Je remercie Yves Carrière, Gérard Besson et Jean Brossard pour leur accueil lors de mon arrivée à l'Université Joseph Fourier en 1988, sans leurs encouragements, je ne me serais peut-être pas engagé dans l'entreprise qui s'achève.

Je remercie Roland Gillard pour avoir dirigé cette thèse en me laissant une très grande autonomie ainsi que pour son soutien dans les moments difficiles.

Je remercie Pierrette Cassou-Nogués de s'être intéressée à ce travail et d'avoir bien voulu rapporter sur cette thèse.

Je remercie David Solomon pour le soin qu'il a apporté à la relecture de ce travail ; ces remarques et suggestions ont permis d'en améliorer nettement la version finale.

Je remercie Gilles Robert et Alexis Panchishkin d'avoir accepter de participer à ce jury.

Je remercie Myriam Charles et Arlette Guttin-Lombard pour leur efficacité, leur disponibilité et leur gentillesse.

Enfin, je remercie mon épouse Bernadette dont le soutien, le réconfort et parfois le sacrifice ont largement contribué à la réalisation de cette thèse.

SOMMAIRE

Introduction

Soit k un corps de nombres, totalement réel, de degré $d \geq 2$, d'anneau des entiers O_k. Soit K une extension abélienne de degré n de k, on désigne par $\mathcal{C}$ la partie finie de son conducteur au sens de Lang (cf. [L]). On note :

- $k_{\mathcal{C}}$ l'ensemble des éléments α de k qui sont totalement positifs et congrus à 1 modulo $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ le groupe des idéaux fractionnaires de k qui sont premiers avec $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ le sous-groupe de $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ formé des idéaux principaux de la forme αO_k avec $\alpha \in k_{\mathcal{C}}$.

D'après la théorie du corps de classes la restriction ω de l'application d'Artin à $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ est surjective et son noyau est $\mathcal{P}_{\mathcal{C}} N_k^K(\mathcal{C})$ où $N_k^K(\mathcal{C})$ désigne le sous-groupe des normes des idéaux fractionnaires de K. ($N_k^K(\mathcal{C}) = \{N_k^K(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est un idéal fractionnaire de K premier avec $\mathcal{C} O_K\}$.) On a donc : $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}} N_k^K(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Gal}(K/k)$. Soit alors $\tilde{\chi}$ un caractère de $\mathrm{Gal}(K/k) = G$. $\tilde{\chi}$ induit un caractère $\chi = \tilde{\chi} \circ \omega$ sur $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}_{\mathcal{C}} \arrow[r, "s"] \arrow[rrd, dashed, "\chi"'] & \mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}} N_k^K(\mathcal{C}) \arrow[r, "\tilde{\omega}", "\sim"'] & \mathrm{Gal}(K/k) \arrow[d, "\tilde{\chi}"] \\
 & & \mathbb{C}^*
\end{tikzcd}$$

(où s désigne la surjection canonique et $\tilde{\omega} \circ s = \omega$) qui permet de définir la fonction :

$$L_{\mathcal{C}}(s,\chi) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \text{ idéal entier de } k \\ \mathfrak{a} \text{ premier à } \mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}\, s > 1$$

(où l'on a posé : $N(\mathfrak{a}) = N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$).

Notons que l'on peut prolonger le caractère χ à l'ensemble des idéaux non nuls de k en posant pour tout idéal P premier de O_k :

- $\chi(P) = 0$ si le groupe d'inertie I_P de P n'est pas inclus dans le noyau $\mathrm{Ker}\, \widetilde{\chi}$ de $\widetilde{\chi}$.
- $\chi(P) = \widetilde{\chi}(\sigma)$ si $I_P \subset \mathrm{Ker}\, \widetilde{\chi}$ où σ est un élément de $\mathrm{Gal}(K/k)$ dont la restriction au corps $K(\widetilde{\chi}) = \{x \in K$ tels que $\tau(x) = x,\ \forall \tau \in \mathrm{Ker}\, \widetilde{\chi}\}$ est l'automorphisme de Frobenius : $(P, K(\widetilde{\chi})/k)$ ce qui permet de poser :

$$L(s,\chi) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \text{ idéal entier} \\ \text{non nul de } k}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}\, s > 1\,.$$

On a alors :

$$L(s,\chi) = L_{\mathcal{C}}(s,\chi) \times \prod_{\substack{P \text{ idéal entier} \\ \text{premier de } k \\ \text{tel que } P|\mathcal{C}}} \left[\frac{1}{1 - \frac{\chi(P)}{N(P)^s}}\right] \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} s > 1$$

et on sait que $L(s,\chi)$ se prolonge en une fonction entière si χ *est distinct du caractère trivial.*

En particulier :

$$L(1,\chi) = L_{\mathcal{C}}(1,\chi) \times \prod_{\substack{P \text{ idéal entier} \\ \text{premier de } k \\ \text{tel que } P|\mathcal{C}}} \left[\frac{1}{1 - \frac{\chi(P)}{N(P)}}\right].$$

Le problème de l'évaluation de $L(1,\chi)$ fut étudié initialement par Kronecker qui détermina une expression du second terme du développement de Laurent au voisinage de $s = 1$ de la fonction ζ_k d'un corps de nombres k quadratique *imaginaire* expression dans laquelle la fonction $\log|\eta(z)|$ avec $\eta(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - e^{2\pi i n z})$ ($z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$) joue un rôle fondamental. De la formule obtenue, appelée formule limite de Kronecker, résulte aisément l'expression de $L(1,\chi)$ (cf. [Si] par exemple).

Le cas où k est un corps quadratique réel fut étudié en 1917 (près d'un demi-siècle plus tard) par Hecke, l'existence d'unités de k d'ordre infini rendant le problème plus délicat, la fonction $\log|\eta(z)|$ intervenant toujours mais de façon moins satisfaisante. Ce cas, fut repris par Meyer en 1957 dans un travail dont certaines remarques ont été interprétées en termes de fractions continues par Zagier en 1975 (cf. [Z]). Dans son travail (limité au cas $\mathcal{C} = O_k$) , la formule limite de Kronecker obtenue par Zagier s'exprime à l'aide de valeurs particulières de la fonction :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \log(1-e^{-xt})\, dt \quad (x > 0), \quad \text{(cf. [Z], p. 164)},$$

fonction également utilisée par Herglotz (cf. [H]) dans une étude similaire effectuée la même année.

En 1980, Novikov mena une étude analogue (cf. [N]) en introduisant la fonction :

$$\rho(x,\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{\log(1 - t^x e^{2\pi i\alpha})}{e^{-2\pi i\beta} - t}\, dt, \quad (x > 0, \beta \notin \mathbb{Z})$$

et obtint une formule limite de Kronecker s'exprimant à l'aide de certaines valeurs relativement compliquées, prises par cette fonction ρ, valeurs qui rendent l'expression obtenue difficile à expliciter (cf. [N], théorème 2, p. 167).

Entre temps, Shintani en 1977 avait obtenu une formule limite de Kronecker où un rôle fondamental était joué par le logarithme de la fonction gamma double de Barnes (cf. [S1], p. 184, théorème 1). Ce dernier résultat fut retrouvé par Egami (cf. [E]) en 1986 par une méthode qui présente en outre l'intérêt d'établir un lien avec un des théorèmes obtenus par Zagier en 1976 (cf. [Z], p. 167).

L'idée de départ de ce travail était de voir si, dans la situation décrite ci-dessus et en supposant de plus K totalement réel, on ne pouvait pas obtenir une expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ en fonction d'un χ régulateur (la notion de χ régulateur ayant été introduite par Stark dans ses conjectures sur les valeurs en $s = 0$ des fonctions L (cf. [T] par exemple)) en utilisant une variante explicite de la décomposition de Shintani de $(\mathbb{R}^{+*})^d$ en cônes simpliciaux (variante décrite par Colmez dans [C]) et en mettant à profit l'action du groupe de Galois de K sur k sur les unités de K. Cette idée s'avéra rapidement trop optimiste mais conduisit néanmoins aux résultats qui sont exposés dans ce travail, résultats que l'on peut rapprocher dans le cas où k est un corps quadratique *totalement réel* de ceux de Zagier et Novikov.

De façon plus précise :

Dans le chapitre I, on reprend, en l'adaptant au cas de $L_{\mathcal{C}}(s,\chi)$ avec $\chi \neq 1$ (la relation $\sum\limits_{\sigma\in G} \tilde{\chi}(\sigma) = 0$ jouant un rôle essentiel), un travail (cf. [C]) où Colmez exprime la fonction zêta d'un corps de nombres comme la transformée de Mellin en d variables d'une fonction rationnelle en e^z, à l'aide d'une variante effective de la méthode de Shintani. Plus précisément, de l'expression obtenue par Colmez dans [C] (corollaire du lemme 3.3, p. 379) on déduit un prolongement analytique de $L_{\mathcal{C}}(s,\chi)$ à $\{s \in \mathbb{C}/ \operatorname{Re} s > 1 - \frac{1}{d}\}$ avec comme seul pôle éventuel $s = 1$, pôle éventuel qui s'élimine dans notre situation grâce à la relation $\sum\limits_{\sigma\in G} \widetilde{\chi}(\sigma) = 0$. Alors que Colmez se concentre sur le calcul du résidu, il s'agit ici de calculer la valeur en 1 du prolongement de $L_{\mathcal{C}}(s,\chi)$, valeur que l'on obtient dans le corollaire I.3.4.

Dans le chapitre II, on essaie de simplifier l'expression obtenue dans le corollaire I.3.4 en reprenant à l'envers les calculs qui avaient permis d'obtenir le lemme 3.3 de Colmez. On obtient ainsi (théorème II.2.1) une expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ faisant intervenir une somme d'intégrales sur des cônes Γ_σ (σ appartenant au groupe symétrique S_{d-1} d'ordre $d-1$). Cette expression, si elle a le mérite d'être valable pour d quelconque, semble difficilement simplifiable pour $d \geq 3$, les intégrales sur Γ_σ posant de réels problèmes de calcul et les ensembles $\widehat{D}_{\sigma,\mathfrak{a}_q}$, sur lesquels les sommes s'effectuent, étant difficiles à décrire. Le cas $d = 2$ est plus abordable : le fait que $S_1 = \{\mathrm{Id}\}$ permet en effet de simplifier notablement l'expression obtenue dans le théorème II.2.1. On va donc consacrer la fin de travail à cette situation.

On obtient ainsi dans le chapitre III, en utilisant en outre un système de représentants particuliers de $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$, une expression plus explicite de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$: c'est le théorème III.2.1. Ce théorème est le point de départ des chapitres IV et V et permet ainsi de faire un lien entre ce travail et ceux de Novikov et Zagier, mais aussi avec les résultats de Egami (donc de Shintani) : l'expression intervenant pouvant également être interprétée à l'aide des fonctions $\zeta(s,(a_1,a_2),(x_1,x_2))$ de Egami (cf. [E])..

Dans le chapitre IV, on donne une expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ en fonction des valeurs en a et $\frac{1}{a}$ ($(\frac{1}{a},a)$ étant le plongement dans $\mathbb{R}^2$ d'une unité fixée ε_1 distincte de 1 de O_k^*) de fonctions de la forme :

$$H_s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1-\zeta^s e^{-xt})}{1-\zeta^{us}e^{-t}}dt$$

(avec ζ racine v-ième de 1, $s \in \{1,\ldots,v-1\}$ et $u \in \mathbb{N}^*$, pgcd$(u,v) = 1$) fonctions qui sont à rapprocher des fonctions ρ utilisées par Novikov dans [N]. C'est le théorème IV.2.3. L'expression donnée dans ce théorème me semble plus simple que celle obtenue par Novikov. C'est la formule essentielle de ce travail.

Enfin dans le chapitre V, indépendant du chapitre IV, on reprend la formule établie dans le théorème III.2.1 pour donner une ultime expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ présentant certaines analogies avec le travail réalisé par Zagier car elle utilise une fonction G_q qui se rapproche de la fonction F introduite par Zagier dans [Z].

L'intérêt de revenir au point de vue antérieur de Zagier peut s'exprimer ainsi : on peut espérer qu'un passage à la limite sur les puissances de l'unité fondamentale permette d'annuler une partie aussi compliquée qu'inutile pour obtenir une formule vraiment simple et utile. Mais ceci n'a pu être résolu dans ce travail.

L'espoir serait aussi d'obtenir des formules pour les fonctions L p-adiques, formules qu'on obtiendrait en remplaçant des fonctions classiques (logarithme, fonction gamma,...) par des analogues p-adiques prolongeant ce que l'on sait pour les valeurs aux entiers négatifs (cf. [C-S], [CN], [K] par exemple).

Chapitre I

DÉCOMPOSITION DE SHINTANI PREMIÈRE EXPRESSION DE $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$

1. Décomposition de Shintani - Variante effective de Colmez

La clef de voûte de cette étude est la décomposition explicite de $(\mathbb{R}^{+*})^d$ en cônes simpliciaux modulo l'action des unités de $\mathcal{O}_k$, décrite par Colmez dans [C]. Rappelons en brièvement la construction.

• Soient $\mathcal{O}_k^*$ le groupe multiplicatif des unités de $\mathcal{O}_k$ ($\mathcal{O}_k^* \simeq \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$) et $U_{\mathcal{C}}$ le sous-groupe de $\mathcal{O}_k^*$ formé des unités de k totalement positives et congrues à 1 modulo $\mathcal{C}$.

• Soit $\tau_1, \dots, \tau_d$ les d plongements de k dans $\mathbb{R}$.

L'application $\begin{array}{l} \tau : k \to \mathbb{R}^d \\ \quad x \mapsto (\tau_1(x), \dots, \tau_d(x)) \end{array}$ permet d'identifier k avec une $\mathbb{Q}$ sous algèbre de $\mathbb{R}^d$.

Proposition I.1.1. (cf. lemme 2.1 de [C]). — *$U_{\mathcal{C}}$ étant un sous-groupe discret et libre de rang $(d-1)$ de $\mathcal{O}_k^*/\{\pm 1\} = U$ (d'après un théorème de Dirichlet), il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1} \in U_{\mathcal{C}}$ vérifiant $\forall m \in \mathbb{N}^*$:*

i) le groupe multiplicatif V_m engendré par $\varepsilon_1^m, \dots, \varepsilon_{d-1}^m$ est discret et libre de rang $(d-1)$,

ii) si pour $\sigma \in S_{d-1}$ (groupe symétrique d'ordre $d-1$) on pose :

$$f_{1,\sigma} = 1 \quad \text{et} \quad f_{i,\sigma} = \prod_{j=1}^{i-1} \varepsilon_{\sigma(j)} \quad \forall i = 2, \dots, d.$$

$\Delta_{\sigma,m} = \det(f_{1,\sigma}^m, \dots, f_{d,\sigma}^m)$ a le même signe que la signature $\varepsilon(\sigma)$ de la permutation σ, $\forall \sigma \in S_{d-1}$.

Proposition I.1.2. (cf. lemme 2.2 de [C]) : décomposition de Shintani. — *Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1} \in U_{\mathcal{C}}$ vérifiant les hypothèses de la proposition I.1.1. Notons $V = V_1$ le sous-groupe engendré par $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1}$. Si J est une partie non vide de $\{1, \dots, d\}$ on pose $\forall \sigma \in S_{d-1}$:*

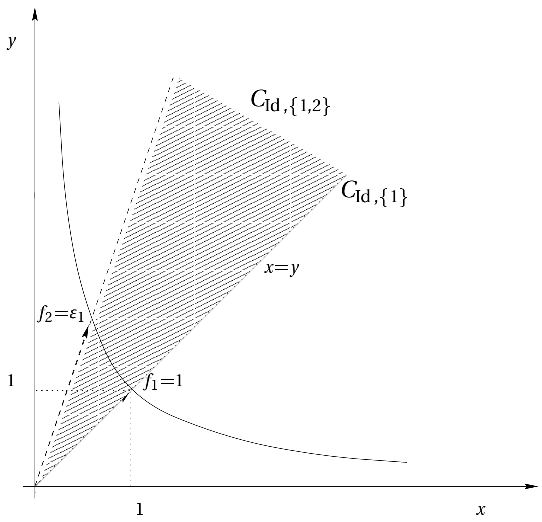
$$C_{\sigma,J} = \Big\{ \sum_{j \in J} \lambda_j f_{j,\sigma} \text{ avec } \lambda_j \in \mathbb{R}^{+*} \forall j \in J \Big\}.$$

Alors :

$$(\mathbb{R}^{+*})^d / V = \coprod_{(\sigma,J) \in S} C_{\sigma,J}$$

où S désigne un système de représentants fixé de l'ensemble des couples (σ, J) muni de la relation d'équivalence : $(\sigma, J) \sim (\sigma', J')$ si et seulement si $\exists v \in V$ tel que $C_{\sigma,J} = vC_{\sigma',J'}$.

Illustration dans le cas où $d = 2$.



$C_{\mathrm{Id},\{1\}} \coprod C_{\mathrm{Id},\{1,2\}} = (\mathbb{R}^{+*})^2/V$ avec $V = \{\varepsilon_1^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

La démonstration générale de Colmez de ce résultat est relativement délicate. Il semble donc intéressant d'en donner ici une preuve très élémentaire dans le cas $d = 2$ (cas sur lequel on va d'ailleurs se concentrer à partir du chapitre 3).

Preuve élémentaire. — Posons $\varepsilon_1 = \binom{\frac{1}{a}}{a}$ avec $a > 1$ car $\Delta = \det(1, \varepsilon_1) = a - \frac{1}{a} > 0$. Soit $\binom{x}{y} \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ cherchons $v = \varepsilon_1^r \in V$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in vC_{\mathrm{Id},\{1,2\}} = \{\lambda\varepsilon_1^r + \mu\varepsilon_1^{r+1}, \lambda > 0, \mu > 0\}$$

or :

$$\begin{cases} x = \lambda a^{-r} + \mu a^{-r-1} \\ y = \lambda a^r + \mu a^{r+1} \end{cases} \text{si et seulement si} \begin{cases} \lambda = \dfrac{a^{r+1}x - a^{-r-1}y}{\Delta} \\ \mu = \dfrac{a^{-r}y - a^r x}{\Delta}. \end{cases}$$

De plus :

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \text{et} \\ \mu \geq 0 \end{cases} \text{si et seulement si} \begin{cases} \dfrac{x}{y} \geq a^{-2r-2} \\ \text{et} \\ \dfrac{y}{x} \geq a^{2r} \end{cases} \text{si et seulement si} \begin{cases} \dfrac{\log \frac{y}{x}}{2\log a} \leq r+1 \\ \text{et} \\ r \leq \dfrac{\log(\frac{y}{x})}{2\log a}. \end{cases} \qquad (1)$$

On est donc amené à envisager 2 cas :

α) Si $\frac{\log(\frac{y}{x})}{2\log a} \notin \mathbb{Z}$, $\exists! r_0 \in \mathbb{Z}$ $\Big(r_0 = E\Big(\frac{\log(\frac{y}{x})}{2\log a}\Big)$ en désignant par $E(x)$ la partie entière de $x\Big)$ vérifiant (1), on a de plus : $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \varepsilon_1^{r_0} C_{\mathrm{Id},\{1,2\}} .$$

β) Si $\frac{\log(\frac{y}{x})}{2\log a} = N \in \mathbb{Z}$ alors $\frac{y}{x} = a^{2N}$ par suite $\binom{x}{y} = \binom{x}{xa^{2N}} = xa^N\varepsilon_1^N$. Donc $\binom{x}{y} \in \varepsilon_1^N C_{\mathrm{Id},\{1\}}$.

L'unicité est claire. ■

2. Application de la décomposition en cônes simpliciaux de $(\mathbb{R}^{+*})^d$ à la transformation de $L_{\mathcal{C}}(s,\chi)$

Fixons dans toute la suite un système de représentants *entiers* $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\ldots,\mathfrak{a}_{h_{\mathcal{C}}}$ de $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ et posons $h_{\mathcal{C}} = \mathrm{Card}\,\mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$. Alors, comme dans [C] p. 372, on a :

$$L_{\mathcal{C}}(s,\chi) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s} \sum_{\substack{\alpha\in k^*/U_{\mathcal{C}} \\ \alpha \text{ totalement positif} \\ \alpha\in 1+\mathfrak{a}_q^{-1}\mathcal{C}}} \frac{1}{N(\alpha)^s}$$

$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s} \frac{1}{[U_{\mathcal{C}} : V]} \sum_{\substack{\alpha\in k^*/V \\ \alpha \text{ totalement positif} \\ \alpha\in 1+\mathcal{C}\mathfrak{a}_q^{-1}}} \frac{1}{N(\alpha)^s}$$

pour Re $s > 1$.

Puis en utilisant la relation :

$$\frac{1}{N(\alpha)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)^d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} e^{-(\alpha_1 z_1+\cdots+\alpha_d z_d)} z_1^{s-1}\cdots z_d^{s-1} dz_1\cdots dz_d .$$

On obtient (cf. [C] p. 375–376), si Re $s > 1$:

$$L_{\mathcal{C}}(s,\chi) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s} \frac{1}{[U_{\mathcal{C}} : V]} \frac{1}{\Gamma(s)^d} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{\mathfrak{a}_q,\sigma}(z) \prod_{i=1}^{d} (z_i^{s-1} dz_i)$$

en posant (avec la notation usuelle : $Tr(x) = \sum_{j=1}^{d} \tau_j(x) \quad \forall x \in k$) :

$$F_{\mathfrak{a}_q,\sigma}(z) = \sum_{J\in S'_\sigma} \sum_{y\in D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q}} F_{y,\sigma,J}(z)$$

et

$$F_{y,\sigma,J}(z) = e^{-Tr(yz)} \times \prod_{j\in J} \frac{1}{[1-e^{-cTr(f_{j,\sigma}z)}]}$$

où :

- S'_σ désigne l'ensemble des parties J de $\{1,\dots,d\}$ telles que $(\sigma,J) \in S$.
- $D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q} = D_{\sigma,J} \cap (1+\mathcal{C}\mathfrak{a}_q^{-1})$ avec
$$D_{\sigma,J} = \{y \in C_{\sigma,J} \text{ tels que } y = \sum_{j\in J} x_j c f_{j,\sigma} \text{ avec } 0 < x_j \leq 1\ \forall j \in J\}$$

(c étant le générateur positif de l'idéal $\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}$).

Remarque I.2.1. — $D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q}$ est un ensemble fini.

Remarque I.2.2. — $\forall \sigma \in S_{d-1}$, $(\sigma,\{1,\dots,d\}) \in S$ en vertu des résultats *i)* et *ii)* rappelés dans la preuve du lemme 2.2 de [C].

3. Définition de C et expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ en fonction de C

LEMME I.3.1.
$$\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{y,\sigma,J}(z) z_1^{s-1}\cdots z_d^{s-1}\, dz_1\cdots dz_d \text{ *converge pour* } \operatorname{Re} s > \frac{\operatorname{Card} J}{d}.$$

Preuve.
$$\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{y,\sigma,J}(z) z_1^{s-1}\cdots z_d^{s-1}\, dz_1\cdots dz_d =$$
$$\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \Big[F_{y,\sigma,J}(z) \times \prod_{j\in J} Tr(f_{j,\sigma}z)\Big] \frac{z_1^{s-1}\cdots z_d^{s-1}}{\prod_{j\in J} Tr(f_{j,\sigma}z)}\, dz_1\cdots dz_d.$$

Comme : $z \mapsto F_{y,\sigma,J}(z) \times \prod_{j\in J} Tr(f_{j,\sigma}z)$ se prolonge en une fonction continue sur $(\mathbb{R}^+)^d$ et que :
$$Tr(f_{j,\sigma}z) \geq d\sqrt[d]{z_1\cdots z_d}$$
d'après une inégalité de convexité classique, l'intégrale étudiée converge absolument si $\operatorname{Re}[(s-1) - \frac{\operatorname{Card} J}{d}] > -1$, c'est-à-dire si $\operatorname{Re} s > \frac{\operatorname{Card} J}{d}$. ■

Donc, comme si $J \neq \{1,\dots,d\}$, $\frac{\operatorname{Card} J}{d} < 1$, on en déduit le :

COROLLAIRE I.3.1. — *Posons*
$$g(s) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s} \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \frac{1}{\Gamma(s)^d} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{\substack{J\in S'_\sigma \\ J\neq\{1,\dots,d\}}} \sum_{y\in D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{y,\sigma,J}(z) \prod_{i=1}^{d} z_i^{s-1} dz_i.$$

g est continue sur $\{s \in \mathbb{C}$ *tels que* $\operatorname{Re} s > \frac{d-1}{d}\}$ *donc g est continue en 1 et :*

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1} g(s) &= g(1)\\ &= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{\substack{J\in S'_\sigma\\ J\neq\{1,\dots,d\}}} \sum_{y\in D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{y,\sigma,J}(z) \prod_{i=1}^{d} dz_i.\end{aligned}$$

Il reste donc à s'intéresser à la fonction définie par :

$$h(s) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s} \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \frac{1}{\Gamma(s)^d} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{y,\sigma}(z) \prod_{i=1}^{d} (z_i^{s-1} dz_i)$$

pour $\operatorname{Re} s > 1$ (où l'on a posé pour alléger les notations : $D_{\sigma,\mathfrak{a}_q} = D_{\sigma,\mathfrak{a}_q,\{1,\dots,d\}}$ et $F_{y,\sigma} = F_{y,\sigma,\{1,\dots,d\}}$).

Plus précisément, la suite du chapitre est consacrée à la détermination de la limite de h lorsque s tend vers 1 dans le cas où χ n'est pas le caractère trivial.

Pour cela commençons par appliquer un résultat de [C] permettant d'expliciter un prolongement méromorphe de h à $\{s \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} s > 1 - \frac{1}{d}\}$:

LEMME I.3.2. (cf. [C] p. 377–378, lemme 3.3). — *Pour* $\operatorname{Re} s > 1$ *on a :*

$$h(s) = \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s} \frac{1}{\Gamma(s)^d} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \Phi_{i,y,\sigma}(u) \Big(\prod_{j\neq i} u_j^{s-1} du_j\Big) u_i^{ds-d-1} du_i$$

où, si l'on pose :

$$L_i(y,u) = (y_1 u_1 + \cdots + y_{i-1} u_{i-1} + y_i + y_{i-1} u_{i-1} + \cdots + y_d u_d) u_i$$

(avec $u = (u_1,\dots,u_d) \in \mathbb{R}^d$ *et* $y_i = \tau_i(y) \quad \forall i = 1,\dots,d, \forall y \in \mathcal{O}_k$*).*

$\forall i = 1,\dots,d$, $\Phi_{i,y,\sigma}$ *est définie par :*

$$\Phi_{i,y,\sigma}(u) = e^{-L_i(y,u)} \prod_{j=1}^{d} \left[\frac{L_i(f_{j,\sigma},u)}{[1-e^{-cL_i(f_{j,\sigma},u)}]} \times \frac{u_i}{L_i(f_{j,\sigma},u)} \right] \psi_i(u_1,\dots,u_{i-1},1,u_{i+1},\dots,u_d).$$

$\psi_1,\dots,\psi_d$ *étant des fonctions* C^∞ *sur* $(\mathbb{R}^+)^d \setminus \{0\}$ *vérifiant :*

i) $\sum_{i=1}^{d} \psi_i(u) = 1 \quad \forall u \in (\mathbb{R}^+)^d \setminus \{0\}$

ii) $\psi_i(u) = 0$ *s'il existe* $j \neq i$ *tel que* $u_j \geq 2u_i$

iii) $\psi_i(\lambda u) = \psi_i(u) \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall u \in (\mathbb{R}^+)^d \setminus \{0\}, \forall i = 1,\dots,d.$

Remarque I.3.1. — Soit α la fonction C^∞ définie sur $[0,+\infty[$ par : $\alpha(x)=\frac{x}{1-e^{-cx}}$ si $x>0$, $\alpha(0)=\frac{1}{c}$. Alors :

$$\Phi_{i,y,\sigma}(u)=e^{-L_i(y,u)}\prod_{j=1}^{d}\left[\frac{\alpha[L_i(f_{j,\sigma},u)]}{\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{d}u_k\tau_k(f_{j,\sigma})+\tau_i(f_{j,\sigma})}\right]\psi_i(u_1,\dots,u_{i-1},1,u_{i+1},\dots,u_d)\,.$$

Les fonctions $\Phi_{i,y,\sigma}$ se prolongent donc à des fonctions C^∞ sur $(\mathbb{R}^+)^d$ et sont à décroissance rapide à l'infini.

Notons également que $\frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}$ est à décroissance rapide à l'infini.

Par intégration par parties on obtient alors : $\forall i=1,\dots,d$

$$\int_0^{+\infty}\Phi_{i,y,\sigma}(u)u_i^{ds-d-1}du_i=-\int_0^{+\infty}\frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}\times\frac{u_i^{ds-d}}{ds-d}du_i\ \text{ si } \operatorname{Re}s>1\,.$$

D'où le :

Corollaire I.3.2. — *Pour* Re $s>1$ *on a :*

$$h(s)=-\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]}\times\frac{1}{\Gamma(s)^d}\times\frac{1}{d(s-1)}f(s)\tag{1}$$

en posant :

$$f(s)=\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s}\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}}\sum_{i=1}^{d}\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d}\frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u)\Big(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{d}u_j^{s-1}\Big)u_i^{d(s-1)}\prod_{i=1}^{d}du_i\,.$$

Notons que f est définie si $\operatorname{Re}[d(s-1)]>-1$ et $\operatorname{Re}(s-1)>-1$, c'est-à-dire si Re $s>1-\frac{1}{d}$ donc la relation (1) du corollaire I.3.2 donne un prolongement méromorphe de h à $\{s\in\mathbb{C}/\operatorname{Re}s>1-\frac{1}{d}\}$ admettant comme seul pôle éventuel $s=1$.

La suite du calcul est basée sur la remarque suivante :

Proposition I.3.1.

- *Si* $\chi\neq1$ $\quad f(1)=0$.
- *Si* $\chi=1$ $\quad f(1)=-h_{\mathcal{C}}\sum\limits_{\sigma\in S_{d-1}}\frac{K_\sigma|\Delta_\sigma|}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}$

où

$$K_\sigma=\sum_{i=1}^{d}\int_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}}\frac{\psi_i(u_1,\dots,u_{i-1},1,u_{i+1},\dots,u_d)}{\prod\limits_{j=1}^{d}\left[\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{d}u_k\tau_k(f_{j,\sigma})+\tau_i(f_{j,\sigma})\right]}\Big(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{d}du_j\Big)$$

et

$$\Delta_\sigma=\Delta_{\sigma,1}=\det(f_{1,\sigma},\dots,f_{d,\sigma}).$$

Preuve.

$$f(1)=\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)}\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}}\sum_{i=1}^{d}\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d}\frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u)\prod_{j=1}^{d}du_j$$

$$=-\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)}\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}}\sum_{i=1}^{d}\int_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}}\widetilde{\Phi}_{i,y,\sigma}(u)\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d}du_j\Big)$$

avec $\widetilde{\Phi}_{i,y,\sigma}(u)=\Phi_{i,y,\sigma}(u_1,\ldots,u_{i-1},0,u_{i+1},\ldots,u_d)$.

Or

$$\Phi_{i,y,\sigma}(u_1,\ldots,u_{i-1},0,u_{i+1},\ldots,u_d)=\frac{1}{c^d}\frac{\psi_i(u_1,\ldots,u_{i-1},1,u_{i+1},\ldots,u_d)}{\prod\limits_{j=1}^{d}\Big[\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{d}u_k\tau_k(f_{j,\sigma})+\tau_i(f_{j,\sigma})\Big]}$$

est *indépendant de y* donc

$$\sum_{i=1}^{d}\int_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}}\Phi_{i,y,\sigma}(u_1,\ldots,u_{i-1},0,u_{i+1},\ldots,u_d)\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d}du_j\Big)\quad\text{aussi}$$

et

$$f(1)=-\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)}\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\frac{K_\sigma\,\mathrm{Card}\,D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}}{c^d}$$

or

LEMME I.3.3. (cf. [C] p. 386, lemme 5.2).

$$\mathrm{Card}\,D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}=\mathrm{Card}\big[(1+\mathcal{C}\mathfrak{a}_q^{-1})\cap D_{\sigma,\{1,\ldots,d\}}\big]$$

$$=\frac{c^d|\det(f_{1,\sigma},\ldots,f_{d,\sigma})|}{N(\mathcal{C})N(\mathfrak{a}_q)^{-1}\sqrt{D_k}}$$

où D_k désigne la valeur absolue du discriminant du corps de nombre k.

Par conséquent :

$$f(1)=-\Big[\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(\mathfrak{a}_q)\Big]\times\Big(\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\frac{K_\sigma|\Delta_\sigma|}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}\Big).$$

La proposition I.3.1 résulte alors du :

LEMME I.3.4 (lemme que nous utiliserons assez fréquemment tout au long de ce travail).

$$\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(\mathfrak{a}_q)=0\quad si\quad \chi\neq 1$$

$$=h_{\mathcal{C}}\quad si\quad \chi=1.$$

Preuve.

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}N_k^K(\mathcal{C}) \simeq (\mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}) \Big/ \left(\mathcal{P}_{\mathcal{C}}N_k^K(\mathcal{C})/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}\right).$$

Donc $\forall\sigma \in G$, il y a $\frac{h_{\mathcal{C}}}{n} = \mathrm{Card}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{C}}N_k^K(\mathcal{C})/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}\right)$ éléments $\mathfrak{a}_\sigma$ de $\{\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{h_{\mathcal{C}}}\}$ tels que $\chi(\mathfrak{a}_\sigma) = \tilde{\chi}(\sigma)$. Par suite :

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(\mathfrak{a}_q) = \frac{h_{\mathcal{C}}}{n}\sum_{\sigma\in G}\tilde{\chi}(\sigma) &= 0 \quad \text{si} \quad \chi \neq 1\\ &= h_{\mathcal{C}} \quad \text{si} \quad \chi = 1.\end{aligned}$$

■

COROLLAIRE I.3.3. — *Notons $R(V)$ le régulateur de V*

$$\left(R(V) = \left|\det(\log\tau_i(\varepsilon_j))_{\substack{i=1,\ldots,d-1\\ j=1,\ldots,d-1}}\right|\right).$$

Alors

$$\sum_{\sigma\in S_{d-1}} K_\sigma|\Delta_\sigma| = dR(V).$$

Preuve. — D'après ce qui précède si $\chi = 1$

$$f(1) = -h_{\mathcal{C}}\frac{\sum_{\sigma\in S_{d-1}} K_\sigma|\Delta_\sigma|}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}.$$

Comparons ce résultat avec l'expression bien connue du résidu en $s = 1$ de la fonction zêta du corps de nombre k :

$$\zeta_k(s) = L_{\mathcal{C}}(s,1)\prod_{P|\mathcal{C}}\frac{1}{\left[1-\frac{1}{N(P)^s}\right]} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}\, s > 1$$

on a :

$$\lim_{s\to1}(s-1)\zeta_k(s) = \frac{-f(1)}{d[U_{\mathcal{C}}:V]}\prod_{P|\mathcal{C}}\frac{1}{\left[1-\frac{1}{N(P)}\right]}$$

car

$$L_{\mathcal{C}}(s,\chi) = g(s) + h(s) = g(s) - \frac{f(s)}{d[U_{\mathcal{C}}:V]\Gamma(s)^d(s-1)} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}\, s > 1.$$

Donc dans le cas où $\chi = 1$ on obtient :

$$\frac{-f(1)}{d[U_{\mathcal{C}}:V]} \times \prod_{P|\mathcal{C}}\frac{1}{\left[1-\frac{1}{N(P)}\right]} = \frac{2^d \times hR(U)}{\omega\sqrt{D_k}}$$

avec ici $\omega = 2$, $R(U)$ désignant la valeur absolue du régulateur de U et h le nombre de classes. Comme

$$h_{\mathcal{C}} = \frac{2^d hN(\mathcal{C})}{\omega[U:U_{\mathcal{C}}]}\prod_{P|\mathcal{C}}[1-\frac{1}{N(P)}]$$

(cf. [L] p. 127 par exemple).

On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in S_{d-1}} K_\sigma|\Delta_\sigma| &= R(U)d[U_{\mathcal{C}}{:}V]\times[U{:}U_{\mathcal{C}}]\\ &= dR(U)[U{:}V]\\ &= dR(V) \quad \text{car} \quad [U{:}V]=\frac{R(V)}{R(U)}.\end{aligned}$$

■

Remarque I.3.2. — Fixons $\ell\in\{1,\dots,d\}$. En posant $u_k=\frac{u'_k}{u'_\ell}$, $\forall k\in\{1,\dots,d\}$, $k\neq i$ et $k\neq\ell$ et $u_\ell=\frac{1}{u'_\ell}$ (ce qui équivaut à : $u'_k=\frac{u_k}{u_\ell}$, $\forall k\neq i$ et $k\neq\ell$ et $u'_\ell=\frac{1}{u_\ell}$) dans :

$$K_{\sigma,i}:=\int_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}}\frac{\psi_i(u_1,\dots,u_{i-1},1,u_{i+1},\dots,u_d)}{\prod\limits_{j=1}^{d}\left[\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{d}\tau_k(f_{j,\sigma})u_k+\tau_i(f_{j,\sigma})\right]}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{d}du_j\right),\ \forall i\in\{1,\dots,d\},\ i\neq\ell\,.$$

On obtient en utilisant la relation $\psi_i(\lambda u)=\psi_i(u)$ (la valeur absolue du jacobien du changement de variables étant $\frac{1}{{u'_\ell}^d}$) :

$$\begin{aligned}K_{\sigma,i}&=\int_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}}\frac{\psi_i(u'_1,\dots,u'_{\ell-1},1,u'_{\ell+1},\dots,u'_{i-1},u'_\ell,u'_{i+1},\dots,u'_d)}{\prod\limits_{j=1}^{d}\left[\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell,i}}^{d}\tau_k(f_{j,\sigma})u'_k+\tau_i(f_{j,\sigma})u'_\ell+\tau_\ell(f_{j,\sigma})\right]}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i\\j\neq\ell}}^{d}du'_j\right)du'_\ell\\&=\int_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}}\frac{\psi_i(u_1,\dots,u_{\ell-1},1,u_{\ell+1},\dots,u_d)}{\prod\limits_{j=1}^{d}\left[\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{d}\tau_k(f_{j,\sigma})u_k+\tau_\ell(f_{j,\sigma})\right]}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq\ell}}^{d}du_j\right)\end{aligned}$$

(en posant : $u'_k{=}u_k$ si $k{\neq}i$ et $k{\neq}\ell$, $u'_\ell{=}u_i$) et comme

$$\sum_{i=1}^{d}\psi_i(u_1,\dots,u_{\ell-1},1,u_{\ell+1},\dots,u_d)=1\,.$$

On a :

$$K_\sigma=\sum_{i=1}^{d}K_{\sigma,i}=\int_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}}\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq\ell}}^{d}du_j}{\prod\limits_{j=1}^{d}\left[\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{d}\tau_k(f_{j,\sigma})u_k+\tau_\ell(f_{j,\sigma})\right]}\,.$$

Ce qui permet, à l'aide du corollaire I.3.3, d'obtenir une expression intégrale du régulateur de V :

$$R(V)=\frac{1}{d}\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\int_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}}\frac{|\Delta_\sigma|\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{d}du_j}{\prod\limits_{j=1}^{d}\left[\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{d}\tau_k(f_{j,\sigma})u_k+\tau_\ell(f_{j,\sigma})\right]}$$

et ceci $\forall\ell\in\{1,\dots,d\}$ fixé.

THÉORÈME I.3.1. — *h étant la fonction introduite après le corollaire I.3.1, si χ n'est pas le caractère trivial on a :*

$$\lim_{s\to1}h(s)=-\Big(\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(\mathfrak{a}_q)\log N(\mathfrak{a}_q)\Big)\frac{R(V)}{[U_{\mathcal{C}}:V]N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}$$
$$-\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)}\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}}\sum_{i=1}^{d}\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d}\frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u)\log u_i\prod_{j=1}^{d}du_j.$$

Preuve. — Si $\chi\neq1$ d'après le corollaire I.3.2 on a :

$$\lim_{s\to1}h(s)=\lim_{s\to1}\frac{-f(s)}{[U_{\mathcal{C}}:V]\Gamma(s)^d d(s-1)}=\lim_{s\to1}-\frac{f(s)-f(1)}{[U_{\mathcal{C}}:V]\Gamma(s)^d d(s-1)}$$
$$=\frac{-f'(1)}{d[U_{\mathcal{C}}:V]}\tag{2}$$

or pour $\operatorname{Re} s>1-\frac{1}{d}$, f est holomorphe et :

$$f'(s)=-\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(\mathfrak{a}_q)\log N(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s}\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}}\sum_{i=1}^{d}\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d}\frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u)p_i(u)^{s-1}\prod_{j=1}^{d}du_j$$
$$+\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s}\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}}\sum_{i=1}^{d}\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d}\frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u)p_i(u)^{s-1}\log p_i(u)\prod_{j=1}^{d}du_j$$

avec $p_i(u)=u_1\cdots u_{i-1}u_i^d u_{i+1}\cdots u_d$ si $u=(u_1,\dots,u_d)$.

(En effet : soient a et $b\in]1-\frac{1}{d},+\infty[$ fixés, avec $a<b$, on a :

$$\left|\frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u)p_i(u)^{s-1}\log p_i(u)\right|$$
$$\leq\left|\frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u)\left(u_i^{(a-1)d}+u_i^{(b-1)d}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d}\left(u_j^{a-1}+u_j^{b-1}\right)\log p_i(u)\right|$$

$\forall u\in(\mathbb{R}^{+*})^d$ et $\forall s\in\mathbb{C}$ tels que $a\leq\operatorname{Re} s\leq b$. Comme :

$$\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d}\left|\frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u)\left(u_i^{(a-1)d}+u_i^{(b-1)d}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d}\left(u_j^{a-1}+u_j^{b-1}\right)\log p_i(u)\right|\prod_{j=1}^{d}du_j$$

est convergente car $\frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}$ est continue sur $(\mathbb{R}^{+})^d$ et à décroissance rapide à l'infini. On peut dériver sans problème sous le signe $\int$ pour Re $s \in [a,b]$ en appliquant, par exemple le théorème de Lebesgue inhérent à cette situation. Le raisonnement précédent étant valable pour tout a et $b \in]1-\frac{1}{d},+\infty[$, l'expression obtenue pour $f'(s)$ est valable pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que Re $s > 1-\frac{1}{d}$.)

En particulier :

$$f'(1) = -\sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)\log N(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \prod_{j=1}^{d} du_j$$
$$+ \sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \log p_i(u) \prod_{j=1}^{d} du_j.$$

Pour terminer le calcul, on va transformer les deux termes de la somme :

LEMME I.3.5.

$$\sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \log(u_1\cdots u_i^d\cdots u_d) \prod_{j=1}^{d} du_j$$
$$= d\sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \log u_i du_1\cdots du_d.$$

Preuve. — $\forall i = 1,\dots,d$

$$\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \log(u_1\cdots u_i^d\cdots u_d) \prod_{j=1}^{d} du_j$$
$$= d\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \log u_i \prod_{j=1}^{d} du_j + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \log u_j \prod_{k=1}^{d} du_k$$

mais si $j \neq i$

$$\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i} \log u_j \prod_{k=1}^{d} du_k$$
$$= -\int_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}} \Phi_{i,y,\sigma}(u_1,\dots,u_{i-1},0,u_{i+1},\dots,u_d) \log u_j \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{d} du_k$$

or $\Phi_{i,\sigma,y}(u_1,\dots,u_{i-1},0,u_{i+1},\dots,u_d)$ étant indépendant de y

$$K'_\sigma := \sum_{i=1}^{d} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}} \Phi_{i,\sigma,y}(u_1,\dots,u_{i-1},0,u_{i+1},\dots,u_d) \log u_j \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{d} du_k \quad \text{aussi}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial\,\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial\,u_i} \log u_j \prod_{k=1}^{d} du_k \\
&= -\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} K'_\sigma \operatorname{Card}(D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}) \\
&= -\Big(\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(\mathfrak{a}_q)\Big)\Big(\sum_{\sigma\in S_{d-1}} K'_\sigma \frac{c^d|\Delta_\sigma|}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}\Big) \quad \text{d'après le lemme I.3.3.} \\
&= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{d'après le lemme I.3.4.}
\end{aligned}$$

d'où le résultat du lemme I.3.5.

De plus :

$$\begin{aligned}
&-\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \log N(\mathfrak{a}_q) \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial\,\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial\,u_i}(u) \prod_{j=1}^{d} du_j \\
&= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \log N(\mathfrak{a}_q) \sum_{\sigma\in S_{d-1}} K_\sigma \operatorname{Card}(D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}) \\
&= \Big[\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(\mathfrak{a}_q) \log N(\mathfrak{a}_q)\Big]\Big[\sum_{\sigma\in S_{d-1}} \frac{K_\sigma c^d|\Delta_\sigma|}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}\Big] \quad \text{d'après le lemme I.3.3.} \\
&= \Big[\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(\mathfrak{a}_q) \log N(\mathfrak{a}_q)\Big] \times \frac{dR(V)}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}.
\end{aligned}$$

d'après le corollaire I.3.3.

On obtient alors le théorème I.3.1 en utilisant (2), l'expression de $f'(1)$ et le lemme I.3.5.

Corollaire I.3.4. — *Si χ n'est pas le caractère trivial on a donc :*

$$L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = g(1) - \frac{f'(1)}{d[U_{\mathcal{C}}:V]}$$

ou de façon plus explicite :

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = & \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{\substack{J\in S'_\sigma \\ J\neq\{1,\dots,d\}}} \sum_{y\in D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{y,\sigma,J}(u) \prod_{j=1}^{d} du_j \\
& - \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q) \log N(\mathfrak{a}_q) R(V)}{[U_{\mathcal{C}}:V] N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}} \\
& - \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \log u_i \prod_{j=1}^{d} du_j.
\end{aligned}$$

Posons dans la suite :

$$\begin{aligned}
C &= C(V,\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_q) \\
&= \frac{-1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \log u_i \prod_{j=1}^{d} du_j
\end{aligned}$$

de sorte que :

$$L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = g(1) - \Big[\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(\mathfrak{a}_q) \log N(\mathfrak{a}_q)\Big] \frac{R(V)}{[U_{\mathcal{C}}:V] N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}} + C\,.$$

On va maintenant s'attacher à donner une autre expression de C.

Chapitre II

TRANSFORMATION DE C

Écrivons l'expression C définie à la fin du chapitre I sous la forme :

$$C = -\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial G_{i,\sigma}}{\partial u_i}(u) \log u_i du_1 \cdots du_d \,,$$

en posant $\forall i = 1, \ldots, d$ et $\forall \sigma \in S_{d-1}$:

$$G_{i,\sigma}(u) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{y \in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \Phi_{i,y,\sigma}(u) \,.$$

Notons que : $G_{i,\sigma}$ est C^{∞} sur $(\mathbb{R}^{+})^d$ et à décroissance rapide à l'infini car les fonctions $\Phi_{i,y,\sigma}$ le sont.

L'idée du calcul est de reprendre à l'envers la transformation de Colmez permettant de passer des fonctions $F_{y,\sigma}$ aux fonctions $\Phi_{i,y,\sigma}$ (cf. [C], p. 377–78) en exploitant à nouveau la relation $\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(\mathfrak{a}_q) = 0$. Pour cela on va faire successivement :

- une intégration par parties,
- un changement de variables permettant d'éliminer les fonctions ψ_i.

1. Intégration par parties

LEMME II.1.1. — $\forall i = 1, \ldots, d$

$$G_{i,\sigma}(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_d) = 0 \,.$$

Preuve.

$$G_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_d) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{y \in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \Phi_{i,y,\sigma}(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_d)$$

or on a déjà remarqué que :

$$\Phi_{i,y,\sigma}(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_d) = \frac{1}{c^d} \frac{\psi_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \ldots, u_d)}{\prod_{j=1}^{d} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{d} \tau_k(f_{j,\sigma}) u_k + \tau_i(f_{j,\sigma}) \right]}$$

est *indépendant de y* donc en utilisant le lemme I.3.3 on obtient :

$$G_i(u_1,\dots,u_{i-1},0,u_{i+1},\dots,u_d) = \left[\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(\mathfrak{a}_q)\right] \frac{|\Delta_\sigma|\psi_i(u_1,\dots,u_{i-1},1,u_{i+1},\dots,u_d)}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}\prod_{j=1}^{d}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{d}\tau_k(f_{j,\sigma})u_k+\tau_i(f_{j,\sigma})\right]}$$
$$= 0\,.$$

Corollaire II.1.1. — *$\forall i=1,\dots,d$, $\forall\sigma\in S_{d-1}$. La fonction $H_{i,\sigma}$ définie par :*

$$H_{i,\sigma}(u) = \frac{G_{i,\sigma}(u)}{u_i} \quad \forall u=(u_1,\dots,u_d)\in(\mathbb{R}^+)^d \text{ avec } u_i>0$$

admet une limite finie lorsque u_i tend vers 0, $\forall(u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_d)\in(\mathbb{R}^+)^{d-1}$ fixé.

Preuve.

$$\lim_{u_i\to 0} H_{i,\sigma}(u_1,\dots,u_d)$$
$$= \lim_{u_i\to 0}\frac{G_{i,\sigma}(u_1,\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_d)-G_{i,\sigma}(u_1,\dots,u_{i-1},0,u_{i+1},\dots,u_d)}{u_i}$$
$$= \frac{\partial G_{i,\sigma}}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_{i-1},0,u_{i+1},\dots,u_d)\,.$$

■

Corollaire II.1.2.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial G_{i,\sigma}}{\partial u_i}(u)\log u_i\,du_i = -\int_0^{+\infty}\frac{G_{i,\sigma}(u)}{u_i}du_i\,.$$

Preuve. — Soient $\eta>0$ et $A>0$, par intégration par parties on obtient :

$$\int_\eta^A\frac{\partial G_{i,\sigma}(u)}{\partial u_i}\log u_i\,du_i = [G_{i,\sigma}(u)\log u_i]_\eta^A - \int_\eta^A\frac{G_{i,\sigma}(u)}{u_i}du_i$$

d'où le résultat en faisant tendre η vers 0 et A vers $+\infty$ car

$$\lim_{\eta\to 0} G_{i,\sigma}(u_1,\dots,u_{i-1},\eta,u_{i+1},\dots,u_d)\log\eta =$$
$$\lim_{\eta\to 0}\eta\log\eta H_{i,\sigma}(u_1,\dots,u_{i-1},\eta,u_{i+1},\dots,u_d) = 0$$

et $G_{i,\sigma}$ est à décroissance rapide à l'infini.

On en déduit la

Proposition II.1.1.

$$C = \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]}\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\sum_{i=1}^{d}\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d}\frac{G_{i,\sigma}(u)}{u_i}du_1\cdots du_d\,.$$

2. Changement de variables

Notations.

• Pour tout $\sigma \in S_{d-1}, \forall q = 1,\dots,h_{\mathcal{C}}$ on note $\widehat{D}_{\sigma,\mathfrak{a}_q}$ l'ensemble des d-uplets $(x_1,\dots,x_d) \in]0,1]^d$ tel que :

$$y = \sum_{j=1}^{d} x_j c f_{j,\sigma} \in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}.$$

• Posons

$$f^*_{k,\sigma} = \big(\tau_k(f_{1,\sigma}),\dots,\tau_k(f_{d,\sigma})\big) \quad \forall k = 1,\dots,d,$$

et désignons par

$$\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(f^*_{1,\sigma},\dots,f^*_{d,\sigma})$$

le cône ouvert formé des points $z = (z_1,\dots,z_d) \in (\mathbb{R}^{+*})^d$ tels que : $\forall k = 1,\dots,d$

$$\varepsilon(\sigma)\det(f^*_{1,\sigma},\dots,f^*_{k-1,\sigma},z,f^*_{k+1,\sigma},\dots,f^*_{d,\sigma}) > 0.$$

• Notons

$$D_{\sigma,k}(z) = \det(f^*_{1,\sigma},\dots,f^*_{k-1,\sigma},z,f^*_{k+1,\sigma},\dots,f^*_{d,\sigma})$$

pour $\sigma \in S_{d-1}$ et $k = 1,\dots,d$. On a alors :

Proposition II.2.1.

$$C = \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \frac{1}{c^d|\Delta_\sigma|} \int_{\Gamma_\sigma} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{(x_1,\dots,x_d)\in\widehat{D}_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \prod_{j=1}^{d} \Big(\frac{e^{-x_j z_j}}{1-e^{-z_j}} dz_j\Big).$$

Preuve. — Fixons $i \in \{1,\dots,d\}$ et posons $\forall k = 1,\dots,d$

$$z_k = cL_i(f_{k,\sigma},u) = c\Big[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} u_j\tau_j(f_{k,\sigma}) + \tau_i(f_{k,\sigma})\Big]u_i$$

dans

$$\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{G_{i,\sigma}(u)}{u_i} du_1\cdots du_d.$$

Le jacobien de ce changement de variables est :

$$J = c^d u_i^{d-1} D_\sigma$$

avec

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \tau_1(f_{1,\sigma}) & \cdots & \tau_d(f_{1,\sigma}) \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_1(f_{d,\sigma}) & \cdots & \tau_d(f_{d,\sigma}) \end{vmatrix} = \Delta_\sigma$$

$$= \det(f^*_{1,\sigma},\ldots,f^*_{d,\sigma})\,.$$

• Ce changement de variables est un C^1 difféomorphisme de $(\mathbb{R}^{+*})^d$ sur Γ_σ. En effet : $\forall k = 1,\ldots,d,\ k \neq i$

$$u_k u_i = \frac{\det(f^*_{1,\sigma},\ldots,f^*_{k-1,\sigma},z,f^*_{k+1,\sigma},\ldots,f^*_{d,\sigma})}{c\Delta_\sigma} = \frac{D_{\sigma,k}(z)}{c\Delta_\sigma}$$

et
$$u_i = \frac{\det(f^*_{1,\sigma},\ldots,f^*_{i-1,\sigma},z,f^*_{i+1,\sigma},\ldots,f^*_{d,\sigma})}{c\Delta_\sigma} = \frac{D_{\sigma,i}(z)}{c\Delta_\sigma}$$

donc comme Δ_σ a le même signe que $\varepsilon(\sigma)$:

$$u_k > 0 \quad \forall k = 1,\ldots,d \iff \begin{cases} \varepsilon(\sigma)\det(f^*_{1,\sigma},\ldots,f^*_{k-1,\sigma},z,f^*_{k+1,\sigma},\ldots,f^*_{d,\sigma}) > 0 \\ \text{et} \\ z_k > 0 \quad \forall k = 1,\ldots,d \end{cases}$$
$$\iff z = (z_1,\ldots,z_d) \in \Gamma_\sigma\,.$$

(Notons que ce qui précède montre de plus que l'on peut remplacer $(z_1,\ldots,z_d) \in (\mathbb{R}^{+*})^d$ par $(z_1,\ldots,z_d) \in \mathbb{R}^d$ dans la définition de Γ_σ).

• $\Phi_{i,y,\sigma}(u) =$

$$\frac{e^{-L_i(y,u)} \times \prod_{j=1}^{d} \alpha(L_i(f_{j,\sigma},u)) \times \psi_i(u_1,\ldots,u_{i-1},1,u_{i+1},\ldots,u_d)}{\prod_{j=1}^{d}[u_1\tau_1(f_{j,\sigma}) + \cdots + u_{i-1}\tau_{i-1}(f_{j,\sigma}) + \tau_i(f_{j,\sigma}) + u_{i+1}\tau_{i+1}(f_{j,\sigma}) + \cdots + u_d\tau_d(f_{j,\sigma})]}.$$

(en notant toujours : $\alpha(x) = \frac{x}{1-e^{-cx}} \quad \forall x > 0$).

Mais si $y = \sum_{j=1}^{d} x_j c f_{j,\sigma}$ on a :

$$\begin{aligned} L_i(y,u) &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{d} \tau_k(y)u_k u_i + \tau_i(y)u_i \\ &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{d} \Big(\sum_{j=1}^{d} x_j c\tau_k(f_{j,\sigma})\Big] u_k u_i + \sum_{j=1}^{d} x_j c\tau_i(f_{j,\sigma})u_i \\ &= \sum_{j=1}^{d} x_j c\Big[\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{d} \tau_k(f_{j,\sigma})u_k u_i + \tau_i(f_{j,\sigma})u_i\Big] = \sum_{j=1}^{d} x_j z_j. \end{aligned}$$

De plus :

$$\psi_i(u_1,\ldots,u_{i-1},1,u_{i+1},\ldots,u_d)=\psi_i(u_1u_i,\ldots,u_{i-1}u_i,u_i,u_{i+1}u_i,\ldots,u_du_i)$$

$\forall u_i>0$ donc :

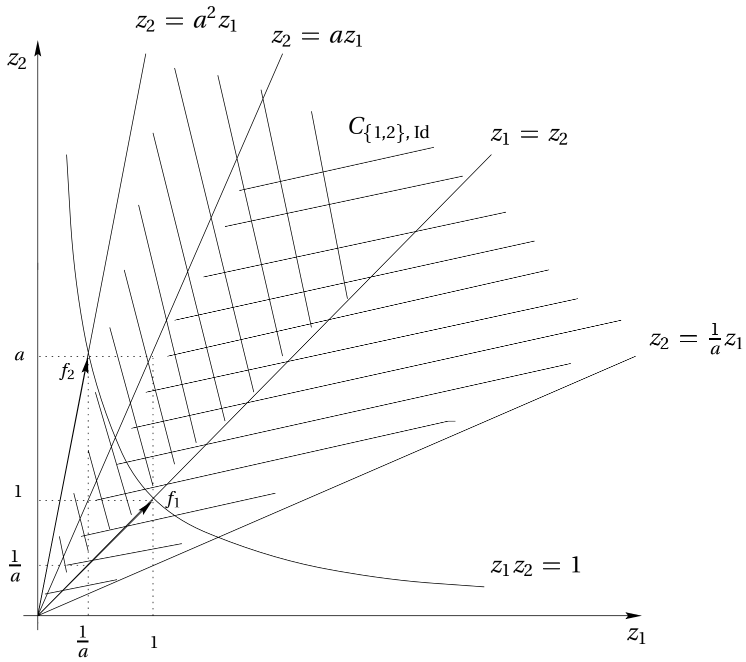
$$\int_{(\mathbb{R}^{+*})^d}\frac{G_{i,\sigma}(u)}{u_i}du_1\cdots du_d=$$

$$\frac{1}{c^d|\Delta_\sigma|}\int_{\Gamma_\sigma}\sum_{q=1}^{h_C}\frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)}\sum_{(x_1,\ldots,x_d)\in\widehat{D}_{\sigma,\mathfrak{a}_q}}e^{-\sum_{j=1}^d x_jz_j}\prod_{j=1}^d\left[\frac{1}{1-e^{-z_j}}\right]\psi_i\Big(\frac{D_{\sigma,1}(z)}{c\Delta_\sigma},\ldots,\frac{D_{\sigma,d}(z)}{c\Delta_\sigma}\Big)dz_1\cdots dz_d$$

d'où le résultat de la proposition II.2.1 en utilisant la proposition II.1.1 et le fait que $\forall z\in(\mathbb{R}^+)^d\setminus\{0\}$:

$$\sum_{i=1}^d\psi_i\Big(\frac{D_{\sigma,1}(z)}{c\Delta_\sigma},\ldots,\frac{D_{\sigma,d}(z)}{c\Delta_\sigma}\Big)=1\,.$$

Illustration de Γ_σ dans le cas $d=2$.



(\\\ *représente* $C_{\{1,2\},\,\mathrm{Id}}$; /// *représente* $\Gamma_{\mathrm{Id}}=\Gamma$)

En posant, comme dans le chapitre I :

$$f_2\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\ a\end{pmatrix}\text{ avec } a>1\ \text{ car } \Delta=a-\frac{1}{a}>0$$

on a :

$$\Gamma_{\mathrm{Id}} = \Gamma = \{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^{+*})^2 / \frac{1}{a} z_1 < z_2 < a z_1 \} .$$

De la proposition II.2.1 on déduit le :

THÉORÈME II.2.1.

$$L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{[U_{\mathcal{C}}:V]N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \sum_{\substack{J \in S'_\sigma \\ J \neq \{1,\ldots,d\}}} \sum_{y \in D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{y,\sigma,J}(u) \prod_{k=1}^{d} du_k$$
$$- \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q) \log N(\mathfrak{a}_q) R(V)}{[U_{\mathcal{C}}:V]N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}} \quad +$$
$$\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \frac{\varepsilon(\sigma)}{c^d \Delta_\sigma} \int_{\Gamma_\sigma} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{(x_1,\ldots,x_d) \in \widehat{D}_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-x_j z_j}}{1 - e^{-z_j}} dz_j$$

avec

$$F_{y,\sigma,J}(u) = e^{-Tr(uz)} \times \prod_{j \in J} \frac{1}{[1 - e^{-cTr(f_{j,\sigma} u)}]} .$$

Remarque II.2.1. — Comme mentionné en introduction l'expression du théorème II.2.1 semble difficilement simplifiable pour $d \geq 3$. Dans toute la suite de ce travail nous allons donc nous concentrer sur le cas $d = 2$.

Chapitre III

CAS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL (d=2)

1. Choix d'un système particulier d'idéaux $\mathfrak{a}_q$, $(q = 1, \ldots, h_{\mathcal{C}})$

Notons que dans le cas $d = 2$, $S_{d-1} = \{\mathrm{Id}\}$ et la somme sur les parties J de $\{1,\ldots,d\}$ distinctes de $\{1,\ldots,d\}$, intervenant dans l'expression de $g(1)$ est réduite à $J = \{1\}$ modulo la relation d'équivalence $\sim$. Donc on obtient :

$$
\begin{aligned}
L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = {} & \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \sum_{y \in D_{\{1\},\mathfrak{a}_q}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^2} F_{y,\{1\}}(z)\, dz_1\, dz_2 \\
& - \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q) \log N(\mathfrak{a}_q) R(V)}{[U_{\mathcal{C}}:V] N(\mathcal{C}) \sqrt{D_k}} \\
& + \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \frac{1}{c^2 \Delta} \int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{(x_1,x_2) \in \widehat{D}_{\mathfrak{a}_q}} \frac{e^{-x_1 z_1} e^{-x_2 z_2}}{(1 - e^{-z_1})(1 - e^{z_2})} dz_1\, dz_2 \qquad (E)
\end{aligned}
$$

où l'on a posé pour alléger les notations :

$$
\begin{aligned}
\widehat{D}_{\mathfrak{a}_q} &= \widehat{D}_{\mathrm{Id},\mathfrak{a}_q} \\
D_{\{1\},\mathfrak{a}_q} &= D_{\mathrm{Id},\{1\},\mathfrak{a}_q} \\
F_{y,\{1\}} &= F_{y,\mathrm{Id},\{1\}} \\
\Delta &= \Delta_{\mathrm{Id}} \\
f_{i,\mathrm{Id}} &= f_i \quad \forall i = 1,\ldots,d \\
\Gamma_a &= \Gamma_{\mathrm{Id}} = \{(z_1,z_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \text{ tels que } \frac{1}{a} z_1 < z_2 < a z_1\} \text{ si } f_2 = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ a \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Pour déterminer une autre expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ on va commencer par décrire plus explicitement *les ensembles finis* $D_{\{1\},\mathfrak{a}_q}$ et $\widehat{D}_{\mathfrak{a}_q}$. Pour cela on va se placer dans le cas où $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{h_{\mathcal{C}}}$ est un système de représentants de $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ formé d'idéaux premiers de k dont la norme est un nombre premier.

On posera donc dans la suite : $\mathfrak{a}_i = P_i \quad \forall i = 1,\ldots,h_{\mathcal{C}}$ avec P_i idéal premier de $\mathcal{O}_k$ tel que $N_{\mathbb{Q}}^k(P_i) = p_i$ soit un nombre premier tel que $\mathrm{pgcd}(p_i,c) = 1$.

Un tel système de représentants existe d'après un théorème de Tchebotareff.

2. Description des $D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q}$ correspondants

Commençons par mentionner :

2.1. Un lemme d'arithmétique élémentaire (valable pour d quelconque).

Pour tout idéal fractionnaire I, on identifie I et le réseau $\tau(I)$ de $\mathbb{R}^d$.

LEMME III.2.1. — *Soit P un idéal premier de O_k dont la norme est un nombre premier p tel que* $\mathrm{pgcd}(p,c) = 1$. *Alors :*

$$\mathcal{C}P^{-1} \cap \mathbb{Q} = \mathcal{C} \cap \mathbb{Q} = c\mathbb{Z}.$$

Preuve.

• Si $x \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Q}$, $x \in O_k \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ donc $x \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$ l'inclusion inverse étant évidente, on a : $\mathcal{C} \cap \mathbb{Q} = c\mathbb{Z}$.

• Si $x \in \mathcal{C}P^{-1} \cap \mathbb{Q}$ alors $xP \subset \mathcal{C}O_k$ et $N(Px) = N(P) \times N(xO_k) = px^d$ car $x \in \mathbb{Q}$. Par conséquent : $px^d \in \mathbb{N}^*$ ce qui entraîne que $x \in \mathbb{Z}$. De plus, comme $px \in xP \subset \mathcal{C}$, $px \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Q} = c\mathbb{Z}$ donc $c|px$ mais $\mathrm{pgcd}(p,c) = 1$ donc $c|x$ et $x \in c\mathbb{Z} = \mathcal{C} \cap \mathbb{Q}$.

L'inclusion inverse étant claire, on a : $\mathcal{C} \cap \mathbb{Q} = \mathcal{C}P^{-1} \cap \mathbb{Q}$.

COROLLAIRE III.2.1. — *Dans le cas où $d = 2$, il existe $e_P \in \mathcal{C}P^{-1}$ tel que*

$$\mathcal{C}P^{-1} = \mathbb{Z}c \oplus \mathbb{Z}e_P.$$

Preuve. — $\mathcal{C}P^{-1}/c\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion (en effet, si $mx \in c\mathbb{Z}$ avec $x \in \mathcal{C}P^{-1}$ et $m \in \mathbb{Z}$ alors, ou bien $m = 0$, ou bien $x \in \mathbb{Q} \cap \mathcal{C}P^{-1} = c\mathbb{Z}$) donc $\mathcal{C}P^{-1}/c\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ car $\mathcal{C}P^{-1}$ est un réseau de $\mathbb{R}^2$ donc isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Il suffit alors de prendre pour e_P n'importe quel élément de $\mathcal{C}P^{-1}$ dont l'image par la surjection canonique soit une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{C}P^{-1}/c\mathbb{Z}$. ∎

Appliquons le corollaire III.2.1, au système de représentants $P_1, \dots, P_{h_\mathcal{C}}$ introduit dans le paragraphe 1 : $\forall i = 1, \dots, h_\mathcal{C}$ il existe $e_i \in \mathcal{C}P_i^{-1}$ tel que :

$$\mathcal{C}P_i^{-1} = \mathbb{Z}c \oplus \mathbb{Z}e_i.$$

Comme $f_2 - 1 \in \mathcal{C}P_i^{-1}, \forall i = 1, \dots, h_\mathcal{C}$ il existe $a_{P_i} \in \mathbb{Z}$ et $b_{P_i} \in \mathbb{N}^*$ (quitte à changer e_i en $-e_i$) tels que :

$$f_2 = 1 + a_{P_i}c + b_{P_i}e_i.$$

Par conséquent :

$$cf_2 = (1 + a_{P_i}c)cf_1 + b_{P_i}ce_i\,.$$

Posons dans toute la suite de ce travail :

$$u_{P_i} = 1 + a_{P_i}c \;\text{ et }\; v_{P_i} = cb_{P_i}$$

de sorte que : $cf_2 = u_{P_i} cf_1 + v_{P_i} e_i, \forall i = 1, \dots, h_{\mathcal{C}}$.

Remarque III.2.1.

a) $v_{P_i} = [\mathcal{C}P_i^{-1} : \Lambda]$ où Λ est le réseau engendré par cf_1 et cf_2.

b) $\text{pgcd}(u_{P_i}, v_{P_i}) = 1, \forall i = 1, \dots, h_{\mathcal{C}}$.

(En effet, si $\delta = \text{pgcd}(u_{P_i}, v_{P_i})$

$$\begin{cases} u_{P_i} = \delta u'_{P_i} \\ v_{P_i} = \delta v'_{P_i} \end{cases} \quad \text{avec pgcd}(u'_{P_i}, v'_{P_i}) = 1\,.$$

Donc

$$\frac{c}{\delta} = u'_{P_i} cf_2^{-1} + v'_{P_i} f_2^{-1} e_i \in \mathcal{C}P_i^{-1} \cap \mathbb{Q}$$

car f_2 est une unité de O_k, donc $\delta = 1$ d'après le lemme III.2.1.)

c) *c divise* $u_{P_i} - 1, \forall i = 1, \dots, h_{\mathcal{C}}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall i = 1, \dots, h_{\mathcal{C}}$ on a :

$$\frac{u_{P_i}}{v_{P_i}} n - \frac{1}{c} \in \mathbb{Z} \text{ si et seulement si } n = \frac{v_{P_i}}{c} + k v_{P_i} \text{ avec } k \in \mathbb{N}\,.$$

En effet :

$$\frac{u_{P_i}}{v_{P_i}} n - \frac{1}{c} \in \mathbb{Z} \text{ si et seulement si } \exists k' \in \mathbb{Z} \text{ tel que } u_{P_i} n = \frac{v_{P_i}}{c} + k' v_{P_i}\,.$$

donc $\frac{v_{P_i}}{c}$ divise n donc $n = k'' \frac{v_{P_i}}{c}$ avec $k'' \in \mathbb{N}$. Par suite : $u_{P_i} k'' = 1 + k'c$ donc $k'' \equiv 1[c]$ car $u_{P_i} \equiv 1[c]$ et $n = \frac{v_{P_i}}{c} + k v_{P_i}$ (avec $k \in \mathbb{N}$ car $n \in \mathbb{N}$). La réciproque est claire d'après c).

2.2. Cas où $J = \{1\}$: description de $D_{\{1\}, P_i}$.

Proposition III.2.1.

$$D_{\{1\}, P_i} = \{1\}, \ \forall i = 1, \dots, h_{\mathcal{C}}\,.$$

Preuve. — Rappelons que :

$$D_{\{1\}, P_i} = \left\{ x_1 cf_1,\, 0 < x_1 \leq 1 \right\} \cap (1 + \mathcal{C}P_i^{-1}), \ \forall i = 1, \dots, h_{\mathcal{C}}\,.$$

Or $x_1 cf_1 \in 1 + \mathcal{C}P_i^{-1}$ si et seulement si $(x_1 - \frac{1}{c}) cf_1 \in \mathcal{C}P_i^{-1}$. Par suite :

$$x_1 = \frac{1}{c} + m_1 \quad \text{avec } m_1 \in \mathbb{Z}$$

(car cf_1 et e_i sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants donc forment une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^2$).
Comme $x_1 \in]0,1]$

$$m_1 = 0$$

d'où le résultat cherché.

Corollaire III.2.2. — *g désignant toujours la fonction introduite dans le corollaire I.3.1, on a :*

$$g(1) = \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]}\left(\sum_{i=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_i)}{N(P_i)}\right) K$$

avec

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{ze^{-z}}{1-e^{-cz}}\,dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(cn+1)^2} = \frac{1}{c^2}\zeta\big(2,\frac{1}{c}\big)$$

(où $\zeta(s,a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$, $\mathrm{Re}\, s > 1$, $a > 0$ désigne la fonction zêta d'Hurwitz).

Preuve.

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]}\sum_{i=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_i)}{N(P_i)} \sum_{y\in D_{\{1\},P_i}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^2} F_{y,\{1\}}(z_1,z_2)\,dz_1\,dz_2 \\ &= \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]}\sum_{i=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_i)}{N(P_i)} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(z_1+z_2)}}{1-e^{-c(z_1+z_2)}}\,dz_1\,dz_2 \end{aligned}$$

puisque $D_{\{1\},P_i} = \{1\}$.

Mais

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(z_1+z_2)}}{1-e^{-c(z_1+z_2)}}\,dz_1\,dz_2 = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{z_1'} \frac{e^{-z_1'}}{1-e^{-cz_1'}}\,dz_2'\right)dz_1'$$

(en posant $z_1 + z_2 = z_1'$, $z_2 = z_2'$) c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(z_1+z_2)}}{1-e^{-c(z_1+z_2)}}\,dz_1\,dz_2 = \int_0^{+\infty} \frac{ze^{-z}}{1-e^{-cz}}\,dz$$

d'où l'expression annoncée pour $g(1)$.

2.3. Cas où $J = \{1,2\}$: description de $\widehat{D_{P_i}}$.

Proposition III.2.2. — *$\forall i = 1,\dots,h_{\mathcal{C}}$, $\widehat{D_{P_i}}$ est formé des couples $(x_1,x_2) \in]0,1]^2$ de la forme :*

$$\begin{cases} x_2 = x_2^i(m) = \frac{m}{v_{P_i}} \\ \text{et} \\ x_1 = x_1^i(m) = \frac{1}{c} + m' - \frac{mu_{P_i}}{v_{P_i}} \quad \text{avec } m' = E\left(\frac{mu_{P_i}}{v_{P_i}} - \frac{1}{c}\right) + 1 \end{cases}$$

et m variant de 1 à v_{P_i}.

Autrement dit : en posant $\theta(x) = E(x) - x + 1 = 1 - \{x\}$ où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x on a :

$$\widehat{D_{P_i}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in]0,1]^2 \ \textit{tels que} \ \begin{cases} x_1 = \theta\left(\frac{mu_{P_i}}{v_{P_i}} - \frac{1}{c}\right) \\ x_2 = \frac{m}{v_{P_i}}, \ m = 1, \dots, v_{P_i} \end{cases} \right\}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \widehat{D_{P_i}} &\iff x_1 cf_1 + x_2 cf_2 \in 1 + \mathcal{C}P_i^{-1} \\ &\iff \left(x_1 + x_2 u_{P_i} - \frac{1}{c}\right) cf_1 + x_2 v_{P_i} e_i \in \mathcal{C}P_i^{-1} \\ &\iff x_2 = \frac{m}{v_{P_i}} \ \text{ et } \ x_1 + x_2 u_{P_i} = \frac{1}{c} + m' \ \text{ avec } m \text{ et } m' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

car (cf_1, e_i) est une $\mathbb{R}$ base de $\mathbb{R}^2$.
Comme $x_2 \in]0,1]$, on a : $m \in \{1, \dots, v_{P_i}\}$,
comme $x_1 \in]0,1]$,

$$u_{P_i} \frac{m}{v_{P_i}} - \frac{1}{c} < m' \leq u_{P_i} \frac{m}{v_{P_i}} - \frac{1}{c} + 1 \,,$$

donc m' est défini de façon unique $\forall m = 1, \dots, v_{P_i}$ fixé.

Remarque III.2.2. — $\forall i = 1, \dots, h_{\mathcal{C}}$,

$$\text{Card } \widehat{D_{P_i}} = v_{P_i} = \frac{N(P_i) c^2 \Delta}{N(\mathcal{C}) \sqrt{D_k}} \ \text{(d'après le lemme I.3.3)} \,.$$

Remarque III.2.3.

a) Si $x_2 = 1$ alors $m = v_{P_i}$ donc $m' = u_{P_i}$ et $x_1 = \frac{1}{c}$.

b) Si $x_1 = 1$ alors $x_2 = \frac{1}{c}$ (et $m = \frac{v_{P_i}}{c}$).

En effet :

Si $x_1 = 1$ alors $cf_1 + x_2 cf_2 \in 1 + \mathcal{C}P_i^{-1}$ donc $x_2 cf_2 \in 1 + \mathcal{C}P_i^{-1}$ donc $x_2 cf_2 = 1 + z$ avec $z \in \mathcal{C}P_i^{-1}$ et $x_2 c = f_2^{-1} + f_2^{-1} z$ mais $f_2^{-1} \equiv 1[\mathcal{C}]$ donc $f_2^{-1} = 1 + z'$ avec $z' \in \mathcal{C}$.

Par suite : $x_2 c - 1 = z' + f_2^{-1} z \in \mathcal{C}P_i^{-1}$. De plus $x_2 u_{P_i} - \frac{1}{c} \in \mathbb{Z}$ donc $u_{P_i} x_2 c - 1 \in \mathbb{Z}$ donc $u_{P_i}(x_2 c - 1) = u_{P_i} x_2 c - u_{P_i} \in \mathbb{Z}$ car $u_{P_i} - 1 \in \mathbb{Z}$. Par conséquent : $x_2 c - 1 \in \mathbb{Q}$ donc $x_2 c - 1 \in \mathbb{Q} \cap \mathcal{C}P_i^{-1}$ donc $x_2 c - 1 \in c\mathbb{Z}$ d'après le lemme III.2.1 ; de plus $x_2 \in]0,1]$, donc $x_2 = \frac{1}{c}$.

On déduit des remarques précédentes et de la proposition III.2.2 le :

THÉORÈME III.2.1. — *Dans le cas où $d = 2$ on a :*

$$L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\zeta(2,\frac{1}{c})}{N(P_q)c^2[U_{\mathcal{C}}:V]} - \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\log N(P_q)R(V)}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}[U_{\mathcal{C}}:V]}$$

$$+ \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}v_{P_q}} \sum_{(x_1,x_2)\in\widehat{D}_{P_q}} \frac{e^{-x_1z_1}e^{-x_2z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}\, dz_1 dz_2$$

$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\zeta(2,\frac{1}{c})}{N(P_q)c^2[U_{\mathcal{C}}:V]} - \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\log N(P_q)R(V)}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}[U_{\mathcal{C}}:V]}$$

$$+ \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}} \int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{m=1}^{v_{P_q}} \frac{e^{-x_1^q(m)z_1}e^{-\frac{m}{v_{P_q}}z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}\, dz_1 dz_2 .$$

Remarque III.2.4. — L'expression donnée dans le théorème III.2.1 est le point de départ des 2 derniers chapitres de ce travail, ces deux chapitres pouvant d'ailleurs être étudiés de façon indépendante bien que présentant de grandes similitudes dans le plan et les idées. Elle pourrait être aussi le point de départ d'un sixième chapitre :

Remarque III.2.5. — Si l'on pose

$$\begin{cases} u = \dfrac{az_1 - z_2}{\Delta} \\ \text{et} \\ v = \dfrac{z_2 - \frac{1}{a}z_1}{\Delta} \end{cases}$$

dans

$$\int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}v_{P_q}} \sum_{(x_1,x_2)\in\widehat{D}_{P_q}} \frac{e^{-x_1z_1}e^{-x_2z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}\, dz_1 dz_2$$

$$= \frac{1}{c^2\Delta} \int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{N(P_q)} \sum_{(x_1,x_2)\in\widehat{D}_{P_q}} \frac{e^{-x_1z_1}e^{-x_2z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}\, dz_1 dz_2.$$

Alors

$$\begin{cases} u + v = z_1 \\ \text{et} \\ \dfrac{1}{a}u + av = z_2 \end{cases}$$

on obtient donc :

$$\frac{1}{c^2\Delta} \int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{N(P_q)} \sum_{(x_1,x_2)\in\widehat{D}_{P_q}} \frac{e^{-x_1z_1}e^{-x_2z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}\, dz_1 dz_2$$

$$= \frac{1}{c^2} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{N(P_q)} \sum_{(x_1,x_2)\in\widehat{D}_{P_q}} \frac{e^{-x_1(u+v)}e^{-x_2(\frac{1}{a}u+av)}}{(1-e^{-(u+v)})(1-e^{-(\frac{1}{a}u+av)})}\, du\, dv .$$

Notons de plus (cf. chapitre I, p. 17) que dans le cas $d = 2$ on a pour Re $s > 1$:

$$L_{\mathcal{C}}(s,\chi) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{N(P_q)^s} \times \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \times \frac{1}{\Gamma(s)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(z_1+z_2)}}{1 - e^{-c(z_1+z_2)}}\, dz_1\, dz_2$$
$$+ \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{N(P_q)^s} \times \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \times \frac{1}{c^{2s}} \sum_{(x_1,x_2)\in \widehat{D}_{P_q}} \zeta(s,\frac{1}{a},a,x_1,x_2)$$

où

$$\zeta(s,\frac{1}{a},a,x_1,x_2) = \frac{1}{\Gamma(s)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_1(u+v)}e^{-x_2(\frac{1}{a}u+av)}}{(1 - e^{-(u+v)})(1 - e^{-(\frac{1}{a}u+av)})}(uv)^{s-1}\, du\, dv$$
$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left[x_1 + m + (x_2 + n)\frac{1}{a}\right]^s \left[x_1 + m + (x_2 + n)a\right]^s}$$

est la fonction utilisée par Egami dans [E] et Shintani dans [S1] (proposition 3, p. 176 et théorème 1, p. 184).

Du théorème III.2.1 on déduit alors que :

$$\lim_{s\to 1} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{N(P_q)^s} \times \frac{1}{c^{2s}} \sum_{(x_1,x_2)\in \widehat{D}_{P_q}} \zeta(s,\frac{1}{a},a,x_1,x_2) = -\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q) \log N(P_q) \log a}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}$$
$$+\frac{1}{c^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{N(P_q)} \sum_{(x_1,x_2)\in \widehat{D}_{P_q}} \frac{e^{-x_1(u+v)}e^{-x_2(\frac{1}{a}u+av)}}{(1 - e^{-(u+v)})(1 - e^{-(\frac{1}{a}u+av)})}\, du\, dv\,.$$

Un prolongement de ce travail consisterait donc à comparer les résultats obtenus ici en $s = 1$ avec ceux obtenus par Egami (cf. [E]) et Shintani (cf. [S1]) en $s = 0$.

Chapitre IV

EXPRESSION DE $L_c(1,\chi)$ À L'AIDE DE $H_s(a) - H_s(\frac{1}{a})$, $(s = 1,\ldots,v_{P_q}-1)$

En 1980, Novikov a obtenu une “formule limite de Kronecker” où le second terme du développement de Laurent de la fonction zêta d'un corps de nombre au voisinage de $s=1$, s'exprimait à l'aide de valeurs particulières de la fonction :

$$\rho(x,\alpha,\beta)=\int_0^1 \frac{\log(1-t^x e^{2\pi i\alpha})}{e^{-2\pi i\beta}-t}\,dt,\ \ (x>0,\beta\notin\mathbb{Z}).$$

On va maintenant exprimer $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ à l'aide de la différence entre les valeurs en a et $\frac{1}{a}$ de fonctions de la forme :

$$H_s(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\log(1-\zeta_q^s e^{-xt})}{1-\zeta_q^{su_{P_q}}e^{-t}}\,dt\ \ (x>0)$$

$(s=1,\dots,v_{P_q}-1)$ où $\zeta_q=e^{\frac{2\pi i}{v_{P_q}}}$.

Notons que :

• $H_s(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1-\zeta_q^s T^x)}{(1-\zeta_q^{su_{P_q}}T)}\frac{dT}{T}$.

• Les fonctions H_s dépendent de q (indice que nous ne rajouterons pas dans la suite pour ne pas surcharger les notations).

Le calcul de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ commence par une nouvelle transformation de :

$$C=\frac{1}{[U_C:V]N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}\int_{\Gamma_a}\sum_{q=1}^{h_C}\frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}}\sum_{m=1}^{v_{P_q}}\frac{e^{-x_1^q(m)z_1}e^{-\frac{m}{v_{P_q}}z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}\,dz_1dz_2$$

(cf. théorème III.2.1, dernier terme) obtenue à l'aide de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fraction rationnelle :

$$\frac{T^{r-1}}{1-T^{v_{P_q}}}\ \ (\text{pour } r=1,\dots,v_{P_q}).$$

L'intérêt de cette décomposition est double : d'une part il permet d'intégrer par rapport à l'une des variables, d'autre part l'apparition de racines v_{P_q}-ième de l'unité permet “d'avaler” l'entier $E\Big(\frac{mu_{P_q}}{v_{P_q}}-\frac{1}{c}\Big)+1$ intervenant dans $x_1^q(m)$ et que l'on maîtrise mal.

On trouve alors une somme sur s de 1 à v_{P_q} dans laquelle on isole ensuite (théorème IV.2.1) le terme en $s=v_{P_q}$, la convergence de l'intégrale en $z=0$ de ce terme étant assurée par la relation $\sum_{\sigma\in G}\widetilde{\chi}(\sigma)=0$. Les termes restants conduisent aux fonctions H_s. Le paragraphe 3 développe une variante (cf. aussi la remarque IV.3.1) qui remémore les obstacles auxquels on fut confronté au cours de ce travail.

1. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

THÉORÈME IV.1.1. — *Posons* $\forall q = 1,\dots,h_{\mathcal{C}}$,

$$\zeta_q = e^{\frac{2\pi i}{v_{P_q}}}$$

et, $\forall m = 1,\dots,v_{P_q}$

$$x_1^q(m) = \theta\Big(\frac{mu_{P_q}}{v_{P_q}} - \frac{1}{c}\Big),$$

(avec $\theta(x) = E(x) - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$*).*

On a alors :

$$C = \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}\int_0^{+\infty}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}}\sum_{s=1}^{v_{P_q}}\frac{e^{-\frac{2\pi is}{c}}\zeta_q^{u_{P_q}s}e^{\frac{-z}{v_{P_q}}}}{1-\zeta_q^{u_{P_q}s}e^{\frac{-z}{v_{P_q}}}}\times\log\left[\frac{1-\zeta_q^s e^{\frac{-az}{v_{P_q}}}}{1-\zeta_q^s e^{\frac{-z}{av_{P_q}}}}\right]dz.$$

Preuve. — Soit donc

$$(E)\qquad C = \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}\int_{\Gamma_a}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}}\sum_{m=1}^{v_{P_q}}\frac{e^{-x_1^q(m)z_1}e^{-\frac{m}{v_{P_q}}z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}dz_1dz_2.$$

Posons $P(T) = T^{v_{P_q}} - 1, \forall r = 1,\dots,v_{P_q}$ on a :

$$(D)\qquad \frac{T^{r-1}}{1-T^{v_{P_q}}} = \sum_{s=1}^{v_{P_q}}\frac{A_{r,s}}{\zeta_q^s - T}\ \text{avec}\ A_{r,s} = \frac{\zeta_q^{s(r-1)}}{P'(\zeta_q^s)} = \frac{\zeta_q^{sr}}{v_{P_q}}.$$

Par suite $\forall q = 1,\dots,h_{\mathcal{C}}$ et $\forall z_1 > 0, \forall z_2 > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{(x_1,x_2)\in\widehat{D}_{P_q}}\frac{e^{-x_1z_1}e^{-x_2z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})} &= \sum_{m=1}^{v_{P_q}}\frac{e^{-x_1^q(m)z_1}}{(1-e^{-z_1})}\times\frac{e^{-\frac{m}{v_{P_q}}z_2}}{(1-e^{-z_2})}\\ &= \sum_{m=1}^{v_{P_q}}\left[\sum_{s=1}^{v_{P_q}}\frac{\zeta_q^{sx_1(m)v_{P_q}}}{v_{P_q}}\times\frac{e^{-\frac{z_1}{v_{P_q}}}}{\zeta_q^s - e^{-\frac{z_1}{v_{P_q}}}}\right]\frac{e^{-\frac{m}{v_{P_q}}z_2}}{1-e^{-z_2}}\end{aligned}$$

en appliquant (D) avec $T = e^{-\frac{z_1}{v_{P_q}}}$ et $r = r(m) = x_1(m)v_{P_q}, \forall m = 1,\dots,v_{P_q}$ fixé (notons que : $x_1(m) = \frac{r(m)}{v_{P_q}}$ avec $r(m) \in \{1,\dots,v_{P_q}\}$ car $0 < x_1(m) \le 1, \forall m = 1,\dots,v_{P_q}$).

Comme

$$\zeta_q^{sx_1(m)v_{P_q}} = e^{2\pi is\left[\frac{1}{c} - \frac{mu_{P_q}}{v_{P_q}}\right]} = e^{\frac{2\pi is}{c}}\zeta_q^{-mu_{P_q}s}$$

et

$$\int_{\frac{1}{a}z_2}^{az_2} \frac{e^{-\frac{z_1}{v_{P_q}}}}{\zeta_q^s - e^{-\frac{z_1}{v_{P_q}}}}dz_1 = \int_{\frac{1}{a}z_2}^{az_2} \frac{\zeta_q^{-s}e^{-\frac{z_1}{v_{P_q}}}}{1-\zeta_q^{-s}e^{-\frac{z_1}{v_{P_q}}}}dz_1$$

$$= v_{P_q}\left[\log\left(1-\zeta_q^{-s}e^{-\frac{az_2}{v_{P_q}}}\right) - \log(1-\zeta_q^{-s}e^{-\frac{z_2}{av_{P_q}}}\Big)\right]$$

en désignant par log la détermination principale du logarithme complexe, on obtient en intégrant par rapport à z_1 l'expression (E) :

$$\int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{(x_1,x_2)\in\widehat{D}_{P_q}} \frac{e^{-x_1z_1}e^{-x_2z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}dz_1\,dz_2$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{m=1}^{v_{P_q}} \sum_{s=1}^{v_{P_q}} \frac{e^{\frac{2\pi is}{c}}\zeta_q^{-mu_{P_q}s}e^{-\frac{m}{v_{P_q}}z}}{1-e^{-z}} \log\left[\frac{1-\zeta_q^{-s}e^{\frac{-az}{v_{P_q}}}}{1-\zeta_q^{-s}e^{\frac{-z}{av_{P_q}}}}\right]dz$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{s=1}^{v_{P_q}} \frac{e^{\frac{2\pi is}{c}}\zeta_q^{-u_{P_q}s}e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}}{1-\zeta_q^{-u_{P_q}s}e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}} \log\left[\frac{1-\zeta_q^{-s}e^{\frac{-az}{v_{P_q}}}}{1-\zeta_q^{-s}e^{\frac{-z}{av_{P_q}}}}\right]dz$$

car

$$\sum_{m=1}^{v_{P_q}} \zeta_q^{-mu_{P_q}s}e^{-\frac{m}{v_{P_q}}z} = \frac{\zeta_q^{-u_{P_q}s}e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}(1-e^{-z})}{1-\zeta_q^{-u_{P_q}s}e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}}$$

d'où le résultat annoncé en changeant s en $v_{P_q}-s$ pour $s = 1,\ldots,v_{P_q}-1$.

2. Nouvelle expression de $L_C(1,\chi)$

On commence par évaluer précisément le terme correspondant à $s = v_{P_q}$ dans l'expression de C donnée dans le théorème IV.1.1.

THÉORÈME IV.2.1. — *Posons*

$$C_1 = \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \frac{e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}}{1-e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}} \left[\log\left(1-e^{-\frac{az}{v_{P_q}}}\right) - \log(1-e^{-\frac{z}{av_{P_q}}}\Big)\right]dz.$$

Alors

$$C_1 = 2\sum_{q=1}^{h_C} \chi(P_q)\log a \log N(P_q).$$

Preuve. — Mettons en évidence la partie principale en 0 dans l'intégrale définissant C_1 :

$$C_1 = \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \Big[\frac{e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}}{1-e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}} - \frac{v_{P_q}}{z} \Big] \left[\log\left(1-e^{-\frac{az}{v_{P_q}}}\right) - \log\left(1-e^{-\frac{z}{av_{P_q}}}\right)\right] dz$$

$$+ \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{h_C} \chi(P_q) \frac{\log\left(1-e^{-\frac{az}{v_{P_q}}}\right) - \log\left(1-e^{-\frac{z}{av_{P_q}}}\right)}{z} \, dz$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{h_C} \chi(P_q) \frac{\log\left(1-e^{-\frac{az}{v_{P_q}}}\right) - \log\left(1-e^{-\frac{z}{av_{P_q}}}\right)}{z} \, dz$$

car

$$\int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \Big[\frac{e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}}{1-e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}} - \frac{v_{P_q}}{z} \Big] \left[\log\left(1-e^{-\frac{az}{v_{P_q}}}\right) - \log\left(1-e^{-\frac{z}{av_{P_q}}}\right)\right] dz$$

$$= \sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \int_0^{+\infty} \Big[\frac{e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}}{1-e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}} - \frac{v_{P_q}}{z} \Big] \left[\log\left(1-e^{-\frac{az}{v_{P_q}}}\right) - \log\left(1-e^{-\frac{z}{av_{P_q}}}\right)\right] dz$$

(chaque intégrale de la somme étant maintenant convergente en 0)

$$= \sum_{q=1}^{h_C} \chi(P_q) \int_0^{+\infty} \Big[\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} \Big] \left[\log\left(1-e^{-au}\right) - \log\left(1-e^{\frac{-u}{a}}\right)\right] du$$

(en posant $u = \frac{z}{v_{P_q}}$ dans chaque intégrale de la somme)

$$= 0 \quad \text{car} \quad \sum_{q=1}^{h_C} \chi(P_q) = 0.$$

Le théorème IV.2.1 s'obtient alors grâce au :

LEMME IV.2.1. — *$\forall \varepsilon > 0$, on a :*

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\log(1-e^{-t})}{t} \, dt = -\frac{1}{2}(\log\varepsilon)^2 + \int_1^{+\infty} \frac{\log(1-e^{-t})}{t} \, dt + \ell(\varepsilon)$$

avec

$$\ell(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{\log(1-e^{-t}) - \log t}{t} \, dt, \ \forall \varepsilon \geq 0\,.$$

(En effet :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\log(1-e^{-t})}{t} \, dt - \int_\varepsilon^1 \frac{\log t}{t} \, dt = \int_1^{+\infty} \frac{\log(1-e^{-t})}{t} \, dt + \ell(\varepsilon)\,.)$$

Par suite, $\forall \varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\log\left(1-e^{-\frac{az}{v_{P_q}}}\right) - \log(1-e^{-\frac{z}{av_{P_q}}})}{z}\, dz$$

$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \left[\int_{\frac{a\varepsilon}{v_{P_q}}}^{+\infty} \frac{\log(1-e^{-t})}{t}\, dt - \int_{\frac{\varepsilon}{av_{P_q}}}^{+\infty} \frac{\log(1-e^{-t})}{t}\, dt \right]$$

$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \left[-\frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{a\varepsilon}{v_{P_q}}\right)\right]^2 + \ell\left(\frac{a\varepsilon}{v_{P_q}}\right) + \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{\varepsilon}{av_{P_q}}\right)\right]^2 - \ell\left(\frac{\varepsilon}{av_{P_q}}\right)\right]$$

$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \left[-\frac{1}{2} \log a^2 \log\left(\frac{\varepsilon^2}{v_{P_q}^2}\right) + \ell\left(\frac{a\varepsilon}{v_{P_q}}\right) - \ell\left(\frac{\varepsilon}{av_{P_q}}\right)\right]$$

$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \left[\log a^2 \log v_{P_q} + \ell\left(\frac{a\varepsilon}{v_{P_q}}\right) - \ell\left(\frac{\varepsilon}{av_{P_q}}\right)\right]$$

car $\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \log \varepsilon^2 \log a^2 = 0, \forall \varepsilon > 0$.

On en déduit que :

$$C_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \left[\log a^2 \log v_{P_q} + \ell\left(\frac{a\varepsilon}{v_{P_q}}\right) - \ell\left(\frac{\varepsilon}{av_{P_q}}\right)\right]$$

$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \log a^2 \log v_{P_q} \quad \left(\text{car } \int_0^1 \frac{\log(1-e^{-t}) - \log t}{t}\, dt \text{ est convergente}\right)$$

ou encore :

$$C_1 = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \log a^2 \log N(P_q) \;\text{ car }\; \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \log\left(\frac{c^2 \Delta}{\sqrt{D_k} N(\mathcal{C})}\right) = 0.$$

THÉORÈME IV.2.2. — *Posons*

$$C_2 = \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} \frac{e^{\frac{-2\pi i s}{c}} \zeta_q^{u_{P_q} s} e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}}{1-\zeta_q^{u_{P_q} s} e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}} \log\left[\frac{1-\zeta_q^s e^{\frac{-az}{v_{P_q}}}}{1-\zeta_q^s e^{\frac{-z}{av_{P_q}}}}\right] dz.$$

Alors :

$$C_2 = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi i s}{c}} \int_0^{+\infty} \frac{\log\left(1-\zeta_q^s e^{-az}\right) - \log\left(1-\zeta_q^s e^{-\frac{z}{a}}\right)}{1-\zeta_q^{u_{P_q} s} e^{-z}}\, dz$$
$$-\Delta \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \zeta(2, \frac{1}{c}).$$

Preuve. — Chaque terme de la somme correspondant à une intégrale convergente puisque $s \neq v_{P_q}$ on a, en utilisant la relation $\frac{x}{1-x} = -1+\frac{1}{1-x}$:

$$C_2 = \sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi i s}{c}} \int_0^{+\infty} \frac{\log\left(1-\zeta_q^s e^{-\frac{az}{v_{P_q}}}\right) - \log\left(1-\zeta_q^s e^{-\frac{z}{a v_{P_q}}}\right)}{1-\zeta_q^{u_{P_q} s} e^{-\frac{z}{v_{P_q}}}}\, dz$$
$$- \sum_{q=1}^{h_C} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi i s}{c}} \int_0^{+\infty} \left[\log\left(1-\zeta_q^s e^{-\frac{az}{v_{P_q}}}\right) - \log\left(1-\zeta_q^s e^{-\frac{z}{a v_{P_q}}}\right)\right] dz$$

puis en posant $t = \frac{z}{v_{P_q}}$ dans chaque intégrale on obtient :

$$C_2 = \sum_{q=1}^{h_C} \chi(P_q) \sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi i s}{c}} \int_0^{+\infty} \frac{\log\left(1-\zeta_q^s e^{-at}\right) - \log\left(1-\zeta_q^s e^{-\frac{t}{a}}\right)}{1-\zeta_q^{u_{P_q} s} e^{-t}}\, dt$$
$$- \sum_{q=1}^{h_C} \chi(P_q) \sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi i s}{c}} \int_0^{+\infty} \left[\log\left(1-\zeta_q^s e^{-at}\right) - \log\left(1-\zeta_q^s e^{-\frac{t}{a}}\right)\right] dt\,.$$

Pour obtenir le résultat annoncé, il reste à évaluer plus précisément le second terme de la différence.

LEMME IV.2.2. — *$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall \zeta \in \mathbb{C}$ tel que $|\zeta| = 1$ on a :*

$$\int_0^{+\infty} \log(1-\zeta e^{-\alpha t})\, dt = -\frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n^2}\,.$$

Preuve.

$$\log(1-\zeta e^{-\alpha t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n} e^{-\alpha n t},\ \forall t > 0\,.$$

Fixons $\varepsilon > 0$, on a alors (la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n} e^{-\alpha n t}$ convergeant normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$) :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty} \log(1-\zeta e^{-\alpha t})\, dt &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-\alpha n t}\, dt \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{\alpha n^2} e^{-\alpha n \varepsilon}\end{aligned}$$

et on obtient le résultat annoncé en faisant tendre ε vers 0 (la série de fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{\alpha n^2} e^{-\alpha n t}$ étant normalement convergente sur $[0, +\infty[$, sa somme est continue sur $[0, +\infty[$ donc en 0).

LEMME IV.2.3.

$$\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi is}{c}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta_q^{ns}}{n^2} = \frac{1}{v_{P_q}}\zeta\big(2,\frac{1}{c}\big)-\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi is}{c}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta_q^{ns}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{2\pi i\left[\frac{n}{v_{P_q}}-\frac{1}{c}\right]s}}{n^2}\\
&= \sum_{\substack{n=1\\ \frac{n}{v_{P_q}}-\frac{1}{c}\in\mathbb{Z}}}^{+\infty} \frac{v_{P_q}-1}{n^2}+\sum_{\substack{n=1\\ \frac{n}{v_{P_q}}-\frac{1}{c}\notin\mathbb{Z}}}^{+\infty} -\frac{1}{n^2}\\
&= \sum_{\substack{n=1\\ \frac{n}{v_{P_q}}-\frac{1}{c}\in\mathbb{Z}}}^{+\infty} \frac{v_{P_q}}{n^2}-\frac{\pi^2}{6}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{v_{P_q}}{\left(kv_{P_q}+\frac{v_{P_q}}{c}\right)^2}-\frac{\pi^2}{6}\\
&= \frac{c^2}{v_{P_q}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(kc+1)^2}-\frac{\pi^2}{6}\,.
\end{aligned}$$

■

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{h_C}\chi(P_q)\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi is}{c}}\int_0^{+\infty}\left[\log\left(1-\zeta_q^s e^{-at}\right)-\log\left(1-\zeta_q^s e^{-\frac{t}{a}}\right)\right]dt\\
= \sum_{q=1}^{h_C}\chi(P_q)\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi is}{c}}\Delta\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta_q^{sn}}{n^2}
\end{aligned}$$

(en utilisant le lemme IV.2.2 et en remarquant que $a-\frac{1}{a}=\det(f_1,f_2)=\Delta$)

$$= \Delta\sum_{q=1}^{h_C}\frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}}\zeta\big(2,\frac{1}{c}\big)$$

en utilisant le lemme IV.2.3 et en notant que :

$$\sum_{q=1}^{h_C}\chi(P_q)\frac{\pi^2}{6}=0\,.$$

Ce qui termine la preuve du théorème IV.2.2.

THÉORÈME IV.2.3. — *Sous les hypothèses énoncées dans l'introduction du chapitre III, on a :*

$$L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\log N(P_q)\log a}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}$$

$$+\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi i s}{c}}\int_0^{+\infty}\frac{\log(1-\zeta_q^s e^{-az})-\log(1-\zeta_q^s e^{-\frac{z}{a}})}{1-\zeta_q^{u_{P_q}s}e^{-z}}\,dz$$

$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\log N(P_q)\log a}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}$$

$$+\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi i s}{c}}\left[H_s(a)-H_s\left(\frac{1}{a}\right)\right].$$

Preuve. — Ce résultat s'obtient aisément à l'aide de l'expression (E) du théorème III.2.1 en remarquant que :

- $C = \dfrac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}(C_1+C_2)$
- $\dfrac{\Delta}{v_{P_q}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})} = \dfrac{1}{c^2 N(P_q)}$

et en utilisant les théorèmes IV.2.1 et IV.2.2.

COROLLAIRE IV.2.1. — *$\forall\sigma \in G$, notons $P_{1,\sigma},\dots,P_{\frac{h_{\mathcal{C}}}{n},\sigma}$ les $\frac{h_{\mathcal{C}}}{n}$ éléments P de $\{P_1,\dots,P_{h_{\mathcal{C}}}\}$ tels que :*

$$\chi(P) = \widetilde{\chi}(\sigma)$$

et posons $\mathfrak{a}_\sigma = \prod_{k=1}^{\frac{h_{\mathcal{C}}}{n}} P_{k,\sigma}$. Alors, on a

$$L(1,\chi) = \Big[\sum_{\sigma\in G}\widetilde{\chi}(\sigma)\log N(\mathfrak{a}_\sigma)\Big]\frac{2R_k}{\sqrt{D_k}}\frac{h}{h_{\mathcal{C}}}$$

$$+\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}\left(\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)e^{\frac{-2\pi i s}{c}}\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1}\Big[H_s(a)-H_s\left(\frac{1}{a}\right)\Big]\right)\prod_{P|\mathcal{C}}\left[1-\frac{\chi(P)}{N(P)}\right]^{-1}$$

où R_k désigne le régulateur et h le nombre de classe du corps k.

Preuve. — Elle découle aisément du théorème IV.2.3 en notant que :

$$\frac{R(V)}{[U_{\mathcal{C}}:V]} = R_k[U:U_{\mathcal{C}}]$$

et que :

$$h_{\mathcal{C}} = \frac{2hN(\mathcal{C})}{[U:U_{\mathcal{C}}]}\prod_{P|\mathcal{C}}\left[1-\frac{\chi(P)}{N(P)}\right].$$

3. Une variante du théorème IV.2.3

PROPOSITION IV.3.1. — *Posons* $\forall x > 0$ *et* $\forall s = 1, \ldots, v_{P_q} - 1$

$$K_s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1-\zeta_q^{u_{P_q} s} e^{-xt})}{1-\zeta_q^s e^{-t}}\, dt\,.$$

Alors on a :

$$K_s(x) - K_s\left(\frac{1}{x}\right) = H_s(x) - H_s\left(\frac{1}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right)\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta_q^{u_{P_q} sn}}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta_q^{sn}}{n^2}\right]$$

$\forall x > 0$ *et* $\forall s = 1, \ldots, v_{P_q} - 1$ *fixés.*

Preuve.

LEMME IV.3.1. — *Soient* ζ *et* ζ' *deux nombres complexes de modules 1 et distincts de 1 fixés.*

Soit f *la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1-\zeta e^{-xt})}{1-\zeta' e^{-t}}\, dt, \ \forall x > 0\,.$$

Alors f *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et*

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\zeta t e^{-xt}}{(1-\zeta' e^{-t})(1-\zeta e^{-xt})}\, dt\,, \ \forall x > 0\,.$$

Preuve.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \ \forall x > 0$$

avec $f_1(x) = \int_0^1 \frac{\log(1-\zeta e^{-xt})}{1-\zeta' e^{-t}}\, dt$ et $f_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\log(1-\zeta e^{-xt})}{1-\zeta' e^{-t}}\, dt$.

• f_1 est dérivable sur $]0, +\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$) et :

$$f_1'(x) = \int_0^1 \frac{\zeta t e^{-xt}}{(1-\zeta' e^{-t})(1-\zeta e^{-xt})}\, dt\,, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

par application du théorème élémentaire de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, sur un intervalle compact.

(L'application $\begin{array}{rcl} [0,1] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t,x) & \longmapsto & \frac{\zeta t e^{-xt}}{(1-\zeta' e^{-t})(1-\zeta e^{-xt})} \end{array}$ étant continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$.)

• Soit $\varepsilon > 0$, fixé, f_2 est dérivable sur $[\varepsilon, +\infty[$ par application du théorème de Lebesgue de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (la condition de dominance étant assurée par l'inégalité :

$$\left|\frac{\zeta t e^{-xt}}{(1-\zeta' e^{-t})(1-\zeta e^{-xt})}\right| \leq \frac{t e^{-\varepsilon t}}{(1-e^{-t})(1-e^{-\varepsilon t})}, \ \forall x \in [\varepsilon, +\infty[\,)$$

et
$$f_2'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\zeta t e^{-xt}}{(1-\zeta' e^{-t})(1-\zeta e^{-xt})}\, dt,\ \forall x \in [\varepsilon, +\infty[$$
donc $\forall x \in]0,+\infty[$ (car $\varepsilon > 0$ est arbitraire). Par conséquent, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et
$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\zeta t e^{-xt}}{(1-\zeta' e^{-t})(1-\zeta e^{-xt})}\, dt,\ \forall x > 0. \qquad \blacksquare$$
En appliquant le lemme IV.3.1 on obtient donc :
$$H_s'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\zeta_q^s t e^{-tx}}{(1-\zeta_q^{su_{P_q}} e^{-t})(1-\zeta_q^s e^{-tx})}\, dt$$
et
$$K_s'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\zeta_q^{u_{P_q}s} t e^{-tx}}{(1-\zeta_q^s e^{-t})(1-\zeta_q^{u_{P_q}s} e^{-tx})}\, dt$$
$\forall x > 0$ et $\forall s = 1,\ldots,v_{P_q}-1$.

On remarque alors que, comme :
$$K_s'\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\zeta_q^{u_{P_q}s} t e^{-\frac{t}{x}}}{(1-\zeta_q^s e^{-t})(1-\zeta_q^{u_{P_q}s} e^{-\frac{t}{x}})}\, dt$$
en posant $\frac{t}{x} = t'$ on obtient :
$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} K_s'\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{\zeta_q^{u_{P_q}s} t' e^{-t'}}{(1-\zeta_q^s e^{-xt'})(1-\zeta_q^{u_{P_q}s} e^{-t'})}\, dt' \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{-t}{1-\zeta_q^s e^{-tx}} + \frac{t}{1-\zeta_q^{u_{P_q}s} e^{-t}}\right] dt + H_s'(x),\ \forall x > 0. \qquad (I)\end{aligned}$$
Or :
$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \left[\frac{t}{1-\zeta_q^{u_{P_q}s} e^{-t}} - \frac{t}{1-\zeta_q^s e^{-tx}}\right] dt \\ &\qquad = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t\zeta_q^{u_{P_q}sn} e^{-nt} - \sum_{n=1}^{+\infty} t\zeta_q^{sn} e^{-ntx}\right) dt \\ &\qquad = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta_q^{u_{P_q}sn}}{n^2} - \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta_q^{sn}}{n^2}\end{aligned}$$
(on peut intervertir $\sum$ et $\int$ en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue).

Par intégration de l'égalité (I) on obtient :
$$-K_s\left(\frac{1}{x}\right) = H_s(x) + x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta_q^{u_{P_q}sn}}{n^2} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta_q^{sn}}{n^2} + C(\zeta^s)$$
$\forall x > 0, \forall s = 1,\ldots,v_{P_q}-1$

(avec $C(\zeta^s) = -\left[H_s(1) + K_s(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta_q^{u_{P_q}sn}}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta_q^{sn}}{n^2}\right]$).

Le résultat annoncé s'en déduit aisément.

COROLLAIRE IV.3.1.

$$\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi is}{c}}\left[H_s(x)-H_s\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi is}{c}}\left[K_s(x)-K_s\left(\frac{1}{x}\right)\right],\ \forall x>0.$$

Preuve.

$$\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi is}{c}} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{sn}}{n^2} = \frac{1}{v_{P_q}}\zeta\left(2,\frac{1}{c}\right)-\frac{\pi^2}{6}$$

d'après le lemme IV.2.3.

De même :

$$\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{\frac{-2\pi is}{c}} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{u_{P_q}sn}}{n^2} = \sum_{\substack{n=1\\ \frac{u_{P_q}n}{v_{P_q}}-\frac{1}{c}\in\mathbb{Z}}}^{+\infty}\frac{v_{P_q}-1}{n^2}+\sum_{\substack{n=1\\ \frac{U_Pn}{v_{P_q}}-\frac{1}{c}\notin\mathbb{Z}}}^{+\infty}-\frac{1}{n^2}$$

$$= v_{P_q}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{v_{P_q}}{c}+kv_{P_q}\right)^2}-\frac{\pi^2}{6}$$

(d'après le d) de la Remarque III.2.1)

$$= \frac{1}{v_{P_q}}\zeta\left(2,\frac{1}{c}\right)-\frac{\pi^2}{6}.$$

Le résultat cherché s'obtient alors en utilisant la proposition IV.3.1.

COROLLAIRE IV.3.2.

$$L_{\mathcal{C}}(1,\chi)=\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)\log N(P_q)\log a}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}$$

$$+\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1}e^{\frac{-2\pi is}{c}}\left[K_s(a)-K_s\left(\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$=\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)\log N(P_q)\log a}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}$$

$$+\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1}e^{\frac{-2\pi is}{c}}\int_0^{+\infty}\frac{\log(1-\zeta_q^{u_{P_q}s}e^{-at})-\log(1-\zeta_q^{u_{P_q}s}e^{-\frac{t}{a}})}{1-\zeta_q^se^{-t}}dt.$$

Remarque IV.3.1. — Dans une première version de ce travail, j'avais obtenu l'expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ donnée dans le corollaire IV.3.2 en faisant une intégration par rapport à z_2 (au lieu de z_1) dans la démonstration du théorème IV.1.1. Mais l'analogue du théorème IV.2.2 conduit à des calculs beaucoup plus longs et techniques et utilise le développement en série de Fourier de la fonction périodique de période 1 définie par $f(x) = e^{-xz}$, $\forall x \in]0,1[$, ($z \in \mathbb{C}^*$ fixé).

Chapitre V

NOUVELLE EXPRESSION DE $L_c(1,\chi)$

1. Introduction

Dans ce dernier chapitre, on va établir une ultime expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ qui présente certaines analogies avec une formule limite de Kronecker établie par Zagier en 1975. De façon plus précise : dans [Z] le rôle joué par la fonction $\rho(x,\alpha,\beta)$ de Novikov est remplacé par celui joué par la fonction :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right) \log(1-e^{-xt})\, dt \quad (x>0) \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell}\left[\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(\ell x) - \log(\ell x)\right]. \end{aligned}$$

Cette fonction F vérifiant en outre l'équation fonctionnelle :

$$F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi^2}{6}\left(x+\frac{1}{x}-2\right)+\frac{1}{2}(\log x)^2+2F(1)\,.$$

De plus

$$F(x) \sim \frac{-\pi^2}{12x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$ (cf. [Z], p. 171).

En reprenant le résultat du théorème III.2.1, on va exprimer $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ en fonction des valeurs en av_{P_q} et $\frac{1}{av_{P_q}}$ de la fonction :

$$G_q(z) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{+\infty} \left[\frac{e^{-\ell z t}}{t} - \frac{e^{-(\ell z + x_1^q(\ell))t}}{1-e^{-t}}\right] dt,\ \forall z>0\,.$$

Proposition V.1.1. — *$G_q(z)$ converge $\forall z > 0$ (la convergence étant normale sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon,+\infty[$ pour $\varepsilon > 0$ fixé).*

Preuve. — Elle repose sur le lemme suivant :

Lemme V.1.1. — *Soit $x \in [0,1]$ fixé. Soit f_x la fonction continue définie sur $[0,+\infty[$ par :*

$$\begin{cases} f_x(u) = \dfrac{e^{-xu}}{1-e^{-u}} - \dfrac{1}{u} & \text{si } u>0 \\ f_x(0) = \dfrac{1}{2} - x\,. \end{cases}$$

Alors il existe une constante M indépendante de u et de x telle que :

$$|f_x(u)| \leq M,\ \forall u \in [0,+\infty[,\ \forall x \in [0,1].$$

Preuve. — Comme, $\forall u \in [0,+\infty[$ fixé, $x \mapsto f_x(u)$ est décroissante on a :

$$f_1(u) \leq f_x(u) \leq f_0(u),\ \forall x \in [0,1].$$

Donc

$$|f_x(u)| \leq \mathrm{Max}(|f_1(u)|,|f_0(u)|),\ \forall x \in [0,1] \ \text{ et } \forall u \in [0,+\infty[\text{ fixé.}$$

Mais

$$\exists M_1 > 0 \ \text{ tel que } \ |f_1(u)| \leq M_1,\ \forall u \geq 0$$

$$\exists M_2 > 0 \ \text{ tel que } \ |f_0(u)| \leq M_2,\ \forall u \geq 0$$

(car f_1 et f_0 sont des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ tendant vers 0 à l'infini) et en prenant $M = \mathrm{Max}(M_1,M_2)$ on obtient le résultat annoncé. ■

La proposition V.1.1 découle alors de l'inégalité :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-\ell z t}}{t} - \frac{e^{-(\ell z + x_1^q(\ell))t}}{1-e^{-t}}\right]dt\right| &\leq M\int_0^{+\infty} e^{-\ell z t}\,dt \\ &\leq \frac{M}{\ell z},\ \forall z > 0.\end{aligned}$$

Remarque V.1.1. — On a :

$$G_q(z) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(\ell z + x_1^q(\ell)) - \log(\ell z)}{\ell}$$

en vertu des relations :

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(z) = \int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right]dt,\ \forall z \in \mathbb{C} \ \text{ tel que } \ \mathrm{Re}\, z > 0$$

(cf. [D], p. 324 par exemple) et

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \log\frac{b}{a},\ \forall a > 0, \forall b > 0 \ \text{ fixés}$$

(cette dernière égalité s'obtenant en appliquant, par exemple, le théorème de Fubini dans l'intégrale : $\int_0^{+\infty}\int_a^b e^{-xt}dx\,dt$).

L'idée du calcul qui va suivre est de permuter l'intégrale sur Γ_a et les sommes finies intervenant dans l'expression de C rappelée dans l'introduction du chapitre IV. Pour que cela soit possible on commence par isoler la partie polaire : on retrouve alors la même expression que celle obtenue dans le chapitre IV, l'expression restante conduisant cette fois aux fonctions G_q.

On termine ce chapitre en précisant un problème ouvert évoqué en introduction.

2. Expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ en fonction de $G_q\left(\frac{a}{v_{P_q}}\right)-G_q\left(\frac{1}{av_{P_q}}\right)$.

THÉORÈME V.2.1. — *C désignant toujours l'expression définie à la fin du chapitre I, on a :*

$$C=\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}\left[2\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\log N(P_q)\log a+\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\left[G_q\left(\frac{a}{v_{P_q}}\right)-G_q\left(\frac{1}{av_{P_q}}\right)\right]\right].$$

Preuve. — Le point de départ est à nouveau la relation de base :

$$C=\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}\int_{\Gamma_a}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}}\sum_{m=1}^{v_{P_q}}\frac{e^{-x_1^q(m)z_1}e^{-\frac{m}{v_{P_q}}z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}\,dz_1\,dz_2$$

mise en évidence dans le théorème III.2.1.

LEMME V.2.1.

$$\int_{\Gamma_a}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}}\sum_{m=1}^{v_{P_q}}\frac{e^{-\frac{m}{v_{P_q}}z_2}}{z_1(1-e^{-z_2})}\,dz_1\,dz_2=2\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\log N(P_q)\log a.$$

Preuve.

$$\int_{\Gamma_a}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}}\sum_{m=1}^{v_{P_q}}\frac{e^{-\frac{m}{v_{P_q}}z_2}}{z_1(1-e^{-z_2})}\,dz_1\,dz_2=\int_{\Gamma_a}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}}\frac{e^{-\frac{z_2}{v_{P_q}}}}{z_1(1-e^{-\frac{z_2}{v_{P_q}}})}\,dz_1\,dz_2$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}}\log a^2\frac{e^{-\frac{z_2}{v_{P_q}}}}{1-e^{-\frac{z_2}{v_{P_q}}}}\,dz_2\,.$$

Or

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}}\frac{e^{-\frac{z_2}{v_{P_q}}}}{1-e^{-\frac{z_2}{v_{P_q}}}}\,dz_2=-\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\log\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{v_{P_q}}}\right)$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\log\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{v_{P_q}}}\right)=-\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\log v_{P_q}$$

d'où le résultat (car $v_{P_q}=N(P_q)\times\frac{\Delta c^2}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}$ et $\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\log\frac{\Delta c^2}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}=0$). ∎

Posons :

$$C_1' = \int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{m=1}^{v_{P_q}} \frac{e^{-\frac{m}{v_{P_q}} z_2}}{z_1(1-e^{-z_2})}\, dz_1\, dz_2$$

(cf. lemme V.2.1) et

$$C_2' = \int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{m=1}^{v_{P_q}} \left[\frac{e^{-x_1^q(m) z_1}}{1-e^{-z_1}} - \frac{1}{z_1} \right] \frac{e^{-\frac{m}{v_{P_q}} z_2}}{(1-e^{-z_2})}\, dz_1\, dz_2 \,.$$

Alors

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k} N(\mathcal{C})} \left[C_1' + C_2' \right] \\ &= 2 \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q) \log N(P_q) \log a}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k} N(\mathcal{C})} + \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k} N(\mathcal{C})} C_2' \end{aligned}$$

d'après le lemme V.2.1.

On a de plus, l'intégrale considérée convergeant maintenant absolument (d'après le lemme V.1.1) :

$$\begin{aligned} C_2' &= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \int_{\Gamma_a} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{v_{P_q}} \left[\frac{e^{-x_1^q(m) z_1}}{1-e^{-z_1}} - \frac{1}{z_1} \right] e^{-\frac{m}{v_{P_q}} z_2} e^{-k z_2}\, dz_1\, dz_2 \\ &= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_{\Gamma_a} \left[\frac{e^{-x_1^q(\ell) z_1}}{1-e^{-z_1}} - \frac{1}{z_1} \right] e^{-\frac{\ell}{v_{P_q}} z_2}\, dz_1\, dz_2. \end{aligned}$$

En posant $\ell = k v_{P_q} + m$, on a alors : $x_1^q(\ell) = x_1^q(m)$.

(Notons que :

$$\begin{aligned} |C_2'| &\le \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{1}{v_{P_q}} \int_{\Gamma_a} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{v_{P_q}} M e^{-(k+\frac{m}{v_{P_q}}) z_2}\, dz_1\, dz_2 \\ &\le M \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{1}{v_{P_q}} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\Gamma_a} e^{-\frac{\ell}{v_{P_q}} z_2}\, dz_1\, dz_2 \\ &\le M \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\Delta}{v_{P_q}} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} z_2 e^{-\frac{\ell}{v_{P_q}} z_2}\, dz_2 \\ &\le M\Delta \Big(\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} v_{P_q} \Big) \times \frac{\pi^2}{6} < +\infty \end{aligned}$$

ce qui justifie l'intervertion de $\sum$ et $\int$ dans le calcul précédent.)

Comme enfin :

$$\frac{1}{v_{P_q}}\int_{\Gamma_a}\left[\frac{e^{-x_1^q(\ell)z_1}}{1-e^{-z_1}}-\frac{1}{z_1}\right]e^{-\frac{\ell}{v_{P_q}}z_2}\,dz_1\,dz_2$$

$$=\frac{1}{\ell}\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-x_1^q(\ell)z_1}}{1-e^{-z_1}}-\frac{1}{z_1}\right]\left[e^{-\frac{\ell z_1}{v_{P_q}a}}-e^{-\frac{\ell z_1 a}{v_{P_q}}}\right]dz_1$$

$$=\frac{1}{\ell}\left[\int_0^{+\infty}\left[-\frac{e^{-\left[\frac{\ell a}{v_{P_q}}+x_1^q(\ell)\right]z_1}}{1-e^{-z_1}}+\frac{e^{-\frac{\ell z_1 a}{v_{P_q}}}}{z_1}\right]dz_1\right.$$

$$\left.-\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-\frac{\ell z_1}{a v_{P_q}}}}{z_1}-\frac{e^{-\left(x_1^q(\ell)+\frac{\ell}{a v_{P_q}}\right)z_1}}{1-e^{-z_1}}\right]dz_1\right].$$

On obtient le résultat cherché.

Corollaire V.2.1.

$$L_{\mathcal{C}}(1,\chi)=\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)}{N(P_q)}\frac{\zeta\left(2,\frac{1}{c}\right)}{[U_{\mathcal{C}}:V]c^2}+\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)\log N(P_q)\log a}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}[U_{\mathcal{C}}:V]}$$

$$+\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\left[G_q\left(\frac{a}{v_{P_q}}\right)-G_q\left(\frac{1}{a v_{P_q}}\right)\right].$$

Preuve. — Il suffit pour cela de remplacer, dans l'expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ du théorème III.2.1, l'expression obtenue pour C dans le théorème V.2.1 dans l'expression de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$ du théorème III.2.1.

Remarque V.2.1.

(a) $$G_q\left(\frac{a}{v_{P_q}}\right)-G_q\left(\frac{1}{a v_{P_q}}\right)=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{\ell}\left[\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(x_1^q(\ell)+\frac{\ell a}{v_{P_q}}\right)-\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(x_1^q(\ell)+\frac{\ell}{a v_{P_q}}\right)-\log a^2\right]$$

(b) $$G_q\left(\frac{a}{v_{P_q}}\right)-G_q\left(\frac{1}{a v_{P_q}}\right)=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{\frac{\Delta}{v_{P_q}}}{\left[x_1^q(\ell)+\frac{\ell}{a v_{P_q}}+k\right]\left[x_1^q(\ell)+\frac{\ell a}{v_{P_q}}+k\right]}-\frac{\log a^2}{\ell}\right]$$

en vertu de la relation

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\right],\ \forall z\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{Z}^-$$

(cf. [D], p. 294 par exemple).

On va dans le paragraphe suivant indiquer quelques propriétés de cette série.

3. Quelques propriétés liées à G_q

Dans ce paragraphe, on commence par étudier plus précisément de quelle façon la série introduite dans la remarque V.2.1 converge. On établit ensuite une relation entre la fonction G_q et la fonction F de Zagier.

PROPOSITION V.3.1. — *Lorsque ℓ tend vers $+\infty$ on a :*

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(x_1^q(\ell)+\frac{\ell a}{v_{P_q}}\right)-\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(x_1^q(\ell)+\frac{\ell}{a v_{P_q}}\right)-\log a^2=\frac{\Delta v_{P_q}\widetilde{B}_1\left(\frac{u_{P_q}}{v_{P_q}}\ell-\frac{1}{c}\right)}{\ell}+O\left(\frac{1}{\ell^2}\right)$$

où $\widetilde{B}_1$ désigne la fonction périodique de période 1 coïncidant avec le polynôme de Bernoulli de degré 1 défini par $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$ si $x\in[0,1[$.

(Notons que : $\widetilde{B}_1(x)=\frac{1}{2}-\theta(x), \forall x\in\mathbb{R}$ donc $\widetilde{B}_1\left(\frac{u_{P_q}}{v_{P_q}}\ell-\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}-x_1^q(\ell), \forall \ell\in\mathbb{N}^*$.)

Preuve. — Il suffit de faire un développement limité d'ordre 1 de :

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(x_1^q(\ell)+\frac{\ell a}{v_{P_q}}\right)-\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(x_1^q(\ell)+\frac{\ell}{a v_{P_q}}\right)-\log a^2$$

en utilisant la relation :

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(z)=\log z-\frac{1}{2z}-2\int_0^{+\infty}\frac{t\,dt}{(t^2+z^2)(e^{2\pi t}-1)} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z>0$$

(cf. [W], p. 251 par exemple) et en remarquant que :

$$0\leq\int_0^{+\infty}\frac{t\,dt}{(t^2+z^2)(e^{2\pi t}-1)}\leq\frac{K_0}{z^2},\ \forall z\in\mathbb{R}^{+*}$$

(avec $K_0=\int_0^{+\infty}\frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1}$).

PROPOSITION V.3.2. — *La série*

$$\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\not\equiv\frac{v_{P_q}}{c}[v_{P_q}]}}^{+\infty}\left[\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(x_1(\ell)+\frac{\ell a}{v_{P_q}}\right)-\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(x_1(\ell)+\frac{\ell}{a v_{P_q}}\right)-\log a^2\right]$$

est convergente.

Preuve. — Prouvons tout d'abord le

LEMME V.3.1.

a) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{v_{P_q}}\widetilde{B}_1\left(\frac{u_{P_q}}{v_{P_q}}\ell-\frac{1}{c}\right)=\widetilde{B}_1(1)=-\frac{1}{2}$.

b) $$\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq\frac{v_{P_q}}{c}}}^{v_{P_q}} \widetilde{B}_1\left(\frac{u_{P_q}}{v_{P_q}}\ell-\frac{1}{c}\right)=0\,.$$

Preuve du lemme.

a) Comme l'application $\mathbb{Z}/v_{P_q}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/v_{P_q}\mathbb{Z}$:

$$\dot{\ell}\longmapsto\dot{\ell}' \text{ où } \ell'\equiv u_p\ell-\tfrac{v_{P_q}}{c}[v_{P_q}]$$

est une bijection car $\mathrm{pgcd}(u_{P_q},v_{P_q})=1$, on a :

$$\sum_{\ell=1}^{v_{P_q}}\widetilde{B}_1\left(\frac{u_{P_q}}{v_{P_q}}\ell-\frac{1}{c}\right)=\sum_{\ell'=1}^{v_{P_q}}\widetilde{B}_1\left(\frac{\ell'}{v_{P_q}}\right)=\widetilde{B}_1(1)$$

car $\widetilde{B}_1(-x)=-\widetilde{B}_1(x)$ si $x\notin\mathbb{Z}$ et $\widetilde{B}_1\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

b) $\frac{u_{P_q}}{v_{P_q}}\ell-\frac{1}{c}\in\mathbb{Z}$ si, et seulement si, $\ell=\frac{v_{P_q}}{c}+kv_{P_q}$ d'après le d) de la remarque III.2.1 donc

$$\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq\frac{v_{P_q}}{c}}}^{v_{P_q}}\widetilde{B}_1\left(\frac{u_{P_q}}{v_{P_q}}\ell-\frac{1}{c}\right)=\sum_{\ell'=1}^{v_{P_q}-1}\widetilde{B}_1\left(\frac{\ell'}{v_{P_q}}\right)=0\,.$$

La proposition V.3.2 résulte alors de la proposition V.3.1. et du lemme d'Abel (car $\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\not\equiv\frac{v_{P_q}}{c}[v_{P_q}]}}^{N}\widetilde{B}_1\left(\frac{u_{P_q}}{v_{P_q}}\ell-\frac{1}{c}\right)$ est borné indépendamment de N).

Proposition V.3.3. — *Les fonctions F et G_q ayant été définies dans l'introduction du chapitre on a :*

$$G_q(z)=F(z)+\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{\ell}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\ell zt}\left(1-e^{-x_1^q(\ell)t}\right)}{1-e^{-t}}\,dt,\ \forall z>0\,.$$

Preuve. — De l'égalité :

$$\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)+\frac{1-e^{-x_1^q(\ell)t}}{1-e^{-t}}=\frac{1}{t}-\frac{e^{-x_1^q(\ell)t}}{1-e^{-t}}\,,$$

on déduit :

$$\int_0^{+\infty}e^{-\ell zt}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right]dt+\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x_1^q(\ell)t}}{1-e^{-t}}e^{-\ell zt}\,dt$$
$$=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{t}-\frac{e^{-x_1^q(\ell)t}}{1-e^{-t}}\right]e^{-\ell zt}\,dt\,.$$

Donc :

$$G_q(z) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{+\infty} e^{-\ell tz} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right] dt + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x_1^q(\ell)t}}{1-e^{-t}} e^{-\ell zt}\, dt$$

et on obtient le résultat cherché en utilisant l'égalité :

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

pour $|x| < 1$. ∎

Proposition V.3.4.

$$G_q(z) = F(z) + \frac{1}{zv_{P_q}^2}\zeta\Big(2,\frac{1}{c}\Big) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \not\equiv \frac{v_{P_q}}{c}[v_{P_q}]}}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\ell zt}\big(1-e^{-x_1^q(\ell)t}\big)}{1-e^{-t}}\, dt, \ \forall z > 0\,.$$

Preuve. — Elle résulte du fait que : $x_1^q(\ell) = 1$ si, et seulement si, $\ell \equiv \frac{v_{P_q}}{c}[v_{P_q}]$ d'après la remarque III.2.3, d), car :

$$\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \equiv \frac{v_{P_q}}{c}[v_{P_q}]}}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{+\infty} e^{-\ell zt}\, dt = \frac{1}{zv_{P_q}^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\big(k+\frac{1}{c}\big)^2}\,.$$

Corollaire V.3.1.

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\log N(P_q)\log a}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}[U_{\mathcal{C}}:V]} + \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \Bigg[F\Big(\frac{a}{v_{P_q}}\Big) - F\Big(\frac{1}{av_{P_q}}\Big) \\ + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \not\equiv \frac{v_{P_q}}{c}[v_{P_q}]}}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\ell a}{v_{P_q}}t} - e^{-\frac{\ell}{av_{P_q}}t}}{1-e^{-t}} \Big(1-e^{-x_1^q(\ell)t}\Big)\, dt\Bigg]. \end{aligned}$$

Preuve. — Elle découle du corollaire V.2.1, de la proposition V.3.4 et de la remarque III.2.2.

Pour terminer cette étude, étudions de quelle manière l'expression obtenue dans le corollaire V.2.1 dépend de l'unité ε_1 ou plus précisément de a.

4. Que se passe-t-il lorsqu'on remplace ε_1 par ε_1^r, $(r \in \mathbb{N}^*)$?

Notons que les diverses formules obtenues dans le cas $d = 2$ sont encore valables si l'on remplace ε_1 par ε_1^r et ceci $\forall r \in \mathbb{N}^*$ fixé.

De plus :

a) Si V_r désigne le sous-groupe de $\mathcal{O}_k$ engendré par ε_1^r on a :

$$[U_{\mathcal{C}}:V_r] = [U_{\mathcal{C}}:V][V:V_r] = [U_{\mathcal{C}}:V]r.$$

b) La base cf_1, e_q de $\mathcal{C}P_q^{-1}$ construite dans le chapitre III ne dépend pas de r.

Donc, si l'on pose

$$\tau_1(e_q) = \lambda_{P_q} \text{ et } \tau_2(e_q) = \mu_{P_q},$$

λ_{P_q} et μ_{P_q} ne sont pas rationnels et comme :

$$cf_2^r = u_{P_q,r}cf_1 + v_{P_q,r}e_q, \ \forall r \in \mathbb{N}^*$$

on a :

$$\frac{c}{a^r} = u_{P_q,r}c + \lambda_{P_q}v_{P_q,r}$$

et

$$ca^r = u_{P_q,r}c + \mu_{P_q}v_{P_q,r}, \ \forall r \in \mathbb{N}^*$$

par suite :

$$\frac{u_{P_q,r}}{v_{P_q,r}} = \frac{1}{a^r v_{P_q,r}} - \frac{\lambda_{P_q}}{c}, \ \forall r \in \mathbb{N}^*.$$

Posons alors :

- $$\alpha(P_q) = \frac{\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}{N(P_q)c^2} = \frac{a^r - a^{-r}}{v_{P_q,r}}, \ \forall r \in \mathbb{N}^*$$
- $$x_{1,r}^q(\ell) = \theta\Big(\frac{\ell\alpha(P_q)}{a^{2r}-1} - \frac{\ell\lambda_{P_q}+1}{c}\Big), \ \forall \ell, r \in \mathbb{N}^*.$$

On déduit du corollaire V.2.1 la

Proposition V.4.1.

$$L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = \frac{1}{r}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\zeta\big(2,\frac{1}{c}\big)}{N(P_q)c^2[U_{\mathcal{C}}:V]} + \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\log N(P_q)\log a}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}[U_{\mathcal{C}}:V]}$$
$$+ \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}\frac{1}{r}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\left[G_{q,r}\Big(\frac{a^{2r}\alpha(P_q)}{a^{2r}-1}\Big) - G_{q,r}\Big(\frac{\alpha(P_q)}{a^{2r}-1}\Big)\right], \ \forall r \in \mathbb{N}^*.$$

avec

$$G_{q,r}(z) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{+\infty} \Big[\frac{1}{t} - \frac{e^{-x^q_{1,r}(\ell)\,t}}{1-e^{-t}}\Big] e^{-\ell z t}\, dt\,.$$

Remarque V.4.1.

$$\lim_{r\to+\infty} x^q_{1,r}(\ell) = \theta\Big[-\frac{\ell\lambda_{P_q}+1}{c}\Big] = \Big\{\frac{\ell\lambda_{P_q}+1}{c}\Big\},\ \text{car}\ \frac{\ell\lambda_{P_q}+1}{c} \notin \mathbb{Z}\,.$$

Remarque V.4.2. — Notons :

$$\widehat{x^q_1}(\ell) = \Big\{\frac{\ell\lambda_{P_q}+1}{c}\Big\}.$$

La suite $\{x^q_1,(\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[0,1]$ et même équirépartie.

(C'est-à-dire $\forall(\alpha,\beta) \in [0,1]^2$ avec $\alpha \le \beta$ on a :

$$\lim_{\ell\to+\infty} \frac{\text{Card}\,\big\{m \in \mathbb{N}^*/m \le \ell\ \text{ et }\ \alpha \le \widehat{x^q_1}(m) \le \beta\big\}}{\ell} = \beta-\alpha\,.)$$

Preuve. — C'est un résultat classique (cf. [P], par exemple) car $\frac{\lambda_{P_q}}{c} \notin \mathbb{Q}$.

Proposition V.4.2. — *L'expression* $\frac{1}{r}\sum\limits_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) G_{q,r}\Big(\frac{\alpha(P_q)}{a^{2r}-1}\Big)$ *admet une limite finie lorsque r tend vers $+\infty$.*

Preuve. — En faisant tendre r vers $+\infty$ dans l'expression obtenue dans la proposition V.4.1 et en notant que :

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\zeta(2,\frac{1}{c})}{N(P_q)c^2[U_{\mathcal{C}}:V]} = 0$$

et

$$\lim_{r\to+\infty} G_{q,r}\Big(\frac{a^{2r}\alpha(P_q)}{a^{2r}-1}\Big) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{+\infty} \Big[\frac{1}{t} - \frac{e^{-\widehat{x^q_1}(\ell)\,t}}{1-e^{-t}}\Big] e^{-\ell\alpha(P_q)\,t}\, dt$$

(par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue, la condition de dominance découlant du lemme V.2.2) donc

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) G_{q,r}\Big(\frac{a^{2r}\alpha(P_q)}{a^{2r}-1}\Big) = 0\,.$$

On obtient :

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) G_{q,r}\Big(\frac{\alpha(P_q)}{a^{2r}-1}\Big) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \log N(P_q) \log a - [U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})L_{\mathcal{C}}(1,\chi).$$

Mais aurait-on pu obtenir cette limite directement?

Références

[C] Colmez p. — *Résidu en $s = 1$ des fonctions zêta p-adiques,* Invent. Math. **91** (1988), 371–389.

[CN] Cassou-Noguès P. — *Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques,* Invent. Math. **51** (1979), 29–59.

[C-S] Coates J, Sinnott W. — *On p-adic L functions over real quadratic fields,* Invent. Math. **25** (1974), 253–279.

[D] Dieudonné J. — *Calcul infinitésimal*, Hermann Paris, 1968.

[E] Egami S. — *A note on the Kronecker limit formula for real quadratic yields*, Mathematica **33** (1986), 239–243.

[H] Herglotz G. — *Über die Kroneckersche Grensformel für reelle quadratische Körper, I, II*, Berichte über die Verhandl-d-Sächsischen Akad der Wiss Leipzig (1975), 3–14, 31–37.

[K] Katz N. — *Another look at p-adic L functions for totally real fields*, Math. Ann. **255** (1981), 33–43.

[L] Lang s. — *Algebraic number theory*, Addison-Wesley publishing company inc., (1970).

[N] Novikov a.p. — *Kronecker's limit formula in a real quadratic field*, Maths USSR Izvestija **17** (1981), 147–176.

[P] Polya g. & Szegö g. — *Problems and theorems in analysis I*, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[S1] Shintani t. — *On a Kronecker limit formula for real quadratics fields*, J. Fac. Sci. University Tokyo, Math **24** (1977), 167–199.

[S2] Shintani t. — *On evaluation of zêta functions of totally real algebraic number fields at non positive integers*, J. Fac. Sci. University Tokyo, Section 2 **23** (1976), 393–417.

[Sc] Sczech r. — *Eisenstein group cocycles for $GL_2\mathbb{Q}$ and values of L functions in real quadratic fields*, Comment. Math. Helv. **67** (1992), 363–382.

[Si] Siegel C.-L. — *Lectures on advanced analytic number theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961.

[T] Tate J. — *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$*, Birkhäuser-Bâle, 1984.

[W] Whittaker e.t. & Watson g.n. — *A course of modern analysis*, Fourth edition, Cambridge (reprinted), 1963.

[Z] Zagier d. — *A Kronecker limit formula for real quadratic fields*, Math. Ann. **213** (1975), 153–184.

– ◊ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(20 mai 1996)