\tau^* \end{cases}$.

L'application χ est donnée, on peut définir sur $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ la transformation ψ qui à t associe $1/s$ et à D_t le monôme $-s^2D_s$.

Si P est l'opérateur $t^\alpha D_x^\gamma D_t^\beta$, son transformé $\psi(P)$ s'écrit

$$\psi(P) = \sum_{j=1}^{\beta} a_j s^{\beta-\alpha+j} D_x^\gamma D_s^j \quad \text{où } a_j \in \mathbb{Z}.$$

D'après le paragraphe 2, les opérateurs x_i , t , D_{x_i} et D_t ont pour ordres respectifs pour la F_r -filtration : 0 , $q-p$, q et p .

Leurs transformés par ψ : x_i , $1/s$, D_{x_i} et $(-s^2D_s)$ ont pour ordres respectifs par rapport à la F_{2-r} -filtration : 0 , $q-p$, q et p .

Comme ψ est un isomorphisme d'anneaux filtrés et $\sigma^{\{r\}}(\cdot)$ est multiplicatif, il en résulte que ψ définit un automorphisme vérifiant :

$$\psi(F_r^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y]) = F_{2-r}^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y]$$

et
$$\sigma^{\{2-r\}}(\psi(P)) = \sigma^{\{r\}}(P) \circ \Phi^{-1} \quad \forall P \in \mathcal{D}_{[X]}[*Y].$$

On en déduit donc en remplaçant r par $r + \epsilon$, avec ϵ assez petit :

PROPOSITION 5.1. — *Soient V un ouvert de coordonnées et I' un idéal de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ engendré sur V par des opérateurs P_1, \dots, P_n . On suppose de plus que sur cet ouvert le gradué de I' associé à la $F_r \mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -filtration est engendré par $\sigma^{\{r\}}(L_1), \dots, \sigma^{\{r\}}(L_N)$. Alors l'idéal $\psi(I')$ est engendré par $(\psi(P_1)), \dots, (\psi(P_n))$ et son gradué par rapport à la $(F_{2-r} \mathcal{D}_{[X]}[*Y])$ est engendré par $\sigma^{\{2-r\}}(\psi(L_1)), \dots, \sigma^{\{2-r\}}(\psi(L_N))$.*

Notons maintenant par $\bar{\psi}$ l'isomorphisme local de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -modules induit par ψ .

Soient \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent et U l'ouvert $X - Y$. On pose :

$$\mathcal{N} = \bar{\psi}(\mathcal{M}|_U).$$

\mathcal{N} est donc un $\mathcal{D}_{[X]|U}$ -module cohérent.

PROPOSITION 5.2. — *Il existe (localement) un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent $\tilde{\mathcal{N}}$ tel que $\tilde{\mathcal{N}}|_U = \mathcal{N}$.*

Preuve. — Si \mathcal{N} est un $\mathcal{D}_{[X]|U}$ -module cohérent, alors il s'écrit localement sous la forme

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}_{[X]|U} u_1 + \dots + \mathcal{D}_{[X]|U} u_N.$$

Donc il suffit de démontrer qu'un $\mathcal{D}_{[X]|U}$ -module à un générateur se prolonge en un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent sur un ouvert de coordonnées V .

Prenons alors un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent \mathcal{M} de la forme $\mathcal{D}_{[X]}/I$ où I est un idéal de type fini engendré localement par des opérateurs P_1, \dots, P_n . Soit V un ouvert (de X) de

coordonnées locales (x, s) qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{s = 0\}$, et désignons par \mathcal{N} le transformé de $\mathcal{M}|_U$ par $\bar{\psi}$ sur V .

Comme les opérateurs $\psi(P_1), \dots, \psi(P_n)$ sont à coefficients méromorphes et polynomiaux en s , alors il existe un entier m (qui n'est pas unique) tel que $s^m \psi(P_i) \in \mathcal{D}_{[X]} \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Notons par \mathcal{J}_m l'idéal de $\mathcal{D}_{[X]}$ engendré par $s^m \psi(P_1), \dots, s^m \psi(P_n)$ et par $\tilde{\mathcal{N}}$ le $\mathcal{D}_{[X]}$ -module $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{J}_m$.

Il est clair que $\tilde{\mathcal{N}}|_U = \mathcal{N}$ sur l'ouvert V , d'où le résultat.

DÉFINITION 5.3. — Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent, on note par $T(\mathcal{M})$ le $\mathcal{D}_{[X]}$ -module donné par :

$$T(\mathcal{M}) = \tilde{\mathcal{N}}[*Y]$$

où $\tilde{\mathcal{N}}$ est le $\mathcal{D}_{[X]}$ -module de la proposition 5.2 et $\tilde{\mathcal{N}}[*Y]$ est le localisé de $\tilde{\mathcal{N}}$ le long de Y .

Rappelons (d'après le paragraphe 4.2) qu'il est possible d'associer un cycle microcaractéristique à un $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ -module cohérent et que si Σ est une variété microcaractéristique d'un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent \mathcal{M} , Σ' désignera la réunion des composantes irréductibles de Σ qui ne sont pas contenues dans l'hypersurface de $T^*\Lambda$ donnée localement par $\{\zeta^* = 0\}$, et $[\tilde{\Sigma}]'$ sera le cycle analytique correspondant.

THÉORÈME 5.4. — Soient r un rationnel quelconque et \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent. Si $\tilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M})$ est la variété microcaractéristique de type r de \mathcal{M} et $\tilde{\Sigma}^{(2-r)'}(T(\mathcal{M}))$ est l'ensemble analytique cité ci-dessus, alors

$$\tilde{\Sigma}^{(2-r)'}(T(\mathcal{M})) = Ad[\Phi(\Sigma^{(r)}(\mathcal{M}) \cap \{\tau^* \neq 0\})]$$

où Φ est l'application définie dans le paragraphe 5 et $Ad(C)$ est l'adhérence de l'ensemble analytique C .

Preuve. — Commençons par faire la démonstration lorsque \mathcal{M} est de la forme $\mathcal{D}_{[X]}/I$, où I est un idéal de type fini.

I est donc engendré (localement) par des opérateurs P_1, \dots, P_n . Soit r un rationnel quelconque. Munissons I de la filtration induite par $(F_r \mathcal{D}_{[X]})$ et supposons que l'idéal $\sigma^{(r)}(I)$ de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$ engendré par les symboles de type r des éléments de I , est engendré par $\sigma^{(r)}(L_1), \dots, \sigma^{(r)}(L_N)$.

Plaçons nous sur un ouvert de coordonnées locales (x, s) de X qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{s = 0\}$. Notons par (x, ζ) et (x, ζ, x^*, ζ^*) les coordonnées locales induites sur $\Lambda = T_Y^*X$ et $T^*\Lambda$ respectivement.

Comme chaque $\psi(P_i)$ est dans $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $s^m \psi(P_i) \in \mathcal{D}_{[X]} \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Notons également par \mathcal{J}_m l'idéal de $\mathcal{D}_{[X]}$ engendré par $s^m\psi(P_1), \dots, s^m\psi(P_n)$ et par $\tilde{\mathcal{N}}$ le $\mathcal{D}_{[X]}$ -module $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{J}_m$. Or l'idéal $\mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \mathcal{J}_m$ n'est autre que le transformé par l'isomorphisme ψ de l'idéal $\mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} I$ de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$. Donc, l'idéal $\sigma^{[2-r]}(\psi(\mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} I))$ de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\zeta^{*-1}]$ engendré par les symboles de type $[2-r]$ de $\psi(\mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} I)$ a pour partie génératrice $\sigma^{[2-r]}(\psi(L_1)), \dots, \sigma^{[2-r]}(\psi(L_N))$. Par conséquent, d'après la proposition 4.1.2, l'idéal $\sigma^{[2-r]}(\mathcal{J}_m)$ de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$ est engendré en dehors de l'hypersurface $\{\zeta^* = 0\}$ par les symboles $\sigma^{[2-r]}(\psi(L_1)), \dots, \sigma^{[2-r]}(\psi(L_N))$.

Par conséquent, la restriction de la variété microcaractéristique $\Sigma^{(2-r)}(\tilde{\mathcal{N}})$ de $\tilde{\mathcal{N}}$ à $T^*\Lambda \setminus \{\zeta^* = 0\}$ est donnée par :

$$\Sigma^{(2-r)}(\tilde{\mathcal{N}})|_{\{\zeta^* \neq 0\}} = \{\theta \in T^*\Lambda / \sigma^{[2-r]}(\psi(L_j))(\theta) = 0, \quad j = 1, \dots, N\}.$$

Mais $\sigma^{[2-r]}(\psi(L_j)) = \sigma^{[r]}(L_j) \circ \Phi^{-1}$ où Φ est la transformation décrite dans le paragraphe 5, et les $\sigma^{\{r\}}(L_j)$ pour $j = 1, \dots, N$, engendrent l'idéal $\sigma^{\{r\}}(I)$ de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$, donc on a forcément :

$$\Sigma^{(2-r)' }(\tilde{\mathcal{N}}) = Ad[\Phi(\Sigma^{(r)}(\mathcal{M}) \cap \{\tau^* \neq 0\})],$$

où $Ad(C)$ est l'adhérence de l'ensemble analytique C .

Si maintenant \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent quelconque engendré localement par des sections u_1, \dots, u_ℓ , alors on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{[X]}u_1 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_0 \longrightarrow 0$$

où \mathcal{M}_0 est le $\mathcal{D}_{[X]}$ -module engendré par les classes d'équivalence modulo $\mathcal{D}_{[X]}u_1$ des sections u_2, \dots, u_ℓ .

En faisant une récurrence sur le nombre de générateurs de \mathcal{M} , le résultat découle directement de ce qui précède et de la proposition 4.1.3, ce qui termine la démonstration.

LEMME 5.5. — *Soient r un rationnel quelconque et Σ un sous-ensemble analytique lagrangien de $T^*\Lambda$ qui est homogène pour H_r . Soit Φ l'application donnée dans des coordonnées locales par :*

$$\begin{aligned} T^*\Lambda \setminus \{\tau^* = 0\} &\longrightarrow T^*\Lambda \setminus \{\zeta^* = 0\} \\ (x, \tau, x^*, \tau^*) &\longrightarrow (x, \zeta, x^*, \zeta^*) \end{aligned}$$

$$\text{telle que } \begin{cases} \zeta = -\tau\tau^{*2} \\ \zeta^* = 1/\tau^* \end{cases}.$$

Alors l'ensemble analytique $\Phi(\Sigma \cap \{\tau^* \neq 0\})$ est lagrangien et H_{2-r} -homogène.

Preuve. — Si Σ est un ensemble analytique H_r -homogène, alors il est donné localement par un nombre fini d'équations $\{f = 0\}$ telles qu'il existe pour chaque f , un entier

k qui vérifie $u_r(f) = k \cdot f$, où u_r est le champ de vecteurs associé à l'action en question et qu'on peut écrire localement comme :

$$u_r = \sum_i x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} + r\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + (1-r)\tau^* \frac{\partial}{\partial \tau^*}.$$

Φ est biholomorphe, la fonction $f \circ \Phi^{-1}$ est donc analytique sur $T^*\Lambda \setminus \{\zeta^* = 0\}$.

Soit u_{2-r} le champ de vecteurs donné localement par :

$$u_{2-r} = \sum_i x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} + (2-r)\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + (r-1)\zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*}.$$

Il est facile de vérifier que $u_{2-r}(f \circ \Phi^{-1}) = k(f \circ \Phi^{-1})$, et donc cette fonction est H_{2-r} -homogène et vérifie $(f \circ \Phi^{-1})|_{\Phi(\Sigma \cap \{\tau^* \neq 0\})} = 0$.

Pour la définition de l'irrégularité, on renvoie à (2.2).

COROLLAIRE 5.6. — Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent.

1) Deux rationnels r_k et r_{k+1} sont deux indices consécutifs de \mathcal{M} si et seulement si $(2 - r_k)$ et $(2 - r_{k+1})$ le sont pour $\tilde{\mathcal{N}}$.

2) Si la variété $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ est lagrangienne, alors :

$$\text{Irr}(2-r)(\tilde{\Sigma}^{(2-r)}(T(\mathcal{M}))) = \text{Irr}(r)(\tilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M})).$$

Preuve.

1) Soient $r_k \in \mathbb{Q}$ et $\Sigma^{(r_k)}(\mathcal{M})$ la variété microcaractéristique de type r_k de \mathcal{M} . Supposons que $\Sigma^{(r_k)}(\mathcal{M})$ s'écrive :

$$\Sigma^{(r_k)}(\mathcal{M}) = \bigcup_{\ell} \Sigma_{\ell}^{(r_k)}(\mathcal{M})$$

où $\Sigma_{\ell}^{(r_k)}(\mathcal{M})$ est irréductible.

D'après la remarque 2.1.4, r_k est un indice pour \mathcal{M} s'il existe un entier ℓ_0 tel que la composante irréductible $\Sigma_{\ell_0}^{(r_k)}(\mathcal{M})$ correspondante ne soit pas bihomogène (i.e. homogène pour H_0 et H_{∞}).

Choisissons sur X des coordonnées locales (x, t) telles que $Y = \{t = 0\}$ et qui soient linéaires dans les fibres de $p : X \rightarrow Y$. Si (x, τ) sont les coordonnées locales de $\Lambda = T_Y^*X$, nous noterons (x, τ, x^*, τ^*) celles induites sur $T^*\Lambda$.

Remarquons que si $\Sigma_{\ell_0}^{(r_k)}(\mathcal{M})$ est une composante irréductible contenue dans $\{\tau^* = 0\}$, d'après le lemme 4.5.1 de [15], cette dernière est bihomogène. Prenons alors une composante qui n'est pas contenue dans l'hypersurface $\{\tau^* = 0\}$ et notons la $\Sigma_{\ell_0}^{(r_k)'}(\mathcal{M})$.

D'après le théorème 5.4 l'adhérence de la composante $\Phi(\Sigma_{\ell_0}^{(r_k)'}(\mathcal{M}) \cap \{\tau^* \neq 0\})$ est une composante $\Sigma^{(2-r_k)'(\tilde{\mathcal{N}})}$. Φ est bijective, donc $\Sigma_{\ell_0}^{(2-r_k)'(\tilde{\mathcal{N}})}$ est irréductible et non bihomogène, par conséquent $(2 - r_k)$ est un indice de $\tilde{\mathcal{N}}$.

2) L'application "Irrégularité" notée (Irr) associée à un cycle lagrangien H_r -homogène de $T^*\Lambda$, un cycle lagrangien homogène de T^*Y .

Comme elle est additive et vu la remarque 2.2.3, il suffit de démontrer l'égalité pour les composantes irréductibles de $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ qui ne sont pas contenues dans l'hypersurface $\{\tau^* = 0\}$.

Soit $\Sigma_{\ell}^{(r)}(\mathcal{M})$ une composante irréductible de $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ qui n'est pas contenue dans $\{\tau^* = 0\}$. Associons à cette composante les deux cycles lagrangiens bihomogènes de $T^*\Lambda$, $\Sigma_{\ell}^{(r)\pm}(\mathcal{M})$ définis dans le paragraphe 2.2. Ces derniers se décomposent selon le lemme 2.2.1 en :

$$\tilde{\Sigma}_{\ell}^{(r)\pm}(\mathcal{M}) = j_1 p_1^{-1} \tilde{\mathcal{S}}_1^{(r)\pm} + j_2 p_2^{-1} \tilde{\mathcal{S}}_2^{(r)\pm}.$$

Remarquons que d'une part, les transformations canoniques de T^*Y conservent le faisceau $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$ et les actions H_r de \mathbb{C}^* sur $T^*\Lambda$ et que d'autre part elles sont compatibles avec l'application Φ citée dans le lemme 5.5.

Par conséquent une composante irréductible de la réunion $\Sigma_{\ell}^{(r)+}(\mathcal{M}) \cup \Sigma_{\ell}^{(r)-}(\mathcal{M})$ qui n'est pas contenue dans l'ensemble $\{x^* = 0\}$, peut être ramenée par une transformation canonique de T^*Y (au voisinage d'un point générique) en une composante contenue dans $\{x = 0\}$.

Choisissons des coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) de Y , (x, τ) de $\Lambda = T_Y^*X$ et (x, τ, x^*, τ^*) de $T^*\Lambda$ et supposons que les variétés $\Sigma_{\ell}^{(r)\pm}(\mathcal{M})$ sont contenues dans l'ensemble $\{x_1 = 0\}$.

D'après les lemmes 1.4.4 et 1.4.5 et la proposition 1.4.6 de [21], si π est la projection définie en coordonnées locales par $\pi(x, \tau, x^*, \tau^*) = (\tau, x^*, \tau^*)$, alors on a les propriétés suivantes :

- π est finie et propre sur $\Sigma_{\ell}^{(r)}(\mathcal{M})$.
- $\pi(\Sigma_{\ell}^{(r)}(\mathcal{M}))$ est une hypersurface irréductible H_r -homogène donnée par une fonction unique du type

$$f(x, \tau, x^*) = u(x^*)\tau^{\beta_0}\tau^*\tau^{\beta_0+a} + \sum_{a < \gamma < \beta < b} f_{\beta\gamma}(x^*)\tau^{\beta}\tau^{*\gamma} + v(x^*)\tau^{\beta_1}\tau^*\tau^{\beta_1+b}$$

où $u(x^*)$ et $v(x^*)$ sont deux fonctions inversibles et $\beta_0 = a = 0$ ($\pi(\Sigma_{\ell}^{(r)}(\mathcal{M}))$ est irréductible).

- $\text{Irr}(r)(\tilde{\Sigma}_{\ell}^{(r)}(\mathcal{M})) = \text{Irr}(r)(\pi_*\tilde{\Sigma}_{\ell}^{(r)}(\mathcal{M}))$
 $= (\beta_1 + b) - \beta_1 - (\beta_0 + a) + \beta_0 = b.$

Si maintenant Φ est l'application donnée dans le lemme 5.5, alors

$$\Phi_* f(x^*, \zeta, \zeta^*) = u(x^*) + \sum_{a < \gamma - \beta < b} (-1)^\beta f_{\beta\gamma}(x^*) \zeta^\beta \zeta^{*2\beta - \gamma} + (-1)^{\beta_1} v(x^*) \zeta^{*\beta_1} \zeta^{*\beta_1 - b}$$

est une fonction H_{2-r} -homogène.

Donc l'adhérence de la composante irréductible $\{\Phi_* f = 0\}$ est une composante $\pi_* \Sigma_\ell^{(2-r)}(T(\mathcal{M}))$ (théorème 5.4) donnée par l'équation :

$$g(x^*, \zeta, \zeta^*) = (-1)^{\beta_1} v(x^*) \zeta^{\beta_1} + \sum_{a < \gamma - \beta < b} (-1)^\beta f_{\beta\gamma}(x^*) \zeta^\beta \zeta^{*2\beta - \gamma + b - \beta_1} + u(x^*) \zeta^{*\beta_1}.$$

Comme $\text{Irr}(2-r)(\pi_* \tilde{\Sigma}_\ell^{(2-r)}(T(\mathcal{M}))) = b$, alors

$$\text{Irr}(2-r)(\tilde{\Sigma}^{(2-r)}(T(\mathcal{M}))) = \text{Irr}(r)(\tilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M}))$$

d'où le résultat.

Terminons ce chapitre par la proposition suivante :

PROPOSITION 5.7. — *Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome. $T(\mathcal{M})$ est holonome vu comme un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module.*

Preuve. — Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome, $\tilde{\mathcal{N}}|_U = \overline{\psi}(\mathcal{M}|_U)$ est un $\mathcal{D}_{[X]|U}$ -module holonome ($\overline{\psi}$ est un isomorphisme).

Or, $\tilde{\mathcal{N}}|_U$ est holonome veut dire que $(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \tilde{\mathcal{N}})|_U$ est un $\mathcal{D}_{X|U}$ -module holonome. D'après le théorème 1.3 de [10], cela implique que $\mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \tilde{\mathcal{N}}$ est un \mathcal{D}_X -module holonome. Or

$$\mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}[*Y]} T(\mathcal{M}),$$

et comme $T(\mathcal{M})$ est déjà localisé, alors $\mathcal{D}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \tilde{\mathcal{N}}$ n'est autre que $T(\mathcal{M})$ tensorisé par \mathcal{D}_X , donc $T(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome.

Chapitre 6

COMPORTEMENT DES SOLUTIONS VIS-À-VIS DU PASSAGE À L'INFINI

Soit X un fibré en droites sur Y , on identifiera cette dernière à la section nulle de X .

On considère un $\mathcal{D}_{|X}$ -module cohérent \mathcal{M} et on voudrait regarder comment se comportent les solutions de \mathcal{M} vis-à-vis du passage à l'infini. Pour cela, on a besoin de localiser \mathcal{M} . Comme $B_{Y|X}(r)$ n'est pas un $\mathcal{D}_{|X}[*Y]$ -module, on est amené à considérer le quotient $B_{Y|X}(r)/B_{Y|X}$ qui lui est muni de cette structure.

PROPOSITION 6.1. — *Pour tout $r \in [-\infty, +\infty]$, la flèche suivante est un quasi-isomorphisme :*

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{|X}}(\mathcal{M}, B_{Y|X}(r)/B_{Y|X}) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{|X}[*Y]}(\mathcal{M}[*Y], B_{Y|X}(r)/B_{Y|X})$$

où $\mathcal{M}[*Y]$ est le localisé de \mathcal{M} le long de Y .

Preuve. — Le résultat est dû au lemme suivant dont la démonstration se trouve dans [9]. Appendice 1 :

LEMME 6.2. — *Soient \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 deux faisceaux d'anneaux sur X tels que \mathcal{A}_1 soit plat sur \mathcal{A}_0 . Si \mathcal{M} est un \mathcal{A}_0 -module à droite et \mathcal{F} est un \mathcal{A}_1 -module à gauche, alors :*

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathcal{A}_0} \mathcal{M}, \mathcal{F}).$$

Pour les définitions que l'on va utiliser maintenant, on renvoie au chapitre 1.

D'après la proposition 1.3.2, les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}/B_{Y|X}$ et $\mathcal{O}_X(*\widehat{Y})/\mathcal{O}_X[*Y]$ sont isomorphes en tant que $\mathcal{D}_{|X}$ -modules.

En fait, cet isomorphisme n'est autre que le prolongement de l'application $F : \mathcal{B}_{Y|X}^\infty \rightarrow \mathcal{O}_X(*Y)$ aux faisceaux en question. En coordonnées locales, F est l'application \mathbb{C} -linéaire qui à l'élément $\delta^{(n)}(t)$ du faisceau $\mathcal{B}_{Y|X}^\infty$ associe la fonction méromorphe $K_n(t) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{n!}{(-t)^{n+1}}$. Notons par $B_{Y|X}[k]$ le sous-faisceau de $\mathcal{B}_{Y|X}^\infty$ dont les éléments s'écrivent en coordonnées locales comme $\sum_{\alpha \leq k} a_\alpha(x) \delta^{(\alpha)}(t)$ avec $k \leq 0$. Le faisceau $B_{Y|X}[k]$ est d'ailleurs celui qu'on a noté dans le paragraphe 1 par $\mathcal{B}_{Y|X}^\infty/D_t^{k+1}\mathcal{B}_{Y|X}^\infty$.

Considérons pour $k \in \mathbb{N}$, les groupes :

$$\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}[k] = \{u + B_{Y|X}, \quad u \in B_{Y|X}[k]\},$$

où $(u + B_{Y|X})$ est la classe d'équivalence de u modulo $B_{Y|X}$.

D'après le chapitre 1, les faisceaux $B_{Y|X}[k]$ sont indépendants des coordonnées locales choisies, par conséquent le faisceau quotient $\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}/B_{Y|X}$ est donné par :

$$\widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}/B_{Y|X} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{B}}_{Y|X}[k],$$

où la limite projective est prise sur les fonctions :

$$f_k : \mathcal{B}_{Y|X}[k] \longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X}[k-1].$$

Si maintenant, $\mathcal{O}_X(*Y)[k]$ désigne le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X(*Y)$ des éléments qui s'écrivent en coordonnées locales comme $\sum_{0 \leq \ell \leq k} a_\ell(x) K_\ell(t)$, où $K_\ell(t)$ est la fonction méromorphe

$$\frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{\ell!}{(-t)^{\ell+1}},$$

alors on définit les faisceaux $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k]$ par :

$$\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k] = \{u + \mathcal{O}_X[*Y] / u \in \mathcal{O}_X[*Y][k]\},$$

où $(u + \mathcal{O}_X[*Y])$ est la classe d'équivalence de u modulo $\mathcal{O}_X[*Y]$. De la même manière, on démontre que :

$$\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})/\mathcal{O}_X[*Y] = \varprojlim_k \mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k]$$

où la limite projective est donnée par les applications :

$$h_k : \mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k] \longrightarrow \mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k-1].$$

Remarquons que l'application F citée ci-dessus définit un isomorphisme de groupes entre $\mathcal{B}_{Y|X}[k]$ et $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k]$ qui est compatible, d'une part, avec les applications f_k et h_k , et d'autre part avec la structure de $\mathcal{D}_{|X}[*Y]$ -module. Donc par un argument similaire à celui de la démonstration de la proposition 1.2.1, on vérifie que F induit un isomorphisme de $\mathcal{D}_{|X}[*Y]$ -module entre les faisceaux $\mathcal{B}_{Y|X}/\mathcal{B}_{Y|X}$ et $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})/\mathcal{O}_X[*Y]$.

On démontre de la même manière que la proposition 1.3.1, que :

PROPOSITION 6.3. — *Pour tout rationnel r tel que $r \in [-\infty, +\infty]$, les faisceaux $\mathcal{O}_X(*Y)(r, 1)/\mathcal{O}_X[*Y]$ et $\mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X}$ sont isomorphes en tant que $\mathcal{D}_{|X}[*Y]$ -modules.*

Revenons à l'application χ du paragraphe 5.

Choisissons deux systèmes de coordonnées locales (x, t) et (x, s) sur X qui soient linéaires dans les fibres et telles que Y est donnée par $\{t = 0\}$ et $\{s = 0\}$ respectivement.

Rappelons que χ est l'isomorphisme qui à (x, t) associe $(x, s = \frac{1}{t})$.

Soit r un rationnel inférieur ou égal à un. Soit f une section de $\mathcal{O}_X(*Y)(r, 1)$. Il est clair que $\chi_* f(x, s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x) s^{-n}$ avec $\sum_{n \leq 0} a_n(x) \cdot \frac{s^{-n}}{((-n)!(2-r)-1)} < \infty$.

χ définit donc un isomorphisme χ' entre $\mathcal{O}_X(*Y)(r, 1)$ et $\mathcal{O}_X(*Y)(1, 2-r)$. Finalement, comme ψ définit un automorphisme sur $\mathcal{D}_{|X}[*Y]$, introduisons une nouvelle structure de $\mathcal{D}_{|X}[*Y]$ -module sur $\mathcal{O}_X(*Y)(1, 2-r)$: si P est un élément de $\mathcal{D}_{|X}[*Y]$, on définit son action sur une section u de $\mathcal{O}_X(*Y)(1, 2-r)$ par $(P u) \rightarrow \psi(P) \cdot u$.

Par conséquent, χ' n'est autre qu'un changement de variables ordinaires, on en déduit :

LEMME 6.4. — *L'isomorphisme \mathbb{C} -linéaire χ' entre $\mathcal{O}_X(*Y)(r, 1)$ et $\mathcal{O}_X(*Y)(1, 2-r)$ pour $r \in [-\infty, 1]$, se prolonge en un isomorphisme de $\mathcal{D}_{|X}[*Y]$ -modules.*

Terminons cette partie par la proposition suivante, pour les notations, elles sont celles des paragraphes 5 et 6.

PROPOSITION 6.5. — Soient r un rationnel inférieur ou égal à un et \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent.

1) Les complexes :

$$\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X}) \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(T(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X(*Y)(1, 2 - r)/\mathcal{O}_{[X]}(*Y))$$

sont quasi-isomorphes.

2) Si r_1 et r_2 sont deux rationnels tels que $-\infty < r_1 < r_2 \leq 1$, alors les couples :

$$\begin{aligned} & \mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r_1)/\mathcal{B}_{Y|X}(r_2)) \\ \text{et} \quad & \mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(T(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X(*Y)(1, 2 - r_1)/\mathcal{O}_X(*Y)(1, 2 - r_2)) \end{aligned}$$

sont quasi-isomorphes.

Preuve.

1) Comme $T(\mathcal{M})$ n'est autre que le transformé par $\overline{\psi}$ du localisé $\mathcal{M}[*Y]$ de \mathcal{M} , alors il suffit de revenir successivement à la proposition 6.3 et au lemme 6.4.

2) On remarque que $\mathcal{B}_{Y|X}(r_1)/\mathcal{B}_{Y|X}(r_2)$ est isomorphe au quotient

$$\mathcal{B}_{Y|X}(r_1)/\mathcal{B}_{Y|X}/\mathcal{B}_{Y|X}(r_2)/\mathcal{B}_{Y|X}$$

et que la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{B}_{Y|X}(r_2)}{\mathcal{B}_{Y|X}} \longrightarrow \frac{\mathcal{B}_{Y|X}(r_1)}{\mathcal{B}_{Y|X}} \longrightarrow \frac{\mathcal{B}_{Y|X}(r_1)}{\mathcal{B}_{Y|X}(r_2)} \longrightarrow 0.$$

L'assertion est vraie pour les deux premiers termes de la suite exacte (d'après 1), donc elle est également vraie pour le troisième.

Chapitre 7

THÉORÈMES D'INDICE

Dans ce chapitre, on démontrera que si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome, les complexes de solutions $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r\})$ et $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ pour tout $r \in [-\infty, +\infty]$ sont des complexes de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y .

Signalons qu'en dimension un (*i.e.* $X = \mathbb{C}$), le problème se ramène à un opérateur à coefficients algébriques, et le résultat est démontré dans [33].

Soient X une variété analytique complexe et T^*X le fibré cotangent associé. Si Σ est un sous-ensemble analytique de T^*X , homogène et lagrangien, alors il s'écrit comme la réunion de $T_{X_j}^*X$, où X_j est une sous-variété de X et $T_{X_j}^*X$ est l'adhérence du fibré conormal à la partie régulière de X_j . Ainsi tout cycle positif $\tilde{\Sigma}$ de support Σ s'écrit :

$$\tilde{\Sigma} = \sum_j m_j [T_{X_j}^*X] \quad \text{avec} \quad m_j \in \mathbb{N}$$

L'obstruction d'Euler de $\tilde{\Sigma}$ en un point $x \in X$ est définie par :

$$E_{\tilde{\Sigma}}(x) = \sum_j m_j (-1)^{\mathrm{codim} X_j} E_{X_j}(x)$$

où $E_{X_j}(x)$ est l'obstruction d'Euler de X_j en x .

Signalons que $E_{\tilde{\Sigma}}(x)$ est une fonction constructible sur X .

Si \mathcal{M} et \mathcal{F} sont deux \mathcal{D}_X -modules à gauche, et si tous les $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{F})_x$ où $x \in X$ fixé, sont des \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie, on dira que le couple $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ est d'indice fini en x et ce dernier sera donné par :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{F})_x = \sum_j (-1)^j \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{F})_x.$$

Rappelons que si \mathcal{M} est un complexe de \mathcal{D}_X -modules à cohomologie holonome, Kashiwara a démontré que $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur X , en particulier si \mathcal{M} est un \mathcal{D}_X -module holonome, $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est un faisceau pervers et le couple $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ est d'indice fini en chaque point x .

En outre, il vérifie :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{F})_x = E_{\mathrm{ch}(\mathcal{M})}(x).$$

Prenons maintenant un fibré en droites X de base Y et $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_{[X]} u_i$ un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent.

Voici le théorème central de ce travail :

THÉORÈME 7.1. — Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome.

1) Pour tout $r \in [-\infty, +\infty]$, $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y .

2) Si r_k et r_{k+1} sont deux indices consécutifs de \mathcal{M} , pour tout r tel que $r_k < r < r_{k+1}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r_k\}) &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r\}) \\ &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r)) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r_{k+1})).\end{aligned}$$

3) Pour tout $x \in Y$, on a :

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))_x &= Eu_{\tilde{\mathrm{ch}}_\Lambda(r)(\mathcal{M})}(x) \\ \chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r\})_x &= Eu_{\tilde{\mathrm{ch}}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})}(x).\end{aligned}$$

COROLLAIRE 7.2. — Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome.

Si $\tilde{\mathrm{ch}}_\Lambda(r)(\mathcal{M}) = j_1 p_1^{-1} \tilde{S}_1(r)(\mathcal{M}) + j_2 p_2^{-1} \tilde{S}_2(r)(\mathcal{M})$ est l'unique décomposition du cycle microcaractéristique $\tilde{\mathrm{ch}}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ selon le lemme 2.2.1, $\tilde{S}_1(r)$ et $\tilde{S}_2(r)$ sont des cycles lagrangiens positifs de T^*Y , alors pour tout point $x \in Y$, on a :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))_x = Eu(\tilde{S}_1(r)(\mathcal{M}) - \tilde{S}_2(r)(\mathcal{M}))(x).$$

Le résultat est le même si on remplace (r) par $\{r\}$.

Pour démontrer le théorème 7.1, on a besoin du lemme suivant, les notations utilisées sont celles des paragraphes 1 et 2.

Soit X un fibré en droites de base Y . On note par $\mathcal{O}_{[X]}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X et polynomiales dans les fibres de $p : X \rightarrow Y$.

LEMME 7.3. — Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome défini près de Y . Le complexe $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{[X]})$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y , en plus, pour tout $x \in Y$, on a :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{[X]}) = -Eu_{\tilde{\mathrm{ch}}_\Lambda(-\infty)(\mathcal{M})}.$$

Preuve. — Soient (x, t) et (x, s) deux systèmes de coordonnées locales sur X qui soient linéaires dans les fibres et telles que Y est donnée respectivement par $\{t = 0\}$ et $\{s = 0\}$.

Notons par (x, τ) et (x, ζ) les coordonnées locales induites sur $\Lambda = T_Y^*X$ associées respectivement aux deux systèmes de coordonnées ci-dessus, et par (x, τ, x^*, τ^*) et (x, ζ, x^*, ζ^*) les coordonnées locales respectives de $T^*\Lambda$.

Remarquons que dans les coordonnées locales ci-dessus, le faisceau $\mathcal{O}_{[X]}$ n'est autre que le $\mathcal{D}_{[X]}$ -module $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{D}_{[X]}D_t + \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_{[X]}D_{x_i}$.

La transformation de Fourier sur $\mathcal{D}_{[X]}$ est l'application (notée Φ) qui à (t, D_t) associe $(-D_s, s)$. Cet automorphisme de $\mathcal{D}_{[X]}$ transforme le $\mathcal{D}_{[X]}$ -module $\mathcal{O}_{[X]}$ en le $\mathcal{D}_{[X]}$ -module $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{D}_{[X]}s + \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_{[X]}D_{x_i}$. Mais ce dernier n'est autre que le faisceau $\mathcal{B}_{Y|X}$.

Donc, d'après le corollaire 4.5.3 de [15], et vu que la transformation ci-dessus échange les variétés $\text{ch}_\Lambda(+\infty)(\Phi(\mathcal{M}))$ et $\text{ch}_\Lambda(-\infty)(\mathcal{M})$ et en particulier les composantes contenues dans $\{\tau^* = 0\}$ (resp. $\{\tau = 0\}$) et celles contenues dans $\{\zeta = 0\}$ (resp. $\{\zeta^* = 0\}$), le complexe $\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{[X]})$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y . En plus on a :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{[X]}) = -Eu_{\tilde{\text{ch}}_\Lambda(-\infty)(\mathcal{M})}.$$

Démonstration du théorème 7.1. — Pour $r \in [1, +\infty]$, le résultat est donné par le corollaire 4.3.2 de [16].

Supposons, par la suite, que $-\infty < r \leq 1$.

Signalons que si $r \leq 1$, alors $2 - r \geq 1$ et donc on peut appliquer les résultats de [16].

1) Comme $T(\mathcal{M})$ est holonome (voir la proposition 5.7), la constructibilité de $\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X})$ se ramène donc à celle du complexe

$$\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(T(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X(*Y)(1, 2 - r)/\mathcal{O}_{[X]}(*Y)).$$

Comme la suite de $\mathcal{D}_{[X]}$ -modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X|Y}(2 - r) \longrightarrow \mathcal{O}_X(*Y)(1, 2 - r) \longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X}^\infty \longrightarrow 0$$

est exacte, le résultat découle directement des corollaires (4.3.2) et (4.3.6) de [16] et du lemme 7.3.

3) D'après 1) de la proposition 6.5 et la suite exacte ci-dessus, les complexes $\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X})$ et $\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(T(\mathcal{M}), \mathcal{O}_{X|Y}(2 - r)/\mathcal{O}_{[X]})$ sont quasi-isomorphes. Au vu du corollaire 4.3.6 de [16] et du corollaire 5.5 cité précédemment, on a, pour tout $x \in Y$:

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X})_x &= Eu(\tilde{\text{ch}}_\Lambda(-\infty)(T(\mathcal{M})) - \tilde{\text{ch}}_\Lambda\{2 - r\}(T(\mathcal{M})))_x \\ &= Eu\left(\sum_{-\infty \leq s \leq 2 - r} \text{Irr}(s)(\tilde{\Sigma}^{(s)}(T(\mathcal{M})))\right)_x \\ &= Eu\left(\sum_{r \leq 2 - s \leq +\infty} \text{Irr}(2 - s)(\tilde{\Sigma}^{(2 - s)}(\mathcal{M}))\right)_x \\ &= Eu\left(\tilde{\text{ch}}_\Lambda(r)(\mathcal{M}) - \tilde{\text{ch}}_\Lambda(+\infty)(\mathcal{M})\right)_x, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Chapitre 8

MICROLOCALISATION

8.1. Microfonctions holomorphes.

Soient X une variété analytique complexe et Y une sous-variété de X . Le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}$ a été défini dans [36] et [33], il est muni d'une filtration canonique que l'on va noter $(\mathcal{C}_{Y|X,\ell})_{\ell \in \mathbb{Z}}$.

Prenons maintenant un fibré vectoriel X de rang n et de base Y . Identifions Y à la section nulle de X et notons par $\Lambda = T_Y^*X$ le fibré conormal à Y dans X . Soit θ le champ d'Euler associé à l'action de \mathbb{C}^* sur les fibres de X . En fait, θ est un opérateur microdifférentiel adapté à la variété lagrangienne Λ (au sens de [14]).

Soit $m \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\mathcal{C}_{Y|X}[m] = \left\{ u \in \mathcal{C}_{Y|X} / \theta u = (-m - n)u \right\}$$

et on définit le faisceau des microfonctions formelles par :

$$\mathcal{C}_{Y|X}(-\infty, 1) = \left\{ u^{(0)} + \sum_{k \geq 1} u_k, \quad u^{(0)} \in \mathcal{C}_{Y|X,0} \quad \text{et} \quad u_k \in \mathcal{C}_{Y|X}[k] \right\}.$$

Si, maintenant, r est un rationnel quelconque, on note par $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)$ le sous-faisceau de $\mathcal{C}_{Y|X}(-\infty, 1)$ tel que si $u = u^{(0)} + \sum_{k \geq 1} u_k$ est un élément de $\mathcal{C}_{Y|X}(-\infty, 1)$, alors il vérifie :

$\forall \epsilon > 0, \exists C_k > 0, \exists \alpha > 0$ tel que pour $|T| < \alpha$

$$N_k(u_k, T) \leq C_\epsilon \cdot \epsilon^k \cdot \frac{1}{(k!)^r} \quad \forall k \geq 1.$$

$N(P, T)$ est la norme formelle de Boutet de Monvel-Kree [5].

Rappelons que dans des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_d, t_1, \dots, t_n)$ de X qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$, si (x, τ) sont les coordonnées locales induites sur $\Lambda = T_Y^*X$, une section de $\mathcal{C}_{Y|X}$ sur un ouvert U de Λ peut s'écrire comme une série formelle $\sum_{j \leq m} f_j(x, \tau)$ de fonctions holomorphes sur U telles que :

- 1) f_j est homogène de degré j en τ ,
- 2) $\forall K \subset\subset U, \exists C > 0, \forall j < 0, \forall (x, \tau) \in K, |f_j(x, \tau)| < C^{-j}(-j)!$

Dans ce cas, le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X,\ell}$ n'est autre que le sous-faisceau de $\mathcal{C}_{Y|X}$ dont les éléments s'écrivent comme $\sum_{j \leq \ell} f_j(x, \tau)$.

Signalons que dans les coordonnées locales ci-dessus, l'opérateur θ est donné par $\sum_i t_i D_{t_i}$ et le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}[m]$ s'identifie à l'ensemble des fonctions holomorphes sur Λ et homogènes de degré m en τ .

Dans ces mêmes coordonnées, si $f = \sum_{j \leq m} f_j(x, \tau)$ est une série formelle de fonctions holomorphes sur U (U est un ouvert de Λ) et homogènes de degré j en τ et si \bar{K} est un compact de U , alors la norme formelle citée plus haut est donnée par :

$$N_m(f, T) = \sum_{k \geq 0} \frac{2(2n)^{-k} k!}{(|\alpha| + k)! (|\beta| + k)!} \sup_{\bar{K}} |D_x^\alpha D_\tau^\beta f_{m-k}| T^{2k + |\alpha| + |\beta|}.$$

Remarquons finalement que la restriction du faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)$ à la section nulle Y de T_Y^*X n'est autre que le faisceau $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ déjà défini dans le paragraphe 1.

Posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{Y|X}(+\infty, 1) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_{Y|X} & \mathcal{C}_{Y|X}(1, 1) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_{Y|X}^\infty \\ \mathcal{C}_{Y|X}(+\infty, 1)|_Y &= \mathcal{B}_{Y|X} & \mathcal{C}_{Y|X}(1, 1)|_Y &= \mathcal{B}_{Y|X}. \end{aligned}$$

8.2. Transformations canoniques.

X est toujours un fibré vectoriel de rang n et de base Y , θ est le champ d'Euler associé. Notons T_Y^*X le fibré conormal à Y dans X .

Considérons maintenant un fibré vectoriel X' de rang un et de base Y' , identifions Y' à la section nulle de X' et notons par θ' le champ d'Euler associé et par $T_{Y'}^*X'$ le fibré conormal à Y' dans X' .

D'après [14], il existe une transformation canonique qui transforme T_Y^*X en $T_{Y'}^*X'$ et par conséquent, il existe une transformation canonique quantifiée qui transforme $\mathcal{C}_{Y|X}$ en $\mathcal{C}_{Y'|X'}$ et θ en θ_1 .

D'autre part, vu la proposition 5.2.2 de [14], il existe une transformation canonique quantifiée (associée à l'identité de T^*X') qui conserve $T_{Y'}^*X'$ et qui transforme θ_1 en θ' . Cette dernière n'est autre que la multiplication par un opérateur microdifférentiel d'ordre 0, donc elle conserve $\mathcal{C}_{Y|X}$ et sa filtration $(\mathcal{C}_{Y|X, \ell})_\ell$.

Si on note par Φ la composée des deux transformations canoniques ci-dessus, et par $\hat{\Phi}$ la transformation canonique quantifiée associée, alors cette dernière transforme $\mathcal{C}_{Y|X}$ en $\mathcal{C}_{Y'|X'}$ et θ en θ' , et par conséquent, elle transforme les éléments de $\mathcal{C}_{Y|X}[m]$ en des éléments de $\mathcal{C}_{Y'|X'}[m]$.

Prenons maintenant des coordonnées locales (x) et (y) sur X et X' et notons par (x, ξ) et (y, η) les coordonnées locales associées sur T^*X et T^*X' respectivement. Dans ces coordonnées, la transformation Φ est donnée par :

$$y_i = f_i(x, \xi) \quad \eta_i = g_i(x, \xi) \quad 1 \leq i \leq n + d$$

où f_i (resp. g_i) est homogène de degré 0 (resp. 1) par rapport à ξ .

Soient P_i et Q_k les opérateurs microdifférentiels définis par :

$$P_i = \hat{\Phi}^{-1}(y_i) \quad Q_k = \hat{\Phi}^{-1}(D_{y_k})$$

et notons I l'idéal de $\mathcal{E}_{X \times X'}$ engendré localement par les opérateurs

$$\bar{P}_i = y_i - P_i(x, D_x) \quad \bar{Q}_k = D_{y_k} + Q_k(x, D_x) \quad (1 \leq i, k \leq n + d).$$

D'après le théorème 5.1.3 de [33] ou le théorème 2.7.5 de [13], si P est un opérateur micro-différentiel sur T^*X , alors son transformé $Q = \widehat{\Phi}(P)$ est l'opérateur qui vérifie

$$P - Q^* \in I \quad \text{où} \quad Q^* \text{ est l'adjoint de } Q.$$

Donc il existe des opérateurs G_i et H_k de $\mathcal{E}_{X \times X'}$ tels que

$$P - Q^* = \sum_{i=1}^{n+d} G_i \bar{P}_i + \sum_{k=1}^{n+d} H_k \bar{Q}_k$$

en plus, les opérateurs G_i , H_k et Q_k^* sont obtenus par division de P par les opérateurs \bar{P}_i et \bar{Q}_k suivant le théorème 2.2.2 de [32] ou le théorème 2.6 de [2].

Cette division se fait de la façon suivante : si (x) et (x, ξ) sont les coordonnées locales respectives de X et de T^*X , et si au voisinage du point $\theta = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1)$ de T^*X , l'opérateur P_1 est tel que $\frac{\partial^m \sigma(P_1)}{\partial \xi_1^m}(\theta) \neq 0$ et $\frac{\partial^v \sigma(P_1)}{\partial \xi_1^v}(\theta) = 0$ pour $0 \leq v < m$, alors il existe des opérateurs A_1, B_1, E_1 et F_1 tels que A_1 et B_1 sont indépendants de ξ_1 et E_1 est inversible dans \mathcal{E}_X .

En outre, ils vérifient :

$$P = F_1 P_1 + A_1 \quad P_1 = E_1 (D_1^m + B_1).$$

Or il est possible par division par l'opérateur D_1^m de réécrire P sous la forme :

$$P = F_2 D_1^m + R$$

où $F_2 \in \mathcal{E}_X$ et R est indépendant de ξ_1 .

D'après le lemme 4.4 de [2], on a :

$$N(R, T) \ll C_1 \cdot N(P, T).$$

$N(P, T)$ désigne la norme formelle de Boutet de Monvel-Kree [5].

On en déduit que :

$$(8.1) \quad N(Q, T) \ll C_2 \cdot N(P, T)$$

où Q est l'opérateur $\widehat{\Phi}(P)$.

Par conséquent $\widehat{\Phi}$, qui transforme $\mathcal{C}_{Y|X, k}$ en $\mathcal{C}_{Y'|X', k}$, θ en θ' et qui vérifie (8.1) transforme $\mathcal{C}_{Y|X}(-\infty, 1)$ en $\mathcal{C}_{Y'|X'}(-\infty, 1)$ et pour tout rationnel r , $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)$ en $\mathcal{C}_{Y'|X'}(r, 1)$.

8.3. Transformations monoïdales.

Soit X un fibré vectoriel de base Y . Cette dernière est identifiée à la section nulle de X , et T_Y^*X désigne le fibré conormal à Y dans X . Si $\hat{\Lambda}$ est le fibré $T_Y^*X - Y$, on note par \mathbb{P}_Y^*X le fibré projectif associé.

La transformée monoïdale de Λ est un fibré $\tilde{\Lambda}$ de rang un sur \mathbb{P}_Y^*X muni d'un isomorphisme $(\tilde{\Lambda} - \mathbb{P}_Y^*X) \simeq (\Lambda - Y)$. On peut le définir par :

$$\tilde{\Lambda} = \{(u, \theta) \in \Lambda \times \mathbb{P}_Y^*X / u \in \theta\}.$$

Le fibré $\tilde{\Lambda}$ n'est autre que la réunion disjointe de Λ et de \mathbb{P}_Y^*X .

Les applications $H_r(\lambda)$ de la partie 2, sont bien définies sur $T^*\Lambda = T^*(T_Y^*X)$ et sont compatibles avec le plongement $T^*\Lambda \hookrightarrow T^*\tilde{\Lambda}$.

Si Σ est une sous-variété lagrangienne H_r -homogène de $T^*\Lambda$, son adhérence $\underline{\Sigma}$ dans $T^*\tilde{\Lambda}$ est encore lagrangienne H_r -homogène (voir [21]) et on peut donc considérer $\text{Irr}(\underline{\Sigma})$ qui est un cycle de $T^*(\mathbb{P}_Y^*X)$, comme au paragraphe 2.2.

DÉFINITION 8.3.1. — Si $\tilde{\Sigma}$ est un cycle analytique lagrangien H_r -homogène de $T^*\Lambda$, on définit son irrégularité $\text{Irr}(\tilde{\Sigma})$ comme le cycle analytique lagrangien homogène de $T^*(\mathbb{P}_Y^*X)$ égal à $\text{Irr}(\underline{\tilde{\Sigma}})$ où $\underline{\tilde{\Sigma}}$ est le cycle de $T^*\tilde{\Lambda}$ obtenu en prenant l'adhérence de chaque composante de $\tilde{\Sigma}$.

Rappelons maintenant les définitions des faisceaux $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}$ des microfonctions holomorphes réelles.

Soient X une variété analytique complexe et Y une sous-variété de X . Le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ est le faisceau des microfonctions holomorphes réelles, il a été défini dans [32] comme la microlocalisation du faisceau \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes sur X , il est à support dans T_Y^*X et il vérifie : (voir [32] ou [16]) les relations :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{Y|X|Y}^{\infty} &= \mathcal{C}_{Y|X|Y}^{\mathbb{R}} \\ \mathcal{C}_{Y|X|T_Y^*X}^{\infty} &= \mathcal{Y}^{-1}\mathcal{Y} * (\mathcal{C}_{Y|X|T_Y^*X}^{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

où $T_Y^*X = T_Y^*X - Y$ et \mathcal{Y} la projection canonique de T_Y^*X sur le fibré projectif associé \mathbb{P}_Y^*X .

D'autre part, le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}$ est celui des microfonctions holomorphes tempérées, défini par Andronikof dans [1], c'est un sous-faisceau de $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ qui vérifie (voir [1] ou [19]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{Y|X|Y} &= \mathcal{C}_{Y|X|Y}^{\mathbb{R},f} \\ \mathcal{C}_{Y|X|T_Y^*X} &= \mathcal{Y}^{-1}\mathcal{Y} * (\mathcal{C}_{Y|X|T_Y^*X}^{\mathbb{R},f}). \end{aligned}$$

Considérons maintenant un fibré vectoriel de base Y et identifions cette dernière à la section nulle de X .

Si T_Y^*X est le fibré $T_Y^*X - Y$ et \mathbb{P}_Y^*X est le fibré projectif associé, alors on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
T_Y^*X & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{P}_Y^*X \\
& \searrow \tilde{\pi} & \swarrow \theta \\
& & Y
\end{array}$$

PROPOSITION 8.3.2. — Si r est un rationnel inférieur ou égal à un, alors :

$$\begin{cases} \theta_*(\gamma_*(\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X})) = \mathcal{B}_{Y|X}\{r\}/\mathcal{B}_{Y|X} \\ \mathbb{R}^k \theta_*(\gamma_*(\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X})) = 0 \quad \forall k > 0. \end{cases}$$

Preuve. — Commençons par le cas $r = 1$.

Si X est un fibré en droites sur Y , l'isomorphisme $\mathbb{P}_Y^*X \xrightarrow{\sim} Y$ identifie γ et $\tilde{\pi}$. En plus les suites suivantes sont exactes :

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X}^\infty \longrightarrow \gamma_*\mathcal{C}_{Y|X}^\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow 0 \\
0 &\longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X} \longrightarrow \gamma_*\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} \longrightarrow \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Donc on en déduit que :

$$\gamma_*(\mathcal{C}_{Y|X}^\mathbb{R}/\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}) = \gamma_*(\mathcal{C}_{Y|X}^\infty/\mathcal{C}_{Y|X}) = \mathcal{B}_{Y|X}^\infty/\mathcal{B}_{Y|X}.$$

Si maintenant X est un fibré vectoriel quelconque de base Y (supposons que $\text{codim}_X = d$), alors vu la proposition 1.1.5 de [32], on a :

$$\mathbb{R}^k \tilde{\pi}_*\mathcal{C}_{Y|X}^\mathbb{R} = \begin{cases} \tilde{\pi}_*\mathcal{C}_{Y|X}^\infty = \mathcal{B}_{Y|X}^\infty & k = 0 \\ \mathcal{O}_{X|Y} & k = d - 1 \\ 0 & k \neq 0, d - 1. \end{cases}$$

En outre, on a $\mathbb{R}^k \gamma_*\mathcal{C}_{Y|X}^\mathbb{R} = 0 \quad \forall k > 0$.

Quant au faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}$, il vérifie des propriétés similaires, d'après le théorème 4.1.7 de [1] :

$$\mathbb{R}^k \tilde{\pi}_*\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} = \begin{cases} \tilde{\pi}_*\mathcal{C}_{Y|X} = \mathcal{B}_{Y|X} & k = 0 \\ \mathcal{O}_{X|Y} & k = d - 1 \\ 0 & k \neq 0, d - 1 \end{cases}$$

et $\mathbb{R}^k \gamma_*\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} = 0 \quad \forall k > 0$.

Comme d'une part, $\mathbb{R}\tilde{\pi}_* = \mathbb{R}\theta_*\mathbb{R}\gamma_*$ et d'autre part, la propriété ci-dessus est vraie pour les deux premiers termes de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}^\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}^\mathbb{R}/\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} \longrightarrow 0$$

le résultat en découle directement.

Soit maintenant r un rationnel tel que $r < 1$.

Choisissons des coordonnées locales (x, t) sur X qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$. Notons par (x, t, ξ, τ) et (x, τ) les coordonnées locales respectives de T^*X et de $\Lambda = (T_Y^*X)$.

Soit $u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j(x, \tau)$ une section de $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)$ sur un ouvert U , et soit $v = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j(x, \tau)$ la série formelle telle que :

$$g_j(x, \tau) = \begin{cases} (j!)^{r-1} f_j(x, \tau) & \text{si } j \geq 0 \\ (-j!)^{r-1} f_j(x, \tau) & \text{si } j < 0. \end{cases}$$

Il est clair que :

$$\forall K \subset\subset U, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists C_\epsilon > 0, \quad \forall j \geq 0, \quad \forall (x, \tau) \in K$$

$$|g_j(x, \tau)| \leq C_\epsilon \cdot \epsilon^j \cdot \frac{1}{j!}$$

$$\forall K \subset\subset U, \quad \exists C > 0, \quad \forall j < 0, \quad \forall (x, \tau) \in K$$

$$|g_j(x, \tau)| < C^{-j} (-j)!^r \leq C^{-j} (-j)!$$

Donc $v \in \mathcal{C}_{Y|X}^\infty$. Si on note F l'application que l'on vient de définir, la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1) / \mathcal{C}_{Y|X} \xrightarrow{F} \mathcal{C}_{Y|X}^\infty / \mathcal{C}_{Y|X}$$

est exacte, et par conséquent le résultat découle du cas $r = 1$.

8.4. Opérateurs microdifférentiels polynomiaux.

Soient X une variété analytique complexe et Λ une sous-variété lagrangienne homogène de T^*X . On note par \mathcal{E}_X le faisceau des opérateurs microdifférentiels sur X .

Le faisceau $\mathcal{E}_{[X]}$ des opérateurs microdifférentiels polynomiaux sur X a été introduit par Laurent dans [14].

Dans ce paragraphe, on suppose que X est un fibré vectoriel de base Y . On identifie Y à la section nulle de X et on désigne par T_Y^*X le fibré conormal à Y dans X . Dans ce cas, on prend $\Lambda = T_Y^*X$, et on note par e_X le champ d'Euler associé au fibré vectoriel X .

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{[X]}[m] &= \{P \in \mathcal{E}_X \mid [e_X, P] = mP\} \\ \mathcal{E}_{[X]} &= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_{[X]}[m]. \end{aligned}$$

Fixons des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_d)$ de X telles que $Y = \{t = 0\}$ et que (t_1, \dots, t_d) soient des coordonnées linéaires dans les fibres de $p : X \rightarrow Y$.

Les opérateurs de $\mathcal{E}_{[X]}$, définis près de $\Lambda = T_Y^*X$, sont les opérateurs de \mathcal{E}_X dont le symbole $P = \sum_{j \leq m} P_j(x, t, \xi, \tau)$ dans les coordonnées ci-dessus est tel que les fonctions P_j sont polynomiales en t et non nulles seulement pour un nombre fini de j .

Soient $P \in \mathcal{E}_{[X]}[\ell]$ et $u = u^{(0)} + \sum_{k \geq 1} u_k \in \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)$.

Comme :

$$e_X(Pu_k) = (-k + \ell - n)Pu_k \quad \text{et} \quad N(Pu_k, T) \ll N(P, T) \cdot N(u_k, T), \quad (\text{voir [5]})$$

$N(P, T)$ est la norme formelle de Boutet de Monvel-Kree [5].

On en déduit que les faisceaux $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)$ pour tout $r \in [-\infty, 1]$ sont des $\mathcal{E}_{[X]}$ -modules.

8.5. Théorèmes d'indice microlocal.

Si X est un fibré vectoriel de base Y , on identifiera cette dernière à la section nulle de X et on notera par $\Lambda = T_Y^*X$ le fibré conormal à Y dans X et par $\hat{\Lambda}$ le fibré $T_Y^*X - Y$.

Les notations sont celles des paragraphes 2, 7 et 8.

Rappelons qu'un $\mathcal{E}_{[X]}$ -module \mathcal{M} est holonome si le \mathcal{E}_X -module $\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{E}_{[X]}} \mathcal{M}$ est holonome.

Soit X un fibré vectoriel de rang un sur Y .

PROPOSITION 8.5.1. — *Soient \mathcal{M} un $\mathcal{E}_{[X]}$ -module holonome et r un rationnel qui appartient à $[-\infty, 1]$.*

Le complexe $\mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1))$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur $\hat{\Lambda}$.

En outre, pour tout $x \in \hat{\Lambda}$,

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1))_x = Eu_{\text{ch}_{\hat{\Lambda}}\{1\}(\mathcal{M})}(\hat{\pi}(x)) - Eu_{\text{ch}_{\hat{\Lambda}}\{r\}(\mathcal{M})}(\hat{\pi}(x))$$

où $\hat{\pi}$ est la projection $\hat{\Lambda} \rightarrow Y$.

Preuve. — Soit π (resp. $\hat{\pi}$) la projection $\Lambda \rightarrow Y$ (resp. $\hat{\Lambda} \rightarrow Y$). La suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X}\{r\} \longrightarrow \hat{\pi}_* \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1) \longrightarrow \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow 0$$

est exacte.

D'autre part, d'après le lemme 5.3.2 de [14], $\mathcal{E}_{[X]|\Lambda}$ est plat sur $\pi^{-1}(\mathcal{D}_{[X]|Y})$ et il existe un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module \mathcal{N} tel que :

$$\mathcal{M}_{|\Lambda} = (\mathcal{E}_{[X]|\Lambda}) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_{[X]|Y})} \pi^{-1}(\mathcal{N}_{|Y}).$$

On peut alors supposer que \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome puis on applique le théorème 7.1 à la suite exacte ci-dessus.

Prenons maintenant un fibré vectoriel X de rang quelconque sur Y , identifions cette dernière à la section nulle de X et notons par $\Lambda = T_Y^*X$ le fibré conormal à Y dans X .

Si T_Y^*X est le fibré $T_Y^*X - Y$ et \mathbb{P}_Y^*X le fibré projectif associé, alors on a les applications canoniques :

$$\gamma : \dot{\Lambda} \rightarrow \mathbb{P}_Y^*X, \quad \hat{\pi} : \dot{\Lambda} \rightarrow Y \quad \text{et} \quad \theta : \mathbb{P}_Y^*X \rightarrow Y.$$

Soient \mathcal{M} un $\mathcal{E}_{[X]}$ -module holonome et $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ sa variété microcaractéristique de type (r) . On sait d'après la partie 8.3, qu'on peut associer à $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ un cycle analytique de $T^*(\mathbb{P}_Y^*X)$ et que l'on va noter $\text{Irr}(r)(\tilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M}))$.

Rappelons également que si F est un complexe de faisceaux à cohomologie constructible sur X , alors d'après le chap. IX de [12], on peut lui associer un cycle caractéristique lagrangien (noté $CC(F)$) sur T^*X .

En particulier, au complexe $\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ où \mathcal{M} est holonome est associé le cycle caractéristique $\tilde{\text{ch}}(\mathcal{M})$.

THÉORÈME 8.5.2. — Soient \mathcal{M} un $\mathcal{E}_{[X]}$ -module holonome et (r, s) un couple de rationnels tels que $-\infty < r < s \leq 1$.

Le complexe $\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1))$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur $\dot{\Lambda}$ et le cycle caractéristique associé est donné par :

$$CC[\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1))] = \gamma^* \left[\sum_{r \leq p \leq s} \text{Irr}(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M})) \right].$$

où $\gamma^*(\tilde{C})$ est l'image inverse par γ du cycle \tilde{C} .

Preuve. — Comme la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}(s, 1)/\mathcal{C}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1) \longrightarrow 0$$

est exacte, alors le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1)$ vérifie aussi les propriétés de la proposition 8.3.2.

Soit X' un fibré en droites sur Y' , l'isomorphisme $\mathbb{P}_{Y', X'}^* \xrightarrow{\sim} Y'$ identifie γ_* et $\hat{\pi}_*$.

D'après la proposition 8.5.1, le complexe $\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y'|X'}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y'|X'}(s, 1))$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur $\dot{\Lambda}$.

D'autre part, si \mathcal{M} est un $\mathcal{E}_{[X']}$ -module holonome, il existe un $\mathcal{D}_{[X']}$ -module holonome \mathcal{N} tel que $\mathcal{M}_{|\Lambda'} = (\mathcal{E}_{[X']|\Lambda'}) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_{[X']|Y'})} \pi^{-1}(\mathcal{N}|Y')$ et qui vérifie :

$$\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y'|X'}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y'|X'}(s, 1)) = \gamma^{-1} \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{N}, \mathcal{B}_{Y'|X'}\{r\}/\mathcal{B}_{Y'|X'}\{s\}).$$

Le complexe $\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X']}}(\mathcal{N}, \mathcal{B}_{Y'|X'}\{r\}/\mathcal{B}_{Y'|X'}\{s\})$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y' (voir théorème 7.1), alors on peut lui associer un cycle caractéristique (au sens du chap. IX de [12]), qui n'est autre que le cycle analytique lagrangien $\sum_{r \leq p \leq s} \operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M}))$ de T^*Y' , que l'on peut regarder aussi comme un cycle analytique lagrangien $\sum_{r \leq p \leq s} \operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M}))$ sur $T^*(\mathbb{P}_{Y'}^*, X') \simeq T^*Y'$.

L'application γ citée plus haut définit les applications suivantes :

$$T^*Y' \xleftarrow{p_{Y'}} (T^*Y') \times_{Y'} \hat{\Lambda}' \xrightarrow{t_{Y'}} T^*\hat{\Lambda}'.$$

Comme $t_{Y'}$ est propre sur $p_{Y'}^{-1}(\sum_{r \leq p \leq s} \operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M})))$, alors d'après la proposition 9.3.2 de [12], le cycle analytique lagrangien associé à $\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}_{[X']}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y'|X'}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y'|X'}(s, 1))$ est $\gamma^*(\sum_{r \leq p \leq s} \operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M})))$.

D'autre part, si X est un fibré vectoriel de base Y , et si Φ est la transformation canonique du paragraphe 8.2 définie d'un ouvert de T^*X sur un ouvert de T^*X' , et qui transforme $\Lambda = T_Y^*X$ en $\Lambda' = T_{Y'}^*X'$, alors Φ induit un isomorphisme de \mathbb{P}_Y^*X sur $\mathbb{P}_{Y'}^*X'$ et de $T^*\Lambda$ sur $T^*\Lambda'$. Par conséquent, on obtient un isomorphisme entre les transformées monoïdales $\tilde{\Lambda}$ et $\tilde{\Lambda}'$ de Λ et Λ' respectivement. Si $\hat{\Phi}$ est la transformation canonique quantifiée associée à Φ , alors les invariants par $\hat{\Phi}$ seront transformés d'une manière compatible (voir [21]).

Désignons finalement par φ l'isomorphisme de $T^*\tilde{\Lambda}$ sur $T^*\tilde{\Lambda}'$ induit par $\hat{\Phi}$.

Inversement, si Φ^{-1} et φ^{-1} sont respectivement la transformation inverse de Φ et l'isomorphisme entre $T^*\tilde{\Lambda}'$ et $T^*\tilde{\Lambda}$ induit par $\hat{\Phi}^{-1}$, alors le cycle analytique $\tilde{\Sigma}^{(p)}(\hat{\Phi}(\mathcal{M}))$ de $T^*\tilde{\Lambda}'$ est transformé par φ^{-1} en le cycle analytique $\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M})$ de $T^*\tilde{\Lambda}$ et par suite $\operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\hat{\Phi}(\mathcal{M})))$ est transformé en $\operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M}))$ de $T^*(\mathbb{P}_Y^*X)$.

Par conséquent, le complexe $\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1))$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur $\hat{\Lambda}$, en plus son cycle caractéristique associé est $\gamma^*(\sum_{r \leq p \leq s} \operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M})))$, ce qui termine la démonstration.

COROLLAIRE 8.5.3. — *Soient \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome et (r, s) un couple de rationnels tels que $-\infty < r < s \leq 1$.*

*Le complexe $\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r\}/\mathcal{B}_{Y|X}\{s\})$ est un complexe de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y et le cycle caractéristique (dans T^*Y) associé est donné par :*

$$CC[\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r\}/\mathcal{B}_{Y|X}\{s\})] = \theta_* \left[\sum_{r \leq p \leq s} \operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M})) \right].$$

Preuve. — D'après la proposition 8.3.2, si i est l'injection $Y \hookrightarrow X$, alors on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r\}/\mathcal{B}_{Y|X}\{s\}) \\ &= \mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, i_* \mathbb{R} \theta_* \mathcal{Y}_*(\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1))) \\ &= \mathbb{R} \theta_* \mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\theta^{-1}i^{-1}\mathcal{D}_{[X]}}(\theta^{-1}i^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{Y}_*(\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1))). \end{aligned}$$

Si X' est un fibré de rang un sur Y' , on a $\mathbb{P}_{Y'}^* X' \simeq Y'$ et $\mathcal{Y}_* = \hat{\pi}_*$ et donc

$$\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X']}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y'|X'}\{r\}/\mathcal{B}_{Y'|X'}\{s\}) = \mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X']}}(\mathcal{M}, \mathcal{Y}_*(\mathcal{C}_{Y'|X'}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y'|X'}(s, 1))).$$

Par conséquent, d'après le théorème 8.5.2, le cycle caractéristique associé au complexe $\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{[X']}}(\mathcal{M}, \mathcal{Y}_*(\mathcal{C}_{Y'|X'}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y'|X'}(s, 1)))$ est le cycle analytique $\sum_{r \leq p \leq s} \operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M}))$ de $T^*(\mathbb{P}_{Y'}^* X) \simeq T^* Y'$.

Il suffit donc de reprendre la transformation canonique quantifiée $\hat{\Phi}$ citée dans la démonstration du théorème 8.5.2 pour voir que pour un fibré vectoriel X de rang quelconque et de base Y , le cycle caractéristique associé au complexe

$$\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{\theta^{-1}i^{-1}\mathcal{D}_{[X]}}(\theta^{-1}i^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{Y}_*(\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1)))$$

est le cycle analytique $\sum_{r \leq p \leq s} \operatorname{Irr}(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M}))$ de $T^*(\mathbb{P}_Y^* X)$.

Comme θ est propre, le résultat découle directement de la proposition 9.4.2 de [12].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDRONIKOF E. — *Microlocalisation tempérée*, Bull. Soc. Math. France **122** (2), 1994.
- [2] BJORK J.E. — *Rings of differential operators*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [3] BJORK J.E. — *Analytic \mathcal{D} -modules and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1993.
- [4] BORELA A. — *Algebraic \mathcal{D} -modules*, *Perspect. in Math.*, vol. 2.
- [5] BOUTET DE MONVEL L. et KREE P. — *Pseudo-differential operators and Gevrey classes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **17** (1967), 295–323.
- [6] BRYLINSKI J.L., DUBSON A., KASHIWARA M. — *Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **293**, 1981.
- [7] BOURBAKI N. — *Algèbre commutative*, Masson, Paris chap. 1-4, 1985.
- [8] HORMANDER L. — *An introduction to complex analysis in several variables*, D. Van Nostrand Comp., Princeton, 1966.
- [9] KASHIWARA M. — *Systems of microdifferential equations*, Progress in Math, Birkhäuser **34**, 1983.
- [10] KASHIWARA M. — *On the holonomic systems of linear differential equations, II*, Invent. Math. **49** (1978), 121–135.
- [11] KASHIWARA M. et KAWAI T. — *On the holonomic systems of micro-differential equations, III, System with regular singularities*, Publ. R.I.M.S., Kyoto **17** (1981), 813–979.
- [12] KASHIWARA M. et SCHAPIRA P. — *Sheaves on manifolds*, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [13] LAURENT Y. — *Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe*, Progress in Math., Birkhäuser, Boston **53**, 1985.
- [14] LAURENT Y. — *Polygone de Newton et b -fonctions pour les modules microdifférentiels*, Ann. Sci. École Norm. Sup. II^e série **20** (1987), 391–441.
- [15] LAURENT Y. — *Vanishing cycles of \mathcal{D} -modules*, Invent. Math. **112** (1993), 491–539.
- [16] LAURENT Y. — *Vanishing cycles of irregular \mathcal{D} -modules*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 304, Grenoble, 1995.
- [17] LAURENT Y. — *Microlocal operators with plurisubharmonic growth*, Comp. Math. **86** (1993), 23–67.
- [18] LAURENT Y. — *Positivité de l'irrégularité des \mathcal{D} -modules*, Séminaire “Équations aux dérivées partielles”, 1993–1994.
- [19] LAURENT Y. — *Vanishing cycles and second microlocalisation*, Algebraic analysis, Academic press, Inc. vol. **I**, 1988.
- [20] LAURENT Y. — *Calcul d'indice et irrégularité pour les systèmes holonomes, systèmes différentiels et singularités*, Astérisque **130** (1985), 352–364.
- [21] LAURENT Y. et MEBKOUT Z. — *Pentes algébriques et pentes analytiques d'un \mathcal{D} -module*, en préparation.
- [22] MEBKOUT Z. — *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D} -modules cohérents*, Travaux en cours, Hermann, Paris **35**, 1989.
- [23] MAISONOBE P. et SABBABH C. — *Images directes et constructibilité*, Les cours du CIMPA, travaux en cours, Hermann, **46**, 1993.
- [24] MAISONOBE P. et SABBABH C. — *\mathcal{D} -modules cohérents et holonomes*, Les cours du CIMPA, travaux en cours, Hermann, **45**, 1993.

- [25] MALGRANGE B. — *Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag 712 (1979), 77–86.
- [26] MALGRANGE B. — *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., Birkhäuser, Berlin 96, 1991.
- [27] MALGRANGE B. — *Séminaire “Opérateurs différentiels et pseudodifférentiels”*, Grenoble, 1975 – 1976.
- [28] MALGRANGE B. — *Sur les points singuliers des équations différentielles*, L'enseignement Mathématiques XX (1-2) (1974), 147–176.
- [29] MALGRANGE B. — *Sur la réduction formelle des équations différentielles*, Astérisque, Soc. Math. France, 140–141, 1986.
- [30] MONTEIRO-FERNANDES T. — *Variété 1-microcaractéristique pour les \mathcal{E}_X -modules cohérents*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 290, 1980.
- [31] MONTEIRO-FERNANDES T. — *Constructibilité des solutions des systèmes microdifférentiels*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294, 1982.
- [32] PHAM F. — *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Progress in Math., Birkhäuser 2, 1979.
- [33] RAMIS J.P. — *Théorèmes d’indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs of the Am. Math. Soc., 48(296).
- [34] SABBAH C. — *\mathcal{D} -modules et cycles évanescents*, Travaux en cours, Hermann, Paris 24 (1987), 53–98.
- [35] SABBAH C. — *Équations différentielles à points singuliers irréguliers en dimension 2*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43,5 (1993), 1619–1688.
- [36] SATO M., KAWAI T. et KASHIWARA M. — *Hyperfonctions and pseudodifferential equations*, Lecture Notes in Math. Springer 287, 1973.
- [37] SCHAPIRA P. — *Microdifferential systems in the complex domain*, Grundlehren der Math. Springer 269, 1985.

– \diamond –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
 UMR 5582
 UFR de Mathématiques
 B.P. 74
 38402 ST MARTIN D’HÈRES Cedex (France)

(31 octobre 1996)