

Cette thèse est dédiée à la mémoire
d'Ernest Doudart de Lagrée (1823-1868)

Remerciements

*Call me morbid, call me pale,
I've spent six years on your trail,
Six full years of my life on your trail
And if you have five seconds to spare,
Then I'll tell you the story of my life*

The Smiths, *Half a person*

J'ai maintenant l'impression que ce mémoire de thèse n'est qu'un projecteur, fait de trois cents pages noircies afin de renvoyer le lecteur aux quelques-unes qui les précèdent. Ces pages-là, encore blanches, sont la scène sur laquelle je cherche les paroles empreintes de la gravité qu'impose le point final que je mets à mes études ; comme toute scène, elles sont avant tout une occasion exceptionnelle de dire merci et je constate que j'ai bien des gens à remercier.

Messieurs Gostiaux et Massias, professeurs antinomiques, sont les deux enseignants qui m'ont le plus marqué durant ma carrière préuniversitaire et je ressens encore leur influence à la fois comme scientifique et comme enseignant.

De l'Institut Fourier, je crois pouvoir remercier tous les membres pour le riche environnement de travail qu'ils ont constitué pendant ces années. Je suis particulièrement reconnaissant à Agnès Coquio, qui a contribué à me faire entrer dans le monde des probabilités quantiques, et à Sylvestre Gallot qui m'a surpris par la sincérité qu'il met à jouer son rôle administratif et a ainsi contribué à me faire arriver jusqu'ici.

Parmi les thésards je n'en citerai que quelques-uns, faute de pouvoir les citer tous : d'abord mes collègues de bureau, Stéphane et Sophie, grands architectes d'intérieur, puis Vidian, Olivier et Eric. Ces derniers surtout ont subi la rédaction de ma thèse et mes répétitions. Ensuite je ne peux pas ne pas remercier Sébastien Boucksom, que j'ai vu avec plaisir assiéger mon salon à mi-temps pendant trois ans et Guillemette Reviron, que je remercie pour sa présence et qui évite ainsi d'être remerciée plus bas.

J'ai beaucoup voyagé durant cette thèse et ai ainsi eu l'occasion d'apprendre beaucoup scientifiquement et humainement. Je remercie Kalyan Sinha pour son

invitation en Inde et toute l'équipe de l'ISI, et plus spécialement Debashish Goswami et Partha Sarathi Chakraborty, pour leur accueil. J'ai surtout eu l'occasion de fréquenter la "Católica" de Santiago du Chili et tiens à remercier tout particulièrement Carlos Mora et Rely Pellicer pour l'amitié qu'ils m'ont témoignée. Rolando Rebolledo a été là-bas le grand animateur de ma vie scientifique et je suis particulièrement heureux de le retrouver dans mon jury.

J'ai d'ailleurs la chance d'être jugé par mon jury idéal ; j'ai eu l'occasion de rencontrer tous ses membres dans le passé et peux tous les assurer de mon admiration et de ma sympathie.

Je n'ai pas encore mentionné Stéphane Attal, qui trouve naturellement sa place en cette fin de paragraphe. Depuis qu'il a commencé à m'enseigner les probabilités quantiques, il n'a cessé de m'encourager et je lui dois énormément pour son soutien. Je ne lui suis pas moins redevable de l'exemple qu'il constitue et tous ceux qui m'ont fréquenté ces dernières années savent que l'influence qu'il a eue sur moi déborde le cadre mathématique ; bien que sa tutelle s'arrête ici, il restera "le Maître" et a droit à toute ma gratitude.

J'en arrive à ceux qui ont été plus directement exposés à mon mauvais caractère. Je pense tout d'abord à Gaën ; j'aurais peut-être plus travaillé à cette thèse sans elle et pourtant, même dans ces pages, je la remercie du fond du cœur pour sa présence. Enfin, je tiens à remercier mes parents, premières victimes de mon ingratitude quotidienne ; puisque l'occasion m'est ici fournie de peser mes mots je veux dire que je sais tout ce que je leur dois et ajouter le plus sincère des *merci*.

Table des matières

Mode d'emploi de cette thèse	8
Bibliographie	10
Introduction	14
I Présentation des résultats obtenus	21
1 Calcul stochastique quantique sur l'espace de Fock à temps discret	23
1.1 Motivations pour l'étude de $T\Phi$	24
1.1.1 Une motivation physique	24
1.1.2 Une motivation probabiliste	25
1.2 Calcul d'Itô abstrait sur l'espace de Fock à temps discret	26
1.3 Définition du calcul stochastique quantique à temps discret	30
1.3.1 Opérateurs fondamentaux	30
1.3.2 Définition de l'intégrale stochastique à temps discret	33
1.4 Espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure à 1	38
1.4.1 Espace de Fock associé à une marche aléatoire	38
1.4.2 Espaces de Fock à temps discret de multiplicité quelconque	39
2 Représentations intégrales et nucléaires sur l'espace de Fock à temps discret	45
2.1 Représentations nucléaires	46
2.1.1 Une première approche	46
2.1.2 Transformations de noyaux	49
2.1.3 Une condition suffisante de représentabilité nucléaire	56
2.2 Application aux questions de représentations intégrales	57
2.2.1 Représentations nucléaires et intégrales	58
2.2.2 Une condition suffisante de représentabilité intégrale	59
2.3 Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1	61

3	Calcul stochastique quantique sur l'espace de Fock	65
3.1	Espaces de Fock	65
3.1.1	Définition de l'espace de Fock simple	65
3.1.2	Calcul d'Itô abstrait sur Φ	67
3.1.3	Espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1	72
3.2	Définition de l'intégration stochastique quantique	73
3.2.1	Intégration stochastique quantique sur l'espace de Fock simple	73
3.2.2	Le cas de la multiplicité supérieure à 1	82
3.3	Représentations en noyaux de Maassen-Meyer	84
4	Approximations discrètes du calcul stochastique quantique	87
4.1	L'approximation de Attal	88
4.1.1	Approximation de l'espace de Fock simple	88
4.1.2	Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1	90
4.1.3	Tables d'Itô à temps discret et à temps continu	92
4.2	Les projections d'intégrales et de noyaux	93
4.2.1	Relations de commutation	93
4.2.2	Projections d'intégrales	93
4.2.3	Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1	97
4.2.4	Projections d'opérateurs à noyau	98
4.3	Convergence de la table d'Itô	100
4.3.1	Preuve de la formule d'Itô	100
4.3.2	Conséquences pour les probabilités classiques	106
5	Application à la représentation des opérateurs	109
5.1	Démarche générale	109
5.2	Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification	112
5.2.1	Opérateurs de seconde quantification	112
5.2.2	Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification différentielle	119
5.2.3	Le contre-exemple de Journé et Meyer	120
5.3	Extensions possibles de ces résultats	121
5.3.1	Représentabilité sur des sous-ensembles de \mathcal{E}	121
5.3.2	Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1	126
5.3.3	Secondes quantifications d'opérateurs non bornés	128
6	Approximations d'EDS quantiques et création de bruits quantiques	131
6.1	Dilatations d'évolutions complètement positives et EDS quantiques	132
6.1.1	Evolutions complètement positives et théorème de Lindblad	132
6.1.2	Equations différentielles stochastiques quantiques	134

6.2	Dilatations en temps discret et interactions répétées	137
6.2.1	Interactions répétées	137
6.2.2	Dilatations en temps discret	138
6.3	Résultats de convergence	139
6.3.1	Convergence de solutions d'équations différentielles stochas- tiques quantiques	139
6.3.2	Application aux problèmes d'évolution	144
6.3.3	Evolution Hamiltonienne et limite de couplage faible	146
6.4	Convergence des Lindbladiens et Hamiltoniens	147
6.4.1	Evolutions associées sur \mathcal{H}_0	147
6.4.2	Hamiltoniens associés à la dynamique	149

II Articles 155

A	Représentations intégrales et nucléaires des opérateurs sur l'espace de Fock à temps discret	157
B	Matrices de Pauli et formule d'Itô quantique	173
C	Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification	215
D	Interactions quantiques répétées et continues : la production spontanée de bruits quantiques	249
E	Chaînes d'atomes à $(N + 1)$ niveaux et bruits quantiques de dimension N	299

Mode d'emploi de cette thèse

La grande majorité des résultats que nous allons exposer ici ont donné lieu à des articles déjà rédigés. Nous en avons profité pour adopter une méthode de rédaction malhonnête mais dotée de nombreux attraits.

Dans les articles mathématiques, où il faut faire court, les aspects techniques incompressibles occupent un volume important au détriment des idées. Ici, à l'inverse, nous avons décidé de ne donner dans le corps du document que très peu de démonstrations ; cela permet de ne conserver que ce qui est au fond essentiel, de multiplier exemples et références culturelles et d'obtenir un texte facilement lisible. Cela risque en revanche de donner au lecteur une idée fautive de la complexité des résultats énoncés ici ; on s'apercevra bien vite qu'en tout cas cela attribue à chaque chapitre un volume qui n'est proportionnel ni à la taille des articles correspondant, ni à la longueur des preuves de ce qu'il contient. Si cela signifie que tout ce que nous exposons peut sembler également simple et naturel, nous nous en réjouissons.

Puisque nous faisons des mathématiques, il faut bien fournir des démonstrations à nos résultats. Nous avons joint à cette thèse les articles rédigés ; la plupart des preuves se trouve dans ces articles. Cependant, ceux-ci sont à prendre comme des annexes. Nous entendons par là que le corps possède en propre ses notations, sa bibliographie et sa numérotation mais surtout nous incitons le lecteur à se préoccuper avant tout du texte de la thèse. Hormis mention explicite du contraire toute référence renvoie à un élément du corps lui-même. Les articles utilisent parfois des notations différentes des parties de la thèse qui lui correspondent ; lorsque nous renvoyons le lecteur à l'un des articles nous signalons les aménagements de notation à prendre en compte. La bibliographie générale a été placée en avant du texte pour éviter qu'elle se confonde avec la bibliographie des articles. L'article [AP2], qui n'a pas de liste de références indépendantes, utilise la bibliographie du corps du texte.

Enfin, les démonstrations les plus importantes et les plus instructives sont ébauchées dans le texte ; les démonstrations des résultats qui n'apparaissent pas dans les articles sont données *in extenso* dans le corps.

Bibliographie

- [At1] S. ATTAL : Problèmes d'unicité dans les représentations d'opérateurs sur l'espace de Fock, *Séminaire de Probabilités XXVI* (1992), Springer Verlag, pp. 619-632.
- [At2] S. ATTAL : Semimartingales non commutatives et applications aux endomorphismes browniens, *thèse de doctorat de l'Université Louis Pasteur*, Strasbourg (1994).
- [At3] S. ATTAL : An algebra of non commutative bounded semimartingales, square and angle quantum brackets, *Journal of Functional Analysis* 124 (1994), Academic Press, pp. 292-332.
- [At4] S. ATTAL : Non-commutative chaotic expansion of Hilbert-Schmidt operators on Fock space, *Communications in Mathematical Physics* 175 (1996), Springer Verlag, pp. 43-62.
- [At5] S. ATTAL : Classical and quantum stochastic calculus, *Quantum Probability and Related Topics X* (1998), World Scientific, pp. 1-52.
- [At6] S. ATTAL : The structure of the quantum semimartingale algebras, *Journal of Operator Theory* 46 (2001), pp. 391-410.
- [At7] S. ATTAL : Approximating the Fock space with the toy Fock space, *Séminaire de Probabilités XXXVI* (2003), Springer Verlag, pp.477-491 .
- [A-E] S. ATTAL et M. EMERY : Equations de structure pour des martingales vectorielles, *Séminaire de Probabilités XXVIII* (1994), Springer Verlag, pp.256-278.
- [A-L] S. ATTAL et J.M. LINDSAY : Quantum stochastic calculus with maximal operator domain, *The Annals of Probability*, à paraître.
- [A-M] S. ATTAL et P.A. MEYER : Interprétations probabilistes et extension des intégrales stochastiques non commutatives, *Séminaire de Probabilités XXVII* (1993), Springer Verlag, pp. 312-327.
- [AP1] S. ATTAL et Y.PAUTRAT : From repeated to continuous quantum interactions : the spontaneous production of quantum noises, *Prépublication de l'Institut Fourier* n° 624.

- [**AP2**] S. ATTAL et Y.PAUTRAT : Some remarks on $(n+1)$ -level atom chains and n -dimensional noises, en préparation.
- [**Bel**] V.P BELAVKIN : A quantum non-adapted Ito formula and non stationary evolution in Fock scale, *Quantum Probability and Related Topics VI* (1991), World scientific, pp. 137-180.
- [**B-L**] V.P BELAVKIN et J.M. LINDSAY : The kernel of a Fock space operator II, *Quantum Probability and Related Topics VIII* (1993), World scientific, pp. 87-94.
- [**Bia**] P. BIANE : Calcul stochastique non commutatif, *Lectures on Probability Theory, école d'été de Saint-Flour 1993*, Lecture Notes in Mathematics. 1608 (1995), Springer-Verlag.
- [**Co1**] A. COQUIO : Why are there only three quantum noises?, *Probability Theory and Related Fields* 118 (2001), pp. 349-364.
- [**Co2**] A. COQUIO : Stochastic integral representations of unbounded operators in Fock spaces, soumis au *Journal of the London Mathematical Society*.
- [**Dav**] E.B.DAVIES : *Quantum theory of open systems*, Academic Press (1976).
- [**F-R**] F.FAGNOLA et R.REBOLLEDO : A view on stochastic differential equations derived from quantum optics, *Aportaciones Matemáticas 14* (1998), Sociedad Matemática Mexicana, pp. 193-214.
- [**Gre**] M. GREGORATTI : The Hamiltonian operator associated to some quantum stochastic evolutions, *Communications in Mathematical Physics* 222 (2001), pp. 181-200.
- [**Gui**] A.GUICHARDET : *Symmetric Hilbert spaces and related topics*, Lecture Notes in Mathematics 261 (1970), Springer Verlag.
- [**H-P**] R.L. HUDSON et K.R. PARTHASARATHY : Quantum Itô's formula and stochastic evolutions, *Communications in Mathematical Physics* 93 (1984), no. 3, pp. 301-323.
- [**J-O**] U.C. JI et N. OBATA : A role of Bargmann-Segal spaces in characterization and expansion of operators on Fock space, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, à paraître.
- [**J-M**] J.L. JOURNÉ et P.A. MEYER : Une martingale d'opérateurs bornés, non représentable en intégrale stochastique, *Séminaire de Probabilités XX* (1986), Springer Verlag, pp. 313-316.
- [**KM1**] B.KÜMMERER et H.MAASSEN : Elements of quantum probability, *Quantum Probability Communications X* (1998), pp.73-100.
- [**KM2**] B.KÜMMERER et H.MAASSEN : An ergodic theorem for quantum counting processes, *Journal of Physics A* 30 (2003), pp.1-7.

- [Li1] J.M. LINDSAY : The kernel of a Fock space operator I, *Quantum Probability and Related Topics VIII* (1993), World scientific, pp. 271-280.
- [Li2] J.M. LINDSAY : Quantum and non-causal stochastic calculus, *Probability Theory and Related Fields 97* (1993), pp.65-80.
- [LeM] M.LEITZ-MARTINI : Quantum stochastic calculus using infinitesimals, *Dissertation der Eberhard-Karls-Universität* (2001).
- [Ma1] H.MAASSEN : Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels, *Quantum Probability and Related Topics II*, Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics. 1136 (1985), pp. 361-374.
- [M-R] H.MAASSEN et P.ROBINSON : Quantum stochastic calculus and the dynamical Stark effect, *Reports on Mathematical Physics 30* (1991), pp. 185-203.
- [Me1] P.A.MEYER : A finite approximation to boson Fock space, *Stochastic processes in classical and quantum systems*, Proceedings Ascona (éditeurs S.Albeverio, G.Casati, D.Merlin), Lecture Notes in Physics 262 (1993), Springer-Verlag.
- [Me2] P.A.MEYER : *Quantum probability for probabilists*, Lecture Notes in Mathematics 1538 (1993), Springer-Verlag.
- [Me3] P.A.MEYER : Représentations de martingales d'opérateurs, d'après Parthasarathy-Sinha, *Séminaire de Probabilités XXVII* (1993), Springer Verlag, pp. 97-106.
- [vNe] J.VON NEUMANN : *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton University Press (1955).
- [Py1] K.R.PARTHASARATHY : A remark on the paper "Une martingale d'opérateurs bornés, non représentable en intégrale stochastique", *Séminaire de Probabilités XX* (1986), Springer Verlag, pp. 317-320.
- [Py2] K.R.PARTHASARATHY : *An introduction to quantum stochastic calculus*, Monographs in Mathematics (1992), Birkhäuser.
- [P-S] K.R.PARTHASARATHY et K.B. SINHA : Representation of bounded quantum martingales in Fock space, *Journal of Functional Analysis 67* (1986), pp. 126-151.
- [Pt1] Y.PAUTRAT : Kernel and integral representations of operators on infinite dimensional toy Fock space, à paraître dans *Séminaire de Probabilités*.
- [Pt2] Y.PAUTRAT : From Pauli matrices to quantum Ito formula, soumis à *Proceedings of the London Mathematical Society*.
- [Pt3] Y.PAUTRAT : Stochastic integral representations of second quantization operators, *Journal of Functional Analysis*, à paraître.
- [Reb] R.REBOLLEDO : Complete positivity and open quantum systems, *Informe Técnico de la Pontificia Universidad Católica*.

Introduction

Pourquoi des probabilités quantiques ?

On peut s'intéresser aux probabilités quantiques pour des raisons purement mathématiques ; celles-ci sont en effet l'une des extensions non commutatives possibles de la théorie classique des probabilités. Elles sont, plus précisément, l'extension qui suit le formalisme hilbertien de la mécanique quantique tel que l'a défini von Neumann (voir [vNe] ou [Dav]).

Nous préférons justifier l'introduction des probabilités quantiques par la raison peu élégante de la nécessité. En effet, on sait que la théorie physique de la mécanique quantique est intrinsèquement aléatoire ; on a donc essayé d'utiliser les probabilités classiques pour modéliser les aléas liés à toute mesure de grandeur physique. Les expériences d'Aspect ("expérience d'Orsay") et les inégalités de Bell ont cependant montré que des situations même extrêmement simples fournissent des observations qui ne peuvent être décrites par la théorie probabiliste classique (voir à ce sujet [KM1]). Il a donc été nécessaire de créer une nouvelle théorie *ad hoc*.

La mécanique quantique associe à tout système physique un espace de Hilbert, appelé *espace d'état* ; les grandeurs mesurables du système sont alors représentées par les opérateurs autoadjoints sur l'espace d'état. En accord avec ce formalisme, les probabilités quantiques auront donc pour nouvelles "variables aléatoires" des opérateurs sur des espaces de Hilbert.

Calcul stochastique quantique

Les probabilités classiques prennent leur véritable ampleur une fois que l'on définit les intégrales stochastiques et que l'on a un vrai calcul stochastique ; la situation est identique dans le cas quantique. Les intégrales stochastiques quantiques ont été définies initialement par Hudson et Parthasarathy (dans [H-P]) afin de formaliser les "équations de Langevin quantiques" des physiciens, où apparaissent des termes de bruit de nature quantique. Une intégrale stochastique quantique est, dans ce cadre, une intégrale du type $\int H_s da_s^\varepsilon$ où les H_s sont des opérateurs sur l'espace de Hilbert considéré, et les *bruits quantiques* da^ε sont des "différentielles" d'opérateurs a^ε . Le calcul stochastique quantique, qui a été amélioré par les travaux de Attal, Meyer, Belavkin et Lindsay entre autres, est maintenant un outil robuste :

on dispose d’une formule d’Itô, de critères d’existence de solutions aux équations différentielles stochastiques, etc. (on pourra consulter[**At5**] pour un exposé général).

Il est donc particulièrement intéressant de pouvoir écrire un opérateur donné sous la forme d’une intégrale stochastique quantique ; il se pose alors naturellement la question de savoir si cela est possible. On sait depuis le contre-exemple de Journé (voir [**J-M**]) que cela n’est pas possible en général et que les facteurs déterminants ne se limitent pas à des considérations de domaine ; les résultats positifs à cette question sont cependant en nombre très limité (voir [**P-S**], [**At3**], [**Co2**]). Un autre type de représentation possède un intérêt équivalent : les représentations en opérateurs à noyaux de Maassen-Meyer. Les réponses connues à la question de la représentabilité nucléaire ne sont cependant pas plus nombreuses que pour les représentations intégrales.

Au début de cette thèse, le thème de nos travaux était spécifiquement celui-ci : apporter des éléments de réponse à ces questions de représentabilité.

Approximations discrètes du calcul stochastique quantique

Un outil développé par Attal à cette époque est cependant venu perturber nos occupations : il s’agit d’une méthode explicite d’approximation du calcul stochastique quantique par un analogue “à temps discret”, définie dans [**At7**].

Cette approximation était considérée depuis longtemps par les physiciens ; parmi les mathématiciens elle était en général considérée comme une source d’inspiration (voir [**Me1**]). Leitz-Martini a entièrement défini le calcul stochastique quantique par des techniques d’analyse non-standard à partir du calcul à temps discret (voir [**LeM**]) mais le cadre de sa construction semble disjoint de celui qui nous intéresse en général. La méthode de Attal, en revanche, fait cohabiter les deux théories dans un même cadre.

De plus, la méthode de Attal est complètement explicite en termes de calcul d’Itô abstrait. Ce calcul est un outil particulièrement maniable et évocateur et est à la base de l’approche Attal-Meyer de la théorie de l’intégration stochastique. Cette nouvelle méthode semble donc bien se prêter à l’approximation des intégrales stochastiques quantiques.

Il a évidemment fallu commencer par donner un sens précis à l’intégration stochastique quantique à temps discret puisque cela n’avait été fait que dans le cadre de la dimension finie ; cette théorie de l’intégration est présentée dans le chapitre 1 et dans l’article [**Pt2**] que l’on trouve en annexe B.

Questions de représentations en temps discret

Cette méthode d’approximation montrait que des critères en temps discret de représentabilité en intégrales stochastiques ou en opérateurs à noyau pouvaient mener à des éléments de réponse pour le cadre à temps continu. De plus, trouver

des critères en temps discret semblait plus facile. Nous avons donc commencé par chercher de tels éléments de réponse ; notre première approche a été d'utiliser le fait que, en temps discret, les propriétés d'adaptabilité des opérateurs permettent essentiellement de se ramener à des situations de dimension finie.

Il apparut bien vite que les résultats obtenus suivant cette approche ne sont pas suffisants. Nous avons donc adopté une autre méthode : celle-ci, utilisant des outils définis par Lindsay et certaines propriétés spécifiques au temps discret, nous a permis d'obtenir des réponses satisfaisantes à la question de la représentabilité en opérateurs à noyau dans ce cadre, et cela avec des formules explicites pour le noyau associé à un opérateur. Par ailleurs, à partir de ces résultats nous avons pu obtenir des résultats analogues et tout aussi explicites pour les représentations intégrales.

Ces résultats sont présentés dans le chapitre 2 et font l'objet de la publication [Pt1], jointe en annexe A.

Formules d'Itô à temps discret et à temps continu

On s'aperçoit en définissant l'intégration stochastique à temps discret que celle-ci présente une différence majeure avec le calcul stochastique à temps continu : celle-ci réside dans les formules d'Itô exprimant la composition de deux intégrales. On a considéré cette différence, que l'on observe immédiatement en dimension finie, comme rendant impossible l'utilisation efficace du calcul stochastique à temps discret comme moyen d'approcher son analogue à temps continu. Puisque nos résultats de représentation nous permettaient d'exprimer l'approximation d'une intégrale stochastique $\int H_s d\alpha_s^\varepsilon$, nous nous sommes proposé le but suivant : redémontrer la formule d'Itô à temps continu en n'utilisant rien d'autre que notre méthode d'approximation (dans laquelle la formule d'Itô n'intervient pas) et la formule d'Itô à temps discret. C'est ce que nous exposons dans le chapitre 4 et dans l'article [Pt2] présenté en annexe B, montrant ainsi que la différence entre formules d'Itô n'est en rien une obstruction à ce que l'approximation de Attal soit un outil utile.

Dans ce chapitre 4 nous rappelons par ailleurs entièrement la méthode de Attal, avec de rares modifications qui simplifient légèrement son utilisation.

Retour sur la représentabilité des opérateurs

Nous avons par la suite essayé d'utiliser nos résultats de représentabilité en temps discret pour obtenir des résultats en temps continu. Malheureusement, les conditions analytiques nécessaires pour que nous puissions appliquer nos résultats et que les représentations soient conservées dans le passage à la limite sont telles que nous avons pu, suivant cette méthode, redémontrer des résultats connus mais hélas rien de nouveau.

Nous avons donc adopté une autre approche, qui consiste à considérer nos formules explicites de représentation et les formules obtenues par passage à la li-

mite comme des informations *a priori* sur les intégrandes apparaissant dans la représentation intégrale d'un opérateur donné. On peut alors, à partir de ces informations, chercher des conditions pour pouvoir définir rigoureusement ces intégrandes, pour que l'on puisse considérer les intégrales stochastiques associées et enfin pour que les intégrales obtenues représentent bien l'opérateur qui nous intéresse. Cette méthode présente un inconvénient : pour estimer les formules *a priori* des intégrandes il faut que l'opérateur considéré permette des calculs explicites.

Nous avons donc appliqué cette méthode aux opérateurs de *seconde quantification* et de *seconde quantification différentielle*, opérateurs très utilisés en physique. Nous en avons tiré une caractérisation simple de ceux de ces opérateurs qui admettent une représentation intégrale, avec des formules explicites pour les intégrandes.

Ces résultats, ainsi que notre première approche, sont présentés dans le chapitre 5. Les critères de représentabilité pour les opérateurs de seconde quantification (différentielle ou non) sont par ailleurs exposés dans l'article [Pt3] que l'on trouve en annexe C.

Equations différentielles stochastiques quantiques et interactions répétées en mécanique quantique

Nous avons ensuite cherché à voir si nos résultats étaient assez puissants pour que l'on puisse obtenir la convergence de solutions d'équations aux différences vers les solutions des équations différentielles obtenues en passant formellement à la limite. Nous avons obtenu des résultats très généraux de convergence.

Nous nous sommes aperçus par la suite que ces résultats avaient une portée bien plus grande en termes physiques : en effet, ils montrent que l'opérateur d'évolution associé en mécanique quantique à une interaction répétée (ce qui couvre un cadre très large) est donné, à la limite, comme la solution d'une équation différentielle stochastique quantique que l'on peut expliciter. Nous pouvons ainsi décrire le passage d'évolutions discrètes à des évolutions continues en un sens plus précis que dans les résultats de convergence connus jusqu'alors : notre passage à la limite prend en compte l'évolution des deux entités entrant en interaction et pas seulement l'une des deux.

Ces résultats sont présentés dans le chapitre 6 et dans l'article [AP1], écrit en collaboration avec Stéphane Attal et présenté en annexe D.

Nous n'avons pu, pour des raisons de volume et d'unité de sujet, rappeler autant que nous l'aurions voulu le formalisme des évolutions dans les systèmes quantiques ouverts ni justifier notre intérêt pour les objets que nous étudions. Nous renvoyons donc le lecteur à [Dav] ou [Reb].

Convergences de marches aléatoires et équations de structure

Nous n'avons pas parlé encore des résultats contenus dans l'article [AP2], écrit en collaboration avec Stéphane Attal : c'est que nous nous sommes aperçus que, parmi les résultats qu'il contient, ceux que l'on ne retrouve pas dans d'autres de nos articles sont déjà connus.

Cet article garde cependant un intérêt en ce qu'il adopte un point de vue nouveau. Il provient de la question des interprétations probabilistes à donner aux espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure au classique "bébé Fock". Nous nous sommes aperçus que, lorsque l'on considère des marches aléatoires dans \mathbb{R}^n , on peut tout écrire dans une structure algébrique qui est complètement indépendante de la loi de la marche ; tout le contenu probabiliste est alors contenu dans des équations de structure à temps discret. Nos techniques d'approximation permettent alors d'observer que, suivant la forme des équations de structure associées à une marche aléatoire, une renormalisation de cette marche converge vers un processus qui s'explique comme une somme d'un mouvement brownien et de processus de Poisson.

Ces résultats sont évoqués tout au long de cette thèse, dans des exemples ; ils sont par ailleurs présentés sous une forme non définitive dans l'article [AP2] que l'on trouve en annexe E.

Première partie

Présentation des résultats obtenus

Chapitre 1

Calcul stochastique quantique sur l'espace de Fock à temps discret

Dans ce chapitre, nous définissons l'espace de Fock “à temps discret” et le calcul stochastique quantique qui lui est associé.

Dans la section 1.1, nous justifions très rapidement l'apparition de cet espace par des raisons complètement indépendantes de l'idée d'approximation de l'espace de Fock à temps continu. L'une de ces justifications provient de la physique quantique, l'autre des probabilités classiques.

Dans la section 1.2, nous définissons le calcul d'Itô abstrait et la théorie de l'intégration stochastique quantique à temps discret. Ces outils sont intuitivement plus simples à manier que leurs analogues à temps continu ; il est cependant évident que, pour que nous puissions utiliser de manière efficace le procédé d'approximation, il faut des énoncés précis. C'est ce qui justifie le développement de la théorie telle que nous la présentons. Nous n'y décrivons pas les représentations en noyaux : le sens à donner à ces représentations est discuté dans le chapitre suivant.

Ces deux sections correspondent approximativement à la première partie de l'article [Pt2].

Dans la section 1.4, nous décrivons les espaces de Fock à temps discret “de multiplicité supérieure à 1”, que nous appellerons ainsi puisqu'ils sont en fait les espaces qui serviront à approcher les espaces de Fock à temps continu de multiplicité supérieure à 1. Nous verrons que, tout comme l'espace de Fock $T\Phi$ est associé à des marches aléatoires sur \mathbb{Z} , ces espaces sont associés à des martingales à temps discret à valeurs vectorielles.

Cette section correspond à la première moitié de l'article [AP2].

1.1 Motivations pour l'étude de $\mathbb{T}\Phi$

Avant d'aborder l'étude technique de l'espace $\mathbb{T}\Phi$ et du calcul stochastique qui lui est associé, nous allons justifier cette étude et montrer pourquoi cet espace est un objet intéressant en soi et pas uniquement comme moyen d'approcher l'espace de Fock à temps continu.

1.1.1 Une motivation physique

L'un des postulats de la physique quantique veut qu'à chaque système physique soit associé un espace de Hilbert qui représente les états (à prendre ici au sens intuitif du terme) du système. Si l'on considère par exemple un système constitué d'une seule particule qui n'a que deux états différents (par exemple deux niveaux d'énergie, deux états de polarisation, etc.) alors l'espace d'état associé est \mathbb{C}^2 . Si l'on veut considérer un ensemble infini dénombrable de telles particules et que l'on suppose celles-ci distinguables et indépendantes, alors l'espace d'état à considérer est le produit tensoriel des espaces associés à chaque particule.

Cet espace d'état $\mathbb{T}\Phi$ est donc

$$\mathbb{T}\Phi = \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^2.$$

Notons $\{\Omega_i, X_i\}$ la base canonique de la i -ème copie de \mathbb{C}^2 . Pour simplifier les notations on choisit de ne pas faire apparaître le vecteur Ω_i dans les produits tensoriels : par exemple $X_{i_1} \otimes X_{i_2}$ représente

$$\Omega_0 \otimes \dots \otimes \Omega_{i_1-1} \otimes X_{i_1} \otimes \Omega_{i_1+1} \otimes \dots \otimes \Omega_{i_2-1} \otimes X_{i_2} \otimes \Omega_{i_2+1} \otimes \dots$$

Ce choix est motivé par l'idée que Ω_i représente l'état "vide" ou "au repos" du i -ème site.

On a alors une base hilbertienne naturelle, constituée d'un vecteur Ω

$$\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \dots$$

appelé *vecteur vide*, et par tous les vecteurs $X_{\{i_1, \dots, i_n\}}$ pour $i_1 < \dots < i_n$. Chacun de ces vecteurs $X_{\{i_1, \dots, i_n\}}$ correspond à un état du système dans lequel par exemple les particules du système qui sont excitées sont exactement les particules indexées i_1, \dots, i_n . Notons $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} , que l'on munit de la mesure de dénombrement. Ce qui précède montre que l'espace $\bigotimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^2$ admet un isomorphisme explicite avec $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$: on identifie simplement chaque $X_{\{i_1, \dots, i_n\}}$ avec l'indicatrice de l'élément $\{i_1, \dots, i_n\}$ de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$. L'objet physique que nous considérons, cet ensemble dénombrable de particules à deux niveaux, est appelé *chaîne de spins* ; nous lui avons associé naturellement l'espace d'état $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$.

1.1.2 Une motivation probabiliste

Supposons que l'on veuille considérer une suite $(\nu_i)_{i \geq 0}$ de variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre p . Pour construire une telle suite, on considère une réalisation quelconque d'une variable de Bernoulli ν_1 sur un espace E_1 muni d'une mesure *ad hoc* $\mu_1(p)$. La suite de variables indépendantes de même loi que ν_1 peut être réalisée sur le produit $E = \bigotimes_{\mathbb{N}} E_i$ où chaque E_i est une copie de E_1 , E étant muni de la mesure produit $\mu(p) = \bigotimes_{\mathbb{N}} \mu_1(p)$,

On veut évidemment pouvoir considérer des fonctionnelles de notre processus ; on s'intéresse donc plutôt à l'espace $L^2(E, \mu(p))$ associé à E , espace que l'on notera encore $\mathbb{T}\Phi$. On a naturellement et de manière explicite

$$L^2(E, \mu(p)) \simeq \bigotimes_{\mathbb{N}} L^2(E_1, \mu_1(p)). \quad (1.1.1)$$

Par ailleurs, chaque $L^2(E_i, \mu_1(p))$ est un espace complexe de dimension 2 dont une base est donnée par la variable déterministe égale à 1, que l'on note Ω_i , et la variable aléatoire de Bernoulli ν_i de paramètre p . Cette base peut être orthonormalisée en considérant Ω_i et la variable aléatoire centrée réduite X_i obtenue en normalisant ν_i en $X_i = (\nu_i - p)/\sqrt{p(1-p)}$. On obtient ainsi une base orthonormale de $L^2(E)$ faite de vecteurs $X_{\{i_1, \dots, i_n\}}$ comme précédemment.

Venons-en à l'intérêt de cette construction : quelle que soit la loi des variables aléatoires de Bernoulli $(\nu_i)_{i \geq 0}$, l'espace $L^2(E)$ associé est naturellement isomorphe à $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$. On a donc perdu les propriétés probabilistes qui leur étaient associées. Ces propriétés cependant sont entièrement déterminées par le paramètre p et l'on voit bien que la donnée de celui-ci équivaut à la donnée de la loi produit sur $L^2(E)$: cette loi est en effet entièrement déterminée par les formules

$$X_i^2 = 1 + c_p X_i, \quad (1.1.2)$$

valables pour tout i , où $c_p = \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$ est une fonction biunivoque de p .

En définissant sur notre espace $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$ une famille de lois produits – un produit pour chaque p de $]0, 1[$ – on a donc une structure abstraite commune permettant de rendre compte des différentes structures probabilistes, suivant la loi produit que l'on ajoute à cette structure hilbertienne. Dans la suite, nous ne parlerons pas de choix d'une loi produit associée à une relation (1.1.2) mais de choix d'une *interprétation probabiliste*.

Dans le cas de la multiplicité supérieure, la question des interprétations probabilistes sera plus complexe mais évidemment plus intéressante. Nous y reviendrons dans la section 1.4.1.

1.2 Calcul d'Itô abstrait sur l'espace de Fock à temps discret

A partir de maintenant, l'espace de Fock à temps discret est défini comme l'espace $L^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$, que nous noterons simplement $l^2(\mathcal{P})$, la notation l^2 devant suffire à rappeler que l'espace \mathcal{P} considéré est discret. On notera aussi $\mathbb{T}\Phi$ l'espace $l^2(\mathcal{P})$ pour souligner l'analogie avec l'espace de Fock à temps continu Φ (le T vient de l'anglais : l'espace de Fock discret, ou suivant la terminologie plus sympathique de Meyer, bébé Fock, est appelé en anglais *toy Fock*). Remarquons encore que nous appellerons $\mathbb{T}\Phi$ l'espace de Fock à temps discret *simple* par opposition aux espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure que nous définirons en 1.4.

Fixons une base $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\}$ de $\mathbb{T}\Phi$. Le vecteur X_{\emptyset} sera en général noté Ω et appelé le vecteur vide. Les variables dans \mathcal{P} seront notées M, N, \dots Fixons tout de suite une notation à propos de ces variables : pour tout M de \mathcal{P} , tout i de \mathbb{N} on notera M_i l'ensemble $M \cap \{0, \dots, i-1\}$ et $M_{\geq i}$ l'ensemble $M \cap \{i, \dots\}$. Nous noterons par ailleurs $M < i$ (respectivement $M \leq i$) à la place de $M \subset \{0, \dots, i-1\}$ (respectivement $M \subset \{0, \dots, i\}$).

L'espace de Fock possède une propriété importante de décomposition tensorielle explicite qui va nous permettre de retranscrire la notion probabiliste de prévisibilité et plus loin d'utiliser cet espace pour obtenir des dilatations de processus d'opérateurs. Détaillons cette propriété : de même que nous avons considéré dans notre présentation probabiliste un espace de Fock $\mathbb{T}\Phi$ associé à une suite de variables de Bernoulli indépendantes, nous aurions pu considérer un espace $\mathbb{T}\Phi_i$ associé aux variables ν_1, \dots, ν_{i-1} et un autre, $\mathbb{T}\Phi_{\geq i}$, associé aux variables ν_i, ν_{i+1}, \dots . L'isomorphisme (1.1.1) montre alors immédiatement que l'on a

$$\mathbb{T}\Phi \simeq \mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{\geq i}; \quad (1.2.1)$$

Cet isomorphisme est encore explicite et nous le détaillons ci-dessous. De plus, il est clair que nous aurions pu regrouper autrement les indices des variables, ce qui fait que l'on a de manière très générale le résultat suivant :

Proposition 1.2.1 *Soit $\mathbb{N} = \cup_i I_i$ une partition disjointe de \mathbb{N} ; on a alors l'isomorphisme explicite suivant :*

$$\mathbb{T}\Phi \simeq \bigotimes_i \mathbb{T}\Phi_{I_i}.$$

qui est donné pour toute famille $(A_i)_i$, où chaque A_i est une partie finie de I_i , par

$$X_{\cup_i A_i} \longleftarrow \bigotimes_i X_{A_i}.$$

Nous utiliserons principalement des décompositions du type (1.2.1). Faisons deux commentaires à ce sujet : d'abord, on voit qu'un espace $\mathbb{T}\Phi_i$ s'identifie à l'espace L^2 construit sur la tribu i -prévisible naturellement associée à la marche de Bernoulli. Ceci justifie l'intérêt probabiliste des opérateurs du calcul d'Itô abstrait que nous définissons un peu plus loin. Par ailleurs, nous avons parlé du fait que la structure produit est entièrement définie par les X_i^2 , qui font apparaître la valeur de p . Nous n'avons pas parlé de la nature des produits $X_i X_j$, $i \neq j$; on voit ici que l'indépendance au sens probabiliste des variables X_i et X_j se traduit par une indépendance algébrique qui fait du produit $X_i X_j$ un produit tensoriel.

Dans la suite nous identifierons tout espace $\mathbb{T}\Phi_I$ à un sous-espace de $\mathbb{T}\Phi$ et omettrons d'écrire les signes \otimes , étant entendu que nous ne considérerons pas de produit autre que tensoriel. Autrement dit, sauf mention explicite, nous ne considérerons pas de produit qui dépendrait du choix d'une interprétation probabiliste. Remarquons par ailleurs que le point de vue que nous adoptons mène naturellement à voir l'indice i comme une variable de temps, alors que notre présentation physique en faisait plutôt une variable d'espace; voir l'indice i comme une variable de temps mène naturellement à l'inspiration probabiliste et c'est justement la coexistence des points de vue qui fait l'originalité de notre approche.

Avec ce point de vue probabiliste, les définitions suivantes sont naturelles; notons que l'on appelle *processus* une suite (que ce soit une suite de vecteurs ou d'opérateurs) lorsque l'on veut mettre l'accent sur le fait que l'indice est vu comme une variable de temps.

Définition 1.2.2 Soit $i \geq 0$;

- Un vecteur f de $\mathbb{T}\Phi$ qui appartient à $\mathbb{T}\Phi_i$ est dit i -prévisible.
- Un processus de vecteurs $(f_i)_{i \geq 0}$ est dit prévisible si pour tout i de \mathbb{N} , le vecteur f_i est i -prévisible.
- On appelle projection prévisible au temps i l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace $\mathbb{T}\Phi_i$.

Un opérateur p_i s'exprime de la manière suivante :

$$p_i f(M) = \begin{cases} f(M) & \text{si } M \subset \{0, \dots, i-1\} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Par ailleurs si l'on considère un élément f de $\mathbb{T}\Phi$, on voit facilement que pour tout i , des vecteurs $(p_{i+1} - p_i)f$ associés à des i distincts sont orthogonaux et que chacun s'écrit $d_i f X_i$ pour un certain $d_i f$ de $\mathbb{T}\Phi_i$ dont on obtient facilement l'expression explicite. Ceci justifie la définition suivante et les propriétés (1.2.4) et (1.2.5) :

Définition 1.2.3 Pour tout $i \geq 0$, on définit un opérateur d_i sur $l^2(\mathcal{P})$, appelé gradient prévisible au temps i , par les formules

$$d_i f(M) = \begin{cases} f(M \cup i) & \text{si } M \subset \{0, \dots, i-1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Cela définit bien un opérateur d_i sur $l^2(\mathcal{P})$ qui vérifie, pour tout f , les égalités

$$f = f(\emptyset)\Omega + \sum_i d_i f X_i \quad (1.2.4)$$

et

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_i \|d_i f\|^2. \quad (1.2.5)$$

A tout vecteur f est ainsi associé un processus i -prévisible $(d_i f)_{i \geq 0}$.

On remarque par ailleurs que pour tout processus prévisible $(g_i)_{i \geq 0}$ on a pour tout f dans $l^2(\mathcal{P})$

$$\sum_{i \geq 0} \langle g_i, d_i f \rangle = \left\langle \sum_{i \geq 0} g_i X_i, f \right\rangle \quad (1.2.6)$$

si l'on peut définir la série $\sum_i g_i X_i$, et que la série $\sum_{i \geq 0} \|g_i X_i\|^2$ a un sens si et seulement si

$$\sum_{i \geq 0} \|g_i\|^2 < \infty.$$

Il est donc naturel de définir l'opération adjointe de celle qui à un vecteur f de $\mathbb{T}\Phi$ associe le processus prévisible $(d_i f)_{i \geq 0}$. Encore une fois il est facile d'obtenir l'expression de $\sum_{i \in \mathbb{N}} g_i X_i$ comme fonction sur \mathcal{P} :

$$\left(\sum_{i \geq 0} g_i X_i \right) (M) = g_{\vee M} (M \setminus \vee M) \quad (1.2.7)$$

où $\vee M$ représente le plus grand élément de M .

L'objet que nous avons défini ainsi s'appelle l'intégrale d'Itô :

Définition 1.2.4 Soit $(g_i)_{i \geq 0}$ un processus prévisible vérifiant $\sum_{i \geq 0} \|g_i\|^2 < \infty$. Ce processus est alors dit Itô intégrable et son intégrale d'Itô est définie comme l'élément de $l^2(\mathcal{P})$ égal à $\sum_{i \geq 0} g_i X_i$; cet élément vérifie l'équation (1.2.7) et la relation de dualité (1.2.6).

Il est facile de vérifier que l'on a, pour tout i ,

$$p_i \sum_{j \geq 0} g_j X_j = \sum_{j=0}^{i-1} g_j X_j \quad \text{et} \quad d_i \sum_{j \geq 0} g_j X_j = g_i.$$

Pour illustrer ces notions nous allons maintenant définir une classe d'éléments de $l^2(\mathcal{P})$: la classe des *vecteurs exponentiels*. A toute fonction u de $l^2(\mathbb{N})$ on associe un élément $e(u)$ de $l^2(\mathcal{P})$ de la manière suivante :

$$e(u)(M) = \prod_{i \in M} u(i)$$

et en particulier $e(u)(\emptyset) = 1$. La fonction $e(u)$ ainsi définie est bien un élément de $l^2(\mathcal{P})$ d'après l'inégalité

$$n! \sum_{|A|=n} \left| \prod_{i \in A} |u(i)| \right|^2 \leq \left(\sum_{i \geq 0} |u(i)|^2 \right)^n,$$

valable pour tout n et qui entraîne que $\|e(u)\|^2 \leq e^{\|u\|^2}$. Remarquons que l'on n'a pas en revanche de formule simple pour un produit scalaire $\langle e(u), e(v) \rangle$.

La décomposition tensorielle (1.2.1) de $e(u)$ dans $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{[i]}$ s'écrit aussi très simplement : en effet, un vecteur exponentiel $e(u)$ vérifie pour tout i

$$e(u) = e(u_i) e(u_{[i]}),$$

où, comme pour les ensembles, nous notons u_i la restriction de u à $\{0, \dots, i-1\}$ et $u_{[i]}$ sa restriction à $\{i, \dots\}$.

On a par ailleurs pour tout i

$$p_i e(u) = e(u_i) \quad \text{et} \quad d_i e(u) = u(i) e(u_i),$$

d'où la représentation prévisible de $e(u)$:

$$e(u) = \Omega + \sum_{i \geq 0} u(i) e(u_i) X_i.$$

On notera \mathcal{E} l'ensemble des vecteurs exponentiels.

Remarque

Le lecteur familier avec l'espace de Fock à temps continu Φ sait que, outre leur facilité de manipulation, les vecteurs exponentiels ont l'avantage de former une famille totale et libre. On voit facilement que les vecteurs exponentiels de $\mathbb{T}\Phi$ tels que nous les avons définis forment une famille totale dans Φ (tout vecteur X_A s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs exponentiels ; voir par exemple 4.2.2 dans le chapitre 4). En revanche une famille finie de vecteurs exponentiels n'est plus forcément linéairement indépendante. Si par exemple on prend $u = 0$, v égal à la suite dont tous les termes sont nuls sauf le premier qui vaut 1 et w égal à $2v$, on a

$$e(u) - 2e(v) + e(w) = 0.$$

On voit facilement que c'est l'atomicité de la mesure considérée dans $l^2(\mathbb{N})$ qui cause cette différence : ici u, v, w sont distincts mais ne diffèrent qu'en un point (ce qui ne pourrait se produire s'ils étaient éléments de $L^2(\mathbb{R}_+)$). On peut voir qu'en revanche si une famille de n vecteurs sépare au moins $n-1$ points alors les

vecteurs exponentiels qui leur sont associés sont linéairement indépendants. De la même manière, c'est l'atomicité de la mesure qui fait qu'on n'a qu'une inégalité $\|e(u)\|^2 \leq e^{\|u\|^2}$ et pas de formule simple pour $\langle e(u), e(v) \rangle$: contrairement à ce qui se passe en temps continu, les diagonales de \mathbb{N}^2 par exemple ne sont pas de mesure nulle.

1.3 Définition du calcul stochastique quantique à temps discret

Le calcul d'Itô abstrait que nous avons défini est une structure pratique pour parler des vecteurs de l'espace de Fock ; nous allons nous tourner à présent vers les opérateurs de cet espace.

1.3.1 Opérateurs fondamentaux

Nous commençons par définir une famille particulière, appelée à jouer un rôle important : les opérateurs de *création* $(a_i^+)_{i \geq 0}$, *annihilation* $(a_i^-)_{i \geq 0}$ et *conservation* $(a_i^\circ)_{i \geq 0}$.

Définition 1.3.1 *Pour tout entier naturel i on définit trois opérateurs bornés a_i^+ , a_i^- , a_i° sur $\mathbb{T}\Phi$ par*

$$\begin{aligned} a_i^+ X_A &= \begin{cases} X_{A \cup \{i\}} & \text{si } i \notin A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ a_i^- X_A &= \begin{cases} X_{A \setminus \{i\}} & \text{si } i \in A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ a_i^\circ X_A &= \begin{cases} X_A & \text{si } i \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Les opérateurs ainsi définis sont bornés, de norme 1 ; on les étend donc à $\mathbb{T}\Phi$ tout entier. Pour des raisons d'homogénéité des notations on notera parfois a_i^\times l'opérateur identité Id.

On remarque immédiatement que a_i° s'exprime simplement comme le produit $a_i^+ a_i^-$ et que ces opérateurs a_i^+ , a_i^- vérifient une relation d'*anticommutation*

$$a_i^+ a_i^- + a_i^- a_i^+ = \text{Id},$$

ce qu'il faut relier au fait que $\mathbb{T}\Phi$ peut aussi être construit comme un espace de Fock antisymétrique. On peut remarquer que les opérateurs de création et annihilation que nous avons définis ne sont en fait pas exactement les opérateurs usuels définis

sur un espace de Fock antisymétrique ; ils n'en diffèrent cependant que par un signe, et cela de telle manière que la relation d'anticommutation reste satisfaite.

L'intérêt de définir ces a_i^ε , $\varepsilon = +, \circ, -$ vient des observations suivantes : dans une décomposition de l'espace $\mathbb{T}\Phi$ de la forme

$$\mathbb{T}\Phi = \mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{\{i\}} \otimes \mathbb{T}\Phi_{[i+1]},$$

les opérateurs a_i^ε , $\varepsilon \in \{+, -, \circ, \times\}$ s'écrivent $\text{Id} \otimes a_i^\varepsilon \otimes \text{Id}$. De plus, $\mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$ est isomorphe à \mathbb{C}^2 ; l'ensemble des opérateurs linéaires de la forme $\text{Id} \otimes a_i^\varepsilon \otimes \text{Id}$ dans cette décomposition tensorielle est donc de dimension 4 et, si on leur adjoint l'identité, les opérateurs a^+ , a^- , a° forment une base de cet ensemble. Ils s'identifient respectivement, dans la base Ω, X de \mathbb{C}^2 , aux matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour toute partie finie B de \mathbb{N} , tout $\varepsilon \in \{+, -, \circ\}$ on définit $a_B^\varepsilon = \prod_{i \in B} a_i^\varepsilon$. Ces opérateurs vérifient

$$\begin{aligned} a_B^+ X_A &= \begin{cases} X_{A \cup B} & \text{si } B \cap A = \emptyset, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ a_B^- X_A &= \begin{cases} X_{A \setminus B} & \text{si } B \subset A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ a_B^\circ X_A &= \begin{cases} X_A & \text{si } B \subset A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Nous allons simplifier l'écriture de ces opérateurs en faisant une convention de notation supplémentaire qui nous servira tout au long de cette thèse. Nous noterons simplement

$$\begin{aligned} a_B^+ X_A &= X_{A+B} \\ a_B^- X_A &= X_{A-B} \end{aligned}$$

en considérant que toute quantité dans laquelle intervient $A + B$ (respectivement $A - B$) est nulle si $A \cap B \neq \emptyset$ (respectivement $B \not\subset A$) ; en pratique cela reviendra simplement à restreindre des ensembles de sommation : par exemple, C étant fixé, une somme $\sum_{A+B=C}$ est l'ensemble des sommes sur les A, B disjoints et de réunion C .

On observe facilement deux propriétés de ces familles d'opérateurs, propriétés qui seront fondamentales dans la suite.

Tout d'abord, du calcul

$$a_A^+ a_B^\circ a_C^- X_M = \begin{cases} X_{M+A-C} & \text{si } B \subset M, \\ \text{zéro} & \text{sinon} \end{cases}$$

pour un triplet A, B, C disjoint, on déduit facilement que la famille

$$\{a_A^+ a_B^\circ a_C^-, A, B, C \text{ disjoints et dans } \{0, \dots, i-1\}\} \quad (1.3.3)$$

forme une base de l'espace vectoriel des opérateurs bornés sur $\mathbb{T}\Phi_i$ (nous devrions écrire : de l'ensemble des $h \otimes \text{Id}$ pour h borné sur $\mathbb{T}\Phi_i$).

En utilisant le fait que $a_A^+ a_B^\circ a_C^- = a_{A+B}^+ a_{B+C}^-$ pour tous A, B, C on voit par ailleurs que

$$\{a_A^+ a_B^-, A, B \text{ dans } \{0, \dots, i-1\}\} \quad (1.3.4)$$

constitue une autre base du même espace.

Par ailleurs, on remarque facilement diverses relations, d'une part concernant les opérateurs a_i^ε entre eux :

$$(a_i^+)^* = a_i^- \quad \text{et} \quad (a_i^\circ)^* = a_i^\circ,$$

et d'autre part entre ces opérateurs et les opérateurs du calcul d'Itô abstrait : on a $d_i = p_i a_i^-$. Nous pourrions donc simplifier nos notations et réduire le nombre d'objets considérés ; nous conservons cependant tous ces objets pour souligner les analogies avec le cas du temps continu.

En combinant les deux remarques ci-dessus, on remarque encore que $(d_i)^* = a_i^+ p_i$. Comme pour tout f dans $\mathbb{T}\Phi$ on a $a_i^+ p_i f = (p_i f) X_i$, on a un éclaircissement sur l'identité (1.2.6) et sur d'autres relations de dualité que nous observerons plus tard.

Exemples

- Un opérateur de multiplication $\mathcal{M}_{X_i}^p$ par X_i pour le produit associé à une valeur de p se décompose lui aussi en $\text{Id} \otimes \mathcal{M}_{X_i}^p \otimes \text{Id}$. Il est facile de vérifier à partir des formules (1.3.1) et de (1.1.2) que $\mathcal{M}_{X_i}^p$ peut s'écrire

$$\mathcal{M}_{X_i}^p = a_i^+ + a_i^- + c_p a_i^\circ.$$

- Une autre base de \mathbb{C}^2 est plus classique : c'est la base formée des *matrices de Pauli*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

et de la matrice identité. Si l'on note a^+, a^-, a° les opérateurs a_i^+, a_i^-, a_i° vus comme agissant sur \mathbb{C}^2 , alors on a

$$a^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) \quad a^- = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) \quad a^\circ = \frac{1}{2}(\text{Id} - \sigma_z) \quad (1.3.6)$$

On va s'intéresser dans la suite à un analogue, pour les opérateurs, de la représentation prévisible (1.2.4).

1.3.2 Définition de l'intégrale stochastique à temps discret

Nous allons discuter un type de représentation analogue aux représentations prévisibles mais concernant les opérateurs. Pour cela nous devons d'abord définir la notion de *prévisibilité d'un opérateur*.

Considérons le cas d'une variable classique f , ou plutôt de l'opérateur de multiplication \mathcal{M}_f qui lui est associé dans une interprétation probabiliste quelconque ; on voit facilement que, si f est i -prévisible, alors l'opérateur \mathcal{M}_f s'écrit $\mathcal{M}_f \otimes \text{Id}$ dans $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{[i]}$. C'est de cette propriété que nous nous inspirons pour définir la prévisibilité au temps i d'un opérateur de $\mathbb{T}\Phi$; cette définition peut paraître étonnamment simple en regard de celle qu'il faut considérer en temps continu pour ne pas restreindre son domaine de validité. La différence est qu'ici la prévisibilité permet de se ramener essentiellement à la dimension finie, et que considérer, en dimension finie, des opérateurs non bornés tient d'une subtilité qui serait ici gratuite.

Le Lemme 1.3.3 qui suit la définition fait le lien entre notre définition de la prévisibilité et la définition plus algébrique que l'on obtiendrait en retranscrivant mécaniquement les définitions considérées par Attal et Lindsay.

Définition 1.3.2 *Un opérateur h de $\mathbb{T}\Phi_i$ est dit i -prévisible s'il est de la forme $h \otimes \text{Id}$ dans $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{[i]}$.*

On voit en particulier que tout opérateur i -prévisible peut être étendu en un opérateur borné ; c'est pourquoi, dans la suite (à l'exception du lemme suivant), tout opérateur i -prévisible sera considéré comme borné.

Lemme 1.3.3 *Un opérateur h sur $\mathbb{T}\Phi$ qui satisfait aux conditions suivantes :*

- *Son domaine $\text{Dom } h$ est stable par p_i et par tous les opérateurs d_j , $j \geq i$.*
- *Les égalités suivantes sont vérifiées sur $\text{Dom } h$:*

$$\begin{aligned} hp_i &= p_i h \text{ et} \\ hd_j &= d_j h \text{ pour tout } j \geq i \end{aligned}$$

peut être étendu en un opérateur prévisible au sens de la Définition 1.3.2.

Exemples

- *Tout opérateur de multiplication dans une interprétation probabiliste quelconque par une variable aléatoire i -prévisible est un opérateur i -prévisible.*
- *Tout opérateur qui est combinaison linéaire d'opérateurs $a_A^+ a_B^0 a_C^-$ pour A, B, C contenus dans $\{0, \dots, i-1\}$ est i -prévisible. On peut voir grâce à la remarque (1.3.3) qu'inversement tout opérateur i -prévisible (borné) est de cette forme.*

On voit déjà à quel point la combinaison des notions d'adaptation et du temps discret permet de simplifier les problèmes par rapport au cas usuel.

Nous allons maintenant définir de manière rigoureuse les intégrales stochastiques quantiques à temps discret. On veut que de telles intégrales forment des analogues, pour les opérateurs, de la représentation prévisible des vecteurs ; on veut donc pouvoir écrire des opérateurs sous la forme de séries $\sum_i h_i a_i$ où le terme $h_i a_i$ représente l'action “au temps i ”. Il est alors naturel de vouloir que a_i soit un opérateur agissant sur $\mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$ uniquement, et que les opérateurs intégrés h_i n'agissent que sur $\mathbb{T}\Phi_i$; or nous avons déjà vu que la famille Id , a_i^+ , a_i^- , a_i° forme une base de l'ensemble des opérateurs qui s'écrivent $\text{Id} \otimes a_i \otimes \text{Id}$ dans $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{\{i\}} \otimes \mathbb{T}\Phi_{[i+1]}$.

Nous considérons donc les représentations qui nous intéressent comme des “séries” (en un sens à préciser) d'opérateurs $h_i a_i$ où h_i est i -prévisible et a_i est Id , a_i^+ , a_i^- , a_i° . Ceci explique l'intérêt de notre convention de notation $a_i^\times = \text{Id}$ pour tout i .

On appelle *processus prévisible* un processus d'opérateurs $(h_i)_{i \geq 0}$ tel que chaque h_i est i -prévisible. Rappelons que nous considérerons toujours un opérateur i -prévisible comme borné.

Définition 1.3.4 Soit ε dans $\{+, -, \circ, \times\}$. Pour tout processus prévisible $(h_i^\varepsilon)_{i \geq 0}$, on définit l'intégrale de $(h_i^\varepsilon)_{i \geq 0}$ par rapport à a^ε comme la série $\sum_{i \geq 0} h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon$, au sens où :

- $\text{Dom} \sum_{i \geq 0} h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon$ est l'ensemble des $f \in \mathbb{T}\Phi$ tels que

$$\begin{cases} \text{pour tout } M \in \mathcal{P}, \sum_{i \geq 0} |h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon f(M)| < +\infty \\ M \mapsto \sum_{i \geq 0} h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon f(M) \text{ est alors de carré intégrable.} \end{cases}$$

- $\sum_{i \geq 0} h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon f$ est défini par

$$\left(\sum_{i \geq 0} h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon f \right) (M) = \sum_{i \geq 0} h_i a_i^\varepsilon f(M)$$

pour tout M de \mathcal{P} .

Remarquons – cela nous sera utile dans la suite – que la condition de sommabilité à M fixé $\sum_i |h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon f(M)| < +\infty$ est triviale pour ε égal à $+$ ou \circ .

Il sera pratique, pour énoncer certains des théorèmes à venir, de considérer des *intégrales restreintes*, aux propriétés analytiques plus maniables.

Définition 1.3.5 Soit ε dans $\{+, -, \circ, \times\}$. Pour un processus prévisible $(h_i^\varepsilon)_{i \geq 0}$ on définit l'intégrale restreinte $\sum_i^R h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon$ comme la restriction de l'intégrale $\sum_i h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon$ à l'ensemble des vecteurs f de $\text{Dom} \sum_i h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon$ tels que

$$M \mapsto \sum_{i \geq 0} |h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon f(M)|$$

est une fonction de carré intégrable sur \mathcal{P} .

Lien avec une définition Attal-Lindsay des intégrales

Il est facile de voir à partir des formules (1.3.1), que

- la quantité $a_i^+ f(M)$ est non nulle seulement si $i \in M$ et qu'alors $a_i^+ f(M) = f(M - i)$. On a donc pour tout M de \mathcal{P} ,

$$\sum_i h_i a_i^+ f(M) = \sum_{i \in M} h_i f(M - i),$$

c'est-à-dire que $\sum_i h_i^+ a_i^+ f$ est "l'intégrale de Skorohod" (voir [Bel] ou [A-L]) de $(h_i^+ f)_{i \geq 0}$.

- l'opérateur de gradient prévisible d_i est égal à $p_i a_i^-$, donc pour tout M de \mathcal{P} ,

$$\sum_i h_i a_i^- f(M) = \sum_i h_i f(M + i),$$

- l'égalité $a_i^\circ = a_i^+ a_i^-$ et les deux remarques précédentes impliquent que pour tout M de \mathcal{P} ,

$$\sum_i h_i a_i^\circ f(M) = \sum_{i \in M} h_i f(M)$$

et dans ces trois égalités il est équivalent que l'un ou l'autre des termes forme une série sommable et définisse un élément de $l^2(\mathcal{P})$. Les intégrales que nous avons définies sont donc exactement les traductions en temps discret des intégrales au sens de Attal et Lindsay (voir [A-L]). De même, les intégrales restreintes que nous définissons sont les analogues des intégrales restreintes de Attal et Lindsay.

En particulier, ces intégrales se manipulent exactement de la même manière que les intégrales à temps continu du type Attal-Lindsay, avec ceci de différent que nous considérons nos intégrandes h_i comme bornées et qu'une condition de domaine est par conséquent supprimée. Cette condition est cependant la condition la "moins liée" à l'intégrale elle-même : on peut tout autant, en temps continu, se restreindre à des intégrales de processus d'opérateurs bornés. Il est donc possible de retranscrire mécaniquement des preuves concernant les intégrales stochastiques quantiques à temps continu et d'obtenir ainsi à peu de frais des propriétés importantes satisfaites par nos intégrales.

Nous donnerons trois telles propriétés. La première est la formule d'Hudson et Parthasarathy décrivant l'action d'une intégrale stochastique sur le domaine exponentiel ; ces formules nous seront utiles dans nos procédures d'approximation. La seconde de ces propriétés est une caractérisation des intégrales restreintes comme solutions d'espèces d'équations différentielles, qui montre que nos intégrales restreintes sont les transcriptions en temps discret des intégrales stochastiques au sens de la définition Attal-Meyer. Cette formulation a le défaut de donner une expression moins explicite de l'action d'une intégrale stochastique mais condense de manière particulièrement pratique les conditions de domaine. La troisième propriété que nous

énoncerons est la *formule d'Itô* qui donne une expression de la composition de deux intégrales stochastiques quantiques et nous intéressera particulièrement dans le chapitre 4.

Il est facile, dans notre cadre à temps discret, d'obtenir à chaque fois, les expressions voulues par des calculs formels ; la difficulté porte sur des questions de domaine qui alourdissent les démonstrations de discussions peu instructives. Il n'y avait donc que peu d'intérêt à donner les preuves ici. Puisque par ailleurs celles-ci se déduisent de manière systématique du cas à temps continu, elles n'apparaissent pas non plus dans l'article [Pt2]. Le lecteur qui voudra des démonstrations complètes pourra se reporter à [A-L] ; il n'y a presque aucun changement à effectuer pour obtenir des preuves dans notre cadre à temps discret.

Proposition 1.3.6 (Proposition 1.7 de [Pt2]) *Soit $\varepsilon \in \{+, \circ, -, \times\}$ et soit un processus prévisible $(h_i^\varepsilon)_{i \geq 0}$. Supposons qu'un vecteur exponentiel $e(v)$ soit dans le domaine de l'intégrale restreinte $\sum_i^R h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon$; alors pour tout u de $l^2(\mathbb{N})$ on a*

$$\begin{aligned} \langle e(u), \sum_{i \geq 0} h_i^+ a_i^+ e(v) \rangle &= \sum_{i \geq 0} \overline{u(i)} \langle e(u \mathbb{1}_{\neq i}), h_i^+ e(v) \rangle & \text{si } \varepsilon = + \\ \langle e(u), \sum_{i \geq 0} h_i^- a_i^- e(v) \rangle &= \sum_{i \geq 0} v(i) \langle e(u), h_i^- e(v \mathbb{1}_{\neq i}) \rangle & \text{si } \varepsilon = - \\ \langle e(u), \sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ e(v) \rangle &= \sum_{i \geq 0} \overline{u(i)} v(i) \langle e(u \mathbb{1}_{\neq i}), h_i^\circ e(v \mathbb{1}_{\neq i}) \rangle & \text{si } \varepsilon = \circ \\ \langle e(u), \sum_{i \geq 0} h_i^\times a_i^\times e(v) \rangle &= \sum_{i \geq 0} \langle e(u), h_i^\times e(v) \rangle & \text{si } \varepsilon = \times \end{aligned}$$

où, dans chaque cas, la série est sommable et où $u \mathbb{1}_{\neq i}$ par exemple représente la suite égale à u , sauf pour le i -ème terme qui vaut zéro.

La propriété suivante est la caractérisation de type Attal-Meyer de nos intégrales restreintes :

Proposition 1.3.7 (Proposition 1.8 de [Pt2]) *Soit ε dans $\{+, \circ, -, \times\}$ et soit $(h_i^\varepsilon)_{i \geq 0}$ un processus d'opérateurs prévisibles sur $\mathbb{T}\Phi$. Alors $\sum_i^R h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon$ peut aussi être décrit comme l'unique opérateur h vérifiant*

$$\begin{aligned} hf &= \sum_{i \geq 0} h_i d_i f X_i + \sum_{i \geq 0} h_i^+ p_i f X_i & \text{si } \varepsilon = +, \\ hf &= \sum_{i \geq 0} h_i d_i f X_i + \sum_{i \geq 0} h_i^- d_i f & \text{si } \varepsilon = -, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 hf &= \sum_{i \geq 0} h_i d_i f X_i + \sum_{i \geq 0} h_i^\circ d_i f X_i \quad \text{si } \varepsilon = \circ, \\
 hf &= \sum_{i \geq 0} h_{i+1} d_i f X_i + \sum_{i \geq 0} h_i^\times p_i f \quad \text{si } \varepsilon = \times,
 \end{aligned}$$

où $h_i = \sum_{j < i} h_j^\varepsilon a_j^\varepsilon$ et où une égalité ci-dessus signifie que

- un vecteur f est dans le domaine de h si et seulement si
 - $(h_i d_i f)_{i \geq 0}$ est Itô-intégrable et
 - la condition similaire de sommabilité (Itô intégrabilité ou sommabilité suivant ε) de la seconde somme est vérifiée
- l'égalité est vérifiée.

Avec nos définitions de l'intégrale stochastique on obtient la formule fondamentale suivante, qui donne la représentation intégrale de la composition de deux intégrales stochastiques quantiques. Cette formule, la formule d'Itô, étend la formule de composition de deux variables aléatoires classiques si on identifie celles-ci à des opérateurs de multiplication.

Théorème 1.3.8 (Théorème 1.9 de [Pt2]) Soient $\varepsilon, \eta \in \{+, \circ, -, \times\}$; soient $(h_i^\varepsilon)_{i \geq 0}$ et $(k_i^\eta)_{i \geq 0}$ deux processus d'opérateurs prévisibles sur $\mathbb{T}\Phi$. Alors

$$\sum_{i \geq 0}^R h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon \sum_{i \geq 0}^R k_i^\eta a_i^\eta - \sum_{i \geq 0}^R h_i^\varepsilon k_i a_i^\varepsilon - \sum_{i \geq 0}^R h_i k_i^\eta a_i^\eta - \sum_{i \geq 0}^R h_i^\varepsilon k_i^\eta a_i^{\varepsilon \cdot \eta}, \quad (1.3.7)$$

est une restriction de l'opérateur nul, où $a^{\varepsilon \cdot \eta}$ est simplement $a^\varepsilon a^\eta$. Si les deux premières intégrales sont partout définies, alors l'opérateur (1.3.7) est l'opérateur nul.

Dans le cas où $\varepsilon = -$ et $\eta = +$, on a $a^{\varepsilon \cdot \eta} = a^\times - a^\circ$, et le résultat est vrai *a fortiori* si la dernière intégrale est remplacée par deux intégrales.

Un calcul formel sur le produit de séries $\sum_i h_i a_i^\varepsilon \sum_j k_j a_j^\eta$ permet d'obtenir immédiatement la formules ci-dessus. Il est cependant évident que l'on ne peut éviter de discuter les domaines de validité des diverses séries; pour cela, la caractérisation sous forme Attal-Meyer (voir (1.3.7)) est nécessaire.

Notons que $a^{\varepsilon \cdot \eta}$ est donné par le tableau suivant :

\uparrow	–	◦	+	×
–	0	a^-	$a^\times - a^\circ$	a^-
◦	0	a°	a^+	a°
+	a°	0	0	a^+
×	a^-	a°	a^+	a^\times

(1.3.8)

sur lequel nous reviendrons au chapitre 4.

1.4 Espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure à 1

Nous définissons dans cette section les espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure à 1.

Il est facile de motiver physiquement l'introduction d'un espace de Fock à temps discret de multiplicité N : si l'on veut considérer une chaîne de particules qui n'ont plus seulement deux niveaux d'énergie mais, par exemple, $N+1$ niveaux, il nous faut considérer l'espace d'état

$$\bigotimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^{N+1},$$

que nous appellerons espace de Fock à temps discret de multiplicité N (et pas de multiplicité $N + 1$). L'intérêt de faire apparaître ces espaces dans un cadre probabiliste est en revanche moins évident ; c'est ce que nous allons discuter dans la partie 1.4.1, où nous nous cantonnons aux espaces de Fock de multiplicité finie pour rappeler les résultats exposés dans [AP2]. Dans la partie 1.4.2 nous donnons en revanche les définitions les plus générales et décrivons l'analogie, sur ces espaces, de la théorie que nous avons détaillée en multiplicité 1.

1.4.1 Espace de Fock associé à une marche aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un espace (A, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^N qui prend $N + 1$ valeurs exactement (au sens où elle prend chacune de ces valeurs avec une probabilité non nulle), ces valeurs formant une base de l'espace affine \mathbb{R}^N ; nous noterons X^1, \dots, X^N les variables coordonnées de X dans la base canonique. Pour normaliser le problème on suppose que cette variable aléatoire est centrée et réduite, c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}(X^i) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, N$$

$$\mathbb{E}(X^i X^j) = \delta_{i,j}.$$

Considérons une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de copies indépendantes de X réalisée par exemple sur $(A^{\otimes \mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$; on voit alors (Proposition 4 de [AP2]) que l'on obtient naturellement une base de l'espace $L^2(A^{\otimes \mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$ en considérant les variables aléatoires

$$X_M = \prod_{(i_k, n_k) \in M} X_{i_k}^{n_k}$$

où M décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N} \times \{1, \dots, N\}$. On a donc bien fait apparaître l'espace de Fock à temps discret de multiplicité N , analogue à l'espace de Fock à temps discret simple.

Dans le cas simple cependant, l'intérêt de cette construction résidait dans le fait qu'elle permettait de faire cohabiter toutes les interprétations probabilistes qui correspondaient aux différentes valeurs prises par un paramètre $p \in]0, 1[$. Il est moins clair que l'on va pouvoir conserver une distinction entre les différents choix de la variable X ; cela découle en fait des résultats suivants (exposés comme Théorèmes 2 et 3 dans [AP2] mais prouvés initialement dans [A-E]) :

Théorème 1.4.1 *Soit X une variable aléatoire comme ci-dessus. Alors il existe une famille $(T_k^{i,j})_{i,j,k=1,\dots,N}$ de scalaires telle que pour tout i, j dans $1, \dots, n$,*

$$X^i X^j = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^N T_k^{i,j} X^k \quad (1.4.1)$$

et la famille $(T_j^{i,j})$ a les deux propriétés de symétrie suivantes :

- la fonction $(i, j, k) \mapsto T_k^{i,j}$ est symétrique,
- la fonction $(i, j, l, m) \mapsto \sum_{k=1}^N T_k^{i,j} T_k^{l,m} + \delta_{i,j} \delta_{l,m}$ est symétrique.

Inversement toute famille $(T_k^{i,j})_{i,j,k}$ vérifiant ces propriétés définit une unique variable aléatoire X centrée réduite comme ci-dessus.

C'est donc la famille $(T_k^{i,j})_{i,j,k}$ qui va jouer le rôle du paramètre p du cas simple (ou plutôt de c_p : l'équation (1.1.2) est l'analogie dans l'espace $\mathbb{T}\Phi$ simple de (1.4.1)) ; en particulier à toute telle famille – nous dirons encore *interprétation probabiliste* – sera associé un produit différent. Nous donnons plus loin la représentation intégrale d'un opérateur de multiplication par X_k^i dans une interprétation probabiliste, de même que nous l'avons fait en 1.3.1 pour le cas simple.

1.4.2 Espaces de Fock à temps discret de multiplicité quelconque

Nous définissons de manière plus générale les espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure à 1. Un tel espace est associé à un *espace de multiplicité* qui sera un espace de Hilbert \mathcal{K} , éventuellement de dimension infinie mais toujours séparable. Le cas de multiplicité finie N se retrouvera en choisissant $\mathcal{K} = \mathbb{C}^N$.

On fixe une base hilbertienne $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de \mathcal{K} ; nous supposons par commodité que l'indice zéro 0 n'apparaît pas dans Λ . On peut identifier \mathcal{K} à \mathbb{C}^Λ ; il est alors naturel de définir $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$ comme l'ensemble des fonctions sur \mathcal{P}_Λ , où \mathcal{P}_Λ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N} \times \Lambda$ sur lesquelles la projection sur la première coordonnée est injective : autrement dit, un élément de \mathcal{P}_Λ est un ensemble fini

$$\{(i_1, \lambda_1), \dots, (i_n, \lambda_n)\}$$

avec $i_1 < \dots < i_n$ dans \mathbb{N} et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ quelconques dans Λ .

Une base naturelle est ainsi donnée par l'ensemble $\{X_A, A \in \mathcal{P}_\Lambda\}$; pour $i \geq 0$ et $\lambda \in \Lambda$, nous noterons X_i^λ plutôt que $X_{\{i,\lambda\}}$, cela à la fois pour des questions de lisibilité et pour souligner l'idée que les $(X_{i,\lambda})_{i \geq 0}$ devraient pouvoir être interprétés comme des processus indépendants dans une interprétation probabiliste. Pour simplifier les notations dans la suite on notera parfois $X_{i,0}$ ou X_i^0 le vecteur Ω .

On a exactement comme avant une décomposition tensorielle

$$\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K}) \simeq \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i \otimes \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_{[i]}.$$

Ici $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i$ s'identifie à l'ensemble des fonctions de $l^2(\mathcal{P}_\Lambda)$ qui ont un support dans $\{0, \dots, i-1\} \times \Lambda$, c'est-à-dire qu'un élément f de Φ est dans $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i$ si et seulement si f vérifie

$$f(A) = 0 \text{ dès que } A \not\subset \{0, \dots, i-1\} \times \Lambda;$$

l'espace $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_{[i]}$ s'identifie de même à l'ensemble des fonctions de $l^2(\mathcal{P}_\Lambda)$ à support dans $\{i, \dots\} \times \Lambda$.

On définit donc comme dans le cas précédent un opérateur p_i de projection orthogonale sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i$ et on appelle processus prévisible de vecteurs toute famille $(f_i)_{i \geq 0}$ avec $f_i \in \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i$ pour tout $i \geq 0$. Il doit exister à la place du gradient prévisible d_i , toute une famille d'opérateurs : en effet, si l'on considère un vecteur f de $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$, tout $(p_{i+1} - p_i)f$ va s'écrire sous la forme

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} d_i^\lambda f X_i^\lambda.$$

Il faut donc, si l'on veut conserver une représentation prévisible de la même forme que dans le cas de l'espace de Fock simple, définir une famille d'opérateurs d_i^λ . Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on notera ainsi d_i^λ l'opérateur défini par

$$d_i^\lambda f(A) = \begin{cases} f(A \cup \{i, \lambda\}) & \text{si } A \subset \{0, \dots, i-1\} \times \Lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'opérateur p_i , que l'on notera parfois d_i^0 pour simplifier nos notations, s'exprime par

$$p_i f(A) = \begin{cases} f(A) & \text{si } A \subset \{0, \dots, i-1\} \times \Lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors les formules suivantes, qui expriment la propriété de représentation prévisible dans $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$: pour tout $f \in \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$,

$$f = f(\emptyset)\Omega + \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} d_i^\lambda f X_i^\lambda.$$

et

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} \|d_i^\lambda f\|^2.$$

Nous n'avons pas détaillé la définition de l'intégrale d'Itô ; celle-ci ne pose cependant pas de problème analytique : pour $f_i \in \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i$, $f_j \in \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_j$ et $\kappa, \lambda \in \Lambda$, les vecteurs $f_i X_i^\lambda$ et $f_j X_j^\kappa$ sont orthogonaux à moins que $(i, \kappa) = (j, \lambda)$.

Il existe aussi plus d'opérateurs fondamentaux que dans le cadre de l'espace de Fock simple : pour tout i on définit des opérateurs de création, annihilation et conservation associés à chaque $\lambda \in \Lambda$ ainsi que des opérateurs *d'échange*. Nous allons utiliser à nouveau des conventions de notation du type $A + B$, $A - B$ pour des éléments A, B de \mathcal{P}_Λ . Pour toute paire d'éléments A, B de \mathcal{P}_Λ , on note $A + B$ l'élément $A \cup B$ si les *projections sur* \mathbb{N} de A et B sont disjointes, la grandeur qui porte $A + B$ en indice étant nulle sinon. C'est-à-dire que si

$$A = \{(i_1, \kappa_1), \dots, (i_m, \kappa_m)\}$$

et

$$B = \{(j_1, \lambda_1), \dots, (j_n, \lambda_n)\}$$

alors $A + B$ est $A \cup B$ si $\{i_1, \dots, i_m\}$ et $\{j_1, \dots, j_n\}$ sont disjoints. On notera $A - B$ l'élément $A \setminus B$ si $B \subset A$, la grandeur qui porte $A - B$ en indice étant nulle sinon.

Avec ces notations nous pouvons définir plus simplement les opérateurs fondamentaux : pour $i \geq 0$, $\lambda \in \Lambda$, on définit $a_{i,\lambda}^+$, $a_{i,\lambda}^-$, $a_{i,\lambda}^\circ$ comme dans le cas simple par

$$\begin{aligned} a_{i,\lambda}^+ X_A &= X_{A+\{i,\lambda\}}, \\ a_{i,\lambda}^- X_A &= X_{A-\{i,\lambda\}} \\ a_{i,\lambda}^\circ X_A &= a_{i,\lambda}^+ a_{i,\lambda}^- X_A, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$a_{i,\lambda}^\circ X_A = X_A \text{ si } (i, \lambda) \in A \text{ et zéro sinon.}$$

Ces opérateurs sont alors bornés de norme 1 et on peut les étendre à tout $\mathbb{T}\Phi$. On définit par ailleurs, pour $\kappa \neq \lambda$ dans Λ , i fixé, les opérateurs *d'échange* de λ à κ par $a_{i,\kappa}^+ a_{i,\lambda}^-$; ces opérateurs agissent encore sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_{\{i\}}$ uniquement et transforment X_i^λ en X_i^κ , annihilant tout autre vecteur de base de $\mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$.

Il sera utile d'homogénéiser les notations : nous noterons $a_i^{0,\lambda}$ les opérateurs de création, $a_i^{\lambda,0}$ les opérateurs d'annihilation et $a_i^{\lambda,\kappa} = a_i^{0,\kappa} a_i^{\lambda,0}$ les opérateurs de conservation ou d'échange. On souhaite alors définir une intégrale par rapport aux processus $(a_i^{\kappa,\lambda})_{i \geq 0}$. Ici cependant l'existence d'une infinité de types d'intégrales nous oblige à définir

$$\sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_i h_i^{\kappa,\lambda} a_i^{\kappa,\lambda}$$

comme un tout pour prendre en compte les questions de sommabilité suivant κ, λ . Pour une famille $\left((h_i^{\kappa,\lambda})_{i \geq 0} \right)_{\{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}\}}$ de processus d'opérateurs prévisibles,

l'intégrale associée est définie, comme en 1.3.4, comme l'opérateur

$$\sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ i \in \mathcal{N}}} h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda},$$

au sens où, comme précédemment, le domaine est l'ensemble des f de $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$ tels que

- pour tout $A \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}$,

$$\sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ i \geq 0}} h_i^{\kappa, \lambda} \left| a_i^{\kappa, \lambda} f(A) \right| < +\infty$$

- la grandeur

$$\sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ (\kappa, \lambda) \neq (0, 0)}} \sum_{i \geq 0} h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda} f(A)$$

définit une fonction de carré sommable en A .

Comme précédemment on définit l'intégrale restreinte

$$\sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \in \mathcal{N}}^R h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda},$$

comme la restriction de l'intégrale précédente au domaine constitué de l'ensemble des f tels que

$$A \mapsto \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \geq 0} \left| h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda} f(A) \right|$$

est de carré intégrable.

Exemple

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire dans \mathbb{R}^N comme dans la section 1.4.1. L'opérateur de multiplication par X_n^i dans l'interprétation probabiliste associée à $(X_n)_{n \geq 0}$ s'écrit

$$a_n^{0,i} + a_n^{i,0} + \sum_{j,k} T_i^{j,k} a^{j,l}. \quad (1.4.2)$$

Nous n'allons pas énoncer les analogues de tous les résultats que nous avons mentionnés dans le cas de l'espace de Fock à temps discret simple mais allons nous contenter de donner la formule d'Itô dans ce cadre, formule qui prend une forme agréablement compacte avec nos conventions de notation.

Théorème 1.4.2 (Formule d'Itô pour les intégrales sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$) Soient

$$h = \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \geq 0}^R h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda}$$

et

$$k = \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \geq 0}^R k_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda}$$

deux intégrales restreintes sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$. Alors l'opérateur

$$\begin{aligned} h k - \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \geq 0}^R h_i k_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda} &= \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \geq 0}^R h_i^{\kappa, \lambda} k_i a_i^{\kappa, \lambda} \\ &\quad - \sum_{\lambda, \mu \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{\kappa \in \Lambda} \sum_{i \geq 0}^R (h_i^{\kappa, \lambda} k_i^{\mu, \kappa}) a_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\mu, \kappa} \end{aligned}$$

est une restriction de l'opérateur nul.

Chapitre 2

Représentations intégrales et nucléaires sur l'espace de Fock à temps discret

Dans ce chapitre, nous abordons la question de la représentabilité des opérateurs de $\mathbb{T}\Phi$ sous la forme d'intégrales stochastiques ou d'opérateurs à noyau, c'est-à-dire de séries (en un sens à préciser) de la forme $\sum k(A, B, C) a_A^+ a_B^0 a_C^-$ où A, B, C décrivent \mathcal{P} et où le noyau k est une fonction à valeurs scalaires.

Dans la section 2.1 nous présentons une approche naïve de la question de la représentabilité. Cette approche, si elle ne permet pas d'obtenir de caractérisation satisfaisante, est intéressante pour deux raisons. D'abord, elle montre que l'on a de bonnes chances d'obtenir des résultats de représentabilité sur $\mathbb{T}\Phi$; par ailleurs, elle permet de préciser ce que l'on attend d'une représentation nucléaire et d'en donner une bonne définition. Nous introduisons ensuite les outils qui nous permettront d'étudier les conditions de représentabilité nucléaire puis obtenons une caractérisation des opérateurs représentables, avec des formules explicites pour les noyaux.

Dans la section 2.2 nous établissons un lien entre représentations nucléaires et représentations intégrales puis utilisons les résultats précédents pour obtenir des critères de représentabilité intégrale avec des expressions explicites des coefficients $(h_i^+)_{i \geq 0}$, $(h_i^-)_{i \geq 0}$, $(h_i^0)_{i \geq 0}$ apparaissant dans la représentation intégrale d'un opérateur h .

Enfin, dans la section 2.3, nous donnons les résultats analogues dans le cas des espaces de Fock discrets de multiplicité supérieure.

Ce chapitre reprend essentiellement l'article [Pt1].

2.1 Représentations nucléaires

2.1.1 Une première approche

L'idée fondamentale de cette approche est extrêmement simple et s'appuie sur les remarques (1.3.3) et (1.3.4) : sur notre espace de Fock à temps discret, la prévisibilité permet de se ramener à un cadre vectoriel de dimension finie. Nous avons dit alors que pour tout i la famille

$$\{a_A^+ a_B^\circ a_C^-, A, B, C \text{ disjoints dans } \{0, \dots, i-1\}\}$$

constitue une base de $\mathbb{T}\Phi_i$, et qu'en particulier tout opérateur i -prévisible h_i admet une représentation de la forme

$$h_i = \sum_{A+B+C < i} k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-, \quad (2.1.1)$$

où k est une fonction $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ (qui n'est définie en fait que sur les triplets (A, B, C) disjoints, les autres termes étant simplement inutiles). Une telle somme est finie ; il n'y a donc pas encore de problème d'ordre analytique.

Si maintenant nous nous intéressons à l'existence de représentations analogues pour un opérateur donné, sans hypothèse de prévisibilité, nous devons faire un choix du sens à donner à une telle représentation mais essayons d'exploiter le résultat ci-dessus portant sur les opérateurs prévisibles. Considérons donc un opérateur h de $\mathbb{T}\Phi$; pour la discussion à venir nous nous autorisons des hypothèses très confortables et le supposons borné. Notons $\mathbb{E}_i h$ l'opérateur égal à $p_i h p_i \otimes \text{Id}$; il est clair que $\mathbb{E}_i h$ converge fortement vers h lorsque i tend vers l'infini. De plus cet opérateur est i -prévisible donc il existe une fonction $k_i : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\mathbb{E}_i h = \sum_{A+B+C < i} k_i(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-.$$

On voit facilement par ailleurs pour $j > i$, d'une part que $\mathbb{E}_i(\mathbb{E}_j h) = \mathbb{E}_i h$, et d'autre part que

$$\mathbb{E}_i \sum_{A+B+C < j} k_j(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- = \sum_{A+B+C < i} k_j(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-.$$

Cela implique que le noyau k_j coïncide avec le noyau k_i sur les triplets de parties de $\{0, \dots, i-1\}$. Il existe donc une fonction k telle que pour tout i ,

$$\mathbb{E}_i h = \sum_{A+B+C < i} k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$$

et par conséquent

h est la limite forte de $\sum_{A+B+C < i} k(A, B, C) a_A^+ a_B^0 a_C^-$ lorsque $i \rightarrow \infty$.

On obtient ainsi une espèce de représentation en noyau pour tout opérateur borné. On a cependant plusieurs raisons de ne pas être satisfait de cette représentation : tout d'abord, ce raisonnement utilise l'hypothèse que l'opérateur h est borné, ce qui réduit considérablement le domaine d'application ; par ailleurs, et là est le plus grave, on voudrait que la série $\sum k(A, B, C) a_A^+ a_B^0 a_C^-$, même si elle reste une écriture formelle, soit "indépendante de l'ordre de sommation". Cela semble en effet être une exigence minimale si l'on veut que cette écriture en série ait de bonnes propriétés. Notre approche naïve, elle, a fourni une série qui n'est *a priori* que semi-convergente.

Observons quelles conditions cette exigence impose : on veut qu'une représentation $h = \sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^0 a_C^-$ où l'on somme sur les triplets A, B, C de \mathcal{P} deux à deux disjoints, soit telle que pour tout f dans son domaine, pour tout N de \mathcal{P} , $hf(N)$ coïncide avec l'expression que l'on obtient après calcul formel de l'action de

$$\sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^0 a_C^- \quad \text{sur} \quad \sum_M f(M) X_M$$

et que l'expression obtenue soit indépendante de l'ordre de sommation suivant A, B, C et M (cela car la série $\sum_M f(M) X_M$ est naturellement absolument convergente).

L'égalité

$$a_A^+ a_B^0 a_C^- X_M = X_{M+A-C} \text{ si } B \subset M, \text{ zéro sinon}$$

montre que

$$\sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^0 a_C^- \sum_M f(M) X_M = \sum_{A,B,C} \sum_{M \supset B} k(A, B, C) f(M) X_{M+A-C}.$$

La sommation en M ne se fait que sur les M qui contiennent B et C ; on effectue donc un changement de variable qui permet de réécrire l'égalité ci-dessus en

$$\sum_M k(A, B, C) f(M+B) X_{A+B+M}.$$

Ce qui nous intéresse dans cette expression est la coordonnée suivant un X_M . Après un changement de variable supplémentaire on voit que l'expression ci-dessus se réécrit

$$\sum_M \left(\sum_{U+V+W=M} \sum_N k(U, V, N) f(V+W+N) \right) X_M,$$

de sorte que l'on doit avoir $hf(M)$ égal à

$$\sum_{U+V+W=M} \sum_N k(U, V, N) f(V + W + N).$$

Pour que cette quantité soit indépendante de l'ordre de sommation, il faut donc que pour chaque M de \mathcal{P} , cette série soit absolument convergente, ce qui revient à dire que pour tout triplet U, V, W , d'éléments deux à deux disjoints de \mathcal{P} on a

$$\sum_N |k(U, V, N) f(V + W + N)| < +\infty.$$

Cela sera l'une des conditions définissant les opérateurs à noyau.

Dans ce qui précède nous avons utilisé le fait que la famille

$$\{a_A^+ a_B^0 a_C^-, A, B, C \text{ disjoints dans } \{0, \dots, i-1\}\}$$

est une base de $\mathcal{B}(\mathbb{T}\Phi_i)$ pour justifier l'intérêt que nous portons aux écritures en série $\sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^0 a_C^-$. Nous avons vu cependant que la famille

$$\{a_A^+ a_B^-, A, B \text{ quelconques dans } \{0, \dots, i-1\}\}$$

constitue une autre base du même espace; nous aurions pu en suivant le même cheminement que précédemment arriver à la conclusion qu'il existe une fonction $k : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ telle que

$$h \text{ est la limite forte de } \sum_{A \cup B < i} k(A, B) a_A^+ a_B^-$$

(notons que les arguments A et B ne sont plus disjoints).

On peut donc tout aussi légitimement s'intéresser à des représentations de la forme $h = \sum_{A,B \in \mathcal{P}} k(A, B) a_A^+ a_B^-$. Comme précédemment il est naturel d'exiger qu'une telle représentation soit telle que pour tout f du domaine de h , tout N de \mathcal{P} , $hf(N)$ soit donné par le développement formel de

$$\sum_{A,B} k(A, B) a_A^+ a_B^- \sum_M f(M) X_M$$

et que le résultat soit indépendant de l'ordre de sommation. En examinant comment se traduisent ces exigences nous arrivons cette fois-ci à

$$hf(M) = \sum_{U+V=M} \sum_N k(U, N) f(V + N)$$

et la condition associée est maintenant que pour tous U, V disjoints de \mathcal{P} ,

$$\sum_N |k(U, N) f(V + N)| < +\infty.$$

Nous donnons donc les définitions suivantes :

Définition 2.1.1

- Soit une fonction $k_3 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$; l'opérateur à noyau à trois arguments associé à k_3 est l'opérateur h dont le domaine est l'ensemble des f de $\mathbb{T}\Phi$ tels que pour tous U, V, W deux à deux disjoints de \mathcal{P} , on ait

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k_3(U, V, N)f(V + W + N)| < +\infty$$

et que l'expression

$$hf(M) = \sum_{U+V+W=M} k_3(U, V, N)f(V + W + N)$$

définisse un élément de $l^2(\mathcal{P})$.

- Soit une fonction $k_2 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$; l'opérateur à noyau à deux arguments associé à k_2 est l'opérateur h dont le domaine est l'ensemble des f de $\mathbb{T}\Phi$ tels que pour tous U, V disjoints de \mathcal{P} , on ait

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k_2(U, N)f(V + N)| < +\infty$$

et que l'expression

$$hf(M) = \sum_{U+V=M} k_2(U, N)f(V + N)$$

définisse un élément de $l^2(\mathcal{P})$.

Nous allons étudier ces deux types de représentations. Nous verrons en particulier qu'elles sont strictement équivalentes ; de plus, l'écriture en noyau à deux arguments nous permettra de donner une interprétation simple des décompositions en opérateurs à noyau.

2.1.2 Transformations de noyaux

La première transformation que nous considérons est celle qui permet de passer d'une représentation à deux arguments à une représentation à trois arguments, du moins dans le cas des opérateurs prévisibles ou des opérateurs bornés, suivant l'approche que nous avons présentée en introduction. Cette transformation se déduit des égalités

$$a_A^+ a_B^- = a_{A \setminus B}^+ a_{A \cap B}^\circ a_{B \setminus A}^- \quad \text{et} \quad a_A^+ a_B^\circ a_C^- = a_{A \cup B}^+ a_{B \cup C}^-$$

(la seconde étant valable pour A, B, C disjoints seulement) et s'exprime par

$$\begin{aligned} k_2(A, B) &= k_3(A \setminus B, A \cap B, B \setminus A) \\ \text{et} & \\ k_3(A, B, C) &= k_2(A \cup B, B \cup C). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

La seconde transformation que nous considérons nous a été inspirée par les travaux de Lindsay (dans [Li1]). Dans notre cadre discret, on peut les définir pour les noyaux à deux ou trois arguments :

Définition 2.1.2

- Soit un noyau à trois variables $k_3 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$; on définit sa transformée $k'_3 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$k'_3(A, B, C) = \sum_{V \subset B} k_3(A, V, C).$$

- Soit un noyau à deux variables $k_2 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$; on définit sa transformée $k'_2 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$k'_2(A, B) = \sum_{V \subset A \cap B} k_2(A \setminus B + V, B \setminus A + V).$$

Dans le cas des noyaux à trois arguments cette transformation est simplement la transformation de Möebius par rapport à la seconde variable ; dans le cas des noyaux à deux arguments l'expression en est un peu plus compliquée mais la transformation $k_2 \mapsto k'_2$ s'exprime encore grâce à la transformation de Möebius, de sorte que l'on peut inverser ces deux transformations :

$$k_3(A, B, C) = \sum_{V \subset B} (-1)^{|B-V|} k'_3(A, V, C) \tag{2.1.3}$$

dans le cas d'un noyau à trois variable et

$$k_2(A, B) = \sum_{V \subset A \cap B} (-1)^{|A \cap B - V|} k'_2((A \setminus B) \cup V, (B \setminus A) \cup V) \tag{2.1.4}$$

dans le cas d'un noyau à deux variables.

On peut par ailleurs vérifier qu'avec les définitions ci-dessus les noyaux k'_3, k'_2 sont reliés entre eux par des relations identiques à (2.1.2) :

$$k'_2(A, B) = k'_3(A \setminus B, A \cap B, B \setminus A) \text{ et } k'_3(A, B, C) = k'_2(A \cup B, B \cup C). \tag{2.1.5}$$

On observe encore que les transformations que nous avons définies sont telles que le graphe suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k_2 & \longleftrightarrow & k_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ k'_2 & \longleftrightarrow & k'_3 \end{array},$$

et que toutes les correspondances sont bijectives. Cela signifie en particulier qu'une notation comme k'_3 est sans ambiguïté. Pour cette raison, nous supprimons les indices 2 ou 3 et notons simplement k, k' les différents noyaux, étant entendu qu'ils sont reliés par les relations ci-dessus.

Nous n'avons pas justifié la définition de la transformation $k \mapsto k'$ autrement que par son utilité dans les travaux de Lindsay. On se rendra pourtant compte *a posteriori* que c'était de prime abord un objet très naturel ; nous choisissons malhonnêtement de ne pas encore dévoiler pourquoi.

La proposition suivante prouve l'équivalence entre représentations à deux et à trois arguments et montre en partie l'intérêt que présentent les transformations que nous avons définies :

Proposition 2.1.3 (Proposition 1 de [Pt1]) *Soit f un vecteur fixé de $l^2(\mathbb{N})$; on considère les conditions suivantes :*

- pour tous U, V, W deux à deux disjoints de \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k(U, V, N)f(V + W + N)| < +\infty \quad (2.1.6)$$

- pour tous U, V disjoints de \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k(U, N)f(V + N)| < +\infty \quad (2.1.7)$$

- pour tous U, V disjoints de \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k'(U, V, N)f(V + N)| < +\infty \quad (2.1.8)$$

- pour tout U de \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k'(U, N)f(N)| < +\infty. \quad (2.1.9)$$

Alors les conditions sur les noyaux à trois arguments sont équivalentes aux conditions sur leurs analogues à deux arguments, c'est-à-dire que

(2.1.6) et (2.1.7) sont équivalents,

(2.1.8) et (2.1.9) sont équivalents.

De plus, les conditions sur des noyaux k impliquent les conditions sur leurs transformées k' , c'est-à-dire que

(2.1.6), (2.1.7) impliquent (2.1.8), (2.1.9).

Enfin, si toutes ces conditions sont vérifiées, les quatre expressions suivantes sont égales :

$$\sum_{U+V+W=M} \sum_{N \in \mathcal{P}} k(U, V, N) f(V + W + N) \quad (2.1.10)$$

$$\sum_{U+V=M} \sum_{N \in \mathcal{P}} k'(U, V, N) f(V + N) \quad (2.1.11)$$

$$\sum_{U+V=M} \sum_{N \in \mathcal{P}} k(U, N) f(V + N) \quad (2.1.12)$$

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} k'(M, N) f(N) \quad (2.1.13)$$

Remarque

Les conditions sur les noyaux transformés k' n'impliquent en revanche pas les conditions sur les noyaux k ; si par exemple on prend k de la forme

$$k(A, B, C) = (-1)^{|B|} j(A, C)$$

où $|B|$ est le cardinal de B et j est une fonction sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, alors

$$k'(A, B, C) = \mathbb{1}_{B=\emptyset} j(A, C).$$

La condition (2.1.8) devient

$$\text{pour tout } U \text{ de } \mathcal{P}, \sum_N |j(U, N) f(N)| < +\infty,$$

alors que (2.1.6) est

$$\text{pour tous } U, V \text{ de } \mathcal{P} \text{ disjoints, } \sum_N |j(U, N) f(V + N)| < +\infty.$$

On voit alors que si l'on considère

- une fonction j telle que $j(U, W) = 0$ si le cardinal de W est différent de 1,
- un vecteur f nul sur les singletons,

alors (2.1.8) est triviale tandis que (2.1.6) devient

$$\text{pour tous } U, V \text{ disjoints de } \mathcal{P}, \sum_{n \geq 0} |j(U, \{n\})f(V + \{n\})| < +\infty. \quad (2.1.14)$$

ce qui impose encore des conditions sur les valeurs de j et de f . On peut donc construire de nombreux contre exemples.

Dans son article [Li1], Lindsay, qui étudie des transformations analogues en temps continu pour des noyaux à trois arguments, affirme que la condition sur la transformée k' implique la condition sur k (la transcription en temps continu remplace simplement la somme par une intégrale). Notre contre-exemple cependant se traduit immédiatement au cas du temps continu et offre un contre-exemple à cette affirmation. Notons cependant que cette erreur n'a aucune conséquence sur le reste de l'article [Li1] ni sur l'article associé [B-L].

On peut par ailleurs identifier un domaine sur lequel les conditions (2.1.6), (2.1.7) sont équivalentes aux conditions plus simples (2.1.8), (2.1.9) :

Proposition 2.1.4 (Proposition 2 de [Pt1]) *Soit f un vecteur de $l^2(\mathcal{P})$ tel qu'il existe une fonction $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tous A, B de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$,*

$$|f(A + B)| \leq |f(A)| \prod_{i \in B} \phi(i).$$

Pour ce vecteur f les conditions (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9) sont équivalentes.

Définition 2.1.5 *Un vecteur f de $l^2(\mathcal{P})$ vérifiant la condition ci-dessus est dit sous-exponentiel; l'ensemble des vecteurs sous-exponentiels est noté $s\mathcal{E}$. Cet ensemble $s\mathcal{E}$ contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs exponentiels et de vecteurs X_A , $A \in \mathcal{P}$.*

Cet ensemble $s\mathcal{E}$ n'est pas un espace vectoriel; tout ce qu'on peut en dire est que pour f, g dans $s\mathcal{E}$ et α, β dans \mathbb{C} , la fonction $|\alpha| |f| + |\beta| |g|$ est dans $s\mathcal{E}$.

Remarque

La Proposition 2.1.4 nous a montré en particulier qu'on a une stricte équivalence entre les noyaux à trois arguments et ceux à deux arguments, de sorte que nous ne nous soucierons plus de distinguer les deux types de représentations.

Les Propositions 2.1.3 et 2.1.4 donnent une expression simplifiée des conditions de représentabilité pour les opérateurs dont le domaine est inclus dans $s\mathcal{E}$. Nous allons voir cependant que, même lorsque l'on souhaite étudier la représentabilité

d'un opérateur dont le domaine n'est pas inclus dans $s\mathcal{E}$, nos transformations restent utiles. L'équation (2.1.13) en particulier a une conséquence très importante : supposons que h soit un opérateur à noyau k et que la base $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ soit contenue dans le domaine de h . Alors pour tout M de \mathcal{P} ,

$$hX_A(M) = \sum_N k'(M, N) \mathbb{1}_{A=N},$$

et puisque $hX_A(M)$ est simplement $\langle X_M, hX_A \rangle$, on obtient la formule

$$k'(A, B) = \langle X_A, hX_B \rangle \quad (2.1.15)$$

sous les conditions de domaine ci-dessus. Nous disposons donc théoriquement de tous les critères permettant de déterminer si un opérateur dont le domaine contient $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est représentable. L'expression de k' en fonction de k cependant n'est en général pas très maniable, de sorte que nous allons nous intéresser dans la suite à des critères plus directement accessibles.

Remarques

- Cette dernière formule éclaire le sens des conditions (2.1.8) et (2.1.9) : en effet, grâce à cette formule, la condition (2.1.9) devient

$$\text{pour tout } M, \sum_N |\langle X_M, hX_N \rangle f(N)| < +\infty,$$

de sorte que, sous les conditions portant sur les transformées k' dans la Proposition 2.1.3, le développement en noyau est une simple réécriture de l'égalité

$$\text{pour tout } M \quad \langle X_M, h \sum_N f(N) X_N \rangle = \sum_N \langle X_M, hX_N \rangle f(N). \quad (2.1.16)$$

- La formule (2.1.15) nous permet aussi d'éclaircir le sens de cette représentation en noyaux. On a, du moins formellement,

$$h = \sum_{A, B} \langle X_A, hX_B \rangle |X_A\rangle \langle X_B|; \quad (2.1.17)$$

or $|X_A\rangle \langle X_B| = a_A^+ p_0 a_B^-$ et, comme nous allons le voir plus bas en (2.1.19),

$$p_0 = \sum_{N \in \mathcal{P}} (-1)^{|N|} a_N^{\circ},$$

ce qui permet de déduire la forme de la représentation en noyau en substituant cette expression dans ce qui précède.

La justification que nous avons présentée dans la deuxième remarque ci-dessus se retrouve dans les questions de représentations en noyau dans les espaces de Fock à temps continu ; dans ce cas bien sûr les problèmes analytiques deviennent plus exigeants. Nous discuterons l'apparition de ces idées dans le chapitre suivant, dans la section 3.3.

Résumons la caractérisation que nous avons obtenue dans le cas d'opérateurs dont le domaine est contenu dans $s\mathcal{E}$:

Proposition 2.1.6 *Soit h un opérateur sur $\mathbb{T}\Phi$ dont le domaine vérifie*

$$\{X_A, A \in \mathcal{P}\} \subset \text{Dom } h \subset s\mathcal{E};$$

alors h peut être étendu en un opérateur à noyau si et seulement si pour tout f dans $\text{Dom } h$, tout M dans \mathcal{P} ,

$$\begin{cases} \sum_N |\langle X_M, hX_N \rangle f(N)| < +\infty \text{ et} \\ \sum_N \langle X_M, hX_N \rangle f(N) = hf(M). \end{cases} \quad (2.1.18)$$

et le noyau k est alors donné par

$$k'(A, B) = \langle X_A, hX_B \rangle.$$

Cette proposition n'est qu'une reformulation de notre définition utilisant 2.1.3 et 2.1.4 ; elle peut sembler décevante. En effet, il se comprend que l'hypothèse $\text{Dom } h \subset s\mathcal{E}$ soit nécessaire pour éviter que l'opérateur à noyau n'ait un domaine trop fantaisiste en regard de celui de h . Il peut sembler en revanche que la seconde condition de (2.1.18) puisse être remplacée par une hypothèse de fermabilité dans lesquelles on particulariserait la base $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$. L'énoncé ne peut se simplifier autant qu'on le croirait *a priori*. En effet, une condition de fermabilité usuelle s'écrit ainsi : si une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'éléments du domaine de K vérifie

$$\begin{cases} (u_n)_{n \geq 0} \text{ tend vers zéro et} \\ \text{la suite } (Ku_n)_{n \geq 0} \text{ converge,} \end{cases}$$

alors la limite de $(Ku_n)_{n \geq 0}$ est zéro. La deuxième condition de (2.1.18), elle, est à la fois plus faible que la fermabilité puisque les seules suites approchantes $(u_n)_{n \geq 0}$ considérées sont des sommes partielles de $\sum_N f(N)X_N$. Elle est en revanche plus forte que la fermabilité puisque l'hypothèse de convergence au sens faible disant que pour tout M de \mathcal{P} , $\langle X_M, Ku_n \rangle$ converge et définit une fonction de M de carré intégrable doit impliquer que, pour tout M , la limite est zéro.

2.1.3 Une condition suffisante de représentabilité nucléaire

Il est clair d'après la remarque montrant que les conditions de la Proposition 2.1.6 sont celles qui permettent d'écrire (2.1.16), qu'il existe un cas dans lequel la question de la représentabilité se simplifie grandement : c'est celui où l'on s'autorise des hypothèses sur l'adjoint de l'opérateur considéré. Nous prouvons ainsi le théorème suivant :

Théorème 2.1.7 (Théorème 2 de [Pt1]) *Soit h un opérateur sur $\mathbb{T}\Phi$ tel que $\{X_A, A \in \mathcal{P}\} \subset \text{Dom } h \cap \text{Dom } h^*$; alors les formules (2.1.15) définissent un opérateur à noyau qui est une extension fermée de h .*

Ce théorème montre qu'en particulier tout opérateur borné admet une représentation en noyau valable sur tout $\mathbb{T}\Phi$. Il faut remarquer par ailleurs que, dans ce théorème, il n'y a plus d'hypothèse sur le domaine du type $\text{Dom } h \subset s\mathcal{E}$; nous ne nous servons plus en fait de la Proposition 2.1.4 mais prouvons pour tout f de $\mathbb{T}\Phi$ les conditions plus fortes (2.1.6), (2.1.7) de la Proposition 2.1.3. Nous prouvons de plus que, dans ce cas, l'opérateur à noyau h_k obtenu est un opérateur fermé. Notons cependant que l'inclusion $\bar{h} \subset h_k$ n'est pas une égalité *a priori*.

Extensions de ces résultats

Il est à remarquer que, dans tout ce que nous avons fait, nous n'avons jamais utilisé l'ordre sur \mathbb{N} ; on peut donc transcrire nos résultats sans aucune modification au cas où l'on travaille sur un espace de Fock construit sur $l^2(\mathcal{A})$ pour \mathcal{A} dénombrable. Cela signifie que, si l'on considère un espace de Hilbert séparable et que l'on associe à une base hilbertienne quelconque des opérateurs de création, annihilation, conservation de la même manière qu'ici, on peut, sous des hypothèses analogues à celles de la Proposition 2.1.6 du Théorème 2.1.7, représenter tout opérateur de cet espace comme une série de produits de ces opérateurs a^+ , a^- , a° . En particulier, tout cela s'applique aux espaces de Fock de multiplicité supérieure et même de multiplicité infinie. Nous détaillerons ces résultats dans la section 2.3.

Exemples de représentations en noyaux

- Considérons un opérateur de projection adaptée p_i . Le Théorème 2.1.7 s'applique et l'on trouve

$$k'(A, B) = \langle X_A, p_i X_B \rangle$$

qui vaut 1 si $A = B \subset \{0, \dots, i-1\}$ et 0 sinon. En inversant cette formule nous trouvons des représentations

$$p_i = \sum_{B \geq i} (-1)^{|B|} a_B^\circ = \sum_{B \geq i} (-1)^{|B|} a_B^+ a_B^-. \quad (2.1.19)$$

- Pour α, β dans \mathcal{P} on peut considérer l'opérateur $|X_\alpha\rangle\langle X_\beta|$. Alors $k'(A, B)$ vaut 1 pour $A = \alpha, B = \beta$, 0 sinon. On obtient

$$|X_\alpha\rangle\langle X_\beta| = \sum_{B \in \mathcal{P}} (-1)^{|B|} a_\alpha^+ a_B^\circ a_\beta^-, \quad (2.1.20)$$

qui se déduit de l'exemple précédent et du fait que $|X_\alpha\rangle\langle X_\beta| = a_\alpha^+ p_0 a_\beta^-$ (voir la seconde remarque après la formule (2.1.15)).

- Définissons un opérateur h sur l'espace engendré par $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ par

$$hX_A = \sum_{B \subset A} X_B.$$

On voit facilement alors que h^* n'est pas défini sur l'ensemble $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ de sorte que l'on ne peut appliquer le Théorème 2.1.7 ; en revanche, la Proposition 2.1.6 s'applique et montre que h est étendu par l'opérateur $\sum_C a_C^-$.

2.2 Application aux questions de représentations intégrales

Nous allons utiliser à présent la structure d'ordre qui existe sur \mathbb{N} pour obtenir des représentations intégrales à partir de nos représentations nucléaires. Nous avons d'abord besoin de remarquer que, d'après nos calculs de

$$k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- \sum_M f(M) X_M,$$

la Définition 2.1.1 revient à définir l'opérateur $\sum_{A, B, C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$ comme ayant pour domaine l'ensemble des f de $\mathbb{T}\Phi$ tels que

- pour tout M de \mathcal{P} ,

$$\sum_{A, B, C} |k(A, B, C) (a_A^+ a_B^\circ a_C^- f)(M)| < +\infty$$

- la fonction

$$M \mapsto \sum_{A, B, C} (k(A, B, C) (a_A^+ a_B^\circ a_C^- f))(M)$$

est de carré intégrable en fonction de M .

Grâce à cette remarque on voit qu'un opérateur à noyau est bien une série

$$\sum_{A, B, C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$$

au sens où nous avons défini les séries d'opérateurs dans le cas des intégrales.

En particulier, les deux propriétés suivantes deviennent claires : d'abord, si l'on écrit k comme une somme $k_1 + \dots + k_n$ où les k_i ont deux à deux des supports disjoints, alors l'opérateur

$$\sum_{A,B,C} k_1(A,B,C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- + \dots + \sum_{A,B,C} k_n(A,B,C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$$

est une restriction de l'opérateur $\sum_{A,B,C} k(A,B,C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$. En effet, la première condition ci-dessus (sommabilité suivant A, B, C) est vérifiée de manière équivalente par une écriture et par l'autre et la propriété que l'expression donne une fonction l^2 de M est plus forte pour la seconde écriture. Par ailleurs, si l'on écrit \mathcal{P} comme une réunion disjointe $\mathcal{P} = \cup_{i \geq 0} P_i$ alors

$$\sum_i \left(\sum_{A,B,C \in P_i} k(A,B,C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- \right)$$

est une extension de l'opérateur $\sum_{A,B,C} k(A,B,C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$ puisque la condition de sommabilité suivant i dans l'écriture ci-dessus est plus faible que la condition de sommabilité suivant A, B, C dans l'écriture en noyau, la condition l^2 étant ensuite équivalente dans un cas et dans l'autre.

2.2.1 Représentations nucléaires et intégrales

Supposons qu'un opérateur h sur $\mathbb{T}\Phi$ admette une représentation en noyau au sens de la Définition 2.1.1. Comme, pour tout $(A, B, C) \neq (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, le plus grand élément de $A \cup B \cup C$ est dans un et un seul des ensembles A, B, C , on peut réécrire la représentation en noyau de deux manières différentes : d'après les remarques faites ci-dessus, la somme des trois séries

$$\begin{aligned} & k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_{\substack{i \geq 0 \\ A,B,C < i}} k(A+i, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- a_i^+ \\ & + \sum_{\substack{i \geq 0 \\ A,B,C < i}} k(A, B+i, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- a_i^\circ + \sum_{\substack{i \geq 0 \\ A,B,C < i}} k(A, B, C+i) a_A^+ a_B^\circ a_C^- a_i^- \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

est étendue par l'opérateur à noyau $\sum_{A,B,C} k(A,B,C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$, qui est à son tour étendu par

$$\begin{aligned} & k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_i \left(\sum_{A,B,C < i} k(A+i, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- a_i^+ \right. \\ & \left. + \sum_{A,B,C < i} k(A, B+i, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- a_i^\circ + \sum_{A,B,C < i} k(A, B, C+i) a_A^+ a_B^\circ a_C^- a_i^- \right). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Si l'on définit par ailleurs trois processus prévisibles $(h_i^+)_{i \geq 0}$, $(h_i^\circ)_{i \geq 0}$, $(h_i^-)_{i \geq 0}$ par

$$\begin{cases} h_i^+ = \sum_{A,B,C < i} k(A+i, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- \\ h_i^\circ = \sum_{A,B,C < i} k(A, B+i, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- \\ h_i^- = \sum_{A,B,C < i} k(A, B, C+i) a_A^+ a_B^\circ a_C^- \end{cases} \quad (2.2.3)$$

alors (2.2.2) se réécrit en

$$k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_i (h_i^+ a_i^+ + h_i^\circ a_i^\circ + h_i^- a_i^-), \quad (2.2.4)$$

et l'on voit de la même manière que l'intégrale

$$k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_i h_i^+ a_i^+ + \sum_i h_i^\circ a_i^\circ + \sum_i h_i^- a_i^-$$

est elle-même une extension de (2.2.1) et une restriction de (2.2.4).

On a donc obtenu une intégrale stochastique quantique qui coïncide avec l'opérateur h sur leur domaine commun et on peut expliciter une partie de ce domaine commun. En particulier, si la base $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est dans le domaine de h alors elle est aussi dans celui de (2.2.1) puisque seule la série en a_i^+ porte sur un nombre infini de termes. Elle est donc dans le domaine *restreint* de (2.2.1) puisque pour tout A , $\sum_i h_i^+ a_i^+ X_A(M)$ ne contient qu'un seul terme pour tous les M sauf un nombre fini.

De plus, les coefficients de l'intégrale sont donnés sous la forme d'opérateurs à noyau par (2.2.3); nous savons relier le noyau à l'expression de l'opérateur grâce à la formule (2.1.15), de sorte que nous pouvons déduire une forme plus explicite des opérateurs h_i^ε si nous supposons que $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est inclus dans le domaine de h . Ces opérateurs s'expriment de manière particulièrement simple grâce aux opérateurs du calcul d'Itô abstrait :

$$\begin{cases} h_i^+ p_i = d_i h p_i \\ h_i^- p_i = p_i h a_i^+ p_i \\ h_i^\circ p_i = d_i h a_i^+ p_i - p_i h p_i. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

2.2.2 Une condition suffisante de représentabilité intégrale

Dans la section précédente nous avons montré le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 (Théorème 3 de [Pt1]) *Soit h un opérateur sur $\mathbb{T}\Phi$ tel que $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est contenu dans $\text{Dom } h \cap \text{Dom } h^*$, et notons \bar{h} la fermeture de h ; alors si l'on note h_i^ε les opérateurs définis par (2.2.5) et $\mu = \langle \Omega, h\Omega \rangle$, l'opérateur*

$$\left(\mu \text{Id} + \sum_i h_i^+ a_i^+ + \sum_i h_i^\circ a_i^\circ + \sum_i h_i^- a_i^- \right) - \bar{h}$$

est une restriction de l'opérateur nul et $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est dans le domaine restreint de l'intégrale.

Les p_i à droite des expressions (2.2.5) ne sont là que pour mettre en valeur la symétrie; puisque $d_i = p_i a_i^-$ et que a_i^+ , a_i^- sont mutuellement adjoints, ces formules entraînent que

$$(k^*)_i^+ = k_i^-, \quad (k^*)_i^- = k_i^+ \quad \text{et} \quad (k^*)_i^\circ = k_i^\circ,$$

où les $(k^*)^\varepsilon$ sont les coefficients de la représentation intégrale de h^* .

Représentation des processus

Dans ce qui précède, nous ne nous sommes intéressé qu'à la représentation d'un opérateur isolé. Si l'on souhaite considérer un processus d'opérateurs $(h_i)_{i \geq 0}$, que l'on suppose prévisible, on peut bien sûr déduire des formules précédentes une représentation intégrale de chaque h_i mais les coefficients de ces représentations dépendront de i , or nous aimerions avoir des écritures compatibles entre elles. On obtient facilement, à partir des formules précédentes, une représentation intégrale commune du processus à condition d'y intégrer une intégrale par rapport au temps : il suffit pour cela de remarquer que tout $h_{i+1} - h_i$ se décompose en une partie $h_i^+ a_i^+ + h_i^- a_i^- + h_i^\circ a_i^\circ$ et une partie i -prévisible. Remarquons qu'ici on n'a plus aucun problème de domaine puisque les opérateurs prévisibles sont bornés et que toutes les sommes sont finies.

Corollaire 2.2.2 *Soit (h_i) un processus prévisible d'opérateurs sur $\mathbb{T}\Phi$. Alors il existe quatre familles $(h_i^+)_{i \geq 0}$, $(h_i^-)_{i \geq 0}$, $(h_i^\circ)_{i \geq 0}$, $(h_i^\times)_{i \geq 0}$ telles que pour tout i on ait*

$$h_i = \mu Id + \sum_{j < i} h_j^+ a_j^+ + \sum_{j < i} h_j^- a_j^- + \sum_{j < i} h_j^\circ a_j^\circ + \sum_{j < i} h_j^\times a_j^\times$$

où $\mu = \langle \Omega, h_0 \Omega \rangle$ et les intégrandes sont données par

$$\begin{cases} h_i^+ p_i = & d_i h_{i+1} p_i \\ h_i^- p_i = & p_i h_{i+1} a_i^+ p_i \\ h_i^\circ p_i = & d_i h_{i+1} a_i^+ p_i - p_i h_{i+1} p_i \\ h_i^\times p_i = & p_i (h_{i+1} - h_i) p_i. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Exemples de représentations intégrales

- les opérateurs de projection adaptée p_i pour $i \geq 0$ s'écrivent

$$p_i = Id + \sum_{j \geq i} h_j^\circ a_j^\circ \quad (2.2.7)$$

pour $h_j^\circ = -\sum_{N \subset \{i, \dots, j-1\}} (-1)^{|N|} a_N^\circ$ et cette représentation intégrale est nécessairement valable partout puisqu'on a une représentation nucléaire sur tout $\mathbb{T}\Phi$ qui est strictement équivalente à la restriction commune (2.2.1).

- Soient α, β dans \mathcal{P} et supposons par exemple que le plus grand élément de $\alpha \cup \beta$ est un élément $a \in \alpha$. Alors l'opérateur $|X_\alpha\rangle\langle X_\beta|$ admet la représentation intégrale

$$(a_{\alpha-a}^+ (\text{Id} + \sum_{j=0}^{a-1} h_j^\circ a_j^\circ) a_\beta^-) a_a^+ + \sum_{j \geq a} (|X_\alpha\rangle\langle X_\beta| h_j^\circ) a_j^\circ$$

où les opérateurs h_j° sont définis dans l'exemple précédent. Encore une fois cette représentation est valable sur tout $\mathbb{T}\Phi$.

2.3 Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1

Dans cette section, nous considérons le cas où l'on travaille sur un espace de Fock à temps discret $\mathbb{T}\Phi_{\mathcal{K}}$, pour un espace de Hilbert séparable \mathcal{K} , dont une base hilbertienne est indexée par Λ , comme dans la section 1.4. On rappelle que \mathcal{P}_Λ est l'ensemble des parties finies M de $\mathbb{N} \times \Lambda$ telles qu'il n'existe pas dans M deux éléments de la forme (i, κ) et (i, λ) .

Dans un tel espace, une représentation en noyau est encore une série du type $\sum k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$ où les a^+, a^-, a° sont ceux que nous avons définis en 1.4 et A, B, C sont des éléments de \mathcal{P}_Λ ; ces ensembles A, B, C sont non seulement disjoints mais les projections sur \mathbb{N} de A, B sont disjointes, celles de B, C sont disjointes. En revanche on peut avoir par exemple des éléments (i, κ) dans A et (i, λ) dans C , avec $\lambda \neq \kappa$ cependant. Ceci cependant n'a rien à voir avec nos preuves combinatoires (de telles considérations n'apparaissent pas dans les représentations à deux arguments) et tous nos critères portant sur les représentations en noyaux restent valables si l'on considère des représentations en noyaux sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$; seuls les ensembles d'indexation vont changer.

Pour énoncer l'analogie de la Proposition 2.1.6 il faut dire que l'ensemble $s\mathcal{E}(\mathcal{K})$ se définit comme dans la Proposition 2.1.4 en considérant des fonctions ϕ de $\mathbb{N} \times \Lambda$ dans \mathbb{R}_+ .

Proposition 2.3.1 *Soit h un opérateur sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$ dont le domaine vérifie*

$$\{X_A, A \in \mathcal{P}_\Lambda\} \subset \text{Dom } h \subset s\mathcal{E}(\mathcal{K});$$

alors h peut être étendu en un opérateur à noyau si et seulement si pour tout f

dans $\text{Dom } h$, tout M dans \mathcal{P}_Λ ,

$$\begin{cases} \sum_{N \in \mathcal{P}_\Lambda} |\langle X_M, hX_N \rangle f(N)| < +\infty \text{ et} \\ \sum_{N \in \mathcal{P}_\Lambda} \langle X_M, hX_N \rangle f(N) = hf(M). \end{cases} \quad (2.3.1)$$

et le noyau k est alors donné par

$$k'(A, B) = \langle X_A, hX_B \rangle.$$

Théorème 2.3.2 *Soit h un opérateur sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$ tel que $\{X_A, A \in \mathcal{P}_\Lambda\} \subset \text{Dom } h \cap \text{Dom } h^*$; alors la formule*

$$k'(A, B) = \langle X_A, hX_B \rangle.$$

définit un opérateur à noyau qui est une extension fermée de h .

On peut à nouveau tirer formellement une représentation intégrale d'une représentation en noyaux; sans détailler les calculs, on peut voir que l'on obtient des intégrales données par leur représentation en noyaux. On obtient ainsi le théorème suivant, qui est l'analogue du Théorème 2.2.1 :

Théorème 2.3.3 *Soit h un opérateur sur $\mathbb{T}\Phi$ tel que $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est contenu dans $\text{Dom } h \cap \text{Dom } h^*$, et notons \bar{h} la fermeture de h . Si l'on définit des processus prévisibles $(h_i^{\kappa, \lambda})_{i \geq 0}$ pour tout couple (κ, λ) d'éléments de $\Lambda \cup \{0\}$ avec $(\kappa, \lambda) \neq (0, 0)$ par*

$$\begin{cases} h_i^{\kappa, \lambda} = d_i^\lambda h a_i^{0, \kappa} p_i & \text{pour } \kappa, \lambda \text{ distincts dans } \Lambda \cup \{0\}, \\ h_i^{\lambda, \lambda} = d_i^\lambda h a_i^{0, \lambda} p_i - p_i h p_i & \text{pour } \lambda \text{ dans } \Lambda \end{cases}$$

et un scalaire μ par

$$\mu = \langle \Omega, h\Omega \rangle,$$

alors l'opérateur

$$\left(\mu Id + \sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ (\kappa, \lambda) \neq (0, 0)}} \sum_{i \geq 0} h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda} \right) - h$$

est une restriction de l'opérateur nul et $\{X_A, A \in \mathcal{P}_\Lambda\}$ est dans le domaine restreint de l'intégrale.

Enfin, on a pour corollaire le résultat de représentation des processus, analogue du Corollaire 2.2.2. Ici, cependant, une intégrale arrêtée au temps i n'est plus une somme finie puisqu'il existe une infinité de termes $h_i^{\kappa, \lambda}$; on ne peut donc pas, par rapport au Théorème 2.3.3, améliorer le domaine de validité de la représentation intégrale.

Corollaire 2.3.4 *Soit (h_i) un processus prévisible d'opérateurs sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$; il existe des processus prévisibles $(h_i^{\kappa,\lambda})_{i \geq 0}$ pour tout couple (κ, λ) d'éléments de $\Lambda \cup \{0\}$ tels que pour tout i l'opérateur*

$$h_i - \mu Id + \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda}$$

est une restriction de l'opérateur nul dont le domaine contient $\{X_A, A \in \mathcal{P}_\Lambda\}$; les intégrandes sont données par

$$\begin{cases} h_i^{\kappa, \lambda} = d_i^\lambda h a_i^{0, \kappa} p_i & \text{pour } \kappa, \lambda \text{ distincts dans } \Lambda \cup \{0\}, \\ h_i^{\lambda, \lambda} = d_i^\lambda h a_i^{0, \lambda} p_i - p_i h p_i & \text{pour } \lambda \text{ dans } \Lambda, \\ h_i^{0, 0} = p_i (h_{i+1} - h_i) \end{cases}$$

et μ est donné par

$$\mu = \langle \Omega, h_0 \Omega \rangle.$$

Chapitre 3

Calcul stochastique quantique sur l'espace de Fock

Dans ce chapitre, nous présentons rapidement la théorie du calcul stochastique quantique sur les espaces de Fock bosoniques construits sur des espaces $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un espace de Hilbert séparable.

Dans la section 3.1, nous définissons ces espaces de Fock et le calcul d'Itô abstrait qui lui est associé ; ce calcul d'Itô mène naturellement à la formulation Attal-Meyer de l'intégration stochastique quantique. Nous définissons cette formulation dans la section 3.2 ; nous donnons également des expressions du type Attal-Lindsay ou Hudson-Parthasarathy de l'action des intégrales qui nous seront utiles dans la suite. Nous n'entrerons cependant pas dans les subtilités des recoupements précis entre ces diverses théories.

Dans la section 3.3 nous présentons rapidement un autre type de représentation des opérateurs : les noyaux de Maassen-Meyer.

Nous nous sommes efforcé, dans cette présentation, de mettre en avant les analogies entre théories à temps discret et à temps continu. Pour plus de détails sur la théorie de l'intégration stochastique quantique suivant cette approche on pourra consulter le livre de Meyer [Me2] ou le texte de présentation [At5].

3.1 Espaces de Fock

3.1.1 Définition de l'espace de Fock simple

Nous commençons par définir l'espace le plus couramment considéré en probabilités quantiques : l'espace de Fock bosonique sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Nous présenterons plus loin les analogues de multiplicité supérieure, c'est-à-dire les espaces de Fock bosoniques sur $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un espace de Hilbert séparable quelconque. Nous

avons fait ce choix afin d'alléger l'exposé : les résultats que nous énonçons dans l'espace de Fock simple s'étendent aux cas plus généraux sans grande difficulté mais les notations s'en trouvent alourdis.

Nous travaillerons donc principalement sur l'espace de Fock *simple*, noté Φ , qui est défini usuellement comme le complété de l'espace préhilbertien

$$\bigoplus_{n \geq 0} L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n},$$

où \circ représente le produit tensoriel symétrique, et où $L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ 0} = \mathbb{C}$ par convention. Comme dans le cas de l'espace de Fock à temps discret, les manipulations seront grandement simplifiées par l'utilisation de la notation de Guichardet ; nous ne détaillerons pas la construction de l'isomorphisme explicite, que l'on peut trouver dans tous les ouvrages de référence. Disons simplement qu'il s'agit d'identifier les éléments de $L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n}$ à l'ensemble des fonctions symétriques sur \mathbb{R}_+^n ou encore aux fonctions des n -uplets de \mathbb{R}_+ .

Nous nous appuyons sur l'analogie avec le temps discret pour définir directement l'espace de Fock Φ comme l'espace de fonctions de carré intégrable $L^2(\mathcal{P})$, où \mathcal{P} est l'ensemble des parties finies de \mathbb{R}_+ muni de la mesure qui coïncide avec la mesure de Lebesgue n -dimensionnelle sur le sous-ensemble \mathcal{P}_n de \mathcal{P} constitué des n -uplets, et telle que l'ensemble vide \emptyset est un atome de masse 1. Nous utiliserons donc indifféremment les notations Φ et $L^2(\mathcal{P})$.

Un élément de Φ sera donc une fonction $f : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ telle que

$$|f(\emptyset)|^2 + \sum_{n \geq 1} \int_{s_1 < \dots < s_n} |f(\{s_1, \dots, s_n\})|^2 < +\infty.$$

L'élément canonique dans \mathcal{P} sera noté σ et l'élément infinitésimal $d\sigma$. Nous respecterons par ailleurs la convention qui veut qu'une partie $\{s_1, \dots, s_n\}$ soit toujours écrite sous forme ordonnée : les s_i sont supposés vérifier $s_1 < \dots < s_n$ hormis mention contraire.

L'indicatrice de l'ensemble vide est appelée le *vecteur vide* de $L^2(\mathcal{P})$ et est notée Ω . Pour tout n de \mathbb{N} , le sous-espace s'identifiant à $L^2(\mathcal{P}_n)$ est appelé le n -ième chaos. Cet espace est simplement le sous-espace de Φ formé des fonctions à support dans les n -uplets : pour toute fonction f de $L^2(\mathcal{P})$,

$$f \text{ appartient au } n\text{-ième chaos} \Leftrightarrow f(\sigma) = 0 \text{ si } |\sigma| \neq n.$$

On notera \circ le *produit de Wick* qui est simplement le produit symétrique dans $L^2(\mathcal{P})$: pour deux éléments f, g de $L^2(\mathcal{P})$, on définit $f \circ g(\sigma)$ pour tout σ par

$$f \circ g(\sigma) = \sum_{\tau \subset \sigma} f(\tau)g(\sigma \setminus \tau).$$

Le produit $f \circ g$ n'est pas *a priori* un élément de $L^2(\mathcal{P})$. Si cependant f et g appartiennent aux n -ième et m -ième chaos respectivement, alors $f \circ g$ est un élément de $L^2(\mathcal{P})$ et même un élément du $n + m$ -ième chaos. Il est clair alors que le n -ième chaos est exactement l'espace engendré par les vecteurs de la forme $u_1 \circ \dots \circ u_n$ pour u_1, \dots, u_n dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.

3.1.2 Calcul d'Itô abstrait sur Φ

Voyons d'abord que l'espace Φ a lui aussi une propriété intéressante de décomposition tensorielle explicite. Pour tout $I \subset \mathbb{R}_+$, on peut définir le sous-espace Φ_I des éléments de $L^2(\mathcal{P})$ à support dans I , c'est-à-dire que pour un élément f de Φ ,

$$f \text{ appartient à } \Phi_I \Leftrightarrow f(\sigma) = 0 \text{ pour presque tout } \sigma \text{ tel que } \sigma \not\subset I.$$

La proposition suivante énonce la propriété de décomposition tensorielle de Φ :

Proposition 3.1.1 *Soit $\mathbb{R}_+ = \cup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ une partition en intervalles disjoints; alors on a un isomorphisme explicite*

$$\Phi \simeq \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \Phi_{I_i}$$

obtenu en associant à toute famille de fonctions $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ avec $f_i \in \Phi_{I_i}$ une fonction f par

$$f(\sigma) = \prod_{i \in \mathbb{N}} f_i(\sigma \cap I_i).$$

Pour tout t de \mathbb{R}_+ on notera en particulier Φ_t ou $L^2(\mathcal{P}_t)$ le sous-espace de $L^2(\mathcal{P})$ constitué des fonctions à support dans $[0, t]$, et $\Phi_{[t, +\infty)}$ le sous-espace des éléments de $L^2(\mathcal{P})$ à support dans $[t, +\infty)$.

Il sera plus simple dans le cas de l'espace de Fock à temps continu de parler d'adaptation au lieu de prévisibilité. La notion d'adaptation pour les vecteurs de Φ reste par ailleurs similaire à la notion de prévisibilité de l'espace de Fock à temps discret :

Définition 3.1.2

- Un vecteur f de Φ qui appartient à $L^2(\mathcal{P}_t)$ est dit *t-adapté*.
- On appelle *projection adaptée au temps t* l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace Φ_t .

Un opérateur de projection adaptée P_t s'exprime de la façon suivante :

$$P_t f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{si } \sigma \subset [0, t] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

On définit aussi une famille d'opérateurs appelés *gradients adaptés*. Cette définition pose cependant plus de problèmes que dans le cas à temps discret : on voudrait définir, pour f dans Φ , le vecteur $D_t f$ par

$$D_t f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma \cup \{t\}) & \text{si } \sigma \subset [0, t] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Il est cependant clair qu'une telle définition ne peut définir un opérateur D_t défini sur tout f de Φ puisque les éléments de $L^2(\mathcal{P})$ ne sont définis que presque partout : on ne peut espérer définir au mieux, pour un f donné, $D_t f$ que pour presque tout t . Nous reviendrons sur ce problème un peu plus loin. Il est en revanche évident que, s'il est défini, $D_t f$ est, comme $P_t f$, un vecteur t -adapté.

Dans ce cadre à temps continu nous devons être plus prudent avec les questions analytiques. Nous appellerons donc *processus* de vecteurs dans Φ toute famille $(f_t)_{t \geq 0}$ de vecteurs de Φ telle que $t \mapsto f_t$ est mesurable. Le premier processus de vecteurs qui nous intéressera sera le processus $(\chi_t)_{t \geq 0}$, par rapport auquel nous intégrerons pour obtenir l'intégrale d'Itô :

$$\chi_t(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \{s\} \text{ et } s < t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous souhaitons définir une intégrale de processus adaptés $(f_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de vecteurs par rapport à la courbe $(\chi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Nous appuyant sur le cas discret, nous définissons directement l'intégrale sous forme algébrique : le vecteur $\int f_t d\chi_t$ est défini par

$$\int f_t d\chi_t(\sigma) = \begin{cases} f_{\vee \sigma}(\sigma \setminus \vee \sigma) & \text{si } \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Notons que l'on peut retrouver cette définition comme une limite en norme de sommes de Riemann $\sum_i f_{t_i} \otimes (\chi_{t_{i+1}} - \chi_{t_i})$, ce qui justifie la notation sous forme intégrale.

On voit facilement qu'avec cette définition

$$\int_{\mathcal{P}} \left| \int f_t d\chi_t(\sigma) \right|^2 d\sigma = \int \|f_t\|^2 dt \quad (3.1.3)$$

qui montre qu'il est nécessaire et suffisant, pour que la définition (3.1.2) définisse bien un élément de $L^2(\mathcal{P})$, que $\int \|f_t\|^2 dt < +\infty$. De plus on vérifie par un calcul analogue, que

$$\int_0^\infty \int_{\mathcal{P}_t} |f(\sigma \cup t)|^2 d\sigma dt = \|f\|^2$$

qui indique que $D_t f$ est bien défini pour presque tout t . On obtient alors facilement la proposition suivante :

Proposition 3.1.3 *Soit f un vecteur de Φ ; avec la définition (3.1.1), $D_t f$ est bien défini comme élément de $L^2(\mathcal{P})$ pour presque tout t . On a donc un processus adapté $(D_t f)_{t \geq 0}$ défini pour presque tout t , qui vérifie*

$$f = f(\emptyset)\Omega + \int D_t f d\chi_t \quad (3.1.4)$$

et

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \int \|D_t f\|^2 dt. \quad (3.1.5)$$

L'écriture (3.1.4) d'un vecteur de f est appelé sa *représentation prévisible*; nous reviendrons un peu plus loin sur cette appellation.

On peut remarquer que l'on a, pour tout f de Φ et presque tout t ,

$$P_t \int_0^\infty f_s d\chi_s = \int_0^t f_s d\chi_s \quad \text{et} \quad D_t \int_0^\infty f_s d\chi_s = f_t.$$

La Proposition 3.1.3 fait apparaître plus précisément le lien entre Φ et $\mathbb{T}\Phi$; en effet, la décomposition tensorielle 3.1.1 dans Φ montre que l'on a en quelque sorte

$$\Phi \simeq \bigotimes_{t \geq 0} \Phi_{[t, t+dt]}$$

et la représentation prévisible d'un vecteur (3.1.4) montre que $\Phi_{[t, t+dt]}$ est "engendré" par Ω et $d\chi_t$, donc peut être vu comme isomorphe à \mathbb{C}^2 . On a donc en quelque sorte

$$\Phi \simeq \bigotimes_{t \geq 0} \mathbb{C}^2.$$

et il est à prévoir que Φ puisse être approché d'une certaine manière par des "fonctions en escalier" qui pourront être vues comme éléments de $\mathbb{T}\Phi$. C'est l'idée sous-jacente à ce que nous verrons dans la section 4.

Remarquons par ailleurs que l'on peut itérer la représentation prévisible d'un opérateur f : les vecteurs $D_t f$ sont des éléments de l'espace de Fock et ont à leur tour une représentation prévisible, et ainsi de suite. On arrive ainsi à écrire tout élément de Φ comme

$$f = f(\emptyset)\Omega + \sum_{n \geq 1} \int_{s_1 < \dots < s_n} f(s_1, \dots, s_n) d\chi_{s_1} \dots d\chi_{s_n}$$

que l'on abrège en

$$f = \int_{\mathcal{P}} f(\sigma) d\chi_\sigma,$$

formule à laquelle est associée la formule d'isométrie

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{P}} |f(\sigma)|^2 d\sigma.$$

Cette représentation est appelée *représentation chaotique* de f . Elle nous montre que notre espace de Fock est isomorphe à l'espace chaotique de toute martingale normale et à l'espace L^2 canoniquement associé à toute martingale normale. Par exemple Φ s'identifie à l'espace $L^2(\mu)$ où μ est la mesure de Wiener par l'identification de

$$f = f(\emptyset)\Omega + \sum_{n \geq 1} \int_{s_1 < \dots < s_n} f(s_1, \dots, s_n) d\chi_{s_1} \dots d\chi_{s_n}$$

à la variable aléatoire classique

$$f = f(\emptyset) + \sum_{n \geq 1} \int_{s_1 < \dots < s_n} f(s_1, \dots, s_n) dW_{s_1} \dots dW_{s_n}$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement brownien ; il en serait de même si nous avions considéré une autre martingale normale, comme le processus de Poisson compensé ou celles des martingales d'Azéma qui ont la propriété de représentation chaotique. Remarquons que, dans le cas d'une martingale normale qui n'a pas la propriété de représentation chaotique, son espace chaotique est encore isomorphe à Φ mais pas l'espace L^2 qui lui est associé.

L'identification de Φ à un tel espace L^2 associé à une martingale classique est appelé une *interprétation probabiliste*. Comme dans le cas discret, l'espace Φ que nous avons construit offre une structure hilbertienne permettant de considérer de nombreuses situations probabilistes ; c'est encore en faisant le choix d'une loi produit sur cet espace que nous ferons réapparaître les propriétés véritablement probabilistes.

Remarquons encore que, dans toutes ces interprétations, les opérateurs P_t s'identifient aux espérances conditionnelles, les D_t donnent la représentation prévisible au sens classique de variables aléatoires, l'intégrale d'Itô abstraite s'identifie à l'intégrale par rapport à la martingale considérée ; notre formalisme traduit simplement le fait que ces opérateurs s'expriment, sur les décompositions chaotiques, de manière indépendante de l'interprétation probabiliste.

Sous-ensembles de Φ

Nous considérerons souvent trois sous-ensembles particuliers de $L^2(\mathcal{P})$: le premier est le *domaine exponentiel* \mathcal{E} , le deuxième est le sous-espace \mathcal{J} défini par Coquio dans [Co2] et le troisième est *l'espace à nombre fini de particules* \mathcal{F} .

A toute fonction u de $L^2(\mathbb{R}_+)$ on associe une fonction $\mathcal{E}(u)$ sur \mathcal{P} par

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u)(\emptyset) & = & 1 \\ \mathcal{E}(u)(\{s_1, \dots, s_n\}) & = & u(s_1) \dots u(s_n). \end{cases}$$

Cette fonction $\mathcal{E}(u)$ est un élément de $L^2(\mathcal{P})$, comme on peut le voir grâce à l'égalité

$$\int_{s_1 < \dots < s_n} |u(s_1) \dots u(s_n)|^2 ds_1 \dots ds_n = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} |u(s)|^2 ds$$

qui implique

$$\|\mathcal{E}(u)\|^2 = e^{\|u\|^2}.$$

L'ensemble de tous les vecteurs exponentiels est noté simplement \mathcal{E} , comme dans le cas à temps discret ; la notation pour les vecteurs est en revanche différente et il n'y aura pas de risque de confusion. Cet ensemble \mathcal{E} est total dans $L^2(\mathcal{P})$ et, de plus, toute famille finie de vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(u_1), \dots, \mathcal{E}(u_n)$ associés à des fonctions u_1, \dots, u_n deux à deux distinctes est une famille libre (voir par exemple [Me2]). Ces vecteurs sont de plus particulièrement faciles à manier puisque, comme nous le verrons ci-dessous, les opérateurs du calcul d'Itô s'expriment simplement sur \mathcal{E} . Pour toutes ces raisons, le domaine exponentiel est un domaine particulièrement pratique et utile.

L'ensemble \mathcal{J} est le sous-espace de $L^2(\mathcal{P})$ engendré par le vecteur vide Ω et par les vecteurs $j(v, u)$ définis, pour tous u, v dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, par

$$\begin{cases} j(v, u)(\emptyset) &= 0 \\ j(v, u)(\{s_1, \dots, s_n\}) &= v(s_n) u(s_1) \dots u(s_{n-1}). \end{cases}$$

La relation $\mathcal{E}(u) = \Omega + j(u, u)$ implique que \mathcal{J} contient \mathcal{E} ; l'espace \mathcal{J} est donc dense dans Φ .

Enfin, l'espace à nombre de particules fini \mathcal{F} est défini comme la somme algébrique des chaos ; pour un vecteur f de $L^2(\mathcal{P})$ on a donc,

$$f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \text{il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } f(\sigma) = 0 \text{ si } |\sigma| \geq N.$$

Il est évident, de par la définition de Φ , que \mathcal{F} est un sous-ensemble dense de Φ et qu'il est engendré par Ω et les vecteurs de la forme $u_1 \circ \dots \circ u_n$.

On peut voir que les vecteurs exponentiels et vecteurs $j(v, u)$ vérifient les relations suivantes, au regard du calcul d'Itô abstrait. Pour toute fonction u nous noterons ici comme dans la suite u_t la fonction $u \mathbb{1}_{[0, t]}$.

$$\begin{aligned} P_t \mathcal{E}(u) &= \mathcal{E}(u_t) \\ D_t \mathcal{E}(u) &= u(t) \mathcal{E}(u_t) \\ \mathcal{E}(u) &= \Omega + \int_0^\infty u(t) \mathcal{E}(u_t) d\chi_t. \\ P_t j(v, u) &= j(v_t, u_t) \end{aligned}$$

$$D_t j(v, u) = v(t) \mathcal{E}(u_t)$$

$$j(v, u) = \int_0^\infty v(t) \mathcal{E}(u_t) d\chi_t.$$

3.1.3 Espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1

Nous allons maintenant présenter brièvement l'analogie de ce qui précède dans le cas d'un espace de Fock de multiplicité supérieure à 1.

Soit \mathcal{K} un espace de Hilbert ; on en fixe une base hilbertienne $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et on suppose pour simplifier les notations que Λ ne contient pas l'indice zéro. L'espace de Fock de multiplicité \mathcal{K} , que l'on note $\Phi_{\mathcal{K}}$, est usuellement défini comme le complété de

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})^{\otimes n}.$$

Encore une fois nous utilisons directement la notation de Guichardet ; on observe que $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ est isomorphe à $L^2(\mathbb{R}_+ \times \lambda)$ si l'on munit $\mathbb{R}_+ \times \lambda$ du produit de la mesure de Lebesgue et de la mesure de dénombrement. Il est ensuite simple de voir que $\Phi_{\mathcal{K}}$ s'identifie à $L^2(\mathcal{P}_\Lambda)$ où les éléments de \mathcal{P}_Λ sont les parties finies de $\mathcal{P} \times \Lambda$; un élément de $\Phi_{\mathcal{K}}$ est donc une fonction de variable σ , cette variable étant maintenant de la forme

$$\{(s_1, \lambda_1), \dots, (s_n, \lambda_n)\}$$

où $n \in \mathbb{N}$, les s_k sont deux à deux distincts et appartiennent à \mathbb{R}_+ et les λ_k appartiennent à Λ . Nous appliquerons encore la convention que $\sigma = \{(s_1, \lambda_1), \dots, (s_n, \lambda_n)\}$ est implicitement écrit de manière à ce que $s_1 < \dots < s_n$. La condition d'intégrabilité pour qu'une fonction f sur \mathcal{P}_Λ appartienne à $\Phi_{\mathcal{K}}$ est maintenant la suivante :

$$\sum_n \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda} \int_{s_1 < \dots < s_n} \left| f(\{(s_1, \lambda_1), \dots, (s_n, \lambda_n)\}) \right|^2 ds_1 \dots ds_n < +\infty.$$

Les intégrales d'Itô abstraites sont maintenant définies par rapport à une famille de courbes χ_t^λ , $\lambda \in \Lambda$, et on définit des opérateurs de gradient adapté D_t^λ pour chaque $\lambda \in \Lambda$. Pour tout f de $\Phi_{\mathcal{K}}$, on pose

$$P_t f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{si } \sigma \subset [0, t] \times \Lambda \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$D_t^\lambda f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma \cup \{(t, \lambda)\}) & \text{si } \sigma \subset [0, t] \times \Lambda \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Pour homogénéiser nos notations nous noterons parfois D_t^0 l'opérateur de projection adaptée P_t . Pour définir les intégrales d'Itô abstraites on considère des familles

$(\chi_t^\lambda)_{t \geq 0}$ de vecteurs de $\Phi_{\mathcal{K}}$. Pour un processus adapté $(f_t)_{t \geq 0}$ de vecteurs de $\Phi_{\mathcal{K}}$, l'intégrale $\int_0^\infty f_t d\chi_t^\lambda$ est définie pour chaque i de λ par

$$\int_0^\infty f_t d\chi_t^\lambda(\sigma) = \begin{cases} f_{s_n}(\sigma \setminus (s_n, \lambda_n)) & \text{si } \sigma = \{(s_1, \lambda_1), \dots, (s_n, \lambda_n)\} \text{ avec } \lambda_n = \lambda \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et en particulier toutes les intégrales sont nulles sur l'ensemble vide. Nous noterons $\int f_t d\chi_t^0$ l'intégrale par rapport au temps $\int f_t dt$.

Tout vecteur f de $\Phi_{\mathcal{K}}$ a alors une représentation prévisible

$$f = f(\emptyset) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_0^\infty D_t^\lambda f d\chi_t^\lambda$$

avec la formule d'isométrie

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_0^\infty \|D_t^\lambda f\|^2 dt.$$

Les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(u)$, les $j(v, u)$ et les vecteurs à nombre fini de particules sont eux aussi définis de manière analogue au cas de l'espace de Fock simple Φ : un vecteur exponentiel est maintenant associé à tout u de $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ par

$$\mathcal{E}(u)(\{(s_1, \lambda_1), \dots, (s_n, \lambda_n)\}) = u(s_1, \lambda_1) \cdots u(s_n, \lambda_n),$$

on a un ensemble $\mathcal{J}_{\mathcal{K}}$ de vecteurs $j(v, u)$ définis pour v, u dans $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ par

$$j(v, u) = \Omega + \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_0^\infty v(s, \lambda) \mathcal{E}(u_s) d\chi_s^\lambda,$$

et le domaine à nombre fini de particules est engendré par Ω et par les vecteurs de la forme

$$u_1 \circ \dots \circ u_n$$

pour u_1, \dots, u_n dans $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$.

3.2 Définition de l'intégration stochastique quantique

3.2.1 Intégration stochastique quantique sur l'espace de Fock simple

Il existe plusieurs définitions des intégrales stochastiques quantiques. Ces définitions diffèrent surtout par leur domaine de validité et le caractère plus ou

moins explicite de l'expression de l'action des intégrales. Nous n'aurons pas besoin du domaine de définition maximal qu'offre la définition de Attal et Lindsay (dans [A-L]); nous nous contenterons donc de donner la définition des intégrales au sens de Attal et Meyer (énoncée à l'origine dans [A-M]), dont on sait qu'elle donne les intégrales *restreintes* de la théorie Attal-Lindsay, c'est-à-dire une restriction en un sens précis des intégrales les plus générales. Des expressions du type Attal-Lindsay ou Hudson-Parthasarathy de l'action d'une intégrale stochastique quantique nous serviront dans la suite; nous les énonçons donc comme propriétés vérifiées par les intégrales du type Attal-Meyer. De plus, la théorie Attal-Meyer a le mérite de permettre une présentation de l'intégrale stochastique quantique intuitivement très proche du cas discret.

L'idée sous-jacente à la définition Attal-Meyer des intégrales stochastiques quantiques est la suivante : puisque les intégrales stochastiques du type $\int H_t da_t$ que nous voulons définir doivent généraliser l'intégrale stochastique classique, une intégrale du type $\int H_t da_t$ doit étendre le cas où H_t et da_t sont des opérateurs de multiplication. Il est donc naturel de considérer que, dans une intégrale $\int H_t da_t$, le processus intégré $(H_t)_{t \geq 0}$ doit être adapté, c'est-à-dire, dans une première approche, agir comme $H_t \otimes \text{Id}$ sur $\Phi_t \otimes \Phi_{[t]}$; l'accroissement da_t ayant la propriété d'agir comme $\text{Id} \otimes da_t \otimes \text{Id}$ dans $\Phi_t \otimes \Phi_{[t, t+dt]} \otimes \Phi_{[t+dt]}$.

La propriété de représentation prévisible nous montre par ailleurs que $\Phi_{[t, t+dt]}$ doit être vu comme engendré par Ω et $d\chi_t$; l'ensemble des opérateurs sur \mathbb{C}^2 étant de dimension 4, tout bruit convenable da_t peut être écrit à partir des quatre bruits fondamentaux da_t^+ , da_t^- , da_t° , da_t^\times donnés par le tableau suivant :

$$\begin{aligned} da_t^+ \Omega &= d\chi_t & \text{et} & & da_t^+ d\chi_t &= 0, \\ da_t^- \Omega &= 0 & \text{et} & & da_t^- d\chi_t &= dt, \\ da_t^\circ \Omega &= 0 & \text{et} & & da_t^\circ d\chi_t &= d\chi_t, \\ da_t^\times \Omega &= dt & \text{et} & & da_t^\times d\chi_t &= 0. \end{aligned}$$

L'analogie que nous avons évoquée plus tôt, montrant que chaque $\Phi_{[t, t+dt]}$ correspond à un $\mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$ de l'espace de Fock à temps discret, apparaît encore ici : les accroissements de la courbe d'intégration $d\chi_t$ correspondent aux vecteurs X_i du cas discret et il est alors clair d'après le tableau ci-dessus, à comparer avec (1.3.1), que les opérateurs différentiels da_t^ε correspondent aux opérateurs a_i^ε . Par analogie avec le cas discret il est naturel d'appeler création le bruit da_t^+ , annihilation le bruit da_t^- et conservation le bruit da_t° .

Remarquons encore que l'action de da_t^\times correspond à une simple multiplication par dt ; on n'a donc, d'après ce qui précède, besoin de considérer des intégrales que par rapport aux trois bruits quantiques da_t^ε , $\varepsilon = +, -, \circ$, et par rapport au temps.

On obtient les équations Attal-Meyer pour les intégrales par rapport à ces trois bruits véritablement quantiques da^ε , $\varepsilon = +, -, \circ$, en considérant l'action d'une fa-

mille d'intégrales du type $H_t = \int_0^t H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon$ sur un vecteur $f = f(\emptyset)\Omega + \int D_s f d\chi_s$ de Φ . Tout d'abord, puisque H_t doit être t -adapté, $H_t f$ est déterminé par $H_t f_t$. Par ailleurs, une telle intégrale doit satisfaire à une relation de type Itô :

$$d(H_t f_t) = dH_t f_t + H_t df_t + dH_t df_t.$$

En développant en $dH_t = H_t^\varepsilon da_t^\varepsilon$, $df_t = Df_t d\chi_t$ et en utilisant le fait que da_t^ε doit agir uniquement sur $\Phi_{[t, t+dt]}$ on arrive à une équation du type

$$H_t f_t = H_0 f(\emptyset)\Omega + \int_0^t H_s D_s f d\chi_s + \begin{cases} \int_0^t H_s^+ P_s f d\chi_s & \text{si } \varepsilon = + \\ \int_0^t H_s^\circ D_s f d\chi_s & \text{si } \varepsilon = \circ \\ \int_0^t H_s^- D_s f ds & \text{si } \varepsilon = - \\ \int_0^t H_s^\times P_s f ds & \text{si } \varepsilon = \times \end{cases} \quad (3.2.1)$$

On en vient ainsi à définir une intégrale au travers d'une espèce d'équation différentielle vérifiée par la fonction $\int_0^t H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon$ de t . Avant d'aller plus loin, nous devons préciser le sens à donner à l'adaptation d'un opérateur de Φ ; on peut garder l'idée que, comme dans le cas discret, un opérateur t -adapté est un opérateur H qui s'écrit sous la forme

$$H \otimes \text{Id}$$

dans $\Phi_t \otimes \Phi_{[t]}$. Cependant, dans ce cadre à temps continu, travailler avec des intervalles de temps borné ne suffit pas à lever les difficultés d'ordre analytique et une telle définition de l'adaptation est trop restrictive. Nous choisissons donc une définition plus algébrique, à rapprocher du Lemme 1.3.3

Définition 3.2.1 *Soit $t \geq 0$. Un opérateur H sur Φ est dit t -adapté si et seulement si*

- le domaine de H est stable par P_t et par D_u pour presque tout $u \geq t$,
- on a

$$\begin{cases} H P_t = P_t H \\ H D_u = D_u H \end{cases} \quad \text{sur le domaine de } H.$$

Un processus $(H_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs, c'est-à-dire une famille indexée par t d'opérateurs, est dit adapté si pour tout t , l'opérateur H_t est t -adapté.

Notons au passage que nous n'avons pas fait d'hypothèse de mesurabilité sur les processus d'opérateurs. Les hypothèses dont nous aurons besoin seront implicites dans la définition des intégrales stochastiques quantiques, et nous ne parlerons de processus d'opérateurs que pour les intégrer.

Ceci nous permet de définir les intégrales stochastiques quantiques ; la définition de l'article d'Attal et Meyer concerne en fait le processus $(\int_0^t H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon)_{t \geq 0}$. On peut cependant adapter cette définition pour définir une intégrale isolée :

$$H = \mu \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ$$

en la caractérisant par le fait qu'elle doit satisfaire, pour tout t , une équation du type (3.2.1).

Définition 3.2.2 (Définition de l'intégrale stochastique [A-M]) Soient trois processus adaptés d'opérateurs $(H_t^+)_{t \geq 0}$, $(H_t^-)_{t \geq 0}$, $(H_t^\circ)_{t \geq 0}$. L'intégrale

$$\mu \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ$$

est définie comme l'opérateur H maximal parmi ceux qui, si on note $(H_t)_{t \geq 0}$ le processus $(P_t H P_t)_{t \geq 0}$, vérifient l'équation

$$Hf = \mu f(\emptyset) + \int_0^\infty H_s D_s f d\chi_s + \int_0^\infty H_s^+ P_s f d\chi_s + \int_0^\infty H_s^- D_s f ds + \int_0^\infty H_s^\circ D_s f d\chi_s. \quad (3.2.2)$$

Par "vérifie l'équation (3.2.2)" nous entendons qu'un vecteur f est dans le domaine de H si et seulement si toutes les conditions naturelles de domaine sont vérifiées, les intégrandes sont Itô-intégrables ou intégrables par rapport au temps suivant les cas, et l'équation est valide.

On peut définir une intégrale

$$\mu \text{Id} + \int_0^t H_s^+ da_s^+ + \int_0^t H_s^- da_s^- + \int_0^t H_s^\circ da_s^\circ$$

comme l'intégrale des processus $(H_s^\varepsilon \mathbb{1}_{[0,t]}(s))_{s \geq 0}$. On observe que pour presque tout t , cette intégrale est un opérateur t -adapté qui coïncide sur Φ_t avec H_t . On notera donc H_t l'intégrale arrêtée au temps t ; malgré ce changement de notation l'équation (3.2.2) reste inchangée. Remarquons par ailleurs qu'il n'est pas évident qu'il existe toujours une solution à une équation (3.2.2); l'existence générale de telles solutions est justifiée par la théorie Attal-Lindsay.

Une intégrale par rapport au temps $\int H_s^\times dt$ (encore notée $\int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$) est définie suivant un procédé proche de la méthode que nous avons appliquée dans le cas discret : $\int_0^t H_s^\times da_s^\times$ a pour domaine l'ensemble des f tels que

$$\int_{\mathcal{P}} \left(\int_0^\infty |H_t^\times f(\sigma)| dt \right)^2 d\sigma < +\infty,$$

et s'exprime par

$$\int_0^\infty H_s^\times dt f(\sigma) = \int_0^\infty (H_s^\times f(\sigma)) ds.$$

On peut voir alors qu'une intégrale stochastique

$$\mu \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ + \int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$$

vérifie encore l'équation du type Attal-Meyer

$$\begin{aligned} H_t P_t f &= \mu f(\emptyset) + \int_0^t H_s D_s f d\chi_s + \int_0^t H_s^+ P_s f d\chi_s \\ &\quad + \int_0^t H_s^- D_s f ds + \int_0^t H_s^\circ D_s f d\chi_s + \int_0^t H_s^\times P_s f ds \end{aligned}$$

suggérée par notre approche heuristique, où comme précédemment H_t est l'intégrale du processus arrêté au temps t . Dans la suite, nous considérerons, lorsqu'il le faudra, des intégrales $\int H_t dt$; cependant, lorsque nous chercherons, dans le chapitre 5, des représentations intégrales d'opérateurs, nous ne nous intéresserons qu'à des intégrales ne faisant pas intervenir d'intégrale par rapport au temps. Il est important de comprendre pourquoi : dans ce chapitre nous nous chercherons des représentations intégrales à *un* opérateur. Or, lorsque l'on cherche à représenter un opérateur H en intégrale stochastique quantique, seule une représentation du type

$$H = \mu \text{Id} + \int H_s^+ da_s^+ + \int H_s^- da_s^- + \int H_s^\circ da_s^\circ$$

présente un intérêt ; en effet, la situation est comparable au cas où l'on considère un processus de variables aléatoires classiques : comme dans ce cas-là, on n'a pas unicité d'une représentation faisant intervenir une intégrale par rapport au temps, et une telle représentation ne donne pas la représentation prévisible de la variable aléatoire ni ne permet de retrouver le processus de martingale associé. Avec une représentation en intégrale par rapport aux seuls bruits quantiques da^+ , da^- , da° , on sait que si H se représente en intégrales stochastiques quantiques, alors

$$P_t H P_t = P_t H_t = H_t P_t \quad (3.2.3)$$

où H_t est l'intégrale arrêtée au temps t .

Notons que si, en revanche, on cherche à représenter un *processus* d'opérateurs $(H_t)_{t \geq 0}$, il est intéressant et même *a priori* nécessaire de chercher une représentation sous la forme

$$H_t = \mu \text{Id} + \int_0^t H_s^+ da_s^+ + \int_0^t H_s^- da_s^- + \int_0^t H_s^\circ da_s^\circ + \int_0^t H_s^\times da_s^\times.$$

Exemples

- Les opérateurs classiques des espaces de Fock a_f^+ , a_f^- , pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, apparaissent ici comme

$$\int_0^\infty f(s) da_s^+, \quad \int_0^\infty \bar{f}(s) da_s^-.$$

On distingue en particulier les opérateurs a_t^+ , a_t^- ainsi que a_t° , qui sont

$$\int_0^t da_s^+, \quad \int_0^t da_s^-, \quad \int_0^t da_s^\circ$$

respectivement.

- Dans ce cadre à temps continu, ce sont les *équations de structure* (voir [A-E] ou [AP2]) qui distinguent les interprétations probabilistes. En effet, toute martingale normale $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie une équation $d[X, X]_t = dt + \psi_t dX_t$. L'opérateur de multiplication par un élément f de Φ s'écrit alors dans l'interprétation probabiliste associée à $(X_t)_{t \geq 0}$

$$f(\emptyset) + \int_0^\infty \mathcal{M}_{D_t f} (da_t^+ + da_t^-) + \int_0^\infty \mathcal{M}_{D_t f} \mathcal{M}_{\psi_t} da_t^\circ,$$

où $\mathcal{M}_{D_t f}$ est l'opérateur de multiplication par $D_t f$ (voir [At2] ou [At5]). En particulier, l'opérateur de multiplication par X_t s'écrit

$$a_t^+ + a_t^- + \int_0^t \psi_s da_s^\circ. \quad (3.2.4)$$

- Si les quatre processus adaptés $(H_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$, $\varepsilon = +, \circ, -, \times$, sont définis sur \mathcal{E} et sont tels que, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$\int_0^\infty \|H_s^+ \mathcal{E}(u)\|^2 + |u(s)| \|H_s^- \mathcal{E}(u)\| + |u(s)|^2 \|H_s^\circ \mathcal{E}(u)\|^2 + \|H_s^\times \mathcal{E}(u)\| ds < +\infty, \quad (3.2.5)$$

alors l'intégrale

$$\int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ + \int_0^\infty H_s^\times ds$$

est bien définie sur $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ et vérifie pour tous u, v dans $L^2(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}(u), H \mathcal{E}(v) \rangle &= \int_0^\infty \left(\bar{u}(s) \langle \mathcal{E}(u), H_s^+ \mathcal{E}(v) \rangle + v(s) \langle \mathcal{E}(u), H_s^- \mathcal{E}(v) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}(s) v(s) \langle \mathcal{E}(u), H_s^\circ \mathcal{E}(v) \rangle + \langle \mathcal{E}(u), H_s^\times \mathcal{E}(v) \rangle \right) ds. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Cette équation est l'équation définissant l'intégrale (sans possibilité d'aller au-delà du domaine exponentiel) dans la définition de Hudson et Parthasarathy (dans l'article fondateur [H-P]) des intégrales stochastiques quantiques.

- Soit H une intégrale stochastique quantique vérifiant les conditions de l'exemple précédent, et telle que H^* peut aussi s'écrire comme une telle intégrale. Alors ces deux intégrales peuvent être étendues partout où le terme de droite est bien défini (c'est-à-dire là où les conditions naturelles de domaine et d'intégrabilité sont vérifiées). Voir à ce sujet [A-M].

- Si l'on considère quatre processus adaptés $(H_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ d'opérateurs bornés sur Φ dont les normes vérifient les conditions

$$\begin{cases} t \mapsto \|H_t^\pm\| & \text{est de carré intégrable,} \\ t \mapsto \|H_t^\circ\| & \text{est essentiellement borné} \\ t \mapsto \|H_t^\times\| & \text{est intégrable,} \end{cases} \quad (3.2.7)$$

alors l'intégrale

$$\int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ + \int_0^\infty H_s^\times ds$$

est définie sur tout \mathcal{E} . On note S' l'ensemble des intégrales stochastiques vérifiant les conditions (3.2.7) ci-dessus ; on note par ailleurs S les intégrales appartenant à S' et qui sont de surcroît des opérateurs bornés. D'après la remarque précédente la représentation intégrale d'un élément de S s'étend à tout Φ .

Les ensembles S et S' définis ci-dessus ont été étudiés par Attal dans [At3]. Nous en reparlerons à propos de la formule d'Itô, après la Proposition 3.2.5.

Nous avons évoqué plus haut l'existence d'une autre théorie de l'intégration stochastique quantique, développée par Attal et Lindsay ; cette théorie est basée sur une définition des intégrales qui a pour point de départ les formules que nous énonçons dans la proposition suivante. Il est relativement simple de montrer que les intégrales que nous avons définies dans la Définition 3.2.2 vérifient ces équations sur leur domaine de définition.

Proposition 3.2.3 (Formules Attal-Lindsay pour les intégrales [A-L]) *Soit*

$$H = \mu Id + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ + \int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$$

une intégrale stochastique quantique. Si un vecteur f de Φ est dans le domaine de H , alors pour tout σ de \mathcal{P} on a

$$Hf(\sigma) = \mu f(\emptyset) + \sum_{s \in \sigma} H_s Q_s D_{\sigma(s)} f(\sigma_s) \quad \text{si } \varepsilon = + \text{ ou } \circ$$

et

$$Hf(\sigma) = \mu f(\emptyset) + \int_0^\infty H_s Q_s D_{\sigma(s)} f(\sigma_s) ds \quad \text{si } \varepsilon = - \text{ ou } \times,$$

où

$$Q_s = \begin{cases} P_s & \text{si } \varepsilon = + \text{ ou } \times \\ D_s & \text{si } \varepsilon = - \text{ ou } \circ \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_s) &= \sigma \cap [0, s) \\ \sigma_{(s} &= \sigma \cap (s, +\infty[\end{aligned}$$

Ces formules présentent le grand avantage d'être explicites, par opposition aux formules (3.2.1), qui sont implicites au sens où on n'a pas d'équation donnant l'expression de Hf , sinon faisant apparaître à nouveau H . Nous nous en servons brièvement dans le chapitre 5.

Il y a deux questions naturelles concernant l'intégrale stochastique quantique, que nous n'avons pas encore évoquées : ce sont les questions de l'existence et de l'unicité d'une telle représentation pour un opérateur donné. La question de l'unicité a été traitée par Attal dans [At1] :

Proposition 3.2.4 ([At1]) *Soit H un opérateur sur Φ qui peut s'écrire comme une intégrale*

$$H = \mu Id + \int_0^\infty H_t^+ da_t^+ + \int_0^\infty H_t^- da_t^- + \int_0^\infty H_t^\circ da_t^\circ;$$

si les opérateurs H_t^ε , $\varepsilon = +, \circ, -$, sont fermables pour presque tout t , tout ε , alors H est nul si et seulement si presque tout opérateur H_t^ε est nul.

Pour cette raison, lorsque nous parlerons de représentations intégrales stochastiques quantiques d'opérateurs, il sera implicite que les opérateurs H_t^ε sont supposés fermables.

La question de l'existence d'une représentation intégrale pour un opérateur donné a été largement étudiée, en particulier dans les travaux de Parthasarathy et Sinha (voir [P-S] ou [Me3]), Attal ([At4], [At3]), Coquio ([Co2]) et pourtant on ne connaît que peu d'éléments de réponse. On sait que tout opérateur n'est pas représentable : le contre-exemple le plus classique est dû à Journé et concerne une famille d'opérateurs contractifs, ce qui montre que la représentabilité ne dépend pas simplement de questions de domaine (voir [J-M] ; un autre contre-exemple, qui est aussi un opérateur borné, est décrit dans [Me3]) et nous le présenterons dans la section 5.2.1. On a dégagé des conditions nécessaires à la représentabilité, en particulier au sujet de la régularité des trajectoires – nous reviendrons sur ce point à propos du contre-exemple de Journé et Meyer – et on connaît des classes d'opérateurs représentables, mais le fossé entre les conditions nécessaires et les conditions suffisantes est encore large. Dans le chapitre 5 nous décrivons une caractérisation des opérateurs représentables parmi deux classes fondamentales d'opérateurs : les opérateurs de seconde quantification et de seconde quantification différentielle, que nous définissons en (5.2.1) et (5.2.2).

L'intégrale stochastique usurperait gravement son nom si n'y était associé une formule, que l'on aura profit à appeler formule d'Itô, qui permet d'exprimer le produit de deux intégrales, sous forme d'intégrale. L'approche heuristique du style Attal-Meyer permet de retrouver la forme que doit prendre la formule d'Itô de composition des intégrales stochastiques quantiques à partir des formules informelles de composition

$$\begin{aligned} da_t^- da_t^+ &= dt \\ da_t^- da_t^\circ &= da_t^- \\ da_t^\circ da_t^+ &= da_t^+ \\ da_t^\circ da_t^\circ &= da_t^\circ \end{aligned}$$

et d'un raisonnement qui revient à retranscrire notre preuve du cas discret ; les interversions d'intégrales sont bien sûr extrêmement non justifiables. On pourra commencer à comparer la formule de composition (3.2.8) et la table qui lui est associée (3.2.9) à leurs analogues à temps discret (1.3.7) et (1.3.8).

Nous nous autorisons à nouveau des hypothèses de domaine on ne peut plus larges, et n'écrivons la composition que pour le produit de deux intégrales, chacune par rapport à un seul bruit, ceci dans un souci de lisibilité.

Proposition 3.2.5 (Formule d'Itô quantique, [A-M]) *Soient*

$$H = \int_0^\infty H_t^\varepsilon da_t^\varepsilon \quad \text{et} \quad K = \int_0^\infty K_t^\eta da_t^\eta$$

deux intégrales stochastiques quantiques définies sur Φ tout entier. Alors la composition HK peut s'écrire

$$HK = \int_0^\infty H_t K_t^\eta da_t^\eta + \int_0^\infty H_t^\varepsilon K_t da_t^\eta + \int_0^\infty H_t^\varepsilon K_t^\eta da_t^{\varepsilon,\eta} \tag{3.2.8}$$

où $da^{\varepsilon,\eta}$ est donné par la table

Γ^\rightarrow	-	o	+	x	(3.2.9)
-	0	a^-	a^x	0	
o	0	a°	a^+	0	
+	0	0	0	0	
x	0	0	0	0	

Exemple

On revient sur le cas de l'ensemble S cité plus haut : tout élément de S entre dans le domaine d'application de la proposition précédente et il est facile de constater à partir de la formule d'Itô (3.2.9) que la composition de deux éléments de S donne un élément de S . L'ensemble S est donc une sous-algèbre de l'ensemble des opérateurs bornés de Φ , appelée *algèbre des semimartingales régulières*. Elles ont été introduites par Attal dans [At3].

Retour sur les bruits quantiques

Nous avons utilisé des arguments informels, fondés sur la propriété de représentation chaotique, pour affirmer qu'il n'existe que trois bruits quantiques intéressants, tous les autres pouvant s'y ramener ; Coquio a précisé cette approche en montrant rigoureusement (dans [Co1]) que, si une famille $(M_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs définis sur \mathcal{E} et ayant un adjoint sur \mathcal{E} , a la propriété que, pour presque tous $s < t$ on ait l'égalité

$$(M_t - M_s) \mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(u_s) \otimes K_{s,t} \mathcal{E}(u_t - u_s) \otimes \mathcal{E}(u - u_s) \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}_+)$$

pour un certain opérateur $K_{s,t}$ sur $\mathcal{E}(L^2([s, t]))$, alors il existe une fonction a sur \mathbb{R}_+ , deux fonctions f, g dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ et une fonction k dans $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ telles que

$$M_t = a(t)\text{Id} + \int_0^t f(s) da_s^+ + \int_0^t g(s) da_s^- + \int_0^t k(s) da_s^\circ.$$

3.2.2 Le cas de la multiplicité supérieure à 1

Si l'on veut définir une intégration stochastique quantique sur un espace de Fock de multiplicité supérieure à 1, il faut prendre en compte des intégrales stochastiques d'opérateurs par rapport à une famille de bruits quantiques $da_t^{\kappa, \lambda}$ pour κ, λ dans $\Lambda \cup \{0\}$. On notera $da_t^{0,0}$ la différentielle de temps $dt\text{Id}$; les bruits $da_t^{0, \lambda}$, $da_t^{\lambda, 0}$ et $da_t^{\lambda, \lambda}$ représenteront respectivement les opérateurs de création, annihilation et conservation au point $\lambda \in \Lambda$, les autres bruits $da_t^{\kappa, \lambda}$ pour $\kappa \neq \lambda$ représentant les opérateurs *d'échange*.

On définit l'intégrale

$$\lambda \text{Id} + \sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ (\kappa, \lambda) \neq (0, 0)}} \int_0^\infty H_s^{\kappa, \lambda} da_s^{\kappa, \lambda}$$

comme précédemment mais on restreint son domaine de définition aux vecteurs f de $\Phi(\mathcal{K})$ dont seules un nombre fini de coordonnées sont non nulles ; autrement dit, les vecteurs f tels qu'il existe $F \subset \Lambda$ de cardinal fini tel que

$$f(\sigma) = 0 \text{ si } \sigma \not\subset \mathbb{N} \times (F \cup \{0\}).$$

La définition de l'intégrale se fait alors exactement comme dans le cas de l'espace de Fock de multiplicité 1 : c'est l'opérateur maximal vérifiant

$$Hf = \lambda f(\emptyset) + \sum_{\kappa \in \Lambda} \int_0^\infty H_s D_s^\kappa f d\chi_s^\kappa + \sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ (\kappa, \lambda) \neq (0, 0)}} \int_0^\infty H_s^{\kappa, \lambda} D_s^\kappa f d\chi_s^\lambda \quad (3.2.10)$$

où H_t est l'intégrale arrêtée au temps t , qui coïncide avec $P_t H P_t$ sur Φ_t . Les conditions que nous sous-entendons en disant que l'équation est vérifiée sont encore

les conditions naturelles de domaine et de validité de l'équation. Les conditions d'intégrabilité des processus deviennent

$$\int_0^\infty \sum_{\lambda \in \Lambda} \|H_s D_s^\lambda f\|^2 ds + \int_0^\infty \sum_{\kappa \in \Lambda} \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda \cup \{0\}} H_s^{\kappa, \lambda} D_s^\lambda f \right\|^2 ds + \int_0^\infty \sum_{\lambda \in \Lambda} \|H_s^{0, \lambda}\|^2 ds.$$

Cette définition correspond à celle de l'espace de Fock de multiplicité un si Λ est constitué d'un unique élément.

On ajoute à ces intégrales une intégrale par rapport au temps, qui correspond avec nos notations de convention à une intégrale par rapport à $da^{0,0}$. On peut remarquer que l'on a encore une formule (3.2.10) même si le couple (κ, λ) peut prendre la valeur $(0, 0)$. Notons cependant que lorsque nous chercherons à représenter un unique opérateur et pas un processus, nous ne nous intéresserons qu'aux représentations ne faisant pas intervenir l'intégration par rapport au temps : nous ne considérerons que les bruits $da_s^{\kappa, \lambda}$ pour $(\kappa, \lambda) \neq (0, 0)$ dans les représentations en intégrales stochastiques quantiques.

La formule d'Itô donnant la composition de deux intégrales stochastiques quantiques dans ce cadre prend une forme extrêmement compacte avec nos notations :

Proposition 3.2.6 *Soient*

$$H = \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \int_0^\infty H_s^{\kappa, \lambda} da_s^{\kappa, \lambda} \quad \text{et} \quad K = \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \int_0^\infty K_s^{\kappa, \lambda} da_s^{\kappa, \lambda}$$

deux intégrales stochastiques quantiques définies sur $\Phi(\mathcal{K})$ tout entier. Alors le produit $H K$ s'écrit

$$\begin{aligned} H K = \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} & \left(\int_0^\infty H_s K_s^{\kappa, \lambda} da_s^{\kappa, \lambda} + \int_0^\infty H_s^{\kappa, \lambda} K_s da_s^{\kappa, \lambda} \right) \\ & + \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{\mu \in \Lambda} \int_0^\infty H_s^{\kappa, \mu} K_s^{\mu, \lambda} da_s^{\kappa, \lambda}. \end{aligned}$$

La formule d'Itô se déduit de la formule de composition des bruits

$$da^{\kappa, \lambda} da^{\mu, \nu} = \hat{\delta}_{\kappa, \nu} da^{\mu, \lambda}$$

où le *delta d'Evans* $\hat{\delta}_{\kappa, \nu}$ est donné par

$$\hat{\delta}_{\kappa, \nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \kappa = \nu \text{ et } (\kappa, \nu) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple et retour sur l'article [AP2]

Nous avons donné dans la partie 3.2.1, page 78, la représentation intégrale des opérateurs de multiplication dans une interprétation probabiliste associée à une martingale $(X_t)_{t \geq 0}$, qui dépend de l'équation de structure vérifiée par X . En multiplicité supérieure, on a aussi des équations de structure : toute martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie un système d'équations

$$d[X_t^i, X_t^j] = \delta_{i,j} dt + \sum_{k=1}^N T_k^{i,j}(s) dX_t^k \quad (3.2.11)$$

(nous nous bornons aux cas de multiplicité finie) où chaque $T_k^{i,j}(s)$ est un processus prévisible tel que pour presque tous (s, ω) , $(T_k^{i,j}(s, \omega))_{i,j,k}$ est *doublement symétrique*, c'est-à-dire qu'il possède les propriétés suivantes :

- $(i, j, k) \mapsto T_k^{i,j}(s, \omega)$ est symétrique
- $(i, j, l, m) \mapsto T_k^{i,j}(s, \omega) T_k^{l,m}(s, \omega)$ est symétrique.

Restreignons-nous au cas où les processus $T_k^{i,j}$ sont constants et déterministes. L'opérateur de multiplication par X_t^k dans cette interprétation probabiliste est alors donné (voir [At2]) par

$$a_t^{0,k} + a_t^{k,0} + \sum_{i,j=1}^N T_k^{i,j} a_t^{i,j}. \quad (3.2.12)$$

Il est rappelé dans [AP2], Proposition 12, qu'une martingale normale admettant comme ici une équation de structure à coefficients constants $(X_t)_{t \geq 0}$ a la même loi qu'un processus

$$W_t + \sum_{s \in \Sigma} (N_t^s - \|s\|^{-2}) s$$

où Σ est une famille orthogonale de vecteurs de \mathbb{R}^N , chaque $(N_t^s)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\|s\|^{-2}$ et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien dans Σ^\perp si et seulement si elle vérifie une équation de structure (3.2.11) à coefficients constants.

La représentation intégrale de l'opérateur de multiplication par une telle martingale nous permet, dans [AP2], d'observer la convergence de marches aléatoires convenablement normalisées vers des processus qui s'écrivent de la manière décrite ci-dessus, au sens de la convergence des opérateurs de multiplication. On peut ainsi déterminer la structure exacte du processus limite en fonction de la forme de l'équation de structure discrète.

3.3 Représentations en noyaux de Maassen-Meyer

Les objets définis dans cette section n'apparaîtront presque plus dans la suite ; nous ne les introduisons ici que parce que nous avons abondamment utilisé les

représentations en noyaux dans le cas du temps discret et parce que nos procédés d'approximation couplés à nos formules de représentations en noyaux nous permettent de retrouver un résultat intéressant à ce sujet.

On peut arriver à une définition naturelle de ces noyaux par des manipulations du même type que celles que nous avons effectuées dans le chapitre 3 : pour une fonction $k : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, un calcul formel de

$$H = \int_{A,B,C \in \mathcal{P}} k(A, B, C) da_A^+ a_B^0 a_C^- \int_{M \in \mathcal{P}} f(M) d\chi_M$$

aboutit à l'expression suivante : pour tout f dans le domaine de H , pour presque tout σ dans \mathcal{P} ,

$$Hf(\sigma) = \sum_{U+V+W=\sigma} \int_{N \in \mathcal{P}} k(U, V, N) f(V + W + N) dN. \quad (3.3.1)$$

Maassen a, le premier, considéré des opérateurs définis par ce type de relations dans [Ma1] pour résoudre des équations différentielles stochastiques quantiques : en effet, une écriture en noyau est un outil naturel pour la résolution d'une telle équation par la méthode de Picard. Maassen s'autorisait des hypothèses assez larges sur le noyau k et les vecteurs f sur lesquels il opère ; Belavkin et Lindsay ont donné une définition plus générale, leur approche consistant à chercher des conditions, à partir d'estimations fines des intégrales $\int g(\sigma) Hf(\sigma) d\sigma$, pour que la formule (3.3.1) définisse bien un opérateur sur des sous-ensembles de Φ . Nous ne développerons pas leurs résultats et dirons simplement que l'opérateur associé au noyau k a pour domaine l'ensemble des f tels que pour tout σ les intégrales qui apparaissent dans (3.3.1) sont bien définies et que (3.3.1) définisse bien un élément de $L^2(\mathcal{P})$.

Nous devons mentionner le fait que Belavkin et Lindsay font intervenir de manière importante la transformée que nous avons utilisée :

$$k'(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{\sigma \subset \beta} k(\alpha, \sigma, \gamma).$$

La raison d'être de cette transformée est la même que dans le cadre discret (voir (2.1.17)) : si un opérateur peut s'écrire

$$K = \int_{\alpha, \gamma} k'(\alpha, \gamma) |d\chi_\alpha\rangle \langle d\chi_\gamma| \quad (3.3.2)$$

alors on tire une représentation en noyau formelle du fait que

$$|d\chi_\alpha\rangle \langle d\chi_\gamma| = da_\alpha^+ P_0 da_\gamma^- \quad (3.3.3)$$

et que

$$P_0 = \text{Id} + \int_{\beta \in \mathcal{P}} (-1)^{|\beta|} da_\beta^\circ.$$

Les situations connues où la représentation en noyau prend un sens comme série d'intégrales itérées découlent des cas où on peut donner un sens à l'écriture (3.3.2) ; la première de ces situations est l'étude de Attal dans [At4] du cas des opérateurs de Hilbert-Schmidt (une écriture sous forme d'opérateur de Hilbert-Schmidt n'est rien d'autre qu'une décomposition (3.3.2) en un sens rigoureux) dans laquelle il trouve un procédé itératif donnant l'écriture de K comme une somme d'intégrales itérées d'ordres croissant et d'un terme qui disparaît à la limite. Ce procédé itératif provient en fait simplement de l'équation $P_0 = \text{Id} - \int_0^\infty P_0 da_s^\circ$.

La seconde situation est en fait très semblable à la première : c'est celle d'une approche "bruit blanc" où l'exigence analytique est assouplie : on n'exige plus que (3.3.2) ait un sens dans Φ mais depuis l'un de ses sous-espaces sur son espace dual : voir par exemple Ji et Obata, [J-O].

Dans les deux cas les formules sont les mêmes que celles que l'on obtient formellement en substituant (3.3.3) dans (3.3.2).

A propos des travaux de Belavkin et Lindsay on peut noter que, sachant d'un opérateur qu'il peut s'écrire comme opérateur à noyau (d'action donnée par (3.3.1)) avec un noyau k localement intégrable par rapport à ses trois variables, ils obtiennent (dans [B-L], Proposition 3.3) une expression de ce noyau : dans notre langage,

$$k'(\alpha, \beta, \gamma) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{|\alpha|} \delta^{|\beta|} \delta^{|\gamma|}} \langle \chi_{\alpha \cup \beta}, K \chi_{\beta \cup \gamma} \rangle,$$

où par exemple $|\alpha|$ représente le cardinal de α et $\chi_{\alpha \cup \beta}$ est $(\chi_{t_1+\delta} - \chi_{t_1}) \cdots (\chi_{t_n+\delta} - \chi_{t_n})$, les $[t_i, t_i + \delta]$ étant $|\alpha| + |\beta|$ intervalles contenant exactement un point de $\alpha \cup \beta$ chacun.

On pourra retrouver immédiatement cette expression à partir de notre formule (2.1.15) et du procédé d'approximation que nous décrivons dans la section 5, appliqué aux opérateurs à noyau.

Chapitre 4

Approximations discrètes du calcul stochastique quantique

Dans ce chapitre, nous présentons la technique d'approximation du calcul stochastique quantique à temps continu par son analogue à temps discret.

Dans la section 4.1, nous présentons la méthode définie par Attal, qui permet de reproduire l'espace de Fock à temps discret comme sous-espace de Φ , avec de premiers résultats de convergence. Nous soulignons ensuite ce qui semble une différence majeure entre les calculs stochastiques à temps discret et à temps continu : la différence entre tables d'Itô, puis expliquons pourquoi cette différence devrait disparaître dans les passages à la limite.

Pour appliquer les résultats que nous avons obtenus dans le cas discret, nous aurons besoin de savoir calculer efficacement les approximations d'objets vivant sur Φ : nous décrivons donc dans la section 4.2 les relations entre opérateurs du calcul d'Itô abstrait à temps discret et à temps continu, puis les projections d'intégrales stochastiques de Φ écrites comme intégrales à temps discret, et enfin les projections d'opérateurs à noyau.

Dans la section 4.3 nous montrerons que la différence entre les deux formules d'Itô n'est en aucun cas une obstruction à l'utilisation de $T\Phi$ comme outil d'approximation du calcul stochastique quantique sur Φ . Nous donnerons en effet une preuve de la formule d'Itô à temps continu utilisant exclusivement notre méthode d'approximation et le calcul stochastique à temps discret.

4.1 L'approximation de Attal

4.1.1 Approximation de l'espace de Fock simple

La méthode d'approximation que nous définissons ici est un outil fondamental pour le reste de cette thèse : hormis au chapitre 5, elle sera utilisée en permanence. Les idées sous-jacentes sont simples : il s'agit simplement de considérer un accroissement infinitésimal de vecteurs $d\chi_t$ comme la limite d'un X_i , un accroissement infinitésimal d'opérateurs da_t^ε comme la limite d'un a_i^ε , et tout cela en utilisant les normalisations adéquates. Remarquons qu'il n'a été possible d'arriver à une intuition aussi simple que grâce au formalisme particulièrement parlant du calcul d'Itô abstrait.

Ce que nous présentons dans cette section provient, avec quelques modifications, de l'article d'Attal [At7].

Soit $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots\}$ une subdivision de \mathbb{R}_+ (nous entendons par là que la subdivision est non bornée : la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ diverge vers l'infini) ; à cette subdivision on associe une famille de vecteurs en posant, pour tout $i \geq 0$:

$$X_i = \frac{\chi_{t_{i+1}} - \chi_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}$$

et pour toute partie finie A de \mathbb{N} ,

$$X_A = X_{i_1} \otimes \dots \otimes X_{i_n}$$

si $A = \{i_1 < \dots < i_n\}$ est non vide, $X_\emptyset = \Omega$, sinon. On remarque par ailleurs que tout vecteur X_i appartient à $\Phi_{[t_i, t_{i+1}]}$. Les X_A constituent alors une famille orthornormée de Φ et on note $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ l'espace fermé engendré par tous les X_A , $A \in \mathcal{P}$. Il est alors évident que l'on a un isomorphisme explicite (tellement explicite que nous utiliserons les mêmes notations), pour toute subdivision \mathcal{S} , entre $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ et $\mathbb{T}\Phi$.

On associe de plus à \mathcal{S} les opérateurs qui, pour tout i , s'écrivent dans le produit $\Phi_{t_i} \otimes \Phi_{[t_i, t_{i+1}]} \otimes \Phi_{[t_{i+1}, \dots]}$

$$a_i^- = \text{Id} \otimes \frac{a_{t_{i+1}}^- - a_{t_i}^-}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} P^{(1)} \otimes \text{Id}$$

$$a_i^+ = \text{Id} \otimes P^{(1)} \frac{a_{t_{i+1}}^+ - a_{t_i}^+}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \otimes \text{Id}$$

$$a_i^\circ = \text{Id} \otimes P^{(1)} (a_{t_{i+1}}^\circ - a_{t_i}^\circ) P^{(1)} \otimes \text{Id},$$

où $P^{(1)}$ représente la projection sur le chaos d'ordre 1 (rappelons que pour $\varepsilon = +, \circ, -$ nous notons $a_t^\varepsilon = \int_0^t da_s^\varepsilon$).

On peut alors vérifier que ces opérateurs stabilisent $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ et que l'isomorphisme entre $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ et $\mathbb{T}\Phi$ que nous avons évoqué ci-dessus envoie ces opérateurs a_i^ε sur les opérateurs a_i^ε de l'espace $\mathbb{T}\Phi$. On peut vérifier de surcroît qu'en tant qu'opérateurs sur Φ , les opérateurs a_i^ε sont bornés, de norme 1. Dans l'article de Attal [At7], les projections $P^{(1)}$ sont absentes de la définition de a_i^- et a_i^0 ; les ajouter ne change cependant rien à l'action de ces opérateurs sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ donc ne changera rien aux preuves des propriétés que nous énonçons plus bas. En revanche, cela a l'avantage de faire des opérateurs a_i^ε , vus comme opérateurs sur Φ , des opérateurs bornés.

On a donc associé à toute subdivision \mathcal{S} de \mathbb{R}_+ un espace $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ et une famille d'opérateurs qui reproduisent dans Φ lui-même l'ensemble des structures que nous avons définies dans le chapitre 1. Le but avoué de cette construction est évidemment de construire une approximation de Φ ; il nous faut donc des résultats de convergence. Notons pour cela $\mathbb{E}_\mathcal{S}$ l'opérateur de projection sur le sous-espace fermé $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ de Φ . Alors on a la proposition suivante :

Proposition 4.1.1 ([At7])

- La famille de projections $\mathbb{E}_\mathcal{S}$ associée aux subdivisions \mathcal{S} de \mathbb{R}_+ converge fortement vers l'identité sur Φ lorsque le pas $|\mathcal{S}|$ de la subdivision tend vers zéro.
- Pour tout $t \geq 0$, les opérateurs

$$\sum_{i|t_i \leq t} a_i^0, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^+, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^-$$

convergent fortement sur \mathcal{E} vers a_t^0 , a_t^+ , a_t^- respectivement.

- De même, pour tout $t \geq 0$, les opérateurs

$$\sum_{i|t_i \leq t} a_i^0 \mathbb{E}_\mathcal{S}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^+ \mathbb{E}_\mathcal{S}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^- \mathbb{E}_\mathcal{S}$$

convergent fortement sur \mathcal{E} vers a_t^0 , a_t^+ , a_t^- respectivement.

On notera toujours dans la suite $|\mathcal{S}|$ le pas de la subdivision \mathcal{S} .

On aura besoin d'expliciter la projection $\mathbb{E}_\mathcal{S} f$ d'un élément f de Φ . Puisqu'il est particulièrement pratique de manipuler les intégrales d'opérateurs sur le domaine exponentiel, nous décrivons en exemple la projection d'un vecteur de ce domaine.

Lemme 4.1.2 Soit f un vecteur de Φ ; alors pour toute subdivision \mathcal{S} de \mathbb{R}_+ , la projection $\mathbb{E}_\mathcal{S} f$ de f s'écrit

$$\mathbb{E}_\mathcal{S} f = \sum_{A \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_\mathcal{S} f(A) X_A$$

avec

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}} f(A) = \frac{1}{\sqrt{t_{i_1+1}-t_{i_1}} \cdots \sqrt{t_{i_n+1}-t_{i_n}}} \int_{t_{i_1}}^{t_{i_1+1}} \cdots \int_{t_{i_n}}^{t_{i_n+1}} f(s_1, \dots, s_n) ds_1 \cdots ds_n.$$

si $A = \{i_1, \dots, i_n\}$ est non vide, $(\mathbb{E}_{\mathcal{S}} f)(\emptyset) = f(\emptyset)$ sinon.

Exemple

On considère un vecteur exponentiel $\mathcal{E}(u)$ associé à un vecteur u de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Alors on peut vérifier grâce au Lemme 4.1.2 que la projection $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(u)$ de $\mathcal{E}(u)$ est un vecteur exponentiel $e(\tilde{u})$ dans $\mathbb{T}\Phi$ où \tilde{u} est l'élément de $l^2(\mathbb{N})$ naturellement associé à u par la subdivision \mathcal{S} : pour tout i de \mathbb{N} on a

$$\tilde{u}(i) = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds.$$

Il faut noter que $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(u)$ n'est pas un vecteur exponentiel dans Φ : en particulier, pour presque tout t de \mathbb{R}_+ ,

$$P_t \mathcal{E}(\tilde{u}) = \mathcal{E}(\tilde{u}_i) \left(1 + \tilde{u}(i) \frac{\chi_t - \chi_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}\right) \quad \text{et} \quad D_t \mathcal{E}(\tilde{u}) = \frac{\tilde{u}(i)}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \mathcal{E}(\tilde{u}_i).$$

4.1.2 Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1

Dans le cas d'un espace de Fock $\Phi(\mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un espace séparable dont une base hilbertienne est indexée par Λ , on associe un sous-espace $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ de $\Phi(\mathcal{K})$ à toute subdivision $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots\}$ de la manière suivante : on définit pour tout λ dans Λ , pour tout i dans \mathbb{N} un vecteur

$$X_i^\lambda = \frac{\chi_{t_{i+1}}^\lambda - \chi_{t_i}^\lambda}{t_{i+1} - t_i}$$

et à toute partie $A = \{(i_1, \lambda_1), \dots, (i_n, \lambda_n)\}$ de \mathcal{P}_Λ (les i_j étant supposés deux à deux distincts), on associe le vecteur

$$X_A = X_{i_1}^{\lambda_1} \cdots X_{i_n}^{\lambda_n}.$$

Le sous-espace $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ de $\Phi(\mathcal{K})$ engendré par ces vecteurs X_A s'identifie alors à $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$. On note $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$; cet opérateur s'exprime à présent, pour f dans Φ , A dans \mathcal{P}_Λ de la forme $\{(i_1, \lambda_1), \dots, (i_n, \lambda_n)\}$, par

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}} f(A) = \frac{1}{\sqrt{t_{i_1+1}-t_{i_1}} \cdots \sqrt{t_{i_n+1}-t_{i_n}}} \int_{t_{i_1}}^{t_{i_1+1}} \cdots \int_{t_{i_n}}^{t_{i_n+1}} f(\{(s_1, i_1), \dots, (s_n, i_n)\}) ds_1 \cdots ds_n.$$

Pour tout λ de Λ , tout i de \mathbb{N} , on définit les opérateurs

$$a_i^{\lambda,0} = \text{Id} \otimes \frac{a_{t_{i+1}}^{\lambda,0} - a_{t_i}^{\lambda,0}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} P^{(1)} \otimes \text{Id}$$

$$a_i^{0,\lambda} = \text{Id} P^{(1)} \otimes \frac{a_{t_{i+1}}^{0,\lambda} - a_{t_i}^{0,\lambda}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \otimes \text{Id}$$

et pour tout couple κ, λ de Λ ,

$$a_i^{\kappa,\lambda} = \text{Id} \otimes (a_{t_{i+1}}^{\kappa,\lambda} - a_{t_i}^{\kappa,\lambda}) \otimes \text{Id},$$

toutes ces décompositions tensorielles étant données dans $\Phi_{[0,t_i]} \otimes \Phi_{[t_i,t_{i+1}]} \otimes \Phi_{[t_{i+1}]}$ (de manière similaire au cas simple, $a_t^{\kappa,\lambda}$ désigne $\int_0^t da_s^{\kappa,\lambda}$ pour tous κ, λ dans $\Lambda \cup \{0\}$).

Comme précédemment on a alors

Proposition 4.1.3

- La famille de projections $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ associées aux subdivisions \mathcal{S} de \mathbb{R}_+ converge fortement vers l'identité sur $\Phi(\mathcal{K})$ lorsque le pas $|\mathcal{S}|$ de la subdivision tend vers zéro.
- Pour tout $t \geq 0$, tous κ, λ de Λ , les opérateurs

$$\sum_{i|t_i \leq t} a_i^{\kappa,\lambda}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^{0,\lambda}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^{\kappa,0}$$

convergent fortement sur \mathcal{E} vers $a_t^{\kappa,\lambda}$, $a_t^{0,\lambda}$, $a_t^{\kappa,0}$ respectivement.

- De même, pour tout $t \geq 0$, tous κ, λ de Λ , les opérateurs

$$\sum_{i|t_i \leq t} a_i^{\kappa,\lambda} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^{0,\lambda} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^{\kappa,0} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$$

convergent fortement sur \mathcal{E} vers $a_t^{\kappa,\lambda}$, $a_t^{0,\lambda}$, $a_t^{\kappa,0}$ respectivement.

C'est cette proposition qui nous permet dans [AP2] de montrer à partir des représentations intégrales des opérateurs de multiplication associés (voir (3.2.12) et (1.4.2)) que l'on a convergence forte des opérateurs de multiplication associés à des marches aléatoires convenablement normalisées vers des opérateurs de multiplication associés à des processus qui s'écrivent comme une somme d'un mouvement brownien et de processus de Poisson comme en page 84.

4.1.3 Tables d'Itô à temps discret et à temps continu

Il semblait exister une obstruction à ce que l'espace de Fock à temps discret constitue un outil adéquat pour approcher le calcul stochastique de l'espace Φ . Cette obstruction résidait dans la différence des tables d'Itô. Rappelons ces différences : dans l'espace de Fock à temps discret comme dans celui à temps continu il existe une formule de composition des intégrales stochastiques, appelée formule d'Itô, qui s'exprime par

$$\sum_{i \geq 0} h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon \sum_{i \geq 0} k_i^\eta a_i^\eta = \sum_{i \geq 0} h_i^\varepsilon k_i a_i^\varepsilon + \sum_{i \geq 0} h_i k_i^\eta a_i^\eta + \sum_{i \geq 0} h_i^\varepsilon k_i^\eta a_i^{\varepsilon, \eta}$$

où $a^{\varepsilon, \eta}$ est donné par la table

\uparrow	—	○	+	×
—	0	a^-	$a^\times - a^\circ$	a^-
○	0	a°	a^+	a°
+	a°	0	0	a^+
×	a^-	a°	a^+	a^\times

pour les intégrales à temps discret, et pour les intégrales à temps continu par

$$\int_0^\infty H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon \int_0^\infty K_s^\eta da_s^\eta = \int_0^\infty H_s K_s^\eta da_s^\eta + \int_0^\infty H_s^\varepsilon K_s da_s^\varepsilon + \int_0^\infty H_s^\varepsilon K_s^\eta da_s^{\varepsilon, \eta}$$

où $a^{\varepsilon, \eta}$ est donné par la table

\uparrow	—	○	+	×
—	0	a^-	a^\times	0
○	0	a°	a^+	0
+	0	0	0	0
×	0	0	0	0

Dans [At7], Attal proposait une explication possible à cette différence entre les deux tables d'Itô (explication déjà évoquée informellement dans le livre de Meyer [Me2]), portant sur les différences de normalisation entre les différents bruits ; il était cependant loin d'être évident que cette explication pouvait suffire et que des phénomènes parasites ne pouvaient intervenir et perturber cette explication. Avec nos outils permettant d'explicitier l'approximation d'une intégrale, de calculer sa représentation intégrale puis d'effectuer un passage à la limite nous avons pu obtenir une nouvelle preuve de la formule d'Itô dans le cas du temps continu ; cette preuve n'apporte évidemment rien de nouveau mais montre que la différence entre les deux tables d'Itô est loin d'être une obstruction à l'utilisation de l'espace de Fock à temps discret pour approcher rigoureusement le calcul stochastique quantique de $T\Phi$.

Nous allons commencer, dans la section suivante, par calculer les représentations en intégrales stochastiques sur $\mathbb{T}\Phi$ d'approximations d'intégrales stochastiques sur Φ ou les représentations en noyaux d'approximations d'opérateurs à noyau.

4.2 Les projections d'intégrales et de noyaux

Nous avons présenté dans la section précédente un moyen de reconstruire à l'intérieur de l'espace Φ toutes les structures à temps discret que nous avons définies dans le chapitre 1. Dans cette structure discrète on a des critères de représentabilité ainsi que des formules explicites, que ce soit pour les représentations en intégrales stochastiques ou pour les représentations en noyaux de Maassen-Meyer ; il est donc naturel de chercher à utiliser ces résultats en temps discret pour étudier les questions de représentabilité sur Φ .

Il faut tout d'abord étudier les moyens d'approcher les intégrales et opérateurs à noyau et de relier les représentations à temps continu aux représentations à temps discret. La référence générale pour cette section est l'article [Pt2].

4.2.1 Relations de commutation

Pour calculer les représentations en intégrales à temps discret d'approximations d'opérateurs sur Φ nous aurons besoin, à en juger par les formules (2.1.15), de pouvoir exprimer l'action de $p_i\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$, $d_i\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ sur Φ , ou encore de calculer l'approximation d'un vecteur de Φ en fonction de sa représentation prévisible.

Lemme 4.2.1 (Lemme 2.1 de [Pt2]) *Soit \mathcal{S} une partition de \mathbb{R}_+ . Pour tout f de Φ , tout i de \mathbb{N} on a les relations suivantes :*

$$p_i\mathbb{E}_{\mathcal{S}}f = \mathbb{E}_{\mathcal{S}}P_{t_i}f,$$

$$d_i\mathbb{E}_{\mathcal{S}}f = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}P_{t_i}D_t f dt,$$

et

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\int_0^\infty f_t d\chi_t = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}\sum_{i \geq 0}(\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}P_{t_i}f_t dt)X_i.$$

4.2.2 Projections d'intégrales

On calcule grâce aux relations du Lemme 4.2.1 et aux formules (2.1.15) la représentation intégrale de la projection $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}H\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ d'une intégrale

$$H = \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ.$$

Pour éviter tout problème de nature analytique, nous nous autorisons des hypothèses de domaine confortables : les intégrales considérées sont supposées vérifier les hypothèses **(HD)** décrites ci-dessous ; remarquons que ε' est défini par :

$$+' = - \quad -' = + \quad \circ' = \circ.$$

On considère alors l' hypothèse suivante :

$$\text{(HD)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Les intégrales } \int_0^\infty H_s^\varepsilon da^\varepsilon \text{ et } \int_0^\infty (H_s^\varepsilon)^* da^{\varepsilon'} \\ \text{sont définies sur } \mathcal{E} \text{ et ses images par les } \mathbb{E}_{\mathcal{S}}. \end{array} \right.$$

Remarquons (cf. Remarque 3, section I de [A-M]) que cela implique, si l'on note H l'intégrale $\int_0^\infty H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon$, que l'intégrale $\int_0^\infty (H_s^\varepsilon)^* da^{\varepsilon'}$ est égale à H^* sur \mathcal{E} et toutes ses projections.

Il faut remarquer que cela implique aussi que les projections $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$, $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H^* \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ sont définies sur tout $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$:

Lemme 4.2.2 *Soit \mathcal{S} une subdivision de \mathbb{R}_+ . L'ensemble des projections $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(u)$ de vecteurs exponentiels contient la base $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\}$.*

En effet on voit d'après la forme des projections de vecteurs exponentiels de Φ que leurs projections constituent tout l'ensemble des vecteurs exponentiels de $T\Phi$. Il suffit alors de remarquer que, dans $T\Phi$,

- l'exponentielle de la suite nulle est Ω ,
- l'exponentielle de la suite ayant tous ses termes nuls sauf le i -ème, qui vaut 1, est $\Omega + X_i$,
- l'exponentielle de la suite ayant tous ses termes nuls sauf les i et j -èmes, qui valent 1, est

$$\Omega + X_i + X_j + X_{i,j}$$

et ainsi de suite.

D'après notre Théorème 2.2.1 l'opérateur $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ est donc représentable en intégrale stochastique quantique ; on peut calculer les coefficients de la représentation grâce aux formules (2.2.5). Le Lemme 4.2.1 nous permet ainsi d'obtenir la proposition suivante :

Proposition 4.2.3 (Proposition 2.2 de [Pt2]) *Soit $H = \int H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon$ une intégrale stochastique quantique sur Φ qui vérifie l'hypothèse **(HD)**. Alors $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ admet une représentation en intégrale stochastique quantique sur $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\}$ au moins et les coefficients h_i^+ , h_i^- , h_i° sont donnés par*

- pour $\varepsilon = +$,

$$\begin{aligned} h_i^+ \mathbb{E}_{\mathcal{S}} &= \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^+ dt \\ h_i^- \mathbb{E}_{\mathcal{S}} &= 0 \\ h_i^{\circ} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} &= \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^+ (a_t^+ - a_{t_i}^+) dt \end{aligned}$$

- pour $\varepsilon = -$,

$$\begin{aligned} h_i^+ \mathbb{E}_{\mathcal{S}} &= 0 \\ h_i^- \mathbb{E}_{\mathcal{S}} &= \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^- dt \\ h_i^{\circ} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} &= \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} (a_t^- - a_{t_i}^-) H_t^- dt \end{aligned}$$

- pour $\varepsilon = \circ$,

$$\begin{aligned} h_i^+ \mathbb{E}_{\mathcal{S}} &= 0 \\ h_i^- \mathbb{E}_{\mathcal{S}} &= 0 \\ h_i^{\circ} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} &= \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^{\circ} dt \end{aligned}$$

où toutes les égalités sont sur $\mathbb{T}\Phi_i$ et où toutes les intégrales des termes de droite sont des intégrales fortes. Dans le cas de $\varepsilon = \circ$, l'intégrale discrète est définie sur le domaine exponentiel de $\mathbb{T}\Phi$.

Il apparaît deux phénomènes surprenants : tout d'abord, il n'est pas évident, même avec les hypothèses ci-dessus, que l'intégrale discrète que l'on fait apparaître comme projection de H soit définie sur le domaine exponentiel de $\mathbb{T}\Phi$ lorsque l'on considère les cas $\varepsilon = +$ ou $-$. Détaillons ce point : on peut montrer (voir la longue remarque après la Proposition 2.2 dans [Pt2]) que pour $\varepsilon = +$ par exemple, on a pour tout $\mathcal{E}(u) \in \text{Dom } h$,

$$\sum_{i \geq 0} |h_i^+ a_i^+ \mathcal{E}(u)(A)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{i \geq 0} |h_i^{\circ} a_i^{\circ} \mathcal{E}(u)(A)| < +\infty$$

pour tout $A \in \mathcal{P}$ et

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \left| \sum_{i \geq 0} (h_i^+ a_i^+ + h_i^\circ a_i^\circ) \mathcal{E}(u)(A) \right|^2 < +\infty. \quad (4.2.1)$$

En revanche, on ne peut affirmer que l'on a

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \left| \sum_{i \geq 0} h_i^+ a_i^+ \mathcal{E}(u)(A) \right|^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{A \in \mathcal{P}} \left| \sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ \mathcal{E}(u)(A) \right|^2 < +\infty; \quad (4.2.2)$$

la raison en est simplement que l'on ne peut déduire ce type de propriété que de l'hypothèse que

$$\int_{\mathcal{P}} \int_0^\infty |H_t^+ P_t e(\tilde{u})(\sigma)|^2 d\sigma dt < +\infty.$$

Or pour $t_i \leq t < t_{i+1}$ on a

$$P_t e(\tilde{u}) = e(\tilde{u}_i) + \tilde{u}(i) \frac{\chi_t - \chi_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \quad (4.2.3)$$

qui est encore

$$e(\tilde{u}_i) + \frac{\tilde{u}(i)}{t_{i+1} - t_i} (a_t^+ - a_{t_i}^+) e(\tilde{u}_i),$$

ce qui implique (4.2.1) mais on n'a aucun moyen de séparer les deux termes pour obtenir (4.2.1).

L'égalité (4.2.3) est aussi la raison du second phénomène *a priori* surprenant : la projection d'une intégrale par rapport à da^+ ou da^- peut faire apparaître un terme en a° . On s'attend évidemment à ce que ce terme tende vers zéro avec le pas de la subdivision \mathcal{S} . Il faut cependant remarquer que l'on ne sait pas, comme on l'a fait remarquer plus haut, si les intégrales des projetés sont définies au-delà de $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$. On est donc limité pour ce qui est de prouver une quelconque convergence, même faible. On peut par exemple remarquer que les images par un $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ d'exponentielles de fonctions à support compact s'écrivent toujours comme combinaisons linéaires d'un nombre fini de $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$.

Lemme 4.2.4 (Lemme 2.3 de [Pt2]) *Soit $H = \int_0^\infty H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon$ une intégrale satisfaisant l'hypothèse (HD) avec $\varepsilon = +$ ou $-$; alors l'intégrale parasite $\sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ$ qui lui est associée par la proposition 4.2.3 tend faiblement vers zéro au sens où*

$$\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(v) \rangle$$

tend vers zéro lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro, pour tous u, v de $L^2(\mathbb{R}_+)$ à supports compacts.

Exemples

- La projection d'un opérateur $a_{t_{i+1}}^+ - a_{t_i}^+$ par exemple donne bien $\sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^+$; en revanche si l'on prend un t tel que $t_i < t < t_{i+1}$, la projection de $a_t^+ - a_{t_i}^+$ est

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}}(a_t^+ - a_{t_i}^+) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \frac{t - t_i}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} a_i^+.$$

- La projection d'un opérateur $a_t^\circ - a_{t_i}^\circ$ pour $t_i \leq t < t_{i+1}$ est

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}}(a_t^\circ - a_{t_i}^\circ) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} a_i^\circ.$$

- La projection d'un opérateur $\int_0^{t_j} a_s^+ da_s^+$ est de la forme $\sum_{i < j} h_i^+ a_i^+$ avec

$$h_i^+ p_i = \sqrt{t_{i+1} - t_i} \left(\sum_{k < i} \sqrt{t_{k+1} - t_k} a_k^+ \right).$$

- La projection d'un opérateur $\int_0^{t_j} a_s^- da_s^+$ est de la forme $\sum_{i < j} h_i^+ a_i^+ + \sum_{i < j} h_i^\circ a_i^\circ$ avec

$$h_i^+ p_i = \sqrt{t_{i+1} - t_i} \left(\sum_{j < i} \sqrt{t_{j+1} - t_j} a_j^- \right).$$

$$h_i^\circ = \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i) \text{Id.}$$

4.2.3 Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1

Nous énonçons ici dans le cas d'un espace de Fock avec espace de multiplicité \mathcal{K} les analogues de la Proposition 4.2.3 et du Lemme 4.2.4.

Proposition 4.2.5 *Soit (α, β) un couple d'éléments de $\Lambda \cup \{0\}$ différent de $(0, 0)$ et soit $H = \int_0^\infty H_t^{\alpha, \beta} da_t^{\alpha, \beta}$ une intégrale sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$. On suppose que $\int_0^\infty H_t^{\alpha, \beta} da_t^{\alpha, \beta}$ et $\int_0^\infty (H_t^{\alpha, \beta})^* da_t^{\beta, \alpha}$ sont définies sur le domaine exponentiel et ses images par les $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$. Alors $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ admet une représentation en intégrale stochastique quantique sur $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}, \Lambda}\}$ au moins et les coefficients de la représentation sont donnés par*

- pour α, β tous deux non nuls,

$$h_i^{\alpha, \beta} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^{\alpha, \beta} dt$$

toutes les autres intégrandes étant nulles, *YYY*

- pour $\alpha = 0$,

$$h_i^{0,\beta} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^{0,\beta} dt$$

$$h_i^{\kappa,\beta} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^{0,\beta} (a^{0,\kappa} t - a^{0,\kappa} t_i) dt \text{ pour tout } \kappa \text{ dans } \Lambda,$$

toutes les autres intégrandes étant nulles,

- pour $\beta = 0$,

$$h_i^{\alpha,0} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^{\alpha,0} dt$$

$$h_i^{\alpha,\lambda} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} (a^{\lambda,0} t - a^{\lambda,0} t_i) H_t^{\alpha,0} dt \text{ pour tout } \lambda \text{ dans } \Lambda.$$

toutes les autres intégrandes étant nulles.

Comme précédemment on peut montrer que les termes parasites disparaissent à la limite :

Lemme 4.2.6 Soit H une intégrale stochastique quantique sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$ de la forme $\int_0^\infty H_s^{\alpha,0} da_s^{\alpha,0}$ avec $\alpha \neq 0$ (respectivement $\int_0^\infty H_s^{\alpha,\beta} da_s^{0,\beta}$ avec $\beta \neq 0$). On suppose que l'intégrale H satisfait aux hypothèses de la Proposition 4.2.5; alors l'intégrale parasite $\sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} h_i^{\alpha,\lambda} a_i^{\alpha,\lambda}$ (respectivement $\sum_{\kappa \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} h_i^{\kappa,\beta} a_i^{\kappa,\beta}$) qui lui est associée par la Proposition 4.2.5 tend faiblement vers zéro au sens où

$$\left\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} h_i^{\alpha,\lambda} a_i^{\alpha,\lambda} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(v) \right\rangle$$

(respectivement

$$\left\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \sum_{\kappa \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} h_i^{\kappa,\beta} a_i^{\kappa,\beta} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(v) \right\rangle)$$

tend vers zéro lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro, pour tous u, v de $L^2(\mathbb{R}_+)$ à supports compacts.

4.2.4 Projections d'opérateurs à noyau

On va considérer ici la projection d'un opérateur à noyau au sens où il a été défini dans le chapitre précédent; cela nous permettra de retrouver la formule du noyau donnée par Belavkin et Lindsay dans leur article [B-L].

Considérons un noyau $k : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ qui est localement intégrable au sens où pour tout n , toute partie bornée E de \mathbb{R}_+ , k est intégrable sur $\mathcal{P}_n(E)$:

$$\int_{\mathcal{P}^n(E)^3} |k(\alpha, \beta, \gamma)| \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma < +\infty.$$

L'opérateur associé, que nous notons K , est bien défini sur les éléments de $L^2(\mathcal{P})$ qui sont des indicatrices de pavés bornés de \mathbb{R}_+^n ; par conséquent $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ est bien défini sur tous les vecteurs X_A , $A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$, de $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$ (nous reprenons momentanément la notation $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ pour l'ensemble des parties finies de \mathbb{N}).

Pour fixer les idées, supposons que la subdivision \mathcal{S} est régulière de pas δ ; on peut calculer que pour tout f de Φ tel que $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} f$ est dans le domaine de K , on a pour tout M de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f(M) = & \quad (4.2.4) \\ & \sum_{U+V+W=M} \sum_{N \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^{|U|} \delta^{|V|} \delta^{|N|}}} \int_U \int_V \int_N k(v, \nu, \eta) \, dv \, d\nu \, d\eta \right) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f(V + W + N) \end{aligned}$$

où \int_U est $\int_{t_{i_1}}^{t_{i_1+1}} \dots \int_{t_{i_n}}^{t_{i_n+1}}$ si $U = \{i_1, \dots, i_n\}$.

Il est par ailleurs évident que pour tous U, V, W fixés la série en N qui apparaît dans l'expression (4.2.4) est sommable lorsque f est une indicatrice de pavé borné de \mathbb{R}_+^n . Par conséquent l'opérateur $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ coïncide sur $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\}$ avec un opérateur à noyau. Nous notons encore k ce noyau, les variables $(A, B, C$ dans $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$, α, β, γ dans $\mathcal{P}_{\mathbb{R}_+}$) se chargeant de distinguer entre noyau de $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ et noyau de K). On a alors

$$k(A, B, C) = \frac{1}{\sqrt{\delta^{|A|} \delta^{|B|} \delta^{|C|}}} \int_A \int_B \int_C k(\alpha, \beta, \gamma) \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

D'après (2.1.15) on a donc pour tous A, B, C de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$

$$\langle X_{AUB}, \mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}} X_{BUC} \rangle = k'(A, B, C).$$

Par ailleurs on voit facilement que

$$k'(A, B, C) = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^{|A|}}} \frac{1}{\delta^{|B|}} \frac{1}{\sqrt{\delta^{|C|}}} \int_A \int_B \int_C k'(\alpha, \beta, \gamma) \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma \right);$$

enfin,

$$\langle X_{AUB}, \mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}} X_{BUC} \rangle = \langle X_{AUB}, K X_{BUC} \rangle.$$

Si l'on note pour se rapprocher des notations utilisées dans la section 3.3,

$$\chi_A = (\chi_{t_{i_1+1}} - \chi_{t_{i_1}}) \dots (\chi_{t_{i_n+1}} - \chi_{t_{i_n}})$$

si $A = \{i_1, \dots, i_n\}$, on a donc

$$\frac{1}{\delta^{|A|} \delta^{|B|} \delta^{|C|}} \int_A \int_B \int_C k'(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma = \frac{1}{\delta^{|A|} \delta^{|B|} \delta^{|C|}} \langle \chi_{A \cup B}, K \chi_{B \cup C} \rangle$$

et avec notre hypothèse de locale intégrabilité on retrouve le résultat de Belavkin et Lindsay cité dans la section 3.3 : si pour tout \mathcal{S} on associe à tous α, β, γ de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}_+}$ des éléments A, B, C de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ tels que

$$\text{si } \alpha \in [t_{i_1}, t_{i_1+1}] \times \dots \times [t_{i_n}, t_{i_n+1}] \text{ alors } A = \{i_1, \dots, i_n\}$$

(B, C étant choisis de manière similaire) on a

Proposition 4.2.7 *Soit k un noyau localement intégrable au sens défini ci-dessus ; alors l'opérateur K associé est bien défini sur les indicatrices de pavés bornés de \mathbb{R}_+^n quel que soit n et le noyau k vérifie*

$$k'(\alpha, \beta, \gamma) = \lim_{|\mathcal{S}| \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{|A|} \delta^{|B|} \delta^{|C|}} \langle \chi_{A \cup B}, K \chi_{B \cup C} \rangle$$

où A, B, C sont choisis pour tout \mathcal{S} comme ci-dessus.

Notre preuve reste parfaitement valable dans le cas d'une subdivision \mathcal{S} qui n'est pas régulière, avec les adaptations de notations qui s'imposent.

4.3 Convergence de la table d'Itô

4.3.1 Preuve de la formule d'Itô

Dans cette section nous allons exposer, comme nous l'avons annoncé plus haut, une preuve de la formule d'Itô en temps continu (Proposition 3.2.5) en utilisant uniquement la formule d'Itô en temps discret 1.3.8 et notre procédé d'approximation. Nous l'avons dit dans notre introduction : pour pouvoir parler de formule d'Itô à temps continu, il faut nécessairement composer des opérateurs et se pose alors le problème des domaines. C'est pourquoi, pour pouvoir décrire de manière concise le domaine de validité de la formule d'Itô, on a besoin de supposer que les intégrales considérées sont partout définies. Nous nous autoriserons encore plus de souplesse dans les hypothèses en ne considérant que des intégrales qui vérifient des hypothèses du type S (voir (3.2.7)).

Dans la suite de ce chapitre, toute intégrale

$$H = \int_0^\infty H_s^\varepsilon da_t^\varepsilon$$

vérifiera les hypothèses suivantes :

$$(\mathbf{HS}) \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ l'intégrande } H_t^\varepsilon \text{ est un opérateur borné tel que } t \mapsto \|H_t^\varepsilon\| \text{ est :} \\ \quad \bullet \text{ de carré intégrable si } \varepsilon = + \text{ ou } -, \\ \quad \bullet \text{ intégrable si } \varepsilon = \times, \\ \quad \bullet \text{ essentiellement borné si } \varepsilon = \circ \\ 2. H \text{ est un opérateur borné sur } \Phi. \end{array} \right.$$

Remarquons tout d'abord qu'avec de telles hypothèses la représentation en intégrale stochastique sur $\mathbb{T}\Phi$ associée à H est définie sur tout $\mathbb{T}\Phi$: ceci est prouvé par le Lemme 3.1 de [Pt2] et la discussion qui le précède.

Lemme 4.3.1 (Lemme 3.1 de [Pt2]) *Si une intégrale $\int_0^\infty H_s^\pm da_s^\pm$ satisfait aux hypothèses **(HS)**, alors la représentation intégrale associée à $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ par la Proposition 4.2.3 a pour domaine restreint $\mathbb{T}\Phi$ tout entier.*

On prouvera, sous ces hypothèses et en n'utilisant que notre procédé d'approximation, la formule d'Itô :

Théorème 4.3.2 (Formule d'Itô sur \mathcal{S}) *Soient*

$$H = \int_0^\infty H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon \text{ et } K = \int_0^\infty K_s^\eta da_s^\eta$$

*deux intégrales satisfaisant aux hypothèses **(HS)** ; alors on a*

$$HK = \int_0^\infty H_s K_s^\eta da_s^\eta + \int_0^\infty H_s^\varepsilon K_s da_s^\varepsilon + \int_0^\infty H_s^\varepsilon K_s^\eta da_s^{\varepsilon,\eta}$$

sur tout Φ , où $a^{\varepsilon,\eta}$ est donné par la table d'Itô continue (3.2.9).

Etablissons d'abord nos notations ; cela nous permettra d'exposer le plan de la preuve, dont les détails sont assez techniques.

Notations

On considèrera deux intégrales

$$H = \int_0^\infty H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon \text{ et } K = \int_0^\infty K_s^\eta da_s^\eta$$

qui vérifient les hypothèses **(HS)** ; ε et η peuvent prendre les valeurs $+, -, \circ$ ou \times .

Les projections $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$, $\mathbb{E}_S K \mathbb{E}_S$ seront notées h , k respectivement. Dans le cas où ε ou η est différent de \times , les processus $(h_i^\varepsilon)_{i \geq 0}$, $(k_i^\eta)_{i \geq 0}$ et éventuellement $(h_i^\circ)_{i \geq 0}$, $(k_i^\circ)_{i \geq 0}$ sont donnés par la Proposition 4.2.3 ; le cas des projections d'intégrales par

rapport à a^\times est discuté ci-dessous. Si par exemple $\varepsilon = +$ ou $-$ alors on a vu que h s'écrit

$$h = \sum_i h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon + \sum_i h_i^\circ a_i^\circ;$$

on notera alors \tilde{h}° l'intégrale $\sum_i h_i^\circ a_i^\circ$ qui est ce que nous appellerons l'intégrale "parasite". Comme précédemment, on notera, dans l'exemple ci-dessus, h_j l'intégrale

$$h_j = \sum_{i < j} h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon + \sum_{i < j} h_i^\circ a_i^\circ;$$

et \tilde{h}_j° l'intégrale

$$\tilde{h}_j^\circ = \sum_{i < j} h_i^\circ a_i^\circ.$$

Le premier problème apparaît lorsque l'on veut projeter des intégrales à temps continu par rapport à a^\times . Considérons en effet une intégrale $H = \int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$ satisfaisant à **(HS)**, c'est-à-dire que les opérateurs H_s^\times sont bornés, que la fonction $s \mapsto \|H_s^\times\|$ est intégrable et que H est borné. Si l'on projette H sur l'espace de Fock à temps discret et considère directement la représentation intégrale de $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$, on obtient

$$\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S = \sum_{i \geq 0} h_i^+ a_i^+ + \sum_{i \geq 0} h_i^- a_i^- + \sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ$$

mais chaque $h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon$ ne pourra être relié qu'à la représentation (unique) de H sous la forme

$$H = \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ.$$

De même, si l'on considère la représentation du processus $(\mathbb{E}_S \int_0^{t_i} H_s^\times da_s^\times \mathbb{E}_S)_{i \geq 0}$, on obtient un processus d'intégrales dont les coefficients se relient encore à la représentation de H sous forme d'intégrales par rapport aux trois bruits $+$, $-$, \circ . Le problème est, au fond, qu'une écriture $H = \int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$ est une écriture qui contient bien peu d'informations ; nos formules donnent alors de $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ une représentation plus précise (puisqu'unique), mais on ne peut alors pas relier cette représentation à l'écriture $\int H_s^\times da_s^\times$ d'origine. D'autres représentations semblent donc plus naturelles : on peut, de manière très générale, représenter une intégrale $\int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$ comme

$$\sum_i h_i'^\times a_i^\times$$

avec

$$h_i'^\times = \mathbb{E}_S \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^\times ds \mathbb{E}_S,$$

qui est bien prévisible, et l'intégrale restreinte $\sum_i h_i^{\times} a_i^{\times}$ est alors bien définie sur $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}(\text{Dom } h)$ (Proposition 2.4 de [Pt2]). Il apparaît cependant un nouveau problème : si l'on compare l'expression de h_i^{\times} aux expressions des h_i^{ε} , $\varepsilon = +, -, \circ$ on voit immédiatement que, dès que l'on va manipuler plusieurs intégrales à la fois, il va falloir comparer des intégrales

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^{\times} ds$$

à des intégrales

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^{\times} ds.$$

La première étape sous nos hypothèses **(HS)** est donc d'obtenir une représentation plus maniable pour une intégrale $\int_0^{\infty} H_s^{\times} da_s^{\times}$.

Lemme 4.3.3 (Lemme 3.6 de [Pt2]) *Soit $H = \int_0^{\infty} H_s^{\times} da_s^{\times}$ une intégrale satisfaisant aux hypothèses **(HS)**; alors H est la limite forte, lorsque le pas $|\mathcal{S}|$ de la partition \mathcal{S} , de*

$$\sum_i h_i^{\times} a_i^{\times}$$

où

$$h_i = \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_s^{\times} ds \mathbb{E}_{\mathcal{S}}.$$

Dans la suite de la preuve, nous n'établirons que des convergences faibles; de plus, nous ne composerons une projection $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_0^{\infty} H_s^{\circ} ds \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ qu'avec des opérateurs qui seront uniformément bornés. Nous pouvons dès lors remplacer toute approximation $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_0^{\infty} H_s^{\times} ds \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ (qui converge aussi fortement vers $\int_0^{\infty} H_s^{\times} ds$) par la somme $\sum_i h_i^{\times} a_i^{\times}$.

A partir d'ici, la démonstration se décompose ainsi : tout d'abord on montre que les intégrales parasites par rapport à a° que l'on obtient en projetant des intégrales par rapport à da^+ ou da^- tendent vers zéro ainsi que les termes que ces parasites engendrent lorsque l'on compose plusieurs projections entre elles. Ensuite on prouve que la composition des intégrales projetées (dont on a ôté les termes parasites) peut être calculée avec la table d'Itô à temps *continu* avec une erreur qui tend vers zéro. Enfin, on prouve que les intégrales discrètes que l'on obtient après cette composition convergent vers les intégrales à temps continu désirées. Remarquons que l'on utilisera souvent des arguments de passage à l'adjoint pour regrouper plusieurs cas; il est important pour cela de se rappeler que, si H satisfait aux conditions **(HS)**, alors H^* aussi et que

$$H^* = \int_0^{\infty} (H_s^{\varepsilon})^* da_s^{\varepsilon'}$$

est valable sur Φ , où $+ ' = -$, $- ' = +$, $o ' = o$. On a le même type de relations pour les intégrales discrètes d'après les formules (2.2.5)

La première étape est contenue dans la proposition suivante, qui renforce dans notre cadre la Proposition 4.2.4 :

Proposition 4.3.4 (Proposition 3.8 de [Pt2]) *Soient $\varepsilon, \eta \in \{+, -, o, \times\}$ et soient H, K deux intégrales stochastiques satisfaisant aux hypothèses **(HS)**. Alors pour tous $u, v \in L^2(\mathbb{R}_+)$,*

$$\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E} v \rangle - \langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon \sum_i k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle$$

tend vers zéro avec le pas $|\mathcal{S}|$ de la subdivision.

La preuve de cette proposition se ramène à la preuve de deux convergences : on peut en effet remarquer que la composition $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ de deux projections est de la forme

$$((h - \tilde{h}^\circ) + \tilde{h}^\circ)((k - \tilde{k}^\circ) + \tilde{k}^\circ)$$

si ε et η sont tous deux égaux à $+$ ou $-$,

$$((h - \tilde{h}^\circ) + \tilde{h}^\circ) k$$

si par exemple ε est seul égal à $+$ ou $-$ (les cas symétriques se traitent par passage à l'adjoint) ; on a par ailleurs $h - \tilde{h}^\circ = \sum_i h_i^\varepsilon a_i^\varepsilon$. Il n'y a par ailleurs rien à prouver si ni ε ni η n'est égal à $+$ ou $-$; en utilisant la symétrie et les passages à l'adjoint on est ramené à montrer que

- $\tilde{h}^\circ k$ tend vers zéro pour $\varepsilon = -$ ou $+$ et η quelconque,
- $\tilde{h}^\circ \tilde{k}^\circ$ tend vers zéro si ε, η sont tous deux égaux à $+$ ou $-$.

Le second point est prouvé directement par des estimations ; pour prouver le premier, on se ramène à montrer la convergence faible de \tilde{h}° en remarquant qu'on peut approcher $k \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(u)$ par la projection d'une combinaison linéaire de vecteurs exponentiels de Φ choisie indépendamment de \mathcal{S} .

La deuxième étape de notre preuve du Théorème 4.3.2 consiste à montrer que les différences entre les deux tables d'Itô disparaissent à la limite :

Proposition 4.3.5 (Proposition 3.9 de [Pt2]) *Soient $\varepsilon, \eta \in \{+, -, o, \times\}$ et soient H, K deux intégrales stochastiques satisfaisant aux hypothèses **(HS)**. Alors pour tout $u, v \in L^2(\mathbb{R}_+)$, la quantité*

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E} v \right\rangle - \\ & \left\langle e(\tilde{u}), \left(\sum_i h_i^\varepsilon \left(\sum_{j < i} k_j^\eta a_j^\eta \right) a_i^\varepsilon + \sum_i \left(\sum_{j < i} h_j^\varepsilon a_j^\varepsilon \right) k_i^\eta a_i^\eta + \sum_i h_i^\varepsilon k_i^\eta a_i^{\varepsilon, \eta} \right) e(\tilde{v}) \right\rangle \end{aligned}$$

tend vers zéro avec le pas $|\mathcal{S}|$ de la subdivision, où ε, η est donné par la table d'Itô continue.

Pour obtenir cette proposition, on a à montrer que

$$\text{pour } (\varepsilon, \eta) = (+, -), \text{ on a } \sum_i h_i^+ k_i^- a_i^\circ \xrightarrow{|\mathcal{S}| \rightarrow 0} 0 \quad (4.3.1)$$

et

$$\text{pour } (\varepsilon, \eta) = (-, +), \text{ on a } \sum_i h_i^- k_i^+ a_i^\circ \xrightarrow{|\mathcal{S}| \rightarrow 0} 0. \quad (4.3.2)$$

et que le terme d'Itô converge vers zéro lorsque ε ou η est \times ; toutes ces preuves se font par des estimations directes.

Une fois ces deux propositions prouvées, il suffit, pour obtenir

$$\int H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon \int K_s^\eta da_s^\eta = \int H_s^\varepsilon K_s da_s^\varepsilon + \int H_s K_s^\eta da_s^\eta + \int H_s^\varepsilon K_s^\eta da_s^{\varepsilon, \eta},$$

de montrer que

$$\begin{aligned} \langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^\varepsilon k_i a_i^\varepsilon e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int H_s^\varepsilon K_s da_s^\varepsilon \mathcal{E}(v) \rangle \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int H_s K_s^\eta da_s^\eta \mathcal{E}(v) \rangle \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^\varepsilon k_i^\eta a_i^{\varepsilon, \eta} e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int H_s^\varepsilon K_s^\eta da_s^{\varepsilon, \eta} \mathcal{E}(v) \rangle. \end{aligned}$$

On peut facilement voir par ailleurs que les propositions précédentes s'appliquent aux intégrales $\int H_s^\varepsilon K_s da_s^\varepsilon$, $\int H_s K_s^\eta da_s^\eta$, $\int H_s^\varepsilon K_s^\eta da_s^{\varepsilon, \eta}$; on a donc

$$\begin{aligned} \langle e(\tilde{u}), \sum_i (H^\varepsilon K)_i^\varepsilon a_i^\varepsilon e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int H_s^\varepsilon K_s da_s^\varepsilon \mathcal{E}(v) \rangle \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i (HK^\eta)_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int H_s K_s^\eta da_s^\eta \mathcal{E}(v) \rangle \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i (H^\varepsilon K^\eta)_i^{\varepsilon, \eta} a_i^{\varepsilon, \eta} e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int H_s^\varepsilon K_s^\eta da_s^{\varepsilon, \eta} \mathcal{E}(v) \rangle \end{aligned}$$

où $(HK^\eta)_i^\eta$, $(H^\varepsilon K)_i^\varepsilon$ sont les coefficients associés par la Proposition 4.2.3 (ou par le

Lemme 4.3.3) à l'intégrale $\int H_s K_s^\eta da_s^\eta$, etc. Il suffit donc de prouver que

$$\begin{aligned} \langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i^\varepsilon k_i - (H^\varepsilon K)_i^\varepsilon) a_i^\varepsilon e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow 0 \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i k_i^\eta - (HK^\eta)_i^\eta) a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow 0 \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i^\varepsilon k_i^\eta - (H^\varepsilon K^\eta)_i^{\varepsilon,\eta}) a_i^{\varepsilon,\eta} e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Les deux premières convergences sont adjointes l'une de l'autre. On a donc à prouver deux types de convergence uniquement; cette dernière étape représente cependant le gros de la démonstration du Théorème 4.3.2 dans [Pt2].

4.3.2 Conséquences pour les probabilités classiques

La formule d'Itô classique pour les intégrales stochastiques quantiques par rapport à une martingale normale $(M_t)_{t \geq 0}$ peut être déduite de la formule d'Itô quantique au travers de la représentation intégrale de l'opérateur de multiplication associé (voir [At5]). Ce que nous avons montré prouve que, si l'on sait que le crochet droit d'une martingale $(M_t)_{t \geq 0}$ vaut $[M]_t = t$, alors le crochet oblique de cette martingale se déduit de la représentation en intégrale stochastique de l'opérateur de multiplication associé et des relations de commutation des matrices de Pauli. Il n'y a là rien de bien surprenant, puisque la représentation intégrale de l'opérateur de multiplication se déduit elle-même de la formule d'Itô, donc de la forme de l'équation de structure vérifiée par la martingale. Nous croyons cependant que les exemples de calculs explicites dans des cas classiques peuvent éclairer ce que nous avons démontré dans ce chapitre.

D'après (3.2.4), le mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ peut être identifié au processus $(a_t^+ + a_t^-)_{t \geq 0}$. Si l'on considère une partition \mathcal{S} de pas constant δ , alors l'approximation de l'opérateur de multiplication par W_t est $\sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{\delta}(a_i^+ + a_i^-)$ plus des termes dont on a montré qu'ils tendent vers zéro avec δ . Par ailleurs, $a_i^+ + a_i^-$ est σ_x et donc

$$\left(\sqrt{\delta}(a_i^+ + a_i^-) \right)^2 = \delta \sigma_x^2 = \delta I.$$

L'opérateur δI est l'approximation du processus déterministe $(t)_{t \geq 0}$. Cela implique que $d[W]_t = dt$.

Un autre exemple intéressant est le processus de Poisson compensé $(X_t)_{t \geq 0} = (N_t - t)_{t \geq 0}$. Le processus de multiplication associé est $(a_t^+ + a_t^- + a_t^0)_{t \geq 0}$. Pour une partition \mathcal{S} régulière de pas δ , l'opérateur $a_t^+ + a_t^- + a_t^0$ est approché par $\sum_{i|t_i \leq t} (\sqrt{\delta} a_i^+ + \sqrt{\delta} a_i^- + a_i^0)$ plus des termes qui disparaissent lorsque l'on passe

à la limite. Puisque $\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times = \sqrt{\delta}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}I$, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times\right)^2 &= \delta\sigma_x^2 + \frac{1}{4}\sigma_z^2 + \frac{1}{4}I \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}(\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \sqrt{\delta}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_z \\ &= \left(\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times\right) + \delta I \end{aligned}$$

car $\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x = 0$ et $\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = I$. Cela implique, comme nous l'avons montré, que $d[X]_t = X_t + t$.

Chapitre 5

Application à la représentation des opérateurs

Dans ce chapitre, nous cherchons à exploiter les résultats de représentabilité que nous avons obtenus dans le cas à temps discret.

Dans la section 5.1, nous présentons une approche générale utilisant ces résultats ; nous montrons que cette approche, si elle ne permet de prouver aucun critère nouveau, reste crédible comme outil d'étude de problèmes précis et qu'en particulier les expressions que fournissent nos formules à temps discret sont de bonnes informations *a priori*.

Dans la section 5.2 nous étudions ces informations dans un cas explicite, celui des opérateurs de seconde quantification et de seconde quantification différentielle. Nous adoptons dans cette section une approche naïve et améliorons pas à pas les résultats obtenus, plutôt que de les annoncer d'emblée comme dans [Pt3].

Enfin, dans la section 5.3, nous donnons plusieurs améliorations et variations des critères exposés dans la section précédente.

Les résultats de la section 5.2 et d'une partie de la section 5.3 ont fait l'objet de l'article [Pt3].

5.1 Démarche générale

Dans le chapitre 2, nous avons obtenu des critères et formules explicites pour les coefficients apparaissant dans la représentation intégrale d'un opérateur H sur Φ . On aimerait évidemment pouvoir utiliser ces expressions pour obtenir des informations sur les représentations intégrales dans le cas du temps continu. On ne peut évidemment pas retranscrire les formules (2.2.5) : en prenant garde aux normalisa-

tions on s'aperçoit que l'on devrait avoir

$$\begin{cases} H_t^+ P_t = & D_t H P_t \\ H_t^- P_t = & P_t H \frac{da_t^+}{dt} P_t \\ H_t^\circ P_t = & D_t H da_t^+ P_t - P_t H P_t \end{cases} \quad (5.1.1)$$

ce qui n'a aucun sens précis (notons cependant que de telles formules sont implicites dans d'autres approches du calcul stochastique quantique comme l'approche "non standard" de Leitz-Martini [LeM] où la dérivation est une différence, ou dans des approches "bruit blanc").

Cependant nos formules 2.2.5 peuvent mener à des preuves rigoureuses dans certains cas, par l'intermédiaire des approximations d'opérateurs de Φ . Ces cas sont hélas trop particuliers pour que nous soyons arrivés à des résultats nouveaux; nous allons cependant présenter rapidement une telle preuve, d'une part pour montrer que cet outil qu'est l'approximation reste prometteur et d'autre part pour justifier le fait que nous ayons étudié dans des cas explicites les formules *a priori* fournies par (5.1.1).

Considérons une subdivision \mathcal{S} comme dans le chapitre 4. Associons alors à tout α de \mathcal{P} un élément A de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ par

$$\text{si } \alpha \in [t_{i_1}, t_{i_1+1}] \times \dots \times [t_{i_n}, t_{i_n+1}] \text{ alors } A = \{i_1, \dots, i_n\}$$

et une quantité

$$\delta_A = (t_{i_1+1} - t_{i_1}) \dots (t_{i_n+1} - t_{i_n}).$$

On montre alors facilement à partir de la formule exprimant un opérateur d_i en fonction des D_t (voir le Lemme 4.2.1) que pour tout f , pour presque tout α ,

$$\frac{d_A}{\sqrt{\delta_A}} \text{ converge dans } L^2(\mathcal{P}) \text{ vers } D_\alpha f; \quad (5.1.2)$$

cela va nous permettre d'établir des convergences ponctuelles.

Considérons donc un opérateur H sur Φ et supposons d'abord que sa projection $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ est telle que l'on puisse lui appliquer notre théorème de représentabilité 2.2.1. Supposons de plus que les coefficients h_i^ε apparaissant dans la représentation sont tels que, pour presque tout t ,

$$\frac{1}{\sqrt{t_{i(t)+1} - t_{i(t)}}} h_{i(t)}^\pm \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} H_t^\pm$$

$$h_{i(t)}^\circ \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} H_t^\circ$$

où les convergences sont fortes et où $i(t)$ est défini comme l'unique indice $i \in \mathbb{N}$ vérifiant $t_i \leq t < t_{i+1}$, cela avec des estimations uniformes raisonnables.

Dans le chapitre 1, nous avons fait le lien entre notre définition des intégrales stochastiques quantiques à temps discret et une transcription simple des définitions au sens de Attal et Lindsay. Cela implique en particulier que nos intégrales vérifient des équations du type Attal-Lindsay (voir la Proposition 3.2.3 pour ces formules en temps continu); on a donc

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f(A) = \sum_{i \in A} h_i^+ p_i d_{A_{[i+1]}} f(A_i) + \sum_i h_i^- d_i d_{A_{[i]}} f(A_i) + \sum_{i \in A} h_i^{\circ} d_i d_{A_{[i+1]}} f(A_i).$$

En divisant les deux membres par δ_A et en passant à la limite, on tire d'après la remarque (5.1.2) une expression Attal-Lindsay à temps continu

$$H f(\alpha) = \sum_{s \in \sigma} H_s^+ P_s D_{\alpha(s)} f(\alpha_s) + \int_0^{\infty} H_s^- D_s D_{\alpha(s)} f(\sigma_s) + \sum_{s \in \alpha} H_s^{\circ} D_s D_{\alpha(s)} f(\alpha_s)$$

qui montre que, si les conditions d'intégrabilité nécessaires sont vérifiées, on a bien obtenu une représentation intégrale de H .

Une telle démonstration peut être faite en toute rigueur dans le cas des martingales régulières telles que les ont définies Parthasarathy et Sinha dans [P-S]. On peut ainsi obtenir une preuve de leur caractérisation par l'intermédiaire de notre procédé d'approximation; nous ne décrivons cependant pas cette démonstration puisque les difficultés et méthodes pour les résoudre sont en fin de compte les mêmes qu'en temps continu. En effet, d'après notre discussion ci-dessus, il nous suffit de construire des processus $(H_t^{\varepsilon})_{t \geq 0}$ qui soient des limites de $h_i^{\pm} / \sqrt{t_{i+1} - t_i}$ ou h_i° comme ci-dessus. On s'aperçoit cependant bien vite que, s'il est facile, pour tout f de Φ , de construire $H_t f$ de manière convenable pour *presque tout* t , il est plus problématique de le construire pour *tout* t et on en arrive ainsi à reproduire le point crucial de la preuve de Meyer (voir [Me3]) du résultat de Parthasarathy et Sinha.

L'approche que nous proposons pour étudier la représentabilité d'un opérateur consiste donc à essayer de donner un sens aux formules (5.1.1) puisque cela revient à étudier, les $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ en moins, la limite des expressions obtenues par (2.2.5), puis, les conditions permettant de définir des intégrales des processus d'opérateurs obtenus étant supposées, vérifier que l'on obtient une représentation intégrale de l'opérateur étudié.

Nous devons faire une remarque supplémentaire à propos de la convergence des $d_A / \sqrt{t_{A+1} - t_A}$ vers D_{α} décrite ci-dessus : une des raisons qui donnent les formules (2.2.5) est que dans $T\Phi$ on a $d_i p_i = 0$ pour tout i . Dans Φ en revanche, avec la définition usuelle de D_t donnée dans le chapitre 3, $D_t P_t$ est indéterminé.

Ceci nous incite à modifier, dans notre tentative de donner un sens à (5.1.1), notre définition de D_t . Nous choisissons de considérer la définition suivante de D_t :

pour tout f dans Φ , presque tout σ dans \mathcal{P} ,

$$D_t f(\sigma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} f(\sigma \cup \{s\}) ds.$$

Ceci ne diminue en rien le domaine de définition de D_t (pour tout f , $D_t f$ est défini pour presque tout t , de même que pour la définition usuelle) ni les formules de représentation prévisible et d'isométrie associées, de sorte que rien de ce que nous avons établi jusqu'ici ne doit être modifié ; en revanche cette nouvelle définition lève l'indétermination de $D_t P_t$: pour tout f , presque tout t , on a $D_t P_t f = 0$.

5.2 Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification

5.2.1 Opérateurs de seconde quantification

Les stratégies d'approche des questions de représentabilité que nous avons présentées dans la section précédente ont le défaut d'exiger que l'on puisse obtenir des expressions *a priori* à partir de (5.1.1). Cela n'est pas facile cependant ; il existe une classe d'opérateurs d'importance fondamentale en physique et qui a le mérite d'être très maniable. En particulier, l'expression de ces opérateurs sur les différents termes d'une décomposition tensorielle s'exprime très bien, ce qui va faciliter le calcul de H_t^- qui est en général le plus problématique.

A tout opérateur borné h sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ on associe deux opérateurs $\Gamma(h)$ et $\lambda(h)$; ces opérateurs sont définis sur l'espace \mathcal{F} par

$$\Gamma(h)(u_1 \circ \dots \circ u_n) = hu_1 \circ \dots \circ hu_n, \quad (5.2.1)$$

$$\lambda(h)(u_1 \circ \dots \circ u_n) = hu_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n + \dots + u_1 \circ \dots \circ u_{n-1} \circ hu_n \quad (5.2.2)$$

pour tout n , tous u_1, \dots, u_n dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.

On étend ces opérateurs par linéarité et fermeture ; on peut voir à partir des expressions ci-dessus que $\Gamma(h)$ et $\lambda(h)$ vérifient respectivement $\Gamma(h)^* = \Gamma(h^*)$ et $\lambda(h)^* = \lambda(h^*)$ sur \mathcal{F} et sont donc fermables.

Ces opérateurs ont une action particulièrement simple sur la famille des vecteurs exponentiels :

$$\begin{aligned} \Gamma(h)\mathcal{E}(u) &= \mathcal{E}(hu) \\ \lambda(h)\mathcal{E}(u) &= a_{hu}^+ \mathcal{E}(u). \end{aligned}$$

et c'est ce qui justifie ici notre intérêt pour eux. Ils sont par ailleurs fondamentaux en physique quantique. Les opérateurs de seconde quantification, parce qu'ils permettent de transporter un opérateur de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sur l'espace de Fock associé ; les

opérateurs de seconde quantification différentielle $\lambda(h)$, parce qu'ils sont reliés aux précédents de la manière suivante : pour tout h borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$, tout t de \mathbb{R} , on a

$$\Gamma(e^{ith}) = e^{it\lambda(h)}.$$

Dans le cas où h est autoadjoint, cela signifie que $\lambda(h)$ est le générateur du semigroupe unitaire obtenu par seconde quantification du semigroupe unitaire sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ engendré par h .

Nous n'avons défini ici que les secondes quantifications d'opérateurs bornés, qui nous intéresseront en général ; nous parlerons plus loin de secondes quantifications d'opérateurs non bornés de $L^2(\mathbb{R}_+)$, la définition se déduisant facilement de (5.2.1) et (5.2.2). Nous avons évoqué, dans la section 3, le contre exemple de Journé et Meyer à la représentabilité en intégrale stochastique ; ce contre-exemple concerne un opérateur de seconde quantification et c'est pourquoi nous le présentons maintenant. On considère l'opérateur de seconde quantification $\Gamma(h)$, où h est la transformation de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ (plus précisément, l'application qui à un élément f de $L^2(\mathbb{R}_+)$ associe la restriction à \mathbb{R}_+ de la transformée de Hilbert de l'extension canonique de f à \mathbb{R}). Puisque la transformation de Hilbert est un opérateur unitaire, l'opérateur h est une contraction de $L^2(\mathbb{R}_+)$ et l'opérateur $\Gamma(h)$ associé est borné. On peut montrer cependant que $\Gamma(h)$ n'est pas représentable en intégrales stochastiques quantiques sur tout \mathcal{E} – ni même sur le sous-ensemble $\mathcal{E}(L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+))$. En effet, Journé et Meyer montrent que, si, pour un élément u de $L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$, le vecteur exponentiel $\mathcal{E}(u)$ est dans le domaine d'un opérateur H qui s'écrit comme une intégrale, alors $t \mapsto P_t H \mathcal{E}(u_t)$ a une variation quadratique finie. Journé et Meyer exhibent ensuite un vecteur u de $L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ pour lequel $t \mapsto P_t H \mathcal{E}(u_t)$ n'a pas cette propriété : la seconde quantification de la transformation de Hilbert n'est donc pas représentable en intégrale stochastique quantique. Nous reviendrons sur ce phénomène dans la section 5.2.3

Nous allons examiner formellement la forme que prennent les expressions (5.1.1) ; nous montrerons ensuite que cette heuristique permet d'identifier exactement les critères qui déterminent la représentabilité d'un tel opérateur. Ces critères ont le bon goût de se traduire ensuite de manière particulièrement lisible, ce qui nous permet d'obtenir une caractérisation simple des opérateurs de seconde quantification qui sont représentables en intégrales stochastiques quantiques. Nous verrons enfin que notre preuve se transcrit très exactement au cas des opérateurs de seconde quantification différentielle ; la représentabilité de $\lambda(h)$ et celle de $\Gamma(h)$ sont donc équivalentes et nous pourrions exprimer les critères dont elles dépendent.

Il est à remarquer que, dans cette section, on va travailler en permanence avec des opérateurs de seconde quantification et donc établir des liens entre les propriétés d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ et celles d'opérateurs sur $L^2(\mathcal{P})$ qui leur sont associés. Nous utiliserons des lettres majuscules pour les opérateurs et grandeurs associés à

$L^2(\mathcal{P})$ et des minuscules pour ceux qui sont associés à $L^2(\mathbb{R}_+)$. Dans le reste de cette thèse, les minuscules sont associées aux objets des espaces de Fock discrets par opposition à ceux des espaces de Fock à temps continu. Il ne sera pas question dans ce chapitre d'espaces de Fock à temps discret et cette convention adoptée le temps d'un chapitre ne devrait pas être source de confusion.

Considérons un opérateur de seconde quantification $H = \Gamma(h)$ pour h borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Nous allons essayer d'appliquer les formules (5.1.1) à H sur le domaine exponentiel, domaine sur lequel on a une bonne écriture à la fois de l'action des intégrales et de l'action des opérateurs de seconde quantification. On doit avoir, pour presque tout σ de \mathcal{P} ,

$$\begin{aligned} H_t^+ \mathcal{E}(u_t)(\sigma) &= D_t \Gamma(h) \mathcal{E}(u_t)(\sigma) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \mathcal{E}(hu_t)(\sigma + s) ds \mathbb{1}_{\sigma < t} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} hu_t(s) ds P_t \mathcal{E}(hu_t)(\sigma) \\ &= \langle h^* \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]} / \varepsilon, u_t \rangle \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u)(\sigma), \end{aligned}$$

où le fait d'écrire cette grandeur sous la forme donnée dans la dernière ligne sera justifié *a posteriori* par la forme que prend H_t^- . Remarquons que le point de vue sur D_t suggéré par l'approche discrète nous a été utile ici : nous aurions dû autrement considérer $(hu_t)(t)$, qui n'est pas une grandeur définie.

Pour H_t^- on doit avoir

$$\begin{aligned} H_t^- \mathcal{E}(u_t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_t \Gamma(h) \frac{a_{[t, t+\varepsilon]}^+}{\varepsilon} \mathcal{E}(u_t) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P_t \Gamma(h) (\mathcal{E}(u_t) \circ \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_t (\mathcal{E}(hu_t) \circ \frac{h \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]}}{\varepsilon}) \\ &= \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u) \circ (\pi_t h \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]} / \varepsilon). \end{aligned}$$

où pour tout t , π_t représente l'opérateur de multiplication par l'indicatrice de $\mathbb{1}_{[0, t]}$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Si l'on suppose que ces termes ont un sens on doit supposer que les limites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi_t (h \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]} / \varepsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi_t (h^* \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]} / \varepsilon)$$

ont un sens. En particulier, la convergence pour h doit avoir lieu dans $L^2(\mathbb{R}_+)$; pour h^* une convergence faible semble suffire. Dans la suite, nous allons symétriser nos hypothèses en h et h^* pour avoir une vraie convergence en norme.

Examinons alors le cas de $H_t^\circ \mathcal{E}(u)$. Pour tout σ , $H_t^\circ \mathcal{E}(u)(\sigma)$ doit être égal à

$$\begin{aligned} H_t^\circ \mathcal{E}(u_t)(\sigma) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\varepsilon} \Gamma(h) \frac{a_{[t,t+\varepsilon]}^+}{\varepsilon} \mathcal{E}(u_t)(\sigma + s) ds - P_t \Gamma(h) \mathcal{E}(u_t)(\sigma) \\ &= \mathbf{1}_{\sigma < t} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\varepsilon} \Gamma(h) \left(\mathcal{E}(u_t) \circ \frac{\mathbb{1}_{[t,t+\varepsilon]}}{\varepsilon} \right) (\sigma + s) ds - \mathcal{E}(hu_t)(\sigma) \\ &= \mathbf{1}_{\sigma < t} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\varepsilon} \left(\mathcal{E}(hu_t) \circ \frac{h \mathbb{1}_{[t,t+\varepsilon]}}{\varepsilon} \right) (\sigma + s) ds - \mathcal{E}(hu_t)(\sigma) \\ &= \mathbf{1}_{\sigma < t} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\varepsilon} (hu_t)(\sigma) \frac{h \mathbb{1}_{[t,t+\varepsilon]}}{\varepsilon}(s) ds - \mathcal{E}(hu_t)(\sigma) \end{aligned}$$

car les autres termes que l'on obtient en développant $(\mathcal{E}(hu_t) \circ (h \mathbb{1}_{[t,t+\varepsilon]}/\varepsilon))(\sigma + s)$ sont en nombre fini et de la forme

$$\mathcal{E}(hu_t)(\sigma \setminus \{a\}) \int_t^{t+\varepsilon} hu_t(s) ds (h \mathbb{1}_{[t,t+\varepsilon]}/\varepsilon)(a)$$

pour a dans σ ; le dernier terme $(h \mathbb{1}_{[t,t+\varepsilon]}/\varepsilon)(a)$ est convergent pour presque tout a d'après nos hypothèses donc l'expression ci-dessus doit tendre vers zéro. L'expression de $H_t^\circ \mathcal{E}(u_t)(\sigma)$ doit donc être de la forme

$$(h \mathbb{1}_{[t,t+\varepsilon]}/\varepsilon)(\sigma) = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \mathbb{1}_{[t,t+\varepsilon]}, h \mathbb{1}_{[t,t+\varepsilon]} \rangle - 1 \right) \mathcal{E}(hu_t)(\sigma).$$

Nous n'avons pas ici discuté les conditions qui sont nécessaires pour pouvoir définir les intégrales des processus que nous avons définis; nous pourrions continuer l'examen de ces conditions pour préciser les propriétés des limites qui apparaissent dans les expressions ci-dessus et trouverions exactement les autres conditions que nous énonçons dans notre Proposition 5.2.1 ci-dessous.

Nous sommes partis de l'hypothèse que, si les convergences qui apparaissent dans les calculs ci-dessus ont bien lieu et déterminent des opérateurs H_t^+ , H_t^- , H_t° qui ont les propriétés d'intégrabilité nécessaires pour considérer l'intégrale stochastique quantique associée à ces intégrandes, alors cette intégrale doit représenter l'opérateur $\Gamma(h)$.

Dans l'article [Pt3], nous avons montré de manière rigoureuse que la représentabilité des opérateurs $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ est déterminée par les critères que nous obtenons ainsi; nous allons détailler les résultats contenus dans cet article. Notons que, dans ce chapitre, nous notons toujours $\pi_t u$ et pas u_t la restriction d'une fonction u de $L^2(\mathbb{R}_+)$ à l'intervalle $[0, t]$, cela afin d'éviter la confusion lorsque apparaissent des familles $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $(\beta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ où chaque α_t , β_t est une fonction de $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Avant d'énoncé la proposition suivante, rappelons que le sens que nous donnons à une intégrale stochastique quantique suit la définition Attal-Meyer (voir la Définition 3.2.2) et que nous ne nous intéressons qu'aux représentations intégrales dans lesquelles les opérateurs H_t^ε sont fermables pour presque tout t et tout ε .

Proposition 5.2.1 (Proposition 2.2 de [Pt3]) *Si $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ coïncident sur \mathcal{E} avec une intégrale stochastique quantique, alors h vérifie les conditions **(C)** :*

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour presque tout } t, \\ \bullet \pi_t h \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]} / \varepsilon \text{ converge dans } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ vers une fonction } \alpha_t \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \bullet \pi_t h^* \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]} / \varepsilon \text{ converge dans } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ vers une fonction } \beta_t \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \bullet \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} h \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]}(s) ds \text{ converge vers un scalaire } \gamma(t) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \text{les limites ont les propriétés suivantes :} \\ \bullet \text{ les fonctions } t \mapsto \|\alpha_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}, t \mapsto \|\beta_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \text{ sont de carré intégrable,} \\ \bullet \text{ la fonction } t \mapsto \gamma(t) \text{ est essentiellement bornée.} \end{array} \right.$$

Démonstration.

Détaillons la structure de cette démonstration : en testant la représentation intégrale sur des vecteurs exponentiels on obtient la convergence suivante, valable pour presque tout t :

$$\pi_t h \pi_{[t, t+\varepsilon]} u / \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(t) P^1 H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+). \quad (5.2.3)$$

où P^1 représente la projection sur le premier chaos.

Considérer le cas particulier où u est une indicatrice d'intervalle compact mène à

$$\pi_t h \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]} / \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P^1 H_t^- \mathcal{E}(\mathbb{1}_t) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+), \quad (5.2.4)$$

et en notant α_t le terme de droite pour tout t on obtient bien la première condition de **(C)** ; la deuxième est obtenue par symétrie entre h et h^* . En se basant sur ces premiers résultats de convergence nous arrivons à montrer en testant encore la représentation intégrale sur de bons vecteurs exponentiels, que l'on a la troisième condition de convergence. Le fait que la limite $\gamma(t)$ est, comme fonction de t , essentiellement bornée, est obtenu directement par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} h \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]}(s) ds \right| \leq \|h\|.$$

On obtient ainsi tous les points de **(C)** à l'exception des conditions d'intégrabilité portant sur $t \mapsto \|\alpha_t\|$, $t \mapsto \|\beta_t\|$. Ce point est en fait le plus délicat de la preuve de la Proposition 5.2.1. On peut montrer à partir de (5.2.3) que pour u suffisamment régulier (presque partout différentiable suffit), on a pour presque tout t

$$u(t) P^1 H_t^- \mathcal{E}(u_t) = u(t) P^1 H_t^- \mathcal{E}(\mathbb{1}_t). \quad (5.2.5)$$

On peut montrer par ailleurs que, pour un $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ donné, vérifier cette égalité impose en fait la valeur de $u(t)H_t^-\mathcal{E}(u_t)$ non seulement sur le premier, mais sur tous les chaos. En utilisant la fermabilité de H_t^- et l'égalité (5.2.5) pour les u assez réguliers on arrive alors à montrer que l'égalité (5.2.5) est valable en fait pour tout u de $L^2(\mathbb{R}_+)$ (Lemme 2.4 de [Pt3]). Comme nous savons par ailleurs que $t \mapsto |u(t)| \|H_t^-\mathcal{E}(u_t)\|$ est intégrable pour tout u , cette égalité entraîne que pour tout u de $L^2(\mathbb{R}_+)$, l'application

$$t \mapsto |u(t)| \|\alpha_t\|$$

est intégrable et par conséquent $t \mapsto \|\alpha_t\|$ est de carré intégrable ; on procède de même pour β_t .

Ceci termine la preuve de la Proposition 5.2.1. Nous obtenons ainsi un premier ensemble de conditions à la représentabilité de $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ sur \mathcal{E} . Nous cherchons alors à obtenir une caractérisation plus parlante de l'ensemble de conditions (C) :

Lemme 5.2.2 (Lemme 2.6 de [Pt3]) *Soit h un opérateur borné ; les conditions (C) de la Proposition 5.2.1 sont équivalentes à l'existence d'un opérateur de Hilbert-Schmidt k tel que*

$$h = k + \mathcal{M}_\gamma,$$

où \mathcal{M}_γ est l'opérateur de multiplication par γ .

Dans [Pt3], l'opérateur k est noté K .

Il existe donc une fonction κ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{C} telle que pour tout u de $L^2(\mathbb{R}_+)$, presque tout t de \mathbb{R}_+ ,

$$hu(t) = \int_0^\infty \kappa(s, t)u(s) ds + u(s)\gamma(s),$$

et le lien entre cette fonction κ et les fonctions α, β de (C) est le suivant :

$$\begin{cases} \kappa(s, t) = \overline{\beta_t(s)} & \text{si } s < t \text{ et} \\ \kappa(s, t) = \alpha_s(t) & \text{si } s > t. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Nous avons ainsi montré que, si $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ ont une représentation intégrale sur \mathcal{E} , alors h est de la forme donnée dans le Lemme 5.2.2.

Nous montrons alors l'implication inverse, la forme particulière de h nous permettant, à partir des formules fournies par notre approche heuristique, de définir les intégrandes suivantes :

$$\begin{cases} H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u) = \int_0^t \kappa(s, t)u(s) ds \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u) \\ H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u) \circ \int_0^t \kappa(t, s) d\chi_s \\ H_t^\circ \mathcal{E}(\pi_t u) = (\gamma(t) - 1) \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u), \end{cases} \quad (5.2.7)$$

ces opérateurs étant ensuite étendus par adaptation.

Nous montrons alors que sous ces hypothèses, les intégrandes définies sont bien des opérateurs fermables, que les intégrales stochastiques associées sont bien définies sur \mathcal{E} et qu'elles coïncident avec $\Gamma(h)$. Puisque h^* est de la même forme que h on construit de même une intégrale égale sur \mathcal{E} à $\Gamma(h^*)$.

Les formules (5.2.7) ci-dessous montrent que sur \mathcal{E} , les intégrandes vérifient

$$\begin{cases} H_t^+ P_t = P_t \Gamma(h) a_{\kappa(\cdot, t)}^- P_t \\ H_t^- P_t = P_t a_{\kappa(t, \cdot)}^+ \Gamma(h) P_t \\ H_t^\circ P_t = (\gamma(t) - 1) P_t \Gamma(h) P_t, \end{cases} \quad (5.2.8)$$

expressions qui nous permettent d'étendre cette représentation à un domaine différent de \mathcal{E} : on voit par exemple que cette représentation est encore valide sur le domaine \mathcal{J} .

De plus, la Proposition 3.2.4 montre que si $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$ sont représentables, alors les coefficients de la représentation ont nécessairement la forme (5.2.8).

Nous avons ainsi obtenu une condition nécessaire et suffisante de représentabilité de $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ sur \mathcal{E} . On peut de plus remarquer que, dans notre preuve, l'hypothèse de représentabilité sur \mathcal{E} n'a servi que comme ensemble de vecteurs test ; en particulier nous aurions pu donner exactement la même preuve en considérant la représentabilité de $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ sur l'espace à nombre fini de particules \mathcal{F} .

Nous obtenons ainsi, sans rien ajouter à la démonstration (ou presque) la caractérisation suivante :

Théorème 5.2.3 (Théorème 2.1 de [Pt3]) *Soit h un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$; on a alors équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ admettent une représentation en intégrales stochastiques quantiques sur le domaine \mathcal{E} ,
2. $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ admettent une représentation en intégrales stochastiques quantiques sur l'espace à nombre fini de particules \mathcal{F} ,
3. h est de la forme

$$h = k + \mathcal{M}_\gamma$$

où k est un opérateur de Hilbert-Schmidt et \mathcal{M}_γ est un opérateur de multiplication par une fonction essentiellement bornée γ .

Dans tous les cas, les coefficients de la représentation sont donnés par les expressions (5.2.7) et (5.2.8). De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors la représentation intégrale peut être étendue à tout l'ensemble \mathcal{J} .

Les formules (5.2.7) et (5.2.8) montrent de plus que l'on a *a priori* un lien fort entre le fait que $\Gamma(h)$ soit borné et celui que les coefficients de la représentation le soient ; on peut en fait montrer le résultat suivant

Proposition 5.2.4 (Proposition 2.8 de [Pt3]) *Soit $\Gamma(h)$ un opérateur de seconde quantification ; les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

1. $\Gamma(h)$ appartient à S' ,
2. $\Gamma(h)$ appartient à S ,
3. h est de la forme $k + \mathcal{M}_\gamma$ où k est un opérateur de Hilbert-Schmidt et \mathcal{M}_γ est un opérateur de multiplication par une fonction essentiellement bornée γ , et h est de plus une contraction.

5.2.2 Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification différentielle

Il est remarquable que notre preuve n'utilise en fait, de la représentation intégrale, que son action sur le premier chaos ; si l'on remarque qu'un opérateur de seconde quantification différentielle $\lambda(h)$ coïncide sur le premier chaos avec l'opérateur de seconde quantification correspondant $\Gamma(h)$, on voit que notre preuve s'applique à l'identique au cas des opérateurs de seconde quantification différentielle. On obtient ainsi le résultat suivant, qui étend un résultat de Coquio dans [Co2] :

Théorème 5.2.5 (Théorème 3.1 de [Pt2]) *Soit h un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$; on a alors équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. $\lambda(h)$ et $\lambda(h^*)$ admettent une représentation en intégrales stochastiques quantiques sur le domaine \mathcal{E} ,
2. $\lambda(h)$ et $\lambda(h^*)$ admettent une représentation en intégrales stochastiques quantiques sur l'espace à nombre fini de particules \mathcal{F} ,
3. h est de la forme

$$h = k + \mathcal{M}_\gamma$$

où k est un opérateur de Hilbert-Schmidt et \mathcal{M}_γ est un opérateur de multiplication par une fonction essentiellement bornée γ .

Dans tous les cas, les coefficients de la représentation sont donnés par les expressions (5.2.9) et (5.2.10) ci-dessous. De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors la représentation intégrale peut être étendue à tout l'ensemble \mathcal{J} .

Les coefficients de la représentation intégrale sont donnés par

$$\begin{cases} H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u) = \int_0^t \kappa(s, t) u(s) ds \mathcal{E}(\pi_t u) \\ H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \mathcal{E}(\pi_t u) \circ \int_0^t \kappa(t, s) d\chi_s \\ H_t^\circ \mathcal{E}(\pi_t u) = (\gamma(t) - 1) \mathcal{E}(\pi_t u), \end{cases} \quad (5.2.9)$$

et comme précédemment on a des expressions plus générales qui nous permettent d'étendre la représentation au-delà de \mathcal{E} :

$$\begin{cases} H_t^+ P_t = a_{\kappa(\cdot, t)}^- P_t \\ H_t^- P_t = a_{\kappa(t, \cdot)}^+ P_t \\ H_t^\circ P_t = (\gamma(t) - 1) P_t. \end{cases} \quad (5.2.10)$$

5.2.3 Le contre-exemple de Journé et Meyer

Remarquons d'abord que le contre-exemple de Journé et Meyer est un contre-exemple à la représentabilité de $\Gamma(h)$ et que l'on ne suppose rien de la représentabilité de $\Gamma(h^*)$. Cependant l'opérateur h considéré dans cet exemple vérifie $h^* = -h$ et l'on peut adapter notre preuve pour montrer que si l'opérateur h vérifie une telle relation (ou plus généralement si h et h^* sont proportionnels), alors $\Gamma(h)$ est représentable en intégrale stochastique quantique si et seulement si h est par ailleurs de la forme $k + \mathcal{M}_\gamma$ comme en 5.2.2.

Cependant on peut vérifier que h vérifie pour tous a, b de \mathbb{R}_+ que $h\mathbb{1}_{[a, b]}(s) = \frac{1}{\pi} \log \frac{s-a}{s-b}$ pour presque tout s . En particulier, $\frac{1}{\varepsilon} h\mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]}$ converge presque partout vers $s \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{t-s}$, et cette fonction n'est pas de carré intégrable, donc cette convergence ne peut pas être vraie au sens L^2 . Cet opérateur h est donc loin de vérifier les conditions (C) : la fonction α_t associée est telle que $\int_0^t \alpha_t(s) d\chi_s$ ne définit pas un élément de Φ , donc l'égalité

$$H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \int_0^t \alpha_t(s) d\chi_s \circ \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u),$$

n'a de sens dans Φ pour aucun u de $L^2(\mathbb{R}_+)$.

C'est pourquoi une telle représentation intégrale de $\Gamma(h)$ ne peut exister qu'en un sens plus faible : la représentation définie par Parthasarathy dans sa réponse à Journé et Meyer [Py1] est sans doute ce que l'on peut faire de mieux : $H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u)$ n'y est définie que pour des fonctions u suffisamment régulières mais H_t^- n'est défini que comme une distribution.

Remarquons que le contre-exemple de Journé et Meyer montre en fait que $\Gamma(h)$ n'est représentable sur aucun espace $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. Nous donnons dans la suite une caractérisation des opérateurs qui ont une représentation intégrale sur un tel sous-ensemble de \mathcal{E} ; cependant cet exemple particulier est tellement pathologique (le noyau associé n'est même pas de carré intégrable en une variable) que cette caractérisation ne nous apprend rien de nouveau dans ce cas précis.

Remarquons par ailleurs que notre théorème offre une foule d'exemples d'opérateurs non représentables : pour tout opérateur h autoadjoint (ou même, nous l'avons

vu ci-dessus, pour lequel h et h^* sont proportionnels) qui n'est pas de la forme $k + \mathcal{M}_f$ comme précédemment, l'opérateur associé $\Gamma(h)$ n'est pas représentable sur \mathcal{E} .

5.3 Extensions possibles de ces résultats

Dans cette section, nous donnons plusieurs extensions des résultats 5.2.3 et 5.2.5 ; nous étudions des critères de représentabilité sur des sous-ensembles de \mathcal{E} , le cas de la multiplicité infinie, puis donnons des conditions suffisantes permettant de représenter un opérateur de seconde quantification d'un opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}_+)$.

5.3.1 Représentabilité sur des sous-ensembles de \mathcal{E}

Dans les Théorèmes 5.2.3 et 5.2.5, la caractérisation de la représentabilité qui s'appuie sur les vecteurs exponentiels utilise sur une hypothèse très forte : la représentabilité sur tout le domaine exponentiel. On peut souhaiter, pour des applications pratiques, obtenir une caractérisation de la représentabilité des opérateurs de seconde quantification ou seconde quantification différentielle sur des parties de l'ensemble \mathcal{E} . On peut facilement adapter les démonstrations précédentes pour obtenir des conditions nécessaires à la représentabilité en intégrale stochastique quantique sur les exponentielles de fonctions appartenant à un sous-espace \mathcal{A} de $L^2(\mathbb{R}_+)$ vérifiant certaines propriétés :

Proposition 5.3.1 *Soit \mathcal{A} un sous-espace vectoriel $L^2(\mathbb{R}_+)$ tel que*

- *l'espace \mathcal{A} est stable par passage à la valeur absolue*
- *l'espace \mathcal{A} contient les indicatrices d'intervalles bornés de \mathbb{R}_+ .*

Si $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ alors les conditions **(C)** sont vérifiées, à l'exception de la condition portant sur $\|\alpha_t\|$, $\|\beta_t\|$ qui est remplacée par*

$$t \mapsto \|\alpha_t\| u(t), t \mapsto \|\beta_t\| u(t) \text{ sont intégrables pour toute fonction } u \text{ de } \mathcal{A}.$$

La même conclusion est valable en partant de l'hypothèse que $\lambda(h)$ et $\lambda(h^)$ sont représentables sur $\mathcal{E}(\mathcal{A})$.*

Le défaut de cette formulation des conditions nécessaires à la représentabilité a un défaut évident : on ne sait en général pas traduire ces conditions de manière plus concise. Un autre défaut est plus grave : on ne sait pas si les noyaux obtenus à partir des fonctions α, β comme précédemment sont suffisamment intégrables pour définir un opérateur sur \mathcal{A} .

Dans le cas où \mathcal{A} est un espace de type $L^2 \cap L^p$ pour $p \geq 1$, on peut espérer obtenir une formulation plus claire. En effet, il semble que toutes les étapes de la

preuve de 5.2.3 restent valables ; l'étape cruciale montrant que $t \mapsto \|\alpha_t\|$, $t \mapsto \|\beta_t\|$ sont de carré intégrable semble être remplacée par un résultat "lisible" grâce au lemme suivant, analogue de celui que nous avons utilisé dans la preuve de 5.2.3 :

Lemme 5.3.2 *soit p dans $[1, +\infty[$ et soit u une fonction mesurable telle que uv est intégrable pour toute fonction v de $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. Alors u appartient à $L^2(\mathbb{R}_+) + L^q(\mathbb{R}_+)$, où $q \in]1, +\infty]$ est l'indice conjugué de p .*

Il demeure en fait la même obstruction que dans le cas général : on ne sait même pas, si l'on définit une fonction κ à partir de α et β comme précédemment, si l'intégrale

$$\int_0^\infty \kappa(s, t) u(s) ds$$

sera définie pour u dans $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. En effet, ce que le Lemme 5.3.2 va nous permettre de montrer est que

$$t \mapsto \left(\int_0^t |\kappa(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} + \left(\int_0^t |\kappa(t, s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

est dans $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$ et pas

$$t \mapsto \left(\int_0^\infty |\kappa(s, t)|^2 ds \right)^{1/2}$$

comme on pourrait le croire. On ne pourra donc pas définir l'opérateur de noyau κ sur $\mathcal{E}(L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+))$.

On peut, en se restreignant au cas où $p \in [1, 2[$, obtenir une caractérisation de la représentabilité des opérateurs $\lambda(h)$, $\lambda(h^*)$; on peut obtenir dans certains cas particuliers une caractérisation de la représentabilité des opérateurs $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$.

Fixons d'abord quelques notations et une définition : pour toute fonction κ définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on note $\tilde{\kappa}$ la fonction vérifiant

$$\tilde{\kappa}(s, t) = \overline{\kappa(t, s)},$$

et on définit une fonction $\|\kappa\|$ par

$$\|\kappa\|(t) = \left(\int_0^\infty |\kappa(s, t)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Définition 5.3.3 *Soit q un élément de $[1, +\infty[$. Un $(2, q)$ -noyau est une fonction κ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ telle que pour tout t , les fonctions $\|\kappa\|$ et $\|\tilde{\kappa}\|$ sont finies presque partout et appartiennent à $L^2(\mathbb{R}_+) + L^q(\mathbb{R}_+)$.*

On a alors le résultat suivant, analogue des Théorèmes 5.2.3 et 5.2.5 :

Théorème 5.3.4 *Soit h un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ et soit $p \leq 2$. On définit les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ ont une représentation en intégrale stochastique sur $\mathcal{E}(L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+))$,
2. $\lambda(h)$ et $\lambda(h^*)$ ont une représentation en intégrale stochastique sur $\mathcal{E}(L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+))$,
3. il existe un $(2, q)$ -noyau κ et une fonction essentiellement bornée γ telle que

$$h = K_\kappa + \mathcal{M}_\gamma \text{ et } h^* = K_{\tilde{\kappa}} + \mathcal{M}_{\tilde{\gamma}}$$

sur $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$.

Alors

- 1. ou 2. impliquent 3.
- 3. implique 2.
- 3. implique 1. si l'on fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$\mathfrak{B}' \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \left| \int_0^s \kappa(r, s) u(r) dr \right|^2 ds \leq C \int_0^\infty |u(r)|^2 dr \\ \text{et} \\ \int_0^\infty \left| \int_0^s \kappa(s, r) u(r) dr \right|^2 ds \leq C \int_0^\infty |u(r)|^2 dr \end{array} \right.$$

pour une constante positive C et tout u dans $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$.

De plus, dès que 3. (et \mathfrak{B}' . dans le cas de $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$) sont vérifiées, les représentations sont valables sur le sous-espace $\mathcal{J}(L^2 \cap L^p)$ de \mathcal{J} engendré par les vecteurs $j(g, f)$ avec f et g dans $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$.

Remarques

On peut énoncer des conditions plus explicites sous lesquelles 1. et 2. sont vérifiés. Si par exemple h est positive alors les trois propriétés 1, 2, 3 sont équivalentes ; si $|h|$ vérifie les conditions de \mathfrak{B} . alors $\lambda(h)$, $\lambda(h^*)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur $\mathcal{E}(L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+))$. Nous précisons après la démonstration les modifications à apporter à celle-ci pour obtenir ces différentes assertions.

Ce théorème n'apparaît pas dans [Pt3] ; nous donnons donc ici sa démonstration.

Preuve du Théorème 5.3.4

Nous allons donner une preuve complète dans le cas des opérateurs $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$, c'est-à-dire que nous démontrons que 1. implique \mathfrak{B} , puis que \mathfrak{B} . et \mathfrak{B}' . impliquent à elles deux 1.

Commençons par la preuve de l'implication $1 \Rightarrow 3$; on obtient comme dans le cas du Théorème 5.2.3 les conditions suivantes sur h et h^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour presque tout } t, \\ \bullet \pi_t h \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]} / \varepsilon \text{ converge dans } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ vers une fonction } \alpha_t \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \bullet \pi_t h^* \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]} / \varepsilon \text{ converge dans } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ vers une fonction } \beta_t \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \bullet \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} h \mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]}(s) ds \text{ converge vers un scalaire } \gamma(t) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \text{les limites ont les propriétés suivantes :} \\ \bullet \text{ les fonctions } t \mapsto \|\alpha_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}, t \mapsto \|\beta_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \text{ appartiennent à } (L^2 + L^q)(\mathbb{R}_+), \\ \bullet \text{ la fonction } t \mapsto \gamma(t) \text{ est essentiellement bornée.} \end{array} \right.$$

On définit comme dans le cas du Lemme 5.2.2 le noyau κ à partir de α, β :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \kappa(s, t) = \overline{\beta_t(s)} & \text{si } s < t \text{ et} \\ \kappa(s, t) = \alpha_s(t) & \text{si } s > t. \end{array} \right. \quad (5.3.1)$$

Considérons une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathbb{R}_+ qui croît vers $+\infty$. La suite $\pi_{t_n} h \pi_{t_n}$ converge fortement vers h donc pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, il existe une sous-suite de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\pi_{t_n} h \pi_{t_n} u$ converge presque partout vers u . En utilisant la séparabilité de $L^2(\mathbb{R}_+)$, la continuité de h et un procédé diagonal, on obtient une sous-suite de $(t_n)_{n \geq 0}$ pour laquelle

$$\text{pour presque tout } s, \text{ pour tout } u \text{ de } L^2(\mathbb{R}_+), \pi_{t_n} h \pi_{t_n} u(s) \rightarrow hu(s).$$

On note encore $(t_n)_{n \geq 0}$ cette sous-suite. On restreint toutes les fonctions à un intervalle borné $[0, t_n]$; l'ensemble $L^2 \cap L^p$ est alors égal à l'ensemble L^2 ; la preuve du Lemme 5.2.2 adaptée à ce cas montre alors que pour presque tout s , la formule suivante est valable pour tout u de $L^2(\mathbb{R}_+)$ et tout n suffisamment grand :

$$h \pi_{t_n} u(s) = \int_0^{t_n} \kappa(r, s) u(r) dr + u(s) f(s).$$

Le membre de gauche converge vers $hu(s)$, et le deuxième terme du membre de droite est fixé ; l'intégrale converge donc lorsque n tend vers l'infini et, avec un abus de notation momentané, on a encore pour presque tout s , tout u :

$$hu(s) = \int_0^\infty \kappa(r, s) u(r) dr + u(s) f(s). \quad (5.3.2)$$

L'abus en question tient à ce que l'intégrale $\int_0^\infty \kappa(r, s) u(r) dr$ est pour l'instant une intégrale impropre . On peut cependant considérer, au lieu de u , la fonction v définie

par

$$v(r) = \begin{cases} u(r) \times \frac{\overline{\kappa(r,s)}}{|\kappa(r,s)|} & \text{si } \kappa(r,s) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela montre que $r \mapsto |\kappa(r,s)u(r)|$ est intégrable et que l'intégrale est en fait absolument convergente. Par symétrie on obtient les propriétés de h^* et $r \mapsto \kappa(s,r)$; on a donc prouvé que 1. implique 3.

La preuve que 3. avec la condition supplémentaire 3'. entraîne 1. est semblable à l'une des étapes de la preuve du Théorème 5.2.3 : grâce à 3', on peut définir $H_t^+ \mathcal{E}(u_t)$, $H_t^- \mathcal{E}(u_t)$ à partir des formules (5.2.7) et on vérifie exactement comme dans le cas du Théorème 5.2.3 que les intégrales ainsi définies coïncident avec $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$. L'extension au sous-ensemble \mathcal{J} est obtenu comme pour 5.2.3.

Ceci conclut la preuve.

□

Remarques sur l'hypothèse supplémentaire 3'.

Soulignons d'abord le fait que l'on ne peut se passer d'ajouter l'hypothèse 3'. En effet, la majoration

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty \kappa(r,s)u(r)dr \right|^2 ds \leq \|h\|^2 \|u\|^2,$$

que l'on déduit de la forme de h , n'implique pas que

$$\int_0^\infty \left| \int_0^s \kappa(r,s)u(r)dr \right|^2 ds \leq \|h\|^2 \|u\|^2.$$

On a cependant cette implication si h est un opérateur positif, ce qui prouve l'une de nos remarques. Par ailleurs, si 3. est vérifiée pour $|h|$ alors on décompose h sous la forme :

$$h = h_{\mathfrak{R}}^+ - h_{\mathfrak{R}}^- + ih_{\mathfrak{I}}^+ - ih_{\mathfrak{I}}^-;$$

et chacun vérifie la condition 3. puisqu'il est borné par $|h|$; cependant, comme les égalités

$$\lambda(h) = \lambda(h_{\mathfrak{R}}^+) - \lambda(h_{\mathfrak{R}}^-) + i\lambda(h_{\mathfrak{I}}^+) - i\lambda(h_{\mathfrak{I}}^-)$$

et

$$\lambda(h^*) = \lambda(h_{\mathfrak{R}}^+) - \lambda(h_{\mathfrak{R}}^-) - i\lambda(h_{\mathfrak{I}}^+) + i\lambda(h_{\mathfrak{I}}^-)$$

sont vérifiées sur \mathcal{J} , chaque terme est représentable et on a une égalité du même type pour les intégrales. Il existe bien sûr d'autres cas particuliers dans lesquels on peut adapter la preuve ci-dessus pour obtenir la représentabilité de $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$.

5.3.2 Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1

Dans la section 4 de l'article [Pt3], nous donnons une extension des résultats précédents au cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à un ; notons que les opérateurs de seconde quantification sont définis dans les espaces de Fock de multiplicité supérieure à un suivant les expressions (5.2.1) et (5.2.2) comme précédemment, deux opérateurs $\Gamma(h)$ et $\lambda(h)$ étant maintenant associés à tout opérateur h sur $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$.

Avant d'énoncer le théorème de caractérisation, précisons les définitions suivantes :

Définition 5.3.5

- Un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ est un opérateur k tel qu'il existe une famille $(\kappa_{i,j})_{i,j \in \Lambda}$ de fonctions dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ telles que

$$\sum_{i,j \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} |\kappa_{i,j}(s,t)|^2 ds dt < +\infty$$

et que pour tout i dans Λ , presque tout s dans \mathbb{R}_+ ,

$$kf(s,i) = \sum_{j \in \Lambda} \int_0^\infty \kappa_{i,j}(r,s) f(r,j) dr.$$

- Un opérateur de multiplication est un opérateur M_γ pour lequel il existe une application $s \mapsto (\gamma_{i,j}(s))_{i,j \in \Lambda}$ dont les coefficients vérifient que pour presque tout s de \mathbb{R}_+ ,

$$\|\gamma\|(s) = \left(\sum_{i,j \in \Lambda} |\gamma_{i,j}(s)|^2 \right)^{1/2}$$

est fini et

$$M_\gamma f(s,i) = \sum_{j \in \Lambda} \gamma_{i,j}(s) f(s,j).$$

Le théorème suivant condense les analogues en multiplicité supérieure à un des Théorèmes 5.2.3 et 5.2.5. Les expressions des intégrandes sont données plus loin.

Théorème 5.3.6 (Théorème 4.2 de [Pt3]) Soit h un opérateur borné sur l'espace $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur l'ensemble $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$ des vecteurs exponentiels
2. $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ des vecteurs à nombre fini de particules

3. $\lambda(h)$ et $\lambda(h^*)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur l'ensemble $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$ des vecteurs exponentiels
4. $\lambda(h)$ et $\lambda(h^*)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ des vecteurs à nombre fini de particules
5. h est de la forme

$$h = k + \mathcal{M}_{\gamma}$$

où k est un opérateur de Hilbert-Schmidt et \mathcal{M}_{γ} est un opérateur de multiplication par la matrice $(\gamma_{i,j})_{i,j \in \Lambda}$ tel que la fonction $\|\gamma\|$ est essentiellement bornée sur \mathbb{R}_+ .

Si par ailleurs l'une des conditions ci-dessus est vérifiée, alors on peut étendre les représentations intégrales à tout $\mathcal{J}_{\mathcal{K}}$.

La preuve consiste essentiellement à appliquer les Théorèmes 5.2.3 et 5.2.5 à chaque "élément de matrice" des opérateurs considérés et à vérifier que les conditions de sommabilité suivant i, j imposées par les représentations intégrales en multiplicité supérieure impliquent les conditions sur γ et k ou inversement.

Intégrandes dans la représentation intégrale de $\Gamma(h)$

Les coefficients de la représentation intégrale de $\Gamma(h)$ ont les expressions suivantes sur $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_t^{0,i} \mathcal{E}(\pi_t u) = \sum_{j \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{i,j}(s, t) u(s, j) ds \mathcal{E}((h \pi_t u)_t) \\ H_t^{j,0} \mathcal{E}(\pi_t u) = \mathcal{E}((h \pi_t u)_t) \circ \sum_{i \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{i,j}(t, s) d\chi_s^i \\ H_t^{j,i} \mathcal{E}(\pi_t u) = (\gamma_{i,j}(t) - 1) \mathcal{E}((h \pi_t u)_t). \end{array} \right. \quad (5.3.3)$$

pour tous i, j dans Λ et ont la forme plus générale suivante sur $\mathcal{J}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_t^{0,i} P_t = P_t \Gamma(h) P_t \sum_{j \in \Lambda} \int_0^t \overline{\kappa_{i,j}(s, t)} da_s^{j,0} \\ H_t^{j,0} P_t = \sum_{i \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{i,j}(t, s) da_s^{0,i} P_t \Gamma(h) P_t \\ H_t^{j,i} P_t = (\gamma_{i,j}(t) - 1) P_t \Gamma(h) P_t. \end{array} \right. \quad (5.3.4)$$

Intégrales dans la représentation intégrale de $\lambda(h)$

Les coefficients de la représentation intégrale de $\lambda(h)$ ont les expressions suivantes sur $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_t^{0,i} \mathcal{E}(\pi_t u) = \sum_{j \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{i,j}(s, t) u(s, j) ds \mathcal{E}(\pi_t u) \\ H_t^{j,0} \mathcal{E}(\pi_t u) = \mathcal{E}(\pi_t u) \circ \sum_{i \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{j,i}(t, s) d\chi_s^i \\ H_t^{j,i} \mathcal{E}(\pi_t u) = (\gamma_{i,j}(t) - 1) \mathcal{E}(\pi_t u). \end{array} \right. \quad (5.3.5)$$

pour tous i, j dans Λ et ont la forme plus générale suivante sur $\mathcal{J}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_t^{0,i} P_t = \sum_{j \in \Lambda} \int_0^t \overline{\kappa_{i,j}(s, t)} da_s^{j,0} P_t \\ H_t^{j,0} P_t = \sum_{i \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{i,j}(t, s) da_s^{0,i} P_t \\ H_t^{j,i} P_t = (\gamma_{i,j}(t) - 1) P_t. \end{array} \right. \quad (5.3.6)$$

5.3.3 Secondes quantifications d'opérateurs non bornés

Dans cette section nous nous intéressons rapidement au cas des opérateurs de seconde quantification ou de seconde quantification différentielle construits à partir d'opérateurs non bornés ; la définition de tels opérateurs se déduit de manière immédiate de celle que l'on a donnée dans le cas d'opérateurs bornés. La difficulté dans ce cas tient au fait que, sans information précise sur la forme du domaine des opérateurs h, h^* , on ne peut obtenir de bonne condition nécessaire de représentabilité sur la forme de l'opérateur h . Nous ne donnons donc que des conditions suffisantes très générales pour que l'on puisse définir une intégrale stochastique quantique coïncidant avec $\Gamma(h)$ ou $\lambda(h)$ sur son domaine.

Ces conditions peuvent évidemment servir dans le cas d'opérateurs bornés si par exemple on veut représenter des opérateurs $\Gamma(h), \lambda(h)$ sans hypothèse sur les adjoints.

Proposition 5.3.7 (Proposition 5.1 de [Pt3]) *Soit h un opérateur sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ de domaine $Dom h$ et supposons qu'il existe deux fonctions $\kappa : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ telles que, pour tout u dans $Dom h$, presque tout s dans \mathbb{R}_+ ,*

$$hu(s) = \int_0^\infty \kappa(r, s) u(r) dr + u(s) f(s).$$

Considérons les conditions suivantes :

1. $t \mapsto \int_0^t |\kappa(s, t)|^2 ds$ est intégrable,
2. pour tout u de $Dom h$, $t \mapsto |u(t)| \sqrt{\int_0^t |\kappa(t, s)|^2 ds}$ et $t \mapsto |f(t) - 1| |u(t)|$ sont intégrables,
3. pour tout u de $Dom h$, $\|\pi_t h \pi_t u\|$ est uniformément borné en t ,

alors

- Si les conditions 1. et 2. sont vérifiées, $\lambda(h)$ est représentable en intégrale stochastique quantique sur $\mathcal{J}(Dom h)$ et $\mathcal{F}(Dom h)$
- Si les conditions 1., 2. et 3. sont vérifiées, alors $\Gamma(h)$ est représentable en intégrale stochastique quantique sur $\mathcal{J}(Dom h)$ et $\mathcal{F}(Dom h)$.

Les expressions des coefficients des représentations intégrales sont données par (5.2.8) et (5.2.10).

Les ensembles $\mathcal{J}(Dom h)$ et $\mathcal{F}(Dom h)$ représentent respectivement le sous-espace engendré par Ω et les $j(g, f)$ avec g, f dans $Dom h$ et le sous-espace engendré par les $u_1 \circ \dots \circ u_n$ pour u_1, \dots, u_n dans $Dom h$.

Chapitre 6

Approximations d'EDS quantiques et création de bruits quantiques

Remarque depuis la rédaction initiale de cette thèse, de nouveaux résultats sont venus s'ajouter à l'article [AP1]. La version fournie en annexe est la version la plus récente ; nous avons adapté en conséquence la numérotation des renvois à l'annexe mais nous contentons de mentionner les améliorations.

Dans ce chapitre, nous décrivons l'application du calcul stochastique quantique à la construction de dilatations unitaires d'évolutions complètement positives. Nous étudions ces questions en temps discret et appliquons nos techniques de discrétisation et de passage à la limite pour décrire le comportement asymptotique des opérateurs d'évolution associés à une interaction répétée.

Dans la section 6.1 nous rappelons les définitions et résultats dont nous aurons besoin concernant les solutions d'équations différentielles stochastiques quantiques et la construction de dilatations unitaires.

Dans la section 6.2 nous établissons des résultats analogues dans le cas du temps discret et mettons en place le modèle général correspondant aux interactions répétées.

Dans la section 6.3 nous établissons les résultats de convergence que nous appliquerons à notre modèle physique ; ceux-ci s'expriment facilement dans le langage des équations différentielles. Nous les présentons donc sous cette forme puis les traduisons dans le langage qui permet de décrire le comportement asymptotique dans les interactions répétées.

Enfin, dans la section 6.4, nous établissons les résultats associés de convergence des semigroupes d'évolutions associés - résultats qui sont bien plus simples mais bien moins puissants que nos résultats précédents - puis les résultats de convergence des Hamiltoniens associés à ces interactions.

La plus grande partie de ce chapitre correspond à la publication [AP1] écrite

en collaboration avec Stéphane Attal.

6.1 Dilatations d'évolutions complètement positives et EDS quantiques

6.1.1 Evolutions complètement positives et théorème de Lindblad

Dans les énoncés que nous donnons ici, nous ne cherchons à donner ni des énoncés complets ni des hypothèses minimales : le but de cette sous-section est de fixer le cadre de travail de ce chapitre. Pour la motivation de l'étude de ces questions, on pourra consulter [Dav]; pour les résultats les plus importants (en particulier le Théorème 6.1.3, qui n'était pas connu à la parution de ce dernier livre) on pourra se reporter à [Py2].

Supposons que nous nous intéressions à un système physique dont l'espace d'état est un espace de Hilbert \mathcal{H}_0 séparable, typiquement une particule qui a un certain nombre de niveaux d'énergie ; on appellera *petit système* indifféremment le système physique ou l'espace d'état \mathcal{H}_0 . On souhaite s'intéresser dans ce chapitre à des évolutions de ce système qui ne sont pas supposées conservatives ; physiquement, cela signifie que ce système dissipe de l'énergie.

Nous choisissons de travailler exclusivement dans l'interprétation de Heisenberg ; mathématiquement, la non conservativité de l'évolution signifie que l'évolution des observables $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ du système n'est pas de la forme $X \mapsto e^{-itH} X e^{itH}$. On ne peut cependant autoriser n'importe quels opérateurs pour traduire cette évolution. Suivant que l'on considère des évolutions à temps discret ou à temps continu, notons $(t_n)_{n \geq 0}$ ou $(T_t)_{t \geq 0}$ les opérateurs qui donnent la trajectoire d'une observable $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ du petit système :

$$X_n = t_n(X)$$

ou

$$X_t = T_t(X).$$

Si l'on suppose que le système est stationnaire, il est naturel de considérer que ces processus sont des semigroupes ; en outre, des arguments physiques (voir [Dav]) nous convainquent de faire l'hypothèse supplémentaire que chacun de ces opérateurs sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ a la propriété d'être *complètement positif*. Définissons cette notion de complète positivité :

Définition 6.1.1 Soit T un opérateur sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on dit que T est *n-positif* si l'application $T^{(n)}$ sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n) \simeq \mathfrak{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}_0))$ définie par

$$T^{(n)}(X_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = (T(X_{i,j}))_{i,j=1,\dots,n}$$

est positive. L'opérateur T est dit complètement positif s'il est n -positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a un premier théorème fondamental, dans lequel, comme dans la suite, il est implicite que \mathcal{H}_0 est séparable.

Théorème 6.1.2 (Kraus) *Soit ℓ un opérateur sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, σ -faiblement continu et complètement positif. Il existe une suite d'opérateurs bornés $(V_i)_{i \geq 0}$ sur \mathcal{H}_0 telle que pour tout X de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$,*

$$\ell(X) = \sum_{i \geq 0} V_i^* X V_i$$

où la série est fortement convergente pour tout X .

Si \mathcal{H}_0 est de dimension finie alors on a le même résultat avec un nombre fini d'opérateurs V_0, \dots, V_N .

Par ailleurs, on sait, si l'on s'autorise des conditions analytiques confortables, caractériser entièrement les semigroupes d'évolution à temps continu qui nous intéressent :

Théorème 6.1.3 (Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad) *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigroupe d'opérateurs sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, σ -faiblement continus, complètement positifs et vérifiant $T_t(\text{Id}) = \text{Id}$ pour tout t . On suppose que $T_0 = \text{Id}$ et que $t \mapsto T_t$ est fortement continu si l'on munit $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ de la norme d'opérateurs.*

Alors il existe un opérateur autoadjoint borné H et une suite d'opérateurs bornés $(L_i)_{i \geq 0}$ de \mathcal{H}_0 tels que $(T_t)_{t \geq 0}$ se mette sous la forme

$$T_t = e^{t\mathcal{L}}$$

avec

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] + \sum_{i \geq 0} \frac{1}{2} (2L_i^* X L_i - L_i^* L_i X - X L_i^* L_i)$$

où la série est fortement convergente pour tout X .

Encore une fois, si \mathcal{H}_0 est de dimension finie, le résultat est vrai avec un nombre fini d'opérateurs L_1, \dots, L_N .

On accepte de se restreindre aux évolutions ayant les conditions de régularité décrites dans ces deux théorèmes. Une évolution à temps continu du type qui nous intéresse est donc entièrement déterminée par l'équation

$$\frac{dX_t}{dt} = \mathcal{L}(X_t)$$

avec \mathcal{L} de la même forme que dans le théorème ci-dessus. Une telle équation est appelée *équation maîtresse* ; l'opérateur \mathcal{L} associé est appelé *Lindbladien*. En temps

discret le tableau se simplifie puisqu'un semigroupe $(t_n)_{n \geq 0}$ ayant toutes les propriétés que nous avons décrites est forcément de la forme

$$t_n = (t_1)^n$$

où t_1 est de la forme donnée par le théorème de Kraus.

Une approche possible pour modéliser l'évolution dissipative d'un petit système est ainsi de se donner la forme du Lindbladien ou de l'opérateur t_1 . Une autre approche est de fermer le système, c'est à dire de le coupler à un "réservoir" \mathcal{H} et de voir l'évolution sur \mathcal{H}_0 comme la "trace" sur \mathcal{H}_0 d'une évolution unitaire sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. On détermine alors l'évolution du système en se donnant un Hamiltonien qui décrit l'évolution de l'ensemble du système.

Définissons ce qu'est une dilatation d'un semigroupe d'évolution. Pour cela, supposons fixé un vecteur de référence Ω de \mathcal{H} (lorsque nous prendrons \mathcal{H} égal à Φ ou $\mathbb{T}\Phi$ ce sera évidemment le vecteur vide), et notons \mathbb{E}_0 l'opérateur de trace partielle qui à un opérateur X sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ associe un opérateur sur \mathcal{H}_0 par

$$\langle a, \mathbb{E}_0(X)b \rangle = \langle a \otimes \Omega, X b \otimes \Omega \rangle.$$

Alors on appellera dilatation sur \mathcal{H} d'un semigroupe $(T_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs de \mathcal{H}_0 la donnée d'un processus $(U_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ tels que pour tout t , tout X de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ on ait

$$T_t(X) = \mathbb{E}_0(U_t^*(X \otimes \text{Id})U_t),$$

c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif pour tout t :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) & \xrightarrow{T_t} & \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \\ \cdot \text{Id} \downarrow & & \uparrow \mathbb{E}_0 \\ \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}) & \xrightarrow{U_t^* \cdot U_t} & \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}) \end{array} \quad (6.1.1)$$

La définition de la dilatation d'une évolution à temps discret se déduit de manière immédiate de celle-ci.

6.1.2 Equations différentielles stochastiques quantiques

Un lien entre l'approche Lindbladienne et l'approche Hamiltonienne peut être établi grâce au calcul stochastique quantique ; partant d'une évolution définie par un Lindbladien sur \mathcal{H}_0 on peut en effet construire sur un espace de Fock des dilatations de cette évolution. Cette construction était l'objectif de l'article fondateur de Hudson et Parthasarathy [H-P]. Notons au passage que l'espace \mathcal{H}_0 que nous appelons petit système est appelé de manière plus classique en probabilités quantiques *espace initial*.

Ces dilatations sont caractérisées par une *équation différentielle stochastique quantique* (EDS quantique ou encore EDSQ) associée. Les résultats que nous allons donner présentent un intérêt en ce qui concerne de telles équations indépendamment des questions de dilatations ; par ailleurs, ils s'exprimeront de manière plus cohérente avec le reste de cette thèse en termes d'équations différentielles. Nous définissons donc ce que nous entendons par une solution d'EDSQ ; on considère un espace de multiplicité \mathcal{K} , espace de Hilbert séparable dont une base hilbertienne $(e_i)_{i \in \Lambda}$ est fixée ; comme dans la section 1.4 on suppose que l'indice 0 n'appartient pas à Λ . Si l'on se donne de plus une famille $L^{i,j}$, $i, j \in \Lambda \cup \{0\}$ d'opérateurs (bornés) sur \mathcal{H}_0 , on dit qu'un processus d'opérateurs $(U_t)_{t \geq 0}$ est solution de l'équation

$$dU_t = \sum_{i,j} L^{i,j} U_t da_t^{i,j} \quad (6.1.2)$$

sur un domaine \mathcal{D} si pour tout f de \mathcal{D} , tout t de \mathbb{R}_+ , l'équation

$$U_t f = U_0 f + \int_0^t \sum_{i,j} L^{i,j} U_s da^{i,j}(s)$$

a un sens et est vérifiée.

Notons qu'ici et dans la suite nous notons $L^{i,j}$ et pas $L^{\kappa,\lambda}$ les opérateurs considérés (de même pour les bruits), cela afin de rester plus proche des notations utilisées dans [AP1].

Le théorème suivant est une version très simplifiée d'un résultat démontré dans [Py2], Proposition 27.5.

Théorème 6.1.4 (Théorème 12 de [AP1]) *Soit \mathcal{H}_0 un espace de Hilbert séparable, et soit $(L^{i,j})_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}}$ une famille d'opérateurs bornés telle que*

$$\sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} \|L^{i,j}\|^2 < +\infty.$$

Alors il existe un unique processus d'opérateurs $(U_t)_{t \geq 0}$ qui est solution de l'équation (6.1.2) sur le domaine exponentiel.

Ceci montre en particulier que l'on a une solution dès que \mathcal{H}_0 est de dimension finie.

Le cas qui nous intéressera plus particulièrement est celui dans lequel la solution de l'équation (6.1.2) est constituée d'opérateurs unitaires. Ce cas est entièrement caractérisé en terme de la forme des opérateurs $L^{i,j}$ par le Théorème 6.1.5 ci-dessous (voir Corollaire 26.4 de [Py2]). Nous énonçons par ailleurs dans ce même théorème le résultat de Hudson et Parthasarathy donnant des dilatations de toute évolution complètement positive.

Théorème 6.1.5 (Théorème 12 de [AP1], [H-P]) Soit \mathcal{H}_0 un espace de Hilbert séparable. S'il existe sur \mathcal{H}_0 un opérateur autoadjoint borné H , des opérateurs bornés $S^{i,j}$, $i, j \in \Lambda$ tels que la matrice $(S^{i,j})_{i,j \in \Lambda}$ soit unitaire et des opérateurs L_i , $i \in \Lambda$ tels que pour tous $i, j \in \Lambda \cup \{0\}$:

$$\begin{cases} L^{0,0} = -(iH + \frac{1}{2} \sum_k L_k^* L_k) \\ L^{i,0} = L_i \\ L^{0,j} = -\sum_k L_k^* S^{k,j} \\ L^{i,j} = S^{i,j} - \delta_{ij} I, \end{cases}$$

alors l'équation (6.1.2) admet une solution $(U_t)_{t \geq 0}$ constituée d'opérateurs unitaires.

Dans ce cas on a pour tous a, b de \mathcal{H}_0 ,

$$\langle a \otimes \Omega, U_t b \otimes \Omega \rangle = \langle a, e^{t(iH + \frac{1}{2} \sum L_i^* L_i)} b \rangle$$

et pour tout X de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$,

$$\langle a \otimes \Omega, U_t^*(X \otimes Id) U_t b \otimes \Omega \rangle = \langle a, e^{t\mathcal{L}} b \rangle$$

où \mathcal{L} est donné par le Théorème 6.1.3 où les L_i , sont donnés par les formules ci-dessus.

Soulignons le fait que ces résultats assurent en particulier que toutes les séries d'opérateurs considérées sont fortement sommables.

Ce théorème définit donc une dilatation de l'évolution $T_t = e^{t\mathcal{L}}$ sur un espace de Fock $\Phi(\mathcal{K})$. Cela montre qu'une évolution complètement positive peut être définie suivant une troisième approche : on peut se donner l'équation

$$dU_t = \sum_{i,j} L^{i,j} U_t da_t^{i,j}$$

que l'on voit comme une équation de Schrödinger perturbée par des termes aléatoires $L^{i,j} U_t da^{i,j}(t)$; l'espace Φ est encore vu comme un réservoir ou un environnement auquel est couplé le petit système \mathcal{H}_0 . Une telle équation considérée du point de vue physique est appelée *équation de Langevin quantique*. D'un point de vue plus mathématique et lorsque les coefficients $L^{i,j}$ vérifient les conditions du Théorème 6.1.5 qui font de la solution un processus unitaire, l'équation différentielle est appelée *équation de Hudson-Parthasarathy*.

La modélisation d'une évolution par une équation de Langevin a toujours été considérée comme un modèle pratique mais sans véritable sens physique ; les résultats que nous allons énoncer dans la suite montrent que l'on obtient rigoureusement une telle description à partir d'une évolution Hamiltonienne.

6.2 Dilatations en temps discret et interactions répétées

6.2.1 Interactions répétées

Nous considérons toujours notre petit système \mathcal{H}_0 , et supposons maintenant que l'on veut faire interagir de manière répétée ce petit système avec un autre système \mathfrak{h} . On suppose que cette interaction se fait de manière particulière : on commence par coupler les deux systèmes pour un temps δ pendant lequel ils interagissent, typiquement suivant une évolution Hamiltonienne, puis on les découple ensuite et couple à nouveau le même système \mathcal{H}_0 (modifié par la première interaction) avec une copie encore vierge de \mathfrak{h} , à nouveau pour un temps δ , et ainsi de suite.

Cela correspond à de nombreuses situations : par exemple, à l'excitation d'un laser où l'on introduit à des intervalles réguliers des photons identiques dans une cavité (voir à ce sujet [F-R]) ; à des phénomènes de mesures répétées où l'on applique au petit système un instrument de mesure qui est "rafraîchi" après chaque utilisation. Plus généralement cela peut correspondre à toute situation si l'on suppose que les temps caractéristiques de \mathcal{H}_0 et de \mathfrak{h} sont suffisamment différents pour que l'on considère que la perturbation sur \mathfrak{h} disparaît après un temps très faible ; cette remarque prendra tout son sens lorsque l'on constatera qu'apparaît naturellement dans notre modèle la limite de couplage faible.

Pour modéliser cette situation, on considère l'espace

$$\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \otimes \dots$$

et pour plus de clarté on indexe en $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots$ les copies de \mathfrak{h} . Puisque l'on répète le même couplage, l'évolution sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}$ durant un intervalle de temps δ est donnée par un opérateur $\mathbb{L}(\delta)$ sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}$; lors de la première interaction \mathbb{L} agit sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}_1$, lors de la deuxième sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}_2$, etc. On considère donc des amplifications $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \dots$ de \mathbb{L} , où chaque \mathbb{L}_i est défini sur le produit $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2 \otimes \dots$ comme \mathbb{L} sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}_i$ et comme l'identité sur les autres facteurs \mathfrak{h}_i .

L'évolution globale est alors donnée par

$$u_{n+1} = \mathbb{L}_{n+1} u_n$$

où chaque u_n est un opérateur sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h} \otimes \dots$, et $u_0 = \text{Id}$.

L'espace $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \otimes \dots$ est un espace de Fock à temps discret comme nous les avons construits dans la section 1.4.2. Il faut prendre garde cependant que ce n'est pas l'espace de Fock de multiplicité \mathfrak{h} (ce dernier serait le produit tensoriel des $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}$). Nous considérons donc une base hilbertienne $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda \cup \{0\}}$ de \mathfrak{h} qui est indexée par $\Lambda \cup \{0\}$, ce qui signifie que nous particularisons une dimension de \mathfrak{h} ; nous reviendrons là-dessus plus loin.

Nous travaillerons dorénavant sur l'espace $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi$, étant implicite que l'espace de Fock considéré est en fait $l^2(\mathcal{P}_\Lambda)$ comme dans la section 1.4.2. Nous considérerons des opérateurs \mathbb{L} qui peuvent s'écrire comme une matrice $(\mathbb{L}^{i,j})_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}}$ à coefficients dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ grâce à l'isomorphisme $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \otimes \mathcal{B}(\mathfrak{h})$.

Les idées développées ici ont été inspirées par [KM2].

6.2.2 Dilatations en temps discret

Nous allons montrer ici que, de même que l'on peut dilater une évolution complètement positive à temps continu sur un espace de Fock à temps continu, on peut dilater une évolution à temps discret sur un espace de Fock à temps discret.

Proposition 6.2.1 (Théorème 2 de [AP1]) *Soit $(\ell^n)_{n \geq 0}$ un semigroupe d'opérateurs complètement positifs, σ -faiblement continus, sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$. Il existe alors une matrice unitaire $\mathbb{L} = (\mathbb{L}^{i,j})_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}}$ à coefficients dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ telle que la solution de l'équation*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \mathbb{L}_{n+1} u_n \\ u_0 &= Id \end{cases} \quad (6.2.1)$$

sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi$ vérifie pour tout X de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, tous a, b dans \mathcal{H}_0 , tout n de \mathbb{N}

$$\langle a, \ell^n(X)b \rangle = \langle a \otimes \Omega, u_n^*(X \otimes Id) u_n b \otimes \Omega \rangle.$$

Puisque nous allons de toute façon considérer une réalisation de $\mathbb{T}\Phi$ comme sous-espace de Φ et qu'alors les vecteurs vide de l'un et de l'autre sont les mêmes, nous pouvons adopter une notation unique pour l'opérateur de trace partielle \mathbb{E}_0 . La proposition précédente signifie alors que, pour tout n

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) & \xrightarrow{\ell_n} & \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \\ \cdot \otimes Id \downarrow & & \uparrow \mathbb{E}_0 \\ \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi) & \xrightarrow{u_n^* u_n} & \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi) \end{array}$$

donne une dilatation de $(\ell_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi$.

Remarques

- L'équation (6.2.1) ci-dessus peut s'interpréter comme une équation aux différences

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} (\mathbb{L}^{i,j} + \delta_{ij} Id) u_n a_n^{i,j}$$

en prenant $\Lambda = \mathbb{N}^*$, à la condition *a priori* étrange de considérer que $a^{0,0}$ n'est plus l'identité mais l'opérateur qui s'exprime par

$$\begin{aligned} a^{0,0}\Omega &= \Omega \\ a^{0,0}X^\lambda &= 0 \text{ pour } \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

avec les notations du chapitre 1. Cela est simplement dû au rôle particulier que joue l'opérateur $a^{0,0}$ tel que nous l'avons défini : nous avons choisi les $a^{i,j}$ comme décrivant la base canonique de $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{\Lambda \cup \{0\}})$, à l'exception de $a^{0,0}$, qui est l'identité.

- Notre choix d'utiliser des indices dans $\Lambda \cup \{0\}$ n'est évidemment pas innocent : l'indice zéro va jouer un rôle différent des autres. Physiquement il représente un état de référence de l'extérieur, de sorte que, dans la matrice \mathbb{L} , l'opérateur $\mathbb{L}^{0,0}$ correspond à une évolution propre du petit système, les $\mathbb{L}^{i,j}$, $i, j \neq 0$ à une évolution propre du système \mathfrak{h} et les termes $\mathbb{L}^{i,0}$ ou $\mathbb{L}^{0,j}$ à des termes d'interaction.

6.3 Résultats de convergence

Nous avons dit ci-dessus qu'une équation d'évolution du type (6.2.1) peut être vue à peu de choses près comme une équation stochastique quantique aux différences. Dans l'article [AP1] toutes les preuves sont faites sans mentionner une telle interprétation ; il semble naturel dans cette thèse de présenter nos résultats sous cette forme, d'autant plus que les formes que nous pouvons ainsi en donner sont plus puissantes que celles qui sont présentés dans l'article [AP1]. La différence tient en ceci, que nous considérons dans la section 6.3.1 des perturbations des coefficients de l'EDS qui dépendent du temps, ce qui n'est pas le cas dans [AP1].

6.3.1 Convergence de solutions d'équations différentielles stochastiques quantiques

Soit \mathcal{K} un espace de multiplicité, de base hilbertienne $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ comme dans la section 1.4 ; l'ensemble Λ est au plus dénombrable et comme précédemment nous supposons qu'il ne contient pas l'indice zéro. Nous noterons Φ , $\mathbb{T}\Phi$ à la place de $\Phi(\mathcal{K})$, $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$.

Considérons une EDS du type (6.1.2) sur $\mathcal{H}_0 \otimes \Phi$, que nous notons (Ec) pour la durée de cette sous-section :

$$\begin{cases} dU_t &= \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} L^{i,j} U_t da_t^{i,j} \\ U_0 &= \text{Id.} \end{cases} \quad (\text{Ec})$$

Nous serons toujours dans des cas où le Théorème 6.1.4 nous assure que cette équation a une solution.

Notons par ailleurs Ed l'équation aux différences analogue

$$\begin{cases} v_{n+1} - v_n &= \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} \delta^{\varepsilon_{i,j}} L^{i,j} v_n a_n^{i,j} \\ v_0 &= \text{Id} \end{cases} \quad (\text{Ed})$$

où

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}(\delta_{i,0} + \delta_{0,j})$$

donne simplement la normalisation correspondant à $a^{i,j}$ dans nos approximations ($\varepsilon_{i,j}$ vaut 1 pour $i = j = 0$, $1/2$ si seul l'un des deux coefficients vaut zéro, est nul sinon).

Notons enfin Edp une version perturbée de cette équation

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n &= \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} h^{\varepsilon_{i,j}} (L^{i,j} + \omega_n^{i,j}) u_n a_n^{i,j} \\ u_0 &= \text{Id}, \end{cases} \quad (\text{Edp})$$

que l'on suppose entrer encore dans le cadre du Théorème 6.1.4. Il est facile de voir que les équations (Ed) et (Edp) ont toujours une solution $(u_n)_{n \geq 0}$ en processus prévisible d'opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi$: il suffit pour cela de remarquer que pour tout n , $\sum_{i,j} h^{\varepsilon_{i,j}} L^{i,j} a_n^{i,j}$ est un opérateur borné sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi_{\{n\}}$. Par ailleurs, une solution de (Ec) sur le domaine exponentiel est fournie par le Théorème 6.1.4.

On considère comme dans les chapitres précédents $\mathbb{T}\Phi$ comme étant un sous-espace de Φ associé à une subdivision $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots\}$ de \mathbb{R}_+ . Nous énonçons ce qui suit dans le cas où \mathcal{S} est régulière de pas δ mais les mêmes résultats sont vrais en remplaçant partout δ par le pas de la subdivision, $[t/\delta]$ par "le plus grand k tel que t_k est inférieur à t ", etc. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 6.3.1 *Considérons une équation (Ec) avec $\sum_{i,j} \|L^{i,j}\|^2 < +\infty$ et supposons que cette équation admette une solution $(U_t)_{t \geq 0}$ faite d'opérateurs bornés tel que $t \mapsto \|U_t\|$ soit essentiellement bornée sur tout compact de \mathbb{R}_+ . Alors si les opérateurs $\omega_k^{i,j}$ vérifient pour presque tout t de \mathbb{R}_+ ,*

$$\sup_{k|t_k \leq t} \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} \|\omega_k^{i,j}\|^2 \text{ tend vers zéro lorsque } \delta \text{ tend vers zéro}$$

alors, pour tous ϕ, ψ de $L^\infty([0, t])$, la solution $(v_n)_{n \geq 0}$ de (Edp) vérifie

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} u_{[t/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), U_t b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle.$$

De plus, la convergence est uniforme pour a, b dans une boule bornée de \mathcal{H}_0 , uniforme pour t dans un compact de \mathbb{R}_+ . En particulier, la solution $(v_n)_{n \geq 0}$ de (Ed) converge en ce sens vers $(U_t)_{t \geq 0}$.

Les crochets $[\cdot]$ représentent bien sûr la partie entière.

Démonstration.

La preuve de ce théorème est strictement équivalente à la preuve du Théorème 13 de [AP1]; la seule différence réside dans le fait que dans [AP1], $a^{0,0}$ n'est pas l'identité. Pour anticiper sur la preuve que nous allons ébaucher, cela implique que les projections d'intégrales par rapport au temps donnent des termes en $a^{i,i}$ pour tout i et il s'agit de faire disparaître au cours de la preuve ceux qui correspondent à $i \neq 0$, ce que l'on peut faire en les incorporant aux termes perturbatifs $\omega^{i,i}$ grâce aux différences de normalisations. Notons par ailleurs que la preuve dans [AP1] considère des opérateurs $\omega^{i,j}$ indépendants de k , mais cela ne fait aucune différence.

Notons par ailleurs que les définitions des opérateurs $a_k^{i,j}$ de [AP1] sont légèrement différentes des nôtres : notre $a_k^{i,j}$ est le $a_{k+1}^{i,j}$ de [AP1].

La preuve se fait en plusieurs étapes, que nous allons détailler ; les références que nous donnons renvoient toutes à [AP1]. Tout d'abord on considère le processus $(w_n)_{n \geq 0}$ donné par $w_n = \mathbb{E}_{\mathcal{S}} U_{t_n} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$. On montre facilement (Lemme 15) que ce processus tend vers $(U_t)_{t \geq 0}$ au sens de l'énoncé.

Nous en sommes donc ramené à montrer la convergence vers zéro de $u_n - w_n$ et commençons par montrer celle de $v_n - w_n$. Nous utilisons alors nos résultats décrivant les projections d'intégrales : le Théorème 11 de [AP1] est en fait une combinaison de la Proposition 4.2.5 et du Lemme 4.3.1 de cette thèse. Ces résultats nous permettent d'obtenir une expression de $v_n - w_n$ (équation (11)) ; dans cette expression apparaissent des termes de la forme $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}(1/\delta) \int_{t_k}^{t_{k+1}} U_s ds \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ ou analogues. On peut remplacer ces termes par des $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} U_{t_k} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = w_k$ à un terme d'erreur près que l'on peut évaluer.

Nous obtenons ainsi la relation (12) :

$$\begin{aligned} & \left| \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}}(v_n - w_n) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \right| \\ &= \sum_{k < n} \left| \langle a \otimes \mathcal{E}(\tilde{\phi}), F_k(v_k - w_k) b \otimes \mathcal{E}(\tilde{\psi}) \rangle \right| + o(1) \end{aligned}$$

pour une certaine famille (explicite) d'opérateurs F_k , où le terme en $o(1)$ tend vers zéro avec δ de manière suffisamment uniforme par rapport aux paramètres du problème. On observe alors que si les opérateurs $L^{i,j}$ sont tous supposés contractifs, alors

$$\begin{aligned} & \sup_{a,b \leq 1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_n), (w_n - v_n) b \otimes e(\tilde{\psi}_n) \rangle \right| \\ & \leq hC \sum_{k < n} \sup_{a,b \leq 1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_k), (w_k - v_k) b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right| + o(1). \end{aligned}$$

De plus, nous pouvons, modulo un changement de constante C (grâce à l'hypothèse $\sum \|L^{i,j}\|^2 < +\infty$), faire cette hypothèse de contractivité. Par un argument du type

Gronwall discret, on arrive alors à la conclusion que

$$\sup_{a,b \leq 1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_n), (w_n - v_n)b \otimes e(\tilde{\psi}_n) \rangle \right| \leq (1 + C\delta)^n \times o(1).$$

Puisque $n\delta$ est borné par t , on en conclut que $w_n - v_n$ tend vers zéro au sens désiré.

On peut alors, en utilisant cette dernière estimation des termes $w_k - v_k$ et les hypothèses sur les opérateurs perturbatifs $\omega_k^{i,j}$, obtenir une bonne estimation de $w_n - u_n$ et appliquer à nouveau un argument du type Gronwall.

□

Remarque

On voit immédiatement, en suivant la preuve du Théorème 9 de [AP1], que si nous avons fait sur les fonctions ϕ, ψ de $L^2(\mathbb{R}_+)$ l'hypothèse supplémentaire que

$$\|\mathbb{E}_S \mathcal{E}(\phi) - \mathcal{E}(\phi)\|, \quad \|\mathbb{E}_S \mathcal{E}(\psi) - \mathcal{E}(\psi)\|$$

admettent une majoration de la forme $c\sqrt{\delta}$, alors nous aurions eu une estimation de la vitesse de convergence en $\sqrt{\delta}$: plus précisément nous aurions obtenu que pour tout T , presque tout t dans $[0, T]$:

$$\left| \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_S u_{[t/\delta]} \mathbb{E}_S b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle - \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), U_t b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \right| \leq \|a\| \|b\| C \sqrt{\delta} \quad (6.3.1)$$

pour une certaine constante C qui, encore une fois, ne dépend que des normes L^2 et L^∞ de ϕ, ψ , du coefficient c ci-dessus et des normes d'opérateurs des $L^{i,j}$ et des U_t .

La convergence obtenue peut être améliorée dans le cas où l'équation (Ec) est une équation Hudson-Parthasarathy, c'est-à-dire que les coefficients $L^{i,j}$ sont du type décrit dans le Théorème 6.1.5, ceci grâce à la proposition suivante, dont le premier résultat répond à une question qui sera naturelle dans l'interprétation physique : quand sait-on que les solutions $(u_n)_{n \geq 0}$ sont constituées d'opérateurs inversibles ?

Proposition 6.3.2 (Théorème 17 de [AP1]) *Supposons que l'équation (Ec) considérée soit du type Hudson-Parthasarathy. Alors, avec les hypothèses sur les termes $(\omega_k^{i,j})_{i,j,k}$ du Théorème 6.3.1, la solution $(u_n)_{n \geq 0}$ d'une équation (Edp) associée est constituée d'opérateurs inversibles.*

Si de plus pour presque tout t , les perturbations $(\omega_k^{i,j})$ vérifient

$$(\omega) \left\{ \begin{array}{l} \sup_{k|t_k \leq t} \sum_{i,j \in \Lambda} \|\omega_k^{i,j}\|^2 \quad \text{est d'ordre } \delta^2 \text{ pour tous } i, j \geq 1, \\ \sup_{k|t_k \leq t} \sum_{i \in \Lambda} \|\omega_k^{i,0}\| \quad \text{est d'ordre } \delta \\ \sup_{k|t_k \leq t} \sum_{j \in \Lambda} \|\omega_k^{0,j}\| \quad \text{est d'ordre } \delta \\ \sup_{k|t_k \leq t} \|\omega_k^{0,0}\| \quad \text{tend vers zéro avec } \delta \end{array} \right.$$

alors le processus $(u_n)_{n \geq 0}$ admet une borne uniforme.

Démonstration.

Ceci s'obtient simplement en écrivant l'équation (Edp) sous forme matricielle : on a $u_{n+1} = \mathbb{L}_n u_n$ avec

$$(\mathbb{L}_n)_{i,j} = \delta^{\varepsilon_{i,j}} (L^{i,j} + \omega_n^{i,j}) + \delta_{i,j} \text{Id} + \delta \hat{\delta}_{i,j} (L^{0,0} + \omega^{0,0}),$$

où $\hat{\delta}_{i,j}$ est le delta d'Evans qui vaut 1 si $i = j$ sont différents de 0, qui vaut zéro sinon. Ceci est analogue à la présentation que nous avons faite dans la section 6.2.1, à ceci près que les coefficients dépendent maintenant du temps.

On calcule alors $\mathbb{L}_n^* \mathbb{L}_n - \text{Id}$ et $\mathbb{L}_n \mathbb{L}_n^* - \text{Id}$; grâce à la forme particulière des coefficients $L^{i,j}$, de nombreux termes s'annulent. Avec les hypothèses les plus faibles de l'énoncé, on trouve que pour δ assez petit, ces deux opérateurs sont de norme strictement inférieure à 1 et ce pour tout n , de sorte que $\mathbb{L}_n^* \mathbb{L}_n$ et $\mathbb{L}_n \mathbb{L}_n^*$, et donc \mathbb{L}_n , sont inversibles.

Avec les hypothèses supplémentaires, on obtient

$$\|\mathbb{L}_n^* \mathbb{L}_n - I\| \leq C\delta$$

pour une certaine constante C , de sorte que

$$\|\mathbb{L}_n\| \leq \sqrt{1 + C\delta}$$

et que la composition $\mathbb{L}_n \dots \mathbb{L}_1$ est un opérateur uniformément borné en n .

□

Ceci permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 6.3.3 *Supposons que l'équation (Ec) soit du type Hudson-Parthasarathy. Alors si les opérateurs $(\omega_k^{i,j})_{i,j,k}$ vérifient les conditions (ω) , la solution $(u_n)_{n \geq 0}$ est telle que pour presque tout t de \mathbb{R}_+ ,*

$$u_{\lfloor t/\delta \rfloor} \text{ tend faiblement vers } U_t.$$

Démonstration.

Ceci se prouve à partir du Théorème 6.3.1 ; la Proposition 6.3.2 permet d'appliquer un argument du type “ $\varepsilon/3$ ”.

□

6.3.2 Application aux problèmes d'évolution

Nous allons maintenant traduire les résultats énoncés ci-dessus en termes d'évolutions répétées modélisées par une équation

$$u_{n+1} = \mathbb{L}_{n+1} u_n, \quad (6.2.1)$$

où \mathbb{L}_n est l'amplification décrite dans la section 6.2.1 d'une matrice \mathbb{L} indépendante de n mais dépendant de δ , que, contrairement au cas de la section 6.2, on ne suppose pas unitaire. On a le théorème suivant :

Théorème 6.3.4 (Théorème 13 de [AP1]) *Supposons qu'il existe des opérateurs bornés $L^{i,j}$, $i, j \in \Lambda \cup \{0\}$ sur \mathcal{H}_0 tels que $\sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} \|L^{i,j}\|^2 < +\infty$ et*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} \left\| \frac{\mathbb{L}^{i,j}(\delta) - \delta_{ij} I}{\delta^{\varepsilon_{ij}}} - L^{i,j} \right\|^2 = 0.$$

Supposons que l'équation

$$\begin{cases} dU_t &= \sum_{i,j} L^{i,j} U_t da^{i,j}(t) \\ U_0 &= Id \end{cases}$$

admette une solution $(U_t)_{t \geq 0}$ en opérateurs bornés telle que $t \mapsto \|U_t\|$ soit essentiellement bornée sur tout compact.

Alors pour presque tout t , pour tous ϕ, ψ dans $L^\infty([0, t])$, on a la convergence suivante :

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} u_{[t/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi) U_t b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle.$$

De plus, la convergence est uniforme pour a, b dans toute boule bornée de \mathcal{H}_0 , uniforme pour tout t dans un compact de \mathbb{R}_+ .

Remarques

- C'est ici que l'on fait apparaître la particularité de l'indice zéro : on voit que la normalisation dans les hypothèses de convergence des termes $\mathbb{L}^{0,0}$ diffère des normalisations de $\mathbb{L}^{0,j}$ ou $\mathbb{L}^{i,0}$, qui diffèrent encore des normalisations de $\mathbb{L}^{i,j}$ pour $i, j \neq 0$. On a dit que le coefficient $\mathbb{L}^{0,0}$ correspond à l'évolution du petit système \mathcal{H}_0 lui-même, et que les $\mathbb{L}^{i,0}$, $\mathbb{L}^{0,j}$ correspondent à l'interaction entre le petit système et l'environnement : on voit donc que l'on a des conditions de normalisation différentes sur le petit système et sur l'environnement.

- Les hypothèses de convergence du Théorème 6.3.4 peuvent sembler artificielles ; nous verrons après le Théorème 6.4.1 ci-dessous qu'elles sont en fait assez naturelles si l'on veut que la matrice \mathbb{L} donne lieu à des comportements asymptotiques non triviaux.

Le Théorème 6.3.3 mène à un résultat équivalent dans ce cadre :

Théorème 6.3.5 (Théorème 17 de [AP1]) *Supposons que la famille de matrices $\mathbb{L}(\delta)$ soit de la forme*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}^{0,0}(\delta) = I - \delta(iH + \frac{1}{2} \sum_k L_k^* L_k) + \delta \omega^{0,0}(\delta) \\ \mathbb{L}^{i,0}(\delta) = \sqrt{\delta} L_i + \delta \omega^{i,0}(\delta) \\ \mathbb{L}^{0,j}(\delta) = -\sqrt{\delta} \sum_k L_k^* S^{k,j} + \delta \omega^{0,j}(\delta) \\ \mathbb{L}^{i,j}(\delta) = I + S^{i,j} - \delta_{ij} I + \delta \omega^{i,j}(\delta) \end{array} \right.$$

où

- H est un opérateur autoadjoint borné,
 - les opérateurs $S^{i,j}$, $i, j \in \Lambda$, sont bornés et tels que la matrice $(S^{i,j})_{i,j}$ soit unitaire et
 - les opérateurs L_i , $i \in \Lambda$ sont bornés et tels que $\sum L_i^* L_i$ converge fortement,
- et où $\sum_{i,j} \|\omega^{i,j}(\delta)\|^2$ est uniformément borné avec de plus $\|\omega^{0,0}(\delta)\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

Alors la solution $(u_n)_{n \geq 0}$ de (6.2.1) est faite d'opérateurs bornés avec une borne localement uniforme et pour presque tout t , $u_{\lfloor t/\delta \rfloor}$ tend faiblement vers U_t lorsque δ tend vers zéro.

Remarque

Notons que les hypothèses de ce théorème sont en particulier vérifiées si l'on suppose que les opérateurs $\mathbb{L}(\delta)$ sont tous unitaires et que les coefficients $\mathbb{L}^{i,j}(\delta)$ vérifient les conditions de convergence du Théorème 6.3.4.

Exemple

Maassen considère une évolution à temps discret donnée par la matrice

$$\mathbb{L}(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\delta} & 0 & 0 & -\sin \sqrt{\delta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \sqrt{\delta} & 0 & 0 & \cos \sqrt{\delta} \end{pmatrix}. \quad (6.3.2)$$

Cette matrice est elle-même unitaire, de sorte que le Théorème 6.3.5 ne nous apprend rien de plus que le Théorème 6.3.4. On sait ainsi que la suite d'opérateurs $(u_n)_{n \geq 0}$ associée est telle que, pour presque tout t de \mathbb{R}_+ , $u_{[t/\delta]}$ converge faiblement vers \bar{U}_t lorsque δ tend vers zéro, où $(U_t)_{t \geq 0}$ est la solution de

$$dU_t = -\frac{1}{2}U_t dt + VU_t da^{0,1}(t) - V^*U_t da^{1,0}(t)$$

avec $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette évolution décrit le retour spontané à l'état fondamental dans le modèle de Wigner-Weisskopf de l'atome à deux niveaux à la température zéro. Pour l'exploitation de cette équation dans le but d'en tirer des informations sur l'évolution du réservoir on pourra consulter [M-R].

6.3.3 Evolution Hamiltonienne et limite de couplage faible

La dynamique que nous considérons est dictée par l'opérateur \mathbb{L} qui détermine l'interaction entre le petit système \mathcal{H}_0 et une copie de l'espace \mathfrak{h} ; typiquement, un Hamiltonien H est associé à cette interaction, de sorte que \mathbb{L} est alors de la forme $e^{i\delta H}$.

Observons ce que cela signifie sur l'exemple de Maassen cité ci-dessus : si l'on essaie de mettre la matrice (6.3.2) sous la forme $e^{i\delta H}$, on voit qu'une solution en H est

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i/\sqrt{\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i/\sqrt{\delta} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3.3)$$

Cet Hamiltonien s'écrit encore $H = -\frac{i}{\sqrt{\delta}}a^- \otimes a^+ + \frac{i}{\sqrt{\delta}}a^+ \otimes a^-$.

Avec l'hypothèse minimale que δH tend vers zéro en norme lorsque δ tend vers zéro, la solution est unique, de sorte qu'il n'est pas possible d'avoir un Hamiltonien indépendant de δ et que H est la matrice ci-dessus.

De manière plus générale, supposons que l'on considère un quelconque opérateur \mathbb{L} sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$ dont on suppose qu'il peut s'écrire $e^{i\delta H}$, où H est une matrice symétrique $(N+1) \times (N+1)$ dont les coefficients sont des opérateurs sur \mathcal{H}_0 . Parmi les divers coefficients de H , on peut voir l'opérateur $H^{0,0}$ comme traduisant l'évolution propre du petit système, les coefficients qui apparaissent sur les "colonnes" restantes, $(H^{i,0})_{i=1,\dots,N}$ et sa transposée, représentant l'interaction entre le petit système et son environnement; l'interprétation du bloc $(H^{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ comme l'évolution propre de l'environnement est moins naturelle en général.

Pour que la matrice \mathbb{L} associée à H donne une interaction non triviale à la limite (autrement dit, des coefficients $L^{i,0}$, $i = 1, \dots, N$ non tous nuls), il est clair

que l'Hamiltonien doit dépendre de δ . Il semble de plus qu'il soit nécessaire que les coefficients $H^{i,0}$ soient d'ordre $1/\sqrt{\delta}$ et les coefficients $H^{i,j}$ d'ordre $1/\delta$. Autrement dit, un coefficient de couplage λ semble apparaître devant les termes d'interaction, tel que $\lambda^2\delta$ soit d'ordre un ; c'est la normalisation qui est utilisée dans la fameuse *limite de couplage faible*, qui apparaît ici naturellement.

La section IV.2 de [AP1] donne une réponse beaucoup plus générale au problème de décrire l'évolution asymptotique à partir de l'Hamiltonien de l'interaction répétée. On considère dans cette section un hamiltonien de la forme

$$H_0 \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes H_s + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sum_{i \in \Lambda} (V_i a^{0,i} + V_i^* a^{i,0}) + \frac{1}{\delta} \sum_{i,j \in \Lambda} D_{i,j} a^{i,j},$$

donc cumulant des termes d'interaction de dipôle et des termes de scattering. L'équation limite comporte alors des termes correspondant à chacune des interactions individuellement mais aussi des termes n'apparaissant que lorsque les deux interactions sont présentes. Ceci n'avait à notre connaissance jamais été observé auparavant.

6.4 Convergence des Lindbladiens et Hamiltoniens

6.4.1 Evolutions associées sur \mathcal{H}_0

Si l'on ne s'intéresse qu'à l'effet de l'interaction sur le petit système \mathcal{H}_0 , il est beaucoup plus facile d'obtenir des résultats de convergence. Parthasarathy remarque déjà dans son livre qu'à toute évolution complètement positive $T_t = e^{t\mathcal{L}}$ on peut associer une suite d'unitaires $(u_n)_{n \geq 0}$ sur \mathcal{H}_0 telle que l'évolution $n \mapsto \mathbb{E}_0(u_n^*(X \otimes \text{Id})u_n)$ associée converge en norme d'opérateur sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ vers T_t (voir Exercices 29.12 et 29.13 de [Py2]).

Rappelons d'abord que, de la même manière que dans notre Proposition 6.2.1, la solution $(u_n)_{n \geq 0}$ de

$$\begin{cases} u_{n+1} = \mathbb{L}_n u_n \\ u_0 = \text{Id} \end{cases}$$

engendre la dynamique suivante : pour tout $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$,

$$\mathbb{E}_0(u_n^*(X \otimes \text{Id})u_n) = \ell^n(X)$$

avec

$$\ell(X) = \sum_{i \in \Lambda \cup \{0\}} \mathbb{L}^{i,0*} X \mathbb{L}^{i,0}.$$

La facilité avec laquelle on prouve le résultat suivant contraste avec la preuve de notre Théorème 6.3.1 :

Théorème 6.4.1 (Théorème 14 de [AP1]) Soit $\mathbb{L}(\delta) = (\mathbb{L}^{i,j}(\delta))_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}}$ une famille de matrices telles que

$$\sum_{i \in \Lambda \cup \{0\}} \mathbb{L}^{i,0*} \mathbb{L}^{i,0}(\delta) = I$$

et que les coefficients convergent au sens suivant :

- $(\mathbb{L}^{0,0}(\delta) - I)/\delta$ converge en norme d'opérateur vers $L^{0,0}$,
- $\sum_{i \in \Lambda} \left\| \mathbb{L}^{i,0}(\delta)/\sqrt{\delta} - L^{i,0} \right\|^2$ tend vers zéro .

Alors il existe un opérateur autoadjoint H dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ tel que, pour tout t de \mathbb{R}_+ ,

$$\ell^{[t/h]} \longrightarrow e^{t\mathcal{L}}$$

en norme d'opérateur, avec

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda \cup \{0\}} \left(2L^{i,0*} X L^{i,0} - L^{i,0*} L^{i,0} X - X L^{i,0*} L^{i,0} \right).$$

Démonstration.

La preuve est simple mais il est instructif d'observer d'où proviennent l'opérateur H et la différence de forme entre le Lindbladien \mathcal{L} et l'opérateur ℓ sous "forme de Kraus".

On écrit un développement limité au premier ordre de la relation

$$\ell(\text{Id}) = \text{Id};$$

on obtient immédiatement par identification des coefficients la relation

$$(L^{0,0*} + L^{0,0}) + \sum_{i \in \{0\} \cup \Lambda} L^{i,0*} L^{i,0} = 0$$

qui montre que

$$i \left(L^{0,0} + \frac{1}{2} \sum_{i \in \{0\} \cup \Lambda} L^{i,0*} L^{i,0} \right)$$

est autoadjoint ; on le note donc H . Il suffit ensuite de remarquer que le développement limité de ℓ prend la forme suivante :

$$\ell(X) = X + h \left(i[H, X] + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda \cup \{0\}} \left(2L^{i,0*} X L^{i,0} - L^{i,0*} L^{i,0} X - X L^{i,0*} L^{i,0} \right) \right) + o(h\|X\|),$$

ce qui permet de conclure.

□

Les calculs associés permettent par ailleurs de montrer que les conditions de convergence qui apparaissent dans ce résultat ainsi que dans nos Théorèmes 6.3.4 et 6.3.5 ne sont pas que des hypothèses artificiellement choisies pour nous permettre de conclure mais sont au contraire naturelles.

Commençons par une petite digression concernant la dynamique induite par $(u_n)_{n \geq 0}$ sur \mathcal{H}_0 . De même qu'en temps continu (voir le Théorème 6.1.5), la solution de l'équation (6.2.1) a la propriété que $(\mathbb{E}_0 u_n)_{n \geq 0}$ est un semigroupe $(\tau_n)_{n \geq 0}$; on a ainsi pour tout n

$$\mathbb{E}_0(u_n) = \tau_1^n$$

avec

$$\tau_1 = \mathbb{L}^{0,0}.$$

Si l'on fait l'hypothèse que pour presque tout t , $\tau_{\lfloor t/\delta \rfloor}$ converge en norme d'opérateur lorsque δ tend vers zéro et que $\mathbb{L}^{0,0}$ est une fonction continue en zéro de δ , alors la condition $(\mathbb{L}^{0,0}(\delta) - \text{Id})/\delta$ est imposée puisque $(\text{Id} + (\mathbb{L}^{0,0}(\delta) - \text{Id}))^{\lfloor 1/\delta \rfloor}$ doit converger. Alors la condition $\ell(\text{Id}) = \text{Id}$ impose

$$\sum_{i \in \Lambda \cup \{0\}} \mathbb{L}^{i,0*} \mathbb{L}^{i,0}(\delta) = -\delta(L^{0,0*} + L^{0,0}) + o(\delta),$$

de sorte que les ordres de grandeur des coefficients $\mathbb{L}^{i,0}$ sont imposés; les conditions de convergence du Théorème 6.4.1 sont alors naturelles. Par la suite, si l'on impose que les matrices \mathbb{L} soient unitaires ou proches de l'unitarité, les autres conditions de convergence deviennent naturelles.

Nous n'avons rien démontré qui *implique* les conditions de convergence que nous utilisons dans nos résultats; c'est simplement qu'aucun énoncé précis ne semble avoir de véritable intérêt. Il est toujours possible par exemple d'opérer sur les coefficients de $\mathbb{L}(\delta)$ des permutations dépendant de δ qui ne modifieraient aucunement la dynamique; nous voulions simplement, par nos remarques, montrer que nos hypothèses sont plausibles dans un problème bien posé.

6.4.2 Hamiltoniens associés à la dynamique

On sait que la solution d'une équation de Hudson-Parthasarathy possède une propriété algébrique qui permet de définir sur le système couplé un Hamiltonien associé à la dynamique. Nous allons voir qu'une équation discrète qui approche une équation de Hudson-Parthasarathy possède une propriété équivalente et qu'on peut ainsi lui associer un Hamiltonien discret. Plutôt que de rappeler en détail le cas continu, nous allons prouver les propriétés en temps discret et énoncer leurs analogues à temps continu. Pour plus d'informations à ce sujet on peut consulter [Gre].

Nous ne considérerons plus que des équations différentielles du type Hudson-Parthasarathy. Nous supposons donc que les matrices $\mathbb{L}(\delta)$ vérifient les conditions du Théorème 6.3.5 et convergent vers une équation (Ec) du type Hudson-Parthasarathy. Nous rappelons (voir la Proposition 6.3.2) qu'alors, pour δ assez petit, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ solution de

$$u_{n+1} = \mathbb{L}_n u_n$$

est constituée d'opérateurs inversibles de norme uniformément bornée. Nous allons prouver que ce processus est de surcroît un *cocycle*, c'est-à-dire en fait qu'il vérifie la propriété énoncée dans la Proposition 6.4.2 ci-dessous.

Pour parler de ces propriétés il nous faut étendre notre cadre de travail. Nous considérons notre espace de Fock $\mathbb{T}\Phi$ comme un sous-espace de l'espace de Fock $\mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}}$ construit de la même manière en remplaçant \mathbb{N} par \mathbb{Z} ; dans l'interprétation de Guichardet nous identifions en fait $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N},\Lambda})$ au sous-espace des fonctions f de $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{Z},\Lambda})$ telles que $f(A) = 0$ si $A \not\subset \mathbb{N} \times \Lambda$.

On a alors la décomposition tensorielle explicite comme au chapitre 1

$$\mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}_-} \otimes \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{N}},$$

avec des notations évidentes, et en considérant l'espace initial :

$$\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}_-} \otimes (\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{N}}),$$

ce qui nous permet d'amplifier de manière canonique tous les opérateurs que nous avons considérés jusqu'ici à $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}}$: soulignons que nous ne changeons rien à notre calcul stochastique mais faisons simplement vivre les opérateurs définis jusqu'à maintenant - y compris les intégrales - dans un espace plus gros.

Sur $l^2(\mathbb{Z})$, on note θ l'opérateur de translation à gauche défini par

$$\theta f(n) = f(n+1).$$

C'est un opérateur unitaire dont la seconde quantification, encore notée θ , est un unitaire de $\mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}}$ que l'on amplifie à $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}}$. On voit alors facilement que cet opérateur vérifie

$$(\theta^*)^n a_1^{i,j} \theta^n = a_{n+1}^{i,j}$$

pour tous i, j de $0 \in \Lambda$ et on en déduit la proposition suivante :

Proposition 6.4.2 *On définit un nouveau processus $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par*

$$\begin{cases} p_n = \theta^n u_n \text{ pour } n \text{ positif et} \\ p_n = p_{-n}^{-1} \text{ pour } n \text{ négatif.} \end{cases}$$

Alors $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un groupe à un paramètre, de sorte que pour tout n ,

$$\theta^n u_n = (\theta \mathbb{L}_1)^n.$$

Remarque

La propriété particulière des solutions $(U_t)_{t \geq 0}$ d'équations de Hudson-Parthasarathy à temps continu s'énonce de la même manière : on considère la deuxième quantification $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de l'opérateur de translation à gauche sur $L^2(\mathbb{R})$. Le processus $(\Theta_t U_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ s'étend comme ci-dessus aux temps négatifs et on a alors un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires qui est de plus fortement continu (voir [Py2], Théorème 27.8).

Le théorème de Stone lui associe ainsi un opérateur H , appelé l'*Hamiltonien* du système, qui vérifie

$$\Theta_t U_t = e^{itH}$$

pour tout t . Puisque dans notre cadre discret

$$\theta^n u_n = (I + (\theta \mathbb{L}_1 - I))^n$$

pour tout n , il est naturel d'appeler $\theta \mathbb{L}_1 - I$ l'Hamiltonien associé à l'évolution $u_{n+1} = \mathbb{L}_n u_n$.

Il est alors naturel de se demander si l'Hamiltonien associé au système discret converge vers son pendant à temps continu. Le résultat suivant répond à cette question :

Proposition 6.4.3 *Supposons que la matrice $\mathbb{L}(\delta)$ vérifie les conditions de convergence du Théorème 6.3.5. Considérons alors deux vecteurs a, b dans \mathcal{H}_0 et deux fonctions C^∞ à support compact dans \mathbb{R} . Si $b \otimes \mathcal{E}(\phi)$ est dans le domaine de l'Hamiltonien H , on a pour tout α dans $]0, \frac{1}{2}[$,*

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\delta^\alpha} \mathbb{E}_S \left((\theta \mathbb{L}_1)^{[\delta^{(\alpha-1)}]} - Id \right) \mathbb{E}_S b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), iH b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle$$

où l'on a une estimation de la différence des deux termes en $\sup(\delta^\alpha, \delta^{1/2-\alpha})$, qui est uniforme pour a, b dans une boule bornée de \mathcal{H}_0 .

Remarque

La condition $b \otimes \mathcal{E}(\phi) \in \text{Dom } H$ équivaut, d'après Gregoratti, (voir [Gre]), aux égalités

$$\phi(0) \sum_{j=1}^N S^{i,j*} b = \phi(0) b + \sum_{j=1}^N S^{i,j*} L_j b \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

En particulier, il peut arriver qu'aucun tel $a \otimes \mathcal{E}(\phi)$ n'appartienne au domaine de H .

Ce résultat n'apparaît dans aucun article ; nous en donnons donc ici une preuve complète.

Démonstration.

Nous allons prouver que, pour ε et δ assez petits,

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\varepsilon}(e^{i\varepsilon\mathbf{H}} - I) b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle - \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} ((\theta \mathbb{L}_1)^{[\varepsilon/\delta]} - I) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle$$

admet une majoration de l'ordre $\sqrt{\delta}/\varepsilon$, uniformément pour a, b dans un borné de \mathcal{H}_0 . Le résultat s'en déduira alors en prenant $\varepsilon = \delta^\alpha$ et en utilisant le fait que $\frac{1}{\varepsilon}(e^{i\varepsilon\mathbf{H}} - I) - i\mathbf{H}$ est, en norme, de l'ordre de ε sur le domaine de \mathbf{H} . Remarquons que le fait que ϕ, ψ sont maintenant des fonctions sur \mathbb{R} tout entier ne change rien à la validité des estimations précédemment établies.

La régularité de ϕ et ψ permet de montrer que

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\varepsilon} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle - \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle$$

admet un majorant de la forme $\sqrt{\delta}/\varepsilon$. Cette même régularité va nous permettre d'utiliser l'estimation (6.3.1) faite après la preuve de 6.3.1 pour évaluer

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\varepsilon} e^{i\varepsilon\mathbf{H}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle - \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} (\theta \mathbb{L}_1)^{[\varepsilon/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle.$$

Rappelons que $e^{i\varepsilon\mathbf{H}}$ est égal à $\Theta_\varepsilon U_\varepsilon$ et que $(\theta \mathbb{L}_1)^{[\varepsilon/\delta]}$ est égal à $\theta^{[\varepsilon/\delta]} u_{[\varepsilon/\delta]}$. Il est par ailleurs clair que l'on a la relation

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \theta^{[\varepsilon/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \Theta_{[\varepsilon/\delta]\delta} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$$

et la relation analogue pour θ^*, Θ^* .

Par conséquent, ce que nous voulons estimer est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(\langle \Theta_\varepsilon^* a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} U_\varepsilon \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle - \langle \Theta_{[\varepsilon/\delta]\delta}^* a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} u_{[\varepsilon/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \right) \\ & \leq \left| \langle (\Theta_\varepsilon^* - \Theta_{[\varepsilon/\delta]\delta}^*) a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} u_{[\varepsilon/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \right| \\ & \quad + \left| \frac{1}{\varepsilon} \langle \Theta_\varepsilon^* a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} (U_\varepsilon - u_{[\varepsilon/\delta]}) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \right|. \end{aligned}$$

Dans le membre de droite, le premier terme admet un majorant de la forme $\sqrt{\delta}/\varepsilon$ grâce à la régularité de ϕ . Par ailleurs,

$$\|\Theta_\varepsilon^* \phi\|_2 = \|\phi\|_2,$$

$$\|\Theta_\varepsilon^* \phi\|_\infty = \|\phi\|_\infty,$$

et

$$\|(\Theta_\varepsilon^* \phi)'\|_\infty = \|\phi'\|_\infty.$$

Puisque, dans l'estimation de

$$\|\mathbb{E}_S \mathcal{E}(\phi) - \mathcal{E}(\phi)\|, \quad \|\mathbb{E}_S \mathcal{E}(\psi) - \mathcal{E}(\psi)\|$$

en $c\sqrt{\delta}$ dont nous nous servons dans la remarque (6.3.1), le coefficient c ne dépend que des bornes sur les dérivées de ϕ, ψ , cette remarque nous permet d'avoir une estimation du second terme du membre de droite en $\sqrt{\delta}/\varepsilon$ avec une constante indépendante de ε .

□

Ceci conclut cette thèse. *Nunc est bibendum.*

Deuxième partie

Articles

Annexe A

Représentations intégrales et nucléaires des opérateurs sur l'espace de Fock à temps discret

Annexe B

Matrices de Pauli et formule d'Itô quantique

Annexe C

Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification

Annexe D

Interactions quantiques répétées et continues : la production spontanée de bruits quantiques

Annexe E

Chaînes d'atomes à $(N + 1)$ niveaux et bruits quantiques de dimension N

