à mes parents,

à ma sœur et mon frère

Je tiens à remercier tout d'abord Michel Brion avec qui j'ai beaucoup appris et qui, avec sa conscience professionnelle et son grand sens de la recherche, m'a si bien guidé pour mener à bien cette thèse.

Mon entière reconnaissance va tout particulièrement à José Bertin pour m'avoir transmis, le premier, le goût de la recherche.

Après m'avoir fait bénéficier de leurs divers cours, Gérard Gonzalez-Sprinberg et Dominique Luna me font le plaisir de participer au jury, je leur en sais gré.

Pour avoir manifesté de l'intérêt pour mes travaux et pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, je remercie Joseph Le Potier et Charles Walter.

Je remercie également Catherine Bouvier, Robert Laterveer, Laurent Manivel et Pierre-Louis Montagard pour l'aide qu'ils m'ont apportée après avoir partagé mes hésitations.

À toute l'équipe administrative de l'Institut Fourier, j'adresse mes remerciements pour leur disponibilité, et tout spécialement à Arlette Guttin-Lombard qui a transformé mes brouillons en un texte clair, et cela avec patience et humour.

Que tous mes amis reçoivent ma gratitude ; sans eux, je n'aurais pas pu garder le courage nécessaire pour surmonter les difficultés rencontrées pendant la préparation de cette thèse. Parmi eux, je pense surtout à : Patrick Vérovic, Yann Coello, Frédéric Morace, Alvaro Rittatore, Youssef Barkatou et Ariane Mézard, sans oublier Frédéric Catz qui avec son entrain habituel, a guidé mes premiers pas dans l'enseignement.

Enfin, pour le soutien constant qu'ils m'ont apporté, j'exprime ma profonde reconnaissance à ma mère et à mon frère, ainsi qu'à mon père qui le premier m'a donné le goût des mathématiques et à ma sœur avec qui je l'ai toujours entretenu.

SOMMAIRE

Introduction

Si on considère une variété projective X sur laquelle opère un groupe algébrique réductif G, le tout sur un corps algébriquement clos, la donnée d'un fibré en droites ample et G-linéarisé L sur X permet de définir l'ensemble $X^{ss}(L)$ (resp. $X^s(L)$) des points semi-stables (resp. stables) de X par rapport à L. Rappelons qu'un fibré en droites L sur X est G-linéarisé si l'action de G sur X se relève en une action de G sur l'espace total de L, cette action étant linéaire sur les fibres de L. Un point x de X appartient à $X^{ss}(L)$ s'il existe un entier n strictement positif et une section $\sigma \in \Gamma(X, L^n)^G$ telle que $\sigma(x) \neq 0$; en outre x appartient à $X^s(L)$ si x appartient à $X^{ss}(L)$ et si de plus l'orbite $G \cdot x$ est fermée dans $X^{ss}(L)$, et le groupe d'isotropie G_x est fini.

Les ouverts $X^{ss}(L)$ et $X^s(L)$ ont été introduits par D. Mumford dans [MFK], définitions 1.7 et 1.8. D'après [loc. cit.], théorème 1.10, il existe un quotient $Y = X^{ss}(L)//G$, au sens suivant : Y est une variété algébrique projective et il existe un morphisme affine G-invariant $\pi : X^{ss}(L) \to Y$ tel que pour tout ouvert U de Y, l'homomorphisme naturel $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{X^{ss}(L)})^G$ est un isomorphisme. Le couple (Y, π) est appelé un quotient catégorique de $X^{ss}(L)$ par G. Le couple $\big(\pi(X^s(L)), \pi_{\restriction X^s(L)}\big)$ est un quotient géométrique, c'est-à-dire $\pi(X^s(L))$ est l'espace des orbites de G dans $X^s(L)$. On pose $\pi(X^s(L)) = X^s(L)/G$.

Le problème principal est alors de décrire les quotients $X^{ss}(L)//G$ et $X^s(L)/G$. M. Brion et C. Procesi dans [Br-Pr] étudient ces quotients lorsque G est un tore ainsi que Yi Hu dans [Hu] lorsque G est un tore complexe et X est vue comme une variété symplectique. I.V. Dolgachev et Yi Hu dans [Do-Hu] et M. Thaddeus dans [Tha] décrivent les transformations qui apparaissent lorsqu'on fait varier L dans le groupe $\mathrm{Pic}^G(X)$ des classes d'isomorphismes de fibrés G-linéarisés sur X.

L'objet de cette thèse est de décrire le quotient $X^{ss}(L)//G$ lorsque G est le groupe $\mathrm{SL}(2, k)$ où k est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

Quitte à remplacer L par une puissance positive L^n de L, on peut supposer que L est très ample et donc que X est une sous-variété fermée d'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$, le groupe $G = \mathrm{SL}(2, k)$ opérant linéairement dans V, et que L est la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ à X. L'idée est de considérer la variété $X \times (G/B)$ (B étant un sous-groupe de Borel de G) sur laquelle G agit diagonalement. Dans notre cas, G/B est isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$ et la variété $X \times \mathbb{P}^1_k$ est munie des fibrés G-linéarisés amples $\mathcal{O}(p, q) = p_1^* L^p \otimes p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(q))$ où p et q sont des entiers strictement positifs, et où p_1 (resp. p_2) est la projection de $X \times \mathbb{P}^1_k$ sur X (resp. sur $\mathbb{P}^1_k$). La notion de point semi-stable ou stable pour $\mathcal{O}(p, q)$ ne dépend en fait que de $\frac{q}{p}$. Si on note $a_1, \ldots, a_s$, avec $a_1 < \cdots < a_s$, les poids strictement positifs du tore standard T de G dans V, l'ouvert des points semi-stables $(X \times \mathbb{P}^1_k)^{ss}\left(\frac{q}{p}\right)$ (resp. l'ouvert des points stables $(X\times\mathbb{P}^1_k)^s(\frac{q}{p})$ de $X\times\mathbb{P}^1_k$ par rapport à $\mathcal{O}(p,q)$ est non vide si $\frac{q}{p}\leq a_s$ (resp. $\frac{q}{p}<a_s$). Si on pose $Y_{0,1}=\big((X\times\mathbb{P}^1_k)^{ss}(\frac{a_1}{2})\big)//G,\ Y_i=\big((X\times\mathbb{P}^1_k)^{ss}(a_i)\big)//G, 1\leq i\leq s$, et $Y_{i-1,i}=\Big((X\times\mathbb{P}^1_k)^{ss}\big(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\big)\Big)//G, 2\leq i\leq s$, on définit un morphisme $f:Y_{0,1}\to Y$ et pour tout $i\in\{1,\ldots,s\}$, des morphismes $f_{i^-}:Y_{i-1,i}\to Y_i$ et $f_{i^+}:Y_{i,i+1}\to Y_i$ $(i\neq s)$. Nous montrons (voir théorème II.1.1) que les fibres de f au-dessus de $X^s(L)/G$ sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_k$, que si X est lisse, les transformations $f_{i^+}^{-1}\circ f_{i^-}:Y_{i-1,i}\dashrightarrow Y_{i,i+1}$ $1\leq i\leq s-1$ sont des flips et que le morphisme f_s est une fibration de fibre un espace projectif avec poids sur le quotient Y_s qui est l'ensemble des points fixes de X par T de poids $-a_s$.

Dans le chapitre 0, nous redonnons une preuve d'une part d'une proposition de structure locale (due à D. Luna et F. Pauer (voir [Lu-Pa])) pour les variétés munies de l'action d'un tore, d'autre part du théorème de Bialynicki-Birula (voir [BB1]). Les principaux résultats des chapitres suivants reposent essentiellement sur cette proposition et ce théorème.

Dans le chapitre I, nous précisons les résultats de M. Brion et C. Procesi (voir [Br-Pr]) dans le cas du tore $T=k^*$. Nous considérons cette fois un T-module V de dimension finie et une sous-variété fermée X de $\mathbb{P}(V)$ stable par T. On note $b_1,\ldots,b_n$ les poids de T dans V et on suppose que $b_1<\cdots<b_n$. Comme dans [Br-Pr], nous considérons les quotients associés aux fibrés T-linéarisés $L_i=\mathcal{O}_X(1)\otimes\mathcal{O}_X(\chi_i)$, $1\leq i\leq n$, et $L_{i-1,i}=\mathcal{O}_X(2)\otimes\mathcal{O}_X(\chi_{i-1,i})$, $2\leq i\leq n-1$, où $\mathcal{O}_X(\chi_i)$ (resp. $\mathcal{O}_X(\chi_{i-1,i})$) est le fibré en droites trivial sur X, le tore T opérant dans chaque fibre de $\mathcal{O}_X(\chi_i)$ (resp. de $\mathcal{O}_X(\chi_{i-1,i})$) par multiplication par le caractère $\chi_i:t\to t^{-a_i}$ (resp. $\chi_{i-1,i}:t\to t^{-(a_{i-1}+a_i)}$). Nous démontrons (voir théorème I.3.3) d'une part que le quotient $X^{ss}(L_n)//T$ (resp. $X^{ss}(L_1)//T$) est l'ensemble des points fixes X_1^T (resp. X_n^T) de X par T de poids b_1 (resp. b_n) et d'autre part que si X est lisse, $X^{ss}(L_{1,2})//T$ (resp. $X^{ss}(L_{n-1,n})//T$) est l'espace total d'une fibration sur X_1^T (resp. X_n^T) de fibre un espace projectif avec poids. Nous définissons des morphismes birationnels, $f_{i^-}:X^{ss}(L_{i-1,i})//T\to X^{ss}(L_i)//T$, $2\leq i\leq n$, et $f_{i^+}:X^{ss}(L_{i,i+1})//T\to X^{ss}(L_i)//T$, $1\leq i\leq n-1$, et nous montrons, via la description d'un modèle local (voir théorème I.4.1), que les transformations birationnelles $f_{i^+}^{-1}\circ f_{i^-}:X^{ss}(L_{i-1,i})//T\dashrightarrow X^{ss}(L_{i,i+1})//T$ sont des flips (voir théorème I.6.4).

Dans le chapitre II, pour décrire le quotient $Y=X^{ss}(L)//G$ (avec $G=\mathrm{SL}(2,k)$), nous exhibons un modèle local qui nous ramène à la situation du chapitre I.

Dans le chapitre III, nous utilisons la description de Y pour déterminer, lorsque tout point semi-stable de X est stable, les nombres de Betti de la cohomologie rationnelle de Y. Nous retrouvons dans ce cas particulier des résultats de F. Kirwan (voir [Kir]) (on pourra aussi consulter les résultats de M. Brion dans [Br2]).

Chapitre 0

PRÉLIMINAIRES

1. Structure locale pour l'action d'un tore

Nous allons montrer une proposition de structure locale des variétés normales sur lesquelles un tore T agit. Cette proposition est un cas particulier des résultats de D. Luna et F. Pauer qui se trouvent dans [Lu-Pa]. Le corps de base k sera supposé algébriquement clos.

Rappelons que si G est un groupe algébrique et H est un sous-groupe algébrique de G agissant sur une variété algébrique X, $G \times_H X$ désigne le quotient de $G \times X$ sous l'action de H définie par $h{\cdot}(g{\cdot}x) = (g{\cdot}h^{-1}, h{\cdot}x)$ pour tous $h \in H$, $g \in G$ et $x \in X$. L'action de G dans lui-même, par translations à gauche, induit une action de G dans $G \times_H X$; lorsque H est connexe et X est une variété normale, on obtient ainsi une structure de G-variété algébrique (voir [BB2]).

Proposition 0.1. — *Soit T un tore agissant dans une variété normale X. Tout élément x de X admet un voisinage ouvert, affine et stable par T, de la forme $T \times_{T_x} S$ où S est une sous-variété localement fermée affine de X contenant x et stable par T_x.*

Démonstration.

Soit $x \in X$. On peut supposer que son orbite $T \cdot x$ est fermée dans X car sinon, $\overline{T \cdot x} \backslash T \cdot x$ est un fermé F de $\overline{T \cdot x}$ et $X \backslash F$ est un ouvert de X stable par T et contenant $T \cdot x$ comme fermée.

Nous allons montrer maintenant qu'on peut supposer que la variété X est affine.

D'après un théorème de Sumihiro (voir [KKLV], théorème 1.1), on peut supposer X plongée comme sous T-variété localement fermée dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ d'un T-module rationnel V de dimension finie. On note $\mathfrak{X}^*(T)$ le groupe des caractères de T. Si $\tilde{x} = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}^*(T)} \tilde{x}_\chi$ désigne la décomposition en vecteurs propres de T d'un représentant $\tilde{x}$ de x dans V, on peut supposer $\tilde{x}_\chi \neq 0$ pour un certain $\chi \in \mathfrak{X}^*(T)$ et on a $X_{(\tilde{x}_\chi \neq 0)} \subset \mathbb{P}(V)_{(\tilde{x}_\chi \neq 0)}$. On peut alors supposer que X est plongée dans une variété affine stable par T qui est elle-même plongée dans un T-module rationnel M de dimension finie, X étant localement fermée dans M. Le fermé $Y = \overline{X} \setminus X$ de $\overline{X}$ est stable par T et il existe $f \in k[M]$ tel que $f(x) \neq 0$ et $f_{\restriction Y} \equiv 0$. L'idéal de $Y \cup \{x\}$ est alors contenu strictement dans l'idéal de Y qui est une représentation localement finie de T. On peut donc supposer que f est un vecteur propre de T. On a $X_f = \overline{X}_f$ et X_f est un ouvert affine de X contenant x et stable par T.

Supposons donc que X est affine. On choisit un isomorphisme $T/T_x \simeq (k^*)^p$. Alors $Tx \hookrightarrow k^p$ est une immersion ouverte T-équivariante où T opère linéairement dans k^p. Les inclusions
$$\begin{tikzcd} & k^p \\ T\cdot x \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & X \end{tikzcd}$$
donnent des homomorphismes d'algèbres
$$\begin{tikzcd} & k[W] \arrow[dl] \\ k[T\cdot x] & \\ & k[X] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$
où $W = k^p$. L'algèbre $k[W]$ est l'algèbre symétrique du T-module dual W^* de W et on a alors un morphisme $W^* \to k[T\cdot x]$. L'homomorphisme $k[X] \to k[T\cdot x]$ est surjectif car $Tx \hookrightarrow X$ est une immersion fermée. De la complète réductibilité de l'opération de T dans $k[X]$ et dans W^*, résulte alors l'existence d'un morphisme d'algèbres $k[W] \to k[X]$ qui est T-équivariant et qui rend commutatif le diagramme :
$$\begin{tikzcd} & k[X] \arrow[dl] \\ k[T\cdot x] & \\ & k[W] \arrow[ul] \arrow[uu] \end{tikzcd}$$
. Il existe alors un morphisme T-équivariant $f : X \to W$ tel que le diagramme
$$\begin{tikzcd} & W \\ Tx \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & X \arrow[uu, "f"'] \end{tikzcd}$$
soit commutatif. L'ouvert $f^{-1}(T\cdot x)$ de X contient x, est stable par T et est isomorphe à $T \times_{T_x} S$ où $S = f^{-1}(x)$. □

2. La décomposition de Bialynicki-Birula

Soit T un tore opérant dans une variété normale X, le tout sur un corps k algébriquement clos. On note $\mathfrak{X}^*(T)$ le groupe des caractères de T et $\mathfrak{X}_*(T)$ le groupe des sous-groupes à un paramètre de T. Soit $\lambda \in \mathfrak{X}_*(T)$ et $x \in X$, le morphisme $\begin{array}{c} k^* \longrightarrow X \\ t \longmapsto \lambda(t)\cdot x \end{array}$ définit une application rationnelle $\varphi : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$. Si φ est définie en 0 (resp. en ∞), on notera $\lim_{t\to 0} \lambda(t)x$ (resp. $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)\cdot x$) sa valeur en 0 (resp. en ∞).

On note X^T l'ensemble des points fixes de T dans X et pour tout $\lambda \in \mathfrak{X}_*(T)$, $X^\lambda = \{x \in X \mid \lambda(t)\cdot x = x,\ \forall t \in k^*\}$ l'ensemble des points fixes de λ. Alors X^T et X^λ sont des sous-variétés fermées de X.

Soit Y une sous-variété de X^T, on définit pour tout $\lambda \in \mathfrak{X}_*(T)$:

$$X_+(\lambda, Y) = \left\{x \in X \mid \lim_{t\to 0} \lambda(t)\cdot x \in Y\right\}$$

et

$$X_-(\lambda, Y) = \left\{x \in X \mid \lim_{t\to \infty} \lambda(t)\cdot x \in Y\right\}.$$

Définition 0.2.1. — *Un sous-groupe à un paramètre λ est dit générique si $X^T = X^\lambda$.*

Proposition 0.2.2.

(i) Il existe des sous-groupes à un paramètre de T génériques.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathfrak{X}_*(T)$ et pour toute sous-variété Y de X^T, les ensembles $X_+(\lambda, Y)$ et $X_-(\lambda, Y)$ sont des sous-variétés localement fermées de X stables par T. Les applications

$$\begin{aligned} q_+ : X_+(\lambda, Y) &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \lim_{t\to 0} \lambda(t)\cdot x \end{aligned} \qquad \text{et } \begin{aligned} q_- : X_-(\lambda, Y) &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \lim_{t\to \infty} \lambda(t)\cdot x \end{aligned}$$

sont des morphismes.

Démonstration.

(i) Soit $x \in X^T$. D'après la proposition 0.1, il existe un voisinage ouvert U de x affine et stable par T. Il existe un T-module V et une T-immersion fermée $U \hookrightarrow V$.

On a $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\chi_i}$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, V_{χ_i} est l'espace propre associé au caractère χ_i de T. On note pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^*(T)$ et $\lambda \in \mathfrak{X}_*(T)$, $\langle \chi, \lambda\rangle$ l'entier m tel que $\chi \circ \lambda(t) = t^m$ pour tout $t \in k^*$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $V_{\langle \chi_i, \lambda\rangle} = \left\{v \in V \mid \lambda(t)\cdot v = t^{\langle \chi_i, \lambda\rangle} v\right\}$. En tant que $\mathrm{Im}(\lambda)$-module, $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\langle \chi_i, \lambda\rangle}$ et on a $V^\lambda = \bigoplus_{i\in I} V_{\langle \chi_i, \lambda\rangle}$ où $I = \{1 \le i \le n \mid \langle \chi_i, \lambda\rangle = 0\}$.

Donc pour tout $\lambda \in \mathfrak{X}_*(T) \backslash \{\lambda \in \mathfrak{X}_*(T) \mid \langle \chi_i, \lambda\rangle = 0,\ 1 \le i \le n\}$, on a $V^T = V^\lambda$ et $U^T = U^\lambda$.

(ii) Pour tout $y \in Y$, on note U un voisinage affine de X stable par T, contenant y et $i : U \hookrightarrow V$ une T-immersion fermée dans le T-module V. Pour tout $x \in U$ tel que $\lim_{t\to 0} \lambda(t)\cdot x = y$, on a $\overline{T\cdot x} \cap U \neq \emptyset$ donc $x \in U$ car U est un ouvert stable par T. On peut alors supposer que $X_+(\lambda, Y)$ est contenu dans U.

On a $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\langle \chi_i, \lambda \rangle}$, $i(Y) \subset \bigoplus_{\langle \chi_i, \lambda \rangle = 0} V_{\langle \chi_i, \lambda \rangle}$ et $i(X_+(\lambda, Y)) \subset \bigoplus_{\langle \chi_i, \lambda \rangle \geq 0} V_{\langle \chi_i, \lambda \rangle}$.

L'application q_+ est alors la restriction à $X_+(\lambda, Y)$ de la projection :

$$\bigoplus_{\langle \chi_i, \lambda \rangle \geq 0} V_{\langle \chi_i, \lambda \rangle} \to \bigoplus_{\langle \chi_i, \lambda \rangle = 0} V_{\langle \chi_i, \lambda \rangle} . \qquad \square$$

Pour tout $y \in X^T$ et pour tout λ générique, on notera $(T_y X)_{>0}$ (resp. $(T_y X)_0$, $(T_y X)_{<0}$) la partie de $T_y X$ où $\mathrm{Im}\, \lambda$ agit avec des poids strictement positifs (resp. nuls, strictement négatifs).

THÉORÈME 0.2.3 ([BB1]). — *Soit X une T-variété complète et lisse.*

(i) X^T est non vide, lisse et pour tout λ générique et toute composante connexe Y de X^T, $X_+(\lambda, Y)$ et $X_-(\lambda, Y)$ sont lisses.

Pour tout $y \in Y$, $T_y(X_+(\lambda, Y)) = T_y Y \oplus (T_y X)_{>0}$ et $T_y(X_-(\lambda, Y)) = T_y Y \oplus (T_y X)_{<0}$.

(ii) Pour tout λ générique et toute composante connexe Y de X^T, les morphismes q_+ et q_- sont des fibrations localement triviales pour la topologie de Zariski dont les fibres s'identifient respectivement aux T-modules $(T_y X)_{>0}$ et $(T_y X)_{<0}$ pour tout $y \in Y$.

Démonstration.

(i) D'après la proposition 0.2.2, il existe $\lambda \in \mathfrak{X}_*(T)$ tel que $X^T = X^\lambda$ et $X^\lambda \neq \emptyset$ car X est complète.

Pour montrer que X^T, $X_+(\lambda, Y)$ et $X_-(\lambda, Y)$ sont lisses, supposons que X est affine. Démontrons tout d'abord un lemme dû à D. Luna (voir [Lu], lemme III.1).

LEMME 0.2.4. — *Soit X une T-variété, affine et lisse.*

Pour tout $x \in X^T$, il existe un morphisme $\varphi : X \to T_x X$ étale en x, T-équivariant et tel que $\varphi(x) = 0$.

Démonstration du lemme 0.2.4.

Notons $\mathcal{M}_x$ l'idéal maximal de $k[X]$ qui correspond au point x. On a $T_x X = (\frac{\mathcal{M}_x}{\mathcal{M}_x^2})^*$. L'application $\mathcal{M}_x \to \frac{\mathcal{M}_x}{\mathcal{M}_x^2}$ est T-équivariante. Comme le groupe réductif T opère de façon complètement réductible dans $k[X]$, il existe un sous T-module V de $\mathcal{M}_x$ tel que la restriction à V de $\mathcal{M}_x \to \frac{\mathcal{M}_x}{\mathcal{M}_x^2}$ est un isomorphisme. De la propriété universelle de l'algèbre symétrique résulte alors l'existence d'un morphisme d'algèbres $S(V) \to k[X]$ qui est T-équivariant. On obtient donc un morphisme $\varphi : X \to T_x X$ étale en x, T-équivariant et tel que $\varphi(x) = 0$. $\square$

Soit $y \in X^T$ et $\varphi : X \to T_y X$ un morphisme étale en y, T-équivariant, et tel que $\varphi(y) = 0$. Quitte à restreindre φ à un ouvert de X, on peut supposer que φ est un morphisme fini sur son image.

Si M désigne le T-module $T_y X$, on a $X^T \subset \varphi^{-1}(M^T)$ car φ est T-équivariant. Inversement, si $x \in \varphi^{-1}(M^T)$, son orbite $T \cdot x$ est connexe et est contenue dans l'ensemble fini $\varphi^{-1}(\varphi(x))$. Alors $T \cdot x = \{x\}$ et $x \in X^T$. On a donc $X^T = \varphi^{-1}(M^T)$. Puisque M^T est lisse ainsi que $\varphi^{-1}(M^T) \to M^T$, X^T est lisse.

Montrons maintenant que pour tout λ générique et toute composante connexe Y de X^T, $X_+(\lambda, Y)$ est une composante connexe de $\varphi^{-1}(M_+(\lambda, M^T))$: soit $x \in X_+(\lambda, Y)$, $\varphi(\lim\limits_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x) = \lim\limits_{t\to 0} \lambda(t) \cdot \varphi(x)$ car φ est T-équivariant. Donc $\varphi(x) \in M_+(\lambda, M^T)$. Or $X_+(\lambda, Y)$ est connexe donc x est dans une composante connexe de $\varphi^{-1}(M_+(\lambda, M^T))$. Inversement, si x est dans une composante connexe de $\varphi^{-1}(M_+(\lambda, M^T))$, φ étant fini, $\lim\limits_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x$ existe et on a $\lim\limits_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x \in Y$.

Le morphisme $\varphi^{-1}(M_+(\lambda, M^T)) \longrightarrow M_+(\lambda, M^T)$ est étale. Donc $X_+(\lambda, Y)$ est lisse et on a :

$$T_y X_+(\lambda, Y) \simeq M_+(\lambda, M^T) = (T_y X)_0 \oplus (T_y X)_{>0}$$

et

$$(T_y X)_0 = T_y Y \ .$$

(ii) Démontrons (ii) pour q_+.

On utilisera le lemme suivant :

LEMME 0.2.5. — *Le morphisme q_+ est lisse et pour tout $y \in Y$, la fibre de q_+ en y s'identifie au T-module $(T_y X)_{>0}$.*

Démonstration du lemme 0.2.5.

Montrons tout d'abord que q_+ est lisse : d'après *(i)*, pour tout $y \in Y$, la différentielle de q_+ en y s'identifie à la projection $T_y Y \oplus (T_y X)_{>0} \to T_y X$. Cette projection est surjective, donc q_+ est lisse en y. L'ensemble $\{x \in X_+(\lambda, Y) \mid q_+ \text{ est lisse en } x\}$ est un ouvert de

$X_+(\lambda, Y)$, stable par T qui contient Y, il est donc égal à $X_+(\lambda, Y)$. Le morphisme q_+ est lisse donc $q_+^{-1}(y)$ est lisse pour tout $y \in Y$.

Pour tout $y \in Y$, notons F la fibre $q_+^{-1}(y)$. Le tore k^* opère dans F par $t \cdot x = \lambda(t) \cdot x$ pour tous $t \in k^*$ et $x \in F$.

D'après la proposition 0.1, il existe un ouvert affine U de F, k^*-stable, contenant y. Pour tout $x \in F$, on a $y \in \overline{k^* \cdot x} \cap U$. Donc $U = F$ et F est affine.

L'opération de k^* dans F permet de définir une graduation sur $A = k[F]$. On a $A_0 = k$. Si $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$ est un élément de A, on a $a_n(t \cdot x) = t^n a_n(x)$ pour tout $x \in F$ et comme $\lim_{t \to 0} a(t \cdot x)$ existe pour tout $x \in F$, on doit avoir $a_n = 0$ pour tout $n < 0$. Donc A est graduée en degrés positifs.

Si $\mathcal{M}_y$ désigne l'idéal maximal de A qui correspond à y, on a $\mathcal{M}_y = \bigoplus_{n>0} A_n$. Soit M un sous T-module de $\mathcal{M}_y$ tel que la restriction à M de $\mathcal{M}_y \to \frac{\mathcal{M}_y}{\mathcal{M}_y^2}$ est un isomorphisme.

L'homomorphisme de k-algèbres : $S(M) \to A$ est surjectif par le lemme de Nakayama gradué. Or $\dim M = \dim T_y F = \dim A$ et $S(M)$ est intègre, donc $S(M) \to A$ est un isomorphisme par le théorème de l'idéal principal de Krull.

D'où $F \simeq M^* \simeq T_y F$ et $T_y F \simeq \frac{T_y X_+(\lambda, Y)}{T_y Y} \simeq (T_y X)_{>0}$. □

Fin de la démonstration du théorème 0.2.3.

On se place au-dessus d'un ouvert de Y où le fibré conormal de Y dans $X_+(\lambda, Y)$ est trivial. On peut alors supposer que Y est affine et que I_Y / I_Y^2 est un $k[Y]$-module libre où I_Y est l'idéal de Y dans $X_+(\lambda, Y)$. On peut même supposer qu'il existe un k-espace vectoriel M de dimension finie tel que $k[Y] \otimes_k M \xrightarrow{\sim} I_Y / I_Y^2$. Mais T agit trivialement sur $k[Y]$, donc on peut choisir pour M, un T-module. On relève M dans I_Y en un T-module et on a un T-homomorphisme ψ de k-algèbres : $k[Y] \otimes_k S(M) \xrightarrow{\psi} k[X_+(\lambda, Y)]$.

On a $\dim(k[Y] \otimes_k M) = \dim k[X_+(\lambda, Y)]$ et le raisonnement de la démonstration du lemme 0.2.4 permet de conclure que ψ est un isomorphisme. □

COROLLAIRE 0.2.6. — *Soit X une T-variété complète lisse. Pour toute composante connexe Y de X^T et tout λ générique, $X_+(\lambda, Y)$ et $X_-(\lambda, Y)$ se coupent transversalement le long de Y.*

Démonstration.

Le corollaire 0.2.6 provient directement du fait que pour tout $y \in Y$, le T-module T_yX se décompose en : $T_yX = (T_yX)_{<0} \oplus (T_yX)_0 \oplus (T_yX)_{>0}$ et que d'après *(i)* du théorème 0.2.3, $T_y(X_+(\lambda, Y)) = T_yY \oplus (T_yX)_{>0}$ et $T_y(X_-(\lambda, Y)) = T_yY \oplus (T_yX)_{<0}$ avec $T_yY = (T_yX)_0$. $\square$

Remarque 0.2.7. — Dans [Tha], théorème 1.12, M. Thaddeus démontre le théorème 0.2.3 à l'aide du théorème des slices de Luna ([Lu], II.2).

Chapitre I

QUOTIENTS PAR LE TORE k^*

1. Notations

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. On considère $T = k^*$, le tore de dimension un, opérant linéairement et fidèlement sur un k-espace vectoriel V de dimension finie. Alors T opère dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ par $t \cdot [v] = [t \cdot v]$ pour tout $t \in T$ et tout $v \in V$. Le groupe des caractères de T est $\mathbb{Z}$. Soit $\pi = (a_1, \ldots, a_n)$ la suite des poids de T dans V. On peut supposer que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. On a $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ où V_i désigne l'espace propre associé au poids a_i avec $1 \leq i \leq n$. On note $m_i = \dim V_i$ ($1 \leq i \leq n$) et on pose $V_{<i} = \bigoplus_{j=1}^{i-1} V_j$ et $V_{>i} = \bigoplus_{j=i+1}^{n} V_j$ pour tout i. Pour tout $x \in \mathbb{P}(V)$, on note $\tilde{x}$ un représentant de x dans V et $\tilde{x} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j$ sa décomposition en vecteurs propres de T. On pose pour tout i, $\tilde{x}_{<i} = \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{x}_j$, $\tilde{x}_{\leq i} = \sum_{j=1}^{i} \tilde{x}_j$, $\tilde{x}_{>i} = \sum_{j=i+1}^{n} \tilde{x}_j$ et $\tilde{x}_{\geq i} = \sum_{j=i}^{n} \tilde{x}_j$.

Soit X une sous-variété fermée irréductible de $\mathbb{P}(V)$, stable par T. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$X_i^{ss} = \left\{ x \in X \mid \tilde{x}_{\leq i} \neq 0 \text{ et } \tilde{x}_{\geq i} \neq 0 \right\}$$

et

$$X_i^{s} = \left\{ x \in X \mid \tilde{x}_{<i} \neq 0 \text{ et } \tilde{x}_{>i} \neq 0 \right\}.$$

Remarquons que X_i^s est inclus dans X_i^{ss} pour tout i.

Pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, on pose $X_{i-1,i}^{ss} = \left\{ x \in X \mid \tilde{x}_{<i} \neq 0 \text{ et } \tilde{x}_{\geq i} \neq 0 \right\}$.

Pour éviter qu'il existe des $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que X_i^{ss} soit vide, on supposera que X n'est contenue dans aucun sous-espace linéaire de $\mathbb{P}(V)$.

2. Construction des quotients

Donnons tout d'abord quelques propriétés évidentes des ensembles définis au paragraphe 1.

PROPOSITION I.2.1.

(i) $X_1^s = \emptyset$ *et* $X_n^s = \emptyset$.

(ii) X_i^{ss} *est non vide pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$ *ainsi que* X_i^s *pour tout* $i \in \{2, \dots, n-1\}$ *et* $X_{i-1,i}^{ss}$ *pour tout* $i \in \{2, \dots, n\}$.

(iii) Les ensembles X_i^{ss}, $1 \leq i \leq n$, X_i^s, $2 \leq i \leq n-1$ *et* $X_{i-1,i}^{ss}$, $2 \leq i \leq n$, *sont des ouverts de* X, *stables par* T.

Le théorème suivant permet de construire des quotients par T sur ces ouverts. On note L_i, $1 \leq i \leq n$ (resp. $L_{i-1,i}$, $2 \leq i \leq n-1$) le fibré T-linéarisé $L_i = \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_X(\chi_i)$ (resp. $\mathcal{O}_X(2) \otimes \mathcal{O}_X(\chi_{i-1,i})$) où $\mathcal{O}_X(\chi_i)$ (resp. $\mathcal{O}_X(\chi_{i-1,i})$) est le fibré en droites trivial sur X, le tore T opérant dans chaque fibre de $\mathcal{O}_X(\chi_i)$ (resp. de $\mathcal{O}_X(\chi_{i-1,i})$) par multiplication par le caractère $\chi_i : t \to t^{-a_i}$ (resp. $\chi_{i-1,i} : t \to t^{-(a_{i-1}+a_i)}$).

THÉORÈME I.2.2. — *Pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i^{ss} *est l'ouvert* $X^{ss}(L_i)$ *des points semi-stables de* X *par rapport à* L_i *et pour tout* $i \in \{2, \dots, n-1\}$, X_i^s *est l'ouvert* $X^s(L_i)$ *des points stables de* X *par rapport à* L_i. *Pour tout* $i \in \{2, \dots, n\}$, $X_{i-1,i}^{ss}$ *est l'ouvert* $X^{ss}(L_{i-1,i})$ *des points semi-stables de* X *par rapport à* $L_{i-1,i}$ *et on a* $X^{ss}(L_{i-1,i}) = X^s(L_{i-1,i})$.

Démonstration.

Supposons tout d'abord qu'il existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_i = 0$. Alors $x \notin X_0^{ss}$ si, et seulement si, ($\tilde{x}_j = 0$ pour tout $j \leq 0$ ou $\tilde{x}_j = 0$ pour tout $j \geq 0$). Pour que $x \notin X_0^{ss}$, il faut et il suffit alors que $\lim_{t \to 0} t \cdot \tilde{x} = 0$ ou $\lim_{t \to 0} t^{-1} \cdot \tilde{x} = 0$ et cela équivaut à $0 \in \overline{T \cdot \tilde{x}}$. On a donc $X_0^{ss} = \{x \in X \mid 0 \notin \overline{T \cdot \tilde{x}}\}$. D'après [MFK], proposition 2.2, on a alors $X_0^{ss} = X^{ss}(\mathcal{O}_X(1))$. Puisque tout $x \in X_0^s$ a par définition, des poids négatifs et des poids positifs, on a $X_0^s = \{x \in X_0^{ss} \mid T_x \text{ est fini et } T \cdot x \text{ est fermée dans } X_0^{ss}\}$ et donc $X_0^s = X^s(\mathcal{O}_X(1))$.

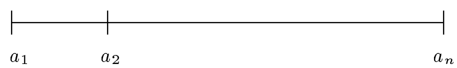
En faisant agir T sur V par $t \cdot v = t^{-a_i} t \cdot v$ pour tout $t \in T$ et $v \in V$, par ce qui précède, on a $X_i^{ss} = X^{ss}(L_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $X_i^s = X^s(L_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Fixons $i \in \{2, \dots, n\}$. Si on plonge X dans $\mathbb{P}(S^2V)$ par le 2-plongement de Véronèse $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(S^2V)$, le tore T agissant sur $\mathbb{P}(S^2V)$ par $tv^2 = t^{-(a_{i-1}+a_i)}(tv)^2$, alors $X_{i-1,i}^{ss}$ s'identifie à l'ouvert des points semi-stables de X par rapport à $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2V)}(1))$ et tout point de $X_{i-1,i}^{ss}$ à des poids négatifs et positifs. On en déduit que $X_{i-1,i}^{ss} = X^{ss}(L_{i-1,i})$ et $X^{ss}(L_{i-1,i}) = X^s(L_{i-1,i})$. $\square$

On pose d'une part, pour tout $i \in \{2,\dots,n\}$, $Y_i = X_i^{ss}//T$ et $\pi_i : X_i^{ss} \to Y_i$ le morphisme quotient de X_i^{ss} par T et d'autre part, pour tout $i \in \{2,\dots,n\}$, $Y_{i-1,i} = X_{i-1,i}^{ss}/T$ et $\pi_{i^-} : X_{i-1,i}^{ss} \to Y_{i-1,i}$ le morphisme quotient de $X_{i-1,i}^{ss}$ par T. Le couple (Y_i,π_i), $1 \leq i \leq n$ (resp. $(\pi_i(X_i^s), \pi_{i\restriction_{X_i^s}})$, $2 \leq i \leq n-1$, et $(Y_{i-1,i},\pi_{i^-})$, $2 \leq i \leq n$) est un quotient catégorique (resp. des quotients géométriques).

Remarque I.2.3. — Cette construction de variétés quotients par le tore T est un cas particulier de la construction de quotients pour un tore quelconque donnée dans [Br-Pr].

L'enveloppe convexe de π est représentée comme suit :



Si on note $\pi(x)$ l'ensemble des poids a_i avec $1 \leq i \leq n$ tels que $\tilde{x}_i \neq 0$ alors X_i^{ss} (resp. X_i^s) est l'ensemble des $x \in X$ tels que l'enveloppe convexe de $\pi(x)$ contient a_i (resp. contient a_i dans son intérieur) et $X_{i-1,i}^{ss}$, $2 \leq i \leq n$, est l'ensemble des $x \in X$ tels que l'enveloppe convexe de $\pi(x)$ contient a_{i-1} et a_i.

3. Relation entre les quotients

Le théorème suivant permet de relier les différents quotients construits au paragraphe 2.

Théorème I.3.1 ([Br-Pr], 1.4).

(i) Pour tout $i \in \{2,\dots,n\}$, $X_i^s \subset X_{i-1,i}^{ss} \subset X_i^{ss}$ et pour tout $i \in \{1,\dots,n-1\}$, $X_i^s \subset X_{i,i+1}^{ss} \subset X_i^{ss}$.

(ii) Il existe des morphismes uniques f_{i^-} ($2 \leq i \leq n$) et f_{i^+} ($1 \leq i \leq n-1$) faisant commuter les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
X_{i-1,i}^{ss} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_{i^-}"'] & X_i^{ss} \arrow[d, "\pi_i"] & X_{i,i+1}^{ss} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\pi_{i^+}"] \\
Y_{i-1,i} \arrow[r, "f_{i^-}"] & Y_i & Y_{i,i+1} \arrow[l, "f_{i^+}"']
\end{tikzcd}$$

où pour chaque i, les morphismes π_i, π_{i^-} et π_{i^+} sont les quotients introduits dans le paragraphe 2.

(iii) Les morphismes f_{i^-} et f_{i^+} sont birationnels pour tout $i \in \{2,\dots,n-1\}$.

Démonstration.

L'assertion *(i)* est immédiate par la définition de ces ouverts. Pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, le morphisme $X^{ss}_{i-1,i} \to Y_i$ obtenu par composition de l'inclusion $X^{ss}_{i-1,i} \hookrightarrow X^{ss}_i$ suivie de π_i est constant sur les orbites de T. Par [MFK], chap. 0, remarque 6, il existe un unique morphisme f_{i^-} faisant commuter le diagramme énoncé, et de même pour f_{i^+}. Ce qui démontre l'assertion *(ii)*.

Démontrons l'assertion *(iii)*. Pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, l'ouvert X^s_i est non vide et $X^s_i \subset X^{ss}_{i-1,i}$ donc $\pi_{i^-}{}_{\upharpoonright X^s_i} = \pi_i{}_{\upharpoonright X^s_i}$. Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X^{ss}_{i-1,i} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_{i^-}"'] & X^{ss}_i \arrow[d, "\pi_i"] \\
Y_{i-1,i} \arrow[r, "f_{i^-}"] & Y_i
\end{tikzcd}$$

commute, f_{i^-} induit un isomorphisme de l'ouvert $\pi_{i^-}(X^s_i)$ sur son image. $\square$

Proposition I.3.2. — *Si X est lisse, chacune des variétés $Y_{i-1,i}$ ($2 \leq i \leq n$) n'a que des singularités quotients par des groupes finis cycliques.*

Démonstration.

On fixe i tel que $2 \leq i \leq n$. Pour tout x appartenant à $X^{ss}_{i-1,i}$, $T \cdot x$ est fermée dans $X^{ss}_{i-1,i}$ et T_x est un sous-groupe fini de k^* donc cyclique.

La proposition 0.1 permet d'exhiber un voisinage U de x dans $X^{ss}_{i-1,i}$ de la forme $T \times_{T_x} S$. On a $U/T = S/T_x$ et S est lisse vu que X l'est. $\square$

Du théorème I.3.1, résulte le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Y_{1,2} \arrow[dl, "f_{1^+}"'] \arrow[dr, "f_{2^-}"] & & Y_{2,3} \cdots Y_{i-1,i} \arrow[dl, "f_{2^+}"'] \arrow[dr, "f_{i^-}"] & & Y_{i,i+1} \cdots Y_{n-2,n-1} \arrow[dl, "f_{i^+}"'] \arrow[dr, "f_{(n-1)^-}"] & & Y_{n-1,n} \arrow[dl, "f_{(n-1)^+}"'] \arrow[dr, "f_{n^-}"] & \\
Y_1 & & Y_2 & & Y_i & & Y_{n-1} & & Y_n
\end{tikzcd}$$

Dans le théorème I.3.3 ci-dessous, nous allons décrire Y_1, Y_n, f_{1^+} et f_{n^-}, puis les restrictions à leurs lieux exceptionnels des morphismes birationnels f_{i^-} et f_{i^+} pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Nous allons tout d'abord introduire quelques notations.

Notons X^T l'ensemble des points fixes de X par T, puis X^T_i ($1 \leq i \leq n$) l'ensemble des points fixes de poids a_i, X^-_i et X^+_i les sous-variétés localement fermées de X, T-stables définies par $X_i^- = \left\{x \in X \mid \lim\limits_{t\to\infty} tx \in X_i^T\right\}$ et $X_i^+ = \left\{x \in X \mid \lim\limits_{t\to 0} tx \in X_i^T\right\}$. Notons q_{i^-} et q_{i^+} les morphismes définis par : $\begin{array}{rcl} q_{i^-} : X_i^- & \longrightarrow & X_i^T \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{t\to\infty} t\cdot x \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} q_{i^+} : X_i^+ & \longrightarrow & X_i^T \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{t\to 0} t\cdot x \end{array}$.

On a $X^T = \mathbb{P}(V)^T \cap X$ avec $\mathbb{P}(V)^T = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(V_i)$ et $X_i^T = \mathbb{P}(V_i) \cap X$ $(1 \leq i \leq n)$.

Remarquons que $X_1^+ = \{x \in X \mid \tilde{x}_1 \neq 0\}$ et $X_n^- = \{x \in X \mid \tilde{x}_n \neq 0\}$ sont ouverts dans X. On en déduit que X_1^T et X_n^T sont connexes.

Pour tout $i \in \{2,\ldots,n-1\}$, notons $X_i^T = \bigcup\limits_{j=1}^{r_i} X_{ij}$, $X_i^+ = \bigcup\limits_{j=1}^{r_i} X_{ij}^+$ et $X_i^- = \bigcup\limits_{j=1}^{r_i} X_{ij}^-$ la décomposition en composantes connexes respectivement de X_i^T, X_i^+ et X_i^-. Pour tout $j \in \{1,\ldots,r_i\}$, on a

$$X_{ij}^+ = \left\{x \in X \mid \lim_{t\to 0} t\cdot x \in X_{ij}\right\}$$

et

$$X_{ij}^- = \left\{x \in X \mid \lim_{t\to \infty} t\cdot x \in X_{ij}\right\}.$$

Notons $W_1^+ = (T_xX)_{>0}$ pour $x \in X_1^T$, $W_n^- = (T_xX)_{<0}$ pour $x \in X_n^T$ et pour tout $i \in \{2,\ldots,n-1\}$ et tout $j \in \{1,\ldots,r_i\}$, $W_{ij}^- = (T_xX)_{<0}$ et $W_{ij}^+ = (T_xX)_{>0}$ avec $x \in X_{ij}$ (pour les notations $(T_xX)_{<0}$ et $(T_xX)_{>0}$, on pourra consulter le paragraphe 2 du chapitre 0). Remarquons que les poids de T dans W_{ij}^- sont parmi les entiers $a_1-a_i,\ldots,a_{i-1}-a_i$ et ceux de W_{ij}^+ sont parmi les entiers $a_{i+1}-a_i,\ldots,a_n-a_i$. On a :

$$X_{i,i-1}^{ss} \backslash X_i^s = \left\{x \in X \mid \tilde{x}_{<i} \neq 0,\ \tilde{x}_i \neq 0 \text{ et } \tilde{x}_{>i} = 0\right\} = X_i^- \backslash X_i^T$$

et

$$X_{i,i+1}^{ss} \backslash X_i^s = \left\{x \in X \mid \tilde{x}_{<i} = 0,\ \tilde{x}_i \neq 0 \text{ et } \tilde{x}_{>i} \neq 0\right\} = X_i^+ \backslash X_i^T.$$

Notons pour tout $i \in \{2,\ldots,n-1\}$, $E_i^- = \pi_{i^-}(X_{i-1,i}^{ss} \backslash X_i^s)$ et $E_i^+ = \pi_{i^+}(X_{i,i+1}^{ss} \backslash X_i^s)$.

On a $E_i^- = \bigcup\limits_{j=1}^{r_i} E_{ij}^-$ et $E_i^+ = \bigcup\limits_{j=1}^{r_i} E_{ij}^+$ où pour tout $j \in \{1,\ldots,r_i\}$, $E_{ij}^- = \pi_{i^-}(X_{ij}^- \backslash X_{ij})$ et $E_{ij}^+ = \pi_{i^+}(X_{ij}^+ \backslash X_{ij})$.

Rappelons que si $(q_1,\ldots,q_m)$ est une suite finie d'entiers positifs, l'espace projectif avec poids $\mathbb{P}(q_1,\ldots,q_m)$ est la variété $\mathrm{Proj}\, k[T_1,\ldots,T_m]$ où $k[T_1,\ldots,T_m]$ est graduée par $\deg T_i = q_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq m$. Autrement dit, $\mathbb{P}(q_1,\ldots,q_m) = \frac{k^m \backslash \{0\}}{k^*}$ où k^* opère linéairement dans k^m avec les poids $q_1,\ldots,q_m$.

THÉORÈME I.3.3.

(i) *Le morphisme* $\pi_1 : X_1^{ss} \to Y_1$ *(resp.* $\pi_n : X_n^{ss} \to Y_n$*) est égal au morphisme* $q_1^+ : X_1^+ \to X_1^T$ *(resp.* $q_{n^-} : X_n^- \to X_n^T$*).*

(ii) *Si* X *est lisse, les morphismes* $f_{1^+} : Y_{1,2} \to Y_1$ *et* $f_{n^-} : Y_{n-1,n} \to Y_n$ *sont des fibrations localement triviales pour la topologie de Zariski dont les fibres respectives sont les espaces projectifs avec poids* $\frac{W_1^+\setminus\{0\}}{T}$ *et* $\frac{W_n^-\setminus\{0\}}{T}$*.*

De plus, pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$ *et tout* $j \in \{1, \dots, r_i\}$*, les restrictions de* f_{i^-} *et* f_{i^+} *à* E_{ij}^- *et* E_{ij}^+ *sont des fibrations localement triviales pour la topologie de Zariski sur* X_{ij} *et de fibres respectives les espaces projectifs avec poids* $\frac{W_{ij}^-\setminus\{0\}}{T}$ *et* $\frac{W_{ij}^+\setminus\{0\}}{T}$*.*

Démonstration.

(i) On a $X_1^{ss} = \big\{x \in X \mid \tilde{x}_1 \neq 0\big\} = X_1^+$ et $X_n^{ss} = \big\{x \in X \mid \tilde{x}_n \neq 0\big\} = X_n^-$.

Pour tout $x \in X_1^{ss}$, on a $\pi_1(x) = \pi_1(\lim\limits_{t\to 0} t\cdot x)$ d'où l'assertion *(i)*.

(ii) On notera pour tout i, $1 \leq i \leq n$ et tout k, $1 \leq k \leq m_i$, $U_i^k = \big\{x \in X \mid \tilde{x}_{<i} = 0,\, \tilde{x}_i^{(k)} \neq 0,\, \tilde{x}_{>i} = 0\big\}$ où pour tout $x \in X$, $\tilde{x}_i^{(k)}$ désigne la $k^{\text{ème}}$-coordonnée de $\tilde{x}_i$ relativement à une base fixée de V_i.

On a $X_i^T = \bigcup\limits_{i=1}^{m_i} U_i^k$, $X_{1,2}^{ss} = X_1^+ \setminus X_1^T$ et $X_{n-1,n}^{ss} = X_n^- \setminus X_n^T$.

Si on note ρ_{1^+} la restriction de q_{1^+} à $X_{1,2}^{ss}$ alors d'après le théorème 0.2.3, pour $1 \leq k \leq m_1$, $\rho_{1^+}^{-1}(U_1^k)$ est T-isomorphe à $U_1^k \times (W_1^+ \setminus\{0\})$. D'où

$$\begin{aligned} f_{1^+}^{-1}(U_1^k) &= \pi_{1^+}\big(\rho_{1^+}^{-1}(U_1^k)\big) \\ &\cong \pi_{1^+}\big(U_1^k \times (W_1^+\setminus\{0\})\big) \end{aligned}$$

Alors $f_{1^+}^{-1}(U_1^k) \cong U_1^k \times \frac{W_1^+\setminus\{0\}}{T}$ car T agit trivialement sur U_1^k.

Fixons i tel que $2 \leq i \leq n-1$.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_{i-1,i}^{ss} & \hookrightarrow & X_i^{ss} \\ {\scriptstyle \pi_{i^-}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ Y_{i-1,i} & \xrightarrow{f_{i^-}} & Y_i\,. \end{array}$$

On a $Y_{i-1,i}\setminus E_i^- = \pi_{i^-}(X_i^s)$.

D'après le théorème I.3.1, *(iii)*, la restriction de f_{i^-} à $\pi_{i^-}(X_i^s)$ est un isomorphisme de $\pi_{i^-}(X_i^s)$ sur $\pi_i(X_i^s)$.

De plus $\pi_i(X_i^s) = Y_i \backslash X_i^s$; en effet, $\pi_i(X_i^s) \subset Y_i \backslash X_i^T$ car $X_i^T \cap X_i^s = \emptyset$ et réciproquement, si $\pi_i(x) \in Y_i \backslash \pi_i(X_i^s)$ alors $x \in X_i^- \cup X_i^+$ et $\pi_i(x) \in \pi_i(X_i^T)$.

Pour tout $x \in X_{i-1,i}^{ss} \backslash X_i^s = X_i^- \backslash X_i^T$, on a $\pi_i(x) = \pi_i\big(\lim_{t\to\infty} t\cdot x\big)$. Donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X_{i-1,i}^{ss}\backslash X_i^s \arrow[d, "\pi_{i^-}"'] \arrow[dr, "q_{i^-}"] & \\ E_i^- \arrow[r, "f_{i^-}"] & X_i^+ \end{tikzcd} .$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, r_i\}$ et tout $k \in \{2, \ldots, m_i\}$, on a :

$$f_{i^-}^{-1}\left(U_i^k \cap X_{ij}\right) = \pi_{i^-}\left(q_{i^-}^{-1}\left(U_i^k \cap X_{ij}\right)\right) \; .$$

Or, d'après le théorème 0.2.3, on a :

$$q_{i^-}^{-1}\left(U_i^k \cap X_{ij}\right) \cong \left(U_i^k \cap X_{ij}\right) \times \left(W_{ij}^- \backslash \{0\}\right) .$$

Donc $f_{i^-}^{-1}\left(U_i^k \cap X_{ij}\right) \cong \left(U_i^k \cap X_{ij}\right) \times \left(\frac{W_{ij}^-\backslash\{0\}}{T}\right)$ car T agit trivialement sur les ouverts $U_i^k \cap X_{ij}$. □

Exemple I.3.4.

Considérons le cas où $X = \mathbb{P}(V)$. On a $Y_1 = \mathbb{P}(V_1)$ et $Y_n = \mathbb{P}(V_n)$. Le morphisme f_{1^+} (resp. f_{n^-}) est une fibration sur $\mathbb{P}(V_1)$ (resp. sur $\mathbb{P}(V_n)$) de fibre l'espace projectif avec poids $\mathbb{P}\big((a_2-a_1)^{(m_2)}, \ldots, (a_n-a_1)^{(m_n)}\big)$ (resp. $\mathbb{P}\big((a_n-a_1)^{(m_1)}, \ldots, (a_n-a_{n-1})^{(m_{n-1})}\big)$) où pour tous les poids q apparaissant dans ces espaces projectifs avec poids, la notation $q^{(m_j)}$ signifie que le poids q apparaît m_j fois.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, les morphismes q_{i^-} et q_{i^+} se construisent directement. Par exemple, la fibre de q_{i^-} est $V_{<i}$ et les morphismes T-équivariants φ_{ik} et ψ_{ik} définis par :

$$\begin{aligned} \varphi_{ik} : q_{i^-}^{-1}(U_i^k) &\longrightarrow U_i^k \times V_{<i} \\ [\tilde{x}_{<i} + \tilde{x}_i + 0] &\longmapsto \left([\tilde{x}_i], \frac{\tilde{x}_{<i}}{\tilde{x}_i^{(k)}}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_{ik} : U_i^k \times V_{<i} &\longrightarrow q_{i^-}^{-1}(U_i^k) \\ ([\tilde{x}_i], v) &\longmapsto [\tilde{x}_i^{(k)} v + \tilde{x}_i]) \end{aligned}$$

vérifient $\varphi_{ik} \circ \psi_{ik} = \mathrm{id}$ et $\psi_{ik} \circ \varphi_{ik} = \mathrm{id}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $k \in \{1, \ldots, m_i\}$.

Les fibres des restrictions à E_i^- et E_i^+ des morphismes f_{i^-} et f_{i^+} $(2 \leq i \leq n-1)$ sont respectivement les espaces projectifs avec poids $\mathbb{P}\left((a_i-a_1)^{(m_1)}, \ldots, (a_i-a_{i-1})^{(m_{i-1})}\right)$ et $\mathbb{P}\left((a_{i+1}-a_i)^{(m_{i+1})}, \ldots, (a_n-a_i)^{(m_n)}\right)$.

Au moyen de *(iii)* du théorème I.3.3, on peut trouver un critère pour que f_{i^-} et f_{i^+} $(2 \leq i \leq n-1)$, soient des morphismes petits, au sens suivant :

DÉFINITION I.3.5. — *Un morphisme petit $f : X \to Y$ entre deux variétés X et Y est un morphisme propre birationnel tel que, pour tout $r > 0$, on ait l'inégalité :*

$$\mathrm{codim}_Y \left\{ y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) \geq r \right\} > 2r \,.$$

On a alors :

COROLLAIRE I.3.6. — *Si la variété X est lisse, pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, le morphisme f_{i^-} (resp. f_{i^+}) est petit si, et seulement si, $\dim W_{ij}^- \leq \dim W_{ij}^+$ (resp. $\dim W_{ij}^+ \leq \dim W_{ij}^-$) pour tout $j \in \{1, \dots, r_i\}$.*

Démonstration.

Fixons i tel que $2 \leq i \leq n-1$.

Remarquons que l'on a :

$$\left\{ x \in Y_i \mid \dim f_{i^-}^{-1}(x) \geq r \right\} = \left\{ x \in X_i^T \mid \dim f_{i^-}^{-1}(x) \geq r \right\} \,.$$

Si f_{i^-} est un morphisme petit, en prenant $r = \dim f_{i^-}^{-1}(x)$ avec $x \in X_i^T$, la condition de la définition I.3.5 s'écrit

$$\dim Y_i - \dim X_i^T > 2 \dim f_{i^-}^{-1}(x) \,.$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, r_i\}$, on a donc $\dim W_{ij}^- \leq \frac{1}{2}(\dim Y_i - \dim X_{ij} + 1)$ avec $\dim Y_i - \dim X_{ij} + 1 = \dim X - \dim X_{ij}$.

Par le corollaire 0.2.6, on a :

$$\dim X = \dim X_{ij}^- + \dim X_{ij}^+ - \dim X_{ij} \,.$$

Il résulte des égalités :

$$\dim X_{ij}^- = \dim X_{ij} + \dim W_{ij}^-$$

et

$$\dim X_{ij}^+ = \dim X_{ij} + \dim W_{ij}^+ \,,$$

les inégalités

$$\dim W_{ij}^- \leq \frac{1}{2}\big(\dim W_{ij}^- + \dim W_{ij}^+ \big)$$

et

$$\dim W_{ij}^- \leq \dim W_{ij}^+ \,.$$

Inversement, si $\dim W_{ij}^- \leq \dim W_{ij}^+$ pour tout $j \in \{1,\ldots,r_i\}$, on a $\dim W_{ij}^- \leq \frac{1}{2}\big(\dim Y_i - \dim X_{ij}+1\big)$ et pour tout $x \in X_{ij}$, $2\dim f_{i^-}^{-1}(x) < \dim Y_i - \dim X_{ij}$. Donc pour tout $r>0$ et tout $x \in X_{ij}$, $2\dim f_{i^-}^{-1}(x) < \operatorname{codim}_{Y_i}\big\{x \in X_{ij} \mid \dim f_{i^-}^{-1}(x) \geq r\big\}$. D'où pour tout $r>0$, $\operatorname{codim}_{Y_i}\big\{x \in X_{ij} \mid \dim f_{i^-}^{-1}(x) \geq r\big\} > 2r$ et f_{i^-} est un morphisme petit. □

Remarque I.3.7. — Le corollaire I.3.6 est un cas particulier du théorème 2.4 de [Hu].

Remarque I.3.8. — Si $X = \mathbb{P}(V)$, une condition nécessaire et suffisante pour que f_{i^-} (resp. f_{i^+}), $2 \leq i \leq n-1$, soit un morphisme petit, est : $\sum_{j=1}^{i-1} m_j \leq \sum_{j=i+1}^{n} m_j$ (resp. $\sum_{j=i+1}^{n} m_j \leq \sum_{j=1}^{i-1} m_j$).

4. Modèle local

Nous allons décrire un modèle local du diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y_{i-1,i} \arrow[dr, "f_{i^-}"'] & & Y_{i,i+1} \arrow[dl, "f_{i^+}"] \\ & Y_i & \end{tikzcd} \qquad (2 \leq i \leq n-1)\,.$$

On supposera la variété X lisse.

On conserve les notations suivantes : pour tout $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ et tout $j \in \{1,\ldots,r_i\}$ et $x \in X_{ij}$, on note $W_{ij}^- = (T_xX)_{<0}$ et $W_{ij}^+ = (T_xX)_{>0}$.

Théorème I.4.1. — *Pour tout $i \in \{2,\ldots,n-1\}$, tout $j \in \{1,\ldots,r_i\}$ et tout $x \in X_{ij}$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_i$ de $\pi_i(x)$ dans Y_i affine, et des morphismes étales :*

$$\varphi_i : \mathcal{V}_i \longrightarrow T_x(X_i^T) \times \big((W_{ij}^- \times W_{ij}^+)//T\big)$$
$$\varphi_{i^-} : f_{i^-}^{-1}(\mathcal{V}_i) \longrightarrow T_x(X_i^T) \times \big(((W_{ij}^- \backslash \{0\}) \times W_{ij}^+)/T\big)$$

et

$$\varphi_{i^+} : f_{i^+}^{-1}(\mathcal{V}_i) \longrightarrow T_x(X_i^T) \times \big((W_{ij}^- \times (W_{ij}^+ \backslash \{0\}))/T\big)\,.$$

Les morphismes φ_i, φ_{i^-} et φ_{i^+} font commuter les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
f_{i^-}^{-1}(\mathcal{V}_i) \arrow[dd, "\varphi_{i^-}"'] \arrow[dr, "f_{i^-}"] & & f_{i^+}^{-1}(\mathcal{V}_i) \arrow[dl, "f_{i^+}"'] \arrow[dd, "\varphi_{i^+}"] \\
& \mathcal{V}_i \arrow[dd, "\varphi_i"] & \\
T_x(X_i^T) \times \Big(\big((W_{ij}^-\backslash\{0\}) \times W_{ij}^+\big)/T\Big) \arrow[dr, "g_{i^-}"] & & T_x(X_i^T) \times \Big(\big(W_{ij}^- \times (W_{ij}^+\backslash\{0\})\big)/T\Big) \arrow[dl, "g_{i^+}"'] \\
& T_x(X_i^T) \times \Big((W_{ij}^- \times W_{ij}^+)//T\Big) &
\end{tikzcd}$$

où les morphismes g_{i^-} et g_{i^+} proviennent, par passage au quotient par T, des inclusions $(W_{ij}^-\backslash\{0\}) \times W_{ij}^+ \hookrightarrow W_{ij}^- \times W_{ij}^+$ et $W_{ij}^- \times (W_{ij}^-\backslash\{0\}) \hookrightarrow W_{ij}^- \times W_{ij}^+$.

Démonstration.

Fixons i tel que $2 \leq i \leq n-1$.

D'après le lemme 0.2.4, pour tout $x \in X_i^T$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_i$ de x dans X affine et T-stable contenant X_i^- et X_i^+, et un morphisme $\psi_i : \mathcal{U}_i \to T_xX$ étale, T-équivariant et tel que $\psi_i(x) = 0$. Par le théorème des slices de Luna ([Lu], II.2), on peut supposer que $\mathcal{U}_i$ est π_i-saturé et que le morphisme $\varphi_i : \pi_i(\mathcal{U}_i) \longrightarrow \frac{T_xX}{T}$ est étale. On pose $\mathcal{V}_i = \pi_i(\mathcal{U}_i)$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, r_i\}$ et $x \in X_{ij}$, on a $T_xX = T_x(X_i^T) \times W_{ij}^- \times W_{ij}^+$. D'où le morphisme étale $\varphi_i : \mathcal{V}_i \longrightarrow T_x(X_i^T) \times \big((W_{ij}^- \times W_{ij}^+)//T\big)$.

On a $f_{i^-}^{-1}(\mathcal{V}_i) = \pi_{i^-}(\mathcal{U}_i \cap X_{i-1,i}^{ss})$ et $\mathcal{U}_i \cap X_{i-1,i}^{ss} = (X_i^-\backslash X_i^T) \cup (\mathcal{U}_i \cap X_i^s)$. Soit $x \in X_{ij}$ avec $1 \leq j \leq r_i$, posons $M_i = T_xX$. Comme $X_i^T = \psi_i^{-1}(M_i^T)$, on a $X_i^- = \psi_i^{-1}(M_i^-)$ et $X_i^+ = \psi_i^{-1}(M_i^+)$ (voir chapitre 0, paragraphe 2). On a alors

$$\psi_i(X_i^-\backslash X_i^T) = T_x(X_i^T) \times (W_{ij}^-\backslash\{0\})$$

et

$$\psi_i(X_i^s) = T_x(X_i^T) \times (W_{ij}^-\backslash\{0\}) \times (W_{ij}^+\backslash\{0\})$$

car $y \in X_i^s$ équivaut à $y \notin X_i^- \cup X_i^+$. D'après le lemme 1 de ([Lu], II), le morphisme $\varphi_{i^-} : f_{i^-}^{-1}(\mathcal{V}_i) \longrightarrow T_x(X_i^T) \times ((W_{ij}^-\backslash\{0\}) \times W_{ij}^+)/T)$ est étale.

Montrons maintenant la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} f_{i^-}^{-1}(\mathcal{V}_i) & \xrightarrow{f_{i^-}} & \mathcal{V}_i \\ {\scriptstyle \varphi_{i^-}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_i} \\ T_x(X_i^T) \times (((W_{ij}^- \backslash \{0\}) \times W_{ij}^+)/T) & \xrightarrow{g_{i^-}} & T_x(X_i^T) \times ((W_{ij}^- \times W_{ij}^+)//T). \end{array}$$

Notons $\widetilde{\pi}_i : T_x(X_i^T) \times (W_{ij}^- \times W_{ij}^+) \longrightarrow T_x(X_i^T) \times \big((W_{ij}^- \times W_{ij}^+)//T\big)$ le morphisme quotient.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_i & \xrightarrow{\pi_i} & \mathcal{V}_i \\ {\scriptstyle \psi_i}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_i} \\ T_x(X_i^T) \times (W_{ij}^- \times W_{ij}^+) & \xrightarrow{\widetilde{\pi}_i} & T_x(X_i^T) \times \big((W_{ij}^- \times W_{ij}^+)//T\big). \end{array}$$

Pour tout élément $\xi = \pi_{i^-}(y)$ de $f_{i^-}^{-1}(\mathcal{V}_i)$ (avec $y \in \mathcal{U}_i \cap X_{i-1,i}^{ss}$), il en résulte les égalités successives :

$$g_{i^-}(\varphi_{i^-}(\xi)) = \widetilde{\pi}_i(\psi_i(y)) = \varphi_i(\pi_i(y)) = \varphi_i(f_{i^-}(\xi)) . \qquad \square$$

Exemple I.4.2.

Nous allons préciser les résultats du théorème I.4.1 dans le cas où $X = \mathbb{P}(V)$.

Pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ et tout $k \in \{1, \ldots, m_i\}$, on pose $\mathcal{U}_i^k = \{x \in X \mid \tilde{x}_i^{(k)} \neq 0\}$ et $U_i^k = \{x \in X \mid \tilde{x}_{<i} = 0,\ \tilde{x}_i^{(k)} \neq 0,\ \tilde{x}_{>i} = 0\}$.

Proposition I.4.3. — *Pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ et tout $k \in \{1, \ldots, m_i\}$, on a les isomorphismes suivants :*

$$\pi_i(\mathcal{U}_i^k) \cong U_i^k \times \big((V_{<i} \times V_{>i})//T\big) ,$$
$$f_{i^-}^{-1}(\pi_i(\mathcal{U}_i^k)) \cong U_i^k \times \big(((V_{<i} \backslash \{0\}) \times V_{>i})/T\big)$$

et

$$f_{i^+}^{-1}(\pi_i(\mathcal{U}_i^k)) \cong U_i^k \times \big((V_{>i} \times (V_{<i} \backslash \{0\}))/T\big)$$

où T agit sur $V_{<i}$ et sur $V_{>i}$ avec les poids décalés du poids a_i.

Démonstration.

Fixons i et k tels que $1 \le i \le n-1$ et $1 \le k \le m_i$.

On a $\mathcal{U}_i^k = q_i^{-1}(U_i^k)$ où q_i est le morphisme défini par :

$$\begin{aligned} q_i : \{x \in X \ ; \ \tilde{x}_i \neq 0\} &\longrightarrow \mathbb{P}(V_i) \\ x &\longmapsto [\tilde{x}_i]\,. \end{aligned}$$

Les morphismes T-équivariants :

$$\begin{aligned} q_i^{-1}(U_i^k) &\longrightarrow U_i^k \times V_{<i} \times V_{>i} \\ [\tilde{x}_{<i} + \tilde{x}_i + \tilde{x}_{>i}] &\longmapsto \left([\tilde{x}_i], \left(\frac{\tilde{x}_{<i}}{\tilde{x}_i^{(k)}}, \frac{\tilde{x}_{>i}}{\tilde{x}_i^{(k)}}\right)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U_i^k \times V_{<i} \times V_{>i} &\longrightarrow q_i^{-1}(U_i^k) \\ ([\tilde{x}_i], (v_i, v_i')) &\longmapsto [\tilde{x}_i^{(k)} v_i + \tilde{x}_i + \tilde{x}_i^{(k)} v_i'] \end{aligned}$$

sont réciproques l'un de l'autre.

D'où $\pi_i(\mathcal{U}_i^k) \cong U_i^k \times (V_{<i} \times V_{>i})//T$ car T agit trivialement sur les U_i^k.

On veut maintenant déterminer $f_{i^-}^{-1}(\pi_i(\mathcal{U}_i^k))$ et $f_{i^+}^{-1}(\pi_i(\mathcal{U}_i^k))$ pour tout i et tout k.

Les ouverts $\mathcal{U}_i^k$ de X_i^{ss} sont saturés pour π_i car $\tilde{x}_i^{(k)}$ est un vecteur propre de T dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$. On a alors $f_{i^-}^{-1}(\pi_i(\mathcal{U}_i^k)) = \pi_{i^-}(X_{i-1,i}^{ss} \cap \mathcal{U}_i^k)$. Or $X_{i-1,i}^{ss} \cap \mathcal{U}_i^k = \big\{x \in X \mid \tilde{x}_{<i} \neq 0$ et $\tilde{x}_i^k \neq 0\big\}$ d'où $X_{i-1,i}^{ss} \cap \mathcal{U}_i^k \cong U_i^k \times (V_{<i} \backslash \{0\}) \times V_{>i}$ en restreignant l'isomorphisme $\mathcal{U}_i^k \longrightarrow U_i^k \times V_{<i} \times V_{>i}$ à $X_{i-1,i}^{ss} \cap \mathcal{U}_i^k$.

Comme T agit trivialement sur les U_i^k, on a :

$$f_{i^-}^{-1}(\pi_i(\mathcal{U}_i^k)) \cong U_i^k \times \big(((V_{<i} \backslash \{0\}) \times V_{>i})/T\big). \qquad \square$$

La proposition suivante caractérise la variété $\frac{(W_{ij}^- \backslash \{0\}) \times W_{ij}^+}{T}$ (resp. $\frac{W_{ij}^- \times (W_{ij}^+ \backslash \{0\})}{T}$) comme le quotient d'un fibré vectoriel sur $\frac{W_{ij}^- \backslash \{0\}}{T}$ (resp. sur $\frac{W_{ij}^+ \backslash \{0\}}{T}$) par un groupe fini abélien.

Considérons alors un T-module W^- (resp. W^+) où T opère dans W^- (resp. W^+) avec les poids $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n$ (resp. $\beta_1, \ldots, \beta_m$), les α_i, $1 \le i \le n$ (resp. les β_i, $1 \le i \le m$) étant des entiers strictement positifs. Pour tout entier q, on note μ_q le groupe des racines $q^{\text{ème}}$ de l'unité dans k^*. On pose $H = \prod_{i=1}^{n} \mu_{\alpha_i}$ et on note $\mathbb{P}$ l'espace projectif avec poids $\frac{W^- \backslash \{0\}}{T}$. Remarquons que d'après [Do], 1.2.2, on a $\mathbb{P} = \frac{\mathbb{P}(W^-)}{H}$.

Proposition I.4.4. — *La variété $\frac{(W^-\backslash\{0\})\times W^+}{T}$ est isomorphe au quotient de l'espace total du fibré vectoriel $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W^-)}(-\beta_i)$ par le groupe fini H.*

Démonstration.

Notons F le quotient de $(W^-\backslash\{0\})\times W^+$ par T où les poids du T-module W^- sont cette fois tous égaux à -1 (les poids de T dans W^+ sont toujours les β_i, $1 \leq i \leq m$). Faisons agir le groupe H diagonalement sur le premier facteur de $(W^-\backslash\{0\}) \times W^+$. Les actions de H et T sur $(W^-\backslash\{0\}) \times W^+$ commutent et on a :

$$\frac{F}{H} = \frac{(W^-\backslash\{0\}) \times W^+}{T} \,.$$

Ceci se montre de la même façon que lorsqu'on identifie un espace projectif avec poids comme un espace projectif quotienté par un groupe fini (voir [Do], 1.2.).

Du lemme suivant, résulte le fait que F est l'espace total du fibré $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W^-)}(-\beta_i)$.

Lemme I.4.5. — *Soit W_1 un T-module de dimension un et de poids a. Soit W_2 un T-module de dimension finie dont les poids de T dans W_2 sont tous égaux à un. Alors la variété $\frac{W_1\times(W_2\backslash\{0\})}{T}$ est isomorphe à l'espace total du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_2)}(a)$.*

Démonstration du lemme I.4.5.

On peut supposer que $a = -1$. L'espace total du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_2)}(-1)$ est :

$$\left\{((x_1,\ldots,x_m);[y_1:\cdots:y_m]) \in W_2 \times \mathbb{P}(W_2) \mid x_i y_i = x_j y_i,\ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq m \end{array}\right\} .$$

Le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : W_1 \times (W_2\backslash\{0\}) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_2)}(-1) \\ (\lambda;(x_1,\ldots,x_m)) &\longmapsto ((\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n);[x_1:\cdots:x_n]) \end{aligned}$$

passe au quotient par T en un morphisme $\overline{\varphi}$ de fibré :

$$\overline{\varphi} : \frac{W_1 \times (W_2\backslash\{0\})}{T} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_2)}(-1) \,.$$

On vérifie facilement que $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels. □

Exemple I.4.6.

Étudions le cas où $X = \mathbb{P}(V_1 \oplus V_2)$ (on rappelle que V_i est de poids a_i).

On a $Y_1 = \mathbb{P}_k^{m_1-1}$ et $Y_2 = \mathbb{P}_k^{m_2-1}$; ensuite $X_{1,2}^{ss} = \{x \in X \mid \tilde{x}_1 \neq 0 \text{ et } \tilde{x}_2 \neq 0\}$ et le morphisme

$$\begin{aligned} X_{1,2}^{ss} &\longrightarrow \mathbb{P}_k^{m_1-1} \times \mathbb{P}_k^{m_2-1} \\ [\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2] &\longmapsto ([\tilde{x}_1], [\tilde{x}_2]) \end{aligned}$$

est le quotient par T.

On a donc $Y_{1,2} = \mathbb{P}_k^{m_1-1} \times \mathbb{P}_k^{m_2-1}$.

Le diagramme du paragraphe 3 reliant Y_1 et Y_2, est dans ce cas tout simplement :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}_k^{m_1-1} \times \mathbb{P}_k^{m_2-1} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{P}_k^{m_1-1} & & \mathbb{P}_k^{m_2-1} \end{tikzcd}$$

où le morphisme π_1 (resp. π_2) est la projection sur le premier facteur (resp. sur le deuxième facteur).

Exemple I.4.7.

Considérons le cas où $X = \mathbb{P}(V)$ lorsque les T-modules V_1 et V_2 sont de dimension 1.

PROPOSITION I.4.8. — *Avec les hypothèses ci-dessus, on a :*

(i) *La variété Y_1 est réduite à un point.*

(ii) $Y_{1,2} = \mathbb{P}(a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_1)$.

(iii) *Le morphisme $f_{2^-} : Y_{1,2} \longrightarrow Y_2$ est un isomorphisme.*

Démonstration.

Les assertions *(i)* et *(ii)* résultent directement des assertions *(i)* et *(ii)* du théorème I.3.3.

D'après *(iii)* du théorème I.3.3, le morphisme birationnel f_{2^-} a son lieu exceptionnel contenu dans un point $x \in Y_{1,2}$. Mais Y_2 est normale donc f_{2^-} est un isomorphisme. □

Nous allons maintenant décrire le morphisme birationnel $f_{2^+} : Y_{2,3} \to Y_2$. On a $X_2^T = \{[0 : 1 : 0 \cdots 0]\}$. D'après la proposition I.4.3, il s'agit d'étudier le morphisme birationnel :

$$f_{2^+} : \big(V_1 \times (V_{>2} \backslash \{0\})\big)/T \longrightarrow (V_1 \times V_{>2})//T\ .$$

On note $-a$ le poids de V_1 et $b_1, \dots, b_n$ les poids de $V_{>2}\backslash\{0\}$, et $\omega, x_1, \dots, x_m$ les coordonnées correspondantes. On note encore $Y_{2,3} = \big(V_1 \times (V_{>2}\backslash\{0\})\big)/T$ et $Y_2 = (V_1 \times V_{>2})//T$. Le morphisme f_{2+} induit un isomorphisme de $Y_{2,3}\backslash\mathbb{P}(b_1, \dots, b_m)$ sur $Y_2\backslash\{0\}$ où on a posé $0 = \pi_2(0)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on note y_i l'élément de $k[Y_2] = k[\omega, x_1, \dots, x_m]^T$ défini par $y_i = \omega^{b_i} x_i^a$. Enfin, on pose $c_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} b_j$, $1 \leq i \leq m$.

Proposition I.4.9. — *Le morphisme f_{2+} est l'éclatement normalisé de Y_2 par rapport à l'idéal I engendré par les $y_i^{c_i}$, $1 \leq i \leq m$.*

Démonstration.

Si on note pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $U_i = \big\{(x_1, \dots, x_m) \in V_{>2} \mid x_i \neq 0\big\}$, alors les cartes affines de Y_2 sont les ouverts $(V_1 \times U_i)//T$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la k-algèbre $k[V_1 \times U_i]^T$ contient les éléments $\left(\frac{x_j^{c_j}}{x_i^{c_i}}\right)^a$, $1 \leq j \leq m$, comme $y_j^{c_j} = y_i^{c_i}\left(\frac{x_j^{c_j}}{x_i^{c_i}}\right)^a$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, l'idéal $I \cdot k[V_1 \times U_i]^T$ est principal. D'après la proposition 7.14 du chapitre II de [Ha1], si $\pi : B\ell_I Y_2 \longrightarrow Y_2$ désigne l'éclatement de Y_2 par rapport à I, il existe un unique morphisme $g : Y_{2,3} \longrightarrow B\ell_I Y_2$ tel que $\pi \circ g = f$.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{B\ell_I Y_2} \\ & \overset{\tilde{f}_{2+}}{\nearrow} & \downarrow \\ Y_{2,3} & \xrightarrow{g} & B\ell_I Y_2 \, , \\ & \underset{f_{2+}}{\searrow} & \downarrow \pi \\ & & Y_2 \end{array}$$

$\widetilde{B\ell_I Y_2} \longrightarrow B\ell_I Y_2$ étant la normalisation de $B\ell_I Y_2$.

Le morphisme $\tilde{f}_{2+}$ envoie le diviseur exceptionnel de f_{2+} sur le lieu exceptionnel de π. Mais ce diviseur exceptionnel est l'espace projectif avec poids $\mathbb{P}(b_1, \dots, b_m)$ qui a pour groupe de Picard $\mathbb{Z}$. Il n'existe alors pas de courbes contractées par $\tilde{f}_{2+}$ et $\tilde{f}_{2+}$ est un isomorphisme. $\square$

Remarques I.4.10.

1) Il peut arriver que $Y_{2,3}$ soit vraiment l'éclatement de Y_2 par rapport à I : en effet, supposons que $\dim V_{>2} = 2$ et prenons $a = 1$, $b_1 = 1$ et pour b_2 un entier b strictement positif quelconque.

On a : $k[Y_2] = k[y_1, y_2]$ où $y_1 = x_1\omega$ et $y_2 = x_2\omega^b$,

$$k[V_1 \times U_1]^T = k\Big[y_1, \frac{y_2}{y_1^b}\Big]$$

et

$$k[V_1 \times U_2]^T = k\Big[y_1, y_2, \frac{y_1^b}{y_2}\Big] .$$

Dans ce cas, le morphisme f_{2+} est l'éclatement de Y_2 par rapport à l'idéal $I = (y_1^b, y_2)$.

2) Il peut arriver que l'éclaté $B\ell_I Y_2$ de Y_2 par rapport à I, ne soit pas normal : en effet, supposons que $\dim V_{>2} = 2$, $a = -1$, $b_1 = 2$ et $b_2 = 3$.

On a : $k[Y_2] = k[y_1, y_2]$ où $y_1 = x_1\omega^2$ et $y_2 = x_2\omega^3$,

$$k[V_1 \times U_1]^T = k\Big[y_1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_2^2}{y_1^3}\Big]$$

et

$$k[V_1 \times U_2]^T = k\Big[y_1, y_2, \frac{y_1^2}{y_2}, \frac{y_1^3}{y_2^2}\Big] .$$

On a $I = (y_1^3, y_2^2)$ et

$$B\ell_I Y_2 = \operatorname{spec} k\Big[y_1, y_2, \frac{y_2^2}{y_1^3}\Big] \cup \operatorname{spec} k\Big[y_1, y_2, \frac{y_1^3}{y_2^2}\Big] .$$

L'élément $\frac{y_2}{y_1}$ de $k[V_1 \times U_1]^T$ n'est ni dans $k\Big[y_1, y_2, \frac{y_2^2}{y_1^3}\Big]$, ni dans $k\Big[y_1, y_2, \frac{y_1^3}{y_2^2}\Big]$ et pourtant $\frac{y_2}{y_1}$ est entier sur $k\Big[y_1, y_2, \frac{y_2^2}{y_1^3}\Big]$ car $\big(\frac{y_2}{y_1}\big)^3 = y_2 \cdot \frac{y_2^2}{y_1^3}$.

Remarque I.4.11. — Fixons i et j tels que $2 \leq i \leq s-1$ et $1 \leq j \leq r_i$.

Si on note $\widehat{W_{ij}}$ le produit fibré de $((W_{ij}^- \backslash \{0\}) \times W_{ij}^+)/T$ et $(W_{ij}^- \times (W_{ij}^+ \backslash \{0\}))/T$ au-dessus de $(W_{ij}^- \times W_{ij}^+)//T$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{W}_{ij} \arrow[r, "\phi_{i-}"] \arrow[d, "\phi_{i+}"'] \arrow[dr, "\psi_i"] & \big((W_{ij}^-\backslash\{0\}) \times W_{ij}^+\big)/T \arrow[r, "p_{i-}"] \arrow[d, "g_{i-}"] & (W_{ij}^-\backslash\{0\})/T \\
\big(W_{ij}^- \times (W_{ij}^+\backslash\{0\})\big)/T \arrow[r, "g_{i+}"] \arrow[d, "p_{i+}"'] & (W_{ij}^- \times W_{ij}^+)//T & \\
\big(W_{ij}^+\backslash\{0\}\big)/T & &
\end{tikzcd}$$

où le morphisme p_{i^-} (resp. p_i^+) est induit par la première projection (resp. la deuxième projection).

D'après [Br-Pr], corollaire 2.1, ϕ_{i^+}, ϕ_{i^-} et ψ_i sont des éclatements (resp. des sections nulles de p_{i^+}, p_{i^-} et de 0), avec pour diviseur exceptionnel $\left(\frac{W_{ij}^-\backslash\{0\}}{T}\right) \times \left(\frac{W_{ij}^+\backslash\{0\}}{T}\right)$. (On pourra aussi consulter le théorème 1.9 dans [Tha].)

Nous allons maintenant décrire les applications birationnelles du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Y_{i-1,i} \arrow[rr, dashed, "f_{i+}^{-1}\circ f_{i-}"] \arrow[dr, "f_{i-}"'] & & Y_{i,i+1} \arrow[dl, "f_{i+}"] \\
& Y_i &
\end{tikzcd}, \quad 2 \leq i \leq n-1,$$

comme des “flips”.

Pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, r_i\}$, $(\{0\} \times W_{ij}^+) \cup (W_{ij}^- \times \{0\})$ est le lieu des orbites non fermées dans $W_{ij}^- \times W_{ij}^+$.

Pour tout $x \in X_{ij}$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
T_x(X_i^T)\times((W_{ij}^-\times W_{ij}^+)\backslash(\{0\}\times W_{ij}^+))/T \arrow[dr, "g_{i-}"'] & & T_x(X_i^T)\times((W_{ij}^-\times W_{ij}^+)\backslash(W_{ij}^+\times\{0\}))/T \arrow[dl, "g_{i+}"] \\
& T_x(X_i^T) \times (W_{ij}^- \times W_{ij}^+)//T &
\end{tikzcd}$$

qui est l'interprétation des flips présentée par Miles Reid dans [Re], théorème 1.3.

Nous allons préciser ce résultat en déterminant tout d'abord le faisceau canonique des quotients $Y_{i-1,i}$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$.

5. Faisceau canonique des quotients géométriques

a) Introduction.

On note $\Omega^1_{X/Y}$ le faisceau des différentielles relatives du morphisme $\pi : X \to Y$ entre les deux variétés X et Y. Soit $j : X_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow X$ l'inclusion dans X de l'ouvert X_{reg} des points réguliers de X ; on définit $\omega_{X_{\mathrm{reg}}}$ comme le faisceau $\bigwedge^n \Omega^1_{X_{\mathrm{reg}}/k}$ où $n = \dim X$. Lorsque la variété X est normale, on pose $\omega_X = j_*\omega_{X_{\mathrm{reg}}}$; c'est un faisceau réflexif (voir [Ha2]), de rang un. D'après [loc. cit], il existe un diviseur de Weil K_X sur X tel que $\mathcal{O}_X(K_X) = \omega_X$. Un tel K_X est appelé un diviseur canonique sur X.

b) Cas où le morphisme quotient est lisse.

Déterminons le faisceau canonique d'une variété Y, quotient géométrique d'une variété lisse X par un groupe algébrique réductif G. Nous noterons $\pi : X \to Y$ le morphisme quotient et nous supposerons π lisse. Rappelons que si $\mathcal{L}$ est un fibré G-linéarisé sur X, pour tout ouvert G-stable U de X, $\Gamma(U, \mathcal{L})$ est un G-module. Pour tout ouvert V de l'espace d'orbites $Y = X/G$, $\pi^{-1}(V)$ est stable par G et on définit $\pi_*^G\mathcal{L}$ par $\Gamma(V, \pi_*^G\mathcal{L}) = \Gamma(\pi^{-1}(V), \mathcal{L})^G$.

THÉORÈME I.5.1. — *Sous les hypothèses précédentes et si les groupes d'isotropies de X dans G sont finis, on a un isomorphisme :*

$$\omega_Y \cong \pi_*^G\left(\omega_X \otimes_k \bigwedge^{\dim G} \mathcal{G}\right)$$

où $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie de G.

Démonstration.

Puisque π est lisse, la suite :

$$0 \longrightarrow T_{X/Y} \longrightarrow TX \longrightarrow \pi^*TY \longrightarrow 0 \quad \text{est exacte.}$$

Alors on a $\bigwedge^{\dim X} TX \cong \bigwedge^{\dim G} T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^{\dim Y} \pi^*TY$. Par conséquent, $\pi^*\omega_Y \cong \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^{\dim G} T_{X/Y}$. En appliquant π_*^G et en utilisant la formule de projection, on obtient :

$$\omega_Y \cong \pi_*^G\left(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^{\dim G} T_{X/Y}\right).$$

Puisque π est un morphisme G-invariant, l'image de $\mathcal{G}$ dans $\Gamma(X, TX)$ est contenue dans $\Gamma(X, T_{X/Y})$. On a donc un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{O}_X \longrightarrow T_{X/Y}$. Les $\mathcal{O}_X$-modules $T_{X/Y}$ et $\mathcal{G} \otimes_k \mathcal{O}_X$ sont localement libres de rang $\dim G$. Il suffit donc de montrer que φ est surjectif. Le morphisme π étant lisse, toute fibre schématique F de π coïncide avec sa fibre ensembliste. On a $T_{X/Y\restriction F} = TF$ ([Ha1], II.8). Pour tout $x \in X$ tel que $F = G{\cdot}x$, l'application linéaire $T_1\rho_x : \mathcal{G} \to T_xF$, où ρ_x est le morphisme $\rho_x : \begin{array}{l} G \longrightarrow X \\ g \longmapsto g{\cdot}x \end{array}$, est surjective. La surjectivité de φ en résulte. $\square$

c) Faisceau canonique des quotients géométriques par T.

Nous allons maintenant déterminer le faisceau canonique d'une variété Y, quotient géométrique d'une variété lisse X par l'action fidèle du tore $T = k^*$. On suppose que les groupes d'isotropies de X dans T sont finis. Notons $\pi : X \longrightarrow Y$ le morphisme quotient.

Proposition I.5.2. — *Pour tout $x \in X$, le morphisme π est lisse en x si, et seulement si, $T_x = \{1\}$.*

Démonstration.

D'après la proposition 0.1, on est ramené à étudier la lissité en tout point x de X, du morphisme quotient $T \times_{T_x} S \longrightarrow S/T_x$ où S est une sous-variété affine de X contenant x et stable par T_x.

La sous-variété S étant lisse, si $T_x = \{1\}$ alors le morphisme π est lisse en x. Réciproquement, si π est lisse en x, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T \times S & \xrightarrow{\pi'} & S \\ {\scriptstyle q'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ T \times_{T_x} S & \xrightarrow{\pi} & S/T_x\,. \end{array}$$

Le groupe fini T_x agit librement sur $T \times S$ par $t\cdot(t', s) = (t't^{-1}, t\cdot s)$ pour tous $t \in T_x$, $t' \in T$ et $s \in S$. Le morphisme q' est donc lisse. Puisque π est lisse en x, alors q aussi et $T_x = \{1\}$. $\square$

Posons $X_0 = \big\{x \in X \mid T_x = \{1\}\big\}$. Soient $(D_j)_{1\leq j\leq r}$ les composantes irréductibles de codimension 1 de $X \backslash X_0$. On pose $E_j = \pi(D_j)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$. Comme les fibres de π sont de dimension 1, E_j ($1 \leq j \leq r$) est un diviseur irréductible sur Y.

Notons H_j, $1 \leq j \leq r$, le sous-groupe de T qui fixe point par point D_j ; c'est un groupe fini cyclique. Si $j : Y_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow Y$ désigne l'inclusion dans Y de l'ouvert Y_{reg} des points réguliers de Y, pour tout diviseur E et tout faisceau réflexif $\mathcal{F}$ sur Y, on pose

$$\mathcal{F}(E) = j_*\Big(\mathcal{F}_{\restriction Y_{\mathrm{reg}}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\mathrm{reg}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathrm{reg}}}(E \cap Y_{\mathrm{reg}})\Big)\,.$$

THÉORÈME I.5.3. — *Avec les hypothèses et les notations précédentes, on a :*

$$\omega_Y \cong (\pi_*^T \omega_X)(-E)$$

où E est le diviseur $\sum_{j=1}^{r} (\mathrm{card}\, H_j - 1) E_j$.

Démonstration.

Commençons par montrer le lemme suivant :

LEMME I.5.4. — *Soit G un groupe réductif agissant sur une variété normale X avec un quotient géométrique (Y, π). On suppose que π a toutes ses fibres de même dimension.*

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau G-linéarisé réflexif sur X alors $\pi_*^G \mathcal{F}$ est un faisceau réflexif sur Y.

Démonstration du lemme I.5.4.

Le faisceau $\mathcal{F}$ est sans torsion donc $\pi_*^G \mathcal{F}$ l'est aussi.

Par la proposition 1.6, (ii) de [Ha2], il suffit de montrer que pour tout ouvert U de Y et toute sous-variété fermée Z de U de codimension supérieure ou égale à 2, le morphisme :

$$\Gamma(U, \pi_*^G \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U \setminus Z, \pi_*^G \mathcal{F}) \text{ est bijectif.}$$

On a $\Gamma(U, \pi_*^G \mathcal{F}) = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{F})^G$; π étant supposé équidimensionnel, $\pi^{-1}(Z)$ est une sous-variété fermée de codimension supérieure ou égale à 2 de $\pi^{-1}(U)$. Comme $\mathcal{F}$ est réflexif, l'homomorphisme $\Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\pi^{-1}(U) \setminus \pi^{-1}(Z), \mathcal{F})$ est bijectif. Des égalités :

$$\Gamma\big(\pi^{-1}(U) \setminus p^{-1}(Z), \mathcal{F})^G = \Gamma(\pi^{-1}(U \setminus Z), \mathcal{F})^G = \Gamma(U \setminus Z, \pi_*^G \mathcal{F})$$

résulte le lemme. □

D'après le théorème I.5.1, les faisceaux ω_Y et $\pi_*^T(\omega_X)$ coïncident sur l'ouvert des points lisses de π. La variété Y est normale ([Kr], 3.3 Satz 1). Alors d'après le lemme I.5.4, $\omega_Y = (\pi_*^T \omega_X)(-E)$ où E est un diviseur dont le support est dans $\pi(X \setminus X_0)$. Prenons $E =$

$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j E_j$. On veut calculer les α_j. Pour tout $x \in X$, on note U un ouvert de X de la forme $T \times_{T_x} S$.

LEMME I.5.5. — *On a $\pi_*^T \omega_U = q_*^{T_x} \omega_S$ où $q : S \to S/T_x$ est le morphisme quotient.*

Démonstration du lemme I.5.5.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T \times S & \xrightarrow{\pi'} & S \\ {\scriptstyle q'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ T \times_{T_x} S & \xrightarrow{\pi} & S/T_x \, . \end{array}$$

Le groupe T_x agissant librement sur $T \times S$, le morphisme q' est lisse. On a $\omega_{T \times_{T_x} S} = q'^{T_x}_* (\omega_{T \times S})$ par le théorème I.5.1. Puis,

$$\pi_*^T (\omega_{T \times_{T_x} S}) = \pi_*^T q'^{T_x}_* (\omega_{T \times S}) = (\pi \circ q')_*^{T \times T_x} (\omega_{T \times S})$$

où le groupe $T \times T_x$ agit sur $T \times S$ par $(t, t') \cdot (t'', s) = (tt''t^{-1}, t's)$ pour tous $t \in Y$, $t' \in T_x$, $t'' \in T$ et $s \in S$.

Or $\pi \circ q' = q \circ \pi'$ d'où

$$\begin{aligned} (\pi \circ q')_*^{T \times T_x} (\omega_{T \times S}) &= (q \circ \pi')_*^{T \times T_x} (\omega_{T \times S}) \\ &= q_*^{T_x} \pi'^T_* (\omega_{T \times S}) \, . \end{aligned}$$

Comme $\omega_T \cong \mathcal{O}_T$, $q_*^{T_x} \pi'^T_* (\omega_{T \times S}) \cong q_*^{T_x} \omega_S$.

Fin de la démonstration du théorème I.5.3.

Le lemme I.5.5 nous ramène au cas où $U = S$. La variété S étant lisse, on a un T_x-morphisme étale $\varphi : S \to N$ où N est l'espace tangent en x à S. Le groupe T_x est fini et le morphisme $S/T_x \xrightarrow{\varphi/T_x} N/T_x$ est étale. On a $\omega_S \cong \varphi^* \omega_N$ et $\omega_{S/T_x} \cong (\varphi/T_x)^* (\omega_{N/T_x})$. Pour tout $x' \in S$, la longueur du $\mathcal{O}_{S,x'}$-module $(\varphi^* \omega_N)_{x'}$ est égale à celle du $\mathcal{O}_{N,\varphi(x')}$-module $\omega_{N,\varphi(x')}$ (voir Bourbaki, alg. commutative, chap. 7, § 40, n$^{\text{o}}$ 8, prop.20). Alors on peut supposer que $S = N$.

Prenons $x \in D_j$ de sorte que $T_x = H_j$. Le H_j-module N se décompose en la somme directe du sous-espace des points fixes N^{H_j} et son unique supplémentaire H_j-stable, N_{H_j}.

Soit p_1, p_2 et $\bar{p}_2$ les projections :

$$p_1 : N^{H_j} \times N_{H_j} \longrightarrow N^{H_j} \ ,$$

$$p_2 : N^{H_j} \times N_{H_j} \longrightarrow N_{H_j} ,$$

et

$$\bar{p}_2 : N^{H_j} \times (N_{H_j}/H_j) \longrightarrow (N_{H_j}/H_j) .$$

On a

$$\omega_{N/H_j} = p_1^* \omega_{N^{H_j}} \otimes_{\mathcal{O}_{\frac{N}{H_j}}} \bar{p}_2^* \omega_{\frac{N_{H_j}}{H_j}}$$

et

$$q_*^{H_j} \omega_N = p_1^* \omega_{N^{H_j}} \otimes \left(q_*^{H_j} p_2^* (\omega_{N_{H_j}}) \right) .$$

Or $\dim N_{H_j} = 1$ car $\frac{T_x D_j}{T_x(Tx)} = N^{H_j}$. Le faisceau $\omega_{\frac{N_{H_j}}{H_j}}$ est trivial. On n'a plus qu'à déterminer $q_*^{H_j} \omega_{N_{H_j}}$: on a $k[N_{H_j}] = k[u]$ où H_j agit sur u par multiplication par une racine h_j ème de l'unité où $h_j = \operatorname{card} H_j$.

Finalement, on a $q_*^{H_j} \omega_{N_{H_j}} = \left(k[u^{h_j}] u^{h_j - 1} du \right)^{\sim}$. Alors pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a $\alpha_j = \operatorname{card} H_j - 1$. □

Remarque I.5.6. — Le résultat du théorème I.5.3 est un cas particulier des résultats de [Kn1], [Kn2] et de [Br1].

6. Description des applications birationnelles $Y_{i-1,i} \dashrightarrow Y_{i,i+1}$

Nous allons maintenant donner une description plus précise des applications birationnelles du diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y_{i-1,i} \arrow[rr, dashed, "f_{i+}^{-1} \circ f_{i-}"] \arrow[dr, "f_{i-}"'] & & Y_{i,i+1} \arrow[dl, "f_{i+}"] \\ & Y_i & \end{tikzcd} , \qquad 2 \leq i \leq n-1 .$$

Avant cela, donnons quelques notations et définitions.

Si X est une variété normale de dimension n, on notera $Z_{n-1}(X)$ le groupe des diviseurs de Weil sur X et $\operatorname{Div}(X)$ le groupe des diviseurs de Cartier sur X. Un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier est un diviseur de Weil dont un multiple non nul est de Cartier.

Si D est un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier et r est un entier tel que $rD \in \operatorname{Div}(X)$, alors on définit le nombre d'intersection de D avec une courbe complète C sur X par

$$D \cdot C = \frac{1}{r} \deg_{\widetilde{C}} \mu^* (\mathcal{O}_X(rD) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_C)$$

où $\mu : \widetilde{C} \to C$ est la normalisation de C.

On notera $Z_1(X)$ le groupe abélien libre engendré par les courbes sur X irréductibles et complètes.

On dira que deux courbes C_1 et C_2 sont numériquement équivalentes si $C_1 \cdot D = C_2 \cdot D$ pour tout $\mathbb{Q}$-diviseur D de Cartier. On écrira alors que $C_1 \equiv C_2$. On note $N_1(X)$ le quotient de $Z_1(X)$ par la relation d'équivalence numérique. Si X est complète, $N_1(X)$ est libre de type fini (voir [Fu], ex. 19.14).

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre. Si Z est une sous-variété de X, $f(Z)$ est une sous-variété fermée de Y et si $\dim f(Z) = \dim Z$, le corps des fonctions $k(Z)$ est une extension finie de $k(f(Z))$.

On pose alors :

$$f_*[Z] = \begin{cases} [k(Z) : k(f(Z))][f(Z))] & \text{si} \dim f(Z) = \dim Z \\ 0 & \text{si} \dim f(Z) < \dim Z. \end{cases}$$

La formule de projection : $f_*[C]\cdot[D] = [C]\cdot f^*[D]$ pour tout $[C] \in Z_1(X)$ et $[D] \in \mathrm{Div}(Y)$ (voir [Fu], prop. 2.3.6) permet de définir un homomorphisme de groupe $f_* : N_1(X) \to N_1(Y)$.

Enfin, une variété normale X sera dite $\mathbb{Q}$-factorielle si tout $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil est un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier.

Définition I.6.1. — *Soit le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} X_- \arrow[rr, dashed, "f_+^{-1}\circ f_-"] \arrow[dr, "f_-"'] & & X_+ \arrow[dl, "f_+"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

où X_- et X_+ sont deux variétés $\mathbb{Q}$-factorielles, f_- et f_+ sont deux morphismes birationnels propres.

Le diagramme précédent est un flip si les conditions suivantes sont vérifiées :

a) Les morphismes birationnels f_- et f_+ sont des isomorphismes en codimension un.

b) Il existe deux courbes effectives C_- et C_+ sur X_- et X_+ telles que

$$\ker f_{-,*} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\cdot[C_-] \ \textit{et} \ \ker f_{+,*} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\cdot[C_+] \, .$$

c) On a $K_{X_-} \cdot C_- < 0$ et $K_{X_+} \cdot C_+ > 0$ où K_{X_-} (resp. K_{X_+} est un diviseur canonique pour X_- (resp. pour X_+).

Si on remplace la condition c) par la condition : $K_{X_-} \cdot C_- = K_{X_+} \cdot C_+ = 0$ *alors le diagramme précédent est un flop.*

Proposition I.6.2. — *Chacune des variétés* $Y_{i-1,i}$ *(*$2 \leq i \leq n$*) est* $\mathbb{Q}$*-factorielle.*

Démonstration.

La proposition I.6.2 provient de la proposition I.3.2 et du lemme suivant :

Lemme I.6.3. — *Une variété normale n'ayant que des singularités quotients par des groupes finis est* $\mathbb{Q}$*-factorielle.*

Démonstration du lemme I.6.3.

Il s'agit de montrer que si Y est la variété quotient par un groupe fini G d'une variété X affine et lisse, alors Y est $\mathbb{Q}$-factorielle.

On note $\pi : X \to Y$ le morphisme quotient. Soit E un diviseur irréductible sur Y. Le morphisme π étant fini, il existe un diviseur irréductible D sur X tel que $\pi(D) = E$. Considérons le faisceau inversible L sur X défini par : $L = \mathcal{O}_X\Big(\sum_{g\in G} g\cdot D\Big)$. La restriction de L à chaque orbite de G dans X est triviale, donc d'après [KKV], proposition 4.2, il existe un faisceau inversible M sur Y tel que $L = \pi^* M$. Soit $h \in k[Y]$ (avec $k[Y] = k[X]^G$) tel que $\Gamma(Y, M) = h\, k[Y]$, on a pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U, L) = h\, k[U]$. Alors les diviseurs $\sum_{g\in G} g \cdot D$ et (h) coïncident sur l'ouvert U. Donc la valuation $v_E(h)$ de h sur E est strictement positive et elle est nulle sur tout diviseur sur Y différent de E. Si on pose $r = v_E(h)$, on a $M = \mathcal{O}_Y(rE)$ et alors rE est un diviseur de Cartier. □

Remarquons que d'après le paragraphe 3.2 de [KMN], pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, ker $f_{i^-,*}$ est égal au sous-groupe $N_1(Y_{i-1,i}/Y_i)$ de $N_1(Y_{i-1,i})$ des classes, modulo l'équivalence numérique, de courbes contractées par f_{i^-}.

Nous conservons les notations des paragraphes 3 et 4. On suppose la variété X lisse. Pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, r_i\}$, on pose f_{ij}^- (resp. f_{ij}^+) la restriction de f_{i^-} (resp. f_{i^+}) à la composante connexe E_{ij}^- de E_i^- (resp. E_{ij}^+ de E_i^+).

Pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, r_i\}$, on pose :

$$\mathcal{J}_{ij}^- = \left\{1 \leq k \leq i-1 \mid a_k - a_i \text{ est un poids de } W_{ij}^-\right\}$$

et

$$\mathcal{J}_{ij}^+ = \left\{i+1 \leq k \leq n \mid a_k - a_i \text{ est un poids de } W_{ij}^+\right\}.$$

Rappelons que si C est une courbe dans X, le nombre $\deg C$ est défini par : $\deg C = \deg(\mathcal{O}_C(1))$.

Théorème I.6.4. — *Pour tout $i \in \{2,\dots,n-1\}$, si les nombres : $\dim X - \dim X_i^-$ et $\dim X - \dim X_i^+$ sont supérieurs ou égaux à 2 alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} Y_{i-1,i} \arrow[rr, dashed, "f_{i+}^{-1}\circ f_{i-}"] \arrow[dr, "f_{i-}"'] & & Y_{i,i+1} \arrow[dl, "f_{i+}"] \\ & Y_i & \end{tikzcd}$$

est un flip ou un flop :

(i) Pour tout $j \in \{1,\dots,r_i\}$, il existe une courbe C_{ij}^- (resp. C_{ij}^+) sur E_{ij}^- (resp. sur E_{ij}^+) telle que toutes les courbes contractées par f_{ij}^- (resp. f_{ij}^+) sont numériquement proportionnelles à C_{ij}^- (resp. C_{ij}^+).

(ii) Pour tout $j \in \{1,\dots,r_i\}$, on a :

$$C_{ij}^- \cdot K_{Y_{i-1,i}} = \deg C_{ij}^- \Big(\sum_{j\in\mathcal{J}_{ij}^+} m_j(a_j - a_i) - \sum_{j\in\mathcal{J}_{ij}^-} m_j(a_i - a_j)\Big)$$

et

$$C_{ij}^+ \cdot K_{Y_{i,i+1}} = -\frac{\deg C_{ij}^+}{\deg C_{ij}^-} \cdot (C_{ij}^- \cdot K_{Y_{i-1,i}}) \,.$$

Démonstration.

Soit $2 \leq i \leq n-1$. Pour que la condition *a)* de la définition I.6.1 soit vérifiée, on doit avoir $\operatorname{codim}_{Y_{i-1,i}} E_i^- \geq 2$ et $\operatorname{codim}_{Y_{i,i+1}} E_i^+ \geq 2$. On a $\operatorname{codim}_{Y_{i-1,i}} E_i^- = \dim X - \dim X_i^-$ et $\operatorname{codim}_{Y_{i,i+1}} E_i^+ = \dim X - \dim X_i^+$.

Démontrons (i).

On fixe i et j tels que $2 \leq i \leq n-1$ et $1 \leq j \leq r_i$.

D'après le théorème I.3.3, f_{ij}^- est une fibration sur X_{ij} de fibre $\frac{W_{ij}^-\setminus\{0\}}{T}$. Posons $\mathbb{P} = \frac{W_{ij}^-\setminus\{0\}}{T}$.

Il suffit de montrer que pour tous x et x' dans un ouvert U de X_{ij} au-dessus duquel f_{ij}^- est triviale, et pour toutes courbes C et C' dans $\mathbb{P}$, les cycles $x \times C$ et $x' \times C'$ sont numériquement proportionnels.

Comme $\operatorname{Pic}\mathbb{P} = \mathbb{Z}$, C et C' sont numériquement proportionnelles. On peut alors supposer que $C = C'$. Soit γ une courbe irréductible de U qui joint x et x'. Alors $x \times C$ et $x' \times C$ sont algébriquement équivalentes (voir [Fu], chap. 19) dans $\gamma \times \mathbb{P}$ donc dans $U \times \mathbb{P}$. D'après [Fu], 19.1, les cycles $x \times C$ et $x' \times C$ sont alors numériquement équivalents.

Démontrons (iii).

On fixe $2 \leq i \leq n-1$ et $1 \leq j \leq r_i$.

Pour calculer $C_{ij}^- \cdot K_{Y_{i-1,i}}$, on utilise le modèle local énoncé dans le théorème I.4.1, pour se ramener à déterminer $C_{ij}^- \cdot K_{\left(\frac{(W_{ij}^-\setminus\{0\})\times W_{ij}^+}{T}\right)}$. D'après *(ii)*, on peut supposer que C_{ij}^- est une courbe dans $\frac{W_{ij}^-\setminus\{0\}}{T}$ du type $\mathbb{P}(d_1, d_2)$.

D'après la proposition I.4.4, $\frac{(W_{ij}^-\setminus\{0\})\times W_{ij}^+}{T}$ est le quotient de l'espace total du fibré $\bigoplus_{k\in\mathcal{J}_{ij}^+} m_k\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_{ij}^-)}(a_i - a_k)$ par le groupe $\prod_{k\in\mathcal{J}_{ij}^-} \mu_{a_i-a_k}$.

Pour simplifier les notations, posons :

$W_{ij}^- = W^-$, $W_{ij}^+ = W^+$, $F = \bigoplus_{k\in\mathcal{J}_{ij}^+} m_k\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_{ij}^-)}(a_i - a_k)$, $H = \prod_{k\in\mathcal{J}_{ij}^-} \mu_{a_i-a_k}$ et $C_{ij}^- = C$.

On notera $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_p$ (resp. $\beta_1, \ldots, \beta_q$) les poids du T-module W^- (resp. W^+) et $m_1, \ldots, m_p$ (resp. $m'_1, \ldots, m'_q$) leurs multiplicités.

On suppose $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $\beta_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(W^-\setminus\{0\}) \times W^+ \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\pi"'] & F \arrow[d, "\pi_H"] \\
 & \frac{F}{H}
\end{tikzcd}$$

où π est le morphisme quotient de $(W^-\setminus\{0\}) \times W^+$ par T ; p est le morphisme quotient de $(W^-\setminus\{0\}) \times W^+$ par T, le tore T agissant cette fois sur $(W^-\setminus\{0\})$ avec les poids tous égaux à -1 et π_H est le morphisme quotient de F par H.

D'après le théorème I.5.3,

$$\omega_{\left(\frac{(W^-\setminus\{0\})\times W^+}{T}\right)} = \pi_*^T \omega_{((W^-\setminus\{0\})\times W^+)}(-E)$$

où E est un diviseur dont le support est dans l'image par π du complémentaire du lieu lisse de π. On a :

$$\pi_*^T \omega_{((W^-\setminus\{0\})\times W^+)} = \pi_{H,*}^H \left(p_*^T \omega_{((W^-\setminus\{0\})\times W^+)}\right).$$

D'après la proposition I.5.2, le morphisme p est lisse ; alors, d'après le théorème I.5.1, on a : $p_*^T \omega_{((W^- \setminus \{0\}) \times W^+)} = \omega_F$. Par la formule d'adjonction ([Ha1], II, prop. 8.20), on a :

$$\omega_F = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W^-)}(-m^-) \otimes \Big(\bigotimes_{i=1}^{q} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W^-)}^{m_i'}(\beta_i) \Big)$$

où $m^- = \dim W^-$.

On a $\mathcal{O}_{\frac{F}{H}}(-E) = \pi_{H,*}^H \big(\mathcal{O}_F(-D)\big)$ où D est un diviseur dont le support est dans le complémentaire du lieu lisse de π_H.

Pour calculer $C \cdot K_{\frac{F}{H}}$, on a besoin du lemme suivant :

Lemme I.6.5. — *Soit p_H et π_H les morphismes quotients :*

$$p_H : \mathbb{P}(W^-) \longrightarrow \mathbb{P}(W^-)/H \ \textit{ et } \ \pi_H : F \longrightarrow F/H\,.$$

Les applications $p_H^* : \operatorname{Pic}\big(\frac{\mathbb{P}(W^-)}{H}\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \operatorname{Pic} \mathbb{P}(W^-) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $p_{H,*}^H : \operatorname{Pic}(\mathbb{P}(W^-)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \operatorname{Pic}\big(\frac{\mathbb{P}(W^-)}{H}\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (resp. $\pi_H^* : \operatorname{Pic}\big(\frac{F}{H}\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \operatorname{Pic}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\pi_{H,*}^H : \operatorname{Pic}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \operatorname{Pic}\big(\frac{F}{H}\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$) sont réciproques.

Fin de la démonstration du théorème I.6.4.

En appliquant la formule de projection et le lemme I.6.5, on obtient :

$$C \cdot K_{\frac{F}{H}} = d_1 d_2 (\mathbb{P}_k^1 \cdot K_F - \mathbb{P}_k^1 \cdot D).$$

Or $\operatorname{Pic} F \cong \operatorname{Pic} \mathbb{P}(W^-)$ donc $\mathbb{P}_k^1 \cdot D = \sum_{i=1}^{m^-} \mathbb{P}_k^1 \cdot D_i$ où D_i est le diviseur $\widetilde{D}_i \times_T W^+$ avec $\widetilde{D}_i = \big\{ v \in W^- \mid v_i = 0 \big\}$. D'après le théorème I.5.3, on a $\mathbb{P}_k^1 \cdot D_i = \operatorname{card}(H_i) - 1$ où pour $1 \leq i \leq m^-$, H_i est le sous-groupe de H fixant point par point le diviseur D_i.

On a $\operatorname{card}(H_i) = \alpha_i$ pgcd $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_p,\ \beta_1, \ldots, \beta_q)$, $1 \leq i \leq p$. Par ([Do], prop. (1.3.1)), on peut supposer que pour tout i tel que $1 \leq i \leq p$, pgcd $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q) = 1$. On obtient enfin :

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_1 d_2} C \cdot K_{\frac{F}{H}} &= -m^- + \sum_{i=1}^{q} m_i' \beta_i + m^- - \sum_{i=1}^{p} m_i \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{q} m_i' \beta_i - \sum_{i=1}^{p} m_i \alpha_i\,. \end{aligned}$$

□

Démonstration du lemme I.6.5.

L'application p_H^* : $\mathrm{Pic}\left(\frac{\mathbb{P}(W^-)}{H}\right)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Pic}\,\mathbb{P}(W^-)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$-linéaire. Or $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(W^-)) = \mathrm{Pic}\left(\frac{\mathbb{P}(W^-)}{H}\right) = \mathbb{Z}$, donc l'application p_H^* est une homothétie de rapport λ. À tout $\mathbb{Q}$-diviseur D de Cartier sur $\frac{\mathbb{P}(W^-)}{H}$ correspond un rationnel μ_D. On a $p_H^*(\mu_D) = \lambda\mu_D$ mais par la formule de projection, $p_{H,*}^H \circ p_H^*(\mu_D) = \mu_D$ d'où $\lambda = 1$. Par conséquent, $p_{H,*}^H \circ p_H^* = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ et de même $p_H^* \circ p_{H,*}^H = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.

On raisonne de même pour les applications $\pi_{H,*}^H$ et π_H^* car $\mathrm{Pic}\,F = \mathrm{Pic}\,\frac{F}{H} = \mathbb{Z}$.

Remarque I.6.6. — Les résultats du théorème I.6.4 précisent les résultats de Thaddeus (voir [Tha], proposition 1.6).

Chapitre II

QUOTIENTS PAR SL(2,k)

1. Introduction et énoncé du théorème II.1.1

On considère une variété projective irréductible X sur laquelle agit le groupe $G = \mathrm{SL}(2,k)$ (le tout sur le corps k algébriquement clos de caractéristique zéro) et un fibré en droites L ample et G-linéarisé sur X. La donnée de L permet de définir un quotient catégorique $Y = X^{ss}(L)//G$ (voir l'introduction) où $X^{ss}(L)$ est l'ouvert des points semi-stables de X par rapport à L. Rappelons que $X^{ss}(L) = \big\{x \in X / \exists \sigma \in \Gamma(X, L^n)^G$ pour un certain $n > 0\,;\sigma(x) \neq 0\big\}$.

L'objet de ce chapitre est de décrire le quotient Y.

Remarquons que si on remplace L par une puissance positive L^n de L, il n'y a pas de modification de $X^{ss}(L)$. On supposera donc que L est très ample. Alors il existe une immersion fermée φ de X dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ d'un k-espace vectoriel V de dimension finie, telle que $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = L$ comme fibré en droites. On suposera que X n'est contenue dans aucun sous-espace linéaire de $\mathbb{P}(V)$.

D'après [MFK], proposition 1.7, on peut supposer qu'il existe une action linéaire de G dans $\mathbb{P}(V)$ et une G-linéarisation de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ telles que φ soit G-équivariante et la G-linéarisation de L soit induite via φ de celle de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$. Le groupe G étant réductif, le G-module V se décompose en somme de modules irréductibles. D'après [Sp], chapitre 3, chaque G-module irréductible est isomorphe, pour un certain entier n positif, au G-module $k[X,Y]_n$ des polynômes homogènes à deux variables de degré n.

On fait opérer G dans $k[X,Y]_n$ par : $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot X = dX - bY$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot Y = -cX + aY$ pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$.

On peut donc écrire $V = V_{n_1}^{m_1} \oplus \cdots \oplus V_{n_d}^{m_d}$, où, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, l'entier strictement positif m_i désigne la multiplicité dans V de la représentation V_{n_i}.

Avant d'énoncer le théorème II.1.1 qui donne une description du quotient Y, nous allons fixer plusieurs notations.

On désigne par B, T et U les sous-groupes de G suivants :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in k^* \text{ et } b \in k \right\},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mid t \in k^* \right\}$$

et

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in k \right\}.$$

Remarquons que l'ensemble des poids de T dans V_{n_i} $(1 \leq i \leq d)$ est $\{2j - n_i \mid 0 \leq j \leq n_i\}$. On écrira $\mathcal{P} = (-a_s, -a_{s-1}, \ldots, -a_1, a_0, a_1, \ldots, a_s)$ la suite ordonnée des poids de T dans V, avec $a_0 = 0$. Remarquons que $0 \notin \mathcal{P}$ si tous les n_i sont impairs et qu'on a $a_s = n_d$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, notons X_i^T l'ensemble des points fixes de T dans X de poids $-a_i$ et posons $\mathcal{J}_i = \{1 \leq j \leq d \mid n_j + a_i$ est pair et $n_j \geq a_i\}$. Alors $X_i^T = X \cap \mathbb{P}\big(\bigoplus_{j \in \mathcal{J}_i} D_j^{m_j}\big)$ où pour tout $j \in \mathcal{J}_i$, D_j désigne la droite dans V_{n_j} engendrée par $X^{\frac{(n_j + a_i)}{2}} Y^{\frac{(n_j - a_i)}{2}}$.

D'après le paragraphe 3 du chapitre I, X_s^T est connexe. Pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$, on note $X_i^T = \bigcup_{j=1}^{r_i} X_{ij}$ la décomposition en composantes connexes de X_i^T. Posons $W_s^+ = (T_x X)_{>0}$ pour $x \in X_s^T$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, r_i\}$, $W_{ij}^- = (T_x X)_{<0}$ et $W_{ij}^+ = (T_x X)_{>0}$ avec $x \in X_{ij}$ (pour les notations $(T_x X)_{<0}$ et $(T_x X)_{>0}$, on pourra consulter le paragraphe 2 du chapitre 0).

Remarquons que les poids de T dans W_{ij}^- sont parmi les entiers strictement négatifs $a_i - a_{i+1}, \ldots, a_i - a_s$ et ceux de W_{ij}^+ sont parmi les entiers strictement positifs $a_i - a_{i-1}, \ldots, a_i - a_1, a_i + a_0, a_i + a_1, \ldots, a_i + a_s$. Pour tout $x \in X$, on note $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{d} \tilde{x}_i$ la décomposition d'un représentant $\tilde{x}$ de x dans $V = \bigoplus_{i=1}^{d} V_{n_i}^{m_i}$, et pour tout poids a de T dans V, on note $\tilde{x}^{(a)}$ la composante de poids a dans la décomposition dans V de $\tilde{x}$ en vecteurs propres de T.

Théorème II.1.1. — *Le quotient Y est l'extrémité d'un diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
 & Y_{0,1} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_{1-}"] & & Y_{1,2} \cdots Y_{i-1,i} \arrow[dl, "f_{1+}"'] \arrow[dr, "f_{i-}"] & & Y_{i,i+1} \cdots Y_{s-1,s} \arrow[dl, "f_{i+}"'] \arrow[dr, "f_{s-}"] & \\
Y & & Y_1 & & Y_i & & Y_s
\end{tikzcd}$$

et on a :

i) $Y_s = X_s^T$.

ii) Si X est lisse, le morphisme f_{s^-} est une fibration localement triviale pour la topologie de Zariski de fibre l'espace projectif avec poids $\frac{\widetilde{W}_s^+\backslash\{0\}}{T}$, où $\widetilde{W}_s^+$ est la partie strictement positive de l'espace tangent en un point de X_s^T de l'hypersurface dans X définie par $\{x \in X \mid \tilde{x}_d^{(2-a_s)} = 0\}$.

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, s-1\}$, les morphismes f_{i^-} et f_{i^+} sont birationnels et il existe une sous-variété fermée E_i^- de $Y_{i-1,i}$ (resp. E_i^+ de $Y_{i,i+1}$) vérifiant $f_{i^-}(E_i^-) = f_{i^-}(E_i^+) = X_i^T$ et telles que la restriction de f_{i^-} à $Y_{i-1,i}\backslash E_i^-$ (resp. de f_{i^+} à $Y_{i,i+1}\backslash E_i^+$) est un isomorphisme de $Y_{i-1,i}\backslash E_i^-$ (resp. $Y_{i,i+1}\backslash E_i^+$) sur $Y_i\backslash X_i^T$.

Si $E_i^+ = \bigcup_{j=1}^{r_i} E_{ij}^+$ et $E_i^- = \bigcup_{j=1}^{r_i} E_{ij}^-$ sont les décompositions en composantes connexes de E_i^+ et E_i^-, pour tout $j \in \{1, \dots, r_i\}$, les restrictions de f_{i^+} et f_{i^-} à E_{ij}^+ et E_{ij}^- sont des fibrations localement triviales pour la topologie de Zariski sur X_{ij} et de fibres respectivement les espaces projectifs avec poids $\frac{W_{ij}^-\backslash\{0\}}{T}$ et $\frac{\widetilde{W}_{ij}^+\backslash\{0\}}{T}$, où $\widetilde{W}_{ij}^+$ est la partie strictement positive de l'espace tangent en un point de X_{ij} de l'hypersurface dans X définie par $\{x \in X \mid \exists j \in \mathcal{J}_i,\ \tilde{x}_j^{(2-a_i)} = 0\}$.

(iii) Si X est lisse, pour tout $i \in \{1, \dots, s-1\}$, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} Y_{i-1,i} \arrow[rr, dashed, "f_{i^+}^{-1}\circ f_{i^-}"] \arrow[dr, "f_{i^-}"'] & & Y_{i,i+1} \arrow[dl, "f_{i^+}"] \\ & Y_i & \end{tikzcd}$$

sont des flips.

(iv) Les fibres au-dessus de $X^s(L)/G$ du morphisme f sont isomorphes à la droite projective $\mathbb{P}_k^1$.

Remarque II.1.2. — Dans le théorème II.1.1, nous précisons dans le cas particulier où $G = \mathrm{SL}(2,k)$ des résultats de I. Dolgachev et Y. Hu (voir [Do-Hu] théorème 4.2.4) et de M. Thaddeus (voir [Tha] théorème 3.3).

Remarque II.1.3. — La démonstration du théorème II.1.1 étant fastidieuse, le lecteur pourra consulter les exemples (voir § 3).

2. Démonstration du théorème II.1.1

Pour démontrer le théorème II.1.1, nous allons construire le diagramme II.1.1, puis nous décrirons un modèle local, qui avec les résultats du chapitre I, permet de montrer les assertion *(i), (ii)* et *(iii)*.

On conserve les notations du paragraphe 1.

a) Construction du diagramme II.1.1.

Considérons la variété produit $X \times \mathbb{P}^1_k$ sur laquelle G agit diagonalement. Cette variété est munie des fibrés G-linéarisés amples $\mathcal{O}(p,q) = p_1^* L^p \otimes p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(q))$ où p et q sont des entiers strictement positifs, et où p_1 (resp. p_2) est la projection de $X \times \mathbb{P}^1_k$ sur X (resp. sur $\mathbb{P}^1_k$).

Nous allons décrire, pour tous $p > 0$ et $q > 0$, les ouverts des points semi-stables et stables $(X \times \mathbb{P}^1_k)^{ss}(\mathcal{O}(p,q))$ et $(X \times \mathbb{P}^1_k)^{s}(\mathcal{O}(p,q))$ de $X \times \mathbb{P}^1_k$ par rapport à $\mathcal{O}(p,q)$. Comme $G/B \simeq \mathbb{P}^1_k$, on a les isomorphismes G-équivariants suivants :

$$(X \times \mathbb{P}^1_k)^{ss}(\mathcal{O}(p,q)) \simeq G \times_B (X^{ss}(p,q))$$

et

$$(X \times \mathbb{P}^1_k)^{s}(\mathcal{O}(p,q)) \simeq G \times_B (X^{s}(p,q)) \,,$$

où

$$X^{ss}(p,q) = \left\{ x \in X \mid (x,[1:0]) \in (X \times \mathbb{P}^1_k)^{ss}(\mathcal{O}(p,q)) \right\}$$

et

$$X^{s}(p,q) = \left\{ x \in X \mid (x,[1:0]) \in (X \times \mathbb{P}^1_k)^{s}(\mathcal{O}(p,q)) \right\} .$$

La proposition suivante décrit les ouverts $X^{ss}(p,q)$ et $X^s(p,q)$ de X pour tous $p > 0$ et $q > 0$.

Rappelons que pour tout $x \in X$, on note $\tilde{x} = \sum\limits_{i=1}^{d} \tilde{x}_i$ la décomposition d'un représentant $\tilde{x}$ de x dans $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{d} V_{n_i}^{m_i}$, où, pour tout i, $V_{n_i} = k[X,Y]_{n_i}$. Tout élément f de V_{n_i}, $(1 \leq i \leq d)$, s'écrit sous la forme $f = Y^\alpha \prod\limits_{u \in U} (u \cdot X)^{\beta_u}$. L'entier positif α sera appelé la multiplicité de la racine infinie Y de f et sera noté $\operatorname*{mult}\limits_{Y=0} f$ et l'entier positif β_u $(u \in U)$ sera appelé la multiplicité de la racine finie $u \cdot X$ de f et sera noté $\operatorname*{mult}\limits_{X=0} u \cdot f$.

PROPOSITION II.2.1. — *Pour tous entiers strictement positifs p et q, un élément x de X est dans $X^{ss}(p,q)$ (resp. $X^s(p,q)$) si, et seulement si, pour au moins un indice $i \in \{1,\ldots,d\}$, la multiplicité de toutes les racines finies de $\tilde{x}_i$ est inférieure ou égale (resp. strictement inférieure) à $\frac{1}{2}\bigl(n_i + \frac{q}{p}\bigr)$ et pour au moins un indice $j \in \{1,\ldots,d\}$, la multiplicité de la racine infinie de $\tilde{x}_j$ est inférieure ou égale (resp. strictement inférieure) à $\frac{1}{2}\bigl(n_j - \frac{q}{p}\bigr)$.*

Démonstration.

On fixe $p > 0$ et $q > 0$. Décrivons tout d'abord $X^{ss}(p,q)$:

On a $\Gamma\bigl(\mathbb{P}(V), p_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(p)) \otimes p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(q)\bigr) = S^pV^* \otimes S^q\mathbb{C}^{2*}$. Donc d'après [MFK], proposition 2.2, $x \in X^{ss}(p,q)$ si, et seulement si, $0 \notin \overline{G\cdot(\tilde{x}^p \otimes e_1^q)}$ où e_1 est l'élément $(1,0)$ de k^2. D'après le critère de Hilbert-Mumford (voir [MFK], proposition 2.3), pour tout $x \in X$, $0 \in \overline{G\cdot(\tilde{x}^p \otimes e_1^q)}$ si, et seulement si, il existe un sous-groupe à un paramètre non trivial λ de G tel que $\lim\limits_{t\to 0} \lambda(t)\cdot(\tilde{x}^p \otimes e_1^q) = 0$.

On a alors :

LEMME II.2.2. — *Soient W un G-module ($G = \mathrm{SL}(2,k)$) et ω un point quelconque de W. Alors il existe un sous-groupe à un paramètre λ de G tel que $\lim\limits_{t\to 0} \lambda(t)\cdot\omega = 0$ si, et seulement si, il existe $u \in B$ tel que $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_0(t)\cdot u\cdot\omega = 0$ ou $\lim\limits_{t\to 0} \lambda_0(t)\cdot\omega = 0$, où λ_0 est le sous-groupe à un paramètre de T défini par* $\begin{array}{rl}\lambda_0 : k^* \to T & .\\ t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{smallmatrix}\right) & \end{array}$

Démonstration du lemme II.2.2.

Soit λ un sous-groupe à un paramètre non trivial de G. Considérons le sous-groupe $B(\lambda)$ de G définit par : $B(\lambda) = \bigl\{g \in G \mid \lim\limits_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda^{-1}(t) \text{ existe}\bigr\}$. D'après [MFK], proposition 2.6, $B(\lambda)$ est un sous-groupe parabolique propre de G. Comme $G = \mathrm{SL}(2,k)$, $B(\lambda)$ est en fait un sous-groupe de Borel de G. Il existe donc un tore maximal T' de G contenu dans $B(\lambda) \cap B$. Par ailleurs, on a $\mathrm{Im}(\lambda) \subset B(\lambda)$ comme tore maximal. Les tores T' et $\mathrm{Im}(\lambda)$ sont conjugués dans $B(\lambda)$, il existe donc $g \in B(\lambda)$ tel que $g^{-1}\lambda g$ soit un sous-groupe à un paramètre de T'. On pose $\lambda' = g^{-1}\lambda g$.

Soit $\omega \in W$. On a $\lambda'(t)\cdot\omega = g^{-1}\lambda(t)g\lambda(t)^{-1}\lambda(t)$. Mais $g \in B(\lambda)$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda^{-1}(t)$ existe, notons la g_0, on a alors $\lambda'(t)\cdot\omega \underset{t\to 0}{\longrightarrow} g^{-1}g_0 \lim\limits_{t\to 0} \lambda(t)\cdot\omega$. Comme λ' est conjugué dans U à λ_0 ou à λ_0^{-1}, on obtient alors le lemme II.2.2. □

Fin de la démonstration de la proposition II.2.1.

Il s'agit maintenant d'expliciter le critère du lemme II.2.2. On peut supposer que $m_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. Montrons que $\lim\limits_{t\to 0} \lambda_0(t)\cdot \tilde{x}^p \otimes e_1^q = 0$ si, et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $\operatorname*{mult}\limits_{Y=0} \tilde{x}_i > \frac{1}{2}\big(n_i - \frac{q}{p}\big)$. Si pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on écrit $\tilde{x}_i = \sum\limits_{k=1}^{n_i} \alpha_{i,k} X^k Y^{n_i-k}$, pour tout $t \in k^*$, on a

$$\lambda_0(t) \cdot \tilde{x}_i = t^{2 \operatorname*{mult}\limits_{Y=0} \tilde{x}_i - n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{i,k} t^{2(n_i - \operatorname*{mult}\limits_{Y=0} \tilde{x}_i - k)} X^k Y^{n_i-k} .$$

Comme $n_i - \operatorname*{mult}\limits_{Y=0} \tilde{x}_i = \max\{1 \le k \le n_i \mid \alpha_{i,k} \neq 0\}$, on a $n_i - \operatorname*{mult}\limits_{Y=0} \tilde{x}_i - k \geq 0$ et il existe $k \in \{1, \dots, n_i\}$ tel que $n_i - \operatorname*{mult}\limits_{Y=0} \tilde{x}_i - k = 0$.

Puisque

$$S^p\Big(\bigoplus_{i=1}^{d} V_{n_i}\Big) \simeq \bigoplus_{\substack{(r_1, \dots, r_d) \\ \sum_{i=1}^{d} r_i = p}} \bigotimes_{i=1}^{d} S^{r_i} V_{n_i} ,$$

on a $\lim\limits_{t\to 0} \lambda_0(t)\tilde{x}^p \otimes e_1^q = 0$ si, et seulement si, $\sum\limits_{i=1}^{d} r_i(2 \operatorname*{mult}\limits_{Y=0} \tilde{x}_i - n_i) + q > 0$ pour tous les d-uplets $(r_1, \dots, r_d)$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{d} r_i = p$, c'est-à-dire si, et seulement si, $p(2 \operatorname*{mult}\limits_{Y=0} \tilde{x}_i - n_i) + q > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

On montre de même qu'il existe $u \in U$ tel que $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_0(t)(u\cdot\tilde{x})^p \otimes e_1^q = 0$ si, et seulement si, il existe $u \in U$ tel que $\operatorname*{mult}\limits_{X=0} u\cdot\tilde{x}_i > \frac{1}{2}(n_i + \frac{q}{p})$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

D'après [MFK], proposition 2.2, on a $x \notin X^s(p,q)$ si, et seulement si, il existe un sous-groupe à un paramètre λ de G tel que $\lim\limits_{t\to 0} \lambda(t)\cdot\tilde{x}^p \otimes e_1^q$ soit finie. D'après la démonstration du lemme II.2.2, cette condition est équivalente à la finitude de $\lim\limits_{t\to 0} \lambda_0(t)(\tilde{x}^p \otimes e_1^q)$ ou à l'existence d'un élément u de U tel que $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_0(t)(u\cdot\tilde{x})^p \otimes e_1^q$ soit finie. Le raisonnement précédent permet alors d'obtenir la description de $X^s(p,q)$. $\square$

Remarque II.2.3. — La proposition II.1.1 permet de retrouver (voir [MFK], proposition 4.1) la description de $X^{ss}(L)$ et $X^s(L)$:

x est un élément de $X^{ss}(L)$ (resp. de $X^s(L)$) si, et seulement si, il existe un indice $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que toutes les racines de $\tilde{x}_i$ sont de multiplicité inférieure ou égale (resp. strictement inférieure) à $\frac{n_i}{2}$.

De la proposition II.2.1 résulte directement la proposition suivante :

PROPOSITION II.2.4. — *Pour tous entiers strictement positifs p et q, on a :*

(i) $X^{ss}(p,q)$ *(resp.* $X^{s}(p,q)$*) est non vide si, et seulement si,* $\frac{q}{p} \leq a_s$ *(resp.* $\frac{q}{p} < a_s$*).*

(ii) Les ouverts $X^{ss}(p,q)$ *et* $X^{s}(p,q)$ *de* X *ne dépendent que de* $\frac{q}{p}$ *et on a :* $X^{ss}(p,q) = X^{s}(p,q)$ *si, et seulement si,* $\frac{q}{p}$ *n'appartient pas à* $\mathcal{P}^{+}$*, où* $\mathcal{P}^{+}$ *est la suite* $(a_1, \ldots, a_s)$ *des poids strictement positifs de* T *dans* V*.*

On écrira pour tous $p > 0$ et $q > 0$, $X^{ss}(p,q) = X^{ss}\big(\frac{q}{p}\big)$ et $X^{s}(p,q) = X^{s}\big(\frac{q}{p}\big)$.

On pose $X_i^{ss} = X^{ss}(a_i)$, $1 \leq i \leq s$, et $X_i^{s} = X^{s}(a_i)$, $1 \leq i \leq s-1$.

Soit i tel que $2 \leq i \leq s$. D'après la proposition II.2.1, pour tout $\frac{q}{p} \in]a_{i-1}, a_i[$, on a $X^{ss}\big(\frac{q}{p}\big) = X^{ss}\big(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\big)$. On pose $X_{i-1,i}^{ss} = X^{ss}\big(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\big)$ et si $i \neq s$, $X_{i,i+1}^{ss} = X^{ss}\big(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\big)$.

Dans le théorème II.2.5 ci-dessous, on construit le diagramme II.1.1 et on montre l'assertion (iv) du théorème II.1.1.

THÉORÈME II.2.5.

(i) Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$*, il existe un quotient catégorique* (Y_i, π_i) *de* X_i^{ss} *par* B *et pour tout* $i \in \{1, \ldots, s\}$*, le couple* $\big(\pi_i\big(X_i^{s}\big), \pi_{i\restriction X_i^{s}}\big)$ *est un quotient géométrique. Pour tout* $i \in \{1, \ldots, s\}$*, il existe un quotient géométrique* $(Y_{i-1,i}, \pi_{i^-})$ *de* $X_{i-1,i}^{ss}$ *par* B*.*

(ii) Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$*,* $X_i^{s} \subset X_{i-1,i}^{ss} \subset X_i^{ss}$ *et pour tout* $i \in \{1, \ldots, s-1\}$*,* $X_i^{s} \subset X_{i,i+1}^{ss} \subset X_i^{ss}$*.*

De plus, il existe des morphismes uniques f_{i^-} *(*$1 \leq i \leq s$*) et* f_{i^+} *(*$1 \leq i \leq s-1$*) faisant commuter les diagrammes :*

$$\begin{array}{ccccc}
X_{i-1,i}^{ss} & \hookrightarrow & X_i^{ss} & \hookleftarrow & X_{i,i+1}^{ss} \\
\pi_{i^-}\big\downarrow & & \big\downarrow \pi_i & & \big\downarrow \pi_{i^+} \\
Y_{i-1,i} & \xrightarrow{f_{i^-}} & Y_i & \xleftarrow{f_{i^+}} & Y_{i,i+1}
\end{array}$$

Les morphismes f_{i^-} *et* f_{i^+} *sont birationnels pour tout* $i \in \{1, \ldots, s-1\}$*.*

(iii) Il existe un morphisme $f : Y_{0,1} \to Y$ *dont les fibres au-dessus de* $X^{s}(L)/G$ *sont isomorphes à* $\mathbb{P}_k^1$*.*

Démonstration.

(i) D'après [MFK], théorème 1.10, pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, il existe un quotient catégorique (Y_i, p_i) de $(X \times \mathbb{P}^1_k)^{ss}(a_i)$ par G.

Si on note $\pi_i : X_i^{ss} \to Y_i$ ($1 \leq i \leq s$), la restriction de p_i à l'ouvert B-stable X_i^{ss} de X, le morphisme π_i est B-invariant et affine. D'autre part, pour tout ouvert U de Y_i, on a $\Gamma(U, Y_i) \cong \Gamma\left(p_i^{-1}(U), \mathcal{O}_{(X\times\mathbb{P}^1_k)^{ss}(a_i)}\right)^G$. Or $(X \times \mathbb{P}^1_k)^{ss}(a_i) \cong G \times_B X_i^{ss}$, donc

$$\Gamma(p_i^{-1}(U), \mathcal{O}_{(X\times\mathbb{P}^1_k)^{ss}(a_i)})^G = \Gamma(\pi_i^{-1}(U), \mathcal{O}_{X_i^{ss}})^B$$

et (Y_i, π_i) est un quotient catégorique de X_i^{ss} par B, pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Notons e_1 l'élément $(1,0)$ de k^2. D'après [loc. cit.], pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$, le couple $\left(p_i((X\times\mathbb{P}^1_k)^s(a_i)), p_{i\restriction(X\times\mathbb{P}^1_k)^s(a_i)}\right)$ est un quotient géométrique. Donc pour tout $x \in X_i^s$, $p_i^{-1}\left(p_i((x,[e_1])\right) = G\cdot(x,[e_1])$. Or, pour tout $x \in X_i^s$, on a $B\cdot(x,[e_1]) = X_i^s \cap G\cdot(x,[e_1])$, d'où $\pi_i^{-1}(\pi_i(x)) = B \cdot x$. Donc, pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$, $(\pi_i(X_i^s), \pi_{i\restriction X_i^s})$ est un quotient géométrique.

D'après [loc. cit.], pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, il existe un quotient $(Y_{i-1,i}, p_{i^-})$ de $(X \times \mathbb{P}^1_k)^{ss}\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\right)$ par G. Ce quotient est géométrique, en effet, d'après la proposition 1.4, *(ii)*, on a $(X \times \mathbb{P}^1_k)^{ss}\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\right) = (X \times \mathbb{P}^1_k)^{s}\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\right)$. Si on note $\pi_{i^-} : X_{i-1,i}^{ss} \to Y_{i-1,i}$ ($2 \leq i \leq s$) la restriction de p_i à $X_{i-1,i}^{ss}$, un raisonnement analogue au précédent permet de montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, le couple $(Y_{i-1,i}, \pi_{i^-})$ est un quotient géométrique de $X_{i-1,i}^{ss}$ par B.

(ii) Les inclusions $X_i^s \subset X_{i-1,i}^{ss} \subset X_i^{ss}$, $1 \leq i \leq s$, et $X_i^s \subset X_{i,i+1}^{ss} \subset X_i^{ss}$, $1 \leq i \leq s-1$, résultent directement de la proposition II.1.1. Alors l'assertion *(ii)* se démontre de la même façon que les assertions *(ii)* et *(iii)* du théorème I.3.1.

(iii) Posons $X^{ss}(L) = X^{ss}$ et $X^s(L) = X^s$.

Par la proposition II.1.1 et la remarque II.1.3, on a $X_{0,1}^{ss} \subset X^{ss}$. Alors il existe un morphisme $G \times_B X_{0,1}^{ss} \longrightarrow X^{ss}$ qui est G-équivariant et qui est la composée de l'injection $G \times_B X_{0,1}^{ss} \hookrightarrow G \times_B X^{ss}$ suivie de l'application $\begin{array}{ccc} G \times_B X^{ss} & \longrightarrow & X^{ss} \\ \overline{(g,x)} & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$. Le morphisme $G \times_B X_{0,1}^{ss} \longrightarrow Y$ obtenu par composition de $G \times_B X_{0,1}^{ss} \longrightarrow X^{ss}$ suivi du morphisme quotient $\pi : X^{ss} \to Y$, est constant sur les orbites de G. Donc, d'après [MFK], chapitre 0, remarque 6, il existe un unique morphisme $f : Y_{0,1} \longrightarrow Y$.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_{0,1}^{ss} & \xrightarrow{f'} & X^{ss} \\ {\scriptstyle \pi_{1^-}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y_{0,1} & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où le morphisme $f' : X_{0,1}^{ss} \to X^{ss}$ est la restriction à $X_{0,1}^{ss}$ du morphisme $G \times_B X_{0,1}^{ss} \longrightarrow X^{ss}$. Alors comme $X^s \subset X_{0,1}^{ss}$, pour tout $x \in X^s$, on a $f^{-1}(\pi(x)) = \pi_{1^-}(G \cdot x) = G \cdot x/B$. Or $G \cdot x/B = G_x \backslash G/B$. D'où $G \cdot x/B \simeq \mathbb{P}_k^1/G_x$. Comme $x \in X^s$, G_x est un groupe fini. Alors on a $\mathbb{P}_k^1/G_x \simeq \mathbb{P}_k^1$ car $\mathbb{P}_k^1/G_x$ est une courbe projective rationnelle lisse.

Remarque II.2.6. — Le quotient $(X \times \mathbb{P}_k^1)^{ss}(\mathcal{O}(p,q))//G$ pour tous $p > 0$ et $q > 0$, est égal à $\mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X \times \mathbb{P}_k^1,\ \mathcal{O}^n(p,q))^G\right)$. On a $X \times \mathbb{P}_k^1 \simeq G \times_B X$ et l'espace total du fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(q)$ est $G \times_B k$ où B opère dans k via le caractère $-\chi_q$ avec $\chi_q : \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \longrightarrow t^q$. Alors on a l'isomorphisme :

$$\mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X \times \mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}^n(p,q))^G\right) \simeq \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X, L^{np} \otimes \mathcal{O}(n\chi_q))^B\right)$$

où $\mathcal{O}(\chi_q)$ est le fibré en droites trivial sur X, le groupe B opérant dans chaque fibre via le caractère $-\chi_q$.

On a alors pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$Y_i = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X, L^n \otimes \mathcal{O}(n\chi_i))^B\right)$$

$$\text{(resp. } Y_{i-1,i} = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X, L^{2n} \otimes \mathcal{O}(n\chi_{i^-}))^B\right)\text{)},$$

où χ_i (resp. χ_{i^-}) est le caractère $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \longrightarrow t^{a_i}$ (resp. $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \longrightarrow t^{(a_{i-1}+a_i)}$).

Proposition II.2.7. — *Si X est lisse, chacune des variétés $Y_{i-1,i}$ ($1 \leq i \leq s$) n'a que des singularités quotients par des groupes finis cycliques.*

Démonstration.

On fixe i tel que $1 \leq i \leq s$.

Pour tout $x \in X_{i-1,i}^{ss}$, l'orbite $G \cdot (x, [e_1])$ ($[e_1] = [1:0]$) est fermée dans $(X \times \mathbb{P}_k^1)^{ss}(a_i)$ et $G_{(x,[e_1])}$ est fini. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert affine B-stable dans $X_{i-1,i}^{ss}$ contenant x. D'après le théorème des slices (voir [Lu], théorème III.1), il existe une sous-variété S de $G \times_B \mathcal{U}$

localement fermée, affine, lisse (car X l'est), contenant $(x,[e_1])$ et stable par $G_{(x,[e_1])}$ et un morphisme étale :

$$S/G_{(x,[e_1])} \longrightarrow (G\times_B \mathcal{U})/G\,.$$

Or $(G\times_B \mathcal{U})/G = \mathcal{U}/B$ et $G_{(x,[e_1])} = B_x$. On a $B_x\cap U = \{1\}$ et donc $B_x \hookrightarrow T$ par l'homomorphisme de groupe surjectif : $\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & T \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\end{array}$. Alors B_x est un sous-groupe fini de k^*, il est donc cyclique.

b) Modèle local.

Le théorème II.2.8 ci-dessous décrit un modèle local des morphismes $f_{i-} : Y_{i-1,i} \to Y_i$ $(1\le i\le s)$ et $f_{i+} : Y_{i,i+1} \longrightarrow Y_i$ $(1\le i\le s-1)$.

Théorème II.2.8. — *Pour tout $i\in\{1,\ldots,s\}$, il existe un ouvert affine $\mathcal{V}_i$ de Y_i contenant X_i^T et une sous-variété fermée Z_i de X contenue dans X_i^{ss}, affine et stable par T tels que $\mathcal{V}_i$ soit isomorphe au quotient catégorique $Z_i//T = \operatorname{spec} k[Z_i]^T$.*

Si on pose pour tout $i\in\{1,\ldots,s\}$, $Z_{i-1,i} = X_{i-1,i}^{ss}\cap Z_i$ et pour tout $i\in\{1,\ldots,s-1\}$, $Z_{i,i+1} = X_{i,i+1}^{ss}\cap Z_i$, il existe des quotients géométriques $Z_{i-1,i}/T$ et $Z_{i,i+1}/T$ tels que $f_{i^-}^{-1}(\mathcal{V}_i)$ et $f_{i^+}^{-1}(\mathcal{V}_i)$ soient respectivement isomorphes à $Z_{i-1,i}/T$ et $Z_{i,i+1}/T$.

Remarque II.2.9. — Dans la démonstration du théorème II.2.8 ci-dessous, on décrit explicitement la sous-variété Z_i de X.

Démonstration.

Démontrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme II.2.10. — *Pour tout $i\in\{1,\ldots,s\}$, il existe un ouvert $\mathcal{U}_i$ de X contenu dans X_i^{ss} ayant les propriétés suivantes : $\mathcal{U}_i$ est affine, π_i-saturé et contient X_i^T.*

Démonstration du lemme II.2.10.

Fixons i tel que $1\le i\le s$.

D'après la remarque II.2.6, on a $Y_i = \operatorname{Proj}\Big(\bigoplus_{n\ge 0}\Gamma(X, L^n\otimes\mathcal{O}(n\chi_i))^B\Big)$, et pour tout $n\ge 0$, $\Gamma(\mathbb{P}(V),\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(n)\otimes\mathcal{O}(n\chi_i))^B$ est égal au sous-espace $(S^nV^*)^{(B)}_{na_i}\subset S^nV^*$ formé des vecteurs propres de B de poids na_i.

Rappelons que si on pose $\mathcal{J}_i = \{1 \leq i \leq d \mid n_j + a_i$ est pair et $n_j \geq a_i\}$, alors $X_i^T = X \cap \mathbb{P}\Big(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} D_j^{m_j}\Big)$ où pour tout $j \in \mathcal{J}_i$, D_j est la droite dans V_{n_j} engendrée par $X^{\frac{n_j+a_i}{2}} Y^{\frac{n_j-a_i}{2}}$.

Nous allons déterminer pour tout $j \in \mathcal{J}_i$, un élément F_{ij} de $(S^2V_{n_j}^*)_{2a_i}^{(B)}$ de telle sorte que F_{ij} soit non nul en $X^{\frac{n_j+a_i}{2}} Y^{\frac{n_j-a_i}{2}}$. Alors, si on pose $F_i = \sum_{j\in\mathcal{J}_i} F_{ij}$ (pour tout $j \in \mathcal{J}_i$, la composante F_{ij} apparaît m_j-fois), l'ouvert de X défini par $\mathcal{U}_i = \big\{x \in X \mid F_i(\tilde{x}) \neq 0\big\}$ répondra aux exigences du lemme II.2.10.

On fixe $j \in \mathcal{J}_i$.

Notons $(\mathcal{Z}_k)_{0\leq k\leq n_j}$ la base duale de la base $(X^kY^{n_j-k})_{0\leq k\leq n_j}$ de V_{n_j}. Tout vecteur propre de T de poids $2a_i$ dans $S^2V_{n_j}^*$ s'écrit $\sum_{k=a_i}^{\frac{n_j+a_i}{2}} \alpha_k \mathcal{Z}_k \mathcal{Z}_{n_j+a_i-k}$. Déterminons les coefficients α_k, $a_i \leq k \leq \frac{n_j+a_i}{2}$, de sorte que $\sum_{k=a_i}^{\frac{n_j+a_i}{2}} \alpha_k \mathcal{Z}_k \mathcal{Z}_{n_j+a_i-k}$ soit invariant par U.

Cela revient à dire que $\mathcal{X}\Big(\sum_{k=a_i}^{\frac{n_j+a_i}{2}} \alpha_k \mathcal{Z}_k \mathcal{Z}_{n_j+a_i-k}\Big) = 0$ où $\mathcal{X} = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ est un générateur de l'algèbre de Lie de U.

Rappelons que $\mathcal{X}$ opère par dérivations dans $S^2V_{n_j}^*$. On a $\mathcal{X}(\mathcal{Z}_{n_j}) = 0$ et $\mathcal{X}(\mathcal{Z}_k) = (n_j - k)\mathcal{Z}_{k+1}$ pour tout $k \in \{0,\ldots,n_j-1\}$.

Si $n_j \neq a_i$, on a :

$$\mathcal{X}\left(\sum_{k=a_i}^{\frac{n_j+a_i}{2}} \alpha_k \mathcal{Z}_k \mathcal{Z}_{n_j+a_i-k}\right) = \sum_{k=a_i}^{\frac{n_j+a_i}{2}} \alpha_k (n_j-k)\mathcal{Z}_{k+1}\mathcal{Z}_{n_j+a_i-k} + \sum_{k=a_i}^{\frac{n_j+a_i}{2}} \alpha_k (k-a_i)\mathcal{Z}_k\mathcal{Z}_{n_j+a_i-k+1}\,.$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathcal{X}&\left(\sum_{k=a_i}^{\frac{n_j+a_i}{2}} \alpha_k \mathcal{Z}_k \mathcal{Z}_{n_j+a_i-k}\right)\\ &= \left(\Big(\frac{n_j-a_i}{2}+1\Big)\alpha_{\frac{n_j+a_i}{2}-1} + (n_j-a_i)\alpha_{\frac{n_j+a_i}{2}}\right)\mathcal{Z}_{\frac{n_j+a_i}{2}}\mathcal{Z}_{\frac{n_j+a_i}{2}+1}\\ &\quad + \sum_{k=a_i}^{\frac{n_j+a_i}{2}-2}\Big((n_j-k)\alpha_k + (k+1-a_i)\alpha_{k+1}\Big)\mathcal{Z}_{k+1}\mathcal{Z}_{n_j+a_i-k}\,.\end{aligned}$$

Si $n_j \neq a_i$, on trouve alors $\alpha_{\frac{n_j+a_i}{2}} = C_{n_j-a_i-1}^{\frac{n_j-a_i}{2}}(-1)^{\frac{n_j-a_i}{2}}\alpha_{a_i}$ et $\alpha_{a_i+k} = (-1)^k C_{n_j-a_i}^k \alpha_{a_i}$ pour tout $k \in \left\{0, \dots, \frac{n_j+a_i}{2}-1\right\}$.

Alors, on pose :

$$F_{ij} = \mathcal{Z}_{a_i}^2 \qquad \text{si } n_j = a_i$$

et

$$F_{ij} = \sum_{k=0}^{\frac{n_j-a_i}{2}-1} \left((-1)^k C_{n_j-a_i}^k \mathcal{Z}_{a_i+k}\mathcal{Z}_{n_j-k}\right) + (-1)^{\frac{n_j-a_i}{2}} C_{n_j-a_i-1}^{\frac{n_j-a_i}{2}} \mathcal{Z}^2_{\frac{n_j+a_i}{2}} \text{ si } n_j \neq a_i \, .$$

On a $F_{ij}\left(X^{\frac{n_j+a_i}{2}}Y^{\frac{n_j-a_i}{2}}\right) \neq 0$ car le coefficient de $\mathcal{Z}^2_{\frac{n_j+a_i}{2}}$ dans l'expression de F_{ij} est non nul. □

Le théorème II.2.8 va résulter du lemme II.2.10 et du lemme II.2.11 suivant. On note $\mathcal{Y}$ l'élément de Lie (G) défini par : $\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On fait opérer $\mathrm{Lie}(G)$ dans chaque $S^2V_{n_j}^*$ par dérivations.

LEMME II.2.11. — *Si on pose*

$$Z_i = \left\{x \in \mathcal{U}_i \mid (\mathcal{Y}\cdot F_i)(\tilde{x}) = 0\right\} \quad (1 \leq i \leq s)\, ,$$

et

$$Z_{i-1,i} = Z_i \cap X^{ss}_{i-1,i} \quad (1 \leq i \leq s)$$

$$Z_{i,i+1} = Z_i \cap X^{ss}_{i,i+1} \quad (1 \leq i \leq s-1)\, ,$$

alors il existe un isomorphisme B-équivariant de $\mathcal{U}_i$ (resp. de $\mathcal{U}_i \cap X^{ss}_{i-1,i}$ et de $\mathcal{U}_i \cap X^{ss}_{i,i+1}$) sur $U \times Z_i$ (resp. sur $U \times Z_{i-1,i}$ et sur $U \times Z_{i,i+1}$).

Démonstration du lemme II.2.11.

Soit $1 \leq i \leq s$.

Posons $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et pour tout $x \in \mathcal{U}_i$, notons u_x l'élément de U défini par $u_x = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(\mathcal{Y}\cdot F_i)(\tilde{x})}{(\mathcal{H}\cdot F_i)(\tilde{x})} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $x \in X$, on a $(\mathcal{Y}\cdot F_i)(u_x\cdot\tilde{x}) = u_x^{-1}\cdot(\mathcal{Y}\cdot F_i)(\tilde{x})$. Alors comme pour tout élément u de U de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $u\cdot\mathcal{Y} = b\cdot\mathcal{H} + \mathcal{Y}\cdot u$, on obtient les égalités :

$$(\mathcal{Y}\cdot F_i)(u_x\cdot\tilde{x}) = -\frac{(\mathcal{Y}\cdot F_i)(\tilde{x})}{(\mathcal{H}\cdot F_i)(\tilde{x})}(\mathcal{H}\cdot F_i)(\tilde{x}) + (\mathcal{Y}\cdot F_i)(\tilde{x}) = 0\, .$$

Donc pour tout $x \in \mathcal{U}_i$, on a $u_x\cdot x \in Z_i$ et pour tout $x \in Z_i$ et $u \in U$, on a $u_{(u\cdot x)} = u^{-1}$.

Alors on peut définir le morphisme φ suivant :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U}_i &\longrightarrow U \times Z_i \\ x &\longmapsto (u_x^{-1}, u_x \cdot x) \,. \end{aligned}$$

Si ψ est le morphisme défini par $\psi : \begin{aligned} U \times Z_i &\longrightarrow \mathcal{U}_i \\ (u,x) &\longmapsto u \cdot x \end{aligned}$, alors les morphismes φ et ψ sont B-équivariants et réciproques l'un de l'autre.

En restreignant φ à $\mathcal{U}_i \cap X^{ss}_{i-1,i}$ (resp. $\mathcal{U}_i \cap X^{ss}_{i,i+1}$) on obtient un isomorphisme B-équivariant de $\mathcal{U}_i \cap X^{ss}_{i-1,i}$ sur $U \times Z_{i-1,i}$ (resp. de $\mathcal{U}_i \cap X^{ss}_{i,i+1}$ sur $U \times Z_{i,i+1}$). □

Fin de la démonstration du théorème II.2.8.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, posons $\mathcal{V}_i = \pi_i(\mathcal{U}_i)$.

D'après le lemme II.2.11, $\mathcal{U}_i \simeq U \times Z_i$. Comme $B = U{\cdot}T$, on a $U \times Z_i \simeq B \times_T Z_i$, donc $\mathcal{V}_i$ est isomorphe au quotient $Z_i//T$.

Rappelons que d'après le théorème II.2.5, pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X^{ss}_{i-1,i} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_{i-}"'] & X^{ss}_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ Y_{i-1,i} \arrow[r, "f_{i-}"] & Y_i \,. \end{tikzcd}$$

Alors $f_{i-}^{-1}(\mathcal{V}_i) = \pi_{i-}\left(\mathcal{U}_i \cap X^{ss}_{i-1,i}\right)$ et d'après le lemme II.2.11, on a $f_{i-}^{-1}(\mathcal{V}_i) \simeq Z_{i-1,i}/T$.

□

Remarque II.2.12. — Nous allons donner l'expression de $\mathcal{Y}{\cdot}F_i$ $(1 \leq i \leq s)$, elle nous sera utile pour terminer la démonstration du théorème II.1.1.

On a $\mathcal{Y}{\cdot}\mathcal{Z}_k = k{\cdot}\mathcal{Z}_{k-1}$ si $1 \leq k \leq n_j$ et $\mathcal{Y}{\cdot}\mathcal{Z}_0 = 0$. Alors pour tout $j \in \mathcal{J}_i$, on obtient :

$\mathcal{Y}{\cdot}F_{ij} = \mathcal{Y}{\cdot}\mathcal{Z}^2_{a_i} = 2a_i \mathcal{Z}_{a_i-1}\mathcal{Z}_{a_i}$, si $n_j = a_i$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}{\cdot}F_{ij} = {}&\mathcal{Z}_{a_i-1}\mathcal{Z}_{n_j} \\ &+ \sum_{k=0}^{\frac{n_j-a_i}{2}-1} \Big((-1)^{k+1} C^{k+1}_{n_j-a_i}(a_i+k+1) + (-1)^k C^k_{n_j-a_i}(n_j-k)\Big) \mathcal{Z}_{a_i+k}\mathcal{Z}_{n_j-k-1} \\ &+ (-1)^{\frac{n_j-a_i}{2}} \frac{(n_1^2 + 2n_j - a_i^2)}{n_j - a_i} C^{\frac{n_j-a_i}{2}-1}_{n_j-a_i} \mathcal{Z}_{\frac{n_j+a_i}{2}-1} \mathcal{Z}_{\frac{n_j+a_i}{2}} \,, \text{ si } n_j \neq a_i \,. \end{aligned}$$

c) Fin de la démonstration du théorème II.1.1.

Avant de démontrer les assertions *(i), (ii)* et *(iii)* du théorème II.1.1, nous allons introduire quelques notations.

Si on désigne par λ_0 le sous-groupe à un paramètre de T défini par : $\begin{array}{l}\lambda_0 : k^* \to T \\ t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{smallmatrix}\right)\end{array}$, rappelons qu'on note pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, $X_+(\lambda_0, X_i^T)$ et $X_-(\lambda_0, X_i^T)$ les sous-variétés localement fermées de X, stables par T, définies par $X_+(\lambda_0 X_i^T) = \big\{x \in X \mid \lim\limits_{t\to 0} \lambda_0(t)x \in X_i^T\big\}$ et $X_-(\lambda_0, X_i^T) = \big\{x \in X \mid \lim\limits_{t\to\infty} \lambda_0(t)x \in X_i^T\big\}$. Rappelons que pour tout poids a de T dans V et tout $x \in X$, on note $\tilde{x}^{(a)}$ la composante de poids a d'un représentant $\tilde{x}$ de x dans V dans la décomposition en sous-espaces propres de V pour T.

Démonstration de l'assertion (i) du théorème II.1.1.

Il s'agit de décrire le quotient $Y_s = X_s^{ss}//B$. D'après la proposition II.1.1, on a $X_s^{ss} = \big\{x \in X \mid \operatorname*{mult}\limits_{Y=0} \tilde{x}_d = 0\big\}$. D'où $X_s^{ss} = \big\{x \in X \mid x_d^{(-a_s)} \neq 0\big\} = X_+(\lambda_0, X_s^T)$. Donc on a aussi $X_s^{ss} = \big\{x \in X \mid F_s(\tilde{x}) \neq 0\big\} = \mathcal{U}_s$ (voir lemme II.2.2). D'après le lemme II.2.11, on a $\mathcal{U}_s \simeq U \times Z_s$ avec $Z_s = \big\{x \in X \mid F_s(\tilde{x}) \neq 0$ et $(\mathcal{Y}\cdot F_s)(\tilde{x}) = 0\big\}$, c'est-à-dire $Z_s = \big\{x \in X \mid \tilde{x}_d^{(-a_s)} \neq 0 \text{ et } \tilde{x}_d^{(2-a_s)} = 0\big\}$.

On a $Y_s \simeq Z_s//T$ et Z_s est l'ouvert de $\big\{x \in X ; \tilde{x}_d^{(2-a_s)} = 0\big\}$ des points semi-stables pour T par rapport au poids $-a_s$ (voir le paragraphe 1 du chapitre I).

Alors d'après l'assertion *(i)* du théorème I.3.3, on a $Z_s//T \simeq X_s^T$. □

Dorénavant, on supposera la variété X lisse.

Démonstration de l'assertion (ii) du théorème II.1.1.

Décrivons tout d'abord le morphisme $f_{s^-} : Y_{s-1,s} \to Y_s$.

On a $Y_{s-1,s} = X_{s-1,s}^{ss}/B$ et d'après la proposition II.2.1,

$$X_{s-1,s}^{ss} = \left\{ x \in X \mid \operatorname*{mult}_{Y=0} \tilde{x}_d = 0 \text{ et } \left\{\begin{array}{l} \forall u \in B,\ \operatorname*{mult}\limits_{X=0} u\cdot\tilde{x}_d \leq n_d - 1 \\ \text{ou il existe} \\ \text{un indice } i \in \{1, \ldots, d-1\} \text{ tel que } \tilde{x}_i \neq 0 \end{array}\right.\right\}.$$

On a $X_{s-1,s}^{ss} = X_+(\lambda_0, X_s^T) \backslash X_s^T$.

D'après le lemme II.2.11, $\mathcal{U}_s \cap X_{s-1,s}^{ss} \simeq U \times Z_{s-1,s}$ avec $Z_{s-1,s} = X_{s-1,s}^{ss} \cap Z_s$. Mais $\mathcal{U}_s = X_s^{ss}$, d'où $X_{s-1,s}^{ss} \simeq U \times Z_{s-1,s}$. Donc $Y_{s-1,s} \simeq Z_{s-1,s}/T$.

On a

$$Z_{s-1,s} = \left\{ \begin{array}{l} x \in X \mid \tilde{x}_d^{(-a_s)} \neq 0,\ \tilde{x}_d^{(2-a_s)} = 0 \ \text{ et il existe un } a \in \mathcal{P} \\ \hspace{6cm} \text{avec } a > -a_s \text{ et } \tilde{x}^{(a)} \neq 0 \end{array} \right\} .$$

Donc $Z_{s-1,s}$ est l'ouvert dans $\left\{x \in X \mid \tilde{x}_d^{(2-a_s)} = 0\right\}$ des points semi-stables pour T par rapport au poids $-(a_{s-1} + a_s)$.

D'après la 1ère partie de l'assertion *(ii)* du théorème I.3.3, le morphisme $f_{s^-} : Y_{s-1,s} \longrightarrow Y_s$ est une fibration de fibre $\frac{\widetilde{W}_s^+ \backslash \{0\}}{T}$ où $\widetilde{W}_s^+$ est la partie strictement positive de l'espace tangent en un point de X_s^T à $\left\{x \in X \mid \tilde{x}_d^{(2-a_s)} = 0\right\}$.

Pour terminer la démonstration de *(ii)*, on a besoin du lemme II.2.13 ci-dessous.

Rappelons que pour tout i, on a les diagrammes commutatifs suivants (voir théorème II.1.5, *(ii)*) :

$$\begin{array}{ccccc} X^{ss}_{i-1,i} & \hookrightarrow & X_i^{ss} & \hookleftarrow & X^{ss}_{i,i+1} \\ {\scriptstyle \pi_{i^-}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{i^+}} \\ Y_{i-1,i} & \xrightarrow{f_{i^-}} & Y_i & \xleftarrow{f_{i^+}} & Y_{i,i+1} \end{array}$$

LEMME II.2.13.

(i) *Si on pose pour tout* $i \in \{1,\ldots,s\}$, $E_i^- = \pi_{i^-}(X^{ss}_{i-1,i} \backslash X_i^s)$ *et pour tout* $i \in \{1,\ldots,s{-}1\}$, $E_i^+ = \pi_{i^+}(X^{ss}_{i,i+1} \backslash X_i^s)$ *alors la restriction de* f_{i^-} *à* $Y_{i-1,i} \backslash E_i^-$ *(resp. de* f_{i^+} *à* $Y_{i,i+1} \backslash E_i^+$*) est un isomorphisme de* $Y_{i-1,i} \backslash E_i^-$ *(resp.* $Y_{i,i+1} \backslash E_i^+$*) sur* $Y_i \backslash X_i^T$ *où l'on a identifié* X_i^T *à* $\pi_i(U \times X_i^T)$.

(ii) *On a :*

$$X^{ss}_{i-1,i} \backslash X_i^s = X_+(\lambda_0, X_i^T) \backslash X_i^T \qquad (1 \leq i \leq s)$$

et

$$X^{ss}_{i,i+1} \backslash X_i^s \simeq U \times \left(X_-(\lambda_0, X_i^T) \backslash X_i^T\right) \qquad (1 \leq i \leq s{-}1) .$$

Démonstration du lemme II.2.13.

(i) Fixons i tel que $1 \leq i \leq s$.

On a $Y_{i-1,i} \backslash E_i^- = \pi_{i^-}(X_i^s)$. D'après le théorème II.1.5, *(ii)*, la restriction de f_{i^-} à $\pi_{i^-}(X_i^s)$ est un isomorphisme de $\pi_{i^-}(X_i^s)$ sur $\pi_i(X_i^s)$. Il résulte de la proposition II.2.1 que $\pi_i(X_i^s) = Y_i \backslash \pi_i(U \times X_i^T)$.

(i) Décrivons tout d'abord $X^{ss}_{i-1,i} \backslash X_i^s$ pour $1 \leq i \leq s$.

On continue à noter pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, $\mathcal{J}_i = \big\{1 \leq j \leq d \mid n_j + a_i$ est pair et $n_j \geq a_i\big\}$. Pour tout réel α, $[\alpha]$ désignera sa partie entière.

D'après la proposition II.2.1, $x \in X^{ss}_{i-1}\backslash X^s_i$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

- il existe j et j' dans $\mathcal{J}_i$ tels que pour tout $u \in B$, $\operatorname*{mult}_{X=0} u\cdot\tilde{x}_j \leq \frac{n_j+a_i}{2} - 1$ et $\operatorname*{mult}_{Y=0} \tilde{x}_{j'} \leq \frac{n_{j'}-a_i}{2}$;
- pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, $\operatorname*{mult}_{Y=0} \tilde{x}_j \geq \left[\frac{n_j-a_i}{2}\right]$.

D'autre part, on a :

$$X_+(\lambda_0, X^T_i) = \left\{x \in X \mid \tilde{x}^{(-a_i)} \neq 0 \text{ et pour tout } a \in \mathcal{P} \text{ avec } a < -a_i,\ \tilde{x}^{(a)} = 0\right\}.$$

On a donc $X^{ss}_{i-1,i}\backslash X^s_i = X_+(\lambda_0, X^T_i)\backslash X^T_i$.

Décrivons maintenant $X^{ss}_{i,i+1}\backslash X^s_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$.

D'après la proposition II.2.1, $x \in X^{ss}_{i,i+1}\backslash X^s_i$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

- il existe j dans $\mathcal{J}_i$ ainsi qu'une racine finie de $\tilde{x}_j$ de multiplicité $\frac{1}{2}(n_j + a_i)$;
- il existe $u \in B$ tel que pour tout j, $\operatorname*{mult}_{X=0} u\cdot\tilde{x}_j \geq \frac{1}{2}(n_j + a_i)$ et il existe $j' \in \mathcal{J}_i$ tel que $\operatorname*{mult}_{Y=0} \tilde{x}_{j'} \leq \frac{n_{j'}-a_i}{2} - 1$.

D'autre part, on a :

$$X_-(\lambda_0, X^T_i) = \left\{x \in X \mid \tilde{x}^{(-a_i)} \neq 0 \text{ et pour tout } a \in \mathcal{P} \text{ avec } a > -a_i,\ \tilde{x}^{(a)} = 0\right\}.$$

Si $x \in X^{ss}_{i,i+1}\backslash X^s_i$, il existe $u_i \in U$ et $j \in \mathcal{J}_i$ tels que $\operatorname*{mult}_{X=0} u_i\tilde{x}_j = \frac{1}{2}(n_j + a_i)$. Pour j fixé, cet u_i est unique sinon on aurait $n_j \geq \frac{n_j+a_i}{2} + \frac{n_j+a_i}{2}$ ce qui est faux. Alors, soit φ le morphisme défini par :

$$\begin{aligned} \varphi : X^{ss}_{i,i+1}\backslash X^s_i &\longrightarrow U \times \left(X_-(\lambda_0, X^T_i)\backslash X^T_i\right), \\ x &\longmapsto (u_i^{-1}, u_i\cdot x) \end{aligned}$$

si ψ est le morphisme défini par :

$$\begin{aligned} U \times \big(X_-(\lambda_0, X^T_i)\backslash X^T_i\big) &\longrightarrow X^{ss}_{i,i+1}\backslash X^s_i, \\ (u, x) &\longmapsto u\cdot x \end{aligned}$$

on a $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Fin de la démonstration de (ii) du théorème II.1.1.

D'après le lemme II.2.13, on a $E_i^+ = \frac{X_-(\lambda_0, X_i^T)\backslash X_i^T}{T}$ $(1 \leq i \leq s-1)$.

Avec les notations des lemmes II.2.10 et II.2.11, on a :

$$Z_{i,i+1} = Z_i \cap X_{i,i+1}^{ss} = \left\{ x \in Z_i \mid \text{ il existe } a \in \mathcal{P} \text{ avec } a < -a_i \text{ et } \tilde{x}^{(a)} \neq 0 \right\}$$

et

$$Z_i \cap X_i^s = \left\{ x \in Z_i \left| \begin{array}{l} \text{il existe } \ a \in \mathcal{P} \text{ avec } a < -a_i \text{ et } \tilde{x}^{(a)} \neq 0 \\ \text{et} \\ \text{il existe } \ a' \in \mathcal{P} \text{ avec } a' > -a_i \text{ et } \tilde{x}^{(a')} \neq 0 \end{array} \right. \right\} .$$

D'où

$$X_-(\lambda_0, X_i^T)\backslash X_i^T = Z_{i,i+1}\backslash(Z_i \cap X_i^s) .$$

Alors d'après le théorème I.3.3, la restriction de f_{i^+} à toute composante connexe E_{ij}^+ de E_i^+ est une fibration sur X_{ij} de fibre l'espace projectif avec poids $\frac{W_{ij}^- \backslash \{0\}}{T}$.

Décrivons maintenant la restriction de f_{i^-} à E_i^- $(1 \leq i \leq s)$: on a $E_i^- = \pi_{i^-}(X_{i-1,i}^{ss}\backslash X_i^s)$ et d'après le lemme II.2.13, $X_{i-1,i}^{ss}\backslash X_i^s = X_+(\lambda_0, X_i^T)\backslash X_i^T$.

Soit $\mathcal{U}_i$ l'ouvert de X donné dans le lemme II.2.10, rappelons que $\mathcal{U}_i = \{x \in X \mid F_i(\tilde{x}) \neq 0\}$. Alors $X_+(\lambda_0, X_i^T)\backslash X_i^T) \subset \mathcal{U}_i$. La restriction de l'isomorphisme $\mathcal{U}_i \simeq U \times Z_i$ à $X_+(\lambda_0, X_i^T)\backslash X_i^T$ donne un isomorphisme de $X_+(\lambda_0, X_i^T)\backslash X_i^T$ sur $U \times (Z_+(\lambda_0, X_i^T)\backslash X_i^T)$ où Z est la sous-variété fermée lisse de X définie par :

$$Z = \left\{ x \in X \mid \exists j \in \mathcal{J}_i ; \tilde{x}_j^{(2-a_i)} = 0 \right\}.$$

Avec les notations des lemmes II.2.10 et II.2.11, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} Z_{i-1,i}\backslash(Z_i \cap X_i^s) &= (Z_i \cap X_{i-1,i}^{ss})\backslash(Z_i \cap X_i^s) \\ &= Z_i \cap (X_{i-1,i}^{ss}\backslash X_i^s) \\ &= Z_i \cap (X_+(\lambda_0, X_i^T)\backslash X_i^T) . \end{aligned}$$

D'où

$$Z_{i-1,i}\backslash(Z_i \cap X_i^s) = Z_+(\lambda_0, X_i^T)\backslash X_i^T ,$$

donc

$$E_i^- \cong \frac{(Z_+(\lambda_0, X_i^T)\backslash X_i^T)}{T} .$$

Alors d'après le théorème I.3.3, la restriction de f_{i^-} à toute composante connexe E_{ij}^- de E_i^- est une fibration sur X_{ij} de fibre $\frac{\widetilde{W}_{ij}^+ \backslash \{0\}}{T}$ où $\widetilde{W}_{ij}^+ = (T_x Z)_{>0}$ avec $x \in X_{ij}$. □

Démonstration de l'assertion (iii) du théorème II.1.1.

D'après la proposition II.1.7 et le lemme I.6.3, chacune des variétés $Y_{i-1,i}$ ($1 \leq i \leq s$) est $\mathbb{Q}$-factorielle.

Si les nombres

$$\dim X - \dim \left(X_{+}(\lambda_0, X_i^T)\right) \ (1 \leq i \leq s)$$

et

$$\dim X - \dim \left(X_{-}(\lambda_0, X_i^T)\right) - 1 \ (1 \leq i \leq s-1)$$

sont supérieurs ou égaux à 2, les morphismes $f_{i-} : Y_{i-1,i} \longrightarrow Y_i$ et $f_{i+} : Y_{i,i+1} \longrightarrow Y_i$ sont des isomorphismes en codimension un. Alors, l'assertion *(iii)* du théorème I.3.1 résulte de l'assertion *(ii)* du théorème II.1.1, du théorème II.2.1 (modèle local) et du théorème I.6.4. □

3. Exemples

a) L'espace projectif d'un $\mathrm{SL}(2)$-module irréductible.

Pour tout entier d positif, notons V_d l'espace des formes binaires de degré d, c'est-à-dire des polynômes homogènes de degré d en deux variables. Faisons opérer le groupe $G = \mathrm{SL}(2,k)$ dans V_d par : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot X = dX - bY$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot Y = -cX + aY$ pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$.

L'objet de ce paragraphe est de préciser la description du quotient $Y = X^{ss}(L)//G$ donnée dans le théorème II.1.1, lorsque $X = \mathbb{P}(V_d)$ et $L = \mathcal{O}_X(1)$. On posera $X^{ss}(L) = X^{ss}$ et $X^s(L) = X^s$. Soit $\mathcal{P} = \{-a_s, -a_{s-1}, \ldots, -a_1, a_s, a_1, \ldots, a_s\}$ l'ensemble des poids de T dans V_d. Alors si d est pair, pour tout $i \in \{0, \ldots, \frac{d}{2}\}$, on a $a_i = 2i$ et si d est impair, $a_0 \notin \mathcal{P}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, \frac{d+1}{2}\}$, on a $a_i = 2i-1$. On a $s = \left[\frac{d+1}{2}\right]$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, notons $y_i = \left[X^{[\frac{d}{2}]+i} Y^{[\frac{d+1}{2}]-i}\right]$ le point fixe de poids $-a_i$ de T dans X.

Rappelons que si Z est une variété projective normale, on note $N_1(Z)$ le quotient par la relation d'équivalence numérique du groupe abélien libre engendré par les courbes sur Z irréductibles.

THÉORÈME II.3.1. — *Le quotient Y est l'extrémité d'un diagramme :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& Y_{0,1} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_{1-}"] & & Y_{1,2} \cdots Y_{i-1,i} \arrow[dl, "f_{1+}"'] \arrow[dr, "f_{i-}"] & & Y_{i,i+1} \cdots Y_{s-1,s} \arrow[dl, "f_{i+}"'] \arrow[dr, "f_{s-}"] & \\
Y & & Y_1 & & Y_i & & Y_s
\end{tikzcd}$$

avec $s = \left[\frac{d+1}{2}\right]$ et on a :

(i) La variété Y_s est réduite à un point.

(ii) La variété $Y_{s-1,s}$ est l'espace projectif avec poids $\mathbb{P}(2,3,\ldots,d)$ et le morphisme $f_{(s-1)^+} : Y_{s-1,s} \longrightarrow Y_{s-1}$ est un isomorphisme.

De plus pour tout $i \in \{1,\ldots,s-1\}$, les morphismes f_{i^-} et f_{i^+} sont birationnels et si on pose $E_i^- = \mathbb{P}(2,3,\ldots,\left[\frac{d}{2}\right]+i)$ et $E_i^+ = \mathbb{P}\Big(1,2,\ldots,\left[\frac{d+1}{2}\right]-i\Big)$, alors la restriction de f_{i^-} à $Y_{i-1,i}\backslash E_i^-$ (resp. de f_{i^+} à $Y_{i,i+1}\backslash E_i^+$) est un isomorphisme de $Y_{i-1,i}\backslash E_i^-$ (resp. $Y_{i,i+1}\backslash E_i^+$) sur $Y_i\backslash\{y_i\}$.

(iii) Pour tout $i \in \{1,\ldots,s-2\}$ les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
Y_{i-1,i} \arrow[rr, dashed, "f_{i^+}^{-1}\circ f_{i^-}"] \arrow[dr, "f_{i^-}"'] & & Y_{i,i+1} \arrow[dl, "f_{i^+}"] \\
& Y_i &
\end{tikzcd}$$

sont des flips et soit C_i^- (resp. C_i^+) la courbe dans E_i^- telle que $N_1(E_i^-)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\cdot[C_i^-]$ (resp. dans E_i^+ telle que $N_1(E_i^+)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\cdot[C_i^+]$), alors on a :

$$C_i^-\cdot K_{Y_{i-1,i}} = \frac{1}{2}\deg C_i^-\big((d+1)^2 + a_i^2 - 5\big) = -\frac{1}{\deg C_i^+}C_i^+\cdot K_{Y_{i,i+1}}\,.$$

(iv) Les fibres de f au-dessus de X^s/G sont isomorphes à $\mathbb{P}_k^1$. Si d est pair et si on pose $y_0 = \left[X^{\frac{d}{2}}Y^{\frac{d}{2}}\right]$, alors $f^{-1}(\pi(y_0)) \simeq \mathbb{P}\big(1,2,\ldots,\frac{d}{2}\big)$ où $\pi : X^{ss} \longrightarrow Y$ est le morphisme quotient.

Remarque II.3.2. — Pour $d \in \{2,\ldots,6\}$ (les cas $d = 0$ et $d = 1$ sont sans intérêt), on connaît la structure du quotient Y. En effet, on a $Y = \mathrm{Proj}(k[V_d]^G)$ et on peut décrire pour $d \in \{2,\ldots,6\}$, l'algèbre $k[V_d]^G$ par générateurs et relations (voir [Di], [El] et [Sp]).

Pour $d = 2$ ou $d = 3$, l'algèbre $k[V_d]^G$ est engendrée par un élément, et la variété Y est réduite à un point.

Pour $d = 4$, l'algèbre $k[V_4]^G$ est engendrée par deux invariants I et J algébriquement indépendants de degrés 2 et 3. Donc pour $d = 4$, $Y = \mathbb{P}(2,3) \simeq \mathbb{P}^1_k$. Le quotient Y est l'extrémité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Y_{0,1} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_{1-}"] & & Y_{1,2} \arrow[dl, "f_{1+}"'] \arrow[dr, "f_{2-}"] & \\
Y & & Y_1 & & Y_2
\end{tikzcd}$$

D'après le théorème II.3.6, Y_2 est réduite à un point, $Y_{1,2} = \mathbb{P}(2,3,4)$, le morphisme f_{1+} est un isomorphisme. On a $E_1^- = \mathbb{P}(2,3) \simeq \mathbb{P}^1_k$ et $f_{1-}(E_1^-) = \{[X^3Y]\}$.

Pour $d = 5$, l'algèbre $k[V_5]^G$ est engendrée par quatre invariants I_4, I_8, I_{12} et I_{18} de degrés 4, 8, 12 et 18 où I_4, I_8 et I_{12} sont algébriquement indépendants et I_{18}^2 est un polynôme en I_4, I_8 et I_{12}. On a alors

$$Y = \operatorname{Proj}\Big(\bigoplus_{n\geq 0} k[V_5]^G_{4n}\Big) = \operatorname{Proj} k[I_4, I_8, I_{12}]\,.$$

D'où $Y = \mathbb{P}(1,2,3)$ dans ce cas. Le quotient Y est l'extrémité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & Y_{0,1} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_{1-}"] & & Y_{1,2} \arrow[dl, "f_{1+}"'] \arrow[dr, "f_{2-}"] & & Y_{2,3} \arrow[dl, "f_{2+}"'] \arrow[dr, "f_{3-}"] & \\
Y & & Y_1 & & Y_2 & & Y_3
\end{tikzcd}$$

où Y_3 est réduite à un point, $Y_{2,3} = \mathbb{P}(2,3,4,5)$ et le morphisme f_{2+} est un isomorphisme. On a $E_2^- = \mathbb{P}(2,3,4)$, $E_1^+ = \mathbb{P}(1,2) \simeq \mathbb{P}^1_k$ et $E_1^- = \mathbb{P}(2,3) \simeq \mathbb{P}^1_k$ avec $f_{2-}(E_2^-) = \{[X^4Y]\}$ et $f_{1+}(E_1^+) = f_{1-}(E_1^-) = \{[X^3Y^2]\}$.

Pour $d = 6$, l'algèbre $k[V_6]^G$ est engendrée par cinq invariants I_2, I_4, I_6, I_{10} et I_{15} de degrés 2, 4, 6, 10 et 15 où I_2, I_4, I_6 et I_{10} sont algébriquement indépendants et I_{15}^2 est un polynôme en I_2, I_4, I_6 et I_{10}. Alors on a

$$Y = \operatorname{Proj}\Big(\bigoplus_{n\geq 0} k[V_6]^G_{2n}\Big) = \operatorname{Proj} k[I_2, I_4, I_6, I_{10}]\,.$$

D'où $Y = \mathbb{P}(1,2,3,5)$ dans ce cas. Le quotient Y est l'extrémité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & Y_{0,1} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_{1-}"] & & Y_{1,2} \arrow[dl, "f_{1+}"'] \arrow[dr, "f_{2-}"] & & Y_{2,3} \arrow[dl, "f_{2+}"'] \arrow[dr, "f_{3-}"] & \\
Y & & Y_1 & & Y_2 & & Y_3
\end{tikzcd}$$

où Y_3 est réduite à un point, $Y_{2,3} = \mathbb{P}(2,3,4,5,6)$ et le morphisme f_{2+} est un isomorphisme. On a $E_2^- = \mathbb{P}(2,3,4,5)$, $E_1^+ = \mathbb{P}(1,2) \simeq \mathbb{P}^1_k$ et $E_1^- = \mathbb{P}(2,3,4)$ avec $f_{2-}(E_2^-) = \{[X^5Y]\}$ et $f_{1-}(E_1^-) = f_{1+}(E_1^+) = \{[X^4Y^2]\}$.

Pour $d = 7$ ou d supérieur ou égal à 9, notons que la description de $k[V_d]^G$, par générateurs et relations, est inconnue.

Pour $d = 7$, le quotient Y est l'extrémité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
& Y_{0,1} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_{1-}"] & & Y_{1,2} \arrow[dl, "f_{1+}"'] \arrow[dr, "f_{2-}"] & & Y_{2,3} \arrow[dl, "f_{2+}"'] \arrow[dr, "f_{3-}"] & & Y_{3,4} \arrow[dl, "f_{3+}"'] \arrow[dr, "f_{4-}"] & \\
Y & & Y_1 & & Y_2 & & Y_3 & & Y_4
\end{tikzcd}$$

où Y_4 est réduite à un point, $Y_{3,4} = \mathbb{P}(2,3,4,5,6,7)$ et le morphisme f_{3+} est un isomorphisme. On a $E_3^- = \mathbb{P}(2,3,4,5,6)$, $E_2^+ = \mathbb{P}(1,2) \simeq \mathbb{P}_k^1$, $E_2^+ = \mathbb{P}(2,3,4,5)$, $E_1^+ = \mathbb{P}(1,2,3)$ et $E_1^- = \mathbb{P}(2,3,4)$ avec $f_{3^-}(E_3^-) = \{[X^6Y]\}$, $f_{2^-}(E_2^-) = f_{2^+}(E_2^+) = \{[X^5Y^2]\}$ et $f_{1^-}(E_1^-) = f_{1^+}(E_1^+) = \{[X^4Y^3]\}$.

Démonstration du théorème II.3.1. — Le diagramme du théorème II.3.1 a été construit dans le paragraphe 2.a) et les assertions *(i)* et *(ii)* de ce théorème résultent des assertions *(i)* et *(ii)* du théorème II.1.1.

Remarquons que pour tout $i \in \{1, \dots, s-1\}$, on a $\operatorname{codim}_{Y_{i-1,i}} E_i^- = \left[\frac{d+1}{2}\right] - i$ et $\operatorname{codim}_{Y_{i,i+1}} E_i^+ = \left[\frac{d}{2}\right] + i-1$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, s-1\}$, le morphisme f_{i^+} est un isomorphisme en codimension un, ainsi que f_{i^-} sauf pour $i = s-1$. Le morphisme $f_{(s-1)^-} : Y_{s-2,s-1} \longrightarrow Y_{s-1}$ est l'éclatement de Y_{s-1} par rapport à l'idéal I construit dans la proposition I.4.9. L'assertion *(iii)* du théorème II.3.1 résulte du théorème II.1.1, assertion *(iii)*, et du théorème I.6.4, assertion *(ii)*.

Montrons maintenant la dernière partie de l'assertion *(iv)* du théorème II.3.1.

Pour tout $x \in X$, on note $\tilde{x}$ un représentant de X dans V_d.

Supposons que d est pair et remarquons que $y_0 = \left[X^{\frac{d}{2}}Y^{\frac{d}{2}}\right]$ est un élément de $X^{ss} \backslash X^s$.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X_{0,1}^{ss} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi_{1^-}"'] & X^{ss} \arrow[d, "\pi"] \\
Y_{0,1} \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

où le morphisme $f' : X_{0,1}^{ss} \longrightarrow X^{ss}$ est la restriction à $X_{0,1}^{ss}$ du morphisme $G \times_B X_{0,1}^{ss} \longrightarrow X^{ss}$. Alors, on a $f^{-1}(\pi(y_0)) = \pi_{1^-}\left(\pi^{-1}\big(\pi(y_0)\big) \cap X_{0,1}^{ss}\right)$ avec

$$\pi^{-1}\big(\pi(y_0))\big) \cap X_{0,1}^{ss} = \left\{ \begin{array}{c} x \in X \mid \text{pour tout } u \in B, \operatorname*{mult}_{X=0} u \cdot \tilde{x} \leq \dfrac{d}{2}, \text{ il existe } u_0 \in B \\ \text{tel que } \operatorname*{mult}_{X=0} u_0 \cdot \tilde{x} = \dfrac{d}{2} \text{ et } \operatorname*{mult}_{Y=0} \tilde{x} \leq \dfrac{d}{2} - 1 \end{array} \right\}.$$

Pour tout $x \in X$, on note $(\tilde{x}_j)_{0 \leq j \leq d}$ les coordonnées de $\tilde{x}$ dans la base $(X^jY^{d-j})_{0 \leq j \leq d}$ de V_d.

Posons

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{c} x \in X \mid \text{pour tout } j \in \{0, \dots, \frac{d}{2}-1\}, \tilde{x}_j = 0, \tilde{x}_{\frac{d}{2}} \neq 0 \\ \text{et il existe } j' \in \left\{\frac{d}{2}+1, \dots, d\right\} \text{ tel que } \tilde{x}_{j'} \neq 0 \end{array} \right\} .$$

Si $x \in \pi^{-1}(\pi(y_0)) \cap X^{ss}_{0,1}$, il existe $u_0 \in U$ tel que $\operatorname*{mult}_{X=0} u_0 \cdot \tilde{x} = \dfrac{d}{2}$. Cet u_0 est unique. Alors, soit φ le morphisme défini par :

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}\big(\pi(y_0)\big) \cap X^{ss}_{0,1} &\longrightarrow U \times S_0 \\ x &\longmapsto (u_0^{-1}, u_0 \cdot x) \end{aligned}$$

et si ψ est le morphisme défini par :

$$\begin{aligned} U \times S_0 &\longrightarrow \pi^{-1}\big(\pi(y_0)\big) \cap X^{ss}_{0,1} , \\ (u, x) &\longmapsto u \cdot x \end{aligned}$$

alors on a $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Donc $\pi_{1^-}\Big(\pi^{-1}\big(\pi(y_0)\big) \cap X^{ss}_{0,1}\Big) \simeq S_0/T$ et alors $f^{-1}\big(\pi(y_0)\big) \simeq \mathbb{P}\big(1, 2, \dots, \frac{d}{2}\big)$.

b) Le produit de n copies de la droite projective.

Pour tout entier n supérieur ou égal à trois, considérons la variété $X = \mathbb{P}^1_k \times \cdots \times \mathbb{P}^1_k$ (n copies) sur laquelle agit le groupe $G = \mathrm{SL}(2, k)$ par l'action diagonale :

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ \big(g; (x_1, \dots, x_n)\big) &\longmapsto (g \cdot x_1, \dots, g \cdot x_n) \end{aligned}$$

, où l'action de G sur $\mathbb{P}^1_k$ est induite par l'action canonique de G sur le plan affine.

Notons L le fibré en droites sur X, qui est G-linéarisé et ample, défini par $L = L_1 \otimes \cdots \otimes L_n$ où $L_1, \dots, L_n$ désignent les fibrés en droites sur X, images réciproques de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(1)$ par les n projections de X sur $\mathbb{P}^1_k$.

Dans le théorème II.3.3 ci-dessous, nous précisons la description du quotient $Y = X^{ss}(L)//G$ donnée dans le théorème II.1.1.

On plonge X dans $\mathbb{P}(V)$, où V est la puissance tensorielle $n^{\text{ème}}$ de k^2, par le plongement de Segre. On fait agir G linéairement sur V de telle sorte que ce plongement φ soit G-équivariant et que la G-linéarisation de L soit induite via φ par celle de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$.

Notons $\mathcal{P} = (-a_s, -a_{s-1}, \dots, -a_1, a_0, a_1, \dots, a_{s-1}, a_s)$ la suite des poids de T dans V où $a_0 = 0$ ($a_0 \notin \mathcal{P}$, si n est impair). Si n est pair, pour tout $i \in \left\{0, \dots, \frac{n}{2}\right\}$, $a_i = 2i$ et la multiplicité dans V des poids a_i et $-a_i$ est égale à $C_n^{\frac{n}{2}+i}$. Si n est impair, pour tout $i \in \left\{1, \dots, \frac{n+1}{2}\right\}$, $a_i = 2i-1$ et les poids a_i et $-a_i$ apparaissent dans V avec la multiplicité égale à $C_n^{\frac{n+1}{2}+i}$. On a $s = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Pour toute partie $\mathcal{J}$ de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal $\left[\frac{n+1}{2}\right] - i$, notons $x_{\mathcal{J},i}$ le point de X dont la $j^{\text{ème}}$ composante ($1 \leq j \leq n$) est égale à $[1 : 0]$ si $j \in \mathcal{J}$, et $[0 : 1]$ sinon. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, l'ensemble X_i^T des points fixes de T dans X de poids $-a_i$ est l'ensemble des $x_{\mathcal{J},i}$,lorsque $\mathcal{J}$ parcourt l'ensemble $\mathscr{P}_{\left[\frac{n+1}{2}\right]-i}(\{1, \ldots, n\})$ des parties de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal $\left[\frac{n+1}{2}\right] - i$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, on a $\operatorname{card} X_i^T = C_n^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-i}$.

D'après le théorème II.1.1, le quotient Y est l'extrémité d'un diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& Y_{0,1} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_{1^-}"] & & Y_{1,2} \cdots Y_{i-1,i} \arrow[dl, "f_{1^+}"'] \arrow[dr, "f_{i^-}"'] & & Y_{i,i+1} \cdots Y_{s-1,s} \arrow[dl, "f_{i^+}"] \arrow[dr, "f_{s^-}"] & \\
Y & & Y_1 & & Y_i & & Y_s
\end{tikzcd}$$

avec $s = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$, on note E_i^- (resp. E_i^+) la sous-variété fermée de $Y_{i-1,i}$ (resp. de $Y_{i,i+1}$) telle que la restriction du morphisme birationnel f_{i^-} à $Y_{i-1,i} \backslash E_i^-$ (resp. f_{i^+} à $Y_{i,i+1} \backslash E_i^+$) est un isomorphisme de $Y_{i-1,i} \backslash E_i^-$ (resp. $Y_{i,i+1} \backslash E_i^+$) sur $Y_i \backslash X_i^T$ (voir théorème II.1.1, assertion *(ii)*).

Le théorème II.3.3 ci-dessous, résulte du théorème II.1.1.

THÉORÈME II.3.3. — *Avec les hypothèses et notations précédentes, on a les assertions suivantes :*

(i) *La variété Y_s est réduite à un point.*

(ii) $Y_{s-1,s} = \mathbb{P}_k^{n-2}$ *et le morphisme* $f_{(s-1)^+} : Y_{s-1,s} \longrightarrow Y_{s-1}$ *est un isomorphisme.*

De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ et tout $\mathcal{J} \in \mathscr{P}_{\left[\frac{n+1}{2}\right]-i}\big(\{1, \ldots, n\}\big)$, chaque composante connexe $E_{\mathcal{J},i}^-$ de E_i^- (resp. $E_{\mathcal{J},i}^+$ de E_i^+) est isomorphe à l'espace projectif sur k de dimension $\left[\frac{n}{2}\right] + i - 2$ (resp. l'espace projectif sur k de dimension $\left[\frac{n+1}{2}\right] - i - 1$) et on a $f_{i^-}(E_{\mathcal{J},i}^-) = f_{i^+}(E_{\mathcal{J},i}^+) = \{x_{\mathcal{J},i}\}$.

(iii) *Pour tout $i \in \{1, \ldots, s-2\}$, les diagrammes*

$$\begin{tikzcd}
Y_{i-1,i} \arrow[rr, dashed, "f_{i^+}^{-1} \circ f_{i^-}"] \arrow[dr, "f_{i^-}"'] & & Y_{i,i+1} \arrow[dl, "f_{i^+}"] \\
& Y_i &
\end{tikzcd}$$

sont des flips.

(iv) *Les fibres de f au-dessus de $X^s(L)/G$ sont isomorphes à $\mathbb{P}_k^1$.*

Remarque II.3.4. — Dans [Po], M. Polito donne une description des quotients $X^{ss}(L)//G$ lorsque l'on fait varier L dans le groupe $\mathrm{Pic}^G(X)$ des classes d'isomorphismes de fibrés G-linéarisés amples sur X.

On pourra aussi consulter [Do-Or], et [B-S], paragraphe 4.

Remarque II.3.5. — Pour $3 \leq n \leq 6$, la structure du quotient Y est connue.

• *Le cas* $n = 3$. Le quotient Y est l'extrémité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & Y_{0,1} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_{1-}"] & & Y_{1,2} \arrow[dl, "f_{1+}"'] \arrow[dr, "f_{2-}"] & \\ Y & & Y_1 & & Y_2 \end{tikzcd}$$

D'après le théorème II.3.3, Y_2 est réduite à un point, $Y_{1,2} = \mathbb{P}^1_k$ et le morphisme f_{1+} est un isomorphisme.

D'après [Ne], chapitre 4, paragraphe 5, le quotient Y est un point. Alors $Y_{0,1} = \mathbb{P}^1_k$ et le morphisme f_{1-} est un isomorphisme.

• *Le cas* $n = 4$. D'après [loc. cit.], $Y = \mathbb{P}^1_k$. Le quotient Y est l'extrémité du diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y_{0,1} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_{1-}"] & & Y_{1,2} \arrow[dl, "f_{1+}"'] \arrow[dr, "f_{2-}"] & \\ Y & & Y_1 & & Y_2 \end{tikzcd}$$

où Y_2 est réduite à un point, $Y_{1,2} = \mathbb{P}^2_k$ et le morphisme f_{1+} est un isomorphisme. L'ensemble X_1^T est constitué de quatre points, chacun de ces quatre points a trois composantes égales à $[0:1]$ et une égale à $[1:0]$. Le lieu exceptionnel de f_{1-} est contenu dans E_1^- avec $E_1^- = \mathbb{P}^1_k \cup \mathbb{P}^1_k \cup \mathbb{P}^1_k \cup \mathbb{P}^1_k$, chaque $\mathbb{P}^1_k$ se contractant sur un des quatre points de X_1^T.

• *Le cas* $n = 5$. D'après [Do-Or], chapitre II, paragraphe 4, Y est isomorphe à une surface de Del Pezzo de degré cinq, c'est-à-dire une surface obtenue en éclatant quatre points dans $\mathbb{P}^2_k$.

Le quotient Y est l'extrémité du diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y_{0,1} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_{1-}"] & & Y_{1,2} \arrow[dl, "f_{1+}"'] \arrow[dr, "f_{2-}"] & & Y_{2,3} \arrow[dl, "f_{2+}"'] \arrow[dr, "f_{3-}"] & \\ Y & & Y_1 & & Y_2 & & Y_3 \end{tikzcd}$$

où la variété Y_3 est réduite à un point, $Y_{2,3} = \mathbb{P}^3_k$ et le morphisme f_{2+} est un isomorphisme. L'ensemble X_2^T est constitué de cinq points, chacun de ces cinq points à quatre composantes égales à $[0,1]$ et une égale à $[1:0]$; tandis que X_1^T contient dix points, chacun de ces dix points à trois composantes égales à $[0,1]$ et deux à $[1:0]$.

On a $E_2^- = \mathbb{P}_k^2 \cup \mathbb{P}_k^2 \cup \mathbb{P}_k^2 \cup \mathbb{P}_k^2 \cup \mathbb{P}_k^2$, chaque $\mathbb{P}_k^2$ se contractant sur un des cinq points de X_2^T. Le lieu exceptionnel de f_{1-} (resp. f_{1+}) est contenu dans E_1^- (resp. dans E_1^+) qui a dix composantes connexes isomorphes à $\mathbb{P}_k^1$. Chacune de ces composantes connexes se contractent sur un des dix points de X_1^T.

• *Le cas* $n = 6$. D'après [Do-Or], chapitre I, exemple 2, le quotient Y est une cubique dans $\mathbb{P}_k^4$ d'équation $X_1X_2X_4 - X_3X_0X_4 + X_3X_1X_2 + X_3X_0X_1 + X_3X_0X_2 - X_3X_0^2 = 0$.

Le quotient Y est l'extrémité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & Y_{0,1} & & & & Y_{1,2} & & & & Y_{2,3} & & \\ & {}^{f}\swarrow & & \searrow^{f_{1-}} & & {}^{f_{1+}}\swarrow & & {}^{f_{2-}}\searrow & & \swarrow^{f_{2+}} & & \searrow^{f_{3-}} & \\ Y & & & & Y_1 & & & & Y_2 & & & & Y_3 \end{array}$$

où Y_3 est réduite à un point, $Y_{2,3} = \mathbb{P}_k^4$ et le morphisme f_{2+} est un isomorphisme. Le lieu exceptionnel de f_{2-} (resp. f_{1-} et f_{1+}) est contenu dans E_2^- (resp. E_1^- et E_1^+) qui a six (resp. quinze) composantes connexes isomorphes à $\mathbb{P}_k^3$ (resp. à $\mathbb{P}_k^2$ et à $\mathbb{P}_k^1$), chacune de ces composantes connexes se contractent sur un des six points de X_2^T (resp. sur un des quinze points de X_1^T).

Chapitre III

NOMBRES DE BETTI DES VARIÉTÉS QUOTIENTS PAR SL(2,ℂ)

1. Introduction et énoncé du théorème III.1.1

Soit V un $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-module de dimension finie et X une sous-variété fermée irréductible et lisse de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$, stable par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (le tout sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes). On pose $L = \mathcal{O}_X(1)$ et $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

L'objet de ce chapitre est d'utiliser la description du quotient $Y = X^{ss}(L)//G$, donnée dans le théorème II.1.1, pour déterminer les nombres de Betti de la cohomologie rationnelle de Y lorsque tout point semi-stable de X est stable.

Rappelons que si $(-a_s, -a_{s-1}, \dots, -a_1, a_0, a_1, \dots, a_s)$ désigne la suite ordonnée des poids de T dans V, on note X_i^T ($1 \leq i \leq s$) l'ensemble des points fixes de T dans X de poids $-a_i$ et $X_i^T = \bigcup_{j=1}^{r_i} X_{ij}$ ($1 \leq i \leq s-1$) sa décomposition en composantes connexes (rappelons que X_s^T est connexe). Posons $W_s^+ = (T_xX)_{>0}$ pour $x \in X_s^T$ et pour tout $i \in \{1, \dots, s-1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, r_i\}$, $W_{ij}^- = (T_xX)_{<0}$ et $W_{ij}^+ = (T_xX)_{>0}$ avec $x \in X_{ij}$. Dans le théorème III.1.1 ci-dessous, les T-modules $\widetilde{W}_s^+$ et $\widetilde{W}_{ij}^+$ ($1 \leq i \leq s-1$ et $1 \leq j \leq r_i$) sont les sous T-modules de W_s^+ et W_{ij}^+, décrits dans le théorème II.1.1.

Pour tout espace Z, on notera $H^*(Z)$ l'algèbre de cohomologie de Z à coefficients rationnels et $P_t(Z) = \sum_{n \geq 0} \dim H^n(Z) t^n$ la série de Poincaré de l'algèbre graduée $H^*(Z)$.

Théorème III.1.1. — *Si tout point semi-stable de X est stable, on a :*

$$P_t(Y) = \frac{1}{(1-t^4)} \left[\left(1 - t^{2\dim \widetilde{W}_s^+}\right) P_t(X_s^T) + \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{r_i} \left(t^{2\dim W_{ij}^-} - t^{2\dim \widetilde{W}_{ij}^+} \right) P_t(X_{ij}) \right].$$

2. Démonstration du théorème III.1.1

Rappelons que d'après le théorème II.1.1, le quotient Y est l'extrémité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} & Y_{0,1} & & Y_{1,2}\cdots Y_{i-1,i} & & Y_{i,i+1}\cdots Y_{s-1,s} & & & \\ {}^{f}\swarrow & & \searrow^{f_{1-}} \quad {}^{f_{1+}}\swarrow & & {}^{f_{i-}}\searrow \quad \swarrow^{f_{i+}} & & \searrow^{f_{s-}} & & . \\ Y & & Y_1 & & Y_i & & & Y_s & \end{array}$$

D'après le théorème II.1.1, assertions *(i)* et *(ii)*, on a $Y_s = X_s^T$ et le morphisme f_{s-} est une fibration localement triviale sur X_s^T de fibre l'espace projectif avec poids $\mathbb{P}_s^+ = \frac{\widetilde{W}_s^+\setminus\{0\}}{T}$. Alors d'après le théorème de Leray-Hirsch ([Spa], chapitre 5, théorème 7.9), on a $P_t(Y_{s-1,s}) = P_t(\mathbb{P}_s^+)P_t(X_s^T)$. Or d'après [Ka], corollaire 1, on a $P_t(\mathbb{P}_s^+) = P_t(\mathbb{P}(\widetilde{W}_s^+))$, d'où $P_t(Y_{s-1,s}) = \left(\frac{1-t^{2(\dim \widetilde{W}_s^+)}}{1-t^2}\right)P_t(X_s^T)$.

Pour déterminer $P_t(Y_{0,1})$, nous allons utiliser l'assertion *(ii)* du théorème II.1.1 et la proposition suivante :

Proposition III.2.1. — *Soient X_-, X_+ et X des variétés projectives et $f_- : X_- \to X$, $f_+ : X_+ \to X$ des morphismes birationnels.*

On suppose qu'il existe des sous-variétés fermées E_-, E_+ et E de X_-, X_+ et X respectivement vérifiant $f_-(E_-) = f_+(E_+) = E$ et telles que la restriction de f_- à $X_-\setminus E_-$ (resp. de f_+ à $X_+\setminus E_+$) est un isomorphisme de $X_-\setminus E_-$ (resp. $X_+\setminus E_+$) sur $X\setminus E$.

Si X_- et X_+ n'ont que des singularités quotients par des groupes finis, on a :

$$P_t(X_-) = P_t(X_+) - P_t(E_+) + P_t(E_-)\,.$$

Démonstration de la proposition III.2.1∗.

Soient $i : E_- \hookrightarrow X_-$ et $j : X_-\setminus E_- \hookrightarrow X_-$ les inclusions de E_- dans X_- et de $X_-\setminus E_-$ dans X_-. Posons $U_- = X_-\setminus E_-$. D'après [Ha1], ex. 1.19, chapitre II, pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X_-, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow j_!(\mathcal{F}_{\restriction U_-}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_*(\mathcal{F}_{\restriction E_-}) \longrightarrow 0\,.$$

Si on prend pour $\mathcal{F}$ le faisceau constant $\mathbb{Q}$, alors on obtient une suite exacte longue de cohomologie :

$$\cdots \longrightarrow H^n(X_-, j_!\mathbb{Q}_{U_-}) \longrightarrow H^n(X_-) \longrightarrow H^n(X_-, i_*\mathbb{Q}_{E_-}) \longrightarrow \cdots$$

D'après [loc. cit.], lemme 2.10, chapitre III, pour tout n, on a

$$H^n(X_-, i_*\mathbb{Q}_{E_-}) = H^n(E_-)\,.$$

∗ Note : Je tiens à remercier Robert Laterveer pour son aide pour la démonstration de cette proposition.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X_- \times_X X_+ \arrow[dl, "g_-"'] \arrow[dr, "g_+"] & \\
X_- \arrow[dr, "f_-"'] & & X_+ \arrow[dl, "f_+"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Posons $\widehat{X} = X_- \times_X X_+$, $\widehat{E} = E_- \times_E E_+$ et $\widehat{U} = \widehat{X} \backslash \widehat{E}$. Notons $\hat{\imath} : \widehat{E} \hookrightarrow \widehat{X}$ et $\hat{\jmath} : \widehat{U} \hookrightarrow \widehat{X}$, les inclusions de $\widehat{E}$ et $\widehat{U}$ dans $\widehat{X}$. Montrons que, pour tout n, $H^n(X_-, j_! \mathbb{Q}_{U_-}) \simeq H^n(\widehat{X}, \hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}})$. La restriction de g_- à $\widehat{U}$ est un isomorphisme de $\widehat{U}$ sur U_-. Alors on a $j_! \mathbb{Q}_{U_-} = g_{-,*}(\hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}})$. D'après [Iv], théorème 6.2, chapitre III, pour tout $x \in X_-$ et pour tout n, on a :

$$\Big(\mathcal{R}^n g_{-,*}(\hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}})\Big)_x \simeq H^n\big(g_-^{-1}(x), \hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}}\big) .$$

Or $H^n\big(g_-^{-1}(x), \hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}}\big) = 0$ pour tout $n > 0$. Donc, d'après [Ha1], ex. 8.1, chapitre III, on a :

$$H^n\big(X_-, g_{-,*}(\hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}})\big) \simeq H^n(\widehat{X}, \hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}}) \text{ pour tout } n ,$$

d'où $H^n(X_-, j_! \mathbb{Q}_{U_-}) \simeq H^n(\widehat{X}, \hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}})$.

Posons $h_- = g_{- \restriction E_-}$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(X_-, j_! \mathbb{Q}_{U_-}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\wr\lambda"] & H^n(X_-) \arrow[r, "\alpha_-"] \arrow[d, "g_-^*"] & H^n(E_-) \arrow[r, "\beta_-"] \arrow[d, "h_-^*"] & H^{n+1}(X_-, j_! \mathbb{Q}_{U_-}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\wr\lambda"] & H^{n+1}(X_-) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n(\widehat{X}, \hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}}) \arrow[r, "\hat{\delta}"] & H^n(\widehat{X}) \arrow[r, "\hat{\alpha}"] & H^n(\widehat{E}) \arrow[r, "\hat{\beta}"] & H^{n+1}(\widehat{X}, \hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}}) \arrow[r, "\hat{\delta}"] & H^{n+1}(\widehat{X}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Alors on obtient la suite longue :

$$\cdots \to H^n(X_-) \xrightarrow{(g_-^*, \alpha_-)} H^n(\widehat{X}) \oplus H^n(E_-) \xrightarrow{\hat{\alpha} - h_-^*} H^n(\hat{E}) \xrightarrow{\delta \lambda^{-1} \hat{\beta}} H^{n+1}(X_-) \longrightarrow \cdots$$

Montrons que cette suite longue est exacte :

Les inclusions $\mathrm{Im}(\hat{\alpha} - h_-^*) \subset \ker(\delta\lambda^{-1}\hat{\beta})$ et $\mathrm{Im}(g_-^*, \alpha_-) \subset \ker(\hat{\alpha} - h_-^*)$ sont immédiates.

Montrons tout d'abord que $\ker(\delta\lambda^{-1}\hat{\beta}) \subset \mathrm{Im}(\hat{\alpha} - h_-^*)$. Soit $\hat{e} \in \ker(\delta\lambda^{-1}\hat{\beta})$. Comme $\ker \delta = \mathrm{Im}\, \beta_-$, il existe $e \in H^n(E_-)$ tel que $\beta_-(e) = \lambda^{-1}\hat{\beta}(\hat{e})$. On a $\hat{\beta}(\hat{e} - h_-^*(e)) = 0$ et donc il existe $\hat{x} \in H^n(\widehat{X})$ tel que $\hat{\alpha}(\hat{x}) = \hat{e} - h_-^*(e)$. Alors $\hat{e} \in \mathrm{Im}(\hat{\alpha} - h_-^*)$. Montrons maintenant que $\ker(\hat{\alpha} - h_-^*) \subset \mathrm{Im}(g_-^*, \alpha_-)$. Soit $(\hat{x}, e) \in \ker(\hat{\alpha} - h_-^*)$. On a $\hat{\alpha}(\hat{x}) =$

$h_-^*(e)$ et $\beta_-(e) = 0$. Comme $\ker \beta_- = \operatorname{Im} \alpha_-$, il existe $x \in H^n(X_-)$ tel que $\alpha_-(x) = e$. On a $\hat{\alpha}(g_-^*(x) - \hat{x}) = 0$ et donc il existe $\hat{y} \in H^n(\widehat{X}, \hat{\jmath}_! \mathbb{Q}_{\widehat{U}})$ tel que $\delta(\hat{y}) = g_-^*(x) - \hat{x}$. Si on pose $x' = \delta\lambda^{-1}(\hat{y})$, on a $(\hat{x}, e) = (\alpha_-(x), g_-^*(x - x'))$.

Si X_- n'a que des singularités quotients par des groupes finis, montrons que, pour tout n, l'application $g_-^* : H^n(X_-) \to H^n(\widehat{X})$ est injective.

Posons $m = \dim X_-$ et notons $[X_-]$ (resp. $[\widehat{X}]$) la classe fondamentale de X_- (resp. $\widehat{X}$). On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^n(X_-) & \xrightarrow{g_-^*} & H^n(\widehat{X}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \cap[X_-]} & & \big\downarrow{\scriptstyle \cap[\widehat{X}]} \\ H_{2m-n}(X_-) & \xleftarrow{g_{-,*}} & H_{2m-n}(\widehat{X}) \end{array}$$

D'après la formule de projection, pour tout $\alpha \in H^n(X_-)$, on a :

$$g_{-,*}\big(g_-^*(\alpha) \cap [\widehat{X}]\big) = \alpha \cap g_{-,*}([\widehat{X}])\ .$$

Comme g_- est un morphisme birationnel, on a $g_{-,*}([\widehat{X}]) = [X_-]$. D'où pour tout $\alpha \in H^n(X_-)$, on a $g_{-,*}(g_-^*(\alpha) \cap [\widehat{X}]) = \alpha \cap [X_-]$ et le diagramme précédent est commutatif.

Si X_- n'a que des singularités quotients par des groupes finis, l'application $H^n(X_-) \xrightarrow{\cap[X_-]} H_{2m-n}(X_-)$ est un isomorphisme (cela résulte du fait que l'homologie rationnelle et l'homologie d'intersection de X_- coïncident et de [Go-Ma]). L'injectivité de l'application $H^n(X_-) \xrightarrow{g_-^*} H^n(\widehat{X})$ en résulte.

Alors pour tout n, on obtient une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow H^n(X_-) \longrightarrow H^n(E_-) \oplus H^n(\widehat{X}) \longrightarrow H^n(\widehat{E}) \longrightarrow 0\ .$$

D'où

$$P_t(\widehat{X}) + P_t(E_-) = P_t(X_-) + P_t(\widehat{E})\ .$$

On obtient de même :

$$P_t(\widehat{X}) + P_t(E_+) = P_t(X_+) + P_t(\widehat{E})\ .$$

D'où l'égalité :

$$P_t(X_-) = P_t(X_+) - P_t(E_+) + P_t(E_-)\ . \qquad \square$$

Fin de la démonstration du théorème III.1.1.

D'après l'assertion *(ii)* du théorème II.1.1, pour tout $i \in \{1,\ldots,s-1\}$, il existe une sous-variété fermée E_i^- (resp. E_i^+) de $Y_{i-1,i}$ (resp. de $Y_{i,i+1}$) telle que la restriction de f_{i^-} à $Y_{i-1,i}\backslash E_i^-$ (resp. de f_{i^+} à $Y_{i,i+1}\backslash E_i^+$) est un isomorphisme de $Y_{i-1,i}\backslash E_i^-$ (resp. $Y_{i,i+1}\backslash E_i^+$) sur $Y_i\backslash X_i^T$.

Notons $E_i^- = \bigcup_{j=1}^{r_i} E_{ij}^-$ et $E_i^+ = \bigcup_{j=1}^{r_i} E_{ij}^+$ la décomposition en composantes connexes de E_i^- et E_i^+. Alors d'après la proposition III.1.1, on a :

$$P_t(Y_{0,1}) = P_t(Y_{s-1,s}) + \sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{r_i}\left(P_t(E_{ij}^-) - P_t(E_{ij}^+)\right).$$

Pour tout $i \in \{1,\ldots,s-1\}$, et tout $j \in \{1,\ldots,r_i\}$, les restrictions de f_{i^-} et f_{i^+} à E_{ij}^- et E_{ij}^+ sont des fibrations localement triviales sur X_i^T de fibres respectivement les espaces projectifs avec poids $\mathbb{P}_{ij}^+ = \frac{\widetilde{W}_{ij}^+\backslash\{0\}}{T}$ et $\mathbb{P}_{ij}^- = \frac{W_{ij}^-\backslash\{0\}}{T}$. Alors, d'après le théorème de Leray-Hirsch, on a :

$$P_t(Y_{0,1}) = P_t(Y_{s-1,s}) + \sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{r_i}\left(P_t(\mathbb{P}_{ij}^+) - P_t(\mathbb{P}_{ij}^-)\right)P_t(X_{ij}).$$

On obtient donc :

$$P_t(Y_{0,1}) = \frac{1}{1-t^2}\left[\left(1 - t^{2(\dim \widetilde{W}_s^+)}\right)P_t(X_s^T) + \sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{r_i}\left(t^{2(\dim W_{ij}^-)} - t^{2(\dim \widetilde{W}_{ij}^+)}\right)P_t(X_{ij})\right].$$

Pour terminer la démonstration du théorème III.1.1, montrons que $P_t(Y_{0,1}) = (1+t^2)P_t(Y)$ lorsque tout point semi-stable de X est stable. D'après l'assertion *(iv)* du théorème II.1.1, les fibres du morphisme $f : Y_{0,1} \to Y$ sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Il existe une suite spectrale de Leray telle que pour tous entiers p et q positifs, $E_2^{pq} = H^p(Y, \mathcal{R}^q f_*\mathbb{Q})$ qui aboutit à $H^*(Y_{0,1})$. D'après [Iv], théorème 6.2, chapitre III, pour tout $y \in Y$, $(\mathcal{R}^* f_*\mathbb{Q})_y = H^*(f^{-1}(y))$. Or pour tout $y \in Y$, $H^*(f^{-1}(y)) = H^*(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ d'où

$$E_2^{pq} = \begin{cases} H^p(Y) & \text{si } q = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Montrons alors que la suite de Leray dégénère. Soit u la classe dans $H^2(Y_{0,1})$ d'un fibré ample sur $Y_{0,1}$. D'après la proposition 2.1 de [De], il suffit de montrer que l'homomorphisme de faisceaux $\mathcal{R}^1 f_*(u) : f_*\mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{R}^2 f_*\mathbb{Q}$ est un isomorphisme. Cela résulte du fait que l'homomorphisme $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ est non nul car L est ample.

Comme la suite de Leray dégénère, on a

$$P_t(Y_{0,1}) = (1+t^2)P_t(Y)\,. \qquad \square$$

3. Exemples

Nous conservons les hypothèses et les notations du paragraphe 1.

Nous allons appliquer le théorème III.1.1, pour déterminer le polynôme de Poincaré du quotient $Y = X^{ss}(L)//G$ dans deux cas particuliers.

Proposition III.3.1.

(i) Si X est l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ d'un G-module V de dimension n et si la multiplicité du poids 0 dans V est nulle, alors on a :

$$P_t(Y) = \frac{1 - t^{n-2} - t^n + t^{2(n-1)}}{(1-t^2)(1-t^4)}\,.$$

(ii) Si $X = (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^n$, munie de l'opération diagonale de G, et si n est un entier impair, alors on a :

$$P_t(Y) = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}-1} C_n^i \frac{t^{2i} - t^{2(n-i-1)}}{1-t^4}\,.$$

Remarque III.3.2. — Nous retrouvons dans la proposition III.3.1 des résultats établis précédemment de manières différentes par F. Kirwan ([Kir], 16.1 et 16.2) (voir aussi [MFK], 8.11), puis par M. Brion ([Br2], 3.1 et 3.2) et M. Thaddeus ([Tha], proposition 6.1).

Remarque III.3.3. — Si, dans l'assertion *(i)* de la proposition III.3.1, on prend pour V, le G-module V_d des formes binaires de degré d où d est un entier impair, alors on a :

$$P_t(Y) = \frac{1 - t^{d-1} - t^{d+1} + t^{2d}}{(1-t^2)(1-t^4)}\,.$$

En particulier, pour $d = 3$, on a $P_t(Y) = 1$ et pour $d = 5$, on a $P_t(Y) = 1+t^2+t^4$. Ce qui est en accord avec le fait que si $d = 3$, Y est réduite à un point et si $d = 5$, $Y = \mathbb{P}(1,2,3)$ (voir remarque II.3.2). Pour $d = 7$, on trouve $P_t(Y) = 1 + t^2 + 2t^4 + t^6 + t^8$.

Dans l'assertion *(ii)* de la proposition III.3.1, prenons $n = 3$, alors on a $P_t(Y) = 1$, ce qui est en accord avec le fait que si $n = 3$, la variété Y est réduite à un point (voir remarque II.3.5). Pour $n = 5$, on trouve $P_t(Y) = 1 + 5t^2 + t^4$.

Démonstration de la proposition III.3.1.

(i) Soit $V = V_{n_1}^{m_1} \oplus \cdots \oplus V_{n_d}^{m_d}$ la décomposition de V en G-modules irréductibles, où pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $V_{n_i} = k[X,Y]_{n_i}$ et l'entier strictement positif m_i désigne la multiplicité dans V de la représentation V_{n_i}. Si la multiplicité du poids 0 dans V est nulle, alors tous les entiers n_i sont impairs. On note $\mathcal{P} = (-a_s, -a_{s-1}, \ldots, -a_1, a_1, \ldots, a_s)$ la suite des poids de T dans V. On a $s = \frac{n_d+1}{2}$ et $a_i = 2i-1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$. Si on pose pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, $\mathcal{J}_i = \left\{1 \leq j \leq s \mid n_j \geq a_i\right\}$ alors la multiplicité dans V des poids a_i et $-a_i$ est égal à $\sum\limits_{j \in \mathcal{J}_i} m_j$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, l'ensemble X_i^T des points fixes de T dans X de poids $-a_i$ est égal à l'espace projectif complexe de dimension $\sum\limits_{j \in \mathcal{J}_i} m_j - 1$. Rappelons que pour tout $a \in \mathcal{P}$ et tout $x \in X$, on note $\tilde{x}^{(a)}$ la composante de poids a d'un représentant $\tilde{x}$ de x dans V dans la décomposition en sous-espaces de V pour T. Si on désigne par λ_0 le sous-groupe à un paramètre de T défini par : $\begin{array}{rcl} \lambda_0 : k^* & \longrightarrow & T \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$ alors on a :

$$X_-(\lambda_0, X_i^T) = \left\{x \in X \mid \tilde{x}^{(-a_i)} \neq 0 \text{ et pour tout } a \in \mathcal{P} \text{ avec } a > -a_i,\ \tilde{x}^{(a)} = 0\right\}$$

et

$$X_+(\lambda_0, X_i^T) = \left\{x \in X \mid \tilde{x}^{(-a_i)} \neq 0 \text{ et pour tout } a \in \mathcal{P} \text{ avec } a < -a_i,\ \tilde{x}^{(a)} = 0\right\}.$$

Si pour tout $x \in X_s^T$, on pose $W_s^+ = (T_xX)_{>0}$, puis pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$, $W_i^- = (T_xX)_{<0}$ et $W_i^+ = (T_xX)_{>0}$ avec $x \in X_i^T$, alors on a :

$$\dim W_i^+ = \dim X_+(\lambda_0, X_i^T) - \dim X_i^T \ \ (1 \leq i \leq s)$$

et

$$\dim W_i^- = \dim X_-(\lambda_0, X_i^T) - \dim X_i^T \ \ (1 \leq i \leq s-1).$$

D'où $\dim W_s^+ = \dim V - m_d - 2$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$,

$$\dim W_i^- = \sum_{j \in \mathcal{J}_i} m_j \left(\frac{n_j - a_i}{2}\right) \text{ et } \dim W_i^+ = \sum_{j \in \mathcal{J}_i} m_j \left(\frac{n_j + a_i}{2}\right) + \sum_{j \notin \mathcal{J}_i} (n_j + 1) m_j.$$

Si pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, l'entier n_j est impair, tout point semi-stable de X est stable et alors, d'après le théorème III.1.1, on a :

$$P_t(Y) = \frac{1}{(1-t^4)(1-t^2)}\Bigg[\big(1-t^{2(n-m_d-1)}\big)\big(1-t^{2m_d}\big)$$

$$+\sum_{i=1}^{s-1}\Big(t^{2\sum_{j\in\mathcal{J}_i} m_j\left(\frac{n_j-a_i}{2}\right)} - t^{2\left(\sum_{j\in\mathcal{J}_i} m_j\left(\frac{n_j+a_i}{2}\right)+\sum_{j\notin\mathcal{J}_i}(n_j+1)m_j-1\right)}\Big)\Big(1-t^{2\sum_{j\in\mathcal{J}_i} m_j}\Big)\Bigg].$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, s-2\}$, on a :

$$t^{2\left(\sum_{j\in\mathcal{J}_i} m_j\left(\frac{n_j+a_i}{2}\right)+\sum_{j\notin\mathcal{J}_i} m_j(n_j+1)+\sum_{j\in\mathcal{J}_i} m_j-1\right)} - t^{2\left(\sum_{j\in\mathcal{J}_{i+1}} m_j\left(\frac{n_j-a_{i+1}}{2}\right)+\sum_{j\notin\mathcal{J}_{i+1}} m_j(n_j+1)-1\right)} = 0$$

car

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} m_j\Big(\frac{n_j+a_i}{2}\Big) + \sum_{j\notin\mathcal{J}_i}(n_j+1)m_j + \sum_{j\in\mathcal{J}_i} m_j \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}_i} m_j\Big(\frac{n_j+a_i+2}{2}\Big) + \sum_{j\notin\mathcal{J}_i}(n_j+1)m_j \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}_{i+1}}\Big(\frac{n_j+a_{i+1}}{2}\Big)m_j + \sum_{j\notin\mathcal{J}_{i+1}}(n_j+1)m_j\,.\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, s-2\}$, on a :

$$t^{2\left(\sum_{j\in\mathcal{J}_i} m_j\left(\frac{n_j-a_i}{2}\right)\right)} - t^{2\left(\sum_{j\in\mathcal{J}_{i+1}} m_j\left(\frac{n_j-a_{i+1}}{2}\right)+\sum_{j\in\mathcal{J}_{i+1}} m_j\right)} = 0$$

car

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} m_j\Big(\frac{n_j-a_i}{2}\Big) &= \sum_{j\in\mathcal{J}_{i+1}} m_j\Big(\frac{n_j-a_i}{2}\Big) = \sum_{j\in\mathcal{J}_{i+1}} m_j\Big(\frac{n_j-a_{i+1}+2}{2}\Big) \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}_{i+1}} m_j\Big(\frac{n_j-a_{i+1}}{2}\Big) + \sum_{j\in\mathcal{J}_{i+1}} m_j\,.\end{aligned}$$

Comme $a_{s-1} = n_d - 2 = n_{d-1}$, on a :

$$t^{2\sum_{j\in\mathcal{J}_{s-1}} m_j\left(\frac{n_j-a_{s-1}}{2}\right)} = t^{2m_d}$$

et

$$t^{2\left(\sum_{j\in\mathcal{J}_{s-1}} m_j\left(\frac{n_j+a_{s-1}}{2}\right)+\sum_{j\notin\mathcal{J}_{s-1}}(n_j+1)m_j+\sum_{j\in\mathcal{J}_{s-1}} m_j-1\right)} = t^{2(n-m_d-1)}\,.$$

Comme $a_1 = 1$, on a $2\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}_1} m_j\big(\frac{n_j+a_1}{2}\big) - 1\Big) = n-2$ et $2\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}_1} m_j\big(\frac{n_j-a_1}{2}\big) + \sum_{j\in\mathcal{J}_1} m_j\Big) = n$. D'où

$$P_t(Y) = \frac{1-t^{n-2}-t^n+t^{2(n-1)}}{(1-t^2)(1-t^4)}\,.$$

(ii) Soit n un entier impair.

Par le plongement de Segre, on plonge la variété $X = (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^n$ dans $\mathbb{P}(V)$, où V est la puissance tensorielle $n^{\text{ème}}$ de k^2. Si on désigne par $(-a_s, \dots, -a_1, a_1, \dots, a_s)$ la suite des poids de T dans le G-module V, alors on a $s = \frac{n+1}{2}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $a_i = 2i-1$. D'après l'exemple II.3.b, pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, l'ensemble X_i^T est fini de cardinal $C_n^{\frac{n+1}{2}-i}$ et si $i \neq s$, pour tout $j \in \left\{1, \dots, C_n^{\frac{n+1}{2}-i}\right\}$, $\dim W_{ij}^- = \frac{n+1}{2} - i$ et $\dim W_{ij}^+ = \frac{n-1}{2} + i$.

Comme n est impair, tout point semi-stable de X est stable. Alors, d'après le théorème III.1.1, on a :

$$P_t(Y) = \frac{1}{1-t^4}\left[1 - t^{2(n-1)} + \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-1} C_n^{\frac{n+1}{2}-i}\left(t^{2\left(\frac{n+1}{2}-i\right)} - t^{2\left(\frac{n-1}{2}+i-1\right)}\right)\right].$$

D'où

$$\begin{aligned} P_t(Y) &= \frac{1}{1-t^4}\left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^i\left(t^{2i} - t^{2(n-i-1)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-t^4}\left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}-1} C_n^i\left(t^{2i} - t^{2(n-i-1)}\right)\right). \end{aligned}$$

Bibliographie

[BB1] BIALYNICKI-BIRULA A. — *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. Math. **98** (1973), 480–497.

[BB2] BIALYNICKI-BIRULA A. — *On induced actions of algebraic groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43** (2) (1993), 365–368.

[B-S] BIALYNICKI-BIRULA A. et SOMMESE A.J. — *Quotients by* $\mathbb{C}^*$ *and* SL*(2,*$\mathbb{C}$*)-actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1983), 773–800.

[Br1] BRION M. — *Sur les modules de covariants*, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 4^{e} série **36** (1993), 1–21.

[Br2] BRION M. — *Cohomologie équivariante des points semi-stables*, J. Reine Angew. Math. **421** (1991), 125–140.

[Br-Pr] BRION M. et PROCESI C. — *Action d'un tore dans une variété projective*, dans Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras and invariant theory, ed. A. Connes, M. Duflo, A. Joseph and R. Rentschler, Birkhäuser (1990), 509–539.

[De] DELIGNE P. — *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Pub. Math. I.H.E.S. **35** (1968), 107–126.

[Di] DIXMIER J. — *Quelques aspects de la théorie des invariants*, Gazette des Mathématiciens **43** (1990), 39–64.

[Do] DOLGACHEV I. — *Weighted projective varieties*, dans "Group actions and vector fields", Lecture notes in Math. Springer Verlag **956** (1982), 34–71.

[Do-Hu] DOLGACHEV I. and HU Y. — *Variation of geometric invariant theory quotients*,(preprint 1996).

[Do-Or] DOLGACHEV I and ORTLAND D. — *Points sets in projective space and theta functions*, Astérisque **165** (1988), SMF.

[El] ELLIOTT E.B. — *An introduction to the algebra of quintics*, Chelsea Publishing Company Bronx, New-York.

[Fu] FULTON W. — *Intersection theory*, Ergebnisse der Math., Springer-Verlag, **2**, 1984.

[Go-Ma] GORESKY M. and MAC PHERSON R. — *Intersection homology theory*, Topology **19** (1983), 135–162.

[Ha1] HARTSHORNE R. — *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[Ha2] HARTSHORNE R. — *Stable reflexive sheaves*, Math. Ann **254** (1980), 121–176.

[Hu] HU Y. — *The geometry and topology of quotient varieties of torus actions*, Duke Math. Journal **68** (1992), 151–184.

[Iv] IVERSEN B. — *Cohomology of Sheaves*, Springer-Verlag, 1986.

[Ka] KAWASAKI T. — *Cohomology of twisted projective spaces and lens complexes*, Math. Ann **206** (1973), 243–248.

[Kir] KIRWAN F.C. — *Cohomology of quotients in algebraic and symplectic geometry*, Princeton, 1984.

[KKV] KNOP F., KRAFT H. and VUST T. — *The Picard group of a G-variety*, dans Algebraic transformations groups and invariant theory. DMV Seminar, Birkhäuser (1990), 77–87.

[KKLV] KNOP F., KRAFT H., LUNA D. and VUST T. — *Local properties of algebraic group actions*, dans Algebraic transformations groups and invariant theory. DMV Seminar, Birkhaüser (1990), 64–75.

[KMN] KAWAMATA Y., MATSUDA K. and MATSUKI K. — *Introduction to the minimal model problem*, Algebraic geometry, Proceedings, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure. Math. 10, Kinokuniya, Tokyo (1987), 287–360.

[Kn1] KNOP F. — *Über die Glattheit von Quotientenabbildengen*, Manuscripta Math. **56** (1986), 419–427.

[Kn2] KNOP F. — *Der Kanonische Modul eines Invariantenringes*, Journal of Alg. **127** (1989), 40–54.

[Kr] KRAFT H. — *Geometrische Methoden in der Invariantsen theorie*, Aspekte der Mathematik, Vieweg, 1985.

[Lu] LUNA D. — *Slices étales*, Mémoires de la Société mathématique de France **33** (1973), 81–105.

[Lu-Pa] LUNA D. et PAUER F. — *Rétractions équivariantes algébriques*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 249, Grenoble, 1993.

[MFK] MUMFORD D., FOGARTY J. et KIRWAN F. — *Geometric invariant theory*, Third enlarged ed., Springer Verlag, 1994.

[Ne] NEWSTEAD P.E. — *Introduction to moduli problems*, Tata Inst. Bombay, 1978.

[Po] POLITO M. — SL*(2,* $\mathbb{C}$*)-quotients de* $(\mathbb{P}^1)^n$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 1577–1582.

[Re] REID M. — *What is a flip*, Lecture notes in Utah, 1992.

[Sp] SPRINGER T.A. — *Invariant theory*, Lecture notes in Math. Springer, 585, 1977.

[Spa] SPANIER E.H. — *Algebraic topology*, Springer-Verlag, 1966.

[Tha] THADDEUS M. — *Geometric invariant theory and flips*, American Mathematical Society **3** , n° 3 (1996), 691–723.

– ◊ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(29 octobre 1996)