

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)
préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de mathématiques
UMR 5582 CNRS-UJF

**ADHÉRENCES D'ORBITES DES
SOUS-GROUPES DE BOREL DANS LES
ESPACES SYMÉTRIQUES**

Stéphane PIN

Soutenue à Grenoble le 3 octobre 2001 devant le jury :

José BERTIN (UJF), Président
Michel BRION (UJF, CNRS), Directeur
Peter LITTELMANN (Wuppertal)
Laurent MANIVEL (UJF, CNRS)
Olivier MATHIEU (CNRS, Lyon)

Au vu des rapports de Peter LITTELMANN et Olivier MATHIEU

À mon père,

Remerciements

Je voudrais d'abord remercier Michel Brion qui très tôt a su me faire partager son intérêt pour les mathématiques. Il m'a initié à la recherche en me proposant un sujet de DEA, puis m'a permis de continuer cet apprentissage avec lui durant ces années de thèse. Je voudrais particulièrement te remercier pour le temps que tu m'as consacré et la patience avec laquelle tu m'as appris des mathématiques.

Je remercie également Peter Littelmann d'avoir pris le temps de lire avec attention cette thèse, merci pour les remarques constructives à propos de ce texte et merci de venir de Wuppertal pour participer au jury. Olivier Mathieu a lui aussi accepté d'être rapporteur, je vous remercie pour l'attention que vous avez portée à ce travail et de faire également partie du jury. Je voudrais remercier José Bertin et Laurent Manivel de me faire l'honneur et le plaisir de participer au jury.

Un grand merci à tout le personnel de l'Institut Fourier qui m'a accueilli pendant ces quelques années, m'a aidé dans les tâches administratives, et guidé pour les enseignements. Je remercie particulièrement Arlette Guttin-Lombard pour son efficacité et sa bonne humeur.

Bien sûr, de nombreuses personnes m'ont apporté leurs connaissances avant d'arriver en thèse, j'ai une pensée pour tous les enseignants qui m'ont ouvert l'esprit durant toutes ces années, la liste serait malheureusement trop longue pour être exhaustive.

Merci encore à tous mes collègues et amis thésards, embarqués avant, en même temps ou après moi, dans cette grande aventure. Là encore la liste est longue (et pourtant non exhaustive) : Grégoire Charlot, Constantin Vernicos et Anne Siegel pour les plus anciens, Freddy Bouchet, Luc Hillairet, Michel Imbert, Julien Maubon, Xavier Martin, Nicolas Ressayre, Stéphane Vénéreau pour la suite, et la relève est assurée par Paolo Bellingeri, Hélène Berger, Pierre-Emmanuel Chaput, Matthieu Romagny, Alexis Tchoudjem, et Sophie Térouanne. Un remerciement particulier à Nicolas Ressayre avec qui j'ai si souvent parlé de maths.

Enfin, j'ai une pensée pour mes parents et amis « extérieurs » au monde mathématiques. Merci à ma mère, et à mon père qui ne peut être là aujourd'hui. Ma dernière pensée est pour Claire qui pendant ces quatre années fut présente pour me soutenir à tous moments et qui m'a, entre autres, permis d'accomplir ce travail.

Table des matières

Introduction	11
I Généralités sur les espaces symétriques	13
1 Orbites d'un sous-groupe de Borel dans les espaces symétriques.	13
1.1 Quelques rappels sur la décomposition de Bruhat.	13
1.2 Espaces symétriques.	14
1.2.1 Définition et exemples.	14
1.2.2 Sous-groupes stables par une involution.	15
1.2.3 Sous-groupes scindés.	17
1.3 Un nombre fini d'orbites de B dans G/H	17
1.4 Un exemple : les formes quadratiques.	20
2 Propriétés des involutions tordues.	23
2.1 Actions de W	23
2.1.1 Action de W dans $B \backslash G/H$	23
2.1.2 Involutions tordues.	24
2.2 Décomposition d'une involution tordue.	24
2.2.1 Notations et rappels.	24
2.2.2 Décomposition de Springer.	25
2.3 Position des racines par rapport aux involutions tordues.	26
2.3.1 Définitions.	26
2.3.2 Décompositions de Springer et position des racines.	27
2.3.3 Exemples de décompositions de Springer.	29
3 Action d'un sous-groupe parabolique minimal dans les espaces symétriques.	30
3.1 L'action d'un parabolique minimal dans une variété sphérique.	30
3.2 Définition du graphe $\Gamma(G/H)$	32
3.3 Action d'un parabolique minimal sur une orbite de B dans un espace symétrique.	33
3.4 Les fibres de l'application φ	36
3.5 Quelques invariants et remarques supplémentaires.	38

3.5.1	Les involutions scindées.	38
3.5.2	Calcul du rang d'une orbite dans G/H	39
3.6	Ordre de Bruhat dans les espaces symétriques.	41
3.6.1	Ordre faible et ordre fort.	41
3.6.2	Ordre de Bruhat et décomposition de Springer.	41
4	Slices dans les espaces symétriques.	43
4.1	Définitions.	43
4.2	Rappels et compléments sur la paramétrisation des orbites.	45
4.3	Slices aux orbites d'un sous-groupe de Borel.	46
4.4	Une autre façon de voir ces slices, et quelques remarques supplémentaires.	48
4.4.1	À propos des singularités des adhérences d'orbites.	48
4.4.2	Les slices dans G/B	49
4.5	Slices dans les grassmanniennes.	50
4.5.1	Orbites du groupe spécial orthogonal dans les grassmanniennes.	50
4.5.2	Orbites du groupe symplectique dans les grassmanniennes.	52
4.5.3	Orbites de $S(GL_p \times GL_q)$ dans les grassmanniennes.	53
II	Quelques résultats dans SL_n/SO_n	57
5	Stabilisateur du lieu non normal dans les espaces symétriques.	57
5.1	Le théorème principal de Zariski.	57
5.2	Un théorème sur le stabilisateur du lieu non normal.	58
5.3	Dans les espaces symétriques, une classe d'adhérences d'orbites à singularités rationnelles.	61
6	Critère de lissité en codimension 1 pour PSL_n/PSO_n.	63
6.1	Ordre de Bruhat dans SL_n	63
6.2	Position des racines par rapport à une involution de S_n	65
6.3	Relations d'adhérence en codimension 1.	66
6.4	Ordre de Bruhat sur les involutions.	67
6.4.1	Relation provenant de w_{II}°	68
6.4.2	Relation provenant de l'effaçage	69
6.5	Conséquences sur les singularités.	77

6.5.1	Le rang diminue.	77
6.5.2	Le rang reste inchangé.	78
6.5.3	Le rang augmente.	79
III	Exemples pathologiques de singularités	83
7	Exemples de singularités.	83
7.1	Des diviseurs non normaux.	83
7.1.1	Un exemple élémentaire.	83
7.1.2	Dans les espaces symétriques.	84
7.2	Des adhérences d'orbites qui ne sont pas de Cohen-Macaulay.	87
7.2.1	Un premier exemple d'adhérence d'orbite qui n'est pas de Cohen-Macaulay.	88
7.2.2	Une généralisation de cet exemple.	89
8	Étude géométrique des orbites dans un espace symétrique sous SL_n.	93
8.1	Le groupe spécial orthogonal.	93
8.2	Le groupe symplectique.	96
8.3	Les groupes $S(GL_p \times GL_q)$	97
Annexe A	Quelques graphes	101
A.1	Les formes quadratiques.	101
A.2	Les formes symplectiques.	105
Références		107

Introduction

Cette thèse est composée de trois parties. Dans la première, je commence par introduire les espaces symétriques et quelques outils pour étudier les adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel dans ces espaces. Cette partie est très inspirée de différents travaux de Springer [Spr85], Richardson et Springer [RS90], Mars et Springer [MS98] ainsi que d'autres articles autour de ces derniers.

Dans la deuxième partie, je présente des résultats obtenus sur la normalité d'adhérences d'orbites dans les espaces symétriques SL_n/SO_n , et PSL_n/PSO_n . En particulier, je trouve une classe d'adhérence d'orbites normale dans SL_n/SO_n , et je donne un critère de lissité en codimension 1 pour les adhérences d'orbites dans PSL_n/PSO_n .

Dans la troisième partie je présente de nombreux exemples d'adhérences d'orbites singulières dans différents espaces symétriques, qui montrent que les singularités peuvent être compliquées et peuvent apparaître pour des adhérences d'orbites de petite codimension.

L'étude des singularités des adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel dans un espace symétrique trouve ses motivations en théorie des représentations, avec les problèmes de restrictions de représentations (voir par exemple [BE94]).

Un espace symétrique est l'espace homogène quotient d'un groupe réductif connexe G par le sous-groupe des points fixes d'un automorphisme d'ordre 2 de G . Dans ces espaces, on a un nombre fini d'orbites d'un sous-groupe de Borel B de G . De plus Richardson et Springer [RS90], ont donné une description combinatoire de ces orbites, ainsi qu'un moyen de déterminer l'ordre induit par l'inclusion des adhérences d'orbites. C'est ce que je rappelle au début de la première partie.

De plus pour l'étude des singularités de ces variétés on peut construire des slices, qui sont attractifs au sens de [Bri99a]. Cette construction est rappelée en fin de première partie. Cela permet, en particulier, de redémontrer et préciser un résultat obtenu par Barbasch et Evens [BE94] : les adhérences d'orbites d'un sous-groupe parabolique maximal dans un espace symétrique sous SL_n sont normales et à singularités rationnelles. En fait, je décris les singularités de ces adhérences d'orbites dans les slices : ce sont des variétés déterminantielles, symétriques ou antisymétriques suivant l'espace symétrique que l'on étudie. C'est l'objet des propositions de la section 4.5.

Dans la deuxième partie je me suis particulièrement intéressé à l'espace

symétrique SL_n/SO_n , car c'est le premier exemple sous SL_n où il existe des adhérences d'orbites non normales. Il était connu que dans certains espaces symétriques il y avait des adhérences d'orbites non normales ([BE94, p.281], mais cet exemple était construit dans un espace symétrique sous un groupe symplectique. À l'aide d'un théorème sur le stabilisateur du lieu non normal dans un espace symétrique inspiré du théorème [Bri99b, p.30], j'obtiens une classe d'adhérences d'orbites normales et de Cohen-Macaulay (à singularités rationnelles) dans SL_n/SO_n . C'est le théorème 6.

Enfin, je donne une caractérisation de la lissité en codimension 1 des adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel dans PSL_n/PSO_n . Les méthodes utilisent la combinatoire développée par Richardson et Springer, qui est liée à la combinatoire du groupe de Weyl de PSL_n . Je donne une caractérisation géométrique de cette condition : c'est le théorème 7.

Dans la troisième partie je me suis attaché à expliquer, avec des arguments géométriques assez simples, que les adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel dans un espace symétrique peuvent être compliquées. En particulier, on peut trouver des diviseurs stables par B , irréductibles et non normaux, ainsi que des variétés stables par B et lisses en codimension aussi grande que l'on veut mais non normales.

Enfin, j'ai ajouté quelques lemmes géométriques pour paramétrer directement les orbites d'un sous-groupe de Borel dans un espace symétrique sous SL_n , et donner des représentants de ces orbites dans la variété des drapeaux de SL_n .

Première partie

Généralités sur les espaces symétriques

1 Orbites d'un sous-groupe de Borel dans les espaces symétriques.

Dans cette partie on va montrer qu'un espace symétrique est sphérique, c'est-à-dire qu'il contient un nombre fini d'orbites d'un sous-groupe de Borel, et on montrera comment trouver des représentants de ces orbites. On se placera toujours sur le corps des nombres complexes bien que pour toute la partie d'exposition cette hypothèse ne soit pas nécessaire, (tous les résultats sont vrais sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2) ; elle devient essentielle à partir de la section 4.

1.1 Quelques rappels sur la décomposition de Bruhat.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe, $T \subseteq B \subseteq G$ un tore et un sous-groupe de Borel de G . Soit U le sous-groupe unipotent maximal de B , $W = N(T)/T$ le groupe de Weyl de (G, T) .

Pour chaque $w \in W$ on définit les sous-groupes de U suivants :

$$U_w = U \cap w^{-1}(U) \text{ et } U'_w = U \cap w^{-1}(U^-).$$

Alors on a la décomposition de Bruhat que l'on trouve par exemple dans les livres de Borel [Bor91] ou de Springer [Spr98] :

Théorème 1 *Le groupe G se décompose en un nombre fini de $B \times B$ -orbites :*

$$G = \coprod_{w \in W} BwB,$$

de plus pour chaque $w \in W$, l'application :

$$U \times wT \times U'_w \rightarrow BwB$$

induite par le produit est un isomorphisme.

La seconde partie de ce théorème permet une unicité de la décomposition. Cette unicité se décompose en deux parties : si $x = u_1 n_1 u'_1 = u_2 n_2 u'_2$ avec $u_i, u'_i \in U$ et $n_i \in N$ alors $n_1 = n_2$, et si de plus on pose $n_1 T = w \in W$ et que l'on impose $u'_i \in U'_w$ alors $u_1 = u_2$ et $u'_1 = u'_2$.

1.2 Espaces symétriques.

1.2.1 Définition et exemples.

Soit θ une involution de G (c'est-à-dire un automorphisme d'ordre 2 du groupe algébrique G). On note G^θ le sous-groupe des points fixes de G .

Définition 1 *On appellera espace symétrique l'espace homogène quotient de G par G^θ .*

L'ensemble des points fixes de θ forme un sous-groupe de G qui est réductif (voir par exemple [Ste68]), par conséquent l'espace symétrique G/G^θ est affine (voir par exemple [PV89]).

Exemples :

- Le premier exemple d'espace symétrique est le groupe G lui-même en tant qu'espace homogène sous $G \times G$. En effet, prenons $\mathbf{G} = G \times G$ muni de l'involution qui échange les deux facteurs : $\theta(x, y) = (y, x)$. Le sous-groupe des points fixes \mathbf{G}^θ , est le groupe ΔG qui n'est autre que G plongé diagonalement dans $G \times G$. Enfin, l'application :

$$\begin{aligned} F : G \times G &\rightarrow G \\ (g, g') &\mapsto g(g')^{-1} \end{aligned}$$

passse au quotient pour l'action diagonale de G . Elle donne un isomorphisme de $G \times G$ -variété $\overline{F} : G \times G / \Delta G \rightarrow G$.

- Si G est simple, il existe une classification des involutions de G . Sur le corps \mathbb{C} on peut la trouver dans Helgason [Hel78], on peut également la trouver dans [Spr87] où la classification est faite sur n'importe quel corps algébriquement clos. En particulier, il n'y a, à conjugaison près, qu'un nombre fini d'espaces symétriques. Par exemple, lorsque $G = SL_n$ (qui sera ici le principal objet d'étude), on décrit ici les involutions et les sous-groupes de points fixes :

- (i) Les involutions intérieures. Soit une décomposition $\mathbb{C}^n = V \oplus W$, on a alors l'endomorphisme ζ de \mathbb{C}^n défini par $-\text{Id}$ sur V et Id sur W . La conjugaison par cet automorphisme induit une involution de SL_n :

$$\theta(g) = \zeta g \zeta^{-1}.$$

Et le sous-groupe des points fixes est formé des applications de SL_n laissant stable V et W . On le notera $S(GL(V) \times GL(W))$. Si $\dim(V) = p$ et $\dim(W) = q$, ce groupe s'identifie à l'ensemble des applications $(u, v) \in GL_p \times GL_q$ telles que $(\det u)(\det v) = 1$, groupe que l'on notera $S(GL_p \times GL_q)$.

- (ii) Soit β une forme quadratique non dégénérée sur \mathbb{C}^n . Cette forme quadratique permet de définir un adjoint noté $(\)^{*\beta}$ sur SL_n , et par suite, une involution de SL_n :

$$\theta(g) = (g^{*\beta})^{-1}.$$

Le sous-groupe des points fixes de cette involution est le groupe spécial orthogonal : $SO(\beta)$ que l'on notera aussi SO_n .

- (iii) Soit ω une forme symplectique non dégénérée sur \mathbb{C}^k , k est alors nécessairement pair et on pose $k = 2n$. Cette forme symplectique définit (comme dans la cas d'une forme quadratique) un adjoint sur SL_{2n} (noté $(\)^{*\omega}$), et par suite, une involution sur SL_{2n} :

$$\theta(g) = (g^{*\omega})^{-1}.$$

Le sous-groupe des points fixes de cette involution est le groupe symplectique $Sp(\omega)$ que l'on notera aussi Sp_{2n} .

1.2.2 Sous-groupes stables par une involution.

On va s'intéresser aux orbites d'un sous-groupe de Borel dans un espace symétrique. Comme tous les sous-groupes de Borel sont conjugués, on peut choisir le sous-groupe de Borel avec lequel on va travailler. Dans les espaces symétriques, il est agréable d'avoir des sous-groupes stable par l'involution. Le choix d'un sous-groupe de Borel B et d'un tore maximal T de G , tels que $T \subseteq B \subseteq G$ et stables par θ , est possible d'après un résultat de Steinberg [Ste68]. On choisira dans la suite (sauf mention explicite du contraire) un sous-groupe de Borel et un tore maximal stables par θ . Une telle paire (T, B) sera appelée paire standard.

Remarque : Les paires standard ne sont pas toutes conjugués par H . En effet, soit $G = SL_2$ que l'on identifie avec l'ensemble des matrices 2×2 de déterminant 1. Soit l'involution intérieure

$$\theta = \text{Int} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Le sous-groupe $G^\theta = T$ est l'ensemble des matrices diagonales. Soit B (respectivement B^-) le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures (respectivement triangulaires inférieures), alors les deux paires (T, B) et (T, B^-) sont standards, et ne sont pas conjuguées par T .

De plus, si B est stable par θ alors le radical unipotent de B est aussi stable par θ . Il se trouve que la restriction d'une involution à un sous-groupe unipotent donne une décomposition de ce dernier qui va être utile par la suite. Soit U un sous-groupe unipotent de G stable par θ . On considère l'application $\tau : U \rightarrow U, g \mapsto g\theta(g)^{-1}$. Alors on a le lemme suivant :

Lemme 1.1 *L'application $U^\theta \times \tau(U) \rightarrow U$, induite par la multiplication, est un isomorphisme, de plus, $\tau(U) = \{u \in U \mid \theta(u) = u^{-1}\}$.*

Ce lemme est un corollaire immédiat de [Bor91, proposition 9.3].

Pour un tore de G stable par θ , on a aussi un lemme qui est le pendant du précédent. Soit T_1 un tore stable par θ . On a toujours l'application $\tau : T_1 \rightarrow T_1, t \mapsto t\theta(t)^{-1}$. De plus, T_1 est commutatif, donc τ est un morphisme de groupes. Enfin T_1^θ peut ne pas être connexe, on notera $T_1^{\theta^\circ}$ la composante connexe de 1 dans T_1^θ . On a alors le lemme :

Lemme 1.2 *L'application $\pi : (T_1^\theta)^\circ \times \tau(T_1) \rightarrow T_1$, induite par le produit, est un isomorphisme de groupes, de plus, $\{t \in T_1 \mid \theta(t) = t^{-1}\}/\tau(T_1)$ est un 2-groupe fini.*

Preuve : $(T_1^\theta)^\circ$ et $\tau(T_1)$ sont des sous-groupes connexes du tore T_1 , par conséquent, pour que π soit un isomorphisme il suffit que l'application induite au niveau des espaces tangents soit un isomorphisme. Or θ induit une application linéaire d'ordre 2 sur $\mathfrak{t}_1 = \text{Lie}(T_1)$ (l'espace tangent en 1 à T_1) qui décompose \mathfrak{t}_1 en deux sous-espaces propres $(\mathfrak{t}_1)_+ \oplus (\mathfrak{t}_1)_-$ (associés aux valeurs propres 1 et -1). Ces espaces propres sont les espaces tangents à $(T_1^\theta)^\circ$ et $\tau(T_1)$. Cela démontre que π est un isomorphisme. Enfin pour montrer la seconde partie du lemme, soit $t \in \{t \in T_1 \mid \theta(t) = t^{-1}\}$, alors $t^2 = t\theta(t)^{-1}$. Par conséquent, tout élément de $\{t \in T_1 \mid \theta(t) = t^{-1}\}/\tau(T_1)$ est d'ordre 2, ce groupe est donc un 2-groupe. Enfin l'espace tangent en 1 à $\{t \in T_1 \mid \theta(t) = t^{-1}\}$ est \mathfrak{t}_- : c'est aussi l'espace tangent en 1 à $\tau(T_1)$, ainsi le quotient est un groupe fini. \diamond

1.2.3 Sous-groupes scindés.

On dira qu'un tore T_1 de G , stable par θ , est *scindé*, si pour tout $t \in T_1$ on a $\theta(t) = t^{-1}$. D'après un résultat de Vust [Vus74, §1], il existe toujours des tores scindés non triviaux. Par suite, il existe des tores scindés maximaux. Deux tores scindés maximaux sont conjugués par un élément de $(G^\theta)^\circ$, la composante neutre de G^θ ([Vus74, §1]).

Pour un sous-groupe parabolique P de G , on dira que P est scindé, si P et $\theta(P)$ sont opposés (i.e. si $P \cap \theta(P)$ contient un sous-groupe de Levi de P et de $\theta(P)$). La proposition suivante relie les tores scindés maximaux et les paraboliques scindés minimaux [Vus74, §1] :

Proposition 1.1 (i) *Soit T_1 un tore scindé maximal. Il existe un parabolique scindé minimal P tel que $Z_G(T_1)$ soit un sous-groupe de Levi de P . De plus, le sous-groupe dérivé de $Z_G(T_1)$ est inclus dans G^θ .*

(ii) *Deux sous-groupes paraboliques scindés minimaux sont conjugués par un élément de $(G^\theta)^\circ$.*

Enfin, on dira qu'une involution θ de G est scindée s'il existe un tore maximal de G scindé. D'après [Ste68] il existe toujours une involution scindée de G , de plus, deux telles involutions sont conjuguées [Spr85, prop. 2.10]. Par exemple, pour $G = SL_n$, l'involution scindée est $\theta(g) = (g^{*\beta})^{-1}$ pour β une forme quadratique non dégénérée.

1.3 Un nombre fini d'orbites de B dans G/H .

Pour simplicité on note $G^\theta = H$ le sous-groupe des points fixes. On a la proposition suivante due à Springer [Spr85, §4]

Proposition 1.2 *L'espace symétrique G/H ne contient qu'un nombre fini d'orbites de B .*

Cette proposition se démontre à l'aide d'un plongement de G/H dans G . On a une application "naturelle" de G dans G :

$$\begin{aligned} \tau : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g\theta(g)^{-1} \end{aligned} \quad .$$

Elle est invariante pour l'action de H à droite et passe donc au quotient en une application $\bar{\tau} : G/H \rightarrow G$ qui est une immersion fermée de G/H dans G ([Spr85]). L'action de $g \in G$ sur $x \in G/H \hookrightarrow G$ est donnée par

$g \cdot x = gx\theta(g)^{-1}$. Celle-ci s'étend en une action naturelle de G sur G appelée l'action tordue.

La preuve de cette proposition nécessite quelques lemmes. Le but est donc de décrire les orbites tordues d'un sous-groupe de Borel dans $\tau(G)$. Pour cela on considère $S' = \{x \in G \mid \theta(x) = x^{-1}\}$ (de sorte que $\tau(G) \subseteq S'$). Le groupe G agit sur cet ensemble par $g \cdot x = gx\theta(g^{-1})$. On choisit une paire standard (T, B) de G . On a alors le lemme suivant :

Lemme 1.3 *Toute orbite tordue de B dans S' rencontre $N(T)$ suivant une unique orbite tordue de T .*

Preuve : Soit $x \in S'$, alors on le décompose grâce au théorème 1 en $x = unu'$ avec $n \in wT$, $u \in U$ et $u' \in U'_w$. Comme $x \in S'$ et U, T sont stables par θ , $\theta(x) = x^{-1}$ donne

$$\theta(u)\theta(n)\theta(u') = (u')^{-1}n^{-1}u^{-1}$$

et ainsi avec l'unicité de la décomposition de Bruhat on a $\theta(n) = n^{-1}$. On va montrer que n est dans la B -orbite de x .

On va commencer par montrer que $\theta(u') \cdot x = \theta(u_1)^{-1}n$ avec $u_1 \in U_w$. On décompose $\theta(u)^{-1} = u_1u'_1$ avec $u_1 \in U_w$ et $u'_1 \in U'_w$. Ainsi, en remplaçant $\theta(u)$ par $(u'_1)^{-1}(u_1)^{-1}$ et u^{-1} par $\theta(u_1)\theta(u'_1)$ on a :

$$(u'_1)^{-1}(u_1)^{-1}n^{-1}\theta(u') = (u')^{-1}n^{-1}\theta(u_1)\theta(u'_1),$$

soit encore :

$$[(u'_1)^{-1}(u_1)^{-1}]n^{-1}[\theta(u')] = [(u')^{-1}(n^{-1}\theta(u_1)n)]n^{-1}[\theta(u'_1)] \quad (\mathbf{A})$$

On a de plus $\theta(U_w) = U_{\theta(w)} = U_{w^{-1}}$ (ainsi que $\theta(U'_w) = U'_{w^{-1}}$), et par suite, $n^{-1}\theta(U_w)n = U_w$ (en effet, $n^{-1}T = w^{-1}$), donc, en particulier, $n^{-1}\theta(u_1)n$ appartient à U . Ainsi, l'unicité dans le théorème 1 appliquée à l'équation **(A)** donne :

$$\theta(u'_1) = \theta(u') (\Leftrightarrow u'_1 = u'). \quad (\mathbf{B})$$

En utilisant l'égalité ci-dessus, l'équation **(A)** devient :

$$n^{-1}\theta(u_1)n = u_1^{-1} \quad (\mathbf{C})$$

Or $x = unu'$ et $u = \theta(u_1^{-1})\theta(u_1^{-1})$, donc en remplaçant u'_1 par u' on a

$$\begin{aligned} x &= \theta(u')^{-1}\theta(u_1)^{-1}nu' \\ x &= \theta(u')^{-1} \cdot (\theta(u_1)^{-1}n). \end{aligned}$$

L'égalité (C) peut alors être exploitée de la manière suivante : l'application ψ définie par $\psi(u) = n^{-1}\theta(u)n$ est une involution de G . Le sous-groupe U_w est un sous-groupe unipotent stable par ψ . L'élément u_1 est un anti-invariant pour ψ donc, par le lemme 1.1, il existe u_2 dans U_w tel que $u_1 = u_2\psi(u_2)^{-1}$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\theta(u_1)^{-1}n &= \theta(\psi(u_2))\theta(u_2^{-1})n \\
\theta(u_1)^{-1}n &= \theta(n^{-1}\theta(u_2)n)\theta(u_2^{-1})n \\
\theta(u_1)^{-1}n &= \theta(n^{-1})u_2\theta(n)\theta(u_2^{-1})n \\
\theta(u_1)^{-1}n &= nu_2n^{-1}\theta(u_2^{-1})n \\
\theta(u_1)^{-1}n &= (nu_2n^{-1})n(n^{-1}\theta(u_2^{-1})n) \\
\theta(u_1)^{-1}n &= (nu_2n^{-1}) \cdot n.
\end{aligned}$$

En mettant ensemble l'égalité ci-dessus avec $x = \theta(u')^{-1} \cdot (\theta(u_1)^{-1}n)$, on obtient

$$x = \left(\theta(u')^{-1}nu_2n^{-1}\right) \cdot n,$$

c'est-à-dire : n est dans l'intersection de l'orbite $B \cdot x$ avec S' .

Soit n_1 et n_2 deux éléments de $N(T) \cap S'$ dans la même B -orbite tordue, alors il existe $b = ut \in B = UT$ tel que $n_2 = utn_1\theta(t)^{-1}\theta(u)^{-1}$. Comme U et T sont stables par θ , la décomposition de Bruhat donne $n_2 = tn_1\theta(t)^{-1}$, i.e. n_1 et n_2 sont dans la même T -orbite tordue. D'autre part, comme $T \subseteq B$ si n_1 et n_2 sont dans la même T -orbite tordue, ils sont dans la même B -orbite tordue. Il y a donc une bijection entre les T -orbites tordues dans $N(T) \cap S'$ et les B -orbites tordues dans S' . \diamond

La proposition 1.2 découle alors du :

Lemme 1.4 *Il n'y a qu'un nombre fini de T -orbites tordues dans $N(T) \cap S'$.*

Preuve : Il n'y a qu'un nombre fini de classe $Tn \cap S'$. Chacune de ces classes est stable par l'action tordue de T . Il suffit donc de montrer que chaque classe ne contient qu'un nombre fini de T -orbites tordues. Soit $n \in N(T) \cap S'$, soit $t \in T$ tel que $tn \in S'$ alors $\theta(tn) = n^{-1}t^{-1}$ d'où $\psi(t) = t^{-1}$ (avec ψ défini comme dans le lemme précédent). On a donc $Tn \cap S' = \{t \in T \mid \psi(t) = t^{-1}\}n$. Si tn est dans la T -orbite tordue de n alors $tn = t_2 \cdot n$, soit encore $t = t_2\psi(t_2)^{-1}$. Ainsi, les T -orbites tordues de $Tn \cap S'$ sont paramétrées par l'ensemble $\{t \in T \mid \psi(t) = t^{-1}\}/\{t\psi(t)^{-1}\}$ qui est fini d'après le lemme 1.2. \diamond

On considère l'ensemble V des $T \times H$ -orbites dans $\tau^{-1}(N(T))$. Le lemme précédent montre que V est fini. On note alors pour chaque $v \in V$, \dot{v} un représentant de cette orbite. On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.3 *Il n'y a qu'un nombre fini de $B \times H$ -orbites dans G , et $\{\dot{v} \mid v \in V\}$ est un ensemble de représentants de ces orbites i.e.*

$$G = \coprod_{v \in V} B\dot{v}H.$$

Remarque : L'ensemble V paramètre les orbites de $B \times H$ dans G , mais il paramètre aussi les orbites de B dans G/H ainsi que les orbites de H dans $B \backslash G$.

1.4 Un exemple : les formes quadratiques.

Soit $G = SL_n$ que l'on identifie à l'ensemble des matrices $n \times n$ de déterminant 1. Le sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures est un sous-groupe de Borel, et le sous-groupe T des matrices diagonales est un tore maximal de SL_n . Le groupe de Weyl de SL_n est $N(T)/T = S_n$, le groupe des permutations de n éléments. Soit J la matrice suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \{\pm 1 \pm i\}$ vérifie $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda^n = 1$ (de sorte que $J \in SL_n$). On définit alors $\theta(g) = J^t g^{-1} J^{-1}$ si bien que $G^\theta = SO_n$ est le stabilisateur de J pour l'action $g.A = {}^t g A g$. De plus, (B, T) est une paire standard pour SL_n, θ .

On veut trouver des représentants des orbites de $B \times SO_n$ dans SL_n . On a vu (par la proposition 1.3) que l'on pouvait choisir ces représentants dans $\mathcal{V} = \tau^{-1}(N(T))$, et même qu'il suffit de paramétrer les orbites tordues de T dans $\tau(\mathcal{V})$. On va ici trouver des représentants ces orbites tordues.

On commence par calculer $\tau(\mathcal{V})$: soit $g \in \mathcal{V}$, alors $g\theta(g)^{-1} = gJ^t gJ^{-1} \in N(T)$. Comme J est une matrice dans $N(T)$, $gJ^t gJ^{-1} \in N(T)$ si et seulement si $gJ^t g \in N(T)$. De plus, J est une matrice symétrique donc $gJ^t g$ est symétrique. Si S est l'ensemble des matrices symétriques, on a finalement :

$$\tau(\mathcal{V}) \subseteq (S \cap N(T))J^{-1}$$

D'autre part, pour tout élément de $B \in S \cap N(T)$, il existe une matrice P inversible telle que $P^t P = B$. De plus, $\det(B) = 1 = \det(P)^2$, ainsi, quitte à remplacer P par μP (où $\mu \in \mathbb{C}$ est tel que $\mu^n = \det(P)$), on peut supposer que $P \in SL_n$. En particulier, il existe $K \in SL_n$ telle que $KJ^t K = I$ (où I est la matrice de l'identité). Soit $A \in S \cap N(T)J^{-1}$, on écrit $A = BJ^{-1}$, il existe $P \in SL_n$ telle que $P^t P = B$. On pose alors $P' = PK$ et on a :

$$\begin{aligned} P'\theta(P')^{-1} &= PKJ^t K^t P J^{-1} \\ P'\theta(P')^{-1} &= P^t P J^{-1} \\ P'\theta(P')^{-1} &= A. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement

$$\tau(\mathcal{V}) = S \cap N(T)J^{-1}.$$

À chaque élément de $N(T)$ on peut associer une permutation : sa classe dans $N(T)/T = S_n$. L'application quotient :

$$\begin{array}{ccc} \sigma : N(T) & \rightarrow & N(T)/T = S_n \\ h & \mapsto & \sigma_h \end{array}$$

est un morphisme de groupes. Si on restreint cette application à $S \cap N(T)$, l'image est l'ensemble \mathcal{I} des involutions de S_n (en effet, un élément $h \in N(T)$ est symétrique si et seulement si la permutation associée σ_h est d'ordre 2).

Calculons l'action tordue de T sur $\tau(\mathcal{V})$. Soit $g \in \tau(\mathcal{V})$ et $t \in T$ alors $t \cdot g = tg\theta(t)^{-1}$, mais $g = hJ^{-1}$ avec $h \in S \cap N(T)$ d'où $t \cdot g = thtJ^{-1}$. Déterminons les T -orbites dans $S \cap N(T)$ pour l'action $t \cdot h = tht$: si $h = (h_{ij})$ et $t = (t_1, \dots, t_n)$ alors $(t \cdot h)_{i,j} = t_i t_j h_{ij}$. Il est clair que $\sigma_{t \cdot h} = \sigma_h$, mais σ_h ne sépare pas toutes les orbites de T , il y a deux cas suivant que la permutation σ_h possède un point fixe ou pas.

(i) Si $\sigma \in \mathcal{I}$ ne possède pas de point fixe, on décompose σ en produit de transpositions de supports disjoints :

$$\sigma = \prod_{k \in K} (k, \sigma(k)).$$

Le fait que σ soit sans point fixe se traduit par $K \coprod \sigma(K) = \{1, \dots, n\}$ (ce qui impose que n soit pair). Soit $h \in S \cap N(T)$ tel que $\sigma_h = \sigma$, alors

$$\det(h) = (-1)^{n/2} \left(\prod_{k \in K} h_{k\sigma(k)} \right)^2$$

d'où une espèce de racine du déterminant

$$" \sqrt{\det(h)} " = \left(\prod_{k \in K} h_{k, \sigma(k)} \right) (-i)^{n/2} \in \{\pm 1\}.$$

L'action de T laisse invariant cette racine du déterminant : $\sqrt{\det(tht)} = \sqrt{\det h}$ (car $\cup\{k, \sigma_h(k)\} = \{1, \dots, n\}$ et $T \subset SL_n$). Soit h et h' tels que $\sigma_h = \sigma_{h'}$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in T$. On veut résoudre $t \cdot h = h'$ c'est-à-dire le système suivant :

$$\forall k \in K \quad t_k t_{\sigma(k)} h_{k, \sigma(k)} = h'_{k, \sigma(k)}.$$

On prend alors les t_k pour $k \in K$ quelconques non nuls et les $t_{\sigma(k)}$ déterminés par les équations ci-dessus. Cela donne à priori un élément du tore diagonal de GL_n . Mais en multipliant toutes ces égalités, on obtient :

$$\prod t_k t_{\sigma(k)} \sqrt{\det(h)} = \sqrt{\det(h')}.$$

Par conséquent, si $\sqrt{\det(h)} = \sqrt{\det(h')}$ on a $t \in SL_n$, tel que $t \cdot h = h'$. Finalement il y a deux orbites de T au dessus de σ avec deux représentants de ces orbites : $H_\sigma^+ = (\lambda \delta_{k, \sigma(l)})$ et $H_\sigma^- = d_{1, \sigma(1)} H_\sigma^+$ où $d_{1, \sigma(1)}$ est la matrice diagonale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_i = 1$ si $i \neq 1, \sigma(1)$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\sigma(1)} = -1$.

(ii) En revanche, si $\sigma \in \mathcal{I}$ possède au moins un point fixe, alors on décompose σ en produit de transpositions de supports disjoints

$$\sigma = \left(\prod_{k \in K} (k, \sigma(k)) \right).$$

Par hypothèse, l'ensemble $L = \{1, \dots, n\} \setminus (K \cup \sigma(K))$ est non vide. Prenons alors h et h' deux éléments de $S \cap N(T)$ tels que $\sigma_h = \sigma = \sigma_{h'}$. On cherche alors un élément de T tel que $t \cdot h = h'$, ce qui revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\forall k \in K \quad t_k t_{\sigma(k)} h_{k, \sigma(k)} = h'_{k, \sigma(k)}, \quad \forall l \in L \quad t_l^2 h_{ll} = h'_{ll}.$$

La première remarque est que si on a un tel t alors son déterminant est ± 1 . On choisit les t_k pour $k \in K$ quelconque non nul, ce qui impose la valeur des $t_{\sigma(k)}$. Il nous reste alors le choix pour chaque l dans L de prendre t_l ou $-t_l$, ainsi on choisit le signe du déterminant de T de sorte que t soit dans SL_n . Finalement, on a une unique orbite de T dans $S \cap N(T)$ au dessus de σ , avec pour représentant $H_\sigma = (\varepsilon_{k, l} \delta_{k, \sigma(l)})$ avec $\varepsilon_{k, l} = \pm 1$ choisis afin que le déterminant de H soit 1. On peut choisir par exemple les $\varepsilon_{k, l}$ ainsi :

- Si la signature de σ est 1, alors il suffit de prendre tous les $\varepsilon_{k,l}$ égaux à 1.
- Si la signature de σ est -1 , alors on choisit $i_0 \in I$, et on pose $\varepsilon_{k,l} = 1$ si $\{k, l\} \neq \{i_0, \sigma(i_0)\}$, et $\varepsilon_{i_0, \sigma(i_0)} = \varepsilon_{\sigma(i_0), i_0} = -1$.

On a finalement des représentant des T -orbites tordues dans $\tau(\mathcal{V})$: les éléments $H_\sigma J^{-1}$ pour σ une involution avec point fixe, et les éléments $H_\sigma^\pm J^{-1}$ pour σ une involution sans point fixe.

Remarque : On retrouvera par une autre méthode une paramétrisation des orbites de $SO(n)$ dans SL_n/B dans la section 8, ainsi que des représentants de ces orbites.

2 Propriétés des involutions tordues.

2.1 Actions de W .

2.1.1 Action de W dans $B \backslash G/H$.

On a vu que l'ensemble V des $B \times H$ -orbites de G peut s'interpréter comme l'ensemble des T -orbites tordues dans $\tau(\mathcal{V}) = N(T) \cap \tau(G)$ (où $\mathcal{V} = \tau^{-1}(N(T))$). Le groupe $N(T)$ agit sur $\tau(\mathcal{V})$ par l'action tordue, et par conséquent cette action passe au quotient par T en une action de $W = N(T)/T$ sur V . Cette action est un cas particulier d'une action de W sur les orbites d'un sous-groupe de Borel dans toute variété sphérique, définie par Knop [Kno95], mais dans le cadre des espaces symétriques cette action, comme on vient de le voir, apparaît directement.

D'autre part, on a une application naturelle de V dans W , qui peut se voir de deux manières différentes. L'application $\varphi : \tau(\mathcal{V}) \rightarrow W$, qui n'est autre que la restriction du quotient $N(T) \rightarrow W = N(T)/T$, est invariante pour l'action tordue de T , ainsi elle passe au quotient en $\varphi : V \rightarrow W$. Une deuxième façon de voir cette application est de considérer :

$$\begin{aligned} \varphi' : B \backslash G &\rightarrow B \backslash G \times B \backslash G \\ Bg &\mapsto (Bg, B\theta(g)) \end{aligned}$$

(qui est bien définie car B est θ -stable) que l'on compose par l'application $B \backslash G \times B \backslash G \rightarrow W = B \backslash G/B$ (définie par $(Bx, By) \mapsto Bxy^{-1}B$). Cette application est H -invariante, elle passe donc au quotient en $\overline{\varphi}' : V \rightarrow W$. Il est aisé de voir que $\overline{\varphi}'$ coïncide avec φ . En effet, on peut choisir dans chaque

orbite de $B \times H$ dans G un représentant x tel que $x\theta(x)^{-1} \in N(T)$; ainsi $\overline{\varphi}(BxH) = \varphi(BxH)$.

Géométriquement, φ se comprend assez bien : à un sous-groupe de Borel B_1 on associe la position relative des deux sous-groupes de Borel B_1 et $\theta(B_1)$, qui est un élément de W .

2.1.2 Involutions tordues.

L'application $\varphi : V \rightarrow W$ peut ne pas être surjective. En effet, θ agit dans W et l'image de φ est contenue dans $\{w \in W \mid \theta(w) = w^{-1}\}$. Ce qui nous amène à la définition :

Définition 2 *On appellera involutions tordues les éléments de W qui vérifient $\theta(w) = w^{-1}$, et on notera $\mathcal{I}_\theta \subseteq W$ l'ensemble des involutions tordues.*

Il est possible que l'image de φ ne soit pas \mathcal{I}_θ . Deux exemples pour illustrer la non surjectivité de φ . Soit $G = SL_4$ et θ la conjugaison par $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. L'action de θ sur W est alors triviale, si bien que $\mathcal{I}_\theta = \mathcal{I}$ (l'ensemble des involutions de $W = S_4$). Pourtant l'image de φ est seulement formée des transpositions (voir le lemme géométrique 8.3). Un deuxième exemple est l'espace symétrique SL_{2n}/Sp_{2n} . On note toujours \mathcal{I} l'ensemble des involutions de S_{2n} . L'ensemble des involutions tordues est alors $\mathcal{I}w^\circ$, où w° est l'élément de plus grande longueur de S_{2n} . Et pourtant l'image de φ est $\mathcal{I}^s w^\circ$, où \mathcal{I}^s est l'ensemble des involutions sans point fixe, comme le montrera le lemme géométrique 8.2.

L'action de W sur V définie précédemment se transporte par φ en une action tordue de W sur $\mathcal{I}_\theta : \varphi(w.v) = w\varphi(v)\theta(w)^{-1}$. C'est ce qui amène à regarder d'un peu plus près ces involutions tordues avec l'action tordue de W .

2.2 Décomposition d'une involution tordue.

On reprend ici quelques points essentiels du §3 de Springer [Spr85], sur les involutions tordues.

2.2.1 Notations et rappels.

On choisit une paire standard (T, B) de G, θ . Le tore T définit le système de racines Φ de G (les poids non nuls de l'action de T dans l'algèbre de Lie de G). Le sous-groupe de Borel B définit le sous-ensemble Φ^+ de Φ des racines

positives (les poids non nuls de l'action de T dans l'algèbre de Lie de B), et l'ensemble S des racines simples. Toute racine simple α définit une réflexion simple $s_\alpha \in W$. On note $\Sigma = \{s_\alpha \in W \mid \alpha \in S\}$ l'ensemble des réflexions simples.

Les groupes B et T sont stables par θ , donc θ agit dans Φ en laissant stable Φ^+ et par conséquent S est aussi stable par θ . Sur W la longueur est définie par le choix de T et B , or θ laisse stable Φ^+ et S , par conséquent la longueur est conservée par l'action de θ dans W . On notera w° l'élément de plus grande longueur de W .

Pour chaque sous-ensemble $\Pi \subseteq S$ on a un sous-système de racines associé (celui engendré par Π) que l'on notera Φ_Π . De même, on notera $\Phi_\Pi^+ = \Phi^+ \cap \Phi_\Pi$, W_Π le sous-groupe de W engendré par $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$, et w_Π° l'élément de plus grande longueur de W_Π .

2.2.2 Décomposition de Springer.

On cherche une sorte de décomposition canonique des involutions tordues en utilisant l'action tordue de W sur \mathcal{I}_θ . Soit w un élément de \mathcal{I}_θ . On a le lemme [Spr85, lemme 3.2] :

Lemme 2.1 *Soit $s \in \Sigma$. Alors*

- (i) *si $sw < w$ alors soit $l(sw\theta(s)) = l(w) - 2$, soit $l(sw\theta(s)) = l(w)$. Dans ce dernier cas, $sw\theta(s) = w$; de plus, $s = s_\alpha$ ($\alpha \in S$) avec $w\theta(\alpha) = -\alpha$.*
- (ii) *si $sw > w$ alors soit $l(sw\theta(s)) = l(w) + 2$, soit $l(sw\theta(s)) = l(w)$. Dans ce dernier cas, $sw\theta(s) = w$; de plus, $s = s_\alpha$ ($\alpha \in S$) avec $w\theta(\alpha) = \alpha$.*

Preuve :

(i) Lorsque l'on multiplie un élément du groupe de Weyl par un élément de Σ , la longueur ne peut qu'augmenter ou diminuer de 1. Or s et $\theta(s)$ sont des réflexions simples et $sw < w$, donc $l(sw) = l(w) - 1$, si bien que $l(sw\theta(s)) = l(w)$ ou $l(w) - 2$. Dans le cas où $l(sw\theta(s)) = l(w)$, on écrit w sous forme réduite $w = s_1 \dots s_r$ où $r = l(w)$ et $s_i \in \Sigma$. De plus, $sw < w$ donc on peut choisir $s_1 = s$. On a alors $\theta(w)^{-1} = w = \theta(s_r) \dots \theta(s_1)$, et par le lemme d'effaçage ([Spr98, §10.2]), $sw = \theta(s_r) \dots \widehat{\theta(s_i)} \dots \theta(s_1)$. Si $i > 1$, on a alors $l(sw\theta(s)) < l(w)$ (puisque $s_1 = s$), par conséquent $i = 1$ et on a $sw\theta(s) = w$. Soit $\alpha \in S$ tel que $s = s_\alpha$, on a $s_\alpha = w\theta(s_\alpha)w^{-1} = s_{w\theta(\alpha)}$ i.e. $w\theta(\alpha) = \pm\alpha$. Or on a toujours $s_\alpha w < w$, donc $w^{-1}(\alpha) < 0$. Puisque θ préserve les racines positives, on obtient $w\theta(\alpha) = -\alpha$.

- (ii) Il suffit d'appliquer le (i) à $sw\theta(s)$. ◇

Ce lemme va permettre de donner une décomposition très utile des involutions tordues. C'est la proposition [Spr85, prop 3.3].

Proposition 2.1 *Soit $w \in \mathcal{I}_\theta$, alors il existe $s_1, \dots, s_h \in \Sigma$ et $\Pi \subseteq S$ tels que :*

- (i) $w = s_1 \dots s_h w_\Pi^\circ \theta(s_h) \dots \theta(s_1)$ avec $l(w) = l(w_\Pi^\circ) + 2h$,
- (ii) $\forall \alpha \in \Pi, w_\Pi^\circ \theta(\alpha) = -\alpha$.

Preuve : La preuve se fait par récurrence sur la longueur de w .

Si $l(w) = 1$ alors $w = s_\alpha$, avec $\alpha \in \Pi$.

Si $l(w) > 1$ alors

- soit il existe $s \in \Sigma$ telle que $l(sw\theta(s)) < l(w)$, auquel cas on applique l'hypothèse de récurrence à $sw\theta(s)$,
- soit pour tout $s \in S$ tel que $sw < w$ on a, par le lemme 2.1, $sw\theta(s) = w$.

On définit alors

$$\Pi = \{\alpha \in S \mid w\theta(\alpha) = -\alpha\} = \{\alpha \in S \mid s_\alpha w < w\}.$$

Montrons que $w_\Pi^\circ = w$. Pour cela, il faut commencer par remarquer que $w_{\theta(\Pi)}^\circ w^{-1}$ laisse stable Φ^+ . En effet, si $\alpha \in \Pi$ alors $w^{-1}(\alpha) = -\theta(\alpha)$. Par conséquent $w_{\theta(\Pi)}^\circ w^{-1}(\alpha) > 0$. D'autre part, si $\alpha \in S \setminus \Pi$ alors $w^{-1}(\alpha) > 0$ (car si $w^{-1}(\alpha) < 0$ alors $\alpha \in \Pi$ par le lemme précédent) et $w^{-1}(\alpha) \notin \theta(\Phi_\Pi^+)$ (sinon $w^{-1}(\alpha) = \theta(\beta)$ avec $\beta \in \theta(\Phi_\Pi^+)$, donc $w\theta(\beta) = -\beta < 0$ or $w\theta(\beta) = \alpha > 0$), donc $w_{\theta(\Pi)}^\circ w^{-1}(\alpha) > 0$. Finalement, $w_{\theta(\Pi)}^\circ w^{-1}$ laisse stable Φ^+ , donc c'est l'élément neutre de W . De plus, Π est θ -stable : en effet, si $\alpha \in \Pi$ alors $-\alpha = w\theta(\alpha) = w_{\theta(\Pi)}^\circ \theta(\alpha) = \theta w_\Pi^\circ(\alpha)$, c'est-à-dire $w_\Pi^\circ(\alpha) = -\theta(\alpha)$. Donc $-\theta(\alpha) \in -\Pi$, i.e. $\theta(\alpha) \in \Pi$. On peut en déduire que $w = w_{\theta(\Pi)}^\circ = w_\Pi^\circ$, et l'action de $w_\Pi^\circ \theta$ sur Π se fait bien comme annoncé dans la proposition. \diamond

2.3 Position des racines par rapport aux involutions tordues.

2.3.1 Définitions.

Soit $w \in \mathcal{I}_\theta$, alors on peut décomposer l'ensemble Φ^+ des racines positives en regardant l'action de $w\theta$ sur Φ^+ . Essentiellement, il faut penser que l'on a un endomorphisme $w\theta$ d'ordre 2 (car $w \in \mathcal{I}_\theta \Rightarrow (w\theta)^2 = 1$) d'un espace vectoriel (l'espace vectoriel sous-jacent à Φ) et que l'on cherche à trouver une décomposition de cet espace vectoriel adaptée à la fois aux racines et

à cet endomorphisme. On est amené à considérer les sous-ensembles de Φ^+ suivants :

- $R(w) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w\theta(\alpha) = -\alpha\}$, l'ensemble des racines *réelles* pour w .
- $I(w) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w\theta(\alpha) = \alpha\}$, l'ensemble des racines *imaginaires* pour w .
- $C(w) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w\theta(\alpha) \neq \pm\alpha\}$, l'ensemble des racines *complexes* pour w .

L'ensemble $C(w)$ se décompose encore en deux parties : $C''(w)$, les racines complexes qui font croître la longueur de w , et $C'(w)$, les racines complexes qui la font décroître. En notant, pour tout $v \in W$,

$$\Phi_v^+ = \{\alpha \in \Phi^+ \mid v^{-1}(\alpha) < 0\} = \{\alpha \in \Phi^+ \mid s_\alpha v < v\},$$

on a

$$C'(w) = \{\alpha \in \Phi_w^+ \mid w\theta(\alpha) \neq -\alpha\} \text{ et}$$

$$C''(w) = \{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_w^+ \mid w\theta(\alpha) \neq \alpha\}.$$

Ces égalités viennent du fait suivant : si $w \in \mathcal{I}_\theta$ et $\alpha \in \Phi^+$ alors $w^{-1}(\alpha) > 0 \Leftrightarrow w\theta(\alpha) > 0$.

2.3.2 Décompositions de Springer et position des racines.

Écrivons maintenant $w = w'w_\Pi^\circ\theta(w')^{-1}$, une décomposition de $w \in \mathcal{I}_\theta$ comme dans la proposition (2.1), alors on peut caractériser les sous-ensembles définis ci-dessus à l'aide de w' et Π ; ce sont les lemmes 3.6 et 3.7 de [Spr85].

Proposition 2.2

- (i) $C'(w) = \Phi_{w'}^+ \cup \Pi(-w\theta(\Phi_{w'}^+))$.
- (ii) $R(w) = w'(\Phi_\Pi^+)$.
- (iii) $I(w) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w'^{-1}(\alpha) \perp \Pi \text{ et } w'^{-1}(\alpha) \text{ est stable par } \theta \text{ et } w_\Pi^\circ\}$.

Preuve : On commence par montrer (i) et (ii). On a d'abord quelques inclusions évidentes.

Si $\alpha \in \Phi_{w'}^+$ alors $s_\alpha w' < w'$ et donc $s_\alpha w < w$ ce qui donne $\alpha \in \Phi_w^+$. De plus, $s_\alpha w\theta(s_\alpha) < w$, par conséquent $w\theta(\alpha) \neq -\alpha$. D'où une première inclusion : $\Phi_{w'}^+ \subseteq C'(w)$. De plus, si $\alpha \in C'(w)$ alors $-w\theta(\alpha) \in C'(w)$; on a donc

$$\Phi_{w'}^+ \cup (-w\theta(\Phi_{w'}^+)) \subseteq C'(w).$$

Soit $\alpha \in \Phi_{\Pi}^+$, alors $w\theta(w'(\alpha)) = w'w_{\Pi}^{\circ}\theta(w')^{-1}\theta(w')\theta(\alpha)$, c'est-à-dire, $w\theta(w'(\alpha)) = w'w_{\Pi}^{\circ}\theta(\alpha)$. Or $\theta(\alpha) \in \Phi_{\Pi}^+$ donc $w_{\Pi}^{\circ}\theta(\alpha) = -\alpha$ (par la proposition 2.1). Donc soit $w'(\alpha) \in R(w)$, soit $-w'(\alpha) \in R(w)$. Supposons que $\alpha \in \Phi_{\Pi}^+$ et $w'(\alpha) < 0$, alors on aurait $w_{\Pi}^{\circ} = s_{\alpha}w_{\Pi}^{\circ}\theta(s_{\alpha})$ et $w's_{\alpha} < w'$, par suite on aurait $w'w_{\Pi}^{\circ}\theta(w')^{-1} = w's_{\alpha}w_{\Pi}^{\circ}\theta(s_{\alpha})\theta(w')^{-1}$, ce qui est impossible pour des raisons de longueur. En effet, $l(w) = 2l(w') + l(w_{\Pi}^{\circ})$ par la proposition 2.1. Or $l(w's_{\alpha}) < l(w')$ et $l(\theta(s_{\alpha})\theta(w')^{-1})$ donnent $w's_{\alpha}w_{\Pi}^{\circ}\theta(s_{\alpha})\theta(w')^{-1} < 2l(w') + l(w_{\Pi}^{\circ})$. Ainsi on a

$$w'(\Phi_{\Pi}^+) \subseteq R(w).$$

Montrons maintenant

$$\Phi_{w'}^+ \cap (-w\theta(\Phi_{w'}^+)) = \emptyset.$$

Soit $\alpha \in \Phi_{w'}^+ \subseteq C'(w)$, alors $-w'^{-1}(\alpha) \in \Phi^+ \setminus \Phi_{\Pi}^+$ (car $w'(\Phi_{\Pi}^+) \subseteq R(w) \subseteq \Phi^+$). Calculons $-w'^{-1}w\theta(\alpha) = -w_{\Pi}^{\circ}\theta(w'^{-1}(\alpha))$, or θ laisse stable Φ^+ et Φ_{Π}^+ , donc $-\theta(w'^{-1}(\alpha))$ appartient à Φ^+ privé de Φ_{Π}^+ . Par conséquent, $-w'^{-1}w\theta(\alpha)$ est positive, soit encore $-w\theta(\alpha) \notin \Phi_{w'}^+$. Finalement, l'union $\Phi_{w'}^+ \cup (-w\theta(\Phi_{w'}^+))$ est disjointe.

Pour terminer la preuve, il ne reste qu'à regarder les cardinaux des ensembles considérés. On a

$$\sharp(R(w) \cup C'(w)) = \sharp\Phi_w^+ = l(w),$$

et

$$\sharp(\Phi_{w'}^+ \amalg -w\theta(\Phi_{w'}^+) \amalg w'(\Phi_{\Pi}^+)) \geq 2l(w') + l(w_{\Pi}^{\circ}) = l(w).$$

Ainsi avec l'inclusion que l'on vient d'obtenir on a montré (i) et (ii).

Pour finir, démontrons (iii). Les éléments de Π sont des vecteurs propres de $w_{\Pi}^{\circ}\theta$ pour la valeur propre -1 , alors que si $\alpha \in I(w)$ alors $w'^{-1}(\alpha)$ est un vecteur propre de $w_{\Pi}^{\circ}\theta$ pour la valeur propre 1 . Cet endomorphisme étant orthogonal, ces vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Enfin, une fois que l'on sait que $\beta = w'^{-1}(\alpha)$ est orthogonale à Π , la racine β est stable par w_{Π}° , et, par suite, stable par θ . Ce qui donne l'inclusion

$$I(w) \subseteq \{\alpha \in \Phi^+ \mid w'^{-1}(\alpha) \perp \Pi \text{ et } w'^{-1}\alpha \text{ est stable par } \theta \text{ et } w_{\Pi}^{\circ}\}.$$

Soit maintenant $\alpha \in \Phi^+$, si $w'^{-1}(\alpha)$ est stable par θ et w_{Π}° , et si de plus $w'^{-1}(\alpha)$ est orthogonale à Π , alors on a facilement $w'w_{\Pi}^{\circ}\theta(w')^{-1}\theta(\alpha) = \alpha$. Ce qui termine la preuve de la proposition. \diamond

Un des intérêts de ce résultat est une certaine unicité de la décomposition de Springer, il peut permettre de la construire connaissant $R(w)$, $C(w)$ et $I(w)$.

2.3.3 Exemples de décompositions de Springer.

Prenons le groupe SL_n , alors l'ensemble des racines est $\Phi = \{(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$, que l'on notera $\Phi = \{(i, j)\}$. Soit θ l'involution de SL_n définie dans la section 1.4. On choisit $\Phi^+ = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, le groupe de Weyl est $W = S_n$. L'élément de plus grande longueur $w^\circ \in S_n$ agit sur $\{1, \dots, n\}$ par $w^\circ(i) = n + 1 - i$. L'action de θ sur les racines est la suivante : $\theta(i, j) = (w^\circ(j), w^\circ(i)) = (n + 1 - j, n + 1 - i)$. Alors θ laisse bien invariant Φ^+ , et l'ensemble \mathcal{I}_θ des involutions tordues est : $\mathcal{I}w^\circ$, où \mathcal{I} est l'ensemble des vraies involutions de W , i.e. les éléments de W d'ordre 2.

Cherchons une décomposition de Springer associée à $s_i w^\circ$ où s_i est la réflexion simple correspondant à $(i, i + 1) \in \Phi^+$. Alors on a les sous-ensembles de Φ^+ suivants :

$$I(w) = \{(i, i + 1)\},$$

$$C(w) = \{(k, i)(k', i + 1) \text{ pour } k, k' < i\} \cup \{(i, l)(i + 1, l') \text{ pour } l, l' > i + 1\},$$

$$R(w) = \Phi^+ \setminus (C(w) \cup I(w)).$$

Comme $s_i w^\circ$ est de longueur un de moins que la longueur maximale, on ne peut pas avoir de racines dans $C''(s_i w^\circ)$. Si on écrit $s_i w^\circ = w' w_\Pi^\circ \theta(w'^{-1})$ on doit avoir $C(w) = C'(w) = \Phi_w^+ \amalg -w\theta(\Phi_{w'}^+)$. On peut prendre par exemple $w' = s_{i-1} \cdots s_1 s_{i+1} \cdots s_n = (i \cdots 1)(i + 1 \cdots n)$ (qui est tel que $\Phi_{w'}^+ = \{(k, i) \text{ pour } k < i, (i + 1, l) \text{ pour } l > i + 1\}$). Il reste alors à trouver Π tel que $\Phi_\Pi^+ = w'^{-1}(R(w))$. On doit prendre $\Pi = \{(k, k + 1) \text{ pour } 1 < k < n - 1\}$. On a alors $s_i w^\circ = w' w_\Pi^\circ \theta(w')^{-1}$.

Remarque : cependant il n'y a pas d'unicité totale de la décomposition de Springer. Un exemple est donné par l'involution θ agissant trivialement sur le système de racines de SL_3 (θ provient d'une involution donnée par conjugaison par une matrice d'ordre 2 de SL_3), alors les involutions tordues sont les involutions de S_3 , et (13) possède deux décompositions de Springer :

$$(13) = (12)(23)(12) = (23)(12)(23).$$

On verra cependant que pour SL_n/SO_n il y a unicité de Π pour les décompositions de Springer (voir le lemme 6.2).

3 Action d'un sous-groupe parabolique minimal dans les espaces symétriques.

3.1 L'action d'un parabolique minimal dans une variété sphérique.

Soit X une variété algébrique. On dira que X est une G -variété si le groupe G agit algébriquement sur X . Une G -variété X est *sphérique* si X est normale et ne contient qu'un nombre fini d'orbites d'un sous-groupe de Borel B de G . Par exemple, un espace symétrique G/H est un G -variété sphérique (par la proposition 1.2). L'ensemble V des orbites de B dans X est partiellement ordonné par l'inclusion des adhérences d'orbites. Soit une racine simple $\alpha \in S$, cette racine définit un sous-groupe parabolique minimal P_α engendré par B et $U_{-\alpha}$.

Soit \mathcal{O}_v une orbite de B dans X . On veut décomposer $P_\alpha \mathcal{O}_v$ en orbites de B , et décrire l'ordre induit sur ce sous-ensemble. Pour cela on introduit le produit fibré :

$$g_{\alpha,v} : P_\alpha \times_B \mathcal{O}_v \rightarrow P_\alpha/B$$

de base P_α/B (qui n'est autre que la droite projective) et de fibre \mathcal{O}_v . En considérant alors l'application induite par l'action de P_α dans X

$$F_\alpha : P_\alpha \times_B \mathcal{O}_v \rightarrow P_\alpha \mathcal{O}_v,$$

on se ramène comme dans [Kno95], ou [RS94], à l'étude de l'action d'un sous-groupe de $PGL_2 = \text{Aut}(P_\alpha/B)$ dans $\mathbb{P}^1 = P_\alpha/B$. Il y a 7 situations possibles, qui se divisent en 2 catégories suivant les dimensions de $P_\alpha \mathcal{O}_v$ et \mathcal{O}_v . Si $\dim(P_\alpha \mathcal{O}_v) > \dim(\mathcal{O}_v)$, alors l'application F_α est génériquement finie et on a :

Lemme 3.1 *Si $\dim(P_\alpha \mathcal{O}_v) > \dim(\mathcal{O}_v)$ alors on est dans l'une des situations suivantes :*

- (i) $P_\alpha \mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{v'} \amalg \mathcal{O}_v$ avec $\mathcal{O}_{v'}$ ouverte dans $P_\alpha \mathcal{O}_v$, et F_α est birationnelle. On dira alors que α est de type U par rapport à v .
- (ii) $P_\alpha \mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{v'} \amalg \mathcal{O}_v$ avec $\mathcal{O}_{v'}$ ouverte dans $P_\alpha \mathcal{O}_v$ et F_α est de degré 2. On dira alors que α est de type N par rapport à v .
- (iii) $P_\alpha \mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{v'} \amalg \mathcal{O}_v \amalg \mathcal{O}_{v''}$ avec $\mathcal{O}_{v'}$ ouverte dans $P_\alpha \mathcal{O}_v$ et F_α est birationnelle. On dira alors que α est de type T par rapport à v .

Preuve : Soit $h : P_\alpha \rightarrow \text{Aut}(P_\alpha/B)$ le morphisme de groupes naturel, et $x \in \mathcal{O}_v$. Soit $(P_\alpha)_x$ le stabilisateur de x dans P_α . La première étape est de remarquer que les orbites de B dans $P_\alpha \mathcal{O}_v$ sont en bijection avec les orbites de $h((P_\alpha)_x)$ dans (P_α/B) . En effet,

$$B \backslash P_\alpha \mathcal{O}_v = B \backslash P_\alpha / (P_\alpha)_x = \mathbb{P}^1 / h((P_\alpha)_x).$$

De plus, l'application F_α est P_α -équivariante, et $P_\alpha \mathcal{O}_v$ est homogène sous P_α , donc pour calculer la fibre il suffit de la calculer en x . Pour cela on peut utiliser la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} P_\alpha \times_B \mathcal{O}_v & \xrightarrow{F_\alpha} & P_\alpha \mathcal{O}_v \\ & \searrow i & \nearrow p_2 \\ & P_\alpha/B \times P_\alpha \mathcal{O}_v & \end{array}$$

avec $i(p, x) = (pB, px)$ et $p_2(pB, y) = y$. Ainsi la fibre au-dessus de x , vue à travers cette factorisation est $h((P_\alpha)_x)B/B$.

Finalement, $h((P_\alpha)_x)$ opère dans P_α/B avec un nombre fini d'orbites, et le degré de F_α est le cardinal de $h((P_\alpha)_x)B/B$. On est donc dans l'un des cas suivants :

- si $h(P_{\alpha x})$ contient un sous-groupe unipotent non trivial de $\text{Aut}(P_\alpha/B)$, alors on est dans le cas (i) (d'où le type U),
- si $h(P_{\alpha x})$ est le normalisateur d'un tore de $\text{Aut}(P_\alpha/B)$, alors on est dans le cas (ii) (d'où le type $N(T)$),
- si $h(P_{\alpha x})$ est un tore de $\text{Aut}(P_\alpha/B)$, alors on est dans le cas (iii) (d'où le type T).

◇

Par suite, on a 7 cas pour l'action d'un parabolique minimal sur un orbite de B dans X :

- soit P_α laisse stable \mathcal{O}_v (on dira alors que α est de type G par rapport à v .)
- soit $\dim(P_\alpha \mathcal{O}_v) > \dim(\mathcal{O}_v)$ et on est dans le cadre du lemme précédent, et on dira que α monte \mathcal{O}_v .
- soit $P_\alpha \mathcal{O}_v \neq \mathcal{O}_v$ mais $\dim(P_\alpha \mathcal{O}_v) = \dim(\mathcal{O}_v)$, alors on prend un x dans $P_\alpha \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v$, et on est ramené au cas précédent en regardant $\mathcal{O}_{v_1} = B.x$. On dira alors que v est de type U^* (resp. N^*, T^*) si v_1 est de type U (resp. N, T).

3.2 Définition du graphe $\Gamma(G/H)$.

Grâce à l'action des paraboliques minimaux à une variété sphérique X on associe un graphe orienté $\Gamma(X)$. Il a pour sommets les orbites de B dans X . Et les arêtes sont définies à partir l'action des paraboliques minimaux : soit α une racine simple de G . Si α monte \mathcal{O}_v , alors suivant le type de α par rapport à \mathcal{O}_v on est dans l'une des situations de la figure 1. Le trait

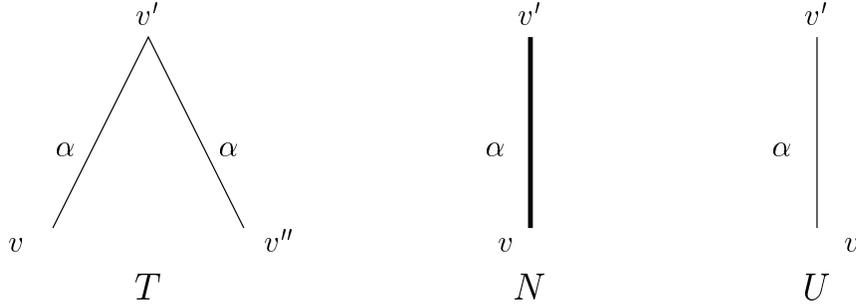


FIG. 1 – Arêtes de $\Gamma(G/H)$

gras représente une arête double. Et on donne à chaque arête le nom de la racine simple correspondante (il peut y avoir plusieurs telles racines). On notera indifféremment ce nom α ou s_α , la réflexion simple correspondante. On peut d'abord remarquer que les sommets des composantes connexes de ce graphe sont formées des orbites de B contenues dans une même orbite de G . C'est pourquoi on étudie plutôt ce graphe pour un espace homogène G/H . Le graphe $\Gamma(G/H)$ a été étudié par Brion dans [Bri99b], en particulier on peut lire sur ce graphe certains types de singularités d'adhérences d'orbites comme on le verra par la suite (sections 5 et 6).

Ce graphe permet de définir un ordre partiel sur l'ensemble des orbites de B dans G/H . Pour cela on commence par une définition. Pour tout ensemble Y inclus dans une variété algébrique, on note \overline{Y} l'adhérence de Zariski de Y . On dira que $w \in W$ “monte” l'orbite \mathcal{O}_v sur $\mathcal{O}_{v'}$, si l'application

$$F_{w,v} : \overline{BwB} \times_B \overline{\mathcal{O}_v} \rightarrow \overline{Bw\mathcal{O}_v}$$

est génériquement finie et si $\mathcal{O}_{v'}$ est l'orbite ouverte de B dans $\overline{Bw\mathcal{O}_v}$. On appellera degré de $F_{w,v}$ le cardinal de la fibre générique. Cette situation peut aussi s'interpréter en choisissant une décomposition réduite $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_1}$. Alors w monte \mathcal{O}_v si, en partant de \mathcal{O}_v dans $\Gamma(G/H)$, et si, en suivant le

chemin défini par la suite de paraboliques $P_{\alpha_1}, \dots, P_{\alpha_l}$, on monte à chaque étape jusqu'à atteindre $\mathcal{O}_{v'}$. On peut maintenant définir l'ordre faible sur l'ensemble des orbites de B dans G/H : on dira que $\mathcal{O}_v \preceq \mathcal{O}_{v'}$ s'il existe $w \in W$ tel que w monte \mathcal{O}_v sur $\mathcal{O}_{v'}$.

Remarque : Le degré de l'application $F_{w,v}$ est le nombre d'arêtes doubles que l'on rencontre en suivant le chemin défini par w . En effet, le degré de $F_{w,v}$ est aussi le degré de :

$$F_{\alpha_1, \dots, \alpha_l, v} : P_{\alpha_1} \times_B \dots \times_B P_{\alpha_l} \times_B \overline{\mathcal{O}_v} \rightarrow P_{\alpha_1} \dots P_{\alpha_l} \overline{\mathcal{O}_v}.$$

En effet, cette application se factorise de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} P_{\alpha_1} \times_B \dots \times_B P_{\alpha_l} \times_B \mathcal{O}_v & \xrightarrow{F_{\alpha_1, \dots, \alpha_l, v}} & \overline{Bw\mathcal{O}_v} \\ & \searrow^{M \times Id} & \nearrow^{F_{w,v}} \\ & \overline{BwB} \times_B \mathcal{O}_v & \end{array}$$

où l'application $M : P_{\alpha_1} \times_B \dots \times_B P_{\alpha_l} \rightarrow \overline{BwB}$ est celle induite par le produit. L'application $(M \times Id)$ est birationnelle, et, par suite, le degré de $F_{w,v}$ est le même que le degré de $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_l, v}$.

3.3 Action d'un parabolique minimal sur une orbite de B dans un espace symétrique.

Dans le cadre des espaces symétriques, on va voir que le type d'une racine simple par rapport à une orbite \mathcal{O}_v est presque déterminé par la position de la racine par rapport à l'involution tordue $\varphi(v)$. Soit α une racine simple, on notera $s = s_\alpha$. Le tableau 1 est un récapitulatif pour décrire l'action des paraboliques minimaux sur les orbites de B dans G/H .

Pour obtenir ce tableau, on choisit un élément v de V (l'ensemble des orbites de $B \times H$ dans G). Soient \mathcal{O}_v l'orbite de B correspondante dans G/H et $\dot{v} \in \mathcal{O}_v$ tels que $n = \dot{v}\theta(\dot{v})^{-1} \in N(T)$, c'est-à-dire un représentant de l'orbite comme ceux donnés par la proposition 1.3. On veut alors calculer le stabilisateur de \dot{v} dans P_α . Pour cela, il est bien utile d'introduire l'involution suivante : $\psi_{\dot{v}} = \text{Int}(n) \circ \theta$. En effet, le stabilisateur dans G de \dot{v} est alors $G^{\psi_{\dot{v}}}$, et par conséquent le stabilisateur de \dot{v} dans P_α est $P_\alpha^{\psi_{\dot{v}}}$. Deux cas se distinguent : soit α est complexe pour $\varphi(v)$, soit α est réelle ou imaginaire pour $\varphi(v)$ avec la terminologie définie dans la section 2.3.1. On a alors le lemme suivant :

TAB. 1 – Action d'un parabolique minimal

type de α (type de s)	B -orb. de $P_s O_v$	B -orb. ouverte de $P_s O_v$	$\varphi(v')$
I_v^n (T ou N)	$O_{v'} \amalg (O_v \cup O_{sv})$	$O_{v'}$	$s\varphi(v) > \varphi(v)$
I_v^c (G)	O_v	O_v	–
R_v (T^* ou N^*)	$O_v \amalg (O_{v'} \cup O_{sv'})$	O_v	$s\varphi(v) < v$
$C'(v)$ (U^*)	$O_v \amalg O_{v'=s.v}$	O_v	$s\varphi(v)\theta(s) < \varphi(v)$
$C''(v)$ (U)	$O_v \amalg O_{v'=s.v}$	$O_{v'}$	$s\varphi(v)\theta(s) > \varphi(v)$

Lemme 3.2 (i) Si α est complexe pour $\varphi(v)$, alors $h(P_\alpha^{\psi_{\dot{v}}})$ contient un sous-groupe unipotent non trivial de $\text{Aut}(P_\alpha/B)$, et $h(P_\alpha^{\psi_{\dot{v}}})$ n'est pas $\text{Aut}(P_\alpha/B)$.

(ii) Si α est réelle ou imaginaire, alors $h(P_\alpha^{\psi_{\dot{v}}})$ est un sous-groupe réductif de $\text{Aut}(P_\alpha/B)$, et par conséquent, ne peut-être que de type N, T, N^*, T^* ou PGL_2 .

Preuve : (i) On pose $\varphi(v) = w$. Si $\alpha \in C''(w)$, alors on a, dans l'algèbre de Lie de P_α , l'élément nilpotent $X_\alpha + w\theta(X_\alpha)$ (car $\alpha \in C''(w) \Rightarrow w\theta(\alpha) > 0$). Il est invariant par $\psi_{\dot{v}}$; ainsi quand on le remonte dans P_α , il donne un sous-groupe unipotent invariant par $\psi_{\dot{v}}$, qui s'envoie sur un sous-groupe unipotent de $\text{Aut}(P_\alpha/B)$. Enfin α ne peut pas être de type G car on a au moins deux orbites dans $P_\alpha \mathcal{O}_v$, qui sont v et $s_\alpha.v \neq v$ (car $\varphi(s_\alpha.v) = s_\alpha\varphi(v)\theta(s_\alpha) \neq w$).

(ii) Si α est une racine imaginaire ou réelle, alors l'action de $\psi_{\dot{v}}$ laisse stable le sous-groupe G_α (engendré par U_α et $U_{-\alpha}$) car $w\theta(\alpha) = \pm\alpha$. Ainsi $h(P_\alpha^{\psi_{\dot{v}}}) = h(G_\alpha^{\psi_{\dot{v}}})$ (car $h(P_\alpha) = h(G_\alpha)$). Ainsi $h(P_\alpha^{\psi_{\dot{v}}})$ est un sous-groupe réductif de $\text{Aut}(P_\alpha/B)$, ce qui permet de conclure dans ce cas. \diamond

Ce lemme permet donc de savoir dans quelle situation on est suivant la position de la racine par rapport à $\varphi(v)$. Il ne reste alors qu'à vérifier que tout se passe comme dans le tableau 1.

Dans le cas complexe, il est facile de voir que α est de type U ou U^* . En effet, $s_\alpha\varphi(v)\theta(s_\alpha) \neq \varphi(v)$, et si on prend un représentant \dot{v} de v tel que $\tau(\dot{v}) \in N(T)$ et si n_α est un représentant de s_α dans $N(T)$, alors $n_\alpha\dot{v}$ est un point d'une autre orbite de B (car $\varphi(\tau(n_\alpha\dot{v})) = s_\alpha w\theta(s_\alpha)$) qui est dans $P_\alpha \mathcal{O}_v$.

Dans le cas imaginaire ou réel, tout se passe dans G_α . Si la racine est

imaginaire compacte (i.e. $G_\alpha^{\psi v} = G_\alpha$) alors on est dans le cas G . Sinon, prenons une racine imaginaire non compacte (i.e. telle que $G_\alpha^{\psi v} \neq G_\alpha$); on montre en effectuant les calculs dans $(P)SL_2$ que la situation est comme celle du tableau récapitulatif.

Remarque : la distinction entre racine imaginaire compacte et racine imaginaire non compacte dépend vraiment de v et pas uniquement de $\varphi(v)$, comme le montre l'exemple de SL_3/GL_2 ; c'est-à-dire que l'on prend $G = SL_3$ et $\theta = \text{Int}(\zeta)$ où ζ est la matrice :

$$\begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ O & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les involutions tordues sont les vraies involutions de W . Et le graphe $\Gamma(G/H)$ est représenté par la figure 2 ci-dessous. On a ajouté, à chaque sommet $v \in V$, l'élément $\varphi(v)$. On remarque qu'il y a trois orbites fermées

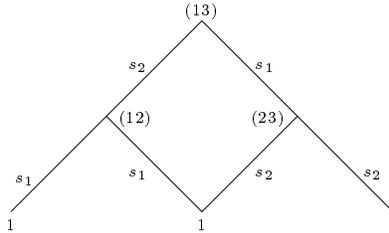


FIG. 2 – Graphe de SL_3/GL_2

(pour lesquelles on a $\varphi(v) = 1$). Pourtant celle du milieu possède deux racines simples imaginaires non compactes, alors que celle de gauche possède une racine simple imaginaire compacte (s_2), et une non compacte, et que celle de droite possède elle aussi une racine simple imaginaire compacte (s_1), et une imaginaire non compacte.

Un corollaire, du tableau précédent et de la décomposition de Springer est le suivant (c'est le corollaire 6.6 de [Spr85]) :

Corollaire 3.1 *Soit $v \in V$, alors \mathcal{O}_v est fermée si et seulement si $\varphi(v) = 1$. Les orbites minimales pour l'ordre faible sont les orbites fermées.*

Preuve : Soit v tel que \mathcal{O}_v soit minimale. On considère une décomposition de Springer : $\varphi(v) = w'w_\Pi^\circ\theta w'^{-1}$. D'après le tableau 1, v est minimale si et seulement si $C'(v) = R(v) = \emptyset$. Or d'après la proposition 2.2, $C'(v) = \Phi_w^+ \amalg (-\varphi(v)\theta(\Phi_w^+))$, donc si v est minimale alors $w' = 1$. Dans ce cas, on a

(toujours par la proposition 2.2), $R(v) = \Phi_{\Pi}^+$, si bien que, si v est minimale, alors $\Pi = 1$ et finalement $\varphi(v) = 1$.

D'autre part, si $\varphi(v) = 1$ on choisit un représentant \dot{v} dans G de \mathcal{O}_v , de sorte que $\dot{v}\theta(\dot{v})^{-1} \in T$. Le sous-groupe $\dot{v}^{-1}B\dot{v}$ est stable par θ . Or si B_1 est un sous-groupe de Borel stable par θ alors B_1^θ contient un sous-groupe de Borel de H . En effet, B_1 contient un tore maximal T_1 , stable par θ , et le radical unipotent U_1 de B_1 est lui aussi stable par θ . De même, le sous-groupe de Borel B_1^- qui contient T_1 et opposé à B_1 , est stable par θ , et son radical unipotent U_1^- l'est aussi. Ainsi, avec la décomposition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{u}_1^-$ on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}_1^\theta \oplus \mathfrak{t}_1^\theta \oplus (\mathfrak{u}_1^-)^\theta$. Ce qui montre que B_1^θ contient un sous-groupe de Borel de H . Finalement, $\dot{v}^{-1}B\dot{v}H$ est fermé dans G . \diamond

3.4 Les fibres de l'application φ .

La description des fibres de l'application φ est importante pour décrire l'ensemble V . Ces fibres peuvent être très différentes suivant l'espace symétrique sur lequel on travaille. Par exemple pour SL_n/SO_n , φ est presque injective (les fibres ont au plus deux éléments), en revanche pour $SL_{p+q}/S(GL_p \times GL_q)$ la fibre au-dessus de 1 (i.e. l'ensemble des orbites fermées) est de cardinal $\frac{(p+q)!}{p!q!}$ (voir par exemple la proposition 8.3). La proposition suivante est intéressante pour la description des fibres de φ ([RS90, prop. 2.5]) :

Proposition 3.1 *Soit $v \in V$, alors le sous-groupe d'isotropie dans W (pour l'action tordue) de $\varphi(v)$ agit transitivement sur la fibre $\varphi^{-1}(\varphi(v))$.*

On va commencer par démontrer quelques lemmes :

Lemme 3.3 *Soit t un élément semi-simple de G tel que $\theta(t) = t^{-1}$, alors il existe un élément $g \in G$ tel que $\tau(g) = t$.*

Preuve : Tout élément semi-simple tel que $\theta(t) = t^{-1}$ appartient à un tore scindé non trivial T' . De plus, si T' est scindé alors $\tau_{|T'}$ est surjective (par le lemme 1.2). Ce qui démontre le lemme. \diamond

On note $Z(G)$ le centre de G .

Lemme 3.4 *Soit T' un tore maximal de G stable par θ . S'il existe $t \in T'$ tel que $\tau(T') \subset Z(G)$, alors T' est inclus dans un sous-groupe de Borel stable par θ .*

Preuve : On se ramène d'abord au cas où $Z(G)$ est trivial (quitte à faire le raisonnement dans $G/Z(G)$ et tout remonter après). Ainsi $t\tau(T') = \{1\}$ donc θ restreinte à T' est triviale, par suite T' est un tore maximal de $H = G^\theta$. Donc T' est inclus dans un sous-groupe de Borel stable par θ . \diamond

Lemme 3.5 *Si t est un élément d'un tore maximal θ -stable T_1 de G , tel qu'il existe $x \in G$ tel que $\tau(x) = t$, alors il existe $n \in N(T_1)$ tel que $\tau(n) = \tau(x) = t$.*

Preuve : La preuve se fait par récurrence sur la dimension de G . Supposons pour commencer que $T_1 \subset B_1$ avec B_1 un sous-groupe de Borel θ -stable. Alors on a $B_1 = T_1U_1$ avec T_1 et U_1 (le radical unipotent de B_1) qui sont θ -stables. On utilise alors la décomposition de Bruhat pour écrire $x = u_1nu'_1$. On a l'égalité :

$$x = u_1nu'_1 = t\theta(x) = (t\theta(u_1)t^{-1})(t\theta(y))(\theta(u'_1)).$$

Or U_1 est θ -stable et normalisé par T_1 , ainsi l'unicité de la décomposition de Bruhat donne $n = t\theta(n)$, i.e. $\tau(n) = t$.

Si T_1 n'est pas dans un sous-groupe de Borel stable par θ , alors d'après le lemme 3.4, on a $t\tau(T_1) \not\subseteq Z(G)$. Quitte à remplacer x par $t'x$ on peut supposer que t n'est pas un élément central. Comme $\theta(t) = t^{-1}$, le centralisateur K de t dans G est stable par θ . L'élément t est non central, donc K est de dimension strictement plus petite que celle de G . De plus, K contient bien évidemment T_1 comme tore maximal, et par le lemme 3.3 on peut trouver $y \in K$ tel que $t = \tau(y)$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à K . \diamond

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 3.1 :

Preuve : Soit v_1 et v_2 deux éléments de V tels que $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. On choisit alors des représentants x_1 et x_2 dans $\tau^{-1}(N(T))$. On a alors $\tau(x_1) = t\tau(x_2)$ avec $t \in T$. On pose alors $T' = x_2^{-1}Tx_2$, T' est un tore stable par θ , et $\tau(x_2^{-1}x_1) = x_2^{-1}tx_2 \in T'$. On peut donc appliquer le lemme 3.5, ce qui donne $n \in N(T)$ tel que $\tau(x_2^{-1}x_1) = x_2^{-1}nx_2$. Par suite, on a $\tau(x_1) = \tau(nx_2)$, c'est-à-dire, en posant $w = nT$, $v_1 = w.v_2$. \diamond

Par conséquent, les fibres de φ sont déterminées par l'action de W sur V . On va obtenir un corollaire assez intéressant de cette proposition. Rappelons

que W agit sur V et sur l'image de l'application $\varphi : \text{Im}(\varphi)$. L'application φ est équivariante pour l'action de W , ainsi elle passe au quotient en une application

$$\bar{\varphi} : V/W \rightarrow \text{Im}(\varphi)/W.$$

Et on a le corollaire ([RS90, prop 2.7]) :

Corollaire 3.2 *L'application $\bar{\varphi} : V/W \rightarrow \text{Im}(\varphi)/W$ est un isomorphisme.*

3.5 Quelques invariants et remarques supplémentaires.

3.5.1 Les involutions scindées.

Dans le cas où θ est une involution scindée, on peut décrire l'image de φ . Soit

$$\mathcal{I} = \{w \in W \mid w^2 = 1\},$$

l'ensemble des involutions de W . L'involution θ est scindée, par conséquent $w^\circ\theta$ (où w° est l'élément de plus grande longueur de W) agit comme $-\text{Id}$ sur les caractères de T . Par suite, l'action de θ sur W se fait par conjugaison par w° . Les involutions tordues sont donc de la forme σw° où σ est une involution de W . De plus, si w est une involution tordue, alors on écrit $w = \sigma w^\circ$, avec $\sigma \in \mathcal{I}$, on peut lire sur σ la position d'une racine par rapport à w par le lemme suivant.

Lemme 3.6 *Avec les notations ci-dessus on a*

- (i) $C'(\sigma w^\circ) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid s_\alpha \sigma > \sigma \text{ et } s_\alpha \sigma s_\alpha \neq \sigma\}$,
- (ii) $C''(\sigma w^\circ) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid s_\alpha \sigma < \sigma \text{ et } s_\alpha \sigma s_\alpha \neq \sigma\}$,
- (iii) $R(\sigma w^\circ) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid s_\alpha \sigma > \sigma \text{ et } s_\alpha \sigma s_\alpha = \sigma\}$,
- (iv) $I(\sigma w^\circ) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid s_\alpha \sigma < \sigma \text{ et } s_\alpha \sigma s_\alpha \neq \sigma\}$.

Preuve : En premier lieu, la multiplication par w° inverse l'ordre de Bruhat, par conséquent :

$$\sigma w^\circ < s_\alpha \sigma w^\circ \Leftrightarrow \sigma > s_\alpha \sigma.$$

De plus, l'action tordue est la conjugaison par w° , donc

$$s_\alpha \sigma w^\circ \theta(s_\alpha) = \sigma w^\circ \Leftrightarrow s_\alpha \sigma s_\alpha = \sigma.$$

Ainsi une racine α est complexe pour σw° si et seulement si s_α ne commute pas avec σ . De même α est imaginaire si et seulement si s_α commute avec σ , et $s_\alpha \sigma < \sigma$. Enfin α est réelle si et seulement si s_α commute avec σ , et $s_\alpha \sigma > \sigma$. \diamond

Proposition 3.2 *Si θ est scindée alors $\text{Im}(\varphi) = \mathcal{I}.w^\circ = \mathcal{I}_\theta$.*

Preuve : Soit $\sigma \in \mathcal{I}$. Montrons par récurrence sur la longueur de σ que $\sigma w^\circ \in \text{Im}\varphi$. Si $l(\sigma) = 1$, alors $\sigma w^\circ = w^\circ \in \text{Im}\varphi$. Supposons que pour toute involution σ telle que $l(\sigma) < k$, on ait $\sigma w^\circ \in \mathcal{I}_\theta$. Soit σ telle que $l(\sigma) = k$, soit α une racine simple telle que $s_\alpha \sigma < \sigma$. D'après le lemme 3.6, la racine α est imaginaire pour σw° (respectivement dans $C''(\sigma w^\circ)$) si et seulement si $s_\alpha \sigma = \sigma s_\alpha$ (respectivement $s_\alpha \sigma s_\alpha \neq \sigma$). Si α est imaginaire (pour σw°) alors $s_\alpha \sigma$ est une involution. Par hypothèse de récurrence, il existe $v \in V$ tel que $\varphi(v) = s_\alpha \sigma w^\circ$. Dans ce cas, α est une racine réelle pour v , et le tableau 1 montre que $s_\alpha w^\circ \in \text{Im}\varphi$. De même, si $\alpha \in C'''(\sigma w^\circ)$ alors $s_\alpha \sigma s_\alpha$ est une involution telle que $l(s_\alpha \sigma s_\alpha) < l(\sigma)$. Par hypothèse de récurrence, il existe $v \in V$ tel que $\varphi(v) = s_\alpha \sigma s_\alpha w^\circ$. Ainsi α appartient à $C'(v)$ et le tableau 1 permet de conclure. \diamond

3.5.2 Calcul du rang d'une orbite dans G/H .

Soit \mathcal{O}_v une orbite de B dans G/H . Le groupe B agit sur le corps $\mathbb{C}(\mathcal{O}_v)$ des fonctions rationnelles sur \mathcal{O}_v . On note $\mathbb{C}(\mathcal{O}_v)^{(B)}$ l'ensemble des fonctions rationnelles propres pour l'action de B . On note $\Xi(B)$ le groupe des caractères de B . On a l'application

$$\rho : \mathbb{C}(\mathcal{O}_v)^{(B)} \rightarrow \Xi(B)$$

qui à une fonction rationnelle vecteur propre de B associe son poids pour l'action de B . L'application ρ est un morphisme de groupes de noyau \mathbb{C}^* . Soit \dot{v} un représentant de \mathcal{O}_v , alors $\mathbb{C}(B\dot{v})^{(B)}$ s'identifie à $\mathbb{C}(B/B_{\dot{v}})^{(B)}$, et l'image de ρ est donc incluse dans l'ensemble $\Xi(B)^{B_{\dot{v}}}$ des caractères de B , invariants par $B_{\dot{v}}$. Réciproquement, si χ est un tel caractère alors on peut définir la fonction $f(b \cdot v) = \chi(b^{-1})$ qui est une fonction régulière sur \mathcal{O}_v vecteur propre de B de poids χ .

Définition 3 *On appellera le rang de \mathcal{O}_v le rang du groupe $\Xi(B)^{B_{\dot{v}}}$.*

On va calculer ce rang à l'aide d'un peu de combinatoire et d'une décomposition de Springer de $\varphi(v)$. On choisit \dot{v} tel que $n_{\dot{v}} = \dot{v}\theta(\dot{v})^{-1}$ soit dans $N(T)$. On a alors défini le morphisme $\psi_{\dot{v}} = \text{Int}(n_{\dot{v}}) \circ \theta$. Si Γ est un sous-groupe de G on notera $\Gamma^{\psi_{\dot{v}}}$ le sous-groupe des points fixes de $\psi_{\dot{v}}$ dans Γ . L'isotropie de \dot{v} pour l'action de B dans G/H est $B^{\psi_{\dot{v}}}$. Le groupe B est stable par θ et T est stable par $\psi_{\dot{v}}$, donc $B \cap \psi_{\dot{v}}(B) = T(U \cap n_{\dot{v}} U n_{\dot{v}}^{-1})$. On en déduit que

$B^{\psi_v} = T^{\psi_v} U_v^\psi$. Cela permet d'identifier $\Xi(B)^{B_v}$ avec le groupe des caractères $\Xi(T/T^{\psi_v})$. On a alors le lemme :

Lemme 3.7 *Le rang de v ne dépend que de $\varphi(v)$.*

Preuve : D'après ce que l'on vient de voir, le rang de v est le rang du groupe $\Xi(T/T^{\psi_v})$. Or $T^{\psi_v} = T^{\varphi(v)\theta}$. \diamond

On peut encore préciser le rang en fonction d'une décomposition de Springer $\varphi(v) = ww_\Pi^\circ\theta(w)^{-1}$. En effet, $T^{\varphi(v)\theta} = wT^{w_\Pi^\circ\theta}$, donc le rang de v ne dépend que de w_Π° . Il reste à exprimer ce rang en fonction de Π . Pour cela on introduit le sous-groupe parabolique P_Π de G qui contient B et de type Π . Soit L_Π le sous-groupe de Levi de P_Π qui contient T . On peut alors définir C_Π le centre de L_Π , DL_Π le sous-groupe dérivé de L_Π , et $T_\Pi = T \cap DL_\Pi$ qui est un tore maximal de DL_Π . Le rang de v est déterminé par la proposition suivante.

Proposition 3.3 *Avec les notations ci-dessus le rang de v est*

$$\text{rg}(G) - \text{rg}(H) + \dim(T_\Pi^{-w_\Pi^\circ})$$

Preuve : On remarque que le rang du groupe de caractères de $T/T^{w_\Pi^\circ\theta}$ est la dimension de $T^{-w_\Pi^\circ\theta}$. On calcule cette dimension. Le tore T se décompose en $T = C_\Pi T_\Pi$, avec T_Π et C_Π stables par $w_\Pi^\circ\theta$, donc

$$T^{-w_\Pi^\circ\theta} = C_\Pi^{-w_\Pi^\circ\theta} T_\Pi^{-w_\Pi^\circ\theta}.$$

L'involution $w_\Pi^\circ\theta$ agit par $-\text{Id}$ sur les racines de Π , par conséquent

$$\dim(T_\Pi^{-w_\Pi^\circ\theta}) = \sharp\Pi.$$

D'autre part, w_Π° agit trivialement sur C_Π , donc $C_\Pi^{-w_\Pi^\circ\theta} = C_\Pi^{-\theta}$. De plus, $\dim(C_\Pi) = \text{rg}(G) - \sharp\Pi$. On obtient

$$\dim(C_\Pi^{-\theta}) = \text{rg}(G) - \sharp\Pi - \dim(C_\Pi^\theta).$$

Enfin, T est un tore inclus dans un sous-groupe de Borel stable par θ , donc T^θ est un tore maximal de H . Le système Π est stable par θ , donc

$$\text{rg}(H) = \dim(C_\Pi^\theta) + \dim(T_\Pi^\theta).$$

Ainsi en utilisant une fois de plus que $w_\Pi^\circ\theta|_\Pi = -\text{Id}$, on obtient :

$$\dim(T^{-w_\Pi^\circ\theta}) = \text{rg}(G) - \text{rg}(H) - \dim(T_\Pi^{-w_\Pi^\circ}).$$

\diamond

3.6 Ordre de Bruhat dans les espaces symétriques.

3.6.1 Ordre faible et ordre fort.

Sur l'ensemble V des orbites de B dans un espace homogène sphérique G/H , on a défini un ordre faible et un ordre fort. L'ordre fort ou ordre de Bruhat est défini par la relation d'inclusion des adhérences d'orbites : $v \leq v'$ si $\overline{\mathcal{O}_v} \subset \overline{\mathcal{O}_{v'}}$. L'ordre faible est celui induit par les paraboliques minimaux définis en 3.2 ($v \preceq v'$ s'il existe w dans W tel que v' soit montée sur v par w). On a la propriété (qui justifie les appellations "faible" et "fort")

$$v \preceq v' \Rightarrow v \leq v'.$$

En effet, on choisit w qui monte v' sur v et une décomposition réduite $w = s_{\alpha_l} \cdots s_{\alpha_1}$. On a

$$P_{\alpha_l} \cdots P_{\alpha_1} \overline{\mathcal{O}_{v'}} = \overline{\mathcal{O}_v},$$

donc $v' \leq v$.

S'il existe une orbite fermée v_0 et w dans W tels que w monte v_0 sur v , alors on peut lire sur le graphe $\Gamma(G/H)$ (qui représente l'ordre faible) l'adhérence de \mathcal{O}_v . En effet, en écrivant encore une fois w sous forme réduite : $w = s_{\alpha_l} \cdots s_{\alpha_1}$, la suite de paraboliques minimaux $P_{\alpha_l}, \dots, P_{\alpha_1}$ est telle que

$$\overline{\mathcal{O}_v} = P_{\alpha_l} \cdots P_{\alpha_1} \mathcal{O}_{v_0}.$$

Avec les résultats de la section 3.3, la combinatoire de $\Gamma(G/H)$ permet de déterminer complètement les éléments v' de V tels que $v' \leq v$. Dans les espaces symétriques, on a vu que toute orbite minimale pour l'ordre faible est fermée (corollaire 3.1). Pour toute orbite v , on peut donc trouver w et v_0 tels que w monte v_0 sur v . Cela démontre la proposition suivante.

Proposition 3.4 *Pour un espace symétrique G/H , le graphe $\Gamma(G/H)$ détermine complètement l'ordre de Bruhat.*

3.6.2 Ordre de Bruhat et décomposition de Springer.

En utilisant la décomposition de Springer, on va décrire de plus près l'ordre de Bruhat.

Soit $v \in V$, et soit $\varphi(v) = w w_{\Pi}^{\circ} \theta(w)^{-1}$ une décomposition de Springer. On pose $w^{-1} \cdot v = v_{\Pi}$ (pour l'action de W sur V définie dans la section 2.1) de sorte que $\varphi(v_{\Pi}) = w_{\Pi}^{\circ}$. Soit $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_l}$ une décomposition réduite de

w . D'après la proposition 2.1 et la description de l'action des paraboliques minimaux du tableau 1, w monte v_{Π} sur v . Donc on a :

$$\overline{\mathcal{O}}_v = P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_l} \overline{\mathcal{O}}_{v_{\Pi}}.$$

Par la suite, on va s'intéresser particulièrement aux diviseurs premiers stables par B de $\overline{\mathcal{O}}_v$. Soit D un tel diviseur, alors D est de l'un des deux types suivants.

(i) Soit D provient de l'effaçage de l'un des P_{α_i} : $D = P_{\alpha_1} \cdots \check{P}_{\alpha_i} \cdots P_{\alpha_l} \overline{\mathcal{O}}_{v_{\Pi}}$. Dans ce cas, pour que D soit un diviseur de $\overline{\mathcal{O}}_v$, on doit avoir

$$w' = s_{\alpha_1} \cdots s_{\check{\alpha}_i} \cdots s_{\alpha_l}$$

est une écriture réduite, et w' monte v_{Π} .

(ii) Soit D provient d'un diviseur premier D' stable par B dans $\overline{\mathcal{O}}_{v_{\Pi}}$, c'est-à-dire $D = P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_l} D'$. Dans ce cas, si on note v' l'orbite ouverte de B dans D' on doit avoir que w monte v' .

On peut décrire plus précisément v_{Π} . Soit P_{Π} le sous-groupe parabolique de G qui contient B et qui est de type Π . On choisit un représentant v_{Π} dans $\tau^{-1}(N(T))$. Alors $P = v_{\Pi}^{-1} P_{\Pi} v_{\Pi}$ est un sous-groupe parabolique de G stable par θ . Ainsi, comme dans la preuve de 3.1, l'orbite $P_{\Pi} v_{\Pi}$ est fermée dans G/H . De plus, d'après la proposition 2.2 et le tableau 1, si α est une racine de Π alors s_{α} descend v_{Π} . Donc v_{Π} est l'orbite ouverte de B dans $P_{\Pi} v_{\Pi}$. On a donc la proposition suivante (c'est le lemme 6.3 de [Spr85]) :

Proposition 3.5 *Avec les notations ci-dessus :*

$$\overline{\mathcal{O}}_{v_{\Pi}} = P_{\Pi} v_{\Pi}.$$

Ainsi que son corollaire immédiat :

Corollaire 3.3 *Si $\varphi(v_{\Pi}) = w_{\Pi}^{\circ}$ alors $\overline{\mathcal{O}}_{v_{\Pi}}$ est lisse.*

Preuve : D'après la proposition précédente, $\overline{\mathcal{O}}_{v_{\Pi}}$ est homogène sous P_{Π} donc lisse. \diamond

Enfin w monte v_{Π} sur v uniquement par des arêtes de type U . Ainsi en imitant la construction des désingularisations de Bott-Samelson des variétés de Schubert (voir par exemple Demazure [Dem74]), on définit l'application :

$$F_{\alpha_1, \dots, \alpha_l, v_{\Pi}} : P_{\alpha_1} \times_B \cdots P_{\alpha_l} \times_B \overline{\mathcal{O}}_{v_{\Pi}} \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_v$$

induite par le produit. Et on a la proposition

Proposition 3.6 *L'application*

$$F_{\alpha_1, \dots, \alpha_l, v_{\Pi}} : P_{\alpha_1} \times_B \dots P_{\alpha_l} \times_B \overline{\mathcal{O}_{v_{\Pi}}} \rightarrow \overline{\mathcal{O}_v}$$

est une désingularisation de $\overline{\mathcal{O}_v}$.

Preuve : La variété $P_{\alpha_1} \times_B \dots P_{\alpha_l} \times_B \overline{\mathcal{O}_{v_{\Pi}}}$ est lisse. En effet, l'application

$$P_{\alpha_1} \times_B \dots P_{\alpha_l} \times_B \overline{\mathcal{O}_{v_{\Pi}}} \rightarrow P_{\alpha_1} \times_B \dots P_{\alpha_l} / B$$

est une fibration de fibre $\overline{\mathcal{O}_{v_{\Pi}}}$. De plus, $P_{\alpha_1} \times_B \dots P_{\alpha_l} / B$ peut se décomposer en une suite de fibrations de fibre $\mathbb{P}^1 = P_{\alpha_i} / B$, par conséquent c'est une variété lisse (c'est une désingularisation de la variété de Schubert $\overline{BwB/B}$). Enfin l'application $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_l, v_{\Pi}}$ est birationnelle, car toutes les racines sont de type U . \diamond

4 Slices dans les espaces symétriques.

4.1 Définitions.

On reprend la définition de slice de l'article Mars et Springer [MS98] (dans l'esprit de [Bri99a]). Soit X une variété irréductible, Γ un groupe algébrique affine qui agit sur X , on appellera *slice* en un point $x \in X$ à l'orbite $\Gamma.x$ de Γ une sous-variété affine localement fermée $S \subset X$ telle que :

- (i) x soit un point isolé de $S \cap \Gamma.x$.
- (ii) S soit stable par un tore maximal T_x du sous-groupe d'isotropie Γ_x .
- (iii) l'application

$$\begin{aligned} \kappa : \Gamma \times S &\rightarrow X \\ (g, s) &\mapsto g.s \end{aligned}$$

est lisse au point $(1, x)$.

On dira que de plus le slice est *attractif* si x est un point attractif pour l'action de T_x dans S , c'est-à-dire : il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow T_x$ tel que

$$\forall s \in S : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)s = x.$$

Nous allons montrer, comme esquissé dans la section 6.4 de l'article de Mars et Springer [MS98], que dans le cadre symétrique il existe toujours

des slices attractifs aux orbites de B dans G/G^θ , ou encore aux orbites de G^θ dans G/B . De plus, on décrira plus en détail le tore qui agit sur ces slices, et parfois des sous-groupes un peu plus gros que des tores (mais non nécessairement connexes). Enfin, on va aussi construire des slices attractifs aux orbites fermées de G^θ dans G/P où P est un parabolique de G . Dans ce cas, un groupe réductif a priori plus important qu'un tore peut agir dans ces slices. C'est ce que l'on verra dans la proposition 4.4.

Remarque : Si S est attractif, alors l'application κ est lisse en tout point de $\Gamma \times S$. En particulier, comme une application lisse est ouverte, on a $\kappa(\Gamma \times S)$ est un ouvert de X . Si, de plus, Γ est connexe et n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X , alors l'image de κ est un ouvert stable par Γ que l'on peut caractériser par la proposition suivante :

Proposition 4.1 *L'ouvert $\kappa(\Gamma \times S)$ est aussi l'ouvert*

$$\Omega = \{x' \in X \mid \overline{\Gamma \cdot x'} \supset \Gamma \cdot x\}$$

Preuve : Le groupe Γ n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X , donc le complémentaire de Ω dans X est une réunion finie d'adhérences d'orbites. Le complémentaire est donc un fermé Γ -stable, i.e. Ω est ouvert. Le slice S est attractif, soit λ un sous-groupe à un paramètre de T_x qui "contracte" S . Si s appartient à S alors $x \in \overline{\lambda(\mathbb{C}^*)s}$, donc $\overline{\Gamma \cdot s} \supset \Gamma \cdot x$. On a donc une première inclusion :

$$\kappa(\Gamma \times S) \subset \Omega.$$

Soit Ω' le plus petit ouvert de X , stable par Γ et contenant x . Si $\Omega' \subsetneq \Omega$, on choisit $y \in \Omega \setminus \Omega'$. Les ouverts Ω et Ω' sont stables par Γ , donc $\Gamma \cdot y \subset \Omega \setminus \Omega'$. Par définition de Ω , x appartient à l'adhérence de $\Gamma \cdot y$, donc $\overline{\Gamma \cdot y}$ rencontre Ω' suivant un ouvert non vide de $\overline{\Gamma \cdot y}$. Le groupe Γ est connexe, donc $\overline{\Gamma \cdot y}$ est irréductible. Enfin une orbite est ouverte dans son adhérence, ainsi $\Gamma \cdot y$ intersecte $\overline{\Gamma \cdot y} \cap \Omega'$ car ce sont deux ouverts d'une variété irréductible. C'est exclu car $y \in \Omega \setminus \Omega'$, donc $\Omega = \Omega'$. L'ouvert $\kappa(\Gamma \times S)$ est un ouvert stable par Γ qui contient x , donc

$$\Omega \subset \kappa(\Gamma \times S).$$

◇

Un des intérêts de ces slices est que l'on peut lire dans ces derniers les singularités des adhérences d'orbites le long de $\Gamma \cdot x$.

4.2 Rappels et compléments sur la paramétrisation des orbites.

On considère toujours un groupe réductif connexe G avec une involution θ de G , le sous-groupe des points fixes $H = G^\theta$, ainsi qu'une paire standard (T, B) . On cherche des slices aux B -orbites dans G/H . Soit $v \in V = B \backslash G/H$, on choisit un représentant \dot{v} de v tel que $n_{\dot{v}} = \dot{v}\theta(\dot{v})^{-1}$ appartienne à $N(T)$. On a alors défini l'involution de G :

$$\psi_{\dot{v}} = \text{Int}(n_{\dot{v}}) \circ \theta.$$

On a aussi vu dans la section 3.5.2 que l'isotropie de \dot{v} pour l'action de B dans G/H est $B^{\psi_{\dot{v}}}$ qui se décompose en

$$B^{\psi_{\dot{v}}} = T^{\psi_{\dot{v}}}(U \cap \psi_{\dot{v}}(U))^{\psi_{\dot{v}}},$$

où $(U \cap \psi_{\dot{v}}(U))^{\psi_{\dot{v}}}$ est un sous-groupe unipotent (connexe). Ainsi le sous-groupe $T^{\psi_{\dot{v}}}$ est le stabilisateur dans T du point \dot{v} et contient un tore maximal de l'isotropie de \dot{v} . Le groupe $T^{\psi_{\dot{v}}}$ peut ne pas être connexe, on notera $(T^{\psi_{\dot{v}}})^\circ$ la composante connexe de 1 dans $T^{\psi_{\dot{v}}}$: $(T^{\psi_{\dot{v}}})^\circ$ est un tore maximal de l'isotropie de \dot{v} .

L'involution $\psi_{\dot{v}}$ agit sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G , et laisse stable l'algèbre de Lie \mathfrak{t} du tore, donc $\psi_{\dot{v}}$ agit aussi sur les racines. Cette action donne la décomposition des racines positives comme dans la section 2.3.1 :

$$\Phi^+ = I(\varphi(v)) \cup R(\varphi(v)) \cup C'(\varphi(v)) \cup C''(\varphi(v)).$$

Le sous-ensemble $I(\varphi(v))$ se décompose lui même en deux sous-ensembles : les racines compactes imaginaires, $I_c(\varphi(v))$ et les racines non compactes imaginaires, $I_n(\varphi(v))$. Enfin, l'ensemble $C''(\varphi(v))$ est stable par $\psi_{\dot{v}}$, on peut donc le décomposer en deux sous-ensembles disjoints

$$C''(\varphi(v)) = C''_1(\varphi(v)) \amalg \psi_{\dot{v}}(C''_1(\varphi(v))).$$

Avec ces choix on obtient la décomposition de \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = & \bigoplus_{\alpha \in \pm I_c(\varphi(v))} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \pm I_n(\varphi(v))} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in R(\varphi(v))} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \\ & \oplus \bigoplus_{\alpha \in C'(\varphi(v))} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\psi_{\dot{v}}(\alpha)}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \pm C''_1(\varphi(v))} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\psi_{\dot{v}}(\alpha)}) \oplus \mathfrak{t}^{\psi_{\dot{v}}} \oplus \mathfrak{t}^{-\psi_{\dot{v}}} \end{aligned}$$

On peut encore préciser cette décomposition en choisissant une base de \mathfrak{g} comme dans [Spr85] de la manière suivante :

- si $\alpha \in R(\varphi(v))$: $\psi_{\dot{v}}(\alpha) = -\alpha$ et on peut choisir $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ non nuls tels que $\psi_{\dot{v}}(X_\alpha) = X_{-\alpha}$.
- si $\alpha \in I_c(\varphi(v))$ alors \mathfrak{g}_α est un sous-espace propre de $\psi_{\dot{v}}$ pour la valeur propre 1. On peut choisir n'importe quel $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ non nul, il vérifiera $\psi_{\dot{v}}(X_\alpha) = X_\alpha$.
- si $\alpha \in I_n(\varphi(v))$ alors \mathfrak{g}_α est un sous-espace propre de $\psi_{\dot{v}}$ pour la valeur propre -1 . On peut choisir n'importe quel $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ non nul, il vérifiera $\psi_{\dot{v}}(X_\alpha) = -X_\alpha$.
- si $\alpha \in C(\varphi(v))$ alors on prend $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $X_{\psi_{\dot{v}}(\alpha)} = \psi_{\dot{v}}(X_\alpha) \in \mathfrak{g}_{\psi_{\dot{v}}(\alpha)}$, de sorte que $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\psi_{\dot{v}}(\alpha)} = \mathbb{C}(X_\alpha + X_{\psi_{\dot{v}}(\alpha)}) \oplus \mathbb{C}(X_\alpha - X_{\psi_{\dot{v}}(\alpha)})$ est la décomposition en sous-espaces propres pour $\psi_{\dot{v}}$.

4.3 Slices aux orbites d'un sous-groupe de Borel.

On utilise les notations de la section précédente pour construire un slice en \dot{v} à la l'orbite $B\dot{v}$ dans G/H . Pour cela, on utilise la décomposition de \mathfrak{g} donnée dans la section 4.2. C'est-à-dire celle qui tient compte à la fois de B (à travers le système de racines positives) et de l'isotropie du point \dot{v} (à travers l'action de $\psi_{\dot{v}}$ sur \mathfrak{g}).

Proposition 4.2 *L'application*

$$\kappa : B \times (U^- \cap \psi_{\dot{v}}(U^-))\dot{v} \rightarrow G/H$$

est un slice attractif.

Remarque : L'orbite de \dot{v} par $U^- \cap \psi_{\dot{v}}(U^-)$ est isomorphe au quotient : $(U^- \cap \psi_{\dot{v}}(U^-))/(U^-)^{\psi_{\dot{v}}}$. D'après le lemme 1.1, ce quotient s'identifie à $(U^- \cap \psi_{\dot{v}}(U^-))^{-\psi_{\dot{v}}}$. Ces identifications se font en tant que variétés avec action de $T^{\psi_{\dot{v}}}$. Enfin, $(U^- \cap \psi_{\dot{v}}(U^-))^{-\psi_{\dot{v}}}$ est un espace affine avec action linéaire de $T^{\psi_{\dot{v}}}$.

Preuve (de la proposition 4.2) : On commence par montrer que l'application κ est lisse en $(1, \dot{v})$, ou encore que sa différentielle en $(1, \dot{v})$ est surjective. L'application κ s'identifie à :

$$\tilde{\kappa} : B \times (U^- \cap \psi_{\dot{v}}(U^-))/(U^-)^{\psi_{\dot{v}}} \rightarrow G/G^{\psi_{\dot{v}}}$$

où $\tilde{\kappa}$ est l'application induite par la multiplication dans G . On va montrer que cette application est lisse en $(1, 1)$. Calculons les espaces tangents à ces trois variétés en 1. L'espace tangent de $G/G^{\psi_{\dot{v}}}$ en 1 s'identifie avec le quotient de \mathfrak{g} par $\mathfrak{g}^{\psi_{\dot{v}}}$. L'espace tangent de B en 1 est

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

Enfin l'espace tangent de $(U^- \cap \psi_{\dot{v}}(U^-))/(U^-)^{\psi_{\dot{v}}}$ s'identifie avec $(\mathfrak{u}^-)^{-\psi_{\dot{v}}}$, le sous-espace propre de $\mathfrak{u} \cap \psi_{\dot{v}}(\mathfrak{u}^-)$ pour la valeur propre -1 . Avec la décomposition de \mathfrak{g} donnée dans la section 4.2 et la base choisie dans cette même section on a

$$(\mathfrak{u}^-)^{-\psi_{\dot{v}}} = \bigoplus_{\alpha \in C_1''(\varphi(v))} \mathbb{C}(X_{-\alpha} - X_{\psi_{\dot{v}}(\alpha)}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in I_n(\varphi(v))} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Il suffit donc de montrer que l'application "addition" :

$$\begin{aligned} \text{Add} : \mathfrak{b} \times (\mathfrak{u}^-)^{-\psi_{\dot{v}}} \times \mathfrak{g}^{\psi_{\dot{v}}} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (b, u, h) &\mapsto b + u + h \end{aligned}$$

est surjective. L'algèbre de Lie \mathfrak{b} est dans l'image de *Add*, il suffit donc de montrer que pour toute racine $\alpha < 0$, X_{α} est dans l'image de *Add*. Soit α une racine négative.

- Si $-\alpha \in I_c(\varphi(v))$ alors $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\psi_{\dot{v}}}$, donc X_{α} est dans l'image de *Add*.
- Si $-\alpha \in I_n(\varphi(v))$ alors $X_{\alpha} \in (\mathfrak{u}^-)^{-\psi_{\dot{v}}}$, donc X_{α} est dans l'image de *Add*.
- Si $-\alpha \in R(\varphi(v))$ alors $X_{-\alpha} \in \mathfrak{b}$ et $X_{\alpha} + X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{\psi_{\dot{v}}}$, donc X_{α} est dans l'image de *Add*.
- Si $-\alpha \in C'(\varphi(v))$ alors $\psi_{\dot{v}}(\alpha) \in \Phi^+$ donc $X_{\psi_{\dot{v}}(\alpha)} \in \mathfrak{b}$ et $X_{\alpha} + X_{\psi_{\dot{v}}(\alpha)} \in \mathfrak{g}^{\psi_{\dot{v}}}$, donc X_{α} est dans l'image de *Add*.
- Si $-\alpha \in C'''(\varphi(v))$ alors $X_{\alpha} - X_{-\psi_{\dot{v}}(\alpha)} \in (\mathfrak{u}^-)^{-\psi_{\dot{v}}}$ et $X_{\alpha} - X_{-\psi_{\dot{v}}(\alpha)} \in \mathfrak{g}^{\psi_{\dot{v}}}$, donc X_{α} est dans l'image de *Add*.

Ainsi, l'application κ est lisse au point $(1, x)$. De plus, \dot{v} est un point isolé de $B\dot{v} \cap S$, et le tore $(T^{\psi_{\dot{v}}})^{\circ}$ est un tore maximal de l'isotropie de \dot{v} qui agit sur S . Ainsi S est un slice.

Il reste à montrer que S est attractif. Soit $\Xi((T^{\psi_{\dot{v}}})^{\circ})$ le groupe des caractères de $(T^{\psi_{\dot{v}}})^{\circ}$. On choisit sur $E = \Xi(T) \otimes \mathbb{Q}$ un produit scalaire noté $(,)$, invariant par W et θ . Le slice S est attractif si, et seulement si, l'ensemble $\chi(S)$ des poids de $(T^{\psi_{\dot{v}}})^{\circ}$ dans S , est inclus dans un demi-espace ouvert de $\Xi((T^{\psi_{\dot{v}}})^{\circ}) \otimes \mathbb{Q}$. Ce qui est encore équivalent à l'existence d'un caractère γ de $(T^{\psi_{\dot{v}}})^{\circ}$ tel que pour tout poids δ appartenant à $\chi(S)$, on ait $(\gamma, \delta) < 0$. On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ \delta &\mapsto \frac{1}{2}(\delta + \psi_{\dot{v}}(\delta)). \end{aligned}$$

L'espace vectoriel $\Xi((T^{\psi_{\dot{v}}})^{\circ}) \otimes \mathbb{Q}$ s'identifie à l'image de l'application f . L'image de f est le sous-espace propre de $\psi_{\dot{v}}$, pour la valeur propre 1. De

plus, la restriction d'un caractère δ de T à $(T^{\psi_v})^\circ$ est $f(\delta)$. Les poids de l'action de $(T^{\psi_v})^\circ$ dans S sont donc inclus dans l'image par f de l'ensemble des poids de l'action de T dans $U^- \cap \psi_v(U^-)$. Or l'ensemble des poids de T dans $U^- \cap \psi_v(U^-)$ est $-I(\varphi(v)) \cup -C''(\varphi(v))$. Ainsi on obtient

$$\chi(S) \subset f(-I(\varphi(v)) \cup -C''(\varphi(v))).$$

Soit δ un caractère de T tel que :

$$\forall \alpha \in I(\varphi(v)) \cup C''(\varphi(v)), (\delta, \alpha) > 0.$$

Il existe un tel caractère car toutes ces racines sont positives. L'application ψ_v est orthogonale pour le produit scalaire, donc si $\alpha \in I(\varphi(v))$ alors $(\delta + \psi_v(\delta), -\alpha) = -2(\delta, \alpha) < 0$. De même, si $\alpha \in C''(\varphi(v))$ alors $\psi_v(\alpha) \in C''(\varphi(v))$ donc $(\delta + \psi_v(\delta), -\alpha) < 0$. Finalement, $f(\delta) = \delta + \psi_v(\delta)$ est un caractère de $(T^{\psi_v})^\circ$ ce qui montre que S est attractif. \diamond

Remarque : Il arrive que l'action linéaire du tore $(T^{\psi_v})^\circ$ dans S ait des sous-espaces propres de grande multiplicité. Par exemple, dans SL_n/SO_n , pour une orbite correspondant à (i, j) dans la paramétrisation de la section 1.4, $(T^{\psi_v})^\circ$ est de dimension 1. Il est défini par $t_i = t_j^{-1}$ et $t_k = 1$ pour $k \neq i, j$. Le slice S est de dimension $|j - i|$ et les poids de $(T^{\psi_v})^\circ$ dans S sont tous 1, sauf dans une direction où on a un poids 2 (la direction qui correspond à la racine imaginaire (i, j)).

4.4 Une autre façon de voir ces slices, et quelques remarques supplémentaires.

4.4.1 À propos des singularités des adhérences d'orbites.

Pour étudier les singularités des adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel dans un espace symétrique, on peut aussi étudier les adhérences d'orbite de $B \times H$ dans G ou encore celles de H dans G/B . En effet, on a les deux fibrations :

$$\begin{aligned} \pi_H : G &\rightarrow G/H \\ \pi_B : G &\rightarrow B \backslash G. \end{aligned}$$

Ainsi une sous-variété $Y_{G/H}$ stable par B dans G/H donne une sous-variété $Y_G = \pi_H^{-1}(Y_{G/H})$ stable par $B \times H$ dans G . Et Y_G donne une sous-variété $Y_{B \backslash G} = \pi_B(Y_G)$ stable par H dans $B \backslash G$. La restriction de π_H (respectivement π_B) à Y_G est une fibration de fibre lisse H (respectivement B).

4.4.2 Les slices dans G/B .

Maintenant que l'on a construit des slices aux orbites de B dans G/H , on a, par passage à l'inverse, des slices aux orbites de H dans $B \backslash G$. Une manière peut-être plus agréable de voir ces slices est de les regarder en quelque sorte comme des restrictions des slices aux G -orbites dans $G/B \times G/B$.

Toujours avec le choix d'un sous-groupe de Borel stable par θ on peut envoyer G/B dans $G/B \times G/B$ (comme dans 2.1) par l'application induite par θ :

$$\begin{aligned} \varphi' : G/B &\rightarrow G/B \times G/B \\ gB &\mapsto (gB, \theta(g)B). \end{aligned}$$

Par cette application, les orbites de H dans G/B sont envoyées dans les orbites de G (agissant diagonalement) dans $G/B \times G/B$. De plus, on a un slice aux orbites de G donné par la décomposition de Bruhat. En effet, soit $(x, y) \in G \times G$ tel que $x^{-1}y \in N(T)$, alors on pose $x^{-1}yT \in N(T)/T = W$. Soit $\Sigma = U^- \cap w(U^-)$. On injecte Σ dans $G/B \times G/B$ par l'application

$$\begin{aligned} \Sigma &\hookrightarrow G/B \times G/B \\ u &\mapsto (u, u^{-1}). \end{aligned}$$

Proposition 4.3 *L'application*

$$G \times (x^{-1}, y^{-1})\Sigma \rightarrow G/B \times G/B$$

est un slice en $(x^{-1}B, y^{-1}B)$ à $G(x^{-1}B, y^{-1}B)$

Preuve C'est un corollaire immédiat du résultat sur le slice dans les espaces symétriques appliqué à $G \times G$ pour l'involution qui échange les deux facteurs.

◇

Le slice défini en 4.2 à une orbite de H dans G/B n'est autre que l'ensemble des points de Σ "anti-invariants" pour l'action de ψ_v . C'est-à-dire que l'intersection du slice en (x^{-1}, y^{-1}) à $G(x^{-1}, y^{-1})$ avec $\varphi'(G/B)$ est le slice à la H orbite dans G/B définie précédemment.

Comme corollaire de cette façon de voir les slices on a :

Corollaire 4.1 *L'application φ est croissante pour l'ordre sur l'ensemble des involutions tordues induit par l'ordre de Bruhat.*

De plus, cette façon de voir ces slices sera utile, dans la section 6, car si on connaît bien le slice dans $G/B \times G/B$ on va pouvoir en déduire des propriétés du slice aux orbites de H .

4.5 Slices dans les grassmaniennes.

L'article de Barbasch et Evens [BE94] étudie les singularités des adhérences d'orbites de sous-groupes symétriques de SL_n dans les grassmaniennes. Ils montrent, en construisant des désingularisations explicites de ces adhérences d'orbites, qu'elles sont normales et à singularités rationnelles. On va ici retrouver ces résultats par une méthode différente, à l'aide de slices. Pour cela on commence par donner une description des slices aux orbites fermées de G^θ dans un espace homogène G/P , où P est un sous-groupe parabolique de G .

Proposition 4.4 *Soit P un sous-groupe parabolique contenant un sous-groupe de Borel stable par θ . Alors un slice en P/P à la G^θ -orbite $G^\theta P/P$ est donné par $R_u(P^-) \cap \theta(R_u(P^-))/(R_u(P^-))^\theta = R_u(P^-) \cap \theta(R_u(P^-))P/P$ qui s'identifie encore, par le lemme 1.1, à l'ensemble des anti-invariants par θ de $R_u(P^-)$.*

La preuve de cette proposition est la même que pour le cas d'un sous-groupe de Borel, il suffit de regarder ce qui se passe au niveau des algèbres de Lie au point P/P .

Remarque : On pourrait montrer un lemme un peu plus général pour calculer des slices à n'importe quelle orbite de G^θ dans G/P en utilisant des représentants "canoniques" de ces orbites définis dans [BH00] (qui sont essentiellement les représentants de l'unique orbite ouverte de B dans chaque orbite de P contenant B).

On a l'action de T^θ dans ces slices. Ici on a même un groupe réductif a priori plus grand que T^θ qui agit dans ces slices. En effet, soit L le sous-groupe de Levi de P qui contient T . Le groupe L^θ agit dans ce slice par conjugaison en préservant les orbites de H . Il se trouve que dans les grassmaniennes et pour une involution θ de SL_n , les orbites de L^θ dans le slice sont exactement les intersection des orbites de H avec le slice. Ce qui permettra de montrer que les adhérences d'orbites sont normales et à singularités rationnelles.

4.5.1 Orbites du groupe spécial orthogonal dans les grassmaniennes.

Commençons par décrire les orbites de SO_n dans les grassmaniennes. Pour cela on fixe une forme quadratique β , non dégénérée sur \mathbb{C}^n . Cette forme quadratique induit sur SL_n , comme dans la section 1.2.1, une involution θ , telle

que SO_n soit le sous-groupe des points fixes. On notera $Gr(k, n)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension k dans \mathbb{C}^n . La forme quadratique β induit une dualité entre les sous-espaces de dimension k et ceux de dimension $n - k$. Il suffit donc de décrire les orbites de SO_n dans $Gr(k, n)$ pour $k \leq n/2$.

Lemme 4.1 *Les orbites de SO_n dans $Gr(k, n)$ sont paramétrées par le rang de la restriction de β au sous-espace considéré, sauf si $k = n/2$; dans ce cas, on a deux orbites fermées qui correspondent aux deux types de sous-espaces totalement isotropes maximaux.*

Preuve : C'est un corollaire immédiat du théorème de Witt ([Bou59]). \diamond

On choisit une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{C}^n telle que dans cette base on ait

$$\beta = \sum_{i=1}^n x_i x_{n+1-i}.$$

Dans cette base, on identifie alors SL_n à l'ensemble des matrices $n \times n$ de déterminant 1. Le sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures est alors un sous-groupe de Borel de SL_n stable par θ . Le sous-groupe $T \subset B$ des matrices diagonales est un tore maximal de SL_n stable par θ . Pour $k \leq n/2$, on note

$$V_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \text{ et } V_{-k} = \text{Vect}(e_{n-k}, \dots, e_n).$$

Soit P_k le parabolique qui stabilise V_k . Pour tout k on a $B \subset P_k$, ainsi la proposition 4.4 s'applique et construit un slice

$$S_k = (R_u(P_k^-) \cap \theta(R_u(P_k^-)))^{-\theta}$$

en V_k à l'orbite $SO_n V_k$. Soit L_k le sous-groupe de Levi de P contenant T .

Proposition 4.5 *Le sous-groupe L_k^θ est isomorphe à $GL_k \times SO(2n - k)$. Le L_k^θ -module S_k est isomorphe à l'espace des formes quadratiques sur V_k , où SO_{n-2k} agit par l'identité, et GL_k agit par changement de base dans V_k .*

Preuve : Le sous-groupe de Levi L est

$$L = S(GL(V_k) \times GL(V_{-n+k})).$$

De plus on peut décomposer $V_{-n+k} = (V_k \oplus V_{-k})^{\perp\beta} \oplus V_{-k}$ ce qui donne

$$L = S(GL(V_k) \times GL((V_k \oplus V_{-k})^{\perp\beta} \oplus V_{-k})).$$

Et par suite $L \cap \theta(L) = S(GL(V_k) \times GL((V_k \oplus V_{-k})^{\perp\beta}) \times GL(V_{-k}))$. Le sous-groupe des points fixes de θ dans $GL(V_k) \times GL(V_{-k})$ est GL_k . Et le sous-groupe des points fixes dans $GL((V_k \oplus V_{-k})^{\perp\beta})$ est SO_{n-2k} . Ainsi $L_k^\theta = GL_k \times SO_{n-2k}$.

Le L -module $R_u(P^-)$ est isomorphe à l'ensemble des applications linéaires de V_k dans $(V_k \oplus V_{-k})^{\perp\beta} \oplus V_{-k}$. Et les éléments u de $R_u(P^-)$ vérifiant $\theta(u) = u^{-1}$ sont alors les applications de V_k dans V_{-k} , symétriques pour β . Ainsi S_k s'identifie à l'ensemble des formes quadratiques sur V_k , avec l'action de L_k^θ par changement de base dans V_k . \diamond

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 4.2 *Les adhérences des orbites de SO_n dans les grassmaniennes sont normales et à singularités rationnelles.*

Preuve : Les orbites de GL_k dans S_k sont paramétrées par le rang. Les adhérences de ces orbites sont des variétés déterminantielles symétriques ; celles-ci sont normales et à singularités rationnelles (voir par exemple la section 2 de [Kem76] avec le complément dans [Kem86]). Soit V un sous-espace de \mathbb{C}^n de dimension k telle que la restriction de β à V soit de rang $p \leq k$. Il est facile de voir que l'intersection de l'orbite $SO_n \cdot V$ avec S_k est la GL_k -orbite des formes quadratiques de rang p sur V_k . Ainsi les adhérences d'orbites de SO_n dans les grassmaniennes sont normales et à singularités rationnelles. \diamond

4.5.2 Orbites du groupe symplectique dans les grassmaniennes.

De la même manière que pour le groupe spécial orthogonal, on peut calculer les orbites du groupe symplectique dans les grassmaniennes. Soit ω une forme symplectique non dégénérée sur \mathbb{C}^{2n} , elle induit une involution θ comme dans la section 1.2.1. On note $SL_n^\theta = Sp_{2n}$ le groupe préservant cette forme. Par dualité (donnée par ω entre les sous-espaces de dimension k et ceux de dimension $2n - k$), il suffit de connaître les orbites dans les grassmaniennes $Gr(k, 2n)$ avec $k \leq n$. On a la proposition suivante :

Lemme 4.2 *Les orbites de Sp_{2n} dans $Gr(k, 2n)$ sont paramétrées par le rang de ω en restriction au sous-espace considéré.*

Preuve : C'est un corollaire immédiat du théorème de Witt. \diamond

Remarque : Le rang d'une forme symplectique est toujours pair, ainsi les seuls entiers possibles pour le rang sont les entiers pairs de $\{0, \dots, k\}$.

Et de la même manière que dans le cas du groupe orthogonal, on a un slice dans les grassmanniennes à l'orbite fermée de Sp_{2n} . On choisit une base (e_1, \dots, e_{2n}) de \mathbb{C}^{2n} telle que dans cette base on ait :

$$\omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge e_{2n+1-i}^*.$$

Une fois encore le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures (dans la base (e_1, \dots, e_{2n})) est un sous-groupe de Borel de SL_n et le groupe des matrices diagonales est un tore maximal, tous deux stables par θ . Pour $k \leq n$, soit $V_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, c'est un sous-espace totalement isotrope. On note encore P_k le sous-groupe parabolique de G qui stabilise V_k et L_k le sous-groupe de Levi de P_k contenant T . Enfin

$$S_k = (R_u(P_k^-) \cap \theta(R_u(P_k^-)))^{-\theta}.$$

D'après la proposition 4.4, c'est un slice à l'orbite $Sp_{2n} \cdot V_k$ dans $\text{Gr}(k, 2n)$ sur lequel L_k^θ agit linéairement. Et on a la

Proposition 4.6 *Le sous-groupe L_k^θ est isomorphe à $GL_k \times Sp(2n - 2k)$. Le L_k^θ -module S_k est isomorphe à l'espace des formes bilinéaires alternées sur V_k , où Sp_{2n-2k} agit par l'identité, et GL_k agit par changement de base dans V_k .*

Preuve : Ce sont les mêmes arguments que ceux de la proposition 4.5. \diamond

Et on a le corollaire :

Corollaire 4.3 *Les adhérences d'orbites de Sp_{2n} dans les grassmanniennes sont normales et à singularité rationnelles.*

Preuve : C'est immédiat à partir du résultat de Kempf [Kem86], qui montre que les adhérences des orbites de GL_k dans S_k sont normales et à singularités rationnelles. \diamond

4.5.3 Orbites de $S(GL_p \times GL_q)$ dans les grassmanniennes.

On choisit une décomposition de $\mathbb{C}^{p+q} = \mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$. Cette décomposition induit une involution θ sur SL_n qui est une involution intérieure (définie en 1.2.1). On note encore $S(GL_p \times GL_q)$ le sous-groupe des points fixes de θ . La situation est un peu différente de celle de SO_n ou Sp_{2n} , car, dans ce cas, il

y a plusieurs orbites fermées dans les grassmaniennes. Cependant, là encore les slices s'interprètent géométriquement, ce qui permet de montrer que les adhérences d'orbites de $S(GL_p \times GL_q)$ dans les grassmaniennes sont normales et à singularités rationnelles. On introduit les sous-ensembles de $\text{Gr}(k, p+q)$ suivants :

$$Q(s, t) = \{V \in \text{Gr}(k, p+q) \mid \dim(V \cap \mathbb{C}^p) = s \text{ et } \dim(V \cap \mathbb{C}^q) = t\}.$$

Le lemme suivant décrit les orbites de $S(GL_p \times GL_q)$ dans $\text{Gr}(k, p+q)$.

Lemme 4.3 *Les $Q(s, t)$ sont les orbites de $S(GL_p \times GL_q)$ dans les grassmaniennes; de plus, $Q(s, t) \subset \overline{Q(s', t')}$ si et seulement si $s \geq s'$ et $t \geq t'$.*

Preuve : Soit $V \in Q(s, t)$ alors on peut choisir (comme dans le lemme géométrique sur les orbites de $S(GL_p \times GL_q)$ dans SL_n/B , 8.3) une base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ adaptée à la décomposition de \mathbb{C}^{p+q} et à V , i.e. telle que

$$\mathbb{C}^p = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p),$$

$$\mathbb{C}^q = \text{Vect}(f_1, \dots, f_q),$$

$$V = \text{Vect}(e_1, \dots, e_s, e_{s+1} + f_1, \dots, e_{s+r} + f_r, f_{r+1}, \dots, f_{r+t})$$

où $r = k - s - t$. Il est facile de voir (avec ces bases adaptées) que $S(GL_p \times GL_q)$ agit transitivement sur $Q(s, t)$. Par ailleurs, pour les relations d'inclusions la condition est clairement nécessaire (la dimension de l'intersection ne peut qu'augmenter dans l'adhérence). Pour la réciproque, on commence par montrer que si $s + t < k$ alors $Q(s + 1, t) \subset \overline{Q(s, t)}$. En effet, soit V un sous-espace appartenant à $Q(s, t)$, on choisit une base de \mathbb{C}^{p+q} adaptée à V : $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$. Pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, on définit l'application linéaire de \mathbb{C}^n

$$g_t : \begin{cases} e_i \mapsto e_i \text{ si } i \neq s + 1 \\ e_{s+1} \mapsto t^{-1}e_{s+1} \\ f_1 \mapsto tf_1 \\ f_j \mapsto f_j \text{ si } j \neq 1 \end{cases}$$

L'application g_t appartient à $S(GL_p \times GL_q)$, et lorsque t tend vers 0 le sous-espace $g_t V$ converge dans $\text{Gr}(k, p+q)$ vers le sous-espace

$$V_0 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_s, e_{s+1}, e_{s+2} + f_2, \dots, e_{s+r} + f_r, f_{r+1}, \dots, f_{r+t}).$$

qui appartient à $Q(s + 1, t)$. Par le même type d'arguments, on a aussi : si $s + t < k$ alors $Q(s, t + 1) \subset \overline{Q(s, t)}$. Ainsi on a $Q(s', t') \subset \overline{Q(s, t)}$ si $s' \geq s$ et $t' \geq t$. \diamond

En particulier, les orbites fermées sont paramétrées par les couples (s, t) tels que $s + t = k$. On va calculer des slices à ces orbites fermées. Pour cela on fixe (s, t) tel que $s + t = k$, et on choisit un élément V de $Q(s, t)$. On choisit une base de \mathbb{C}^{p+q} adaptée à $V : (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$, comme dans le lemme 4.3. Cette base donne un tore maximal T de SL_{p+q} . On pose $V_1 = V \cap \mathbb{C}^p$ et $V_2 = V \cap \mathbb{C}^q$, on choisit un supplémentaire W_1 de V_1 dans \mathbb{C}^p et un supplémentaire W_2 de V_2 dans \mathbb{C}^q . Le parabolique P qui stabilise V est stable par θ . il ne reste donc qu'à décrire les anti-invariants par θ dans $R_u(P^-)$. Mais $R_u(P^-)$ s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de V dans $W_1 \oplus W_2$, et l'ensemble des anti-invariants par θ s'identifie à l'ensemble des applications linéaires :

$$u \oplus v \in \overline{\text{Hom}(V_1, W_2)} \oplus \overline{\text{Hom}(V_2, W_1)} = S.$$

On note L le sous-groupe de Levi de P qui contient T . Sur S agit le groupe L^θ qui est $S(GL(V_1) \times GL(V_2) \times GL(W_1) \times GL(W_2))$ agissant par changement de base dans V_1, V_2, W_1, W_2 . Par conséquent, les orbites de L^θ sont données par les couples (s, t) où s (resp. t) est le rang de u (resp. le rang de v). Les adhérences d'orbites de L^θ dans S sont encore des variétés déterminantielles qui sont par conséquent normales et à singularités rationnelles. Or ce sont les intersections de $\overline{Q(s, t)}$ avec S . De cette propriété, on a la proposition suivante :

Proposition 4.7 *Les adhérences d'orbites de $S(GL_p \times GL_q)$ dans les grassmanniennes sont normales et à singularités rationnelles.*

En résumé, les singularités d'adhérences d'orbites de $S(GL_p \times GL_q)$ (respectivement SO_n, Sp_{2n}) dans les grassmanniennes sont celles de variétés déterminantielles (resp. symétriques, antisymétriques)

Deuxième partie

Quelques résultats dans

SL_n/SO_n

5 Stabilisateur du lieu non normal dans les espaces symétriques.

On reprend ici un argument de Seshadri [Ses87] (repris dans un cadre plus général par Brion [Bri99b]) pour démontrer que les variétés de Schubert sont normales et à singularités rationnelles (et dans l'article de Brion, pour montrer que certaines adhérences d'orbites dans les variétés sphériques complètes sont normales et à singularité rationnelles). Cet argument permet de montrer que le lieu non normal de certaines adhérences d'orbites dans les espaces symétriques a un stabilisateur "trop gros", et par conséquent que ces adhérences d'orbites sont normales et à singularités rationnelles.

5.1 Le théorème principal de Zariski.

Un des instruments principal dans cette preuve, et qui servira aussi par la suite pour montrer que des adhérences d'orbites sont non normales, est le théorème principal de Zariski. On se donne deux variétés algébriques X, Y et une application $F : X \rightarrow Y$ birationnelle propre (par exemple F sera une désingularisation de Y). On suppose que Y est normale, alors :

Théorème 2 (Zariski) *Les fibres de F sont connexes.*

C'est la forme "originale" du théorème, cependant la preuve de ce théorème a évolué avec les méthodes de cohomologie des faisceaux, et on le trouve dans [Gro61, 4.3.12] ou [Har77, III §11], sous la forme suivante : si X, Y sont des variétés algébriques, $F : X \rightarrow Y$ est une application birationnelle propre et enfin si X est normale alors

Théorème 3 (Zariski (bis)) *Le lieu non normal de Y est le support du faisceau*

$$F_*\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_Y.$$

On rappelle la notion de singularités rationnelles (d'après [KKMSD73, p. 50]). Soit Y une variété algébrique sur \mathbb{C} . Soit $\pi : Z \rightarrow Y$ une résolution des

singularités de Y , i.e. Z est lisse, et π est birationnelle et propre. Alors les faisceaux cohérents $R^i\pi_*(\mathcal{O}_Z)$, pour $i > 0$, sont indépendants du choix de Z . On dit que Y est à singularités rationnelles si les conditions

- (i) $R^i\pi_*(\mathcal{O}_Z)$ pour $i > 0$,
- (ii) $\pi_*(\mathcal{O}_Z) = \mathcal{O}_Y$

sont vérifiées. D'après le théorème de Zariski la condition (ii) est équivalente à la normalité de Y . De plus, les variétés à singularités rationnelles sont de Cohen-Macaulay ([KKMSD73, p.50]).

5.2 Un théorème sur le stabilisateur du lieu non normal.

On se place dans la variété affine G/G^θ et on regarde l'action des paraboliques minimaux sur l'adhérence d'une orbite de B . On a alors plusieurs cas décrits dans 3.1. On note l'orbite \mathcal{O} et on pose $Y = \overline{\mathcal{O}}$. On note $N_G(Y)$ le stabilisateur dans G de Y , on a bien sûr $B \subset N_G(Y)$. On choisit un parabolique minimal P_α qui monte \mathcal{O} et on suppose que l'application :

$$F_\alpha : P_\alpha \times_B Y \rightarrow P_\alpha Y$$

est birationnelle, et de plus que $P_\alpha Y$ est à singularités rationnelles. Enfin on choisit une désingularisation

$$\pi : Z \rightarrow Y,$$

$N_G(Y)$ -équivariante. On a alors le théorème suivant :

Théorème 4 *Le lieu non normal de Y est stabilisé par P_α . De plus, pour tout $i > 0$ le support de $R^i\pi_*(\mathcal{O}_Z)$ est stable par P_α .*

Moralement, ce théorème exprime que si le lieu non normal de Y n'était pas stable par P_α alors il y aurait une composante Y' de ce lieu qui rendrait $P_\alpha Y$ non normale le long de $P_\alpha Y'$.

Preuve : Si on note $\mathbb{C}[Y]$ (respectivement $\mathbb{C}[Z]$) l'algèbre des fonctions régulières sur Y (respectivement sur Z), alors $\mathbb{C}[Z]$ est un module fini sur $\mathbb{C}[Y]$, et on a la suite exacte de $\mathbb{C}[Y]$ -modules

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[Z] \rightarrow C \rightarrow 0. \quad (\mathbf{D})$$

où (d'après le théorème principal de Zariski) le support de C est le lieu non normal de Y . De plus, C est un $N_G(Y)$ -module.

On commence par montrer que C est stable par P_α . La désingularisation $\pi : Z \rightarrow Y$ induit une application P_α -équivariante

$$\tilde{\pi} : P_\alpha \times_B Z \rightarrow P_\alpha \times_B Y.$$

En composant par F_α on obtient une application birationnelle propre (qui est une désingularisation de $P_\alpha Y$) :

$$\tilde{F}_\alpha = F_\alpha \circ \tilde{\pi} : P_\alpha \times_B Z \rightarrow P_\alpha Y.$$

Or $P_\alpha Y$ est supposée normale (puisqu'elle est à singularités rationnelles), par conséquent l'application

$$\tilde{F}_\alpha^* : \mathbb{C}[P_\alpha Y] \rightarrow \mathbb{C}[P_\alpha \times_B Z]$$

est un isomorphisme (l'injectivité provient de la dominance de \tilde{F}_α et la surjectivité est donnée par la normalité de $P_\alpha Y$).

On a l'application $g_{Y,\alpha} : P_\alpha \times_B Y \rightarrow P_\alpha/B$, par conséquent :

$$\mathbb{C}[P_\alpha \times_B Y] = H^0(P_\alpha \times_B Y, \mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Y}) = H^0(P_\alpha/B, g_{Y,\alpha*} \mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Y})$$

Et de même $\mathbb{C}[P_\alpha \times_B Z] = H^0(P_\alpha/B, g_{Z,\alpha*} \mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Z})$.

Enfin chaque B -module rationnel W induit un faisceau P_α -linéarisé sur P_α/B noté \underline{W} . Ainsi, la suite exacte de B -modules (\mathbf{D}) donne une suite exacte de faisceaux P_α -linéarisés :

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}[Y]} \rightarrow \underline{\mathbb{C}[Z]} \rightarrow \underline{C} \rightarrow 0$$

qui donne une suite exacte longue en cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(P_\alpha/B, \underline{\mathbb{C}[Y]}) \rightarrow H^0(P_\alpha/B, \underline{\mathbb{C}[Z]}) \rightarrow H^0(P_\alpha/B, \underline{C}) \\ \rightarrow H^1(P_\alpha/B, \underline{\mathbb{C}[Y]}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$(g_{y,\alpha})_* \mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Y} = \underline{\mathbb{C}[Y]} \text{ et } (g_{Y,\alpha})_* \mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Z} = \underline{\mathbb{C}[\tilde{Y}]}.$$

L'application \tilde{F}_α^* est un isomorphisme, donc $H^0(P_\alpha/B, \underline{C})$ s'injecte dans $H^1(P_\alpha/B, \underline{\mathbb{C}[Y]})$. D'autre part, l'application de restriction des fonctions

$$\mathbb{C}[P_\alpha Y] \rightarrow \mathbb{C}[Y]$$

est surjective, donc $\mathbb{C}[Y]$ est le quotient d'un P_α -module. Le faisceau $\underline{\mathbb{C}[P_\alpha Y]}$ est associé à un P_α -module, il est donc trivial, et en particulier : $H^i(P_\alpha/B, \underline{\mathbb{C}[P_\alpha Y]}) = 0$ pour $i > 0$. Comme P_α/B est la droite projective, pour tout faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} sur P_α/B on a pour tout $p > 1$: $H^p(P_\alpha/B, \mathcal{F}) = 0$. En particulier, pour le noyau \mathcal{F} de $\underline{\mathbb{C}[P_\alpha Y]} \rightarrow \underline{\mathbb{C}[Y]}$, on a $H^2(P_\alpha/B, \mathcal{F}) = 0$, et, par suite, $H^1(P_\alpha/B, \underline{\mathbb{C}[Y]}) = 0$. Finalement, on obtient

$$H^0(P_\alpha/B, \underline{\mathbb{C}}) = 0.$$

La stabilité du lieu non normal de Y par P_α découle alors du lemme suivant :

Lemme 5.1 *Soit C un $\mathbb{C}[Y]$ -module fini avec action de $N_G(Y)$ compatible, tel que $H^0(P_\alpha/B, \underline{\mathbb{C}}) = 0$, alors le support de C est stable par P_α .*

Preuve (du lemme 5.1) : Supposons que le support de C ne soit pas stable par P_α . Alors il existe une composante irréductible Y' du support de C qui n'est pas stabilisée par P_α . Soit $I(Y')$ l'idéal de cette sous-variété dans $\mathbb{C}[Y]$, on définit alors un sous $\mathbb{C}[Y]$ -module de C par

$$C' = \{c \in C \mid I(Y')c = 0\}.$$

Le support de C' est exactement Y' , car $I(Y')$ est un idéal premier minimal du support de C , donc cet idéal est un premier associé à C . Et de plus, on a $H^0(P_\alpha/B, \underline{C'}) = 0$ car $H^0(P_\alpha/B, \underline{\mathbb{C}}) = 0$.

On a les applications :

$$g_{\alpha, Y'} : P_\alpha \times_B Y' \rightarrow P_\alpha/B \text{ et } F'_\alpha : P_\alpha \times_B Y' \rightarrow P_\alpha Y'.$$

Le $\mathbb{C}[Y']$ -module C' induit un faisceau P_α -linéarisé \mathcal{C}' , sur $P_\alpha \times_B Y'$ (l'action de P_α étant une extension de l'action de B). Ce faisceau est tel que $(g'_{\alpha, Y'})_*(\mathcal{C}') = \underline{C'}$ et par conséquent

$$H^0(P_\alpha \times_B Y', \mathcal{C}') = H^0(P_\alpha/B, \underline{C'}) = 0. \quad (\mathbf{E})$$

Mais on a aussi $H^0(P_\alpha \times_B Y', \mathcal{C}') = H^0(P_\alpha Y', F'_{\alpha*} \mathcal{C}')$. Or F'_α est génériquement finie : en effet, P_α ne stabilise pas Y' qui est l'adhérence d'une orbite de B dans G/H , donc α est de type U, T ou N pour Y' . Ainsi le support de \mathcal{C}' est $P_\alpha \times_B Y'$ (car le support de C' est Y'), donc le support de $F'_{\alpha*} \mathcal{C}'$ est $P_\alpha Y'$. Or $P_\alpha Y'$ est affine, donc si le support de $F'_{\alpha*} \mathcal{C}'$ est $P_\alpha Y'$ alors

$H^0(P_\alpha Y', F_{\alpha'}' C') \neq 0$. Ce qui est exclu par l'égalité **(E)**. Cette contradiction démontre le lemme. \diamond

On retourne à la preuve du théorème 4. On fixe $i > 0$, et on considère le faisceau $N_G(Y)$ -linéarisé $R^i \pi_*(\mathcal{O}_Z)$, sur Y . Comme Y est affine, ce faisceau est associé au $\mathbb{C}[Y]$ -module $H^i(Z, \mathcal{O}_Z)$ (toujours avec action compatible de $N_G(Y)$). On va montrer que

$$H^0(P_\alpha/B, \underline{H^i(Z, \mathcal{O}_Z)}) = 0. \quad (\mathbf{F})$$

L'application $\tilde{F}_\alpha : P_\alpha \times_B Z \rightarrow P_\alpha Z$, est une résolution des singularités de $P_\alpha Y$, or $P_\alpha Y$ est supposée à singularités rationnelles, ainsi $R^q \tilde{F}_{\alpha*}(P_\alpha \times_B Z) = 0$ pour tout $q > 0$. Or, $P_\alpha Y$ est affine, donc

$$H^q(P_\alpha \times_B Z, \mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Z}) = 0 \text{ pour tout } q > 0.$$

On rappelle que $\tilde{F}_\alpha = F_\alpha \circ \tilde{\pi}$. De plus, $(g_{Y,\alpha}, F_\alpha) : P_\alpha \times_B Y \rightarrow P_\alpha/B \times P_\alpha Y$ est une immersion fermée, donc les fibres de l'application F_α peuvent s'identifier à des fermés de P_α/B qui est une droite projective. La variété $P_\alpha Y$ étant affine, on obtient pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur $P_\alpha \times_B Y$,

$$H^p(P_\alpha \times_B Y, \mathcal{F}) = 0 \text{ pour tout } p > 1.$$

Par conséquent la suite spectrale de Leray

$$H^p(P_\alpha \times_B Y, R^q \tilde{\pi}_*(\mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Z})) \Rightarrow H^{p+q}(P_\alpha \times_B Z, \mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Z})$$

dégénère en E_2 . Donc, le P_α -module $H^0(P_\alpha \times_B Z, R^i \tilde{\pi}_*(\mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Z}))$ est un quotient de $H^i(P_\alpha \times_B Z, \mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Z})$ qui est nul, d'où

$$H^0(P_\alpha \times_B Y, R^i \tilde{\pi}_*(\mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Z})) = 0.$$

Enfin, $R^i \tilde{\pi}_*(\mathcal{O}_{P_\alpha \times_B Z})$ est le faisceau P_α -linéarisé associé au faisceau B -linéarisé $R^i \pi_*(\mathcal{O}_Z)$. Ce qui démontre **F**, et le théorème découle alors du lemme 5.1. \diamond

5.3 Dans les espaces symétriques, une classe d'adhérences d'orbites à singularités rationnelles.

Dans [Bri99b] M. Brion démontre un théorème sur les singularités des adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel dans une variété sphérique

X . Il est énoncé pour l'adhérence d'une orbite sans multiplicité. Une orbite \mathcal{O} est dite sans multiplicité si pour tout $w \in W$ qui monte \mathcal{O} sur la B -orbite ouverte de X , l'application

$$F_w : \overline{BwB} \times_B \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \overline{Bw\mathcal{O}}$$

est birationnelle. Autrement dit si tout chemin de $\Gamma(G/H)$ montant de \mathcal{O} à la B -orbite ouverte ne contient pas d'arête double. On peut maintenant énoncer le théorème

Théorème 5 ([Bri99b], p.30) *Soit X une variété sphérique et Y l'adhérence d'une orbite de B sans multiplicité, alors Y est à singularités rationnelles.*

Ce théorème permet de montrer que toutes les adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel sont à singularités rationnelles dans certains espaces symétriques. Par exemple, pour les espaces symétriques $SL_{p+q}/S(GL_p \times GL_q)$ et SL_{2n}/Sp_{2n} , car dans ces deux cas toutes les orbites de B sont sans multiplicités. En effet, d'après [Bri99b, prop. 5, p. 15], dans le cas où G est simplement lacé, il suffit de vérifier que les orbites de codimension 1 sont sans multiplicités, ce qui est facile de avec la description des orbites de la section 8 (pour SL_{2n}/Sp_{2n} toutes les racines simples sont de type U^* ou G pour l'orbite ouverte, et pour les espaces symétriques $SL_{p+q}/S(GL_p \times GL_q)$ toutes les racines simples sont de type U^* , G ou T^*).

Cependant, il y a certains espaces symétriques pour lesquels ce théorème ne donne aucun résultat positif. Le "pire cas" est si toutes les orbites de codimension 1 sont montées par des arêtes de type N sur G/H . Les espaces symétriques les plus propices à cette obstruction sont ceux qui correspondent à une involution scindé, car dans ce cas tous les orbites de codimension 1 dans G/H sont obtenues par des arêtes de type T ou N . Ainsi il se peut qu'il n'y ait pas d'orbite sans multiplicité. C'est le cas pour SL_n/SO_n . Cependant, avec le théorème 4 on peut montrer que certaines adhérences d'orbites sont à singularité rationnelles. On introduit pour cela le corang d'une orbite \mathcal{O} :

$$\text{corang}(\mathcal{O}) = \text{rg}(G/H) - \text{rg}(\mathcal{O}).$$

On a le critère de normalité suivant :

Théorème 6 *Les adhérences d'orbites de corang 1 dans SL_n/SO_n sont à singularités rationnelles.*

Preuve : On le montre par récurrence sur la codimension de l'orbite. Ce qui permet de démarrer la récurrence est le corollaire 4.2. En effet, tout

diviseur B -stable irréductible de SL_n/SO_n est l'adhérence d'une orbite d'un parabolique maximal P . Or le corollaire sus-cité montre que les adhérences de P -orbites dans SL_n/SO_n sont à singularités rationnelles, par conséquent le résultat est vrai en codimension 1. Supposons que toutes les adhérences d'orbites de corang 1 et de codimension $c \leq k$ sont à singularités rationnelles. Soit \mathcal{O}_v une orbite de corang 1 et de codimension $k + 1$, et $\pi : Z \rightarrow \overline{\mathcal{O}_v}$ une désingularisation $N_G(\overline{\mathcal{O}_v})$ -équivariante. Alors, toute racine simple α qui monte v est de type U . En effet, les types N, T font augmenter le rang, or on ne peut pas l'augmenter car la seule orbite de rang maximal est l'orbite ouverte. Ainsi l'application $P_\alpha \times_B \overline{\mathcal{O}_v} \rightarrow P_\alpha \overline{\mathcal{O}_v}$ est birationnelle dès que α monte v . Par conséquent, avec l'hypothèse de récurrence et le théorème 4, le lieu non normal de $\overline{\mathcal{O}_v}$ et les supports des faisceaux $R^i \pi_*(\mathcal{O}_Z)$ pour $i > 0$ sont stabilisés par tous les paraboliques minimaux qui montent v . Ces supports sont aussi stabilisés par les paraboliques minimaux qui stabilisent $\overline{\mathcal{O}_v}$, donc le lieu non normal et les supports des faisceaux $R^i \pi_*(\mathcal{O}_Z)$ doivent être stabilisés par SL_n , donc ces sous-variétés sont vides. \diamond

Remarque : Cette preuve se généralise à n'importe quelle involution scindée pourvu que les adhérences d'orbites de codimension 1 soient à singularités rationnelles. Cependant, on verra qu'il existe des adhérences d'orbites de codimension 1 non normales dans les espaces symétriques, voir la section 7.1.

6 Critère de lissité en codimension 1 pour PSL_n/PSO_n .

Dans cette partie, on donne une caractérisation de la lissité en codimension 1 des adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel dans PSL_n/PSO_n . C'est un premier pas pour avoir une caractérisation de la normalité des adhérences d'orbites. Cependant, les exemples de la section 7.2 montreront qu'il existe des adhérences d'orbites dans SL_n/SO_n , lisses en codimension 1 mais qui ne sont pas normales pour autant.

6.1 Ordre de Bruhat dans SL_n .

Le groupe de Weyl de SL_n est S_n , avec pour choix des réflexions simples les transpositions $(i, i + 1)$ pour $1 \leq i \leq n - 1$. La longueur d'un élément w

peut s'interpréter dans ce cas comme le nombre d'inversions de w :

$$l(w) = \text{Card}\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ et } w(i) > w(j)\}$$

Par conséquent si on multiplie à droite un élément du groupe de Weyl par une réflexion s_α , où α est la racine qui correspond à cette réflexion, il est facile de calculer la longueur de w en fonction de celle de ws_α . Dans SL_n les racines sont paramétrées par les couples d'entiers (i, j) pour $1 \leq i \neq j \leq n$ et les réflexions correspondantes sont les transpositions que l'on notera encore par abus (i, j) avec le choix $i < j$. On a le lemme suivant :

Lemme 6.1 *Si $w(i) > w(j)$ alors :*

$$l(w(i, j)) = l(w) - 1 - 2 \text{Card} \{k \in]i, j[\mid w(i) > w(k) > w(j)\}.$$

Preuve : il suffit de calculer les longueurs à l'aide du nombre d'inversions, et de comparer les ensembles :

$$I_w = \{(k, l) \mid 1 \leq k < l \leq n \text{ et } w(k) > w(l)\} \text{ et}$$

$$I_{w(i, j)} = \{(k, l) \mid 1 \leq k < l \leq n \text{ et } w(i, j)(k) > w(i, j)(l)\}.$$

On vérifie que :

$$I_{w(i, j)} = I_w \setminus (\{(i, j)\} \cup A \cup B)$$

où :

$$A = \{(i, k) \mid i < k < j \text{ et } w(i) > w(k) > w(j)\}$$

$$\text{et } B = \{(k, j) \mid i < k < j \text{ et } w(i) > w(k) > w(j)\}.$$

Enfin avec $\#A = \#B = \#\{k \in]i, j[\mid w(i) > w(k) > w(j)\}$ le lemme est démontré. \diamond

Dans ce qui va suivre, cette égalité va surtout être utile pour les involutions de S_n . Soit σ une involution de S_n , on décompose σ en produit de cycles de supports disjoints (qui sont ici des transpositions) :

$$\sigma = \prod_{i \in I} (i, \sigma(i)).$$

Le support de σ est alors

$$\text{Supp}(\sigma) = \bigcup_{i \in I} \{i, \sigma(i)\}.$$

Dans ce cas, si on multiplie une involution σ par une réflexion (i, j) de support disjoint de celui de σ , l'expression devient encore plus simple :

Corollaire 6.1 *Si w est une involution, et (i, j) une réflexion telle que le support de w soit disjoint de $\{i, j\}$ alors on a :*

$$l(w(i, j)) = l(w) + 1 + 2 \text{Card} \{k \in]i, j[\mid w(k) \in]i, j[\}.$$

Preuve : Il suffit d'appliquer le lemme 6.1 à $w' = w(i, j)$ qui vérifie bien ($w'(i) = j > w'(j) = i$) car le support de w ne contient ni i ni j . Enfin, la condition $j = w'(i) > w'(k) > w'(j) = i$, n'est autre que $w'(k) \in]i, j[$ car si $k \in]i, j[$ alors $w'(k) = w(k)$. \diamond

6.2 Position des racines par rapport à une involution de S_n .

Dans la section 3.5.1, on a, pour une involution scindée θ , décrit les involutions tordues, calculé l'image de l'application φ , et la position d'une racine par rapport à une involution tordue en fonction des "vraies" involutions du groupe de Weyl. En particulier, dans la cas de l'involution scindée de PSL_n (i.e. pour l'espace symétrique PSL_n/PSO_n) l'interprétation de la position d'une racine par rapport à une involution tordue devient aisée. Soit $w = \sigma w_\circ$ une involution tordue de PSL_n/PSO_n , où σ est une "vraie involution" de S_n , on décompose σ en produit de cycles de supports disjoints qui sont ici des transpositions :

$$\sigma = \prod_{i \in I} (i, \sigma(i))$$

où on choisit I tel que $\forall i \in I \ i < \sigma(i)$. Le support de σ est alors

$$\text{Supp}(\sigma) = \bigcup_{i \in I} \{i, \sigma(i)\}.$$

On a la proposition suivante :

Proposition 6.1

$$\begin{aligned} I(w) &= \{(i, \sigma(i)) \mid i \in I\}, \\ C(w) &= \{(i, j) \mid i < j, j \neq \sigma(i), \text{Supp}(\sigma) \cap \{i, j\} \neq \emptyset\} \setminus I(w), \\ R(w) &= \{(i, j) \mid i < j, j \neq \sigma(i), \text{Supp}(\sigma) \cap \{i, j\} = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Preuve : C'est un corollaire immédiat du lemme 3.6. \diamond

De plus, dans les décompositions de Springer des involutions tordues pour θ , on va montrer qu'il y a unicité du sous-système de racines Π , stable par θ tel que $w_\Pi^\circ \theta = -\text{Id}_{|\Pi}$. L'ensemble S des racines simples est paramétré par $S = \{1, \dots, n-1\}$, où i correspond à la racine $(i, i+1)$. On commence par démontrer le

Lemme 6.2 *Soit Π un sous-ensemble de $S = \{1, \dots, n-1\}$ tel que $w_\Pi^\circ \theta = -\text{Id}_{|\Pi}$, alors Π est un intervalle de la forme $\{k, \dots, n-k\}$.*

Preuve : L'action de θ sur S est donnée par $\theta(i) = n-i$. On définit

$$i_0 = \sup\{i \in S \text{ tel que } i < \frac{n-1}{2}, i \notin \Pi, i+1 \in \Pi\}.$$

Si ce sup n'existe pas, c'est que $\Pi = S$ qui est bien de la forme annoncée. S'il existe, alors, par définition de i_0 et par le fait que Π soit stable par θ , l'ensemble $\Pi_1 = \{i_0+1, \dots, n-i_0-1\}$ est contenu dans Π . On pose alors $\Pi_2 = \Pi \setminus \Pi_1$; Π et Π_1 sont stables par θ donc Π_2 l'est aussi, et il se décompose donc en $\Pi_2' \Pi \theta(\Pi_2')$ avec $\Pi_2' \subset \{1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$. On a ainsi décomposé Π en trois sous-ensembles orthogonaux (en effet $i_0 \notin \Pi$ donc $\Pi_1 \perp \Pi_2'$). Par conséquent :

$$w_\Pi^\circ = w_{\Pi_1}^\circ w_{\Pi_2'}^\circ w_{\theta(\Pi_2')}^\circ.$$

Si bien que l'on a $(w_\Pi^\circ \theta)(\Pi_2') = -\theta(\Pi_2')$. Or, par hypothèse, $w_\Pi^\circ \theta$ agit comme $-\text{Id}$ sur Π donc $(w_\Pi^\circ \theta)(\Pi_2') = -\Pi_2'$. Ceci implique $\theta(\Pi_2') = \Pi_2'$, donc Π_2' est vide. Par conséquent $\Pi = \Pi_1$ qui est de la forme annoncée. \diamond

Soit une involution tordue $w \in S_n$. Pour toute décomposition de Springer $w = w' w_\Pi^\circ \theta(w')^{-1}$, on a, d'après la proposition 2.2, $R(w) = w'(\Phi_\Pi^+)$. Or le cardinal de $R(w)$ ne dépend que de w . Donc le cardinal de Φ_Π^+ ne dépend que de w . D'après le lemme précédent, il résulte que Π ne dépend que de w .

6.3 Relations d'adhérence en codimension 1.

On s'intéresse aux singularités en codimension 1 d'une adhérence d'orbite $\overline{\mathcal{O}_v}$. Pour cela on va utiliser les slices construits dans la section 4. Dans la section 3.6.2 on a expliqué comment obtenir les diviseurs irréductibles, stables par B de $\overline{\mathcal{O}_v}$. Ils sont obtenus de deux manières possibles à partir d'une décomposition de Springer $\varphi(v) = w' w_\Pi^\circ \theta(w')^{-1}$, et d'une écriture réduite

$w' = s_l \cdots s_1$. Pour l'espace symétrique PSL_n/PSO_n , on va montrer que dans le cas où la relation provient de $v_{\Pi} = w'^{-1}v$, le slice est une droite (c'est le lemme 6.6). Le cas de l'effaçage de l'un des s_i se sépare en deux sous-cas : soit la relation reste entre des orbites de même rang, auquel cas le slice est une droite formée des points fixes d'un slice de dimension 2 (c'est le lemme 6.7), soit le rang change, auquel cas il ne peut qu'augmenter, et on va montrer que dans ce cas le slice est singulier (c'est le lemme 6.9).

D'après la paramétrisation des orbites d'un sous-groupe de Borel dans SL_n/SO_n de la section 1.4, l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : V_{SL_n/SO_n} &\rightarrow \mathcal{I} \\ v &\mapsto \varphi(v)w^\circ \end{aligned}$$

est presque injective : la fibre en v est de cardinal 2 si $\varphi(v)w^\circ$ est une involution sans point fixe, et de cardinal 1 si $\varphi(v)w^\circ$ possède un point fixe. L'application $\tilde{\varphi}$ devient injective pour l'espace symétrique PSL_n/PSO_n . De plus, $\tilde{\varphi}$ est décroissante (car φ est croissante et la multiplication par w° est une application décroissante de W dans lui même), par conséquent on va travailler sur l'ordre de Bruhat sur les involutions.

6.4 Ordre de Bruhat sur les involutions.

On commence par définir au niveau des involutions tordues ce que veut dire : w' monte $w \in \mathcal{I}_\theta$. Dans le cadre de l'espace symétrique PSL_n/PSO_n , l'application φ est surjective. Par conséquent, pour chaque $w \in \mathcal{I}_\theta$, il existe $v \in V$ tel que $\varphi(v) = w$. C'est cette propriété qui donne un sens à la

Définition 4 *On dira que $w' \in W$ monte $w = \varphi(v)$ si w' monte v sur v' (au sens de la section 3.2). On note alors $w' * w = \varphi(v')$.*

Par exemple, dans le cas où α est une racine simple alors s_α monte w si et seulement si $s_\alpha w > w$. De plus, d'après le lemme 2.1 :

- soit $s_\alpha w \theta(s_\alpha) = w$, ce qui implique $s_\alpha w \in \mathcal{I}_\theta$ auquel cas on a $s_\alpha * w = s_\alpha w$,
- soit $s_\alpha w \theta(s_\alpha) \neq w$, auquel cas la longueur augmente de 2 et on a $s_\alpha * w = s_\alpha w \theta(s_\alpha)$.

Soit σ une involution. On écrit pour σw° une décomposition de Springer :

$$\sigma w^\circ = s_{i_l} s_{i_{l-1}} \cdots s_{i_1} w_{\Pi}^\circ \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_{l-1}}) \theta(s_{i_l}).$$

Ce qui au niveau de σ donne :

$$\sigma = s_{i_l} s_{i_{l-1}} \cdots s_{i_1} w_{\Pi}^{\circ} w^{\circ} s_{i_1} \cdots s_{i_{l-1}} s_{i_l},$$

on notera $\sigma_{\Pi} = w_{\Pi}^{\circ} w^{\circ}$. Enfin on notera

$$w_k = s_{i_k} \cdots s_{i_1}.$$

6.4.1 Relation provenant de w_{Π}° .

On suppose que l'on a une relation entre deux involutions σ et σ' qui provient d'une relation de codimension 1 dans PSL_n/PSO_n et qui de plus provient de v_{Π} . C'est-à-dire que l'on choisit une racine simple α appartenant à Π , alors $s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ}$ est une involution tordue (qui correspond à une orbite v' de codimension 1 dans $\overline{\mathcal{O}_{v_{\Pi}}}$), et on suppose que $s_{i_l} \cdots s_{i_1}$ monte $s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ}$ sur $\sigma' w_{\Pi}^{\circ}$. On a le lemme suivant :

Lemme 6.3 *Pour tout $k \in \{1, \dots, l\}$, on a*

(i)

$$w_{k-1} * (s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ}) = s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1} (s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ}) \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_{k-1}})$$

(ii) *Et la racine $(i_k, i_k + 1)$ vérifie :*

$$(i_k, i_k + 1) \in C''(s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1} (s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ}) \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_{k-1}})).$$

Preuve : La preuve se fait par récurrence sur k . Il suffit en fait de montrer (ii) au rang k car alors l'énoncé (i) au rang $k + 1$ en découle.

$k = 1$, Au niveau des "vraies" involutions, l'involution associée à $s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ}$ est $s_{\alpha} \sigma_{\Pi}$. Or, le support de s_{α} et celui de σ_{Π} sont disjoints, donc on a

$$\text{Supp}(s_{\alpha} \sigma_{\Pi}) = \text{Supp}(s_{\alpha}) \amalg \text{Supp}(\sigma_{\Pi}).$$

Or le support de s_{i_1} rencontre le support de σ_{Π} (car s_{i_1} est complexe pour w_{Π}°). Ainsi le support de s_{i_1} rencontre le support de $s_{\alpha} \sigma_{\Pi}$. Par conséquent, par le lemme 6.1, la racine $(i_1, i_1 + 1)$ est dans $C(s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ})$ ou dans $I(s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ})$. Or $I(s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ}) = I(w_{\Pi}^{\circ}) \cup \{(\alpha, \alpha + 1)\}$ et s_{i_1} ne peut être égale à s_{α} , ni être imaginaire pour w_{Π}° . C'est donc que la racine $(i_1, i_1 + 1)$ est complexe pour $s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ}$. De plus, elle monte $s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ}$ donc elle est dans $C''(s_{\alpha} w_{\Pi}^{\circ})$.

$k \Rightarrow k + 1$ Si (ii) est vérifiée pour tout $m \leq k$ alors on a :

$$\text{Supp}(s_{i_m} \cdots s_{i_1} s_{\alpha} \sigma_{\Pi} s_{i_1} \cdots s_{i_m}) = s_{i_m} \cdots s_{i_1} (\text{Supp}(s_{\alpha})) \cup s_{i_m} \cdots s_{i_1} (\text{Supp}(\sigma_{\Pi})).$$

D'autre part le support de $s_{i_{k+1}}$ rencontre le support de $s_{i_k} \cdots s_{i_1} \sigma_\Pi s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ qui n'est autre que $s_{i_k} \cdots s_{i_1} (\text{Supp}(\sigma_\Pi))$. Donc la racine associée $(i_{k+1}, i_{k+1} + 1)$ est complexe pour $s_{i_k} \cdots s_{i_1} (s_\alpha w_\Pi^\circ) \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_k})$. Ce qui démontre le lemme. \diamond

En corollaire de ce lemme on a :

Corollaire 6.2 *Si $\alpha \in \Pi$ et si $s_{i_l} \cdots s_{i_1}$ monte $s_\alpha w_\Pi^\circ$, alors*

$$l(s_{i_l} \cdots s_{i_1} w_\Pi^\circ \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_l})) - l(s_{i_l} \cdots s_{i_1} s_\alpha w_\Pi^\circ \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_l})) = 1.$$

6.4.2 Relation provenant de l'effaçage

On regarde maintenant la situation qui provient de l'effaçage de s_{i_k} , donc on suppose que $s_{i_l} \cdots s_{i_{k+1}}$ monte $s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1} w_\Pi^\circ \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_{k-1}})$ sur $\sigma' w_\Pi^\circ$ pour que la relation soit de codimension 1. Pour $l \geq m > k \geq 1$ on note

$$w_{m,k} = s_{i_m} \cdots s_{i_k}.$$

Si on suppose que pour tout $m > k$ la racine $(i_m, i_m + 1)$ est complexe par rapport à $w_{m-1,k+1} * (s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1} w_\Pi^\circ \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_{k-1}}))$ alors on pose

$$\beta = s_{i_l} \cdots s_{i_{k-1}}(i_k, i_k + 1)$$

et on a

$$\begin{aligned} \sigma w^\circ &= s_\beta s_{i_l} \cdots \check{s}_{i_k} \cdots s_{i_1} w_\Pi^\circ \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(\check{s}_{i_k}) \cdots \theta(s_{i_1}) \theta(s_\beta) = \\ & s_{i_l} \cdots s_{i_1} w_\Pi^\circ \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_1}) \end{aligned}$$

et la différence des longueurs :

$$l(\sigma w^\circ) - l(\sigma' w^\circ) = 2.$$

En revanche, s'il existe m tel que $(i_m, i_m + 1)$ soit imaginaire par rapport à

$$w_{m-1,k+1} * (s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1} w_\Pi^\circ \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_{k-1}})),$$

on choisit le premier indice qui est ainsi :

$$m = \inf\{j > k \mid (i_m, i_m + 1) \in I(w_{m-1,k+1} * (s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1} w_\Pi^\circ \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_{k-1}})))\}.$$

On définit alors $\beta \in C'''(s_{i_{m-1}} \cdots \check{s}_{i_k} \cdots s_{i_1} w_{\Pi}^{\circ} \theta(s_{i_{m-1}}) \cdots \theta(\check{s}_{i_k}) \cdots \theta(s_{i_1}))$ donnée par la situation où toutes les racines restent complexes. C'est-à-dire

$$\beta = w_{m-1,k+1}((i_k, i_{k+1})).$$

On note alors $i = i_m$. L'involution associée :

$$\sigma_1 = s_{i_{m-1}} \cdots \check{s}_{i_k} \cdots s_{i_1} \sigma_{\Pi} s_{i_{m-1}} \cdots \check{s}_{i_k} \cdots s_{i_1}$$

est de la forme $\sigma_1 = (i, i+1)\tau$, où τ est une involution puisque $(i, i+1)$ est imaginaire pour $\sigma_1 w^{\circ}$. De plus, β est complexe pour $s_i \tau w^{\circ}$, donc le support de β , qui est réduit à deux éléments, rencontre celui de $(i, i+1)\tau$. La figure 3 résume cette situation.

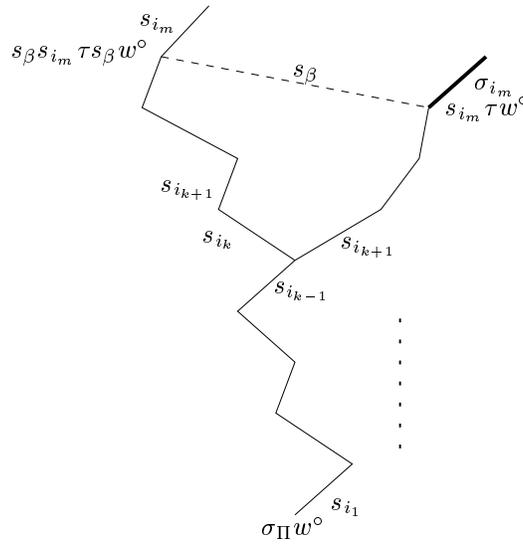


FIG. 3 – Le rang augmente.

En fait, le support de β doit rencontrer le support de $(i, i+1)$ puisque $(i, i+1)$ est complexe pour $s_{\beta}(i, i+1)\tau s_{\beta} w^{\circ}$. Enfin l'hypothèse “ m minimal” donne aussi

$$l(s_{\beta}(i, i+1)\tau s_{\beta}) = l((i, i+1)\tau) - 2. \quad (\mathbf{G})$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 6.4 *Le support de β rencontre le support de τ .*

Preuve : On suppose qu'il ne le rencontre pas ; alors il y a 4 types de racines possibles : $\beta = (i, p), (p, i), (i + 1, p)$ ou $(p, i + 1)$ (on ne considère que les racines positives, i.e. (i, j) vérifie $i < j$). On traite le cas $\beta = (i, p)$ avec $p \notin \text{Supp}(\tau)$. On a alors $s_\beta(i, i + 1)\tau s_\beta = (i + 1, p)\tau$. D'après le corollaire 6.1 on a aussi :

$$l((i + 1, p)\tau) = l(\tau) + 1 + 2\text{Card}\{a \in]i + 1, p[\mid \tau(a) \in]i + 1, p[\}.$$

De plus, $l((i, i + 1)\tau) = l((i, i + 1)) + 1$, l'égalité ci-dessus donne donc $l(s_\beta(i, i + 1)\tau s_\beta) > l((i, i + 1)\tau)$ ce qui contredit l'égalité **(G)**. Les autres cas se traitent de manière totalement similaire. \diamond

Puisque le support de β rencontre le support de τ , on peut supposer qu'il rencontre $\{p, \tau(p)\}$ avec $t = \tau(p) > p$. Ainsi, la racine β a pour support un élément de $\{i, i + 1\}$ et un élément de $\{p, t\}$. De plus, on peut supposer $\text{Supp}(\beta) = \{i, p\}$ ou $\text{Supp}(\beta) = \{i, \tau(p)\}$ car $s_\beta(i, i + 1)\tau s_\beta = s_\gamma(i, i + 1)\tau s_\gamma$ où $\gamma = (i, i + 1)\tau(\beta)$. On écrit $\tau = (p, t)\tau'$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 6.2 *Sous ces hypothèses, pour que l'équation **(G)** soit vérifiée, on a nécessairement : $p < i < i + 1 < t$, $\beta = (p, i)$, et τ' n'envoie pas d'élément de $]p, i[$ dans $]i + 1, t[$.*

Preuve : On raisonne par élimination en utilisant le corollaire 6.1. On rappelle que $\sigma_1 = (i, i + 1)(p, t)\tau'$ et on note $\sigma_2 = s_\beta(i, i + 1)(p, t)\tau' s_\beta$ l'équation **(G)** s'écrit $l(\sigma_2) = l(\sigma_1) - 2$.

Si $i < i + 1 < p < t$, alors

$$l(\sigma_1) = l(\tau') + 2 + 2\text{Card}\{a \in]p, t[\mid \tau'(a) \in]p, t[\}.$$

– Si $\beta = (i, p)$ alors $\sigma_2 = (i, t)(i + 1, p)\tau'$ et donc

$$l(\sigma_2) = l(\tau') + 2 + 2(\text{Card}\{a \in]i, t[\mid \tau'(a) \in]i, t[\} +$$

$$\text{Card}\{k \in]i + 1, p[\mid \tau'(a) \in]i + 1, p[\}).$$

Or $\{a \in]p, t[\mid \tau'(a) \in]p, t[\} \subset \{a \in]i, t[\mid \tau'(a) \in]i, t[\}$ donc $l(\sigma_2) \geq l(\sigma_1)$ ce qui contredit l'hypothèse.

– Si $\beta = (i, t)$ alors $\sigma_2 = (i, p)(i + 1, t)\tau'$ et donc

$$l(\sigma_2) = l(\tau') + 2 + 2(\text{Card}\{a \in]i, t[\setminus\{i + 1\} \mid \tau'(a) \in]i, t[\} +$$

$$\text{Card}\{k \in]i + 1, p[\mid \tau'(a) \in]i + 1, p[\}).$$

Or là encore $\{a \in]p, t[\mid \tau'(a) \in]p, t[\} \subset \{a \in]i, t[\mid \tau'(a) \in]i, t[\}$ donc l'hypothèse n'est pas vérifiée.

Si $p < t < i < i + 1$, alors

$$l(\sigma_1) = l(\tau') + 2 + 2\text{Card}\{a \in]p, t[\mid \tau'(a) \in]p, t[\}.$$

– Si $\beta = (p, i)$ alors $\sigma_2 = (t, i)(p, i + 1)\tau'$ et donc

$$l(\sigma_2) = l(\tau') + 2 + 2(\text{Card}\{a \in]t, i[\mid \tau'(a) \in]t, i[\} +$$

$$\text{Card}\{a \in]p, i + 1[\mid \tau'(a) \in]p, i + 1[\}).$$

Or $\{a \in]p, t[\mid \tau'(a) \in]p, t[\} \subset \{a \in]p, i + 1[\mid \tau'(a) \in]p, i + 1[\}$ donc $l(\sigma_2) \geq l(\sigma_1)$ ce qui est exclu.

– Si $\beta = (t, i)$ alors $\sigma_2 = (p, i)(t, i + 1)\tau'$ et donc

$$l(\sigma_2) = l(\tau') + 2 + 2(\text{Card}\{a \in]p, i[\setminus \{t\} \mid \tau'(a) \in]p, i[\} +$$

$$\text{Card}\{k \in]t, i + 1[\mid \tau'(a) \in]t, i + 1[\}).$$

Or là encore $\{a \in]p, t[\mid \tau'(a) \in]p, t[\} \subset \{a \in]t, i + 1[\mid \tau'(a) \in]t, i + 1[\}$ donc l'hypothèse n'est pas vérifiée.

Si $p < i < i + 1 < t$, alors

$$l(\sigma_1) = l(\tau') + 2 + 2\text{Card}\{a \in]p, t[\mid \tau'(a) \in]p, t[\}.$$

– Si $\beta = (p, i)$ alors $\sigma_2 = (p, i + 1)(i, t)\tau'$ et donc

$$l(\sigma_2) = l(\tau') + 2 + 2(\text{Card}\{a \in]p, i + 1[\mid (i, t)\tau'(a) \in]p, i + 1[\} +$$

$$\text{Card}\{a \in]i, t[\mid \tau'(a) \in]i, t[\}).$$

or $i \notin I_1 = \{a \in]p, i + 1[\mid (i, t)\tau'(a) \in]p, i + 1[\}$ donc

$$I_1 = \{a \in]p, i[\mid (i, t)\tau'(a) \in]p, i[\}$$

et la condition sur les longueurs donne :

$$\text{Card}\{a \in]i, t[\mid \tau'(a) \in]i, t[\} + \text{Card}\{a \in]p, i[\mid (i, t)\tau'(a) \in]p, i[\} =$$

$$\text{Card}\{a \in]p, t[\mid \tau'(a) \in]p, t[\} - 1.$$

Ce qui est vrai si et seulement si τ' n'envoie aucun élément de $]p, i[$ dans $]i, t[$.

– Si $\beta = (i, t)$ alors $\sigma_2 = (p, i)(i + 1, t)\tau'$ et donc

$$l(\sigma_2) = l(\tau') + 2 + 2\text{Card}I'_1 + \text{Card}I'_2$$

où

$$I'_1 = \{a \in]p, i[\mid \tau'(a) \in]p, i[\} \text{ et}$$

$$I'_2 = \{a \in]i + 1, t[\mid \tau'(a) \in]i + 1, t[\}$$

Il est clair que $I'_1 \amalg I'_2 \amalg \{i, i + 1\} \subset \{a \in]p, t[\mid \tau'(a) \in]p, t[\}$. Par conséquent, on a $l(\sigma_2) \leq l(\sigma_1) - 4$ ce qui est encore exclu par hypothèse, et qui termine la preuve de cette proposition

◇

Maintenant que le premier endroit où une racine complexe devient imaginaire est analysé, on est dans la situation de la figure 4. On va montrer la

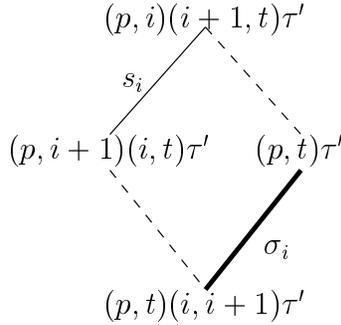


FIG. 4 – Situation singulière

proposition suivante :

Proposition 6.3 *Pour tout $l \geq j > m$, la racine $(i_j, i_j + 1)$ est complexe pour $w_{j-1, m+1} * (p, t)\tau'w^\circ$.*

Preuve : On commence par montrer un lemme général dans le cadre des involutions tordues :

Lemme 6.5 *Soit $w \in \mathcal{I}_\theta$, si $\alpha \in S \cap C''(w)$ alors*

$$C''(s_\alpha w \theta(s_\alpha)) = s_\alpha(C''(w)) \setminus \{-\alpha, s_\alpha w \theta(\alpha)\}$$

Preuve : Soit $\beta \in C''(w)$, on commence par montrer que si $\beta \neq \alpha$ et $\beta \neq w\theta(\alpha)$ alors $\gamma = s_\alpha(\beta) \in C''(s_\alpha w \theta(s_\alpha))$. Tout d'abord γ doit être positive, or

α est une racine simple et β est une racine positive, donc $\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta \neq \alpha$. De plus, on a

$$s_\alpha w\theta(s_\alpha)\theta(\gamma) = s_\alpha w\theta(\beta).$$

Or β est complexe pour w , donc $w\theta(\beta) \neq \pm\beta$. Par suite, $s_\alpha w\theta(s_\alpha)\theta(\gamma) \neq \pm\gamma$, i.e. γ est complexe pour $s_\alpha w\theta(s_\alpha)$. Enfin, la racine β vérifie aussi $w\theta(\beta) > 0$ (elle n'est pas seulement complexe mais dans $C''(w)$). Si $\beta \neq w\theta(\alpha)$, la racine $s_\alpha w\theta(\beta)$ est positive, soit encore $\gamma \in C''(s_\alpha w\theta(s_\alpha))$. Finalement, on a montré que

$$s_\alpha(C''(w)) \setminus \{-\alpha, s_\alpha w\theta(\alpha)\} \subset C''(s_\alpha w\theta(s_\alpha)).$$

Soit maintenant $\gamma \in C''(s_\alpha w\theta(s_\alpha))$, alors on montre facilement (avec les mêmes arguments que précédemment) que $\beta = s_\alpha(\gamma) \in C''(w)$. Le lemme est démontré. \diamond

On retourne à la preuve de la proposition 6.3. Dans la situation de la figure 4, on a

$$C''((p, i)(i + 1, t)\tau'w^\circ) \cap I((p, t)\tau'w^\circ) = \emptyset$$

donc comme $s_{i_{m+1}}$ monte $(p, i)(i + 1, t)\tau'w^\circ$, en tant que réflexion associée à une racine complexe, et que par hypothèse elle monte aussi $(p, t)\tau'w^\circ$, la racine $(i_{m+1}, i_{m+1} + 1)$ est nécessairement complexe pour $(p, t)\tau'w^\circ$. Avec le lemme 6.5 on est encore dans la même situation pour $s_{i_{m+1}} * (p, i)(i + 1, t)\tau'w^\circ$ et $s_{i_{m+1}} * (p, t)\tau'w^\circ$ (i.e. les racines complexes qui font monter la première ne peuvent être imaginaire pour la deuxième). Et par récurrence, la proposition en découle. \diamond

Enfin, on précise encore la situation où l'on passe par la figure 4.

Proposition 6.4 *Pour tout $l \geq j > m$ on a*

- (i) $w_{j-1, m+1}$ monte $(p, t)(i, i + 1)\tau'w^\circ$ ainsi que $(p, i + 1)(i, t)\tau'w^\circ$,
- (ii) la racine $(i_j, i_j + 1)$ est complexe pour $w_{j-1, m+1} * (p, t)(i, i + 1)\tau'w^\circ$ et $w_{j-1, m+1} * (p, i + 1)(i, t)\tau'w^\circ$.

Preuve : La preuve de cette proposition se fait par récurrence sur j . On commence par traiter le cas $j = m + 1$. On pose

$$i_{m+1} = r, \sigma'_1 = (p, t)\tau', \sigma'_2 = (p, i)(i + 1, t)\tau',$$

et on rappelle que $\sigma_1 = (p, t)(i, i + 1)\tau'$ et $\sigma_2 = (p, i + 1)(i, t)\tau'$.

En premier lieu, la racine $(r, r + 1)$ est complexe pour $\sigma_1 w^\circ$ et $\sigma_2 w^\circ$. En effet, par la proposition 6.3 la racine $(r, r + 1)$ est complexe pour σ'_1 et σ'_2 ,

donc $\{r, r + 1\}$ rencontre le support de ces deux involutions. En particulier, $\{r, r + 1\}$ rencontre $\{p, t\} \cup \text{Supp}(\tau')$, et, d'après le lemme 6.1,

$$(r, r + 1) \notin R(\sigma_1 w^\circ) \cup R(\sigma_2 w^\circ).$$

De plus, $(r, r + 1) \notin I(\tau w^\circ)$, sinon cette racine serait imaginaire pour $\sigma'_1 w^\circ$, et $(r, r + 1) \notin \{(i, i + 1), (p, i + 1), (i, t), (p, t)\}$. Finalement

$$(r, r + 1) \in C(\sigma_1 w^\circ) \cap C(\sigma_2 w^\circ).$$

On va maintenant montrer que $(r, r + 1)$, monte $\sigma_1 w^\circ$ et $\sigma_2 w^\circ$. D'après le lemme 3.6, il suffit de montrer que $(r, r + 1)\sigma_1 < \sigma_1$ et $(r, r + 1)\sigma_2 < \sigma_2$. Ce qui, d'après le lemme 6.1 (appliqué à $\sigma_1^{-1} = \sigma_1$ et $\sigma_2^{-1} = \sigma_2$), est encore équivalent à

$$\sigma_1(r) < \sigma_1(r + 1) \text{ et } \sigma_2(r) < \sigma_2(r + 1). \quad (\mathbf{H})$$

Si $\{r, r + 1\} \cap \{p, i, i + 1, t\} = \emptyset$ alors $\sigma_1(r) = \sigma_2(r) = \tau'(r)$ et $\sigma_1(r + 1) = \sigma_2(r + 1) = \tau'(r + 1)$. De plus, sachant que $(r, r + 1)$ monte σ'_1 , on a $\tau'(r) > \tau'(r + 1)$. La condition **H** est donc vérifiée.

Si $\{r, r + 1\} \cap \{p, i, i + 1, t\} \neq \emptyset$ les tableaux ci-dessous explorent les différentes possibilités.

$(r, r + 1) =$	$(p - 1, p)$	$(p, p + 1)$	$(i - 1, i)$
$\sigma'_1(r) < \sigma'_1(r + 1)$	$\tau'(p - 1) < t$	$t < \tau'(p + 1)(*)$	$\tau'(i - 1) < i$
$\sigma'_2(r) < \sigma'_2(r + 1)$	$\tau'(p - 1) < i(*)$	$i < \tau'(p + 1)$	$\tau'(i - 1) < p(*)$
$\sigma_1(r), \sigma_1(r + 1)$	$\tau'(p - 1), t$	$t, \tau'(p - 1)$	$\tau'(i - 1), i + 1$
$\sigma_2(r), \sigma_2(r + 1)$	$\tau'(p - 1), i + 1$	$i + 1, \tau'(p - 1)$	$\tau'(i - 1), t$

$(r, r + 1) =$	$(i + 1, i + 2)$	$(t - 1, t)$	$(t, t + 1)$
$\sigma'_1(r) < \sigma'_1(r + 1)$	$i + 1 < \tau'(i + 2)$	$\tau'(t - 1) < p(*)$	$p < \tau'(t + 1)$
$\sigma'_2(r) < \sigma'_2(r + 1)$	$t < \tau'(i + 2)(*)$	$\tau'(t - 1) < i + 1$	$i + 1 < \tau'(t + 1)(*)$
$\sigma_1(r), \sigma_1(r + 1)$	$i, \tau'(i + 2)$	$\tau'(t - 1), p$	$p, \tau'(t + 1)$
$\sigma_2(r), \sigma_2(r + 1)$	$p, \tau'(i + 2)$	$\tau'(t - 1), i$	$i, \tau'(t + 1)$

Dans ces tableaux, la racine $(r, r + 1) = (i, i + 1)$ n'apparaît pas puisque celle-ci est imaginaire pour σ'_1 . De plus, on remarquera que si $r = p$ ou $r = i - 1$ (respectivement $r = i + 1$ ou $r = t - 1$) alors $i - p > 1$ (respectivement $t - i + 1 > 1$), ainsi dans chacun de ces cas l'intersection $\{r, r + 1\} \cap \{p, i, i + 1, t\}$

est réduite à un élément. Enfin, la case marquée du signe (*) permet de vérifier la condition **H** dans chacun des cas.

On obtient donc

$$(r, r + 1) \in C''(\sigma_1) \cap C''(\sigma_2).$$

La proposition découle alors du lemme 6.5 par une récurrence facile. \diamond

Si la relation provient de l'effaçage de s_{i_k} , et si on passe par la situation de la figure 4, alors la proposition 6.4 montre que $w_{l,m+1}$ monte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma'_1$ et σ'_2 , en ne passant que par des racines complexes. On définit alors les racines $\alpha_1 = w_{l,m+1}((i, i + 1))$ et $\alpha_2 = w_{l,m+1}(\beta)$ (on rappelle que $\beta = (p, i)$). On est dans la situation de la figure 5 ci-dessous.

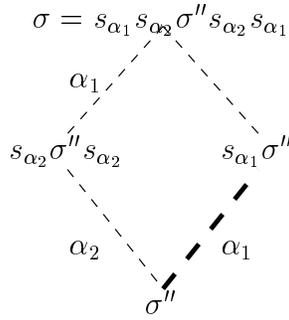


FIG. 5 – Situation singulière (bis).

De plus, les différences des longueurs sont :

$$l(s_{\alpha_2} \sigma'' s_{\alpha_2}) - l(s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \sigma'' s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}) = l(\sigma'') - l(s_{\alpha_2} \sigma'' s_{\alpha_2}) = 2$$

$$\text{et } l(\sigma'') - l(s_{\alpha_1} \sigma'') = 1.$$

En particulier, il existe deux racines $\alpha_1 \in C'(\sigma w^\circ)$ et $\alpha_2 \in I(\sigma w^\circ)$ telles que :

(i) la racine α_2 est complexe pour $s_{\alpha_1} \sigma w^\circ \theta(s_{\alpha_1})$, avec

$$l(s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} \sigma w^\circ \theta(s_{\alpha_1}) \theta(s_{\alpha_2})) - l(s_{\alpha_1} \sigma w^\circ \theta(s_{\alpha_1})) = 2$$

(ii) la racine α_1 est imaginaire pour $s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} \sigma w^\circ \theta(s_{\alpha_1}) \theta(s_{\alpha_2})$, avec

$$l(s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} \sigma w^\circ \theta(s_{\alpha_1}) \theta(s_{\alpha_2})) - l(s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} \sigma w^\circ \theta(s_{\alpha_1}) \theta(s_{\alpha_2})) = 1.$$

6.5 Conséquences sur les singularités.

On se place toujours dans l'espace symétrique PSL_n/PSO_n . On suppose que l'on a $v' < v$ avec $\mathcal{O}_{v'}$ de codimension 1 dans $\overline{\mathcal{O}_v}$. On va voir qu'il y a alors trois possibilités pour le rang de v' par rapport au rang de v . Il peut augmenter de 1, diminuer de 1, ou rester constant.

Remarque : Encore une fois le rang s'interprète facilement en termes d'involutions pour PSL_n/PSO_n . En effet, si on choisit une décomposition de Springer $\varphi(v) = w'w_{\Pi}^{\circ}\theta(w')^{-1}$ alors d'après le lemme 3.3 on a

$$\text{rg}(v) = \text{rg}(PSL_n) - \text{rg}(PSO_n) + \dim(T_{\Pi}^{-w_{\Pi}^{\circ}}).$$

Le rang de PSL_n est $n - 1$ et celui de PSO_n est $[(n - 1)/2]$ d'où on obtient

$$\text{rg}(PSL_n) - \text{rg}(PSO_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

D'autre part, d'après le lemme 6.2, Π est de la forme $\{k, \dots, n - k\}$, d'où

$$\text{rg}(v) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} - k \right\rfloor.$$

Si on écrit $\varphi(v) = \sigma w^{\circ}$ alors l'interprétation du rang est encore plus aisée. En effet, toujours en décomposant σ en produit de transpositions de support disjoints :

$$\sigma = \prod_{i \in I} (i, \sigma(i))$$

alors la dimension de $T_{\Pi}^{-w_{\Pi}^{\circ}}$ est aussi le cardinal de I . Ainsi on a

$$\text{rg}(v) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \text{Card}(I).$$

On choisit une décomposition de Springer

$$\varphi(v) = s_{i_1} \cdots s_{i_1} w_{\Pi}^{\circ} \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_1}).$$

6.5.1 Le rang diminue.

D'après les différentes propositions sur les involutions de la section précédente, si $\text{rg}(v') < \text{rg}(v)$, il est nécessaire que la relation d'inclusion provienne

d'une orbite v'' de codimension 1 dans une P_Π -orbite fermée. Or on a vu (par le corollaire 6.2) que, dans ce cas, il existe une racine simple $\alpha \in \Pi$ telle que :

$$\varphi(v') = s_{i_1} \cdots s_{i_1} s_\alpha w_\Pi^\circ \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_1}).$$

De plus, la différence des longueurs de $\varphi(v)$ et $\varphi(v')$ est 1. Par conséquent, le slice (d'après 4.4) ne peut être qu'une droite, car c'est une droite dans $G/B \times G/B$. D'où le lemme :

Lemme 6.6 *Si on a $rg(v') < rg(v)$, alors le slice en \dot{v}' intersecté avec $\overline{\mathcal{O}_v}$ est une droite, et par conséquent $\overline{\mathcal{O}_v}$ est lisse le long de $\mathcal{O}_{v'}$.*

Remarque : On peut donner explicitement ce slice. On choisit un représentant \dot{v}' dans G , tel que $\dot{v}'\theta(\dot{v}')^{-1} \in N(T)$. Alors un slice en \dot{v}' dans SL_n/SO_n est

$$U^- \cap \psi_{\dot{v}'}(U^-)\dot{v}'.$$

La racine $\beta = s_{i_1} \cdots s_{i_1}(\alpha)$ définit un sous-groupe unipotent $U_{-\beta} \subset U^- \cap \psi_{\dot{v}'}(U^-)$. On vérifie alors facilement que

$$U_{-\beta}\dot{v}'$$

est un slice en \dot{v}' dans $\overline{\mathcal{O}_v}$.

6.5.2 Le rang reste inchangé.

Si le rang reste inchangé, alors les propositions de la section précédente montrent que l'on est dans la situation où on a effacé s_{i_k} et que tout le long du chemin le rang n'a pas changé. Par conséquent, la relation entre les involutions $\varphi(v)$ et $\varphi(v')$ se passe dans un intervalle de Bruhat de longueur 2 dans $G/B \times G/B$, et les anti-invariants forment une droite dans le slice à la G -orbite dans $G/B \times G/B$. D'où le lemme :

Lemme 6.7 *Si $rg(v') = rg(v)$, alors le slice en \dot{v}' intersecte $\overline{\mathcal{O}_v}$ suivant une droite, et par conséquent $\overline{\mathcal{O}_v}$ est lisse le long de $\mathcal{O}_{v'}$.*

Remarque : Ce slice est encore complètement explicite. On a défini dans ce cas la racine $\beta = s_{i_1} \cdots s_{i_{k+1}}(i_k, i_k + 1)$. Cette racine définit le sous-groupe unipotent $U_{-\beta}$. Et toujours en choisissant un représentant $\dot{v}' \in G$ de v' tel que $\dot{v}'\theta(\dot{v}')^{-1} \in N(T)$. La droite

$$U_{-\beta}\dot{v}'$$

est un slice en \dot{v}' dans $\overline{\mathcal{O}_v}$.

6.5.3 Le rang augmente.

Bien que la fonction rang soit compatible avec l'ordre faible, elle ne l'est pas avec l'ordre de Bruhat (ordre fort). Pour les espaces symétriques généraux, il semblerait que les problèmes de normalité soient liés avec des inclusions où le rang augmente, et surtout avec les arêtes de type N dans le graphe $\Gamma(G/H)$. Et c'est ce qui se passe ici pour la lissité en codimension 1.

D'après la section précédente, si le rang augmente, cela veut dire que l'on est passé au niveau des involutions par la situation de la figure 4. On commence donc par calculer le slice S_1 à $\mathcal{O}_{(p,t)\tau'w^\circ}$ intersecté avec $\overline{\mathcal{O}_{(p,i)(i+1,t)\tau'w^\circ}}$. On considère le slice à la PSL_n -orbite correspondante dans $PSL_n/B \times PSL_n/B$, intersecté avec l'adhérence de la PSL_n orbite paramétrée par $(p,i)(i+1,t)\tau'w^\circ$. Ce slice est contenu dans $U^- \cap (p,t)\tau'w^\circ(U^-)$, et on vérifie que c'est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale :

$$U = (u_{k,l}) \text{ avec } , u_{i,p} = a, u_{i+1,p} = b, u_{t,i} = c, u_{t,i+1} = d \text{ avec } ac + bd = 0$$

et tous les autres coefficients nuls. Enfin, il faut prendre dans ce slice les anti-invariants par $\psi_{(p,t)\tau'w^\circ}$ pour avoir le slice S_1 . Or $\psi_{(p,t)\tau'w^\circ}$ échange a et c , et échange b et d . Donc S_1 a pour équation $a^2 + b^2 = 0$: il est formé de deux droites. Ainsi $\overline{\mathcal{O}_{(p,i)(i+1,t)\tau'w^\circ}}$ est singulière le long de $\mathcal{O}_{(p,t)\tau'w^\circ}$. De plus, la singularité est décrite par le slice, et en particulier, la normalisation de $\mathcal{O}_{(p,i)(i+1,t)\tau'w^\circ} \cup \mathcal{O}_{(p,t)\tau'w^\circ}$ n'est pas bijective.

En fait, on a un lemme général dans les espaces symétriques : soit \mathcal{O}_x une orbite de B dans un tel espace. Soit $\mathcal{O}_{x'}$ une orbite de B de codimension 1 dans $\overline{\mathcal{O}_x}$. On suppose que l'on a une racine complexe pour x et x' qui de plus monte x et x' . On suppose enfin que la normalisation

$$f : \widetilde{\mathcal{O}_x \cup \mathcal{O}_{x'}} \rightarrow \mathcal{O}_x \cup \mathcal{O}_{x'}$$

n'est pas bijective. Alors on a le

Lemme 6.8 *L'adhérence d'orbite $\overline{\mathcal{O}_{s_\alpha x}}$ est singulière le long de $\mathcal{O}_{s_\alpha x'}$. De plus, la normalisation*

$$F : \widetilde{\mathcal{O}_{s_\alpha x} \cup \mathcal{O}_{s_\alpha x'}} \rightarrow \mathcal{O}_{s_\alpha x} \cup \mathcal{O}_{s_\alpha x'}$$

n'est pas bijective.

Preuve : On pose $Y = \mathcal{O}_x \cup \mathcal{O}_{x'}$. La racine simple α est complexe pour x et x' et elle monte ces deux éléments ; ainsi, l'application

$$F_\alpha : P_\alpha \times_B Y \rightarrow P_\alpha Y$$

est bijective et propre. La normalisation $f : \tilde{Y} \rightarrow Y$ induit une application

$$f' : P_\alpha \times_B \tilde{Y} \rightarrow P_\alpha \times_B Y.$$

qui est aussi la normalisation. Ainsi on construit une application

$$g = F_\alpha \circ f' : P_\alpha \times_B \tilde{Y} \rightarrow P_\alpha Y$$

qui est birationnelle propre. Enfin les fibres de g sont formées de plusieurs points au dessus de x' (puisque f n'est pas bijective), et g est P_α -équivariante donc il y a aussi plusieurs points au-dessus de $P_\alpha x'$. Ce qui, avec le théorème de Zariski, permet de conclure. \diamond

La proposition 6.3 montre que pour tout $l \geq j > m$ la racine $(i_j, i_j + 1)$ est complexe pour $w_{j-1, m+1} * (p, t)\tau w^\circ$ et pour $w_{j-1, m+1} * (p, i)(i + 1, t)\tau w^\circ$. Ainsi, avec le lemme précédent, on a, pour tout $l \geq j > m$ l'adhérence de l'orbite paramétrée par $w_{j, m+1} * (p, i)(i + 1, t)\tau w^\circ$ est singulière le long de l'orbite paramétrée par $w_{j, m+1} * (p, t)\tau w^\circ$. En particulier, pour $j = l$, $\overline{\mathcal{O}_v}$ est singulière le long de $\mathcal{O}_{v'}$.

Finalement on a le lemme

Lemme 6.9 *Si $rg(v') > rg(v)$ alors $\overline{\mathcal{O}_v}$ est singulière le long de $\mathcal{O}_{v'}$ et donc non normale.*

Pour conclure on a le théorème suivant :

Théorème 7 *Dans l'espace symétrique PSL_n/PSO_n , une adhérence d'orbite $\overline{\mathcal{O}_v}$ de B est lisse en codimension 1 si et seulement si toutes les orbites de B de codimension 1 dans $\overline{\mathcal{O}_v}$ sont de rang inférieur ou égal à celui de \mathcal{O}_v .*

Ce théorème peut s'exprimer à l'aide de la combinatoire de la façon suivante :

Corollaire 6.3 *Dans PSL_n/PSO_n , une adhérence d'orbite $\overline{\mathcal{O}_v}$ est singulière en codimension 1 si et seulement si il existe deux racines $\alpha_1 \in C'(\varphi(v))$ et $\alpha_2 \in I(\varphi(v))$ telles que :*

(i) *la racine α_2 est complexe pour $s_{\alpha_1}\varphi(v)\theta(s_{\alpha_1})$, avec*

$$l(s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}\varphi(v)\theta(s_{\alpha_1})\theta(s_{\alpha_2})) - l(s_{\alpha_1}\varphi(v)\theta(s_{\alpha_1})) = 2,$$

(ii) la racine α_1 est imaginaire pour $s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}\varphi(v)\theta(s_{\alpha_1})\theta(s_{\alpha_2})$, avec

$$l(s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}\varphi(v)\theta(s_{\alpha_1})\theta(s_{\alpha_2})) - l(s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}\varphi(v)\theta(s_{\alpha_1})\theta(s_{\alpha_2})) = 1.$$

Preuve : D'après le théorème 7, $\overline{\mathcal{O}_v}$ est singulière en codimension 1 si et seulement si il existe une orbite $\mathcal{O}_{v'} \subset \overline{\mathcal{O}_v}$, de codimension 1 et de rang strictement plus grand que celui de \mathcal{O}_v . On choisit une décomposition de Springer

$$\varphi(v) = s_{i_1} \cdots s_{i_1} w_{\Pi}^{\circ} \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_1}).$$

D'après la section 6.4.2, $\varphi(v')$ est obtenue par effaçage de s_{i_k} , de plus, on est passé par la situation de la figure 4. Par suite, il existe deux racines qui vérifient les conditions du corollaire.

Réciproquement, si on a deux racines α_1 et α_2 qui vérifient les conditions du corollaire 6.3. On définit l'orbite v' telle que

$$\varphi(v') = s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}\varphi(v)\theta(s_{\alpha_1})\theta(s_{\alpha_2}).$$

On a alors $l(\varphi(v)) - l(\varphi(v')) = 3$ et $\mathcal{O}_{v'}$ est de codimension 1 dans $\overline{\mathcal{O}_v}$. Ainsi, cette relation d'adhérence d'orbite est nécessairement obtenue par effaçage, de plus, on est passé par la situation de la figure 4. Ce qui termine la preuve du corollaire. \diamond

Remarque : Le théorème 7 donne aussi un critère de lissité en codimension 1 pour SL_n/SO_n . Pour cela on remarque que dans la variété de drapeaux de SL_n (qui est la même que celle de PSL_n), les orbites de SO_n sont pratiquement les mêmes que celles de PSO_n . En effet, d'après la section 8.1, dans la variété de drapeaux de SL_n , les orbites de $O(n)$ et celles de SO_n diffèrent uniquement si l'involution associée est sans point fixe. Ainsi, si n est impair le théorème 7, est également vrai pour toutes les adhérences d'orbites de B dans SL_n/SO_n .

Troisième partie

Exemples pathologiques de singularités

7 Exemples de singularités.

7.1 Des diviseurs non normaux.

Dans cette section on donne des exemples de diviseurs irréductibles, stables par B , dans des espaces symétriques, qui sont singuliers en codimension 1. Ce sont donc des adhérences d'orbites de B dans G/H de codimension 1 qui ne sont pas normales.

7.1.1 Un exemple élémentaire.

On a beaucoup d'exemples de diviseurs stables par B non normaux dans le cadre des variétés sphériques. Le plus simple semble-t-il, est le suivant. Soit H le sous-groupe de SL_3 formé des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Ce sous-groupe est sphérique, et l'interprétation géométrique de l'espace homogène SL_3/H est l'ensemble des paires de points distincts de \mathbb{P}^2 . Le graphe $\Gamma(SL_3/H)$ est représenté par la figure 6. Pour obtenir ce graphe, on peut interpréter les orbites de $B \times H$ dans SL_3 comme données par la position relative d'un drapeau de \mathbb{P}^2 (i.e. une droite et un point sur cette droite) et de deux points distincts non ordonnés de \mathbb{P}^2 . Le parabolique P_α fixe une droite de \mathbb{P}^2 et le parabolique P_β fixe un point de \mathbb{P}^2 .

Si on note Z l'orbite fermée de B dans SL_3/H , alors $D = P_\beta P_\alpha Z$ est non normale. En effet, α est de type U pour $P_\beta Z$, donc l'application

$$P_\alpha \times_B P_\beta Z \rightarrow P_\alpha P_\beta Z$$

est birationnelle. Cependant, cette application devient de degré 2 au-dessus de $P_\alpha Z \subset D$, puisque α est de type N pour Z . Ainsi, par le théorème principal de Zariski, Y n'est pas normale.

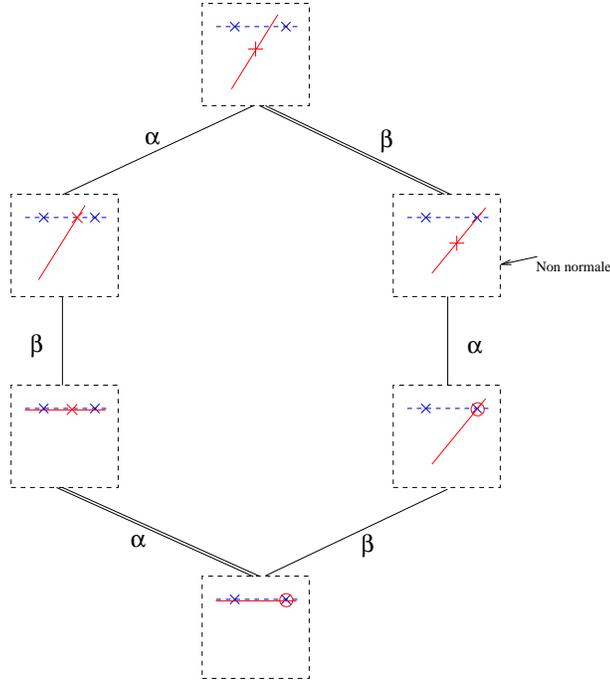


FIG. 6 – Un diviseur non normal

Cet exemple est intéressant ; cependant, il est dans le cadre général des variétés sphériques, et, de plus, il est obtenu pour un sous-groupe H non connexe. Plus précisément, si on considère l'application

$$F : SL_3/H^\circ \rightarrow SL_3/H$$

alors $F^{-1}(D)$ est formé de deux composantes irréductibles qui se coupent en codimension 1. C'est de là que vient la singularité de D . Dans la section suivante, on va construire des diviseurs dans des espaces symétriques, qui seront irréductibles, stables par B et non normaux.

7.1.2 Dans les espaces symétriques.

Soit deux entiers p, q tels que $2 < p \leq q$. On considère le groupe $G = SO(p + q)$. Pour cela, on choisit une forme quadratique non dégénérée β sur \mathbb{C}^{p+q} , de sorte que l'on identifie $SO(p + q)$ avec $SO(\beta)$. On choisit aussi un sous-espace E de dimension p tel que la restriction de β à E soit non

dégénérée. Ainsi on a une décomposition (orthogonale pour β)

$$\mathbb{C}^{p+q} = E \oplus E^\perp.$$

Enfin, soit ζ l'application linéaire agissant par moins identité en restriction à E et par l'identité en restriction à E^\perp . La conjugaison par ζ est une involution θ de $SO(p+q)$. Le sous-groupe des points fixes est formé des applications de $SO(p+q)$ qui laissent stable la décomposition $E \oplus E^\perp$. Ce sont donc les applications qui préservent $\beta|_E$, $\beta|_{E^\perp}$ et qui sont de déterminant 1. On notera ce groupe $S(O(p) \times O(q))$.

On va construire un diviseur irréductible, stable par $S(O(p) \times O(q))$, dans la grassmannienne des sous-espaces de dimension $p-1$, totalement isotropes de \mathbb{C}^{p+q} . Pour tout entier k , on notera $\text{Gr}_k^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$ la grassmannienne des sous-espaces totalement isotropes de dimension k dans \mathbb{C}^{p+q} . Soit

$$D = \{V \in \text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q}) \mid \exists v \in E \cap V^\perp \text{ tel que } \beta(v, v) = 0\}.$$

On va montrer la proposition suivante :

Proposition 7.1 *La sous-variété D est un diviseur de $\text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$, irréductible et stable par $S(O(p) \times O(q))$. De plus, D est singulier en codimension 1.*

Preuve : On construit une variété projective \tilde{D} et une application birationnelle avec des fibres non connexes $\pi_1 : \tilde{D} \rightarrow D$. Soit la variété

$$\tilde{D} = \{(V, v) \in \text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q}) \times \text{Gr}_1^{\text{is}}(E) \mid V \in D \text{ et } v \in V^\perp\}.$$

On a les restrictions des deux projections :

$$\begin{aligned} \pi_1 : \tilde{D} &\rightarrow D \\ \pi_2 : \tilde{D} &\rightarrow \text{Gr}_1^{\text{is}}(E). \end{aligned}$$

On commence par étudier \tilde{D} à l'aide de la projection π_1 . Celle-ci est une fibration sur $\text{Gr}_1^{\text{is}}(E)$, qui est une quadrique lisse de $\mathbb{P}(E)$, de fibre au-dessus de $v \in \text{Gr}_1^{\text{is}}(E)$

$$\pi_1^{-1}(v) = \{V \in \text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q}) \mid v \in V^\perp\}.$$

C'est une sous-variété de Schubert de $\text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$ (i.e. l'adhérence d'une orbite d'un sous-groupe de Borel de $SO(p+q)$ dans $\text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$). Ainsi la

fibration est à fibre irréductible. De plus, l'espace E est de dimension strictement plus grande que 2, donc la quadrique $\text{Gr}_1^{\text{is}}(E)$ est irréductible. Ainsi \tilde{D} est irréductible. L'application π_1 est surjective, donc D est irréductible. Finalement, D est une sous-variété irréductible, stable par $S(O(p) \times O(q))$, de $\text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$.

On montre maintenant que D est un diviseur. Pour tout $V \in \text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$, V^\perp est de dimension $q+1$ et par conséquent il intersecte E suivant un sous-espace de dimension au moins 1. Ainsi

$$\Omega = \{V \in \text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q}) \mid \dim(V^\perp \cap E) = 1\}.$$

est un ouvert de $\text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$. On a le lemme

Lemme 7.1 *L'ouvert Ω rencontre D . De plus, la restriction de π_1 à $\pi_1^{-1}(\Omega \cap D)$ est bijective.*

Preuve : On choisit une base (e_1, \dots, e_p) de E et une base $(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ de E^\perp , telles que $\beta(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$. Soit alors le sous-espace

$$V = \text{Vect} \left(\{e_k + \imath e_{p+k}\}_{k=1 \dots p-2} \cup \{(e_{p-1} + \imath e_p) + (e_{2p-1} + \imath e_{2p})\} \right).$$

On vérifie que V est un sous-espace totalement isotrope tel que $V^\perp \cap E = \mathbb{C}(e_{p-1} + \imath e_p)$. Ceci montre que Ω rencontre D . De plus, si $V \in \Omega \cap D$ alors la fibre de $\pi_1^{-1}(V)$ est formée d'un unique point de $\text{Gr}_1^{\text{is}}(E)$, puisque $V^\perp \cap E$ est de dimension 1. \diamond

On retourne à la preuve de la proposition 7.1. En premier lieu, le lemme ci-dessus montre que π_1 est une application birationnelle. Mais il montre aussi que D est un diviseur de $\text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$. En effet, $D \cap \Omega$ est un diviseur de Ω défini par l'équation $\beta|_{E \cap V^\perp} = 0$. Enfin pour montrer que D n'est pas normal, on va montrer que les fibres de π_1 ne sont pas toutes connexes. On décrit un peu plus précisément ces fibres. Soit $V \in D$; on définit le cône isotrope de β restreinte à $E \cap V^\perp$:

$$C_V = \{v \in E \cap V^\perp \mid \beta(v, v) = 0\}.$$

La fibre $\pi_1^{-1}(V)$ est donc le projectivisé de ce cône :

$$\pi_1^{-1}(V) = \mathbb{P}(C_V).$$

Ainsi il suffit de trouver $V \in D$ tel que $V^\perp \cap E$ soit de dimension 2, et que la restriction de β à $V^\perp \cap E$ soit non dégénérée. Soit le sous-espace

$$V = \text{Vect} \left(\{e_k + \varepsilon e_{p+k}\}_{k=1 \dots p-2} \cup \{e_{2p-1} + \varepsilon e_{2p}\} \right).$$

C'est un sous-espace totalement isotrope qui appartient à D et on a

$$V^\perp \cap E = \text{Vect}(e_{p-1}, e_p).$$

Ainsi $\pi_1^{-1}(V)$ est formée de deux points, et le théorème principal de Zariski permet d'affirmer que D n'est pas normal. Comme D est de Cohen-Macaulay, il est singulier en codimension 1. \diamond

Ce diviseur D produit dans l'espace symétrique $SO(p+q)/S(O(p) \times O(q))$ un diviseur D' stable par B irréductible qui est lui aussi singulier en codimension 1. Le fait que D soit irréductible dans $\text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$, montre que la singularité ne provient pas du fait que $S(O(p) \times O(q))$ n'est pas connexe. En effet, D est irréductible et stable par $SO(p) \times SO(q)$, ainsi, ce diviseur est aussi l'adhérence d'une $SO(p) \times SO(q)$ -orbite dans $\text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$. Donc, si on considère l'application

$$F : SO(p+q)/SO(p) \times SO(q) \rightarrow SO(p+q)/S(O(p) \times O(q)),$$

le diviseur $F^{-1}(D')$ est irréductible. Ce diviseur est l'adhérence d'une orbite d'un sous-groupe de Borel dans $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$, et il est singulier en codimension 1.

Remarques :

- La variété \tilde{D} que l'on a construite n'est pas lisse. Elle se fibre sur $\text{Gr}_1^{\text{is}}(E)$ avec fibre une variété de Schubert Y dans $\text{Gr}_{p-1}^{\text{is}}(\mathbb{C}^{p+q})$. Or on peut montrer que Y est singulière.
- Cet exemple donne des diviseurs non normaux dans des espaces symétriques scindés. En effet, $SO(4n)/S(O(2n) \times O(2n))$ est scindé (voir [Spr87, Table 1]).

7.2 Des adhérences d'orbites qui ne sont pas de Cohen-Macaulay.

Dans cette section, on construit, dans SL_n/SO_n , des exemples d'adhérences d'orbites qui ne sont pas de Cohen Macaulay. On fixe une forme quadratique non dégénérée β , et on choisit un sous-groupe de Borel B et un tore

maximal T tels que (B, T) soit standard. Les racines simples sont alors paramétrées par les couples $\alpha_i = (i, i + 1)$. On notera S l'ensemble des racines simples, et s_{α_i} la réflexion simple associée à α_i . Pour chaque sous-ensemble Π de S , on notera P_{Π} le parabolique contenant B associé à Π .

7.2.1 Un premier exemple d'adhérence d'orbite qui n'est pas de Cohen-Macaulay.

Dans SL_7/SO_7 on trouve des adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel qui ne sont pas de Cohen Macaulay. La figure 7 représente une partie du graphe de SL_7/SO_7 . C'est un intervalle de Bruhat qui est obtenu à partir de

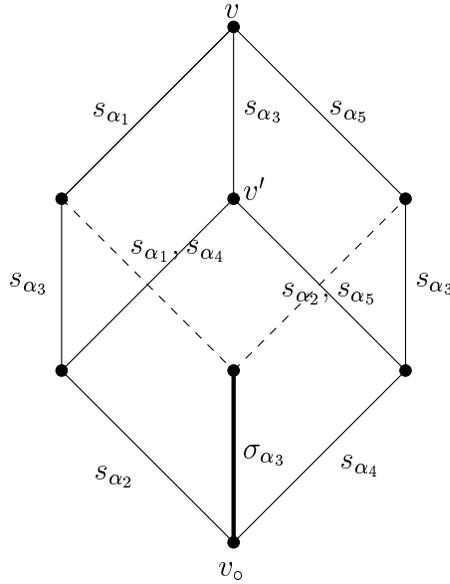


FIG. 7 – Un intervalle de $\Gamma(SL_7/SO_7)$

la description des orbites à travers l'application φ . On a ajouté, en pointillés, les relations d'inclusions d'adhérences d'orbites. Dans ce graphe, l'orbite \mathcal{O}_v est paramétrée par l'involution $x = (1, 3)(2, 5)(4, 6)$. Une décomposition de Springer de $\varphi(v)$ est

$$\varphi(v) = s_{\alpha_3} s_{\alpha_4} s_{\alpha_2} s_{\alpha_5} s_{\alpha_6} s_{\alpha_5} s_{\alpha_4} \theta(s_{\alpha_4}) \theta(s_{\alpha_5}) \theta(s_{\alpha_6}) \theta(s_{\alpha_5}) \theta(s_{\alpha_2}) \theta(s_{\alpha_4}) \theta(s_{\alpha_3}).$$

On va montrer que $X = \overline{\mathcal{O}_v}$ est lisse en codimension 1 et non normale.

Pour la lissité en codimension 1, on vérifie que les seules orbites de B de codimension 1 dans X sont $s_{\alpha_1}v, s_{\alpha_3}v, s_{\alpha_5}v$. D'après le théorème 7, l'adhérence $\overline{\mathcal{O}_v}$ est lisse en codimension 1.

L'adhérence d'orbite $\overline{\mathcal{O}_{v'}}$ est homogène pour l'action du parabolique maximal $P_{S \setminus \alpha_3}$. En effet, cette orbite est paramétrée par l'involution :

$$y = (1, 4)(2, 5)(3, 6),$$

et on vérifie facilement que pour tout $i \neq 3$ on a $s_{\alpha_i}ys_{\alpha_i} > y$. D'après le lemme 3.6, l'adhérence d'orbite $\overline{\mathcal{O}_{v'}}$ est donc stable par les paraboliques minimaux P_{α_i} avec $i \neq 3$. Elle correspond à l'orbite fermée de SO_7 dans la grassmannienne des 3-plans de \mathbb{C}^7 . Elle est donc lisse. Par conséquent une résolution des singularités de X est donnée par l'application

$$F : P_{\alpha_3} \times_B \overline{\mathcal{O}_{v'}} \longrightarrow P_{\alpha_3} \overline{\mathcal{O}_{v'}} = X.$$

Cette application F est propre et birationnelle (puisque s_{α_3} monte v' par une arête de type U). Elle devient de degré deux le long de $F^{-1}(P_{\alpha_3} \overline{\mathcal{O}_{v_o}})$. En effet, $F^{-1}(P_{\alpha_3} \overline{\mathcal{O}_{v_o}}) = P_{\alpha_3} \times_B (P_{\alpha_3} \overline{\mathcal{O}_{v_o}} \cap \overline{\mathcal{O}_{v'}})$, or sur le graphe toutes les relations d'inclusions d'adhérences d'orbites sont représentées ; en particulier, $P_{\alpha_3} \overline{\mathcal{O}_{v_o}} \cap \overline{\mathcal{O}_{v'}} = \overline{\mathcal{O}_{v_o}}$ donc $F^{-1}(P_{\alpha_3} \overline{\mathcal{O}_{v_o}}) = P_{\alpha_3} \times_B \overline{\mathcal{O}_{v_o}}$. Enfin, la réflexion simple s_{α_3} est de type N pour \mathcal{O}_{v_o} , donc F devient de degré deux le long de cette sous-variété. Ainsi les fibres de F ne sont pas connexes, ce qui d'après le théorème principal de Zariski montre que X n'est pas normale. Finalement X n'est pas de Cohen-Macaulay d'après le critère de normalité de Serre ([Eis95, §18.3]).

7.2.2 Une généralisation de cet exemple.

On va décrire l'adhérence d'orbite de la section précédente d'une façon un peu plus géométrique, et montrer, à l'aide de résolutions des singularités explicites, que cet adhérence d'orbite n'est pas de Cohen-Macaulay. On va aussi généraliser l'exemple précédent dans SL_{2n+1}/SO_{2n+1}

On regarde cette fois les orbites de SO_{2n+1} dans la variété de drapeaux \mathcal{F}_{2n+1} de SL_{2n+1} . Soit la sous-variété

$$X = \{V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{2n} \mid \beta|_{V_{n-1}} = 0 \text{ et } \text{rg}(\beta|_{V_{n+1}}) \leq 2\} \subset \mathcal{F}_{2n+1}.$$

Remarque : Cette variété est l'adhérence de l'orbite paramétrée par l'involution

$$x = (1, n)(2, n+2) \dots (k, n+k) \dots (n-1, 2n-1)(n+1, 2n)$$

en particulier, pour $n = 3$, on retrouve l'exemple précédent.

On va construire une désingularisation $F : \tilde{X} \rightarrow X$. Quelques remarques géométriques pour commencer.

Lemme 7.2 *Soit $\mathcal{F} = V_1 \subset \dots \subset V_{2n}$ un élément de X tel que $\text{rg}(\beta|_{V_{n+1}}) = 2$, alors*

$$\dim(V_{n+1}^{\perp\beta} \cap V_{n-1}) \geq n - 2.$$

Preuve : Considérons le noyau de β restreinte à V_{n+1} : $Q = \ker(\beta|_{V_{n+1}})$. Le rang de la restriction de β à V_{n+1} est 2, donc le sous-espace Q est de dimension $n - 1$. La dimension de $V_{n+1}^{\perp\beta} \cap V_{n-1}$ est aussi la dimension de $Q \cap V_{n-1}$. A priori, cette dimension est supérieure ou égale à $n - 3$ (car on intersecte deux sous-espaces de dimension $n - 1$ dans V_{n+1} qui est un espace de dimension $n + 1$). Si la dimension de $W = Q \cap V_{n-1}$ est $n - 3$, alors $V_{n-1} = W \oplus P$ où P est un sous-espace de dimension 2. Le plan P n'intersecte pas Q , donc c'est un supplémentaire de Q dans V_{n+1} . Par conséquent, β restreinte à P est non dégénérée, ce qui contredit l'hypothèse $\beta|_{V_{n-1}} = 0$. Donc la dimension de W est supérieure ou égale à $n - 2$. \diamond

On définit alors \tilde{X} comme un sous-ensemble de $\mathcal{F}_{2n+1} \times \text{Gr}_n$ où Gr_n est la grassmannienne des n -plans dans \mathbb{C}^{2n+1} , notée précédemment $\text{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n+1})$:

$$\tilde{X} = \{((V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{2n}), W) \mid V_{n-1} \subset W \subset V_{n+1} \text{ et } \beta|_W = 0\}.$$

Lemme 7.3 *La variété \tilde{X} est lisse et irréductible.*

Preuve : On considère la projection π de \tilde{X} sur Gr_n . L'image de π est l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes de dimension n , qui est une variété irréductible et lisse. De plus, l'application π est une fibration sur cette grassmannienne de n -plans totalement isotropes. La fibre au-dessus de W est l'ensemble des drapeaux

$$\pi^{-1}(W) = \{V_1 \subset \dots \subset V_{2n} \mid V_{n-1} \subset W \subset V_{n+1}\}.$$

On considère alors la restriction de la projection

$$\pi_2|_{\pi^{-1}(W)} : \pi^{-1}(W) \rightarrow \text{Gr}_{n-1} \times \text{Gr}_{n+1}.$$

Cette application est encore une fibration. L'image est homogène sous le parabolique Q qui stabilise W (donc irréductible et lisse). La fibre $\pi_2^{-1}(V_{n-1} \subset V_{n+1})$ est un espace homogène sous le parabolique P qui stabilise $V_{n-1} \subset$

V_{n+1} . La fibre de π_2 est donc irréductible et lisse. Ainsi, la fibre de π est irréductible et lisse, et par suite \tilde{X} est irréductible et lisse. \diamond

Soit alors F la projection de \tilde{X} sur \mathcal{F}_{2n+1} . Il est clair que F envoie \tilde{X} sur X .

Lemme 7.4 *L'application F est birationnelle. C'est un isomorphisme en restriction à l'ouvert $F^{-1}(\Omega)$, où*

$$\Omega = \{(V_1 \subset \dots \subset V_{2n}) \in X \mid \dim(V_{n+1}^{\perp\beta} \cap V_{n-1}) = n - 2 \text{ et } \text{rg}(\beta|_{V_{n+1}}) = 2\}$$

Preuve : Il s'agit bien d'un ouvert d'après le lemme 7.2. Maintenant, pour chaque drapeau de Ω , soit W un sous-espace de dimension n totalement isotrope tel que $V_{n-1} \subset W \subset V_{n+1}$. Le rang de β restreinte à V_{n+1} est 2, donc tout sous-espace de dimension n totalement isotrope doit contenir le noyau de β . De plus, W doit contenir aussi V_{n-1} , donc W contient V_{n-1} et $\ker(\beta|_{V_{n+1}})$. D'après l'hypothèse sur les dimensions, on a

$$W = \text{Vect}(V_{n-1}, \ker \beta|_{V_{n+1}}).$$

C'est-à-dire, π est un isomorphisme en restriction à Ω . \diamond

Ainsi, F est une résolution des singularités de X . Cependant, cette application devient de degré 2 en codimension "assez grande" :

Lemme 7.5 *L'application F est de degré 2 en restriction à $F^{-1}(Z)$ où*

$$Z = \{(V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{2n}) \in X \mid \ker(\beta|_{V_{n+1}}) = V_{n-1}\}.$$

Preuve : Soit $\mathcal{F} = (V_1 \subset \dots \subset V_{2n}) \in Z$, alors $V_{n+1} = V_{n-1} \oplus P$ où P est un 2-plan sur lequel β est non dégénérée. Soit (e_1, e_{-1}) une base de vecteurs isotropes de P telle que $\beta(e_1, e_{-1}) = 1$. Soit W un sous-espace de dimension n de V_{n+1} contenant V_{n-1} tel que $\beta|_W = 0$; alors W est engendré par V_{n-1} et un vecteur $v = \lambda e_1 + \mu e_{-1}$ de P . La condition $\beta|_W = 0$ se traduit par $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$; ainsi on a exactement deux antécédents de \mathcal{F} dans \tilde{X} qui sont $W = \text{Vect}(V_{n-1}, e_1)$ et $W_2 = \text{Vect}(V_{n-1}, e_{-1})$. \diamond

Ainsi X ne peut être normale par le théorème principal de Zariski. Pour finir, calculons la codimension de Z dans X .

Lemme 7.6 *La codimension de Z dans X est $n - 1$.*

Preuve : Pour calculer cette codimension on va “dévissier” le problème. On commence par se restreindre à l’ensemble Ω' des éléments de X tels que le rang de β en restriction à V_{n+1} soit 2. Cet ensemble est un ouvert de X qui contient Z .

Etape 1 : Considérons la projection :

$$f_1 : \Omega' \rightarrow \{V_{n-1} \subset V_{n+1} \mid \beta|_{V_{n-1}} = 0 \text{ et } \text{rg}(\beta|_{V_{n+1}}) = 2\} = \Omega'_1.$$

Cette application est surjective. C’est une fibration de fibre au dessus de chaque point x , un espace homogène sous le parabolique P qui stabilise x . L’image de Z par f_1 est

$$Z_1 = \{V_{n-1} \subset V_{n+1} \mid V_{n+1} \perp V_{n-1} \text{ et } \text{rg}\beta|_{V_{n+1}} = 2\}.$$

On remarque alors que $f_1^{-1}(Z_1) = Z$, ainsi la codimension de Z dans X est la même que celle de Z_1 dans Ω'_1 .

Etape 2 : Considérons l’application :

$$f_2 : \Omega'_1 \rightarrow \{V_{n+1} \mid \text{rg}(\beta|_{V_{n+1}}) = 2\}.$$

C’est encore une fibration, et elle est surjective en restriction à X_1 et Z_1 . Par conséquent, la codimension de Z dans X peut se calculer dans une fibre : pour chaque $x \in f_2(\Omega'_1)$, la codimension de Z dans X est aussi la codimension de $f_2^{-1}(x) \cap Z_1$ dans $f_2^{-1}(x)$.

Etape 3 : Calcul de la codimension dans une fibre. On fixe V_{n+1} sur lequel on a la forme quadratique $\bar{\beta}$ de rang 2 ; la fibre au dessus de V_{n+1} est alors

$$f_2^{-1}(V_{n+1}) = \{W \subset V_{n+1} \mid \dim(W) = n - 1, \bar{\beta}|_W = 0\}.$$

L’intersection de Z_1 avec la fibre se réduit à un point $W = \ker \bar{\beta}$, par conséquent la codimension de Z dans X est la dimension de $f_2^{-1}(V_{n+1})$. Considérons alors l’application

$$h : \begin{array}{ccc} f_2^{-1}(V_{n+1}) \setminus \ker \bar{\beta} & \rightarrow & \mathbb{P}((\ker \bar{\beta})^*) \\ W & \mapsto & W \cap \ker \bar{\beta}. \end{array}$$

D’après le lemme 7.2, l’intersection $W \cap \ker \bar{\beta}$ est un hyperplan de $\ker \bar{\beta}$, donc h est bien définie. Elle est surjective et par conséquent la dimension de $f_2^{-1}(V_{n+1})$ est égale à $n - 2$ (dimension de $\mathbb{P}((\ker \bar{\beta})^*)$) plus la dimension de la fibre générique de h . Pour calculer cette fibre $h^{-1}(W)$, on choisit un

supplémentaire orthogonal de $W \cap \ker(\overline{\beta})$ dans V_{n+1} : $V_{n+1} = M \oplus W \cap \ker \overline{\beta}$. La fibre s'identifie alors à l'ensemble des droites de M isotropes pour $\overline{\beta}$. L'espace M est de dimension 3 et $\overline{\beta}$ est une forme quadratique de rang 2, ainsi l'ensemble des droites isotropes est de dimension 1. Et on obtient $\text{codim}_X(Z) = (n - 2) + 1 = n - 1$. \diamond

Enfin on a la proposition suivante :

Proposition 7.2 *X n'est pas de Cohen-Macaulay.*

Preuve : En effet on considère $\Omega \cup Z$. C'est un voisinage de Z dans X , car c'est l'ensemble des drapeaux de X tel que le rang de β en restriction à V_{n+1} soit 2 (le rang maximum). L'application F est un isomorphisme au dessus de Ω , par conséquent Ω est formé de points lisses de X . Mais F devient de degré 2 au dessus de Z , donc X n'est pas normale. De plus, la codimension de Z dans X est $n - 1$, donc d'après le critère de normalité de Serre [Eis95], X ne peut être de Cohen-Macaulay. \diamond

8 Étude géométrique des orbites dans un espace symétrique sous SL_n .

Lorsque l'on veut paramétrer les orbites d'un sous-groupe de Borel dans les espaces symétriques, et en trouver des représentants, on peut utiliser la méthode de Richardson et Springer décrite dans la section 1. Mais, dans le cas des espaces symétriques sous SL_n , on peut déterminer ces orbites de façon directe, par des arguments géométriques. C'est ce qu'ont fait Kraft et Howe [HK98] pour SL_n/SO_n . On reprend leur résultat puis on va l'adapter aux autres espaces symétriques SL_{2n}/Sp_{2n} et $SL_{p+q}/S(GL_p \times GL_q)$. Ce qui permet de recouvrir tous les espace symétriques sous SL_n d'après [Spr87].

8.1 Le groupe spécial orthogonal.

Je reprend ici le lemme de [HK98] pour paramétrer les orbites d'un sous-groupe de Borel dans SL_n/SO_n . On dira qu'une base (v_1, \dots, v_n) est adaptée à un drapeau complet $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n$ si l'espace vectoriel engendré par (v_1, \dots, v_i) est \mathcal{F}_i .

Lemme 8.1 Soit β une forme quadratique non dégénérée sur \mathbb{C}^n , et \mathcal{F} un drapeau complet de \mathbb{C}^n . Alors il existe une base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{C}^n adaptée à \mathcal{F} et une permutation $\sigma = \sigma(\beta, \mathcal{F})$ d'ordre 2 telle que :

$$\beta(v_i, v_j) = \delta_{i, \sigma(j)}.$$

Preuve : La preuve se fait par récurrence sur la dimension n . Pour la dimension 1 et 2 la preuve est évidente. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang $n - 1$, soit alors β une forme quadratique non dégénérée sur \mathbb{C}^n , et \mathcal{F} un drapeau complet ($\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n$). Prenons un vecteur non nul $v_1 \in \mathcal{F}_1$.

- Si ce vecteur v_1 est non isotrope, il suffit alors de prendre $\mathcal{F}'_i = \mathcal{F}_{i+1} \cap \mathcal{F}_1^{\perp\beta}$ pour $1 \leq i \leq n - 1$. C'est un drapeau complet de $\mathcal{F}_1^{\perp\beta}$, et β restreinte à ce sous-espace est non dégénérée. On applique alors l'hypothèse de récurrence à cet espace et on obtient la base attendue.
- Si v_1 est isotrope, prenons le premier sous-espace du drapeau qui contient un vecteur non orthogonal à v_1 ; c'est-à-dire, considérons

$$i = \inf\{j \mid \dim(\mathcal{F}_1^{\perp\beta} \cap \mathcal{F}_j) < \dim \mathcal{F}_j\}.$$

On peut alors choisir $v_i \in \mathcal{F}_i$ tel que v_i soit isotrope, et $\beta(v_1, v_i) = 1$. En effet, soit un vecteur $w \in \mathcal{F}_i$ qui n'est pas dans l'orthogonal de \mathcal{F}_1 ; alors $w' = w - \frac{\beta(w, w)}{2\beta(v_1, w)} w$ est isotrope et toujours non orthogonal à v_1 ; enfin $v_i = \frac{w'}{\beta(v_1, w')}$ convient. Il ne reste alors plus qu'à appliquer le lemme à l'orthogonal du plan $P = \text{Vect}(v_1, v_i)$ et au drapeau $\mathcal{F}_j \cap P^{\perp\beta}$. Ce dernier est bien un drapeau complet de $P^{\perp\beta}$ (on vérifie que si $j < i$, alors $\mathcal{F}_j = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathcal{F}_j \cap P^{\perp\beta}$ donc $\dim(\mathcal{F}_j \cap P^{\perp\beta}) = j - 1$; et si $j > i$, alors $\mathcal{F}_j = P \oplus \mathcal{F}_j \cap P^{\perp\beta}$ donc $\dim(\mathcal{F}_j \cap P^{\perp\beta}) = j - 2$.) De plus, β restreinte au sous-espace $\text{Vect}(v_1, v_i)^{\perp\beta}$ est non dégénérée, donc on applique l'hypothèse de récurrence, ce qui permet de conclure. \diamond

Ce lemme permet de paramétrer les orbites de $B \times O_n$ dans GL_n . En effet, on choisit une forme quadratique non dégénérée β , et on étudie les orbites de $O(\beta)$ dans GL_n/B (la variété des drapeaux de GL_n). Pour chaque involution σ de S_n on peut construire un drapeau \mathcal{F} tel que $\sigma(\beta, \mathcal{F}) = \sigma$ (notation du lemme 8.1). En effet, soit une base (e_1, \dots, e_n) dans laquelle la matrice de β est l'identité. Soit S la matrice de permutation représentant σ . Cette matrice est symétrique, elle peut donc s'écrire $S = {}^t P P$. La base (v_1, \dots, v_n)

définie par $v_i = P(e_i)$ fournit le drapeau souhaité. Réciproquement, si on a deux drapeaux \mathcal{F} et \mathcal{G} tels que $\sigma(\beta, \mathcal{F}) = \sigma(\beta, \mathcal{G})$, alors les bases adaptées données par le lemme 8.1 diffèrent d'un élément de $O(\beta)$. Ainsi ce lemme montre que les involutions de S_n paramètrent exactement les $B \times O_n$ -orbites dans GL_n .

De plus, ce lemme a une interprétation géométrique : $\sigma = \sigma(\beta, \mathcal{F})$ indique la position relative de \mathcal{F} et $\mathcal{F}^{\perp\beta}$. En effet, soit la base (v_1, \dots, v_n) fournie par le lemme. On vérifie que

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)^{\perp\beta} = \text{Vect}(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(n)}).$$

On a donc $\mathcal{F}^{\perp\beta} = \sigma w^\circ \mathcal{F}$ où w° désigne l'élément de plus grande longueur de S_n .

Pour obtenir les $SO(\beta)$ -orbites dans $SL_n/B = GL_n/B$, il faut décrire comment une $O(\beta)$ -orbite se décompose en $SO(\beta)$ -orbites. Soient deux drapeaux \mathcal{F} et \mathcal{G} dans la même $O(\beta)$ -orbite. Soient l'involution $\sigma = \sigma(\beta, \mathcal{F})$, et les bases adaptées (v_1, \dots, v_n) et (w_1, \dots, w_n) données par le lemme. L'application g définie par $g(v_i) = w_i$ est un élément de $O(\beta)$. Si l'involution σ possède un point fixe i , alors il suffit de d'envoyer soit v_i sur w_i ou v_i sur $-w_i$ pour avoir une transformation de $SO(\beta)$. En revanche, si σ n'a pas de point fixe, alors il y a deux orbites pour l'action de $SO(\beta)$ suivant le "premier" sous-espace totalement isotrope maximal qui apparaît. En effet, $SO(\beta)$ a deux orbites dans l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux ; or si on décompose σ en produit de transpositions de supports disjoints : $\sigma = \prod_{i \in I} (i, \sigma(i))$ où $\forall i \in I \sigma(i) > i$, le sous-espace $V = \text{Vect}(v_i, i \in I)$ est alors totalement isotrope ; il en est de même pour $W = \text{Vect}(w_i, i \in I)$. Si on veut envoyer le drapeau associé à (v_1, \dots, v_n) sur celui associé à (w_1, \dots, w_n) par une transformation de $SO(\beta)$, alors on doit envoyer V sur W , ce qui n'est possible que si ces deux sous-espaces totalement isotropes sont du même type pour $SO(\beta)$.

Enfin ce lemme permet de construire des représentants des orbites de SO_n dans SL_n/B . On prend la forme quadratique définie en 1.4 et une involution $\sigma = \prod_{i \in I} (i, \sigma(i))$ (toujours avec pour tout i , $i < \sigma(i)$). Pour construire un drapeau \mathcal{F} tel que $\sigma(\beta, \mathcal{F}) = \sigma$, il suffit d'appliquer l'algorithme suivant :

- Si $1 \notin I$ alors on prend comme premier vecteur du drapeau :
 - si n est impair $v_1 = e_{[n/2]}$ (qui est non isotrope) et on recommence sur l'orthogonal de ce vecteur (qui est formé des $e_i, i \neq [n/2]$),
 - si n est pair $v_1 = e_1 + e_{-1}$, et, dans ce cas il y a forcément un autre $k \notin I \cup \sigma(I)$ et on prend alors comme $k^{\text{ième}}$ vecteur du drapeau $(e_1 - e_{-1})$.

On recommence alors sur l'orthogonal de ce plan $\text{Vect}(e_1, e_{-1})$.

- si $1 \in I$ alors on prend e_1 comme premier vecteur et e_{-1} comme $\sigma(1)^{\text{ième}}$ vecteur et on recommence sur l'orthogonal de $\text{Vect}(e_1, e_{-1})$.

Par cet algorithme, on associe à chaque involution σ un drapeau \mathcal{F}_σ , ce qui donne des représentants des orbites de O_n dans SL_n/B . Il suffit donc de trouver des représentants des orbites de SO_n dans une O_n -orbite paramétrée par une involution sans point fixe. Pour cela on définit le drapeau \mathcal{F}'_σ en échangeant le premier et le $\sigma(1)^{\text{ième}}$ vecteur de la base définie par l'algorithme. Ainsi, on a deux drapeaux qui sont dans la même O_n -orbite mais qui ne sont pas dans la même SO_n -orbite.

Remarque : L'application $\varphi : V \rightarrow W$ définie dans la section 2.1.1 est ici

$$\varphi : (\mathcal{F}, \beta) \mapsto \sigma(\mathcal{F}, \beta)w^\circ.$$

8.2 Le groupe symplectique.

On se place maintenant dans SL_{2n} . On veut trouver de représentants des orbites d'un Borel dans SL_{2n}/Sp_{2n} où Sp_{2n} est le groupe qui laisse invariant une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée. Les idées du lemme suivant sont essentiellement les mêmes que dans le cas précédent ; il s'agit d'étudier la position relative d'une forme bilinéaire antisymétrique et d'un drapeau complet.

Lemme 8.2 *Soit ω une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur \mathbb{C}^{2n} , et \mathcal{F} un drapeau complet de \mathbb{C}^{2n} . Alors il existe une base (v_1, \dots, v_{2n}) de \mathbb{C}^{2n} adaptée à \mathcal{F} et une permutation $\sigma = \sigma(\omega, \mathcal{F})$ d'ordre 2 et sans point fixe, telles que :*

$$\omega(v_i, v_j) = \frac{i - \sigma(i)}{|i - \sigma(i)|} \delta_{i, \sigma(j)}.$$

Preuve : La preuve se fait une fois de plus par récurrence sur n . Prenons un vecteur non nul v_1 de \mathcal{F}_1 . Ce vecteur est bien évidemment isotrope (ω est antisymétrique). On cherche alors le premier sous-espace du drapeau qui contienne un vecteur non orthogonal (pour ω) à v_1 . Pour cela on définit $i = \inf\{j \mid \dim(\mathcal{F}_1^{\perp\omega} \cap \mathcal{F}_j) < \dim \mathcal{F}_j\}$. On peut alors trouver $v_i \in \mathcal{F}_i$ tel que $\omega(v_1, v_i) = 1$. On peut alors recommencer sur $\text{Vect}(v_1, v_i)^{\perp\omega}$ avec le drapeau complet défini comme dans le lemme de la section précédente. \diamond

Ainsi les orbites sont paramétrées par les involutions sans point fixe de S_{2n} . L'interprétation géométrique est la même que pour SL_n/SO_n : prenons

une forme symplectique ω , et un drapeau \mathcal{F} de \mathbb{C}^{2n} ; alors la permutation $\sigma(\omega, \mathcal{F})w^\circ$ est la position relative de \mathcal{F} et \mathcal{F}^\perp , par les mêmes arguments que pour le cas d'une forme quadratique non dégénérée.

Là encore, cette proposition permet de trouver des représentants des orbites de Sp_{2n} dans SL_{2n}/B . On fixe une forme symplectique ω . On choisit une base $(e_1, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-1})$ telle que dans cette base la forme symplectique soit

$$\omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge e_{-i}^*.$$

Soit σ une involution sans point fixe, on cherche alors un drapeau \mathcal{F} tel que $\sigma(\omega, \mathcal{F}) = \sigma$. On décompose σ en produit de transpositions de supports disjoints : $\sigma = \prod_{i \in I} (i, \sigma(i))$ (en imposant toujours $\forall i \in I \ i < \sigma(i)$). De plus, on a $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_n\}$. En appliquant alors le même type d'algorithme que dans le cas de SL_n/SO_n on obtient un représentant de la Sp_{2n} -orbite paramétrée par σ en prenant le drapeau associé à la base

$$v_{i_j} = e_j \text{ et } v_{\sigma(i_j)} = e_{-j} \text{ pour } 1 \leq j \leq n.$$

Remarque : L'application $\varphi : V \rightarrow W$ définie dans la section 2.1.1 est ici

$$\varphi : (\mathcal{F}, \omega) \mapsto \sigma(\mathcal{F}, \omega)w^\circ.$$

8.3 Les groupes $S(GL_p \times GL_q)$.

Il s'agit cette fois de connaître la position relative d'un drapeau et d'une décomposition de \mathbb{C}^{p+q} en somme directe de deux sous-espaces de dimensions p et q . Quelques notations avant de formuler le résultat : on notera \mathcal{I}_{p+q}^k l'ensemble des involutions de S_{p+q} qui se décomposent en un produit de k transpositions de supports disjoints. On écrit alors cette décomposition $\sigma = \prod_{i \in I} (i, \sigma(i))$ avec $\forall i \in I \ i < \sigma(i)$.

Lemme 8.3 *Soit une décomposition $E = \mathbb{C}^{p+q} = E_p \oplus E_q$ (avec $\dim(E_p) = p \leq \dim(E_q) = q$), et \mathcal{F} un drapeau complet de E , alors il existe une base (v_1, \dots, v_{p+q}) adaptée à \mathcal{F} , une involution $\sigma \in \mathcal{I}_{p+q}^k$ avec $k \leq p$ et une fonction croissante $f : \{1, \dots, p-k\} \rightarrow \{1, \dots, p+q\} \setminus \text{Supp}(\sigma)$, telles que*

$$E_p = \text{Vect}\{(v_i + v_{\sigma(i)}, \text{ pour } i \in I) \cup (v_{f(l)}, \text{ pour } 1 \leq l \leq p-k)\} \text{ et}$$

$$E_q = \text{Vect}\{(v_i - v_{\sigma(i)}, \text{ pour } i \in I) \cup (v_k, \text{ pour } k \notin \text{Supp}(\sigma) \cup \text{Im}(f))\}$$

Preuve : La preuve se fait par récurrence sur la dimension de E . Prenons un vecteur non nul $v_1 \in \mathcal{F}_1$. Il y a trois cas possibles.

- Si $v_1 \in E_q$ alors on considère les quotients par \mathcal{F}_1 de E , E_p , E_q , et le drapeau $\mathcal{F}'_i = (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_1)$ pour $i > 1$. On applique alors l'hypothèse de récurrence ce qui permet de conclure.
- Si $v_1 \in E_p$ alors on pose $f(1) = 1$ et comme dans le cas précédent on applique l'hypothèse de récurrence aux quotients.
- Enfin le dernier cas est évidemment lorsque v_1 n'est ni dans E_p ni dans E_q . On choisit alors le premier élément du drapeau qui contienne les deux projections de v_1 suivant la somme $E_p \oplus E_q$. Plus précisément, soit la projection P_1 sur E_p suivant E_q . On définit alors

$$j = \inf\{i \mid P_1(v_1) \in \mathcal{F}_i\}.$$

On pose $\sigma(1) = j$, $v_1 = v_1$ et $v_{\sigma(1)} = v_1 - 2P_1(v_1)$; et on applique l'hypothèse de récurrence au quotient de E par $\text{Vect}(v_1, P_1(v_1))$ avec la décomposition $(E_p/\text{Vect}(P_1(v_1)), E_q/\text{Vect}(P_1(v_1) - v_1))$ et le drapeau $\mathcal{F}_i/(\mathcal{F}_i \cap \text{Vect}(P_1(v_1), v_1))$. \diamond

Ce lemme permet de paramétrer les orbites de $S(GL_p \times GL_q)$ dans la variété des drapeaux de SL_{p+q} . En effet, si on prend deux drapeaux \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 et une décomposition de $E = E_1 \oplus E_2$, alors le lemme donne les bases adaptées $(e_1 \dots e_{p+q})$ à \mathcal{F}_1 et $(f_1, \dots f_{p+q})$ à \mathcal{F}_2 . L'application qui envoie les e_i sur les f_i préserve bien évidemment la décomposition $E_1 \oplus E_2$. De plus, cette application peut être supposée de déterminant 1, quitte à changer e_1 et $e_{\sigma(1)}$ en λe_1 et $\lambda e_{\sigma(1)}$ (ce qui ne change pas le fait que cette application préserve la décomposition de E ni les drapeaux).

L'interprétation géométrique de σ est la position relative de \mathcal{F} et $\theta(\mathcal{F})$ (où θ est l'application de E qui vaut $-\text{Id}$ sur E_1 et Id sur E_2 ; elle agit sur les drapeaux par conjugaison, et on la note encore θ). En effet, on voit, en faisant agir θ sur la base adaptée, que θ agit trivialement sur le drapeau en dehors du support de σ , et que θ échange e_i et $e_{\sigma(i)}$ pour $i \in I$, c'est-à-dire $\theta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$. Quant à l'interprétation de la fonction f , elle caractérise les indices i tels que le sous-espace \mathcal{F}_i (du drapeau) est obtenu en ajoutant un vecteur de E_p à l'espace V_{i-1} .

Une fois encore, ce lemme permet de construire des représentants des orbites. On fixe une décomposition $\mathbb{C}^{p+q} = E_1 \oplus E_2$, ce qui donne l'involution θ définie précédemment. On choisit une base $(e_1, \dots e_q)$ de E_1 et une base

$(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ de E_2 . Cette base définit une paire standard (T, B) de SL_n, θ . Prenons σ et f comme dans le lemme :

$$\sigma = \prod_{i \in I} (i, \sigma(i)) \text{ avec } \forall i \in I \ i < \sigma(i), \text{ Card}(I) = k$$

$$\text{et } f : \{1, \dots, p-k\} \rightarrow \{1, \dots, p+q\}.$$

Alors on construit un drapeau \mathcal{F} tel que l'involution σ , et la fonction f soient celles données par le lemme 8.3. On commence par ordonner les éléments

$$\{1, \dots, p+q\} \setminus (\text{Im}(f) \cup \text{Supp}(\sigma)) = \{l_1 < l_2, \dots < l_{q-k}\},$$

ainsi que les éléments

$$I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}.$$

On construit maintenant une base (f_1, \dots, f_{p+q}) de \mathbb{C}^{p+q} :

- Pour $i \in \text{Im}(f)$, on définit $f_i = e_{f^{-1}(i)}$.
- Pour $i = l_j$ (avec $1 \leq j \leq q-k$), on définit $f_{l_j} = e_{p+j}$.
- Pour $i = i_j$ (avec $1 \leq j \leq k$), on définit $f_{i_j} = e_{p-k+j} - e_{p+q-k+j}$ et $f_{\sigma(i_j)} = e_{p-k+j} + e_{p+q-k+j}$.

La base (f_1, \dots, f_{p+q}) donne un représentant dans SL_n/B de l'orbite correspondant à f, σ .

Remarque : L'application $\varphi : V \rightarrow W$ définie dans la section 2.1.1 est ici

$$\varphi : (\mathcal{F}, E_1 \oplus E_2) \mapsto \sigma(\mathcal{F}, E_1 \oplus E_2).$$

Elle a pour image :

$$\text{Im}(\varphi) = \bigcup_{0 \leq k \leq p} \mathcal{I}_{p+q}^k.$$

Annexe A

Quelques graphes

Dans cette annexe sont représentés quelques graphes $\Gamma(G/H)$ pour certains espaces symétriques sous SL_n . On prend ici les conventions suivantes :

- on identifie le groupe de Weyl de SL_n à S_n le groupe des permutations de n éléments notés $\{1, \dots, n\}$,
- les involutions de S_n sont représentées en produit de transpositions de supports disjoints,
- les réflexions simples sont les transpositions $s_1 = (1, 2), \dots, s_{n-1} = (n-1, n)$.

On a ajouté sur chacun de ces graphes des arêtes en pointillés représentant les relations d'adhérences d'orbites (de codimension 1) non obtenues par des parabolique minimaux.

A.1 Les formes quadratiques.

On représente ici les graphes $\Gamma(SL_n/SO_n)$ et $\Gamma(PSL_n/PSO_n)$ pour $n \leq 5$. Dans le cas où n est impair, ces deux graphes sont confondus, et on paramètre les orbites avec les involutions de S_n (comme dans la section 8.1). Dans le cas où n est pair, pour l'espace symétrique PSL_n/PSO_n ces orbites sont encore paramétrées par les involutions, mais pour SL_n/SO_n , il y a deux orbites pour chaque involution sans point fixe de S_n (voir la section 8.1).

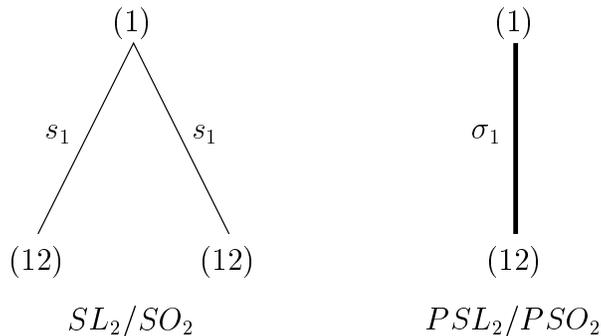


FIG. 8 – $\Gamma(SL_2/SO_2)$ et $\Gamma(PSL_2/PSO_2)$

Ce sont aussi les graphes de SL_2/T et $SL_2/N(T)$.

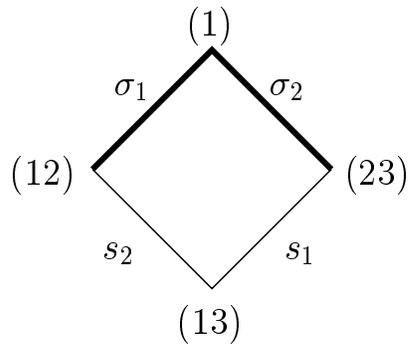


FIG. 9 – $\Gamma(SL_3/SO_3)$ ou $\Gamma(PSL_3/PSO_3)$

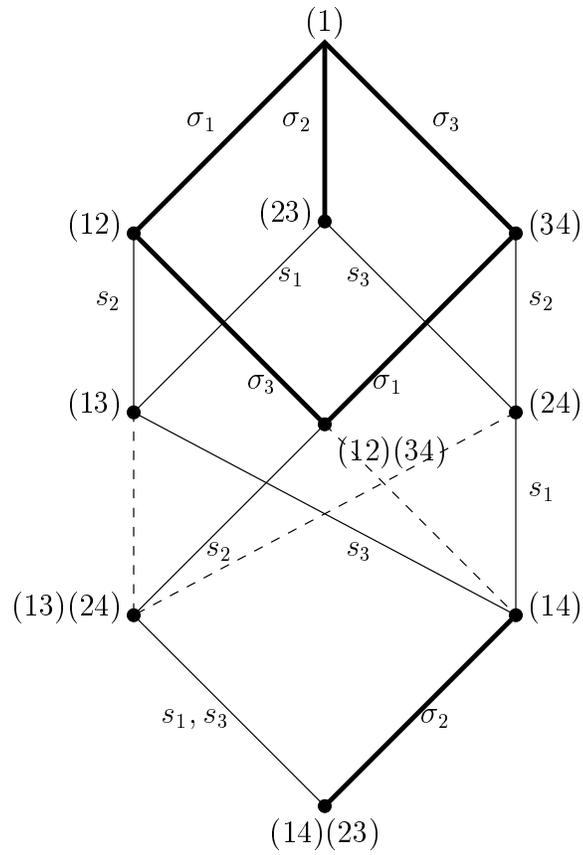


FIG. 10 – $\Gamma(PSL_4/PSO_4)$

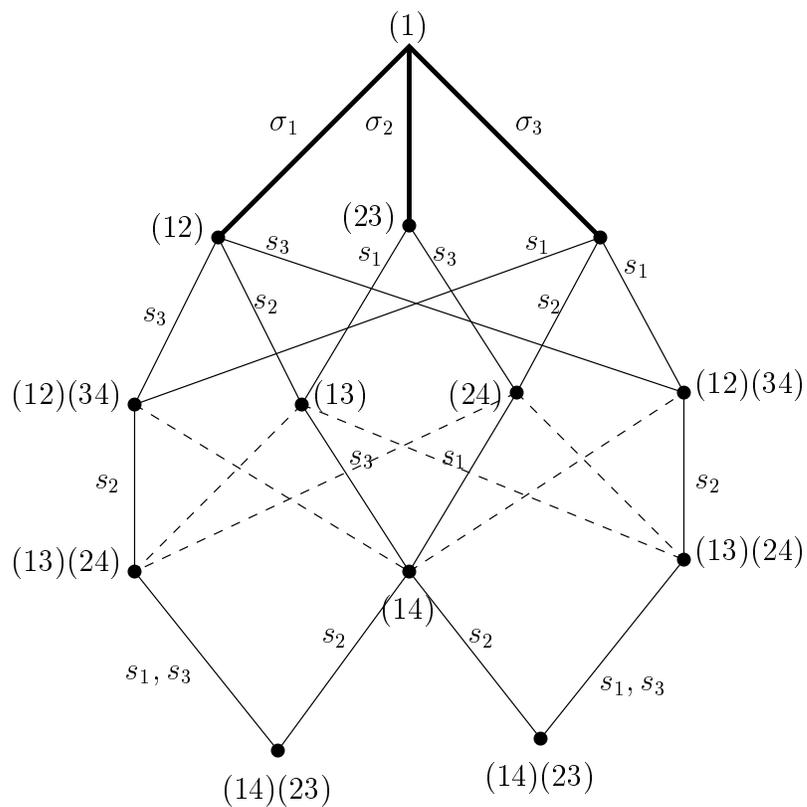


FIG. 11 – $\Gamma(SL_4/SO_4)$

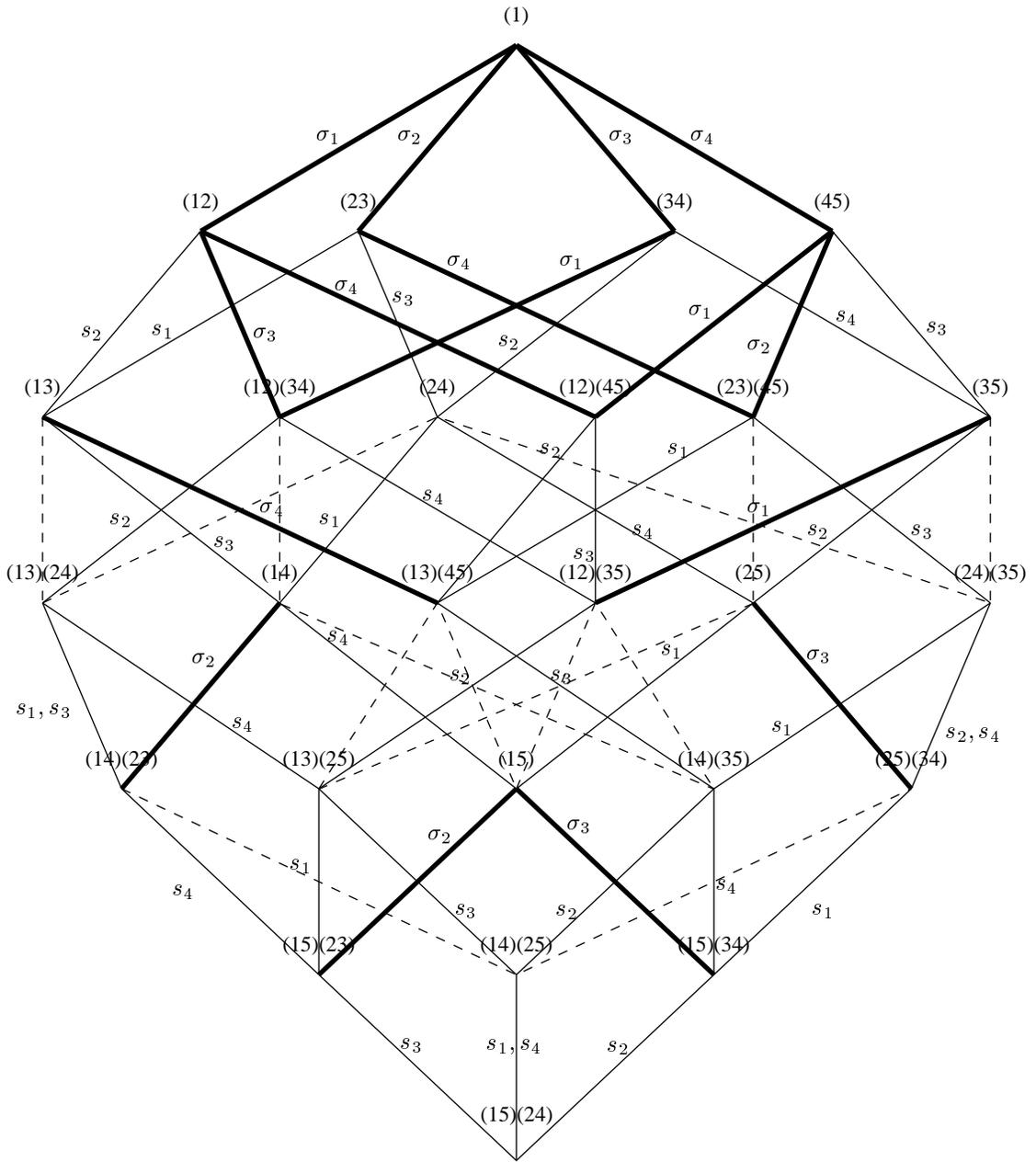


FIG. 12 – $\Gamma(SL_5/SO_5)$ ou $\Gamma(PSL_5/PSO_5)$

A.2 Les formes symplectiques.

On représente les graphes $\Gamma(SL_{2n}/Sp_{2n})$ pour $n = 2$, et $n = 3$ (on remarquera que pour $n = 1$ l'espace symétrique SL_2/Sp_2 est réduit à un point). Pour SL_{2n}/Sp_{2n} les orbites d'un sous-groupe de Borel sont paramétrées par les involutions sans point fixe. De plus, dans ce cas, toutes les racines simples sont de type U, U^* ou G . En effet, le rang de la B -orbite fermée est le même que celui de la B -orbite ouverte, il ne peut donc y avoir d'arêtes de type N, N^*, T, T^* .

On peut aussi remarquer que ces graphes donnent une partie des graphes $\Gamma(PSL_{2n}/PSO_{2n})$. En effet, les involutions sans point fixe paramétrisent des orbites de B dans SL_{2n}/SO_{2n} , et les ordres coïncident.

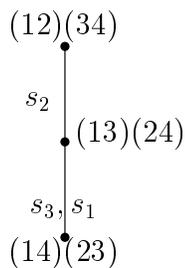


FIG. 13 – $\Gamma(SL_4/Sp_4)$

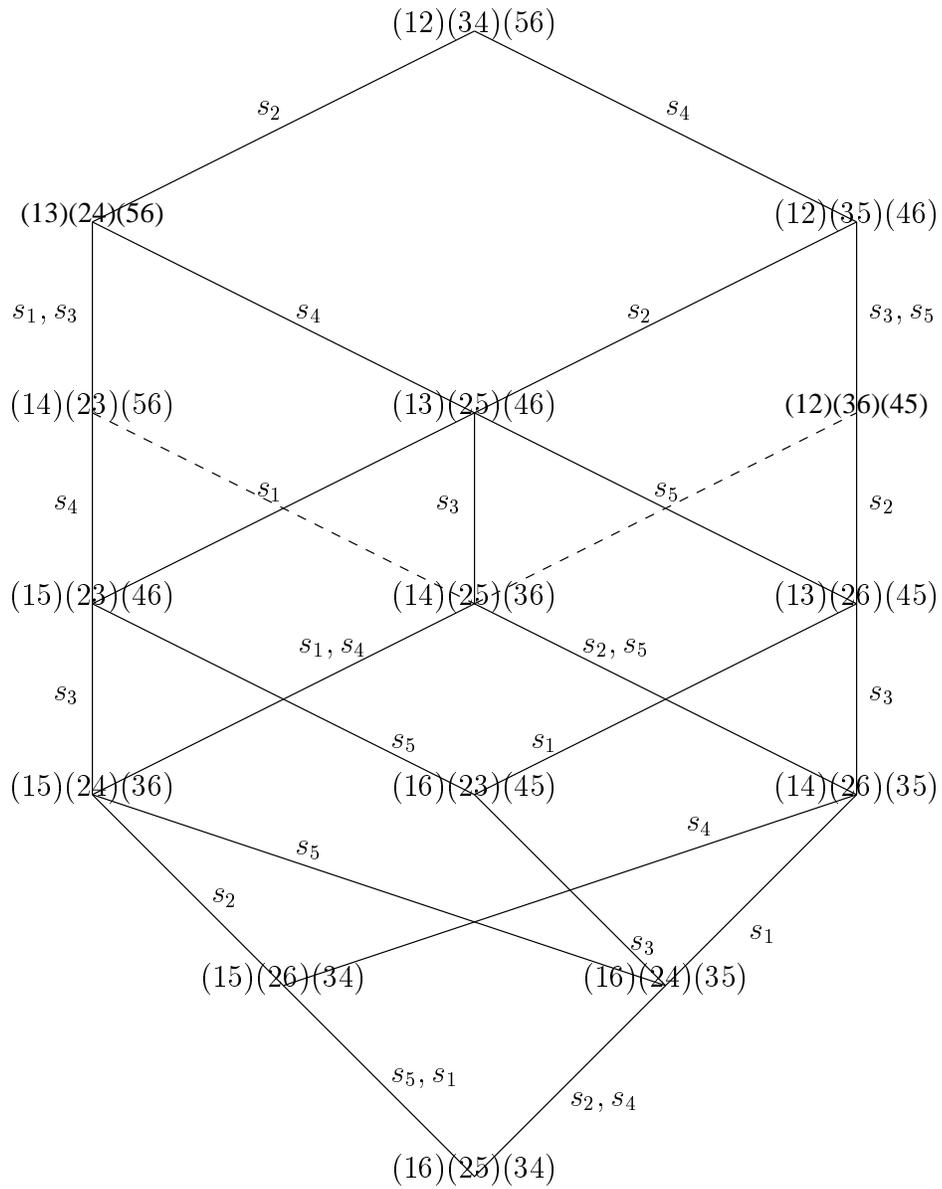


FIG. 14 – $\Gamma(SL_6/Sp_6)$

Références

- [BE94] Dan Barbasch et Sam Evens. K -orbits on Grassmannians and a PRV conjecture for real groups. *J. Algebra*, 167(2) :258–283, 1994.
- [BH00] Michel Brion et Aloysius G. Helminck. On orbit closures of symmetric subgroups in flag varieties. *Canad. J. Math.*, 52(2) :265–292, 2000.
- [Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [Bou59] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II : Algèbre. Chapitre 9 : Formes sesquilineaires et formes quadratiques*. Hermann, Paris, 1959.
- [Bri99a] M. Brion. Rational smoothness and fixed points of torus actions. *Transform. Groups*, 4(2-3) :127–156, 1999. Dedicated to the memory of Claude Chevalley.
- [Bri99b] Michel Brion. On orbit closures of Borel subgroups in spherical varieties. Preprint Institut Fourier, 1999.
- [Dem74] Michel Demazure. Désingularisation des variétés de Schubert généralisées. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 7 :53–88, 1974. Collection of articles dedicated to Henri Cartan on the occasion of his 70th birthday, I.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [Gro61] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11) :167, 1961.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Hel78] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [HK98] Roger Howe et Hanspeter Kraft. Principal covariants, multiplicity-free actions, and the K -types of holomorphic discrete

- series. In *Geometry and representation theory of real and p-adic groups (Córdoba, 1995)*, pages 147–161. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.
- [Kem76] George R. Kempf. On the collapsing of homogeneous bundles. *Invent. Math.*, 37(3) :229–239, 1976.
- [Kem86] George R. Kempf. Varieties with rational singularities. In *The Lefschetz centennial conference, Part I (Mexico City, 1984)*, pages 179–182. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [KKMSD73] G. Kempf, Finn Faye Knudsen, D. Mumford, et B. Saint-Donat. *Toroidal embeddings. I*. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339.
- [Kno95] Friedrich Knop. On the set of orbits for a Borel subgroup. *Comment. Math. Helv.*, 70(2) :285–309, 1995.
- [MS98] J.G.M. Mars et T.A. Springer. Hecke algebra representations related to spherical varieties. *Representation Theory* (<http://www.ams.org/ert/1998-002-02/>), 2 :pp 33–69, (1998).
- [PV89] V. L. Popov et È. B. Vinberg. Invariant theory. In *Algebraic geometry, 4 (Russian)*, pages 137–314, 315. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1989.
- [RS90] R. W. Richardson et T. A. Springer. The Bruhat order on symmetric varieties. *Geom. Dedicata*, 35(1-3) :389–436, 1990.
- [RS94] R. W. Richardson et T. A. Springer. Complements to : “The Bruhat order on symmetric varieties” [*Geom. Dedicata* **35** (1990), no. 1-3, 389–436 ; MR 92e :20032]. *Geom. Dedicata*, 49(2) :231–238, 1994.
- [Ses87] C. S. Seshadri. Line bundles on Schubert varieties. In *Vector bundles on algebraic varieties (Bombay, 1984)*, pages 499–528. Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1987.
- [Spr85] T. A. Springer. Some results on algebraic groups with involutions. In *Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983)*, pages 525–543. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [Spr87] T. A. Springer. The classification of involutions of simple algebraic groups. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(3) :655–670, 1987.

- [Spr98] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.
- [Ste68] Robert Steinberg. *Endomorphisms of linear algebraic groups*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80.
- [Vus74] Thierry Vust. Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes. *Bull. Soc. Math. France*, 102 :317–333, 1974.