

# Singularités quotient et produits symétriques

Pan Feng

September 11, 1996





*Je tiens à remercier Gérard Gonzalez-Sprinberg et je suis très reconnaissant pour sa patience, ses critiques et ses aides en mathématiques et en français tout au long de ces dernières années.*

*Je remercie Monique Lejeune-Jalabert et Michel Brion qui m'ont initié à la théorie de la Géométrie Algébrique, et qui ont répondu à mes questions dans mes moments de doute. Leur participation à ce jury me fait l'honneur et le grand plaisir.*

*Je tiens à exprimer également ma reconnaissance à José Bertin, Marcel Moralès et les autres collègues qui m'ont aidé dans mes études ou dans mes préparations des cours T.D.*

*Eduardo Cattani et Walter Ferrer m'ont fait beaucoup d'honneur en acceptant de rapporter sur ma thèse. Je tiens à leur exprimer mes vifs remerciements. Je suis également très honoré par la participation à ce jury de Antonio Campillo et Thierry Vust.*

*Enfin merci à Yacine Rebahi, Catherine Bouvier, Alvaro Rittatore, Jawher El Goul, Lahcene Haddak, Mohamed Maarouf, Ludovic Pillons et tous les autres amis pour les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec eux et aussi pour leurs amitiés constantes.*



## Introduction.

Dans ce travail nous présentons d'abord (chapitres 1-4) une méthode constructive pour obtenir des désingularisations algébriques des singularités quotient  $\mathbb{C}^n/G$ , avec  $G \subset GL(n, \mathbb{C})$  un sous-groupe fini. Celle-ci repose de façon essentielle sur des méthodes toriques, est donc différente de la méthode générale de Hironaka [20]. Ensuite on considère des applications de cette méthode dans des cas de dimension 3 (chapitre 5) et des cas de produits symétriques (chapitre 6).

Les désingularisations et diverses propriétés des singularités quotient pour  $n = 2$  ont été étudiées et sont assez bien connues ([1], [6], [9], [13], [14], [16], [35], parmi d'autres). Le cas  $n = 3$  est aussi beaucoup étudié, mais des résolutions explicites des  $\mathbb{C}^3/G$  sont construites plutôt pour des sous-groupes finis de  $SL(3, \mathbb{C})$  ([3], [21], [22], [36] ...). Quand  $G \subset GL(n, \mathbb{C})$  est abélien,  $\mathbb{C}^n/G$  est une variété torique qui peut être associée à un cône simplicial, on peut donc utiliser des méthodes toriques pour trouver des désingularisations ([23] ou [29]). Quand  $G$  est cyclique, il y a aussi une méthode directe de désingulariser  $\mathbb{C}^n/G$  ([11]).

Notons  $X := \mathbb{C}^n$ , considéré comme une  $G$ -variété. Pour obtenir une désingularisation de  $X/G$ , nous construisons une  $G$ -variété  $\widetilde{X}$  (éventuellement singulière) munie d'un  $G$ -morphisme propre et birationnel de  $\widetilde{X}$  dans  $X$  telle que les propriétés suivantes soient vérifiées:

- (1) Pour chaque point  $x \in \widetilde{X}$ , son groupe d'isotropie  $G_x$  est abélien, et  $x$  a un voisinage ouvert  $\widetilde{U}_x$  qui est stable par  $G_x$  et isomorphe à un ouvert de Zariski d'une variété torique  $\widetilde{V}_x$ .
- (2) Il existe un morphisme de  $\widetilde{V}_x$  dans  $X$  propre, birationnel et équivariant par rapport à un tore contenant  $G_x$ .
- (3) L'immersion ouverte de  $\widetilde{U}_x$  dans  $\widetilde{V}_x$  est équivariante par rapport à  $G_x$ , et l'image de  $x$  est un point régulier de  $\widetilde{V}_x/G_x$ . De plus tous les diviseurs exceptionnels de  $\widetilde{V}_x/G_x$  sont contractés dans  $Sing(X/G_x)$ , le lieu singulier de  $X/G_x$ .

A partir de ces propriétés, on peut déduire que  $\widetilde{X}/G$  est une désingularisation de  $X/G$ .

Plus précisément, nous construisons d'abord une  $G$ -variété  $X'$  à partir de  $X := \mathbb{C}^n$  en faisant des éclatements successifs de centres  $G$ -stables et lisses, telle que le groupe d'isotropie de tout point de  $X'$  soit abélien. On appelle  $X'$  un  $G$ -modèle équivariant abélien de  $X$  (théorème 1.13). Toutes les singularités de  $X'/G$  sont des singularités toriques simpliciales (singularités quotient d'un groupe abélien fini), on peut donc considérer  $X'/G$  comme une résolution partielle de  $X/G$ . Pour  $n = 3$ , telles  $X'$  ont été construites dans [32], où  $X'/G$  est appelée modèle à singularités toriques simpliciales de  $X/G$ . Ensuite dans le chapitre 2, on définit une stratification  $\mathcal{S}$  de  $X'$  et on montre l'existence d'un recouvrement naturel  $\mathcal{R}$  de  $X'$  qui est compatible avec cette stratification, tel que chaque élément de  $\mathcal{R}$  soit un ouvert de  $X'$  qui est la réunion disjointe de strates et qui est isomorphe à un ouvert d'une variété torique. Après avoir obtenu des résultats préliminaires concernant des variétés toriques munies d'une

action d'un groupe non abélien (chapitre 3), nous construisons des modifications toriques  $\tilde{U}$  pour chaque  $U$  dans  $\mathcal{R}$  et montrons que ces  $\tilde{U}$  peuvent se recoller. Et on vérifie que le recollement des  $\tilde{U}$  donne la  $\tilde{X}$  voulue (chapitre 4).

Ensuite comme applications on considère d'abord des singularités quotient de dimension 3 (chapitre 5). Dans le chapitre 6 on considère le produit symétrique  $Sym^{(n)}X := X^n/S_n$  d'une variété lisse  $X$  et l'espace de configuration  $F(X, n)$ , où le groupe symétrique  $S_n$  agit sur  $X^n$  en permutant les  $n$  facteurs, et où  $F(X, n) := \{x \in X^n \mid G_x = \{e\}\}$ . On construit une compactification  $\bar{X}[n]$  de  $F(X, n)$  et on établit un lien entre  $\bar{X}[n]$  et la compactification  $X[n]$  construite dans [12]. Ensuite on obtient des exemples de désingularisations de  $Sym^{(3)}(\mathbb{C}^d)$  et de  $Sym^{(4)}(\mathbb{C}^d)$ , et on montre que la même méthode nous permet d'obtenir des désingularisations de  $Sym^{(n)}X$  avec  $n = 3$  ou  $4$ , pour toute variété  $X$  quasiprojective et lisse.

# 1 Modèles équivariants abéliens.

On rappelle d'abord quelques notions élémentaires: modification, désingularisation, éclatement,  $G$ -variétés etc. et on montre deux lemmes préliminaires 1.3 et 1.4. Ensuite dans le deuxième paragraphe on considère l'espace affine  $X := \mathbb{C}^n$  muni d'une action d'un sous-groupe fini non abélien  $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ . On montre qu'après avoir fait successivement des éclatements de centres lisses convenables, on obtient une  $G$ -variété lisse  $X'$  telle que le groupe d'isotropie de tout point de  $X'$  soit abélien (Théorème 1.13). On appelle  $X'$  modèle équivariant abélien.

Si on regarde  $X'/G$  comme une résolution partielle de  $X/G$ , alors les singularités locales dans  $X'/G$  sont toutes des singularités toriques simpliciales (singularités quotient d'un groupe abélien fini). Ainsi on a réduit les singularités quotient d'un groupe fini en singularités quotient d'un groupe abélien. Ceci nous permet, au moins pour des résolutions locales, d'utiliser des méthodes toriques bien connues. Dans le cas où la dimension est égale à 3, telle  $X'$  a été construite dans [32], où  $X'/G$  est appelée modèle à singularités toriques simpliciales.

## 1.1 Rappels sur éclatements et $G$ -variétés.

Dans tout ce qui suit, les variétés algébriques considérées sont définies sur  $\mathbb{C}$ , le corps des nombres complexes.

Soit  $X$  une variété algébrique réduite et notons  $Sing(X)$  le lieu singulier de  $X$ . Une désingularisation de  $X$  est un couple  $(\hat{X}, \varphi)$  où

- $\hat{X}$  est une variété lisse,  $\varphi : \hat{X} \rightarrow X$  est un morphisme propre et birationnel,
- $\hat{X} \setminus \varphi^{-1}(Sing(X))$  est dense dans  $\hat{X}$ ,
- $\varphi$  est un isomorphisme de  $\hat{X} \setminus \varphi^{-1}(Sing(X))$  dans  $X \setminus Sing(X)$ .

Par abus de langage on dit aussi que  $\hat{X}$  est une désingularisation de  $X$ . On appelle un morphisme  $\psi : Y \rightarrow X$  une modification s'il induit un isomorphisme d'un ouvert dense de  $Y$  sur un ouvert dense de  $X$ .

Soient  $V$  une sous-variété de  $X$  et  $\mathcal{J}$  le faisceau d'idéaux de  $V$ . Le couple  $(V, \varphi)$ , où  $\varphi : X' \rightarrow X$  est un morphisme, est appelé l'éclatement de  $X$  de centre  $V$  si le morphisme  $\varphi$  vérifie les conditions suivantes;

- le faisceau d'idéaux  $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$  sur  $X'$  est inversible;
- pour tout morphisme  $\psi : X'' \rightarrow X$  avec  $\psi^{-1}(\mathcal{J})$  inversible sur  $X''$ , il existe un unique morphisme  $h : X'' \rightarrow X'$  tel que  $\psi = \varphi \circ h$ .

Si  $\varphi$  vérifie ces deux conditions, on dit aussi que  $X'$  est l'éclatement de  $X$  de centre  $V$  et on le note  $Bl_V X$  (ref. [19]). Notons  $E_V$  la sous-variété de  $X'$  définie par le faisceau d'idéaux  $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ . On appelle  $E_V$  le diviseur exceptionnel du morphisme  $\varphi$ .



S'il existe  $\{f_0, f_1, \dots, f_s\} \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  tel que  $\mathcal{J}$  soit engendré par les  $f_i$ ,  $0 \leq i \leq s$ , alors l'éclatement  $Bl_V X$  de  $X$  de centre  $V$  peut être construit en prenant l'adhérence de l'ensemble des points  $(x, y)$  dans  $X \times \mathbb{P}^s$ , avec  $x \in X \setminus V$  et  $y \in \mathbb{P}^s$  défini par

$$y := (f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_s(x)) \quad .$$

Soient  $V, W$  deux sous-variétés de  $X$  avec  $V$  lisse et  $V \subset W$ . Si  $V$  ne contient aucune composante irréductible de  $W$ , alors on définit la transformée stricte de  $W$  (dans  $Bl_V X$ ), notée  $\overline{W}$ , comme l'adhérence de l'image inverse de  $W \setminus V$  dans  $Bl_V X$ .

**Définition 1.1** Soient  $X$  une variété lisse et  $V_1, V_2$  deux sous-variétés lisses de  $X$ . Soit  $\mathcal{J}_1$  (resp.  $\mathcal{J}_2$ ) le faisceau d'idéaux qui définit  $V_1$  (resp.  $V_2$ ). On dit que  $V_1$  et  $V_2$  sont transversales dans  $X$  au point  $x \in (V_1 \cap V_2)$  si la condition suivante est vérifiée: il existe un système régulier de paramètres<sup>1</sup> de  $\mathcal{O}_{X,x}$ , noté  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , et deux entiers  $j$  et  $l$  avec  $1 \leq j < l \leq n$ , tels que  $\mathcal{J}_{1,x}$  (resp.  $\mathcal{J}_{2,x}$ ) soit engendré par  $\{x_i \mid 1 \leq i \leq j\}$  (resp.  $\{x_i \mid l \leq i \leq n\}$ ). On dit que  $V_1$  et  $V_2$  sont transversales dans  $X$  si elles sont transversales en tout point  $x$  de  $(V_1 \cap V_2)$ .

Plus généralement, si on a  $k$  sous-variétés lisses dans  $X$ ,  $k > 2$ , notées  $V_1, \dots, V_k$ , on dit que  $V_1, \dots, V_k$  sont transversales dans  $X$  au point  $x$ , avec  $x \in \bigcap_{i=1}^k V_i$ , si la condition suivante est vérifiée.

(\*) Il existe un système régulier de paramètres  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de  $\mathcal{O}_x$  et des entiers  $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^k$ , avec  $1 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 < \alpha_2 \leq \beta_2 < \dots < \alpha_k \leq \beta_k \leq n$ , tels que  $\mathcal{J}_{i,x}$  soit engendré par  $\{x_j \mid \alpha_i \leq j \leq \beta_i\}$ , où  $\mathcal{J}_i$  est le faisceau d'idéaux qui définit  $V_i$ .

On dit que  $V_1, \dots, V_k$  sont transversales si pour tout point  $x \in \bigcup_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k} (V_{j_1} \cap V_{j_2})$ , les  $V_i$  qui passent par  $x$ , avec  $1 \leq i \leq k$ , sont transversales en  $x$ .

## Remarque 1.2

(1) En d'autres termes, la condition (\*) ci-dessus équivaut à l'égalité suivante,

$$\sum_{i=1}^k \text{Codim}_{T_x X}(T_x V_i) = \text{Codim}_{T_x X}\left(\bigcap_{i=1}^k T_x V_i\right) \quad ,$$

où  $T_x$  est l'espace tangent au point  $x$ .

(2) Si  $V_1, \dots, V_k$  sont transversales, alors  $V_1 \cap \dots \cap V_k$  est une sous-variété lisse.

**Lemme 1.3** Soient  $X$  une variété lisse et  $W_1, W_2$  deux sous-variétés lisses de  $X$ . Supposons qu'il existe une sous-variété  $Y$  de  $X$  telle que  $W_1$  et  $W_2$  soient transversales dans  $Y$ . Notons  $V$  leur intersection et soit  $Z$  une sous-variété propre lisse de  $V$ .

<sup>1</sup>Pour système de paramètres d'un anneau local voir [2] page 122.

- a) Dans  $Bl_V X$  les transformées strictes de  $W_1$  et de  $W_2$  sont disjointes.
- b) Soit  $Bl_Z X$  l'éclatement de  $X$  de centre  $Z$ . Notons  $E_Z$  le diviseur exceptionnel. Soit  $\overline{V}$  (resp.  $\overline{W}_1, \overline{W}_2$ ) la transformée stricte de  $V$  (resp. de  $W_1$ , de  $W_2$ ). Alors  $\overline{W}_1, \overline{W}_2$  sont lisses, transversales dans  $\overline{V}$ , et leur intersection, qui est égale à  $\overline{V}$ , est aussi lisse.
- c) Soit  $Bl_{\overline{V}}(Bl_Z X)$  l'éclatement de  $Bl_Z X$  de centre  $\overline{V}$ . Soit  $E_V$  le diviseur exceptionnel. Alors  $E_Z$  et  $E_V$  sont transversaux, les transformées strictes de  $W_1$  et de  $W_2$  sont disjointes.

*Démonstration.* On a les inclusions suivantes:

$$W_i \subset Y \subset X, \quad i = 1, 2,$$

$$Z \subset V := W_1 \cap W_2.$$

Toutes les assertions de l'énoncé sont de type local. On peut les vérifier directement en utilisant des coordonnées locales.

- a) On remarque que  $V$  est une sous-variété lisse. En effet pour tout point  $x \in V$ , il existe un système régulier de paramètres de  $\mathcal{O}_{X,x}$ , noté  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , et trois entiers  $j, l, k$ , avec  $1 \leq j < l < k \leq n$ , tels que  $\mathcal{J}_{Y,x}$  soit engendré par  $\{x_i \mid k \leq i \leq n\}$ , et tels que  $\mathcal{J}_{W_1,x}$  soit engendré par  $\{x_i \mid j \leq i < l\} \cup \{x_i \mid k \leq i \leq n\}$ , et tels que  $\mathcal{J}_{W_2,x}$  soit engendré par  $\{x_i \mid l \leq i \leq n\}$ . Alors  $\mathcal{J}_{V,x}$  est engendré par  $\{x_i \mid j \leq i \leq n\}$ , donc est régulier. Ceci montre que  $V$  est lisse en  $x$ . Puisque  $x$  est un point quelconque de  $V$ , on en déduit que  $V$  est lisse.

Au voisinage de la fibre exceptionnelle au dessus de  $x$ ,  $Bl_V X$  est localement isomorphe à la variété suivante,

$$\{(x_1, \dots, x_n; [t_j, \dots, t_n]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-j} \mid t_{i_1} x_{i_2} = x_{i_1} t_{i_2}, \quad j \leq i_1 < i_2 \leq n\}.$$

La transformée stricte de  $W_1$  (resp.  $W_2$ ), notée  $\overline{W}_1$  (resp.  $\overline{W}_2$ ), est localement définie par  $\{t_i = 0 \mid j \leq i < l \text{ ou } k \leq i \leq n\}$  (resp.  $\{t_i = 0 \mid l \leq i \leq n\}$ ). Donc  $\overline{W}_1$  et  $\overline{W}_2$  sont bien disjointes.

- b) Supposons que le point  $x$  ci-dessus soit contenu dans  $Z$ , et que  $\mathcal{J}_{Z,x}$  soit engendré par  $\{x_i = 0 \mid j' \leq i \leq n\}$ , avec  $1 \leq j' < j$ . Alors au voisinage de la fibre exceptionnelle au dessus de  $x$ ,  $Bl_Z X$  est localement isomorphe à la variété suivante,

$$\{(x_1, \dots, x_n; [t_{j'}, \dots, t_n]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-j'} \mid t_{i_1} x_{i_2} = x_{i_1} t_{i_2}, \quad j' \leq i_1 < i_2 \leq n\}.$$

La transformée stricte de  $Y$  (resp.  $V$ ) est localement définie par  $\{t_i = 0 \mid k \leq i \leq n\}$  (resp.  $\{t_i = 0 \mid j \leq i \leq n\}$ ). La transformée stricte de  $W_1$  (resp.  $W_2$ ) est localement définie par  $\{t_i = 0 \mid j \leq i < l \text{ ou } k \leq i \leq n\}$  (resp.  $\{t_i = 0 \mid l \leq i \leq n\}$ ). La deuxième assertion en découle.

c) D'après les calculs ci-dessus, on voit que dans  $Bl_Z X$  le diviseur exceptionnel  $E_Z$  et la transformée stricte  $\overline{V}$  de  $V$  sont transversaux. Si on éclate  $\overline{V}$ , le diviseur exceptionnel  $E_V$  et la transformée stricte de  $E_Z$ , notée encore  $E_Z$ , sont transversaux. D'autre part dans  $Bl_Z X$ ,  $\overline{W}_1$  et  $\overline{W}_2$  sont transversales dans  $\overline{Y}$  qui est une sous-variété lisse de  $Bl_Z X$ , en utilisant le (1), on trouve que les transformées strictes de  $W_1$  et de  $W_2$  dans  $Bl_{\overline{V}}(Bl_Z X)$  sont disjointes.

□

Soient  $X$  une variété et  $G$  un groupe. On dit que  $X$  est une  $G$ -variété si  $X$  est munie d'une action de  $G$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux  $G$ -variétés, et  $\varphi$  un morphisme de  $Y$  dans  $X$ , on dit que  $\varphi$  est un  $G$ -morphisme si  $\varphi$  est équivariant par rapport à  $G$ , i.e. pour tout  $g \in G$ , on a

$$g \circ \varphi = \varphi \circ g \quad .$$

**Lemme 1.4** *Soient  $X$  une  $G$ -variété,  $V$  et  $W$  deux sous-variétés de  $X$  stables par  $G$ , telles que  $V \subset W$ . Alors*

(1)  *$V$  et  $W$  sont des  $G$ -variétés,*

(2)  *$Bl_V X$  est une  $G$ -variété et le morphisme  $\varphi : Bl_V X \rightarrow X$  est un  $G$ -morphisme,*

(3) *le diviseur exceptionnel  $E_V$  et la transformée stricte  $\overline{W}$  de  $W$  sont stables par  $G$ , donc sont des  $G$ -variétés.*

*Démonstration.* D'après l'hypothèse,  $V$  et  $W$  sont stables par  $G$ , donc sont munies d'une action de  $G$ , qui est la restriction de celle sur  $X$ . Ceci implique que  $V$  et  $W$  sont des  $G$ -variétés.

Soit  $\mathcal{J}$  le faisceau d'idéaux définissant  $V$ . Pour tout  $g \in G$ ,  $g$  définit un automorphisme de  $X$ , et par suite on obtient l'isomorphisme suivant,

$$g^* : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \quad .$$

Puisque  $V$  est stable par  $G$ , alors  $g^*(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$ . D'autre part, on a

$$Bl_V X = \text{Proj} \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^n \right) \quad ,$$

et

$$E_V = \text{Proj} \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^n / \mathcal{J}^{n+1} \right) \quad .$$

On en déduit des isomorphismes suivants,

$$g^* : \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^n \right) \rightarrow \left( \bigoplus_{n \geq 0} (g^*(\mathcal{J}))^n \right) \quad ,$$

et

$$g^* : \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^n / \mathcal{J}^{n+1} \right) \longrightarrow \left( \bigoplus_{n \geq 0} (g^*(\mathcal{J}))^n / (g^*(\mathcal{J}))^{n+1} \right) \quad .$$

En utilisant l'égalité  $g^*(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$ , on obtient les isomorphismes  $g : Bl_V X \longrightarrow Bl_V X$  et  $g|_{E_V} : E_V \longrightarrow E_V$ . Par conséquent  $Bl_V X$  et  $E_V$  sont munies d'une action de  $G$ , donc sont des  $G$ -variétés. Il est clair que le morphisme  $\varphi$  est équivariant par rapport à  $G$ , donc est un  $G$ -morphisme.

La transformée stricte de  $W$  est par définition l'adhérence de l'image inverse de  $W \setminus V$  dans  $X'$ . Or  $W \setminus V$  est stable par  $G$ , donc son image inverse est aussi stable par  $G$ , et par suite  $\overline{W}$  est stable par  $G$ . Ainsi on a montré que  $\overline{W}$  est une  $G$ -variété. □

## 1.2 Construction d'un modèle équivariant abélien.

Soit  $G$  un sous groupe fini de  $GL(n, \mathbb{C})$ . Le groupe  $G$  opère sur l'espace affine  $X := \mathbb{C}^n$ . Le théorème de Chevalley ([8]) et le théorème 2 dans [33] montrent que  $X/G$  est lisse si et seulement si  $G$  est engendré par des pseudo-reflexions, i.e. des éléments qui ont 1 comme une valeur propre de multiplicité  $(n - 1)$ . Dans [33] on a montré que toute singularité quotient d'un groupe fini est isomorphe à une singularité quotient d'un groupe fini et petit, i.e. ne contenant aucune pseudo-reflexion. Donc dans notre travail on suppose que le groupe  $G$  soit petit.

Dans ce paragraphe nous construisons une  $G$ -variété  $X'$  qui domine  $X$  telle que le morphisme de  $X'$  dans  $X$  soit un  $G$ -morphisme propre et birationnel, et telle que le groupe d'isotropie de chaque point de  $X'$  soit abélien. On appelle un tel  $X'$   $G$ -modèle équivariant abélien de  $X$ , ou simplement modèle équivariant abélien s'il n'y a pas d'ambiguïté pour  $X$  et  $G$ .

Pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ , on définit  $V_H$  comme le sous-espace linéaire maximal de  $X$ , stable par  $H$ , tel que l'action de  $H$  sur  $V_H$  soit abélienne. Soient  $H'$  le commutateur de  $H$  dans  $G$ , i.e.  $H' := [H, H]$ , et  $V^{H'}$  le sous-espace invariant par tout élément de  $H'$ . On a  $V_H = V^{H'}$ . En effet si  $g_1, g_2 \in H$  et  $x \in X$ , alors

$$g_1 g_2(x) = g_2 g_1(x) \iff g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2(x) = x \quad .$$

Définissons

$$\Xi := \{V^{H_1} \cap \dots \cap V^{H_k} \mid H'_i := [H_i, H_i], H_i \subseteq G, 1 \leq i \leq k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Posons  $\Xi_i := \{V \in \Xi \mid \dim(V) = i\}$ . On remarque que  $X$  est toujours contenu dans  $\Xi$ , et que  $\Xi = \{X\}$  si et seulement si  $G$  est abélien. Dans la suite on suppose que  $G$  soit non abélien.

**Lemme 1.5** *L'ensemble  $\Xi$  est fini, partiellement ordonné par l'inclusion, fermé par l'intersection et stable par  $G$ , i.e.  $\forall V \in \Xi, \forall g \in G, on a g(V) \in \Xi$ .*

*Démonstration.* Les trois premières assertions sont claires. Pour la quatrième, soient  $k \in \mathbb{N}$ , et  $H_1, \dots, H_k$  les sous-groupes de  $G$ . Soit  $V = \bigcap_{i=1}^k V_{H_i}$ . Soit  $g \in G$ . Alors  $g(V_{H_i})$  est égal à  $V_{gH_i g^{-1}}$ . Ceci implique que

$$g(V) = \bigcap_{i=1}^k V_{gH_i g^{-1}} \quad .$$

Donc  $g(V)$  est dans  $\Xi$ . □

**Remarque 1.6** *L'ensemble  $\Xi_i$  peut être vide pour certains  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Soit  $\{r_0, r_1, \dots, r_\nu, n\}$  le sous-ensemble de  $\{0, \dots, n\}$ , avec  $0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_\nu < n$ , tel que  $\Xi_i \neq \emptyset$  si et seulement si  $i \in \{r_0, \dots, r_\nu, n\}$ . Puisque  $G$  est non abélien et  $\Xi$  est fermé par l'intersection, alors  $\Xi_n = \{X\}$  et  $\Xi_{r_0}$  n'a qu'un seul élément  $V_G$ , qui est le minimum de  $\Xi$ .*

**Lemme 1.7** *Notons  $X_0 := X$ . Posons  $X_1 := Bl_{V_G} X_0$ , i.e. l'éclatement de  $X$  de centre  $V_G$ . Alors les transformées strictes des  $V$  dans  $X_1$ , avec  $V \in \Xi_{r_1}$ , sont toutes lisses et deux à deux disjointes.*

*Démonstration.* Pour tout  $V \in \Xi_{r_1}$  on a  $V_G \subset V \subset X$ . Comme ces trois variétés sont toutes lisses, la transformée stricte de  $V$  dans  $X_1$ , notée  $\overline{V}^{(1)}$ , est isomorphe à l'éclatement de  $V$  de centre  $V_G$ . Donc  $\overline{V}^{(1)}$  est une sous-variété lisse de  $X_1$ .

Soient  $V_1, V_2$  deux éléments différents de  $\Xi_{r_1}$ . Alors  $V := V_1 \cap V_2$  est aussi un élément de  $\Xi$  et de dimension strictement plus petite que  $r_1$ , donc est forcément de dimension  $r_0$ . D'autre part  $\Xi_{r_0}$  n'a qu'un seul élément  $V_G$ . Donc on a  $V_1 \cap V_2 = V_G$ .

Posons  $W := V_1 + V_2$  le sous-espace linéaire de  $X$  engendré par  $V_1$  et  $V_2$ . Alors  $V_1$  et  $V_2$  sont transversales dans  $W$ . Comme leur intersection est  $V_G$ , d'après le lemme 1.3,  $\overline{V_1}^{(1)}$  et  $\overline{V_2}^{(1)}$  sont disjointes. □

On construit successivement les  $X_i$  avec  $i = 1, \dots, \nu + 1$  de la façon suivante. Supposons qu'on ait construit la variété  $X_i$ . Posons  $W_i$  comme la réunion disjointe des transformées strictes des  $V$ , pour tout  $V \in \Xi_{r_i}$ . On définit le couple  $(X_{i+1}, f_i)$ , de la variété  $X_{i+1}$  et le morphisme  $f_i$  de  $X_{i+1}$  dans  $X_i$ , comme l'éclatement de  $X_i$  de centre  $W_i$ . On a la proposition suivante.

**Proposition 1.8**

- (1) *Pour tout  $V \in \Xi$  avec  $\dim(V) \geq r_i$ , la transformée stricte de  $V$  dans  $X_i$ , notée  $\overline{V}^{(i)}$ , est une sous-variété lisse.*

- (2) Soient  $V_1, V_2 \in \Xi$  et  $V = V_1 \cap V_2$  avec  $\dim(V_1) \geq r_i$ ,  $\dim(V_2) \geq r_i$ . Supposons que  $V \neq V_1$  et  $V \neq V_2$ . Alors si  $\dim(V) \geq r_i$ , on a  $\overline{V}_1^{(i)} \cap \overline{V}_2^{(i)} = \overline{V}^{(i)}$ ; si  $\dim(V) < r_i$ , on a  $\overline{V}_1^{(i)} \cap \overline{V}_2^{(i)} = \phi$ .
- (3) Pour tout  $V \in \Xi$  avec  $\dim(V) < r_i$ , il existe un unique diviseur exceptionnel irréductible et lisse dans  $X_i$ , noté  $E_V$ , qui est contracté en  $V$  dans  $X$  par le morphisme  $(f_0 \circ \dots \circ f_{i-1})$ .
- (4) Soit  $0 \leq i \leq \nu$ . Alors les  $\overline{V}^{(i)}$  avec  $V \in \Xi_{r_i}$  sont deux à deux disjointes.
- (5) Toutes les  $X_i$ , avec  $0 \leq i \leq \nu + 1$ , sont des  $G$ -variétés lisses et tous les morphismes  $f_i$  sont des  $G$ -morphisms.

*Démonstration.* Soit  $i = 0$ . Il est clair que 1) et 5) sont vraies. La quatrième assertion est vraie parce que  $\Xi_{r_0}$  n'a qu'un seul élément  $V_G$ . Les deux autres sont vraies parce que  $\Xi_j = \phi$  pour tout  $j < r_0$ .

Supposons que ces cinq assertions soient vraies pour  $i \leq k$ . Posons  $W_k := \bigcup_{V \in \Xi_{r_k}} \overline{V}^{(k)}$ .

Alors  $W_k$  est une sous-variété lisse de  $X_k$ , stable par  $G$ . Comme  $X_{k+1}$  est l'éclatement de  $X_k$  de centre  $W_k$ , le lemme 1.4 montre que  $X_{k+1}$  est une  $G$ -variété lisse et que le morphisme  $f_k : X_{k+1} \rightarrow X_k$  est un  $G$ -morphisme. Ceci montre 5).

Pour chaque  $V \in \Xi_{r_k}$  l'image inverse de  $\overline{V}^{(k)}$  dans  $X_{k+1}$  est un diviseur exceptionnel irréductible et lisse, noté  $E_V$ . Il est clair que l'image de  $E_V$  dans  $X$  par le morphisme  $f_0 \circ \dots \circ f_k$  est  $V$ . Ceci montre 3).

Soient  $V_1 \in \Xi_k$  et  $V \in \Xi_{k'}$  avec  $k' \geq k$  et  $V \neq V_1$ . D'après l'hypothèse de récurrence,  $\overline{V}_1^{(k)} \cap \overline{V}^{(k)} \neq \phi$  si et seulement si  $V_1 \subset V$ . Ceci équivaut  $\overline{V}_1^{(k)} \subset \overline{V}^{(k)}$ . Donc si  $\dim(V) > k$ , alors: l'intersection  $\overline{V}^{(k)} \cap W_k$  ou bien est vide; ou bien est la réunion disjointe de certaines composantes de  $W_k$ . Dans le premier cas  $\overline{V}^{(k+1)}$  est isomorphe à  $\overline{V}^{(k)}$ . Dans le deuxième cas  $\overline{V}^{(k+1)}$  est isomorphe à l'éclatement de  $\overline{V}^{(k)}$  de centre  $\overline{V}^{(k)} \cap W_k$  qui est une sous-variété lisse de  $\overline{V}^{(k)}$ . On voit que dans les deux cas  $\overline{V}^{(k+1)}$  est lisse. Ceci montre 1).

Soient  $V_1, V_2 \in \Xi$  avec  $\dim(V_1) \geq k+1$  et  $\dim(V_2) \geq k+1$ . Posons  $V := V_1 \cap V_2$ . Supposons que  $V \neq V_1$  et  $V \neq V_2$ .

Si  $\dim(V) < k$ , d'après l'hypothèse de récurrence,  $\overline{V}_1^{(k)} \cap \overline{V}_2^{(k)} = \phi$ . Donc  $\overline{V}_1^{(k+1)} \cap \overline{V}_2^{(k+1)} = \phi$ .

Si  $\dim(V) > k$  alors  $\overline{V}_1^{(k+1)} \cap \overline{V}_2^{(k+1)} = \overline{V}^{(k+1)}$ .

Si  $\dim(V) = k$ . Posons  $W := V_1 + V_2$ . Alors  $V_1$  et  $V_2$  sont transversales dans  $W$ . Ceci entraîne que  $\overline{V}_1^{(k)}$  et  $\overline{V}_2^{(k)}$  sont transversales dans  $\overline{W}^{(k)}$ . Quand on éclate  $\overline{W}^{(k)}$ , les transformées strictes de  $V_1$  et de  $V_2$  dans  $X_{k+1}$  sont séparées, i.e.  $\overline{V}_1^{(k+1)} \cap \overline{V}_2^{(k+1)} = \phi$ . Ceci montre 2).

En particulier on voit que les  $\overline{V}^{(k+1)}$  avec  $V \in \Xi_{r_{k+1}}$  sont deux à deux disjointes. La quatrième assertion est démontrée. □

Posons  $X' := X_{\nu+1}$  et  $E_V := E_V^{(\nu+1)}$  pour tout  $V \in \Xi$ . Alors on a le

**Lemme 1.9** *Pour tout  $x \in X'$  il existe un unique drapeau de sous-espaces linéaires de  $X$ , noté  $\mathcal{D}_x = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$  avec  $\{V_0, \dots, V_k\} \subset \Xi$ , tel que les  $E_{V_i}$  soient les seuls diviseurs exceptionnels passant par  $x$  pour  $i = 0, \dots, k$ .*

*Démonstration.* Soient  $\{V_0, \dots, V_k\}$  le sous-ensemble de  $\Xi$  avec  $V_i \in \Xi$  pour  $i = 0, \dots, k$  tel que les  $E_{V_i}$  soient les seuls diviseurs exceptionnels passant par  $x$ . Il est clair que ce sous-ensemble est unique.

Supposons qu'il existe deux éléments différents  $V', V''$  de ce sous-ensemble avec  $V' \not\subset V''$  et  $V'' \not\subset V'$ . Posons  $V := V' \cap V''$ . Soit  $\dim(V) = r_j$ . Alors d'après la proposition précédente, on a  $\overline{V'}^{(j+1)} \cap \overline{V''}^{(j+1)} = \phi$ , et par suite  $E_{V'} \cap E_{V''} = \phi$ . Car

$$(f_{j+1} \circ \cdots \circ f_\nu)(E_{V'} \cap E_{V''}) = \overline{V'}^{(j+1)} \cap \overline{V''}^{(j+1)} \quad .$$

D'où une contradiction. Cette contradiction montre que les  $V_i$ , avec  $i = 0, \dots, k$ , sont totalement ordonnées et forment un drapeau, noté  $\mathcal{D}_x$ .

□

**Définition 1.10** *Pour tout point  $x$  dans  $X'$ , on appelle  $\mathcal{D}_x$  défini dans le lemme précédent le drapeau associé à  $x$ .*

Soit  $\mathcal{D} = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$  un drapeau de sous-espaces linéaires de  $X$ . Posons  $Y_1 := Bl_{V_0}X$ . Successivement notons  $\overline{V_i}$  la transformée stricte de  $V_i$  dans  $Y_i$  et posons  $Y_{i+1} := Bl_{\overline{V_i}}Y_i$  avec  $i = 0, \dots, k$ . On appelle  $Y_{k+1}$  l'éclatement de  $X$  de centre  $\mathcal{D}$ , noté  $Bl_{\mathcal{D}}X$ .

**Lemme 1.11** *Pour tout  $x \in X'$ , soit  $\mathcal{D}_x$  le drapeau associé à  $x$ . Alors il existe un morphisme canonique*

$$\varphi_x : X' \longrightarrow Bl_{\mathcal{D}_x}X$$

tel qu'au voisinage de  $x$ ,  $\varphi_x$  soit un isomorphisme.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{D}_x = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ . Soient  $r_{d_i} = \dim(V_i)$  avec  $i = 0, \dots, k$  et

$$x_j := (f_j \circ \cdots \circ f_\nu)(x)$$

avec  $j = 0, \dots, \nu$ . Pour tout  $j < d_0$  le morphisme  $(f_0 \circ \cdots \circ f_j)$  de  $X_{j+1}$  dans  $X$  induit un isomorphisme au voisinage de  $x_j$ . Si  $j \geq d_0$  alors l'image inverse de  $V_0$  dans  $X_{j+1}$  est un diviseur, donc  $X_{j+1}$  domine  $Bl_{V_0}X$ . Le morphisme canonique de  $X_{d_0+1}$  dans  $Bl_{V_0}X$  induit un isomorphisme au voisinage de  $x_{d_0+1}$ .

Posons  $d_{k+1} := \nu + 1$  et  $\mathcal{D}_i := (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_i)$  avec  $i = 0, \dots, k$ . Successivement on vérifie que  $X_j$  domine  $Bl_{\mathcal{D}_i}X$  et que le morphisme canonique de  $X_j$  dans  $Bl_{\mathcal{D}_i}X$  induit un isomorphisme au voisinage de  $x_j$  avec  $j \in \{d_i + 1, \dots, d_{i+1}\}$ . Notons  $\varphi_x$  le morphisme canonique de  $X'$  dans  $Bl_{\mathcal{D}_x}X$ . Alors  $\varphi_x$  induit un isomorphisme au voisinage de  $x$ .

□

**Lemme 1.12** *Dans  $X'$ , les diviseurs exceptionnels  $E_V$ , avec  $V \in \Xi$ , sont à croisements normaux.*

*Démonstration.* Puisque c'est une propriété locale, il suffit de vérifier qu'elle est vraie au voisinage de chaque point  $x \in X'$ .

Soit  $x \in X'$ . Soit  $\mathcal{D}_x = (V_0 \subset \dots \subset V_k)$  le drapeau associé à  $x$ . D'après le lemme précédent, au voisinage de  $x$  la variété  $X'$  est isomorphe à  $Bl_{\mathcal{D}_x}X$ . Mais dans  $Bl_{\mathcal{D}_x}X$  tous les diviseurs exceptionnels sont à croisements normaux. Par l'isomorphisme local, on trouve que les  $E_{V_i}$  avec  $i = 0, \dots, k$  sont à croisement normal en  $x$ .

Comme  $x$  est un point quelconque de  $X'$  et que les  $E_{V_i}$  avec  $i = 0, \dots, k$  sont les seuls diviseurs exceptionnels passant par  $x$ , on conclut que dans  $X'$  les diviseurs exceptionnels sont à croisements normaux.

□

**Théorème 1.13** *Soient  $X := \mathbb{C}^n$ ,  $G$  un sous-groupe fini non abélien de  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $\Xi := \{V^{H'_1} \cap \dots \cap V^{H'_k} \mid H'_i := [H_i, H_i], H_i \text{ sous-groupe de } G, 1 \leq i \leq k, k \in \mathbb{N}\}$ . Soit  $X'$  la variété obtenue à partir de  $X$ , par la suite des éclatements successifs des éléments de  $\Xi \setminus \{X\}$ , suivant l'ordre croissant des dimensions. Alors le groupe d'isotropie de tout point de  $X'$  est abélien.*

*Démonstration.* Un sous groupe fini de  $GL(n, \mathbb{C})$  est abélien si et seulement s'il existe un changement de base qui diagonalise simultanément tous les éléments du groupe  $G$ . Ceci équivaut à l'existence d'une décomposition de  $X$  en somme directe de sous-espaces linéaires  $G$ -stables telle que restreints sur chaque facteur de la décomposition les éléments de  $G$  commutent. ([38] Page 39)

Prenons un point quelconque  $x$  dans  $X'$ . Soit  $\mathcal{D}_x = (V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k)$  le drapeau associé à  $x$  (définition 1.10). Soit  $g \in G_x$  où  $G_x$  est le groupe d'isotropie du point  $x$ .

Pour chaque  $V_i$  avec  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $E_{V_i} \cap g(E_{V_i}) \neq \emptyset$  parce que  $x$  est un point commun. Comme  $g(E_{V_i}) = E_{g(V_i)}$ , d'après la proposition 1.8 on a  $g(V_i) = V_i$ . Donc tous les  $V_i$  ainsi que tous les  $E_{V_i}$  avec  $i = 0, \dots, k$  sont stables par  $G_x$ . Considérons des morphismes surjectifs suivants:

$$G_x \rightarrow (G_x)_{|V_k} \rightarrow \dots \rightarrow (G_x)_{|V_{j+1}} \rightarrow (G_x)_{|V_j} \rightarrow \dots \rightarrow (G_x)_{|V_0}$$

où  $(G_x)_{|V}$ , avec  $V$  un sous espace linéaire stable par  $G_x$ , est par définition l'image de  $G_x$  ( $\subset GL(n, \mathbb{C})$ ) dans  $GL(V, \mathbb{C})$  par le morphisme de restriction.

Supposons que  $\dim(V_i) = r_{d_i}$ , avec  $0 \leq i \leq k$ . Pour  $i = 0$ , la restriction de  $G_x$  sur  $V_0$  est abélienne, i.e. pour tous  $g_1, g_2 \in G$  et pour tout  $x' \in V_0$ , on a  $g_1 g_2(x') = g_2 g_1(x')$ . En effet si la restriction de  $G_x$  sur  $V_0$  n'est pas abélienne, on doit avoir  $V_0 \not\subseteq V_{G_x}$ . Posons  $V' := V_0 \cap V_{G_x}$ , on a  $V' \in \Xi$ . Soit  $W$  l'élément minimal de  $\Xi$  contenant  $x_0$  qui est l'image de  $x$  dans  $X$ . La construction de  $X'$  montre que le diviseur exceptionnel  $E_W$  doit passer par  $x$ . D'autre part  $W$  est strictement contenu dans  $V_0$ . Ceci contredit la minimalité de  $V_0$ .



Posons  $V_{k+1} := X$ . Supposons qu'on ait montré que la restriction de  $G_x$  sur  $V_j$  est abélienne, avec  $0 \leq j \leq k$ . Notons  $V_{j+1,x}$  le sous espace linéaire minimal de  $X_0$  contenant  $V_j$  dont la transformée stricte dans  $X_{d_{j+1}}$  contient  $x_{j+1}$  qui est l'image de  $x$  dans  $X_{d_{j+1}}$ , i.e.

$$x_{j+1} := (f_{d_{j+1}} \circ \cdots \circ f_\nu)(x) \quad .$$

L'espace linéaire  $V_{j+1,x}$  est de dimension  $r_{d_j} + 1$  et contient  $V_j$  qui est de dimension  $r_{d_j}$ . Prenons  $L_{j+1,x}$  un supplémentaire de  $V_j$  dans  $V_{j+1,x}$  stable par  $G_x$ . Alors  $L_{j+1,x}$  est de dimension 1. Donc la restriction de  $G_x$  sur  $L_{j+1,x}$  est cyclique, car celle-ci est isomorphe à un sous groupe fini de  $\mathbb{C}^*$ , avec  $\mathbb{C}^*$  le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls.

La restriction du groupe  $G_x$  sur  $V_{j+1,x}$  est isomorphe à un sous-groupe de la somme directe de  $(G_x)_{|V_j}$  et  $(G_x)_{|L_{j+1,x}}$ , i.e.  $(G_x)_{|V_{j+1,x}} \subset [(G_x)_{|V_j} \oplus (G_x)_{|L_{j+1,x}}]$ . Comme les deux derniers sont des groupes abéliens, on en déduit que  $(G_x)_{|V_{j+1,x}}$  l'est aussi.

On a un morphisme surjectif canonique de  $(G_x)_{|V_{j+1}}$  dans  $(G_x)_{|V_{j+1,x}}$  qui applique  $g_{|V_{j+1}}$  à  $g_{|V_{j+1,x}}$  pour tout  $g \in G_x$ . Supposons que la restriction de  $G_x$  sur  $V_{j+1}$  ne soit pas abélienne. Posons  $V' := V_{G_x} \cap V_{j+1}$ . Alors  $V' \in \Xi$  et

$$V_j \subset V_{j+1,x} \subseteq V' \subset V_{j+1} \quad .$$

Posons  $V'' := \min\{V \in \Xi \mid V \supseteq V_{j+1,x}\}$ . La construction de  $X'$  montre que le diviseur exceptionnel  $E_{V''}$  doit passer par  $x$ .

On obtient la chaîne suivante

$$V_j \subset (V_j \oplus L_{j+1,x}) \subseteq V'' \subset V_{j+1}$$

avec  $V'' \neq V_{j+1}$ . Ceci contredit la maximalité de la suite  $\{V_i\}_{i=0,\dots,k}$ . On en conclut que la restriction de  $G_x$  sur  $V_{j+1}$  est abélienne. Quand  $j = k$  on trouve que  $G_x$  est abélien.

□

**Remarque 1.14** *Puisque  $G$  est petit, alors le théorème 2 de [33] implique que l'image de tout  $V \in \Xi \setminus \{X\}$  dans  $X/G$  est contenue dans le lieu singulier  $\text{Sing}(X/G)$  de  $X/G$ . Et par suite la restriction sur l'image inverse de  $(X/G) \setminus \text{Sing}(X/G)$  du morphisme canonique de  $X'/G$  dans  $X/G$  est un isomorphisme, ou de façon équivalente tout diviseur exceptionnel de  $X'/G$  est contracté dans  $\text{Sing}(X/G)$ .*

**Remarque 1.15** *Si  $G$  est le groupe symétrique  $S_n$ , et agit de façon naturelle sur le  $n$ -produit cartésien de l'espace affine  $\mathbb{C}^d$ , alors  $\Xi$  est l'ensemble de l'espace tout entier et de toutes les diagonales sauf celles qui correspondent aux transpositions, i.e. les sous-espaces linéaires invariants des deux-cycles. Dans ce cas on obtient un modèle équivariant abélien du produit symétrique  $\text{Sym}^{(n)}(\mathbb{C}^d)$ .*

## 2 Stratification de modèles équivariants abéliens.

Suite au premier chapitre, on définit une stratification  $\mathcal{S}$  du  $G$ -modèle équivariant abélien  $X'$  de  $X := \mathbb{C}^n$ . Cette stratification est la superposition de deux stratifications naturelles de  $X'$ : l'une provient de l'action de  $G$ , l'autre provient des positions des diviseurs exceptionnels dans  $X'$ .

On associe à chaque strate  $Z$  deux groupes, le groupe  $G_0(Z)$  qui fixe  $Z$  (point par point) et le groupe  $G(Z)$  qui laisse  $Z$  stable. On peut montrer que le long de l'image de chaque strate le quotient  $X'/G$  est "équisingulier". Ensuite on montre le théorème 2.6 qui va garantir la possibilité de recoller des désingularisations locales.

Dans le deuxième paragraphe, on analyse cette stratification  $\mathcal{S}$  en plus de détails et on montre dans le théorème 2.8 l'existence d'un recouvrement  $\mathcal{R}$  de  $X'$  qui est compatible avec la stratification  $\mathcal{S}$  et qui a des propriétés suivantes:

- (i) La famille  $\mathcal{R}$  est stable par  $G$  et fermée pour l'intersection.
- (ii) Chaque ouvert  $U$  dans  $\mathcal{R}$  est une réunion des strates et isomorphe à un ouvert de Zariski d'une variété torique. Sous cet isomorphisme, l'image de chaque strate (contenue dans  $U$ ) est un ouvert dense de l'adhérence d'une orbite du tore.

### 2.1 Une stratification à groupe d'isotropie constant.

Soit  $g \in G$ . Notons  $W^g$  l'ensemble des points fixes de  $g$  dans  $X'$ , i.e.

$$W^g := \{x \in X' \mid g(x) = x\} \quad .$$

Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Posons

$$W^H := \bigcap_{g \in H} W^g \quad .$$

D'après le théorème 1.13, le groupe d'isotropie de tout point de  $X'$  est abélien. Donc si  $H$  est un sous-groupe non abélien, on a  $W^H = \emptyset$ .

Soit  $\mathcal{D} = (V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k)$  un drapeau de sous-espaces linéaires de  $X$  avec  $V_i \in \Xi$  pour  $i = 0, \dots, k$ . Posons

$$E_{\mathcal{D}} := \bigcap_{i=0}^k E_{V_i} \quad .$$

On dit que  $\mathcal{D}$  est stable par  $g$ , noté  $g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ , si chaque  $V_i$  est stable par  $g$  pour  $i = 0, \dots, k$ . On dit que  $\mathcal{D}$  est stable par  $H$ , si  $\mathcal{D}$  est stable par tout élément de  $H$ , i.e.  $\forall g \in H$  on a  $g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ . Si  $\mathcal{D} = \emptyset$ , on dit que  $\mathcal{D}$  est stable par  $G$  et on pose  $E_{\emptyset} := X'$ . Définissons

$$G(\mathcal{D}) := \{g \in G \mid g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}\} \quad .$$

Donc on a  $G(\emptyset) = G$ .

**Lemme 2.1** Soient  $H$  un sous-groupe abélien de  $G$ ,  $\mathcal{D} \subset \Xi$  un drapeau. Alors

- 1)  $W^H$  est une sous-variété lisse de  $X'$ ;
- 2) si  $\mathcal{D}$  est stable par  $H$ ,  $E_{\mathcal{D}} \cap W^H$  est une sous-variété lisse et fermée dans  $X'$ , sinon  $E_{\mathcal{D}} \cap W^H = \phi$ .

*Démonstration.*

- 1) Supposons que  $W^H \neq \phi$ . Alors au voisinage de chaque point  $x \in W^H$ , l'action de  $H$  est linéarisable. La lissité de  $W^H$  en  $x$  vient du fait suivant: s'il y a un groupe fini qui agit linéairement sur un espace affine, alors l'ensemble des points fixes du groupe est le sous-espace linéaire invariant par ce groupe, donc est lisse.

Montrons que  $H$  a au moins un point fixe dans  $X'$ . D'abord  $H$  a un point fixe dans  $X_0 := X$ , par exemple l'origine. Supposons que  $H$  ait un point fixe  $x_i$  dans  $X_i$  avec  $i \geq 0$ . Puisque

$$f_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$$

est un éclatement équivariant par  $G$ , l'image inverse de  $x_i$  dans  $X_{i+1}$  est stable par  $H$  et canoniquement isomorphe à un espace projectif. Comme  $H$  est abélien et fini, il existe au moins un point dans  $f_i^{-1}(x_i)$ , noté  $x_{i+1}$ , qui est fixe par  $H$ . Successivement on peut trouver un point  $x_{\nu+1}$  fixe par  $H$  dans  $X' = X_{\nu+1}$ . Donc  $W^H \neq \phi$ .

- 2) Supposons que  $\mathcal{D}$  soit stable par  $H$ . On a montré que dans  $X'$  les diviseurs exceptionnels  $E_V$  avec  $V \in \Xi$  sont à croisements normaux. Ceci entraîne que  $E_{\mathcal{D}} = \bigcap_{V \in \mathcal{D}} E_V$  est une sous-variété lisse. Comme le drapeau  $\mathcal{D}$  est stable par  $H$ , chaque  $V$  et donc chaque  $E_V$  avec  $V \in \mathcal{D}$  sont aussi stables par  $H$ . Par conséquent  $E_{\mathcal{D}}$  est stable par  $H$ . Notons  $Z_i$  l'image de  $E_{\mathcal{D}}$  dans  $X_i$ , i.e.

$$Z_i := f_i \circ f_{i+1} \circ \cdots \circ f_{\nu}(E_{\mathcal{D}}) \quad .$$

Alors  $Z_0$  contient l'origine qui est un point fixe de  $H$ . Supposons qu'il existe un point  $x_i \in Z_i$  fixe par  $H$ . L'intersection de  $Z_{i+1}$  avec l'image inverse de  $x_i$  dans  $X_{i+1}$  est isomorphe à un espace projectif. Comme  $H$  est abélien et stabilise cette intersection, il existe un point  $x_{i+1} \in f_i^{-1}(x_i) \cap Z_{i+1}$  tel que  $x_{i+1}$  soit fixe par  $H$ . Successivement on trouve un point  $x_{\nu+1}$  dans  $Z_{\nu+1}$ , qui est égale à  $E_{\mathcal{D}}$ , tel que  $x_{\nu+1}$  soit fixe par  $H$ . Ainsi on a montré  $E_{\mathcal{D}} \cap W^H \neq \phi$ .

Si on considère la restriction de  $H$  sur  $E_{\mathcal{D}}$ , alors  $E_{\mathcal{D}} \cap W^H$  est la sous-variété invariante par  $H$ . Avec même argument que dans 1), on montre que  $E_{\mathcal{D}} \cap W^H$  est lisse. Il est clair que cette intersection est fermée dans  $X'$ .

Si  $\mathcal{D}$  n'est pas stable par  $H$ . Il existe un  $V \in \mathcal{D}$  et un  $g \in H$  tels que  $g(V) \neq V$ . Ceci implique  $g(E_V) \cap E_V = \phi$ . Donc  $E_V \cap W^g = \phi$ , et par suite  $E_{\mathcal{D}} \cap W^H = \phi$ .

□

Définissons  $\mathcal{A}$  comme l'ensemble des composantes irréductibles de  $E_{\mathcal{D}} \cap W^H$ , pour tout couple  $(H, \mathcal{D})$ , avec  $H$  un sous-groupe abélien de  $G$  et  $\mathcal{D} \subset \Xi$  un drapeau stable par  $H$ . D'après le lemme précédent, chaque élément  $\overline{Z}$  de  $\mathcal{A}$  est une sous-variété lisse et fermée de  $X'$ . Posons

$$\mathcal{A}_k := \{\overline{Z} \in \mathcal{A} \mid \dim(\overline{Z}) = k\}$$

avec  $k = 0, \dots, n$ . Définissons

$$\mathcal{S}_k := \{Z \subset X' \mid \exists \overline{Z}_1 \in \mathcal{A}_k \text{ tel que } Z = \overline{Z}_1 \setminus \left( \bigcup_{\substack{\overline{Z}' \in \mathcal{A} \\ \dim(\overline{Z}') < k}} \overline{Z}' \right)\} .$$

On remarque que le seul élément de dimension  $n$  dans  $\mathcal{A}$  est  $E_{\phi} \cap W^{\{e\}} = X'$ . Donc le seul élément dans  $\mathcal{S}_n$ , noté  $Z_n$ , est

$$Z_n = X' \setminus \left[ \left( \bigcup_{g \in G \setminus \{e\}} W^g \right) \cup \left( \bigcup_{V \in \Xi \setminus \{X\}} E_V \right) \right] .$$

On définit la stratification  $\mathcal{S}$  de  $X'$  comme la réunion disjointe des  $\mathcal{S}_k$  avec  $k = 0, \dots, n$ . Il est facile de vérifier que  $\mathcal{S}$  est une stratification de  $X'$  au sens de H. Whitney ([41]):

- (1) chaque élément  $Z$  de  $\mathcal{S}$ , appelé *strate*, est une sous-variété lisse de  $X'$ , car  $Z$  est un ouvert dense d'un élément de  $\mathcal{A}$ .
- (2)  $X'$  est la réunion disjointe des  $Z$  avec  $Z \in \mathcal{S}$ . Ceci résulte de (3) et du fait que  $Z_n$  est un ouvert dense dans  $X'$ .
- (3) le bord de chaque strate  $Z$ , i.e.  $\overline{Z} \setminus Z$ , est une réunion disjointe de strates de dimensions inférieures, résulte de la définition des  $\mathcal{S}_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , et du fait que l'intersection de deux éléments de  $\mathcal{A}$  est une réunion des éléments de  $\mathcal{A}$ .

**Lemme 2.2** *Soit  $Z$  une strate dans  $\mathcal{S}$ .*

- 1) *Tous les points de  $Z$  ont le même drapeau associé, (définition 1.10), noté  $\mathcal{D}_Z$ . De plus  $Z \subseteq E_{\mathcal{D}_Z}$  et  $Z \cap E_V = \emptyset$  pour tout  $V \in \Xi \setminus \mathcal{D}_Z$ .*
- 2) *Posons  $Y_Z := \text{Bl}_{\mathcal{D}_Z} X$ . Le morphisme canonique  $\varphi_Z$  de  $X'$  dans  $\text{Bl}_{\mathcal{D}_Z} X$  est un isomorphisme au voisinage de  $Z$ .*

*Démonstration.*

- 1) D'après la définition de la stratification  $\mathcal{S}$ , pour tout point  $x$  dans  $X' \setminus Z_n$ , l'adhérence de la strate contenant  $x$  est une composante irréductible de  $E_{\mathcal{D}_x} \cap W^{G_x}$ . Donc si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux points de  $X'$  avec  $\mathcal{D}_{x_1} \neq \mathcal{D}_{x_2}$ , ils sont dans des strates différentes, par suite si  $x_1, x_2 \in Z$ , alors  $\mathcal{D}_{x_1} = \mathcal{D}_{x_2}$  et  $\mathcal{D}_Z$  est bien défini.  
Soit  $x \in Z$ . On a  $x \in E_{\mathcal{D}_x}$  et  $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_Z$ , d'où  $Z \subseteq E_{\mathcal{D}_Z}$ . Si  $V \in \Xi \setminus \mathcal{D}_Z$ , alors  $V \notin \mathcal{D}_x = \mathcal{D}_Z$ . D'où  $x \notin E_V$ , (lemme 1.9), et par suite  $Z \cap E_V = \emptyset$ .
- 2) C'est une conséquence immédiate du lemme 1.11 et du fait que  $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_Z, \forall x \in Z$ .

□

Les notations sont comme dans le lemme précédent. On appelle  $\mathcal{D}_Z$  le drapeau associé à  $Z$ . On a la proposition suivante.

**Proposition 2.3** *Soit  $Z \in \mathcal{S}$ . Alors le morphisme canonique  $\varphi_Z$  de  $X'$  dans  $Y_Z$  est un isomorphisme au voisinage de  $Z'$  pour tout  $Z' \in \mathcal{S}$  tel que  $Z \subseteq \overline{Z'}$ .*

*Démonstration.* Soient  $Z, Z' \in \mathcal{S}$  tels que  $Z \subseteq \overline{Z'}$ . Soit  $\mathcal{D}_Z$  (resp.  $\mathcal{D}_{Z'}$ ) le drapeau associé à  $Z$  (resp.  $Z'$ ). On a  $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}_Z$ . D'après le lemme 1.11, le morphisme canonique

$$\varphi_Z : X' \longrightarrow Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$$

est un isomorphisme au voisinage de  $Z$ , et le morphisme canonique

$$\varphi_{Z'} : X' \longrightarrow Y_{Z'} := Bl_{\mathcal{D}_{Z'}} X$$

est un isomorphisme au voisinage de  $Z'$ . Puisque  $\varphi_{Z'}$  se factorise par  $\varphi_Z$ , on en conclut que  $\varphi_Z$  est un isomorphisme au voisinage de  $Z'$ .

□

**Définition 2.4** *Soit  $Z \in \mathcal{S}$ . On définit  $G(Z)$  comme le groupe de stabilisateurs de  $Z$  et  $G_0(Z)$  comme le sous-groupe de  $G$  constitué des éléments qui laissent  $Z$  invariant, i.e.*

$$G_0(Z) := \{g \in G \mid g(x) = x, \forall x \in Z\},$$

$$G(Z) := \{g \in G \mid g(Z) = Z\} \quad .$$

**Lemme 2.5** *Soit  $Z$  une strate dans  $\mathcal{S}$ . Alors*

1)  $G_0(Z) = G_x$  pour tout  $x \in Z$ .

2)  $G(Z) = \{g' \in G(\mathcal{D}_Z) \mid g \circ g' = g' \circ g, \forall g \in G_0(Z)\}$ , où  $G(\mathcal{D}_Z) = \{g \in G \mid g(\mathcal{D}_Z) = \mathcal{D}_Z\}$ .

*Démonstration.*

- 1) Soient  $x_1, x_2$  deux points dans  $Z$ . Soit  $G_{x_1}$  (resp.  $G_{x_2}$ ) le groupe d'isotropie de  $x_1$  (resp. de  $x_2$ ). Comme  $Z$  est la strate contenant  $x_1$ , l'adhérence de  $Z$  dans  $X'$  est une composante irréductible de  $E_{\mathcal{D}_{x_1}} \cap W^{G_{x_1}}$ . Donc  $x_2 \in W^{G_{x_1}}$ . Ceci implique  $G_{x_1} \subseteq G_{x_2}$ . De même raison on a  $G_{x_2} \subseteq G_{x_1}$ . Par conséquent tous les points de  $Z$  ont le même groupe d'isotropie, noté  $G_0(Z)$ .
- 2) D'abord montrons que  $G(Z)$  est contenu dans le centralisateur de  $G_0(Z)$  dans  $G(\mathcal{D}_Z)$ . Soit  $g \in G(Z)$ . Soit  $V \in \mathcal{D}_Z$ . D'après le lemme 2.2, on a  $Z \subset E_V$ . Comme  $g(Z) = Z$ , on obtient  $g(E_V) \cap E_V \neq \emptyset$ . Ceci implique  $g(V) = V$ . On en déduit  $G(Z) \subseteq G(\mathcal{D}_Z)$ . Notons  $\overline{Z}$  l'adhérence de  $Z$  dans  $X'$ ,  $\overline{Z}$  est une composante irréductible de  $E_{\mathcal{D}_Z} \cap W^{G_0(Z)}$ . Notons  $Z_i$  l'image de  $\overline{Z}$  dans  $X_i$  avec  $i = 0, \dots, \nu$ , i.e.

$$Z_i := f_i \circ \dots \circ f_\nu(\overline{Z}) \quad .$$

Posons  $Z_{\nu+1} = \overline{Z}$ . Notons  $G_1$  le sous-groupe engendré par  $G_0(Z)$  et  $g$ . Chaque  $Z_i$  est fixe par  $G_0(Z)$  et stable par  $g$ , donc stable par  $G_1$ . Dans  $Z_0$  il y a un point fixe de  $G_1$ , par exemple l'origine de  $X$ . Supposons que  $G_1$  ait un point fixe  $x_i$  dans  $X_i$  avec  $i \geq 0$ . L'intersection de  $Z_{i+1}$  avec  $f_i^{-1}(x_i)$  est isomorphe à un espace projectif. Comme elle est stable par  $g$ , elle contient un point fixe de  $g$ , noté  $x_{i+1}$ . On a déjà remarqué que  $Z_{i+1}$  est fixe par  $G_0(Z)$ . Donc  $x_{i+1}$  est fixe par  $G_1$ . Successivement on trouve dans  $Z_{\nu+1}$  un point  $x_{\nu+1}$  fixe par  $G_1$ . D'après le théorème 1.13,  $G_{x_{\nu+1}}$  est abélien. Comme  $G_1$  est contenu dans  $G_{x_{\nu+1}}$ ,  $G_1$  est aussi abélien. Par conséquent  $g$  commute avec tout élément de  $G_0(Z)$ .

Inversement supposons que  $g$  soit un élément du centralisateur de  $G_0(Z)$  dans  $G(\mathcal{D}_Z)$ . Le groupe  $G_1$  engendré par  $g$  et  $G_0(Z)$  est abélien. D'autre part il est facile de voir que le morphisme canonique

$$\varphi_Z : X' \longrightarrow Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$$

est équivariant par rapport à  $G(\mathcal{D}_Z)$ . Soit  $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k)$  et posons  $V_{k+1} := X$ . Prenons un supplémentaire  $V_{i+1}$  de  $V_i$  dans  $V_{i+1}$  stable par  $G(\mathcal{D}_Z)$  pour  $i = 0, \dots, k$ . Choisissons une base  $\{e_{(i)}\}$  (resp.  $\{e_{(i+1)}\}$ ) de  $V_0$  (resp.  $V_{i+1}$ ) telle que, sous cette base, la restriction de tout élément de  $G_1$  sur  $V_0$  (resp.  $V_{i+1}$ ) soit diagonale. La réunion des  $\{e_{(i)}\}$ , avec  $i = 0, \dots, k+1$ , est une base de  $X$ . Sous cette base tout élément de  $G_1$  est diagonal. Notons  $T$  le tore associé à cette base,  $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$  contient  $G_1$  comme un sous-groupe fini. On peut considérer  $Y_Z$  comme une variété torique munie de l'action du tore  $T$ . Dans  $Y_Z$ ,  $\overline{\varphi_Z(Z)}$  est l'adhérence d'une orbite du tore, donc est stable par  $T$ . A priori elle est stable par  $g$ . Puisque  $\varphi_Z(Z)$  est un ouvert dense de  $\overline{\varphi_Z(Z)}$ , l'égalité

$$g(\overline{\varphi_Z(Z)}) = \overline{\varphi_Z(Z)}$$

implique que

$$g(\varphi_Z(Z)) \cap (\varphi_Z(Z)) \neq \emptyset \quad .$$

Ceci équivaut à  $g(Z) \cap Z \neq \emptyset$ , car  $\varphi_Z$  est équivariant par rapport à  $G_1$ . Par conséquent  $g(Z) = Z$  et donc  $g \in G(Z)$ .

□

**Théorème 2.6** Soient  $X := \mathbb{C}^n$  l'espace affine muni d'une action d'un groupe fini  $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ ,  $X'$  le modèle équivariant abélien construit dans le théorème 1.13 et  $\mathcal{S}$  la stratification de  $X'$  définie précédemment. Soient  $Z_1, Z_2$  deux strates différentes dans  $\mathcal{S}$ ,  $G_0(Z_1)$  (resp.  $G_0(Z_2)$ ) le sous-groupe de  $G$  qui laisse  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ) invariant et  $G(Z_1)$  (resp.  $G(Z_2)$ ) le groupe de stabilisateurs de  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ). Supposons que  $Z_1 \subset \overline{Z_2}$ . Alors on a

$$G_0(Z_2) \subseteq G_0(Z_1) \subseteq G(Z_1) \subseteq G(Z_2) \quad .$$

*Démonstration.* La deuxième inclusion est évidente.

Prenons un élément  $g$  dans  $G_0(Z_2)$ . Comme  $g$  fixe tout point de  $Z_2$ ,  $g$  fixe tout point de  $\overline{Z_2}$  aussi. En particulier  $g$  fixe les points de  $Z_1$ . Ceci montre la première inclusion.

Notons  $\mathcal{D}_1$  (resp.  $\mathcal{D}_2$ ) le drapeau associé à  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ). D'après le lemme précédent  $G(Z_1)$  est constitué des éléments de  $G$  qui à la fois commutent avec tout élément de  $G_0(Z_1)$  et stabilisent le drapeau  $\mathcal{D}_1$ . Chaque élément de  $G(Z_1)$  commute avec tout élément de  $G_0(Z_1)$ , en particulier commute avec tout élément de  $G_0(Z_2)$ . D'autre part,  $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}_1$ . Tout élément de  $G(Z_1)$  stabilise  $\mathcal{D}_1$ , à priori stabilise  $\mathcal{D}_2$ . Par conséquent  $G(Z_1) \subseteq G(Z_2)$ .

□

## 2.2 Un recouvrement particulier du modèle équivariant abélien $X'$ .

Dans ce paragraphe, on montre l'existence d'un recouvrement de  $X'$  qui est compatible avec la stratification  $\mathcal{S}$  définie dans le paragraphe précédent.

**Définition 2.7** Soit  $Z$  une strate dans  $\mathcal{S}$ , on définit  $U_Z$  de la manière suivante,

$$U_Z := \bigcup_{\substack{Z' \in \mathcal{S} \\ Z \subseteq Z'}} Z' \quad .$$

### Théorème 2.8

- 1) Pour toute strate  $Z \in \mathcal{S}$ , l'ensemble  $U_Z$  défini ci-dessus est un ouvert de  $X'$ . Posons  $\mathcal{R} := \{U_Z \mid Z \in \mathcal{S}\}$ . Alors la famille  $\mathcal{R}$  est fermée pour l'intersection et recouvre  $X'$ .
- 2) Le morphisme canonique  $\varphi_Z : X' \longrightarrow Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$  est un isomorphisme sur  $U_Z$ . Donc  $U_Z$  est isomorphe à  $\varphi_Z(U_Z)$ , qui est un ouvert de Zariski de la variété torique  $Y_Z$ . De plus la restriction de  $\varphi_Z$  sur  $U_Z$  est une  $G(Z)$ -immersion ouverte et l'image de chaque  $Z' \subset U_Z$  est un ouvert dense de l'adhérence d'une orbite du tore.

Avant de montrer ce théorème, commençons par quelques résultats préliminaires. Fixons une métrique sur  $X$  invariante par  $G$ . Pour voir l'existence d'une telle métrique, on peut définir par exemple

$$(x, y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g(x), g(y) \rangle$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire habituel dans  $X$ . On peut vérifier que la forme quadratique  $q(x) := (x, x)$  est définie positive et invariante par  $G$ , donc induit une métrique sur  $X$  invariante par  $G$ . Dans tout ce qui suit, quand on parle de l'orthogonalité, c'est toujours par rapport à cette métrique invariante.

**Définition 2.9** Soit  $\mathcal{D} = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$  un drapeau non vide de sous-espaces linéaires de  $X$ . On définit la décomposition de  $X$  associée à  $\mathcal{D}$  de la manière suivante,

$$X = V_0 \oplus V_{0,1} \oplus \cdots \oplus V_{i,i+1} \oplus \cdots \oplus V_{k,k+1},$$

où  $V_{i,i+1}$  est le supplémentaire orthogonal de  $V_i$  dans  $V_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, k$ , avec  $V_{k+1} := X$ . Si  $\mathcal{D} = \phi$ , la décomposition associée est par définition  $X = X$ .

Soient  $X = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$  et  $X = V'_0 \oplus V'_1 \oplus \cdots \oplus V'_{k'}$  deux décompositions de  $X$  en somme directe des sous-espaces linéaires. On dit que la première est plus fine que la deuxième si, pour chaque  $V_i$  avec  $0 \leq i \leq k$ , il existe un  $V'_j$  avec  $0 \leq j \leq k'$  tel que  $V_i \subseteq V'_j$ . Si de plus  $k' < k$ , on dit que la première décomposition est strictement plus fine que la deuxième.

Soient  $Z \in \mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$  le drapeau associé à  $Z$ . Soit

$$X = V_0 \oplus V_{0,1} \oplus \cdots \oplus V_{k,k+1}$$

la décomposition de  $X$  associée à  $\mathcal{D}_Z$ .

**Définition 2.10** On définit la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  de la manière suivante,

$$X = \bigoplus_{i=0}^{k+1} \left( \bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j} \right),$$

où pour chaque  $i$ ,  $0 \leq i \leq k+1$ ,  $\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j}$  est la décomposition canonique, en modules isotypiques, de la sous-représentation de  $G_0(Z)$  dans  $V_{i-1,i}$ , avec  $V_{-1,0} := V_0$ .<sup>2</sup>

**Remarque 2.11** Ici  $\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j}$  est la décomposition la moins fine de  $V_{i-1,i}$  telle que la restriction de tout élément de  $G_0(Z)$  sur chaque  $E_{i,j}$  soit une homothétie, avec  $0 \leq i \leq k+1$  et  $1 \leq j \leq l_i$ . Si la métrique invariante est fixée, les  $E_{i,j}$  sont uniquement déterminés à ordre près, car les  $V_{i-1,i}$  sont uniquement déterminés.

---

<sup>2</sup>Pour la décomposition canonique d'une représentation linéaire, voir ([38] page 33).



**Remarque 2.12** Si  $\mathcal{D}_Z = \phi$ , la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  est la décomposition canonique de la représentation de  $G_0(Z)$  dans  $X$ .

**Lemme 2.13** Soient  $Z$  et  $Z'$  deux strates dans  $\mathcal{S}$  avec  $Z \subset \overline{Z'}$ . Soient  $\mathcal{D}_Z$  et  $\mathcal{D}_{Z'}$  les drapeaux associés. Alors

- 1) la décomposition de  $X$  associée à  $\mathcal{D}_Z$  est plus fine que celle associée à  $\mathcal{D}_{Z'}$ .
- 2) la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  est plus fine que celle associée à  $Z'$ .

*Démonstration.*

- 1) D'après l'hypothèse on a  $Z \subset \overline{Z'}$ , donc tous les diviseurs exceptionnels  $E_V$  contenant  $Z'$  contiennent  $Z$  aussi. Ceci montre que  $\mathcal{D}_{Z'}$  est un sous-drapeau de  $\mathcal{D}_Z$ , et par suite la décomposition de  $X$  associée à  $\mathcal{D}_Z$  est plus fine que celle associée à  $\mathcal{D}_{Z'}$ .

- 2) Supposons que  $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset \cdots \subset V_k)$  et  $\mathcal{D}_{Z'} = (V'_0 \subset \cdots \subset V'_{k'})$ . Soit  $X = \bigoplus_{i=0}^{k+1} (\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j})$

(resp.  $X = \bigoplus_{i=0}^{k'+1} (\bigoplus_{j=1}^{l'_i} E'_{i,j})$ ) la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  (resp. associée à  $Z'$ ).

D'après le théorème 2.6,  $G_0(Z')$  est un sous-groupe de  $G_0(Z)$ . Donc la restriction de tout élément de  $G_0(Z')$  sur chaque  $E_{i,j}$ , avec  $0 \leq i \leq k+1$  et  $1 \leq j \leq l_i$ , est une homothétie. D'autre part il est clair que la décomposition  $X = \bigoplus_{i=0}^{k+1} (\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j})$  est plus fine

que celle associée à  $\mathcal{D}_{Z'}$ . D'après la remarque 2.11,  $\bigoplus_{j=1}^{l'_i} E'_{i,j}$  est la décomposition la moins fine de  $V'_{i-1,i}$  telle que sur chaque  $E'_{i,j}$  la restriction de tout élément de  $G_0(Z')$  soit une homothétie. On en déduit que la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  est plus fine que celle associée à  $Z'$ . □

**Lemme 2.14** Soit  $\mathcal{D} = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$  un drapeau de sous-espaces linéaires de  $X$ . Soit

$$X = V_0 \oplus V_{0,1} \oplus V_{1,2} \oplus \cdots \oplus V_{k,k+1}$$

la décomposition de  $X$  associée à  $\mathcal{D}$ . Notons  $E_i$  le diviseur exceptionnel irréductible dans  $Bl_{\mathcal{D}}X$  qui est contracté sur  $V_i$  et notons  $E'_{\mathcal{D}}$  l'intersection des  $E_i$ , avec  $i = 0, \dots, k$ . Alors il existe un isomorphisme canonique entre  $E'_{\mathcal{D}}$  et le produit direct suivant,

$$V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{i,i+1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{k,k+1}) \quad .$$

*Démonstration.* Si  $\mathcal{D} = \phi$ , on pose  $k = -1$ . C'est facile de vérifier que le lemme soit vrai pour  $k = -1$  ou  $0$ . Supposons que ceci soit vrai pour  $k < j$  avec  $j$  un entier positif. Posons  $\mathcal{D}_i := (V_0 \subset \cdots \subset V_i)$ , avec  $0 \leq i \leq j$ . Considérons la suite d'éclatements suivante,

$$Bl_{\mathcal{D}_j}X \xrightarrow{f_j} Bl_{\mathcal{D}_{j-1}}X \xrightarrow{f_{j-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} Bl_{\mathcal{D}_0}X \xrightarrow{f_0} X$$

Notons  $E'_i$ ,  $0 \leq i \leq j-1$ , le diviseur exceptionnel dans  $Bl_{\mathcal{D}_{j-1}}X$  qui se contracte sur  $V_i$ .  
 Posons  $E'_{\mathcal{D}_{j-1}} = \bigcap_{i=0}^{j-1} E'_i$ . D'après l'hypothèse de récurrence, on a l'isomorphisme suivant,

$$E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \simeq V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{j-1,j} \oplus V_{j,j+1}) \quad .$$

La transformée stricte de  $V_j$  dans  $Bl_{\mathcal{D}_j}X$ , notée  $\overline{V}_j^{(j-1)}$ , est isomorphe à  $Bl_{\mathcal{D}_{j-1}}V_j$  avec  $\mathcal{D}_{j-1}$  vu comme un drapeau de sous-espaces linéaires de  $V_j$ . D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V}_j^{(j-1)} \simeq V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{j-1,j}) \quad .$$

Puisque dans  $Bl_{\mathcal{D}_{j-1}}X$ ,  $\overline{V}_j^{(j-1)}$  et les  $E'_i$ , avec  $i = 0, \dots, j-1$ , sont transversales, alors  $E'_{\mathcal{D}}$  est exactement l'image inverse de  $E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V}_j^{(j-1)}$  dans  $Bl_{\mathcal{D}_j}X$ , i.e.

$$E'_{\mathcal{D}} = f_j^{-1}(E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V}_j^{(j-1)}) \quad ,$$

avec  $f_j$  le morphisme de  $Bl_{\overline{V}_j^{(j-1)}}(Bl_{\mathcal{D}_{j-1}}X)$  dans  $Bl_{\mathcal{D}_{j-1}}X$ . La transversalité ci-dessus implique aussi la chaîne suivante,

$$(f_j^{-1}(E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V}_j^{(j-1)})) \subset (f_j^{-1}(E'_{\mathcal{D}_{j-1}})) = (Bl_{(E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V}_j^{(j-1)})} E'_{\mathcal{D}_{j-1}}) \quad .$$

On en déduit que  $E'_{\mathcal{D}}$  est égal au diviseur exceptionnel de l'éclatement de  $E'_{\mathcal{D}_{j-1}}$  de centre  $E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V}_j^{(j)}$ . Or ce diviseur exceptionnel est isomorphe au fibré projectif associé au fibré normal de  $E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V}_j^{(j)}$  dans  $E'_{\mathcal{D}_{j-1}}$ , est donc isomorphe à

$$V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{j-2,j-1}) \times \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\mathbb{P}(V_{j-1,j})} \mathbb{P}(V_{j-1,j} \oplus V_{j,j+1})) \quad .$$

Puisque

$$(\mathcal{N}_{\mathbb{P}(V_{j-1,j})} \mathbb{P}(V_{j-1,j} \oplus V_{j,j+1})) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_{j-1,j})}(1) \simeq \mathbb{P}(V_{j-1,j}) \times V_{j,j+1} \quad ,$$

on obtient

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_{\mathbb{P}(V_{j-1,j})} \mathbb{P}(V_{j-1,j} \oplus V_{j,j+1})) \simeq \mathbb{P}(V_{j-1,j}) \times \mathbb{P}(V_{j,j+1}) \quad .$$

D'où le résultat. □

Soient  $Z$  une strate dans  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset \cdots \subset V_k)$  le drapeau associé à  $Z$  et

$$X = \bigoplus_{i=0}^{k+1} \left( \bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j} \right)$$

la décomposition de  $X$  associée à  $Z$ . Posons  $Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z}X$ . Notons  $E'_i$  le diviseur exceptionnel irréductible dans  $Y_Z$  qui se contracte en  $V_i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , et  $E'_{\mathcal{D}}$  l'intersection des  $E'_i$ . Notons  $Y^{G_0(Z)}$  l'ensemble de points fixes de  $G_0(Z)$  dans  $Y_Z$ . On a le lemme suivant.

**Lemme 2.15** *Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des composantes irréductibles de  $E'_{\mathcal{D}} \cap Y^{G_0(Z)}$  et l'ensemble des suites  $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k+1}$ , avec  $\lambda_i \in \{1, \dots, l_i\}$ . Précisément chaque composante est de la forme suivante,*

$$\overline{E_0 \oplus E_{1,\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{k+1,\lambda_{k+1}}} \cap E'_{\mathcal{D}} \quad ,$$

où  $E_0$  est le sous-espace invariant de  $G_0(Z)$  dans  $V_0$ .

*Démonstration.* D'après le lemme précédent, on a l'isomorphisme suivant,

$$E'_{\mathcal{D}} \simeq V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \dots \times \mathbb{P}(V_{k,k+1}) \quad .$$

D'après la définition de la décomposition associée, les  $V_{i,i+1}$  avec  $i = 0, \dots, k$  ainsi que  $V_0$  sont tous stables par  $G_0(Z)$ . Pour déterminer  $E'_{\mathcal{D}} \cap Y^{G_0(Z)}$  il suffit de considérer l'action de  $G_0(Z)$  sur chaque facteur du produit direct ci-dessus.

D'abord  $E_0$  est le sous-espace invariant de  $G_0(Z)$  dans  $V_0$ . Si  $E_0 \neq \{0\}$ , il existe un unique  $j$  avec  $1 \leq j \leq l_0$  tel que  $E_{0,j} = E_0$ . Ensuite pour  $i = 1, \dots, k+1$ , l'ensemble de points fixes de  $G_0(Z)$  dans  $\mathbb{P}(V_{i-1,i})$  est la réunion disjointe des  $\mathbb{P}(E_{i,j})$  avec  $j = 1, \dots, l_i$ . Par conséquent chaque composante irréductible de  $E'_{\mathcal{D}} \cap Y^{G_0(Z)}$  est de la forme suivante,

$$E_0 \times \mathbb{P}(E_{1,\lambda_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(E_{k+1,\lambda_{k+1}}) \quad .$$

On vérifie que ce produit direct est égal à l'intersection de  $E'_{\mathcal{D}}$  avec la transformée stricte de l'espace  $E_Z$  où

$$E_Z := E_0 \oplus E_{1,\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{k+1,\lambda_{k+1}} \quad .$$

D'où le résultat. □

**Lemme 2.16** *Les notations sont comme précédemment. Soit  $\varphi_Z$  le morphisme canonique de  $X'$  dans  $Y_Z = \text{Bl}_{\mathcal{D}_Z} X$ . Alors l'adhérence de l'image de  $Z$  dans  $Y_Z$ , notée  $\overline{\varphi_Z(Z)}$ , est une composante irréductible de  $E'_{\mathcal{D}_Z} \cap Y^{G_0(Z)}$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\overline{Z}$  est une composante irréductible de  $E_{\mathcal{D}_Z} \cap W^{G_0(Z)}$ , avec  $W^{G_0(Z)}$  l'ensemble de points fixes de  $G_0(Z)$  dans  $X'$ , et que  $\varphi_Z$  est équivariant par rapport à  $G_0(Z)$ , alors  $\varphi_Z(Z)$  est irréductible et contenue dans  $E'_{\mathcal{D}_Z} \cap Y^{G_0(Z)}$ . Or la restriction de  $\varphi_Z$  sur  $U_Z$  est une  $G_0(Z)$ -immersion ouverte, on en déduit que  $\varphi_Z(Z)$  est une composante irréductible de  $E'_{\mathcal{D}_Z} \cap Y^{G_0(Z)} \cap \varphi_Z(U_Z)$ . Comme  $\varphi_Z(Z) = \overline{\varphi_Z(Z)} \cap \varphi_Z(U_Z)$  est un ouvert dense de  $\overline{\varphi_Z(Z)}$ , on conclut que  $\overline{\varphi_Z(Z)}$  est une composante irréductible de  $E'_{\mathcal{D}_Z} \cap Y^{G_0(Z)}$ . □

**Corollaire 2.17** *Les notations sont comme dans les deux lemmes précédents. Alors dans  $X'$ , l'adhérence de  $Z$  est l'intersection de  $E_{\mathcal{D}_Z}$  avec la transformée stricte de l'espace  $E_Z$ , où*

$$E_Z := E_0 \oplus E_{1,\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{k+1,\lambda_{k+1}} \quad .$$

*Démonstration.* On vérifie directement que  $E_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{E_Z}$  est irréductible et fixe par  $G_0(Z)$ . Donc elle est contenue dans une composante irréductible de  $E_{\mathcal{D}_Z} \cap W^{G_0(Z)}$ . D'autre part son image dans  $Y_Z$  contient l'image de  $Z$ . Puisque  $\varphi_Z$  est un isomorphisme au voisinage de  $Z$ , ceci implique qu'elle contient  $Z$ . Comme  $\overline{Z}$  est une composante irréductible de  $E_{\mathcal{D}_Z} \cap W^{G_0(Z)}$ , on en déduit que

$$\overline{Z} = E_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{E_Z} \quad .$$

□

**Convention 2.18** *Quitte à changer les indices, on suppose  $\lambda_i = 1$  pour  $i = 1, \dots, k+1$ . Acceptons que  $E_{0,1}$  peut être réduit à  $\{0\}$ , on suppose  $E_{0,1} = E_0$ . Donc dans la suite, quand on écrit la décomposition de  $X$  associée à une strate  $Z$ , on a*

$$\overline{Z} = E_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{(E_{0,1} \oplus E_{1,1} \oplus \cdots \oplus E_{k+1,1})} \quad .$$

**Lemme 2.19** *Soient  $Z, Z'$  deux strates différentes dans  $\mathcal{S}$ . Soit  $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$  (resp.  $\mathcal{D}_{Z'} = (V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_{k'})$ ) le drapeau associé à  $Z$  (resp.  $Z'$ ). Soit  $X = \bigoplus_{i=0}^{k+1} (\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j})$  (resp.  $X = \bigoplus_{i=0}^{k'+1} (\bigoplus_{j=1}^{l'_i} E'_{i,j})$ ) la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  (resp.  $Z'$ ). Alors,  $Z \subset \overline{Z'}$  si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées,*

- (1)  $\mathcal{D}_Z \subseteq \mathcal{D}_{Z'}$ , i.e. il existe  $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{k'} \leq k$  tels que  $V'_i = V_{\alpha_i}$  pour  $i = 0, \dots, k'$ .
- (2) la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  est plus fine que celle associée à  $Z'$ .
- (3)  $(\bigoplus_{j=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} E_{j,1}) \subseteq E'_{i,1}$ ,  $0 \leq i \leq k'+1$ ,  $\alpha_{-1} := -1$  et  $\alpha_{k'+1} := k+1$ . De plus si  $\mathcal{D}_Z = \mathcal{D}_{Z'}$ , alors il existe au moins un  $i$  tel que l'inclusion ci-dessus soit stricte.

*Démonstration.* Supposons  $Z \subset \overline{Z'}$ . Alors  $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}_Z$ . Pour chaque  $i \in \{0, \dots, k'\}$ , on a  $V'_i \in \mathcal{D}_Z$ , i.e.  $\exists \alpha_i$  tel que  $V'_i = V_{\alpha_i}$ . Le (2) découle du fait que  $G_0(Z') \subseteq G_0(Z)$  (théorème 2.6). Pour montrer le (3), considérons le morphisme suivant,

$$\varphi_Z : X' \longrightarrow Y_Z := \text{Bl}_{\mathcal{D}_Z} X \quad .$$

Posons  $F_{j,1} := E'_{j,1} \cap V_{j-1,j}$  avec  $0 \leq i \leq k'+1$  et  $\alpha_{i-1} < j \leq \alpha_i$ . Alors dans  $Y_Z$ ,  $\overline{\varphi_Z(Z')} \cap (\varphi_Z(E_{\mathcal{D}_Z}))$  est isomorphe au produit direct suivant,

$$F_{0,1} \times \mathbb{P}(F_{1,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(F_{k+1,1}) \quad ,$$

qui est une sous-variété fermée de

$$\varphi_Z(E_{\mathcal{D}_Z}) \simeq V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{k,k+1}) \quad .$$

D'autre part, on a  $\overline{\varphi_Z(Z)} \subseteq (\varphi_Z(E_{\mathcal{D}_Z}))$  et  $\overline{\varphi_Z(Z)} \simeq E_{0,1} \times \mathbb{P}(E_{1,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_{k+1,1})$ . L'inclusion  $\overline{\varphi_Z(Z)} \subseteq (\overline{\varphi_Z(Z')} \cap \varphi_Z(E_{\mathcal{D}_Z}))$  implique que  $E_{i,1} \subset F_{i,1}$  pour  $i = 0, \dots, k+1$ . Donc on a

$$\left( \bigoplus_{j=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} E_{j,1} \right) \subseteq E'_{i,1} \quad ,$$

avec  $i = 0, \dots, k+1$ . Si  $\mathcal{D}_Z = \mathcal{D}_{Z'}$  et  $E_{i,1} = E'_{i,1}$  pour  $i = 0, \dots, k+1$ , alors dans  $Y_Z$ , on a  $\overline{Z} = \overline{Z'}$ . Ceci implique que  $Z = Z'$ , d'où une contradiction. Ainsi on a montré que la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  est strictement plus fine que celle associée à  $Z'$ .

Inversement supposons que les trois conditions soient vérifiées. Alors les deux premières conditions impliquent que

$$G_0(Z') \subseteq G_0(Z) \subseteq G(Z) \subseteq G(Z') \quad .$$

Puisque  $Z' \cap E_V = \emptyset$  pour tout  $V \in \Xi \setminus \mathcal{D}_Z$ , le morphisme  $\varphi_Z : X' \rightarrow Y_Z$  est un isomorphisme au voisinage de  $Z'$ . La troisième condition implique que dans  $Y_Z$ , on a

$$\varphi_Z(Z) \subseteq \overline{\varphi_Z(Z')} \quad .$$

Comme  $\varphi_Z$  est un isomorphisme au voisinage de  $Z$ , on en déduit que  $Z \subseteq \overline{Z'}$ . Puisque  $Z \neq Z'$ , on obtient  $Z \subset \overline{Z'}$ . □

**Proposition 2.20** *Soient  $Z_1$  et  $Z_2$  deux éléments distincts dans  $\mathcal{S}$ . Alors il existe un unique  $Z \in \mathcal{S}$  tel que  $Z$  soit l'élément minimal de  $\mathcal{S}$  dont l'adhérence contient  $Z_1$  et  $Z_2$ , i.e.*

- 1)  $(Z_1 \cup Z_2) \subset \overline{Z}$ ,
- 2)  $Z \subseteq \overline{Z'}$  pour tout  $Z' \in \mathcal{S}$  avec  $\overline{Z'} \supseteq (Z_1 \cup Z_2)$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{D}_1 = (V_0^1 \subset V_1^1 \subset \cdots \subset V_{k_1}^1)$  (resp.  $\mathcal{D}_2 = (V_0^2 \subset V_1^2 \subset \cdots \subset V_{k_2}^2)$ ) le drapeau associé à  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ). Soit  $X = \bigoplus_{i=0}^{k_1+1} \left( \bigoplus_{j=1}^{l_i^1} E_{i,j}^1 \right)$  (resp.  $X = \bigoplus_{i=0}^{k_2+1} \left( \bigoplus_{j=1}^{l_i^2} E_{i,j}^2 \right)$ ) la décomposition de  $X$  associée à  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ) (définition 2.10). Posons  $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ . Soit  $\mathcal{D} = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ . Alors il existe deux suites d'entiers  $\{\alpha_i\}$  et  $\{\beta_i\}$ , avec  $i = 0, \dots, k$ , telles que  $V_i = V_{\alpha_i}^1 = V_{\beta_i}^2$  pour  $i = 0, \dots, k$ . Définissons pour  $0 \leq i \leq k+1$

$$E_{i,0} := \left( \bigoplus_{c_1=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} E_{c_1,1}^1 \right) + \left( \bigoplus_{c_2=\beta_{i-1}+1}^{\beta_i} E_{c_2,1}^2 \right) \quad ,$$

avec  $\alpha_{k+1} := k_1 + 1$ ,  $\beta_{k+1} := k_2 + 1$ , et

$$G_0 := \{g \in G_0(Z_1) \cap G_0(Z_2) \mid g|_{E_{i,0}} \text{ est une homothétie}\} \quad .$$

Posons  $E_{i,1}$  le sous-espace maximal de  $V_{i-1,i}$  contenant  $E_{i,0}$  tel que la restriction de tout élément de  $G_0$  sur  $E_{i,1}$  soit une homothétie. Soit  $Z$  la strate passant par le point générique de  $E_{\mathcal{D}} \cap \overline{E_Z}$  avec  $E_Z := \bigoplus_{i=0}^{k+1} E_{i,1}$ . On voit que  $Z$  est une composante irréductible de  $E_{\mathcal{D}} \cap W^{G_0}$  et que l'adhérence de  $Z$  contient  $Z_1$  et  $Z_2$  (lemme 2.19).

D'autre part pour tout  $Z' \in \Xi$ , avec  $\overline{Z'} \supseteq (Z_1 \cup Z_2)$ , on a  $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}_2$  où  $\mathcal{D}_{Z'}$  est le drapeau associé à  $Z'$ . Donc  $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}$ . Soit  $X = \bigoplus_{i=0}^{k'+1} (\bigoplus_{j=1}^{l'_i} E'_{i,j})$  la décomposition de  $X$  associée à  $Z'$ . Il existe un sous-ensemble de  $\{0, \dots, k'\}$ , noté  $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{k'}\}$ , tel que  $V'_i = V_{\mu_i}$  pour  $i = 0, \dots, k'$ . D'après le lemme précédent et l'hypothèse  $(Z_1 \cup Z_2) \subseteq \overline{Z'}$ , on obtient les deux inclusions suivantes:

$$\left( \bigoplus_{j=\alpha_{\mu_{i-1}+1}}^{\alpha_{\mu_i}} E'_{j,1} \right) \subseteq E'_{i,1} \quad \text{et} \quad \left( \bigoplus_{j=\beta_{\mu_{i-1}+1}}^{\beta_{\mu_i}} E'_{j,1} \right) \subseteq E'_{i,1} \quad .$$

Ceci entraîne que  $E_{j,0} \subseteq E'_{i,1}$ , pour  $\mu_{i-1} < j \leq \mu_i$ .

Comme  $G_0(Z') \subseteq G_0$ , la restriction de chaque élément de  $G_0(Z')$  sur  $E_{j,0}$  est une homothétie pour  $j = 0, \dots, k+1$ . La définition de  $E_{j,1}$  entraîne que  $E_{j,1} \subseteq E'_{i,1}$ , avec  $j = \mu_{i-1} + 1, \dots, \mu_i$ . Donc on a

$$\left( \bigoplus_{j=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} E_{j,1} \right) \subseteq E'_{i,1} \quad .$$

D'autre part  $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}$  et  $G_0(Z') \subseteq G_0$ , on en déduit que la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  est plus fine que celle associée à  $Z'$ . D'après le lemme précédent on conclut que  $Z \subseteq \overline{Z'}$ . Ceci montre que  $Z$  est l'élément minimal de  $\mathcal{S}$  dont l'adhérence contient  $Z_1$  et  $Z_2$ . □

Maintenant montrons le théorème 2.8 qui est énoncé au debut de ce paragraphe.

### Démonstration du Théorème 2.8.

- 1) Soit  $Z' \in \mathcal{S}$  tel que  $Z \not\subseteq \overline{Z'}$ . Alors pour tout  $Z'' \in \mathcal{S}$ , avec  $Z'' \subseteq \overline{Z'}$ , on a  $Z \not\subseteq \overline{Z''}$ . Puisque  $\mathcal{S}$  est une stratification de  $X'$ , ceci implique que  $(\bigcup_{\substack{Z' \in \mathcal{S} \\ Z \not\subseteq \overline{Z'}}} Z')$  est un fermé de  $X'$ .

Par conséquent  $U_Z$ , qui est le complémentaire de ce fermé, est un ouvert de  $X'$ .

Il est clair que la famille  $\mathcal{R}$  recouvre  $X'$ , car chaque  $Z$  dans  $\mathcal{S}$  est contenu dans  $U_Z$ . Pour tous  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{S}$ ,  $(U_{Z_1} \cap U_{Z_2})$  est l'ensemble des strates dont l'adhérence contient  $Z_1$  et  $Z_2$ . D'après la proposition précédente, on trouve que  $(U_{Z_1} \cap U_{Z_2}) = U_Z$  où  $Z$  est l'élément minimal de  $\mathcal{S}$  dont l'adhérence passe par  $Z_1$  et  $Z_2$ . Ceci montre que  $\mathcal{R}$  est fermée par l'intersection.

2) Soit  $Z \in \mathcal{S}$ . D'après le théorème 2.6, chaque  $Z'$  dans  $U_Z$  est stable par  $G(Z)$ . Donc  $U_Z$  est stable par  $G(Z)$ . Ensuite puisque  $U_Z \cap E_V = \emptyset$  pour tout  $V \in \Xi \setminus \mathcal{D}_Z$ , on en déduit que le morphisme canonique  $\varphi_Z : X' \rightarrow Y_Z := \text{Bl}_{\mathcal{D}_Z} X$  est un isomorphisme sur  $U_Z$ . Comme  $\varphi_Z$  est équivariant par  $G(Z)$  et que  $U_Z$  est stable par  $G(Z)$ , on trouve que la restriction de  $\varphi_Z$  sur  $U_Z$  est aussi équivariante par  $G(Z)$ . Toutes les variétés apparues ici sont algébriques, donc  $\varphi_Z(U_Z)$  est un ouvert de Zariski de  $Y_Z$ .

Pour chaque strate  $Z' \subseteq U_Z$ , l'adhérence de  $\varphi_Z(Z')$  est une composante irréductible de l'intersection de la sous-variété invariante de  $G_0(Z')$  avec des diviseurs exceptionnels passant par  $\varphi_Z(Z')$ . Or cette intersection est stable par le tore, donc est l'adhérence d'une orbite du tore.

□

### 3 Variétés toriques munies d'une action d'un groupe non abélien.

Dans cette section, on considère certains types de variétés toriques, qui sont munies naturellement d'une action d'un groupe non abélien contenant le tore. Un exemple trivial est l'espace affine  $X := \mathbb{C}^n$  muni de l'action de  $GL(n, \mathbb{C})$ .

Après avoir rappelé des notations et des résultats élémentaires, on considère l'action d'un groupe non abélien (contenant le tore) sur des variétés toriques. Plus précisément on considère des modifications et des désingularisations (équivariantes par rapport au groupe non abélien indiqué ci-dessus) de ces variétés toriques et on considère leur traductions en termes subdivisions des éventails. Comme un exemple d'application, on obtient des désingularisations du quotient de l'espace affine  $\mathbb{C}^n$  par un groupe abélien fini  $G_0 \subset GL(n, \mathbb{C})$ , qui sont équivariantes par rapport au centralisateur de  $G_0$  dans  $GL(n, \mathbb{C})$ .

#### 3.1 Rappels et notations.

Soient  $N$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $n$  et  $M := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$  son dual. Alors

$$T_N := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = \text{Hom}_{\text{groupe}}(M, \mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*$$

est un tore algébrique. On peut identifier  $M$  et le groupe des caractères de  $T_N$ , i.e.

$$M \simeq \text{Hom}_{\text{groupes algébriques}}(T, \mathbb{C}^*) \quad ,$$

et identifier  $N$  et le groupe des sous-groupes à un paramètre de  $T_N$ , i.e.

$$N \simeq \text{Hom}_{\text{groupes algébriques}}(\mathbb{C}^*, T_N) \quad .$$

Posons  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  et  $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Un sous-ensemble  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  est appelé un cône rationel polyédral fortement convexe, dans la suite on dira simplement un cône, si  $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$  et qu'il existe  $u_1, \dots, u_s \in N$  tels que

$$\sigma = \{a_1 u_1 + \cdots + a_s u_s \mid a_i \geq 0, i = 1, \dots, s\} \quad .$$

Un cône  $\sigma$  dans  $N_{\mathbb{R}}$  est dit simplicial s'il est engendré par des vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants, il est dit régulier s'il est engendré par un sous-ensemble d'une  $\mathbb{Z}$ -base de  $N$ . Sa dimension est par définition la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\{\sigma - \sigma\}$  dans  $N_{\mathbb{R}}$  engendré par  $\sigma$ . On dénote par  $\check{\sigma}$  le dual de  $\sigma$  dans  $M_{\mathbb{R}}$ , i.e.

$$\check{\sigma} := \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle x, y \rangle \geq 0, \forall y \in \sigma\} \quad .$$

Un sous-ensemble  $\sigma' \subseteq \sigma$  est appelé une face de  $\sigma$ , notée  $\sigma' \leq \sigma$ , s'il existe un  $m \in (M \cap \check{\sigma})$  tel que

$$\sigma' = \{y \in \sigma \mid \langle m, y \rangle = 0\} \quad .$$

Si de plus  $\sigma'$  est différent de  $\sigma$ , alors on dit que  $\sigma'$  est une face propre de  $\sigma$ , notée  $\sigma' < \sigma$ . Un éventail (fini)  $\Sigma$  est une famille (finie) de cônes dans  $N_{\mathbb{R}}$  telle que



i) si  $\sigma \in \Sigma$  et  $\tau < \sigma$ , alors  $\tau \in \Sigma$ ,

ii) si  $\sigma, \tau \in \Sigma$ , alors  $\sigma \cap \tau$  est une face commune de  $\sigma$  et de  $\tau$ .

Une décomposition rationnelle partielle polyédrale, ou simplement r.p.p.décomposition, est un couple  $(N, \Sigma)$  constitué d'un  $\mathbb{Z}$ -module libre  $N$  de rang fini et un éventail  $\Sigma$  dans  $N_{\mathbb{R}}$ . Un morphisme de r.p.p.décompositions

$$h : (N, \Sigma) \longrightarrow (N', \Sigma')$$

est un  $\mathbb{Z}$ -morphisme  $h : N \longrightarrow N'$  avec  $\text{Coker}(h)$  fini, tel que pour tout  $\sigma \in \Sigma$  il existe un  $\sigma' \in \Sigma'$  satisfaisant  $h_{\mathbb{R}}(\sigma) \subseteq \sigma'$ , où  $h_{\mathbb{R}}$  est l'extension scalaire

$$h_{\mathbb{R}} : N_{\mathbb{R}} \longrightarrow N'_{\mathbb{R}} \quad .$$

Soient  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  deux éventails dans  $N_{\mathbb{R}}$ . On dit que  $\Sigma'$  est une subdivision de  $\Sigma$  si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

i) Pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , il existe un  $\sigma' \in \Sigma'$  tel que  $\sigma' \subseteq \sigma$ .

ii) Les deux éventails  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  ont le même support, i.e.

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = \bigcup_{\sigma' \in \Sigma'} \sigma'$$

Soit  $\sigma$  un cône dans  $N_{\mathbb{R}}$ . On définit  $V_{\sigma, N}$  comme l'ensemble des homomorphismes des semi-groupes de  $\check{\sigma} \cap M$  dans  $\mathbb{C}$ , qui envoient l'unité en l'unité. On a

$$V_{\sigma, N} := \text{Hom}_{\text{unit.semi-groupe}}(\check{\sigma} \cap M, \mathbb{C}) = \text{Spec } \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \quad ,$$

où  $\mathbb{C}$  est considéré comme un semi-groupe unitaire pour la multiplication et que  $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$  est l'algèbre associée au semi-groupe  $\check{\sigma} \cap M$ . On appelle  $V_{\sigma, N}$  une variété torique affine. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le réseau  $N$ , on la note simplement  $V_{\sigma}$ . Si  $\tau$  est une face de  $\sigma$ , alors il existe une immersion ouverte canonique de  $V_{\tau, N}$  dans  $V_{\sigma, N}$ , en particulier  $T_N = V_{\{0\}, N}$  est un ouvert de  $V_{\sigma, N}$ . Supposons que  $\Sigma$  soit un éventail dans  $N_{\mathbb{R}}$ . On définit la variété  $V_{\Sigma, N}$  comme le recollement canonique des  $V_{\sigma, N}$  pour tout  $\sigma \in \Sigma$ . L'action de  $T_N$  sur chaque  $V_{\sigma, N}$  est donnée par

$$(tx)(m) := t(m)x(m) \quad ,$$

pour tous  $t \in T_N$ ,  $m \in M$  et  $x \in V_{\sigma, N} := \text{Hom}_{\text{unit.semi-groupe}}(\check{\sigma} \cap M, \mathbb{C})$ .

Voilà quelques principaux résultats qui sont utilisés dans les paragraphes suivants.

**Théorème 3.1** *Soit  $(N, \Sigma)$  une r.p.p.décomposition.*

(i) L'application

$$\Sigma \ni \sigma \longrightarrow \text{orb}(\sigma) := \text{Hom}_{\text{gr}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*)$$

est une bijection

$$\text{orb} : \Sigma \longrightarrow \{T_N - \text{orbites dans } V_{\sigma, N}\} \quad ,$$

telle que  $\text{orb}(\{0\}) = T_N$  et telle que  $\dim(\sigma) + \dim(\text{orb}(\sigma)) = \dim(T_N)$ . De plus  $\tau \leq \sigma$  si et seulement si  $\text{orb}(\sigma)$  est contenue dans l'adhérence de  $\text{orb}(\tau)$ .

(ii) L'application

$$\Sigma \ni \sigma \longrightarrow U_\sigma := V_{\sigma, N} = \coprod_{\tau \leq \sigma} \text{orb}(\tau)$$

est une bijection

$$\Sigma \longrightarrow \{\text{ouverts affines dans } V_{\sigma, N} \text{ stables par } T_N\}$$

vérifiant les deux conditions suivantes,

$$a) \quad \tau \leq \sigma \iff U_\tau \subseteq U_\sigma,$$

$$b) \quad \tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 \iff U_\tau = U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2},$$

pour tous  $\sigma, \tau, \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ .

Dans la suite on va noter  $O_{\sigma, N}$  l'orbite associée au cône  $\sigma$ . Si il n'y a pas d'ambiguïté pour le réseau  $N$ , on la note simplement  $O_\sigma$ .

**Théorème 3.2** Soit  $(N, \Sigma)$  une r.p.p.décomposition. Alors  $V_{\Sigma, N}$  est une variété lisse si et seulement si tout  $\sigma \in \Sigma$  est un cône régulier. Dans ce cas l'adhérence de chaque orbite  $O_\sigma$  est aussi lisse.

**Théorème 3.3** Soient  $h : (N, \Sigma) \longrightarrow (N', \Sigma')$  un morphisme de r.p.p.décompositions et  $f : V_{\Sigma, N} \longrightarrow V_{\Sigma', N'}$  le morphisme dominant et équivariant associé à  $h$ . Alors  $f$  est propre si et seulement si pour chaque  $\sigma' \in \Sigma'$ , l'ensemble  $\{\sigma \in \Sigma, h(\sigma) \subseteq \sigma'\}$  est fini et que  $h^{-1}(\sigma')$  est une réunion des éléments de  $\Sigma$ .

**Proposition 3.4** Soient  $(N', \Sigma')$  et  $(N'', \Sigma'')$  deux r.p.p.décompositions. Alors on a

$$V_{\Sigma', N'} \times V_{\Sigma'', N''} = V_{\Sigma' \times \Sigma'', N' \times N''} \quad ,$$

où  $\Sigma' \times \Sigma''$  est l'éventail dans  $(N' \times N'')_{\mathbb{R}} = N'_{\mathbb{R}} \times N''_{\mathbb{R}}$  constitué des cônes

$$\sigma = \sigma' \times \sigma'' \quad ,$$

avec  $\sigma' \in \Sigma'$  et  $\sigma'' \in \Sigma''$ .

Plus généralement on a la proposition suivante pour des fibrés toriques équivariants.

**Proposition 3.5** *Soient  $h : (N, \Sigma) \longrightarrow (N', \Sigma')$  un morphisme de r.p.p.décompositions et  $f : V \longrightarrow V'$  le morphisme dominant équivariant associé à  $h$ , avec  $V := V_{\Sigma, N}$  et  $V' := V_{\Sigma', N'}$ . Posons*

$$N'' := \ker [h : N \longrightarrow N'] \quad .$$

*Supposons que  $(N'', \Sigma'')$  soit une r.p.p.décomposition. Posons  $V'' := V_{\Sigma'', N''}$ . Alors  $f : V \longrightarrow V'$  est un fibré équivariant avec la fibre typique  $V''$  si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées:*

- (i) *Le morphisme  $h : N \longrightarrow N'$  est surjectif.*
- (ii) *Il existe une r.p.p.décomposition  $(N, \tilde{\Sigma}')$  avec  $\tilde{\Sigma}' \subseteq \Sigma$ , et pour tout  $\sigma' \in \Sigma'$  il existe un unique  $\tilde{\sigma}' \in \tilde{\Sigma}'$  tel que  $h$  induise une bijection*

$$h : \tilde{\sigma}' \longrightarrow \sigma' \quad .$$

- (iii) *Chaque  $\sigma \in \Sigma$  peut s'écrire de manière unique comme*

$$\sigma = \tilde{\sigma}' + \sigma'' = \{\tilde{y}' + y'' \mid \tilde{y}' \in \tilde{\sigma}', y'' \in \sigma''\} \quad ,$$

*avec  $\tilde{\sigma}' \in \tilde{\Sigma}'$  et  $\sigma'' \in \Sigma''$ .*

Pour les démonstrations de ces résultats, voir ([29]). On a aussi besoin de la proposition suivante, pour la démonstration voir ([15] page 199).

**Proposition 3.6** *Soient  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  deux éventails dans  $N_{\mathbb{R}}$  avec  $\Sigma'$  une subdivision de  $\Sigma$ . Soit  $\pi : V_{\Sigma'} \longrightarrow V_{\Sigma}$  le morphisme propre birationnel équivariant induit par les inclusions*

$$\mathbb{C}[\check{\sigma}' \cap M] \subseteq \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \quad ,$$

*pour tout  $\sigma' \subseteq \sigma$ , avec  $\sigma' \in \Sigma'$  et  $\sigma \in \Sigma$ . Alors le lieu exceptionnel  $E$  de  $\pi$  est la réunion des orbites  $O_{\sigma'}$  du tore  $T$  dans  $V_{\Sigma'}$ , pour  $\sigma' \in \Sigma'$  mais  $\sigma' \notin \Sigma$ .*

Soit  $H$  un sous-groupe fini d'ordre  $r$  du tore  $T_N$ . Posons  $\omega := \exp(\frac{2i\pi}{r})$ . Alors pour chaque élément  $h \in H$ , il existe des entiers  $a_1(h), \dots, a_n(h)$  compris entre 0 et  $r - 1$ , tels que

$$h = (\omega^{a_1(h)}, \omega^{a_2(h)}, \dots, \omega^{a_n(h)}) \quad .$$

Posons

$$a_h := \frac{1}{r}(a_1(h), \dots, a_n(h)) \quad ,$$

vu comme un point dans  $N_{\mathbb{R}}$ . On définit le sur-réseau de  $N$ , noté  $N^1$ , de la manière suivante,

$$N^1 := N + \sum_{h \in H} \mathbb{Z} \cdot a_h \quad .$$

Posons  $M^1$  le dual de  $N^1$ , i.e.  $M^1 := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N^1, \mathbb{Z})$ . Alors  $M^1$  est un sous-réseau de  $M$ . L'action de  $H$  sur un monôme  $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$  est donnée par

$$H \ni h : x^m \longrightarrow \omega^{h(m)} x^m \quad ,$$

avec  $h(m) := \langle a_h, m \rangle = \sum_{i=1}^n a_i(h) m_i$ . Donc

$$x^m \text{ invariant par } H \iff \langle a_h, m \rangle \equiv 0 \pmod{r}, \forall h \in H \iff m \in M^1 \quad .$$

Soit  $\sigma$  un cône dans  $N_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}^1$ , alors

$$V_{\sigma, N} := \text{Spec } \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap N^*] = \text{Spec } \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \quad ,$$

$$V_{\sigma, N^1} := \text{Spec } \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap N^{1*}] = \text{Spec } \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M^1] \quad ,$$

où  $N^*$  (resp.  $N^{1*}$ ) désigne le dual de  $N$  (resp.  $N^1$ ). Puisque  $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M^1] = \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]^H$  est le sous-anneau des invariants de  $H$  dans  $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$ , on obtient le lemme suivant,

**Lemme 3.7** *Il existe un isomorphisme canonique de  $V_{\sigma, N^1}$  dans le quotient de  $V_{\sigma, N}$  par  $H$ , i.e.*

$$V_{\sigma, N^1} \simeq V_{\sigma, N}/H \quad .$$

De même manière, si  $\Sigma$  est un éventail dans  $N_{\mathbb{R}}$ , alors il existe un isomorphisme canonique entre  $V_{\Sigma, N^1}$  et le quotient de  $V_{\Sigma, N}$  par  $H$  i.e.

$$V_{\Sigma, N^1} \simeq V_{\Sigma, N}/H \quad .$$

Comme une conséquence du résultat précédent, on obtient le

**Lemme 3.8** *Soient  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  deux éventails dans  $N_{\mathbb{R}}$  avec  $\Sigma'$  une subdivision de  $\Sigma$ . Alors on a le diagramme commutatif suivant qui est équivariant par rapport à  $T_N$ .*

$$\begin{array}{ccc} V_{\Sigma', N} & \longrightarrow & V_{\Sigma, N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{\Sigma', N^1} & \longrightarrow & V_{\Sigma, N^1} \end{array}$$

### 3.2 Quelques résultats préliminaires.

Soient  $X := \mathbb{C}^n$  et  $G_0$  un sous-groupe abélien fini de  $GL(n, \mathbb{C})$ . Soit

$$(*) \quad X = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

une décomposition de  $X$  en somme directe de sous-espaces vectoriels telle que pour tout élément  $g \in G_0$ , la restriction de  $g$  sur chaque  $E_i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , soit une homothétie. Soit  $G_1$  le sous-groupe de  $GL(n, \mathbb{C})$  constitué des éléments qui stabilisent tous les  $E_i$ , i.e.

$$g \in G_1 \iff g(E_i) = E_i, \quad 0 \leq i \leq k \quad ,$$

$G_1$  est canoniquement isomorphe au produit direct des  $GL(d_i, \mathbb{C})$ , avec  $d_i$  la dimension de  $E_i$  pour  $i = 0, \dots, k$ . Posons

$$Y_0 := Bl_{\{0\}} E_0 \times \cdots \times Bl_{\{0\}} E_k \quad .$$

Prenons un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $n$ , noté  $N$ . Posons  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , c'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $M$  le dual de  $N$ . Posons  $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , c'est le dual de  $N_{\mathbb{R}}$ . Soit  $\{e_{i,j} \mid 0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i\}$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $N$ . Soit  $C \subset N_{\mathbb{R}}$  le cône régulier engendré par les  $e_{i,j}$ , avec  $i = 0, \dots, k$  et  $j = 1, \dots, d_i$ . Alors

$$X \simeq V_{C,N} = \text{Spec } \mathbb{C}[\check{C} \cap M] \quad .$$

Une fois qu'on a fixé une base de  $X$ , on obtient un isomorphisme précis de  $X$  dans  $V_{C,N}$ . Notons  $C_i$  le cône régulier dans  $N_{\mathbb{R}}$  engendré par les  $e_{i,j}$ , avec  $j = 1, \dots, d_i$ . Alors  $C = C_0 \times C_1 \times \cdots \times C_k$ . Soient  $\Sigma_{0i}$  la subdivision centrale de  $C_i$ , avec  $0 \leq i \leq k$ , et posons  $\Sigma_0 := \Sigma_{00} \times \cdots \times \Sigma_{0k}$ . Si on pose  $e'_i := \sum_{j=1}^{d_i} e_{i,j}$ ,  $\Sigma_{0i}$  est la subdivision élémentaire de  $C_i$  de centre  $e'_i$ . Notons  $L(e'_i)$  l'arrête qui porte  $e'_i$ . On a le lemme suivant.

#### Lemme 3.9

(1) La variété  $Y_0 := V_{\Sigma_0, N}$  est un fibré vectoriel de rang  $k+1$  ayant  $S$  comme base, où

$$S := \mathbb{P}(E_0) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_k) \quad .$$

(2) Il y a une action de  $G_1$  sur  $Y_0$  qui conserve la structure du fibré vectoriel, i.e.  $\forall g \in G_1$ , l'automorphisme  $g : Y_0 \rightarrow Y_0$  est un morphisme de fibrés. La base  $S$  est stable par  $G_1$  et fixe par  $G_0$ .

(3) Choisissons une base  $\{x_{i,j} \mid 0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i\}$  de  $X$  telle que, pour tout  $i = 0, \dots, k$ ,  $\{x_{i,j} \mid 1 \leq j \leq d_i\}$  soit une base de  $E_i$ . Prenons le tore de dimension maximale dans  $X$  associé à cette base. Alors il existe un isomorphisme entre  $Y_0$  et  $V_{\Sigma_0, N}$ , tel que sous cet isomorphisme l'image de  $S$  est l'adhérence de l'orbite  $O_\sigma$ , où  $\sigma$  est l'unique cône maximal qui est la face commune de tout cône de dimension  $n$  dans  $\Sigma_0$ .

*Démonstration.*

- (1) Cette assertion découle du fait que chaque  $Bl_{\{0\}}E_i$  est un fibré en droites ayant  $\mathbb{P}(E_i)$  comme base.
- (2) Puisque  $G_1$  stabilise  $E_i$  et fixe son origine, alors  $G_1$  agit sur  $Bl_{\{0\}}E_i$  en conservant la structure du fibré en droites. D'où  $G_1$  agit sur  $Y_0$  en conservant la structure du fibré vectoriel. D'autre part  $S$  est le produit direct des  $\mathbb{P}(E_i)$ , il est clair qu'elle est stable par  $G_1$  et fixe par  $G_0$ .
- (3) La première partie est une conséquence immédiate de l'observation précédente et de la proposition 3.4. La deuxième partie est aisée si on remarque que le cône  $\sigma$  est engendré par les arrêtes centrales  $e'_i$  de  $C_i$  avec  $i = 0, \dots, k$ .

□

Notons  $F_\sigma$  le sous-espace vectoriel de  $N_{\mathbb{R}}$  engendré par  $\sigma$ . Posons  $N_\sigma := N \cap F_\sigma$  et  $M_\sigma$  le dual de  $N_\sigma$ .

On a vu que  $\Sigma_0$  est un éventail simplicial dont  $\sigma$  est une face commune de tout cône de dimension  $n$  dans  $\Sigma_0$ . Donc toute subdivision de  $\sigma$  induit de façon canonique en une subdivision de  $\Sigma_0$ . Précisément, si  $\Pi$  est une subdivision de  $\sigma$ , la subdivision de  $\Sigma_0$  induite par  $\Pi$ , notée  $\Sigma_\Pi$ , est de la forme suivante,

$$\Sigma_\Pi = \{ \langle \tau, \tau_0 \rangle \mid \tau \in \Pi, \tau_0 \in \Sigma_0, \tau_0 \cap \sigma = \{0\} \} .$$

Si  $\Pi$  est simpliciale (resp. régulière), c'est facile alors de voir que  $\Sigma_\Pi$  est aussi simpliciale (resp. régulière).

Supposons que la base de  $X$  et l'identification de  $Y_0$  avec  $V_{\Sigma_0, N}$  soient comme dans le lemme précédent. On a la proposition suivante.

**Proposition 3.10** *Pour toute subdivision  $\Pi$  de  $\sigma$ , on a les propriétés suivantes,*

- (1)  $V_{\Sigma_\Pi, N}$  est un fibré torique ayant la même base que celle de  $Y_0$ , et les fibres sont toutes isomorphes à  $V_{\Pi, N_\sigma}$ .
- (2) L'action de  $G_1$  sur  $V_{\Sigma_0, N}$  se relève en une action sur  $V_{\Sigma_\Pi, N}$ , de plus cette action conserve la structure du fibré torique.
- (3) Soit  $\Pi'$  une subdivision de  $\Pi$ . On a le diagramme commutatif suivant qui est équivariant par rapport à  $G_1$ ,

$$\begin{array}{ccccc}
V_{\Sigma_{\Pi'}, N} & \longrightarrow & V_{\Sigma_{\Pi}, N} & \longrightarrow & V_{\Sigma_0, N} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
V_{\Sigma_{\Pi'}, N^1} & \longrightarrow & V_{\Sigma_{\Pi}, N^1} & \longrightarrow & V_{\Sigma_0, N^1} \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
V_{\Sigma_{\Pi'}, N}/G_0 & \longrightarrow & V_{\Sigma_{\Pi}, N}/G_0 & \longrightarrow & V_{\Sigma_0, N}/G_0
\end{array}$$

(4) Le lieu singulier de  $V_{\Sigma_{\Pi}, N^1}$  est contenu dans la réunion des diviseurs exceptionnels.

*Démonstration.*

(1) Prenons un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $\sum_{i=0}^k (d_i - 1)$ , noté  $\bar{N}$ .

Soit  $\{u_{i,j} \mid 0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i - 1\}$  une base de  $\bar{N}$ . Posons  $\bar{N}_{\mathbb{R}} := \bar{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , et  $u_{i,d_i} := -\sum_{j=1}^{d_i-1} u_{i,j}$  pour  $i = 0, \dots, k$ . Notons  $D_i$  le cône engendré par  $\{u_{i,j} \mid 1 \leq j \leq d_i - 1\}$ , et  $\Delta_i$  l'éventail constitué des cônes engendrés par une sous-famille propre de  $\{u_{i,j} \mid 1 \leq j \leq d_i\}$ . Si on dénote  $\bar{N}_i$  le sous-réseau de  $\bar{N}$  engendré par les  $u_{i,j}$  avec  $j = 1, \dots, d_i - 1$ , alors c'est facile de voir que  $V_{\Delta_i, \bar{N}_i}$  est un espace projectif de dimension  $(d_i - 1)$ . Posons  $\Delta := \Delta_0 \times \dots \times \Delta_k$ . La variété torique  $V_{\Delta, \bar{N}}$  associée à  $\Delta$  est isomorphe à  $\mathbb{P}(E_0) \times \dots \times \mathbb{P}(E_k)$ . Définissons le  $\mathbb{Z}$ -morphisme  $h : N \rightarrow \bar{N}$  de la manière suivante,

$$h(e_{i,j}) := u_{i,j}, \text{ pour } 0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i \quad .$$

Alors  $h : (N, \Sigma_{\Pi}) \rightarrow (\bar{N}, \Delta)$  est un morphisme de r.p.p.décompositions. En utilisant la proposition 3.5, on trouve que

$$\psi : V_{\Sigma_{\Pi}, N} \rightarrow V_{\Delta, \bar{N}}$$

est un fibré torique équivariant avec la fibre typique  $W$ , où  $W := V_{\Pi, N_{\sigma}}$ . D'où la première assertion.

(2) Soit  $\pi$  un cône dans  $\Pi$ . Posons

$$\Sigma_{\pi} := \{\beta \in \Sigma_{\Pi} \mid (\beta \cap F_{\sigma}) \subseteq \pi\} \quad .$$

On peut vérifier que  $\Sigma_{\pi}$  est un éventail et que  $\Sigma_{\Pi} = \bigcup_{\pi \in \Pi} \Sigma_{\pi}$ . Donc la famille des ouverts  $V_{\Sigma_{\pi}, N}$ , avec  $\pi \in \Pi$ , recouvre  $V_{\Sigma_{\Pi}, N}$ . Montrons d'abord que  $V_{\Sigma_{\pi}, N}$  est une  $G_1$ -variété. D'après la proposition 3.5,  $V_{\Sigma_{\pi}, N}$  est un fibré torique équivariant ayant la même base que celle de  $Y_0$ , i.e.  $S$ , et les fibres sont isomorphes à  $V_{\pi, N_{\sigma}}$ . Considérons la projection

$$p : V_{\Sigma_{\pi}, N} \rightarrow S = V_{\Delta, \bar{N}} \quad .$$

D'abord chaque  $g \in G_1$  définit une application birationnelle de  $V_{\Sigma_{\pi}, N}$  dans elle même. D'autre part  $g$  définit un automorphisme de  $S$ . Donc pour montrer que  $g$  est un automorphisme de  $V_{\Sigma_{\pi}, N}$ , il suffit de montrer que dans le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc}
V_{\Sigma\pi, N} & \xrightarrow{g} & V_{\Sigma\pi, N} \\
\downarrow p & & \downarrow p \\
S & \xrightarrow{g} & S
\end{array}$$

le morphisme  $g$  en haut définit un isomorphisme de  $W_x$  dans  $W_{g(x)}$  pour tout  $x \in S$ , où  $W_x := p^{-1}(x)$  et  $W_{g(x)} := p^{-1}(g(x))$ .

Soit  $x = ([a_{0,1}, \dots, a_{0,d_1}], \dots, [a_{k,1}, \dots, a_{k,d_k}])$  un point dans  $S$ . Pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , il existe un  $j_i \in \{1, \dots, d_i\}$  tel que  $a_{i,j_i} \neq 0$ , i.e.  $x \in V_{\delta_{j_0, j_1, \dots, j_k}, \bar{N}}$  avec

$$\delta_{j_0, j_1, \dots, j_k} := \langle \{u_{i,j} \mid 0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i, j \neq j_i\} \rangle \quad .$$

Puisque

$$G_1 \simeq GL(E_0, \mathbb{C}) \oplus \dots \oplus GL(E_k, \mathbb{C}) \quad ,$$

$g \in G_1$  peut s'écrire comme  $g^1 \oplus \dots \oplus g^k$  avec  $g^i \in GL(E_i, \mathbb{C})$  pour  $i = 0, \dots, k$ . Notons  $g^i = (g_{j,l}^i)_{1 \leq j, l \leq d_i}$  la matrice associée à  $g^i$ . Alors  $x' = g(x)$  est de la forme suivante,

$$x' = ([a'_{0,1}, \dots, a'_{0,d_0}], \dots, [a'_{k,1}, \dots, a'_{k,d_k}]) \quad ,$$

où  $a'_{i,l_i} := \sum_{m=1}^{d_i} g_{l_i, m}^i a_{i, m}$  pour  $0 \leq i \leq k$  et  $1 \leq l_i \leq d_i$ . Comme chaque  $g^i$  est inversible, pour tout  $i$  il existe un  $j'_i$  compris entre 1 et  $d_i$ , tel que  $a'_{i, j'_i} \neq 0$ .

Supposons que  $\pi$  soit de la forme suivante,

$$\pi := \langle v_1, \dots, v_q \rangle \quad ,$$

où les  $v_i$ , avec  $i = 1, \dots, q$ , sont les vecteurs primitifs extrémaux de  $\pi$ . Puisque  $\pi \in \Pi$ , alors  $\pi \subseteq \sigma$  et il existe une matrice à coefficients entiers  $A := (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 0 \leq j \leq k}}$ , telle que

$v_i = \sum_{j=0}^k a_{i,j} e'_j$  pour  $i = 1, \dots, q$ . Considérons la trivialisaton locale du fibré torique

$$p : V_{\tau_{j_0, j_1, \dots, j_k}, N} \longrightarrow V_{\delta_{j_0, j_1, \dots, j_k}, \bar{N}}$$

avec

$$\tau_{j_0, j_1, \dots, j_k} := \pi \oplus \langle \{e_{i,j} \mid 0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i, j \neq j_i\} \rangle \quad .$$

Si on note  $\{e^{i,j} \mid 0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i\}$  la base de  $M$  qui est le dual de la base  $\{e_{i,j} \mid 0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i\}$  de  $N$ , alors le système minimal de générateurs de  $(\check{\tau}_{j_0, \dots, j_k} \cap M)$  est de la forme suivante,

$$\{e^{0,1} - e^{0,j_0}, \dots, e^{0,d_0} - e^{0,j_0}; \dots; e^{k,1} - e^{k,j_k}, \dots, e^{k,d_k} - e^{k,j_k}; v^1, \dots, v^p\} \quad ,$$



où les  $v^s$ , avec  $s = 1, \dots, p$ , sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des  $e^{i,j_i}$  pour  $i = 0, \dots, k$ . Il existe donc une  $(p \times k)$ -matrice à coefficients entiers, notée  $(c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq k}}$ , telle que  $v^i = \sum_{l=0}^k c_{i,l} e^{l,j_i}$ ,  $1 \leq i \leq p$ . On en déduit que

$$V_{\delta_{j_0, \dots, j_k}, \bar{N}} \simeq \text{Spec } \bar{A}_{j_0, \dots, j_k}$$

avec

$$\bar{A}_{j_0, \dots, j_k} := \mathbb{C}\left[\frac{x_{0,1}}{x_{0,j_0}}, \dots, \frac{x_{0,d_0}}{x_{0,j_0}}; \dots; \frac{x_{k,1}}{x_{k,j_k}}, \dots, \frac{x_{k,d_k}}{x_{k,j_k}}\right] \quad ,$$

et

$$V_{\tau_{j_0, \dots, j_k}, N} \simeq \text{Spec } A_{j_0, \dots, j_k}$$

avec

$$A_{j_0, \dots, j_k} := \mathbb{C}\left[\frac{x_{0,1}}{x_{0,j_0}}, \dots, \frac{x_{0,d_0}}{x_{0,j_0}}; \dots; \frac{x_{k,1}}{x_{k,j_k}}, \dots, \frac{x_{k,d_k}}{x_{k,j_k}}; \prod_{r=0}^k (x_{r,j_r})^{c_{1,r}}, \dots, \prod_{r=0}^k (x_{r,j_r})^{c_{p,r}}\right] \quad .$$

Le morphisme  $p^*$  induit par  $p$  est alors l'injection de  $\bar{A}_{j_0, \dots, j_k}$  dans  $A_{j_0, \dots, j_k}$ . Ainsi on a montré que  $W_x = \text{Spec } A_x$ , avec

$$A_x := \mathbb{C}\left[\prod_{r=0}^k (x_{r,j_r})^{c_{1,r}}, \dots, \prod_{r=0}^k (x_{r,j_r})^{c_{p,r}}\right] \quad .$$

De même manière on peut montrer que  $W_{x'} = \text{Spec } A_{x'}$ , avec

$$A_{x'} := \mathbb{C}\left[\prod_{r=0}^k (x_{r,j'_r})^{c_{1,r}}, \dots, \prod_{r=0}^k (x_{r,j'_r})^{c_{p,r}}\right] \quad .$$

Notons  $K(X)$  le corps des fonctions rationnelles sur  $X$ . Alors l'isomorphisme

$$g^* : K(X) \longrightarrow K(X)$$

est défini par

$$g^*(x_{i,l'_i}) = \sum_{m=1}^{d_i} g_{l'_i, m}^i x_{i,m} \quad .$$

Posons  $y_i := \prod_{r=0}^k (x_{r,j_r})^{c_{i,r}}$  et  $y'_i := \prod_{r=0}^k (x_{r,j'_r})^{c_{i,r}}$ , on obtient

$$A_x = \text{Spec } [y_1, \dots, y_p], \quad A_{x'} = \text{Spec } [y'_1, \dots, y'_p] \quad .$$

Un calcul direct donne

$$g^*(y'_i) = \left(\prod_{r=0}^k \left(\frac{a'_{r,j'_r}}{a_{r,j_r}}\right)^{c_{i,r}}\right) y_i \quad .$$

D'après l'hypothèse, les  $a_{r,j_r}$  et  $a'_{r,j'_r}$ ,  $0 \leq r \leq k$ , sont tous différents de zéro. On en déduit que

$$g_x^* : A_{x'} \longrightarrow A_x$$

est un isomorphisme. Par conséquent  $g_x : W_x \longrightarrow W_{x'}$  est un isomorphisme et donc  $g$  est un automorphisme de  $V_{\Sigma_\pi, N}$ . Le fait que  $g$  est un élément quelconque de  $G_1$ , implique que  $V_{\Sigma_\pi, N}$  est munie d'une action de  $G_1$ . D'autre part c'est facile de vérifier que si  $\pi, \pi'$  sont deux cônes dans  $\Pi$  avec  $\pi < \pi'$ , alors l'action de  $G_1$  sur  $V_{\Sigma_\pi, N}$  est la restriction de celle de  $G_1$  sur  $V_{\Sigma_{\pi'}, N}$ . Donc  $G_1$  agit sur  $V_{\Sigma_\pi, N}$ . La deuxième assertion est démontrée.

- (3) Il est clair que dans le diagramme de l'énoncé, les morphismes sont bien définis et équivariants par rapport à  $T_N$ . Donc le diagramme est commutatif. D'autre part le point (2) montre que le groupe  $G_1$  agit sur les trois variétés dans la première ligne. De plus ces trois variétés ont un ouvert isomorphe et stable par  $G_1$ , ceci implique que les morphismes dans la première ligne du diagramme sont équivariants par rapport à  $G_1$ . Les égalités entre la deuxième et la troisième ligne résultent du lemme 3.7. Les restes découlent du fait que  $G_0$  est un sous-groupe distingué de  $G_1$ , en fait c'est le centre de  $G_1$ .
- (4) Notons  $Sing(V_{\Sigma_\Pi, N^1})$  le lieu singulier de  $V_{N, \Sigma_\Pi}$ . L'image inverse de  $Sing(V_{\Sigma_\Pi, N^1})$  dans  $V_{\Sigma_\Pi, N}$  est contenue dans l'ensemble des points dont le groupe d'isotropie est non trivial. Mais ce dernier ensemble est contenu dans la réunion des diviseurs exceptionnels de  $V_{\Sigma_\Pi, N}$  (par rapport à  $X$ ). D'autre part les diviseurs exceptionnels dans  $V_{\Sigma_\Pi, N^1}$  sont exactement l'image des diviseurs exceptionnels dans  $V_{\Sigma_\Pi, N}$ . La quatrième assertion en découle.

□

**Corollaire 3.11** *Pour tout cône  $\pi \in \Pi$ , l'adhérence de  $O_\pi$  (resp.  $O_\pi^1$ ) est une sous-variété de  $V_{\Sigma_\Pi, N}$  (resp. de  $V_{\Sigma_\Pi, N^1}$ ) stable par  $G_1$ , où  $O_\pi \subset V_{\Sigma_\Pi, N}$  (resp.  $O_\pi^1 \subset V_{\Sigma_\Pi, N^1}$ ) est l'orbite du tore  $T_N$  (resp. du tore  $T_{N^1}$ ) associée à  $\pi$ .*

*Démonstration.* On remarque que

$$\overline{O_\pi} = V_{\Sigma_\pi, N} \setminus \left[ \bigcup_{\substack{\pi' \in \Pi \\ \pi' < \pi}} V_{\Sigma_{\pi'}, N} \right] .$$

D'autre part d'après la proposition précédente (démonstration du point 2),  $V_{\Sigma_{\pi'}, N}$  est stable par  $G_1$  pour tout  $\pi' \in \Pi$ . Donc  $\overline{O_\pi}$  est stable par  $G_1$ . Même raisonnement montre que  $\overline{O_\pi^1}$  est stable par  $G_1$ .

□

**Corollaire 3.12** *Soit  $T'$  un tore de dimension maximale dans  $X$ . Si  $T'$  est stable par  $G_1$ , alors il existe une immersion ouverte naturelle de  $T'$  dans  $V_{\Sigma_{\Pi}, N}$  tel que le morphisme de  $V_{\Sigma_{\Pi}, N}$  dans  $X$  soit équivariant par rapport à  $T'$ . Ou de façon équivalente,  $V_{\Sigma_{\Pi}, N}$  est munie d'une structure torique pour tout tore maximal de  $X$  qui est stable par  $G_1$ .*

*Démonstration.* On remarque que tout tore de dimension maximale dans  $X$  qui est stable par  $G_1$  peut être identifié à un tore maximal dans  $G_1$ . Choisir un tel tore équivaut à choisir une base  $\{x'_{i,j} \mid 0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i\}$  de  $X$ , avec  $\{x'_{i,j} \mid 1 \leq j \leq d_i\}$  une base de  $E_i$  pour  $i = 0, \dots, k$ . Le résultat de la proposition précédente est encore valable pour le nouvel tore. Ceci implique que pour tout tore maximal dans  $X$ , stable par  $G_1$ ,  $V_{\Sigma_{\Pi}, N}$  est munie d'une structure torique qui est compatible avec la structure du fibré. □

**Corollaire 3.13** *Soit  $\Pi'$  une subdivision de  $\Pi$  (resp. du cône  $\sigma$ ) telle que  $V_{\Pi', N'_\sigma}$  soit une désingularisation de  $V_{\Pi, N'_\sigma}$  (resp.  $V_{\sigma, N'_\sigma}$ ), alors  $V_{\Sigma_{\Pi'}, N^1}$  est une désingularisation de  $V_{\Sigma_{\Pi}, N^1}$  (resp.  $V_{\Sigma_0, N^1}$ ), équivariante par rapport à  $G_1$ .*

*Démonstration.* Même argument que dans la proposition précédente, on montre que  $V_{\Sigma_{\Pi'}, N^1}$  (resp.  $V_{\Sigma_{\Pi}, N^1}, V_{\Sigma_0, N^1}$ ) est un fibré torique ayant  $S = \mathbb{P}(E_0) \times \dots \times \mathbb{P}(E_k)$  comme base et que les fibres sont isomorphes à  $V_{\Pi', N'_\sigma}$  (resp.  $V_{\Pi, N'_\sigma}, V_{\sigma, N'_\sigma}$ ). Puisque les morphismes entre eux sont des morphismes de fibrés et équivariants par rapport à  $G_1$ , le résultat en découle. □

En regardant l'éventail  $\Sigma_{\Pi}$ , on voit facilement que les  $L_{(e'_i)}$  sont tous contractibles, où  $L_{(e'_i)}$  est l'arrête qui porte  $e'_i := \sum_{j=1}^{d_i} e_{i,j}$  pour  $0 \leq i \leq k$ . De plus si on contracte certains  $L_{(e'_i)}$ , on obtient encore un éventail qui est symétrique par rapport à  $G_1$ . Précisément si on contracte les  $L_{(e'_{i'})}$  à partir de  $\Sigma_{\Pi}$ , avec  $0 \leq i' \leq i$ , alors l'ensemble obtenu, noté  $\Sigma_{\Pi}^{(i)}$ , peut être décrit de la manière suivante:

Posons  $Q := \{L_{(e'_{i'})} \mid 0 \leq i' \leq i\}$ . Notons  $B$  la réunion de  $\{0\}$  et l'ensemble des cônes dans  $\Pi$  qui sont engendrés par une sous-famille de  $Q$ , i.e.

$$B := \{\pi \in \Pi \mid \pi = \langle \pi \cap Q \rangle\} \quad .$$

Pour tout  $\beta \in B$ , on définit

$$\tau_{\beta} := \langle \{e_{i',j} \mid e'_{i'} \in \beta, 1 \leq j \leq d_{i'}\} \rangle \quad .$$

Pour tout cône  $\gamma \in \Sigma_{\Pi}$ , il existe une unique décomposition

$$\gamma = \gamma_0 \oplus \beta \quad ,$$

avec  $\gamma_0 \in \Sigma_\Pi$ ,  $\gamma_0 \cap Q = \{0\}$  et  $\beta \in B$ . On définit

$$\tau_\gamma := \langle \gamma_0, \tau_\beta \rangle = \gamma_0 + \tau_\beta \quad .$$

Alors on a

$$\Sigma_\Pi^{(i)} := \{ \tau \subset N_\mathbb{R} \mid \exists \gamma \in \Sigma_\Pi \text{ tel que } \tau = \tau_\gamma \} \quad .$$

**Lemme 3.14**

- (1) L'ensemble  $\Sigma_\Pi^{(i)}$  défini ci-dessus est un éventail.
- (2) La variété torique  $V_{\Sigma_\Pi^{(i)}, N}$  (resp.  $V_{\Sigma_\Pi^{(i)}, N^1}$ ) associée à  $\Sigma_\Pi^{(i)}$ , est une  $G_1$ -variété.
- (3) On a le diagramme commutatif suivant qui est équivariant par rapport à  $G_1$ .

$$\begin{array}{ccccc} V_{\Sigma_\Pi, N} & \longrightarrow & V_{\Sigma_\Pi^{(i)}, N} & \longrightarrow & V_{C, N} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V_{\Sigma_\Pi, N^1} & \longrightarrow & V_{\Sigma_\Pi^{(i)}, N^1} & \longrightarrow & V_{C, N^1} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ V_{\Sigma_\Pi, N}/G_0 & \longrightarrow & V_{\Sigma_\Pi^{(i)}, N}/G_0 & \longrightarrow & V_{C, N}/G_0 \end{array}$$

*Démonstration.*

- (1) Si  $\Pi = \sigma$ , alors en utilisant les mêmes notations qu'au début du paragraphe, on a  $\Sigma_\Pi^{(i)} = C_0 \times \cdots \times C_i \times \Sigma_{\sigma_{i+1}} \times \cdots \times \Sigma_{\sigma_k}$ , et donc  $\Sigma_\Pi^{(i)}$  est un éventail.

Supposons que  $\Pi$  soit une subdivision simpliciale non triviale de  $\sigma$ . Alors tout cône  $\gamma \in \Sigma_\Pi$  peut s'écrire de manière unique sous la forme suivante:

$$(*) \quad \gamma = \gamma_0 \oplus \cdots \oplus \gamma_k \oplus \gamma_\sigma \quad ,$$

où  $\gamma_\sigma$  est la face maximale de  $\gamma$  avec  $\gamma_\sigma \subset \sigma$ ,  $\gamma_\sigma \cap Q = \{0\}$  et où  $\gamma_j \subset C_j$  pour  $j = 0, \dots, k$ . Donc on obtient

$$\tau_\gamma = \tau_{\gamma_0} \oplus \cdots \oplus \tau_{\gamma_i} \oplus \tau_{\gamma_{i+1}} \oplus \cdots \oplus \tau_{\gamma_k} \oplus \tau_{\gamma_\sigma} \quad .$$

On remarque que pour tout  $j$  compris entre 0 et  $i$ , on a  $\langle \gamma_\sigma - \gamma_\sigma \rangle \cap C_j \subset \mathbb{R} \cdot e'_j$ . De plus  $\langle \gamma_\sigma - \gamma_\sigma \rangle \cap C_j \neq \{0\}$  seulement si  $e'_j \notin \gamma_j$ , résulte de la décomposition (\*) ci-dessus. D'autre part pour tout  $0 \leq j \leq i$ , on a

$$\tau_{\gamma_j} = \begin{cases} \gamma_j & \text{si } e'_j \notin \gamma_j, \\ C_j & \text{si } e'_j \in \gamma_j. \end{cases}$$

Donc  $\tau_\gamma$  est un cône simplicial.

Une face  $\tau$  de  $\tau_\gamma$  est de la forme suivante,

$$\tau = \bar{\gamma}_0 \oplus \cdots \oplus \bar{\gamma}_i \oplus \gamma'_{i+1} \oplus \cdots \oplus \gamma'_k \oplus \gamma'_\sigma \quad ,$$

où  $\bar{\gamma}_j \leq \tau_{\gamma_j}$  pour  $j = 0, \dots, i$ ;  $\gamma'_j \leq \gamma_j$  pour  $j = i + 1, \dots, k$ ; et où  $\gamma'_\sigma \leq \gamma_\sigma$ . Pour tout  $0 \leq j \leq i$  définissons  $\gamma'_j$  de la façon suivante,

$$\gamma'_j := \begin{cases} \bar{\gamma}_j & \text{si } \bar{\gamma}_j \neq C_j, \\ L_{e'_j} & \text{si } \bar{\gamma}_j = C_j. \end{cases}$$

On définit  $\gamma'$  par

$$\gamma' := \gamma'_0 \oplus \cdots \oplus \gamma'_k \oplus \gamma'_\sigma \quad .$$

Alors  $\gamma' \in \Sigma_\Pi$ , on vérifie facilement que  $\tau = \tau_{\gamma'}$ , et par suite  $\tau \in \Sigma_\Pi^{(i)}$ .

Supposons que  $\tau_1$  et  $\tau_2$  soient deux éléments différents de  $\Sigma_\Pi^{(i)}$ . On a, pour  $l = 1$  ou  $2$ ,

$$\tau_l = \gamma_0^l \oplus \cdots \oplus \gamma_i^l \oplus \gamma_{i+1}^l \oplus \cdots \oplus \gamma_k^l \oplus \gamma_\sigma^l \quad ,$$

où  $\gamma_j^l \subseteq C_j$  pour  $0 \leq j \leq i$ ,  $\gamma_j^l \subset C_j$  pour  $i + 1 \leq j \leq k$ , et où  $\gamma_\sigma^l$  est la face maximale de  $\tau_l$  avec  $\gamma_\sigma^l \subset \sigma$ ,  $\gamma_\sigma^l \cap Q = \{\mathbf{0}\}$ . Donc

$$\tau_1 \cap \tau_2 = (\gamma_0^1 \cap \gamma_0^2) \oplus \cdots \oplus (\gamma_k^1 \cap \gamma_k^2) \oplus (\gamma_\sigma^1 \cap \gamma_\sigma^2) \quad .$$

Si  $\gamma_j^1 \cap \gamma_j^2 \neq C_j$  avec  $0 \leq j \leq i$ , alors on a  $(\gamma_j^1 \cap \gamma_j^2) \in \Sigma_\Pi$  et  $L_{e'_j} \not\subseteq (\gamma_j^1 \cap \gamma_j^2)$ . D'autre part on a  $(\gamma_\sigma^1 \cap \gamma_\sigma^2) \in \Pi$  et  $(\gamma_j^1 \cap \gamma_j^2) \in \Sigma_{0j}$  pour  $i + 1 \leq j \leq k$ . Posons  $\gamma_\sigma := (\gamma_\sigma^1 \cap \gamma_\sigma^2)$  et posons, pour  $0 \leq j \leq k$ ,

$$\gamma_j := \begin{cases} \gamma_j^1 \cap \gamma_j^2 & \text{si } (\gamma_j^1 \cap \gamma_j^2) \neq C_j, \\ L_{e'_j} & \text{si } (\gamma_j^1 \cap \gamma_j^2) = C_j. \end{cases}$$

Alors on a  $\gamma := \gamma_0 \oplus \cdots \oplus \gamma_k \oplus \gamma_\sigma \in \Sigma_\Pi$  et  $\tau_1 \cap \tau_2 = \tau_\gamma$ . Il est clair que  $\tau_\gamma$  est une face commune de  $\tau_1$  et de  $\tau_2$ .

Combinant ces deux arguments, on en conclut que  $\Sigma_\Pi^{(i)}$  est un éventail.

- (2) D'après le corollaire 3.11, les  $\overline{O_L}$  (resp.  $\overline{O_L^1}$ ), avec  $L \in Q$ , sont toutes stables par  $G_1$ . D'après la proposition 3.6, le morphisme canonique de  $V_{\Sigma_\Pi, N}$  (resp.  $V_{\Sigma_\Pi, N^1}$ ) dans  $V_{\Sigma_\Pi^{(i)}, N}$  (resp.  $V_{\Sigma_\Pi^{(i)}, N^1}$ ) contracte exactement les  $\overline{O_L}$  (resp.  $\overline{O_L^1}$ ) pour tout  $L \in Q$ . Donc la variété obtenue est une  $G_1$ -variété et cette contraction est un  $G_1$ -morphisme.

(On peut aussi le montrer directement en utilisant les mêmes méthodes que celles utilisées dans la démonstration de la proposition 3.10.)

- (3) Les structures toriques de ces variétés montrent que le diagramme dans l'énoncé est commutatif et équivariant par rapport à  $T_N$ . En utilisant le point (2) et le fait que  $G_0$  est le centre de  $G_1$ , on déduit que ce diagramme est équivariant par rapport à  $G_1$ .

□

Supposons que la décomposition  $X = E_0 \oplus \cdots \oplus E_k$  soit la décomposition canonique, en modules isotypiques, de la représentation de  $G_0$  dans  $X := \mathbb{C}^n$ , et que  $G_1$  soit le centralisateur de  $G_0$  dans  $GL(n, \mathbb{C})$ . Les réseaux  $N, N^1$ , l'éventail  $\Sigma_0$  et le cône  $\sigma$  sont définis comme précédemment. Prenons  $\Pi$  une subdivision de  $\sigma$  telle que  $V_{\Pi, N^1_\sigma}$  soit une désingularisation de  $V_{\sigma, N^1_\sigma}$ . Notons  $\Sigma_\Pi$  la subdivision de  $\Sigma_0$  induite par  $\Pi$ . Définissons

$$\Lambda := \{L_{(e'_i)} \mid (L_{(e'_i)} \cap N) = (L_{(e'_i)} \cap N^1), 0 \leq i \leq k\} \quad .$$

D'après le lemme précédent, on sait que les  $\overline{O_L}$ , avec  $L \in \Lambda$ , sont contractibles. Notons  $\tilde{\Sigma}_\Pi$  l'éventail obtenu en contractant les arrêtes  $L$  à partir de  $\Sigma_\Pi$ , pour tout  $L \in \Lambda$ . Alors on a la proposition suivante.

**Proposition 3.15** *La variété  $V_{\tilde{\Sigma}_\Pi, N^1}$  est une désingularisation de  $X/G_0$ , équivariante par rapport au centralisateur  $G_1$  de  $G_0$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition 3.6, les diviseurs exceptionnels dans  $V_{\tilde{\Sigma}_\Pi, N^1}$  sont tous contractés dans  $\text{Sing}(X/G_0)$ , i.e. le lieu singulier de  $X/G_0$ . Le lemme précédent montre que le morphisme de  $V_{\tilde{\Sigma}_\Pi, N^1}$  dans  $X/G_0$  est un  $G_1$ -morphisme. D'autre part il est clair que ce morphisme est propre birationnel et surjectif. Il reste donc à montrer que  $V_{\tilde{\Sigma}_\Pi, N^1}$  est lisse.

Ceci équivaut à montrer la régularité de tout cône  $\tau \in \tilde{\Sigma}_\Pi$  par rapport au réseau  $N^1$ . On remarque que chaque  $\tau \in \tilde{\Sigma}_\Pi$ , peut se décomposer de manière unique comme

$$\tau = \alpha \oplus \tau_\beta \quad ,$$

avec  $\alpha, \beta \in \Sigma_\Pi$ ,  $\alpha \cap \Lambda = \{0\}$  et  $\beta = \langle \beta \cap \Lambda \rangle$ . Donc  $\alpha$  est régulier par rapport à  $N^1$ . D'autre part  $\tau_\beta$  est la réunion des cônes  $\theta \in \Sigma_\Pi$  avec  $\theta \subset \tau_\beta$  et  $\dim \theta = \dim \tau_\beta$ . Chaque  $\theta$  est régulier par rapport à  $N^1$ . Le fait que  $\beta$  est engendré par  $(\beta \cap \Lambda)$  entraîne que tout  $e'_i$ , avec  $e'_i \in \beta$ , est primitif dans  $N^1$ . Par conséquent  $\theta$  et  $\tau_\beta$  engendrent le même sous- $\mathbb{Z}$ -module libre de  $N^1$ . En tenant compte que pour chaque  $\theta$ , le cône  $\alpha \oplus \theta$  est régulier par rapport à  $N^1$ , on en conclut que  $\tau = \alpha \oplus \tau_\beta$  est régulier par rapport à  $N^1$ . Par conséquent  $V_{\tau, N^1}$  et donc  $V_{\tilde{\Sigma}_\Pi, N^1}$  sont lisses.

□

**Remarque 3.16** *En utilisant cette proposition, on peut légèrement généraliser les résultats concernant des modèles minimaux ou des désingularisations minimales des variétés toriques dans le cas où la dimension de la variété est plus petite ou égale à 3.*



## 4 Constructions de désingularisations locales et globales.

On rappelle d'abord certaines notations dans des chapitres précédents:  $X := \mathbb{C}^n$  est l'espace affine muni d'une action d'un sous-groupe fini  $G$  de  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $X'$  le  $G$ -modèle équivariant abélien de  $X$  (Théorème 1.13);  $\mathcal{S}$  la stratification de  $X'$  définie dans le premier paragraphe de chapitre 2; pour chaque strate  $Z \in \mathcal{S}$ ,  $G(Z)$  est le sous-groupe de  $G$  constitué des éléments qui stabilisent  $Z$  et  $G_0(Z)$  est le sous-groupe de  $G$  constitué des éléments qui fixent  $Z$  point par point;  $\mathcal{R} := \{U_Z\}_{Z \in \mathcal{S}}$  le recouvrement de  $X'$  compatible avec la stratification  $\mathcal{S}$  (Théorème 2.8).

Ensuite on construit une famille de variétés,  $\{\tilde{U}_Z\}_{Z \in \mathcal{S}}$ , telle qu'elle vérifie les trois conditions suivantes.

- (i) Pour chaque  $Z \in \mathcal{S}$ ,  $\tilde{U}_Z$  est une modification de  $U_Z$  telle que le morphisme

$$\tilde{\varphi}_Z : \tilde{U}_Z \longrightarrow U_Z$$

soit un  $G(Z)$ -morphisme propre et birationnel, et telle que  $\tilde{U}_Z/G_0(Z)$  soit une désingularisation de  $U_Z/G_0(Z)$ .

- (ii) Soient  $Z_1, Z_2$  deux strates dans  $\mathcal{S}$  avec  $Z_2 \subset \overline{Z_1}$ . Alors on a le diagramme commutatif suivant qui est équivariant par rapport à  $G(Z_2)$ ,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_{Z_1} & \xrightarrow{\tilde{i}_{Z_1, Z_2}} & \tilde{U}_{Z_2} \\ \downarrow \tilde{\varphi}_{Z_1} & & \downarrow \tilde{\varphi}_{Z_2} \\ U_{Z_1} & \xrightarrow{i_{Z_1, Z_2}} & U_{Z_2} \end{array}$$

i.e.  $i_{Z_1, Z_2} \circ \tilde{\varphi}_{Z_1} = \tilde{\varphi}_{Z_2} \circ \tilde{i}_{Z_1, Z_2}$ , avec  $i_{Z_1, Z_2}$  et  $\tilde{i}_{Z_1, Z_2}$  deux immersions ouvertes.

- (iii) Soient  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{S}$ . Supposons qu'il existe un  $g \in G$  tel que  $g(Z_1) = Z_2$ . Alors il existe un isomorphisme  $\tilde{g}_{Z_1, Z_2} : \tilde{U}_{Z_1} \longrightarrow \tilde{U}_{Z_2}$  tel que  $\tilde{\varphi}_{Z_2} \circ \tilde{g}_{Z_1, Z_2} = g \circ \tilde{\varphi}_{Z_1}$ . De plus on a  $\tilde{g}_{Z_1, Z_2} = (\tilde{g}_{Z_2, Z_1})^{-1}$ . S'il existe  $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathcal{S}$  et  $g, g' \in G$  tels que  $Z_2 = g(Z_1)$  et tel que  $Z_3 = g'(Z_2)$ , alors on a

$$\tilde{g}'_{Z_2, Z_3} \circ \tilde{g}_{Z_1, Z_2} = \widetilde{g'g}_{Z_1, Z_3} \quad .$$

Après avoir construit cette famille  $\{\tilde{U}_Z\}_{Z \in \mathcal{S}}$  ayant ces trois propriétés, on démontre le résultat principal suivant.

**Théorème 4.1** *Soient  $G \subset GL(n, \mathbb{C})$  un sous-groupe fini et petit,  $X := \mathbb{C}^n$ . Avec les notations précédentes, on a le résultat suivant: Les  $\tilde{U}_Z$ , avec  $Z \in \mathcal{S}$ , peuvent se recoller et donner une variété  $\tilde{X}$  telle que les conditions suivantes soient vérifiées:*



- (1) il existe un morphisme propre birationnel  $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow X'$  induit par les morphismes  $\tilde{\varphi}_Z : \tilde{U}_Z \rightarrow U_Z$  pour tout  $Z \in \mathcal{S}$ ;
- (2)  $\tilde{X}$  est munie d'une action de  $G$  telle que  $\tilde{\varphi}$  soit un  $G$ -morphisme;
- (3) le quotient de  $\tilde{X}$  par  $G$ , noté  $\tilde{X}/G$ , est une désingularisation de  $X'/G$ , et donc une désingularisation de  $X/G$ .

#### 4.1 Construction des $\tilde{U}_Z$ .

D'abord fixons quelques notations. Soient  $Z \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$  le drapeau associé à  $Z$  (lemme 2.2). Soient

$$X = \bigoplus_{i=0}^{k+1} \left( \bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j} \right)$$

la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  (définition 2.10), et  $d_{i,j}$  la dimension de  $E_{i,j}$ , avec  $0 \leq i \leq k+1$  et  $1 \leq j \leq l_i$ .

**Définition 4.2** Soit  $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  une base de  $X$ . On dit que cette base est compatible avec la décomposition de  $X$  associée à  $Z$ , ou simplement compatible pour  $Z$ , si on a

$$\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} = \{x_{p,q,s} \mid 0 \leq p \leq k+1, 1 \leq q \leq l_p, 1 \leq s \leq d_{p,q}\}$$

avec  $\{x_{p,q,s} \mid 1 \leq s \leq d_{p,q}\}$  une base de  $E_{p,q}$ , pour tous  $0 \leq p \leq k+1$  et  $1 \leq q \leq l_p$ .

**Remarque 4.3** D'après le lemme 2.13, si on a  $Z, Z' \in \mathcal{S}$  avec  $Z \subset \overline{Z'}$ , alors la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  est plus fine que celle associée à  $Z'$ . On en déduit que toute base de  $X$  qui est compatible pour  $Z$  est aussi compatible pour  $Z'$ .

Soit  $\{x_{p,q,s} \mid 0 \leq p \leq k+1, 1 \leq q \leq l_p, 1 \leq s \leq d_{p,q}\}$  une base de  $X$  compatible pour  $Z$ . Soient  $T$  le tore maximal dans  $X$  correspondant à cette base,  $N$  et  $M$  les deux  $\mathbb{Z}$ -modules libres de rang  $n$  déterminés par  $T$  (Chapitre 3 paragraphe 1). Prenons une  $\mathbb{Z}$ -base de  $N$ , notée

$$\{e_{p,q,s} \mid 0 \leq p \leq k+1, 1 \leq q \leq l_p, 1 \leq s \leq d_{p,q}\} \quad .$$

Notons  $C$  le cône régulier de dimension  $n$  dans  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , engendré par la base canonique  $\{e_{p,q,s}\}$  de  $N$ . On obtient un isomorphisme  $X \simeq V_{C,N}$ . Posons  $e'_i := \sum_{p=i+1}^{k+1} \sum_{q=1}^{l_p} e'_{p,q}$ , avec  $0 \leq i \leq k$ . On peut décrire l'éventail  $\Sigma_Z$ , qui représente  $Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$ , de la façon suivante:

- L'éventail correspondant à  $Bl_{V_0} X$ , noté  $\Sigma_{\mathcal{D}_0}$ , est la subdivision élémentaire du cône  $C$ , de centre  $e'_0$ .<sup>3</sup> Ici on pose  $\mathcal{D}_i := (V_0 \subset \cdots \subset V_i)$  avec  $0 \leq i \leq k$ .

---

<sup>3</sup>Pour la description combinatoire de l'éclatement de l'adhérence d'une orbite, voir [15]

- Successivement notons  $\overline{V}_i$  la transformée stricte de  $V_i$  dans  $Bl_{\mathcal{D}_{i-1}}X$  et notons  $\Sigma_{\mathcal{D}_{i-1}}$  l'éventail correspondant à

$$Bl_{\mathcal{D}_{i-1}}X := Bl_{\overline{V}_{i-1}}(Bl_{\overline{V}_{i-2}}(\cdots(Bl_{V_0}X)\cdots)) \quad ,$$

avec  $1 \leq i \leq k$ , alors  $\overline{V}_i$  est l'adhérence de l'orbite  $O_{\sigma_i}$  avec  $\sigma_i$  le cône dans  $\Sigma_{\mathcal{D}_{i-1}}$  défini par

$$\sigma_i := \langle \{e_{p,q,s} \mid i+1 \leq p \leq k+1, 1 \leq q \leq l_p, 1 \leq s \leq d_{p,q}\} \rangle \quad .$$

Donc l'éventail correspondant à  $Bl_{\mathcal{D}_i}X := Bl_{\overline{V}_i}(Bl_{\mathcal{D}_{i-1}}X)$ , noté  $\Sigma_{\mathcal{D}_i}$ , est la subdivision de  $\Sigma_{\mathcal{D}_{i-1}}$  induite par la subdivision élémentaire de  $\sigma_i$  de centre  $e'_i$ .

Quand  $i = k$ , on obtient  $\Sigma_{\mathcal{D}_k} = \Sigma_Z$  qui est l'éventail correspondant à  $Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z}X$ .

Puisque le morphisme canonique  $\varphi_Z$  de  $X'$  dans  $Y_Z$  induit un isomorphisme sur un voisinage ouvert de  $Z$  et que  $\overline{\varphi_Z(Z)}$  est une composante irréductible de l'intersection des diviseurs exceptionnels avec l'ensemble des points fixes de  $G_0(Z)$  dans  $Y_Z$ , (résulte du lemme 2.16 et du fait que  $\varphi_Z$  est équivariant par rapport à  $G(Z)$ ), alors  $\overline{\varphi_Z(Z)}$  est l'adhérence d'une orbite du tore dans  $Y_Z$ . Notons  $\tau_Z$  l'unique cône dans  $\Sigma_Z$  tel que

$$\overline{\varphi_Z(Z)} = \overline{O_{\tau_Z}} \quad .$$

Supposons que  $\overline{Z} = E_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{(E_{0,1} \oplus E_{1,1} \oplus \cdots \oplus E_{k+1,1})}$ , (convention 2.18), on a

$$\tau_Z = \langle e'_0, e'_1, \dots, e'_k; e_{p,q,s}, 0 \leq p \leq k+1, 1 < q \leq l_p, 1 \leq s \leq d_{p,q} \rangle \quad .$$

Posons  $e'_{p,q} := \sum_{s=1}^{d_{p,q}} e_{p,q,s}$ , avec  $0 \leq p \leq k+1$  et  $1 \leq q \leq l_p$ . Définissons un autre cône  $\tau_{1,Z}$  associé à  $Z$  de la manière suivante,

$$\tau_{1,Z} := \langle e'_0, e'_1, \dots, e'_k; e'_{p,q}, 0 \leq p \leq k+1, 1 < q \leq l_p \rangle \quad .$$

Notons  $F_Z$  le sous  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de  $N_{\mathbb{R}}$  engendré par  $\tau_Z$ , i.e.  $F_Z := \tau_Z + (-\tau_Z)$ , et  $F_{1,Z}$  le sous  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par  $\tau_{1,Z}$ , i.e.  $F_{1,Z} := \tau_{1,Z} + (-\tau_{1,Z})$ . Posons  $N_{\tau_Z} := N \cap F_Z$ , et  $N_{\tau_{1,Z}} := N \cap F_{1,Z}$ .

Supposons que  $Z' \in \mathcal{S}$  tel que  $Z \subset \overline{Z'}$ . Puisque toute base compatible pour  $Z$  est aussi compatible pour  $Z'$  (remarque 4.3), dans le même  $N_{\mathbb{R}}$ , les cônes  $\tau_{Z'}$  et  $\tau_{1,Z'}$  sont bien définis. On a le lemme suivant.

**Lemme 4.4** *Soient  $Z, Z'$  deux strates différentes dans  $\mathcal{S}$  telles que  $Z \subset \overline{Z'}$ . Les  $\tau_Z, \tau_{1,Z}, \tau_{Z'}, \tau_{1,Z'}$  sont définis comme précédemment. Alors*

- (1)  $\tau_{Z'}$  est une face propre de  $\tau_Z$ ,

(2)  $\tau_{1,Z'}$  est contenu dans une face propre de  $\tau_{1,Z}$ .

*Démonstration.*

(1) D'une part on a  $\overline{\varphi_Z(Z')} = \overline{O_{\tau_{Z'}}$  et  $\overline{\varphi_Z(Z)} = \overline{O_{\tau_Z}}$ . D'autre part le fait que  $Z \subset \overline{Z'}$  implique que  $\varphi_Z(Z) \subset \overline{\varphi_Z(Z')}$ , et par suite  $\overline{O_{\tau_Z}} \subset \overline{O_{\tau_{Z'}}$ . Donc  $\tau_{Z'} < \tau_Z$ .

(2) Soit  $X = \bigoplus_{i=0}^{k+1} (\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j})$  (resp.  $X = \bigoplus_{i=0}^{k'+1} (\bigoplus_{j=1}^{l'_i} E'_{i,j})$ ) la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  (resp. à  $Z'$ ). Soit  $d_{i,j}$  (resp.  $d'_{i,j}$ ) la dimension de  $E_{i,j}$  (resp. de  $E'_{i,j}$ ). D'après le lemme 2.19, chaque  $E'_{i',j'}$  est la somme directe de certains  $E_{i,j}$  et il existe une suite croissante d'entiers  $\{\alpha_i\}_{0 \leq i \leq k'}$ , avec  $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{k'} \leq k$ , tels que  $(\bigoplus_{j=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} E_{j,1}) \subseteq E'_{i,1}$  pour  $i = 0, \dots, k' + 1$ , où  $\alpha_{k'+1} := k + 1$ . On en déduit que  $\tau_{Z'}$  est de la forme suivante,

$$\tau_{Z'} = \langle e'_{\alpha_0}, e'_{\alpha_1}, \dots, e'_{\alpha_{k'}}; e_{p,q,s}, \text{ avec } e_{p,q,s} \notin \bigcup_{i=0}^{k'+1} E'_{i,1} \rangle,$$

et que  $\tau_{1,Z'}$  est de la forme suivante,

$$\tau_{1,Z'} = \langle e'_{\alpha_0}, e'_{\alpha_1}, \dots, e'_{\alpha_{k'}}; \sum_{e'_{p,q} \in E'_{i,j}} e'_{p,q}, 0 \leq i \leq k'+1, 1 < j \leq l'_i, 0 \leq p \leq k+1, 1 \leq q \leq l_p \rangle.$$

On rappelle que

$$\tau_Z = \langle e'_0, e'_1, \dots, e'_k; e_{p,q,s}, 0 \leq p \leq k+1, 1 < q \leq l_p, 1 \leq s \leq d_{p,q} \rangle,$$

et que

$$\tau_{1,Z} = \langle e'_0, e'_1, \dots, e'_k; e'_{p,q}, 0 \leq p \leq k+1, 1 < q \leq l_p \rangle.$$

Donc on a  $\tau_{1,Z'} \subseteq (\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z})$ . Or  $\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$  est une face propre de  $\tau_{1,Z}$ , en effet

$$\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z} = \langle e'_{\alpha_0}, \dots, e'_{\alpha_{k'}}; e'_{p,q}, \text{ avec } 0 \leq p \leq k+1, 1 < q \leq l_p, e'_{p,q} \notin \bigcup_{i=0}^{k'+1} E'_{i,1} \rangle.$$

D'où le résultat. □

Définissons la subdivision  $\Pi_Z^1$  du cône  $\tau_Z$  de la manière suivante. Soit  $\tau_Z^{(p,q)} := \langle e_{p,q,1}, \dots, e_{p,q,d_{p,q}} \rangle$ , avec  $0 \leq p \leq k+1$  et  $1 \leq q \leq l_p$ . Notons  $\Pi_Z^{(p,q)}$  la subdivision élémentaire du cône  $\tau_Z^{(p,q)}$  de centre  $e'_{p,q}$ . Puisque

$$\tau_Z = \langle e'_0, \dots, e'_k \rangle \oplus (\tau_Z^{(0,2)} \oplus \dots \oplus \tau_Z^{(0,l_0)}) \oplus \dots \oplus (\tau_Z^{(k+1,2)} \oplus \dots \oplus \tau_Z^{(k+1,l_{k+1})}),$$

alors on définit

$$\Pi_Z^1 := \langle e'_0, \dots, e'_k \rangle \oplus (\Pi_Z^{(0,2)} \oplus \dots \oplus \Pi_Z^{(0,l_0)}) \oplus \dots \oplus (\Pi_Z^{(k+1,2)} \oplus \dots \oplus \Pi_Z^{(k+1,l_{k+1})}) \quad .$$

On peut vérifier que  $\tau_{1,Z}$  est une face commune de tout cône de dimension maximale dans  $\Pi_Z^1$ . Puisque  $\Sigma_Z$  est simplicial,  $\Pi_Z^1$  induit canoniquement une subdivision de  $\Sigma_Z$ , notée  $\Sigma_Z^1$ .

**Lemme 4.5** *Le morphisme canonique  $\varphi_Z^1$  de  $V_{\Sigma_Z^1, N}$  dans  $V_{\Sigma_Z, N}$  est propre birationnel et équivariant par rapport à  $G(Z)$ .*

*Démonstration.* Seulement le fait que  $\varphi_Z^1$  est équivariant par rapport à  $G(Z)$  est moins évident. Puisque

$$C = (\tau_Z^{(0,1)} \oplus \dots \oplus \tau_Z^{(0,l_0)}) \oplus \dots \oplus (\tau_Z^{(k+1,1)} \oplus \dots \oplus \tau_Z^{(k+1,l_{k+1})})$$

on peut définir

$$\Sigma_Z^0 := (\Pi_Z^{(0,1)} \oplus \dots \oplus \Pi_Z^{(0,l_0)}) \oplus \dots \oplus (\Pi_Z^{(k+1,1)} \oplus \dots \oplus \Pi_Z^{(k+1,l_{k+1})}) \quad .$$

Notons  $\sigma_Z$  l'unique cône maximal qui est la face commune de tout cône de dimension  $n$  dans  $\Sigma_Z^0$ . Posons

$$\Sigma_Z^{1+} := \{\tau_0 \cap \tau_1 \mid \tau_0 \in \Sigma_Z^0, \tau_1 \in \Sigma_Z^1\} \quad .$$

On vérifie facilement que  $\Sigma_Z^{1+}$  est une subdivision de  $\Sigma_Z^0$  induite par une certaine subdivision de  $\sigma_Z$ , en particulier  $\Sigma_Z^{1+}$  est un éventail. Alors  $\Sigma_Z^1$  peut être obtenu, à partir de  $\Sigma_Z^{1+}$ , en contractant les  $L(e'_{p,1})$ , avec  $p = 0, \dots, k+1$ , où  $L(e'_{p,1})$  est l'arrête dans  $\Sigma_Z^{1+}$  passant par  $e'_{p,1}$ .

D'après le lemme 3.14, le diagramme commutatif suivant est équivariant par rapport à  $G(Z)$ .

$$\begin{array}{ccccc} V_{\Sigma_Z^{1+}, N} & \longrightarrow & V_{\Sigma_Z^0, N} & \longrightarrow & V_{C, N} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V_{\Sigma_Z^1, N} & \longrightarrow & V_{\Sigma_Z, N} & \longrightarrow & V_{C, N} \end{array}$$

D'où le résultat. □

Considérons le groupe  $G_0(Z)$  comme un sous-groupe fini du tore  $T$ . Soient  $r$  l'ordre de  $G$  et  $\omega := \exp(\frac{2i\pi}{r})$ . Alors chaque élément  $g \in G_0(Z)$  peut s'écrire de façon unique comme

$$g = (\omega^{a_{0,1,1}(g)}, \dots, \omega^{a_{0,1,d_{0,1}}(g)}; \dots; \omega^{a_{k+1,l_{k+1},1}(g)}, \dots, \omega^{a_{k+1,l_{k+1},d_{k+1,l_{k+1}}}(g)}) \quad ,$$

avec  $a_{p,q,s}(g)$  des entiers compris entre 0 et  $r-1$ . Posons

$$a_g := \frac{1}{r} (a_{0,1,1}(g), \dots, a_{0,1,d_{0,1}}(g); \dots; a_{k+1,l_{k+1},1}(g), \dots, a_{k+1,l_{k+1},d_{k+1,l_{k+1}}}(g)) \quad ,$$

vu comme un point dans  $N_{\mathbb{R}}$ . On définit  $N^Z$ , le sur-réseau de  $N$ , de la manière suivante,

$$N^Z := N + \sum_{g \in G_0(Z)} \mathbb{Z} \cdot a_g \quad .$$

D'après la définition de la décomposition de  $X$  associée à  $Z$ , la restriction de tout élément  $g \in G_0(Z)$  sur chaque  $E_{p,q}$  est une homothétie, avec  $0 \leq p \leq k+1$  et  $1 \leq q \leq l_p$ . On en déduit que pour tout  $g \in G_0(Z)$  et pour tous  $s$  et  $s'$ , avec  $1 \leq s < s' \leq d_{p,q}$ , on a

$$a_{p,q,s}(g) = a_{p,q,s'}(g) \quad .$$

De plus  $a_{0,1,s}(g) = 0$ , car la restriction de  $g$  sur  $E_{0,1}$  est l'identité. Ainsi on voit que tous les  $a_g$ , avec  $g \in G_0(Z)$ , sont contenus dans  $F_{1,Z}$ . Posons  $N_{\tau_Z}^Z := N^Z \cap F_Z$ , et  $N_{\tau_{1,Z}}^Z := N^Z \cap F_{1,Z}$ .

Soient  $\tau_{1,Z}$  le cône associé à  $Z$  défini comme précédemment et  $\Phi$  une subdivision de  $\tau_{1,Z}$ . Notons  $\Pi_Z^2$  la subdivision de  $\Pi_Z^1$  induite par  $\Phi$ , et  $\Sigma_Z^2$  la subdivision de  $\Sigma_Z^1$  induite par  $\Pi_Z^2$ . Définissons

$$\Lambda_Z := \{L_{(e'_{p,q})} \mid (L_{(e'_{p,q})} \cap N) = (L_{(e'_{p,q})} \cap N^Z), 0 \leq p \leq k+1, 1 < q \leq l_p\} \quad .$$

D'après le lemme 3.14 on peut contracter tous les  $L \in \Lambda_Z$  à partir de  $\Sigma_Z^2$ , et obtenir encore un éventail, noté  $\tilde{\Sigma}_Z$ . Posons

$$\tilde{\Pi}_Z := \{\tau \mid \tau \in \tilde{\Sigma}_Z, \tau \subseteq \tau_Z\} \quad .$$

On peut vérifier que  $\tilde{\Sigma}_Z$  est la subdivision de  $\Sigma_Z$  induite par  $\tilde{\Pi}_Z$ . On a les deux lemmes suivants.

**Lemme 4.6** *Le diagramme commutatif suivant est équivariant par rapport à  $G(Z)$ .*

$$\begin{array}{ccc}
V_{\Sigma_Z^2, N} & \longrightarrow & V_{\Sigma_Z^2, N^Z} \\
\swarrow & & \swarrow \\
V_{\tilde{\Sigma}_Z, N} & \longrightarrow & V_{\tilde{\Sigma}_Z, N^Z} \\
\downarrow & & \downarrow \\
V_{\Sigma_Z^1, N} & \longrightarrow & V_{\Sigma_Z^1, N^Z} \\
\swarrow & & \swarrow \\
V_{\Sigma_Z, N} & \longrightarrow & V_{\Sigma_Z, N^Z}
\end{array}$$

*Démonstration.* Considérons d'abord les 4 variétés à gauche du diagramme et les morphismes entre eux, i.e. par rapport au réseau  $N$ . Il est clair que ces morphismes sont bien définis et équivariants par rapport à  $T_N$ . Posons

$$\Sigma_Z^{i+} := \{\tau_i \cap \tau_0 \mid \tau_i \in \Sigma_Z^i, \tau_0 \in \Sigma_Z^0\}$$

et

$$\Phi_Z^{i+} := \{\pi \in \Sigma_Z^{i+} \mid \pi \subseteq F_{1,Z}\}$$

avec  $i = 1$  ou  $2$ . Alors  $\Sigma_Z^{1+}$  (resp.  $\Sigma_Z^{2+}$ ) est la subdivision de  $\Sigma_Z^0$  induite par  $\Phi_Z^1$  (resp.  $\Phi_Z^2$ ). D'après la proposition 3.10,  $V_{\Sigma_Z^{1+},N}$  et  $V_{\Sigma_Z^{2+},N}$  sont des  $G(Z)$ -variétés et le morphisme de  $V_{\Sigma_Z^{2+},N}$  dans  $V_{\Sigma_Z^{1+},N}$  est un  $G(Z)$ -morphisme. Ensuite  $\Sigma_Z^1$  (resp.  $\Sigma_Z^2$ ) peut être obtenue à partir de  $\Sigma_Z^{1+}$  (resp.  $\Sigma_Z^{2+}$ ), en contractant les  $L$  avec  $L \in \Lambda_Z$ . De même manière  $\tilde{\Sigma}_Z$  peut être obtenue à partir de  $\Sigma_Z^{2+}$ , en contractant les  $L$  avec  $L \in (\Lambda_Z \cup \{L_{(\epsilon_{i,1}^i)} \mid 0 \leq i \leq k+1\})$ . D'après le lemme 3.14, les  $V_{\Sigma_Z^1,N}$ ,  $V_{\Sigma_Z^2,N}$  et  $V_{\tilde{\Sigma}_Z,N}$  sont toutes des  $G(Z)$ -variétés et les contractions sont équivariantes par rapport à  $G(Z)$ . D'autre part ces variétés ont  $Z_n$  comme un ouvert dense et stable par  $G(Z)$ , sur lequel les restrictions de ces morphismes sont équivariantes par rapport à  $G(Z)$ . On en déduit que tous ces morphismes sont équivariants par rapport à  $G(Z)$ .

Pour compléter la démonstration, il suffit de remarquer que dans le diagramme commutatif ci-dessus, les variétés apparues dans les deux dernières colonnes du diagramme sont des quotients par  $G_0(Z)$  de celles dans les deux premières colonnes, et que  $G_0$  est un sous-groupe distingué de  $G(Z)$ . Donc le diagramme est équivariant par rapport à  $G(Z)$ . □

**Lemme 4.7** *Soit  $\tilde{\varphi}_Z$  le morphisme canonique de  $V_{\tilde{\Sigma}_Z,N}$  dans  $V_{\Sigma_Z,N}$ . On définit  $\tilde{U}_Z$  par*

$$\tilde{U}_Z := \tilde{\varphi}_Z^{-1}(\varphi_Z(U_Z)) \quad ,$$

où  $\varphi_Z$  est le morphisme canonique de  $X'$  dans  $Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$ . Alors:

- (1)  $\tilde{U}_Z$  est un ouvert de  $V_{\tilde{\Sigma}_Z,N}$ , stable par  $G(Z)$ ;
- (2) Si la subdivision  $\Phi$  de  $\tau_{1,Z}$  est régulière par rapport au réseau  $N^Z$ , alors  $\tilde{U}_Z/G_0(Z)$  est lisse. Si de plus  $V_{\Phi,N_{\tau_{1,Z}}^Z}$  est une désingularisation de  $V_{\tau_{1,Z},N_{\tau_{1,Z}}^Z}$ , alors  $\tilde{U}_Z/G_0(Z)$  est une désingularisation de  $U_Z/G_0(Z)$ , équivariante par rapport à  $G(Z)$ .

*Démonstration.*

- (1) D'après le lemme précédent, le morphisme

$$\tilde{\varphi}_Z : V_{\tilde{\Sigma}_Z,N} \longrightarrow V_{\Sigma_Z,N}$$

est équivariant par rapport à  $G(Z)$ . D'autre part l'immersion ouverte

$$(\varphi_Z)|_{U_Z} : U_Z \longrightarrow Y_Z = V_{\Sigma_Z,N}$$

est aussi équivariante par rapport à  $G(Z)$  (Théorème 2.8). Donc  $\varphi_Z(U_Z)$  est un ouvert de  $V_{\Sigma_Z,N}$  stable par  $G(Z)$ , et par suite son image inverse dans  $V_{\tilde{\Sigma}_Z,N}$ , i.e.  $\tilde{U}_Z$ , est un ouvert stable par  $G(Z)$ .

- (2) On rappelle que  $U_Z$  est la réunion des states dans  $\mathcal{S}$  qui contiennent  $Z$  dans leur adhérences. Puisque la restriction de  $\varphi_Z$  à  $U_Z$  est une immersion ouverte équivariante par rapport à  $G(Z)$  (Théorème 2.8), alors pour tout point  $x \in U_Z$ ,  $x$  et  $\varphi(x)$  ont le même groupe d'isotropie qui est un sous-groupe de  $G_0(Z)$ . Pour chaque  $Z' \in \mathcal{S}$  avec  $Z \subseteq \overline{Z'}$ , l'image dans  $V_{\Sigma_Z, N}$  du point générique de  $Z'$  est le point générique d'une certaine orbite du tore. Notons  $\tau_{Z'}$  le cône associé à cette orbite. D'après le lemme 4.4,  $\tau_{Z'}$  est une face de  $\tau_Z$ .

Supposons que  $\Phi$  soit régulière par rapport à  $N^Z$ . Par le même argument que dans la proposition 3.10, on montre que  $\tilde{\Pi}_Z$  est aussi régulière par rapport à  $N^Z$ . Ceci implique que  $V_{\tilde{\Sigma}_Z, N^Z}$  désingularise les singularités de  $V_{\Sigma_Z, N^Z}$  qui se trouvent sur les orbites du tore associées à des faces de  $\tau_Z$ , en particulier la singularité de  $V_{\Sigma_Z, N^Z}$  sur l'image du point générique de  $Z'$  est résolue.

Soit  $x \in V_{\tilde{\Sigma}_Z, N}$  tel que son image dans  $V_{\tilde{\Sigma}_Z, N^Z}$  soit un point singulier et tel que  $\tilde{\varphi}_Z(x) \in \overline{O_{\tau_{Z'}}$ . Il existe un unique cône  $\tau_x \in \tilde{\Sigma}_Z$  tel que  $x \in O_{\tau_x}$ . Soit  $\tau$  le cône dans  $\Sigma_Z$  tel que

$$\tilde{\varphi}_Z(O_{\tau_x}) \subseteq O_\tau \quad .$$

Alors la condition  $\tilde{\varphi}_Z(x) \in \overline{O_{\tau_{Z'}}$  implique que  $O_\tau \subseteq \overline{O_{\tau_{Z'}}$ , et par suite  $\tau_{Z'} \leq \tau$ . La restriction de  $\tilde{\Sigma}_Z$  sur  $\tau$  (resp. sur  $\tau_{Z'}$ ) est un éventail, noté  $\Delta_\tau$  (resp.  $\Delta_{\tau_{Z'}}$ ). Donc par rapport au réseau  $N^Z$ ,  $\Delta_\tau$  est singulier car l'image de  $x$  qui est contenue dans l'orbite associée à  $\tau_x$  est un point singulier de  $V_{\tilde{\Sigma}_Z, N^Z}$ ; et  $\Delta_{\tau_{Z'}}$  est régulier, car c'est la restriction de  $\tilde{\Pi}_Z$  sur  $\tau_{Z'}$ . Ceci entraîne que

$$(\tau \cap N^Z) \neq (\tau_{Z'} \cap N^Z) \quad .$$

Par conséquent  $G_{\tilde{\varphi}_Z(x)} \neq G_{x'}$ , où  $G_{x'}$  (resp.  $G_{\tilde{\varphi}_Z(x)}$ ) est le groupe d'isotropie du point  $x'$  (resp.  $\tilde{\varphi}_Z(x)$ ), avec  $x'$  le point générique de  $O_{\tau_{Z'}}$ . D'autre part tous les points de  $\varphi_Z(Z')$  ont le même groupe d'isotropie  $G_0(Z')$ . D'où  $\tilde{\varphi}_Z(x) \notin \varphi_Z(Z')$ . On en conclut que l'image de  $(\tilde{\varphi}_Z)^{-1}(\varphi_Z(Z'))$  dans  $V_{\tilde{\Sigma}_Z, N^Z}$  ne contient aucun point singulier. Par conséquent  $\tilde{U}_Z/G_0(Z)$ , qui est l'image de  $\tilde{U}_Z$  dans  $V_{\tilde{\Sigma}_Z, N^Z}$  est lisse.

Si on suppose de plus que  $V_{\Phi, N_{\tau_1, Z'}}$  soit une désingularisation de  $V_{\tau_1, Z, N}$ , alors on peut vérifier que tous les diviseurs exceptionnels dans  $V_{\tilde{\Sigma}_Z, N^Z}$  sont contractés dans le lieu singulier de  $V_{\Sigma_Z, N^Z}$ , et par suite tous les diviseurs exceptionnels dans  $\tilde{U}_Z/G_0(Z)$  sont contractés dans le lieu singulier de  $U_Z/G_0(Z)$ . Donc  $\tilde{U}_Z/G_0(Z)$  est une désingularisation de  $U_Z/G_0(Z)$ . Elle est équivariante par rapport à  $G(Z)$ , c'est évident.

□

**Remarque 4.8** Supposons qu'on ait construit  $\tilde{U}_Z$  et  $\tilde{U}_{Z'}$ , où  $Z$  et  $Z'$  sont deux strates dans  $\mathcal{S}$  avec  $Z \subset \overline{Z'}$ . On a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} U_Z & \xrightarrow{\varphi_Z} & Y_Z \\ \uparrow & & \downarrow \\ U_{Z'} & \xrightarrow{\varphi_{Z'}} & Y_{Z'} \end{array}$$

Donc pour que  $\tilde{U}_Z$  et  $\tilde{U}_{Z'}$  puissent se recoller, il faut et il suffit que l'on ait le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_{Z'} & \xrightarrow{\tilde{i}_{Z',Z}} & \tilde{U}_Z \\ \downarrow \tilde{\varphi}_{Z'} & & \downarrow \tilde{\varphi}_Z \\ U_{Z'} & \xrightarrow{i_{Z',Z}} & U_Z \end{array}$$

et que le morphisme en haut induit un isomorphisme de  $\tilde{U}_{Z'}$  dans  $\tilde{\varphi}_Z^{-1}(\varphi_Z(U_{Z'}))$ . En tenant compte que dans  $\Sigma_Z$ ,  $\tau_{Z'}$  est une face de  $\tau_Z$ , on trouve que la condition précédente équivaut à l'égalité suivante,

$$(\tilde{\Pi}_Z)|_{\tau_{Z'}} = \tilde{\Pi}_{Z'} \quad .$$

Ceci est possible grâce au lemme 4.4.

Maintenant construisons les  $\tilde{U}_Z$  suivant l'ordre décroissant de dimensions des  $Z$ , avec  $Z$  parcourant  $\mathcal{S}$ .

D'abord  $\mathcal{S}_n$  ne contient qu'un seul élément  $Z_n$  qui est un ouvert de  $X'$ , donc  $U_{Z_n} = Z_n$ . On a  $G_0(Z_n) = \{e\}$  et  $G(Z_n) = G$ . Posons  $\tilde{U}_{Z_n} := Z_n$ , la condition (i) dans l'introduction est vérifiée. Supposons qu'on ait construit les  $\tilde{U}_Z$  pour tout  $Z \in \mathcal{S}$  avec  $\dim(Z) \geq i + 1$ , et que  $\mathcal{S}_i \neq \emptyset$ .

- (1) Soit  $Z$  une strate dans  $\mathcal{S}_i$ . Supposons qu'il existe un  $Z_1 \in \mathcal{S}$  et un  $g \in G$  tels que  $Z_1 = g(Z)$  et tels que  $\tilde{U}_{Z_1}$  soit déjà construite. Alors on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} U_Z & \xrightarrow{\varphi_Z} & Y_Z \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ U_{Z_1} & \xrightarrow{\varphi_{Z_1}} & Y_{Z_1} \end{array}$$



où les deux morphismes horizontaux sont des immersions ouvertes et que les deux morphismes verticaux sont des isomorphismes. Définissons  $\tilde{Y}_Z$  comme le fibre-produit de  $Y_Z$  avec  $\tilde{Y}_{Z_1}$  sur  $Y_{Z_1}$ , i.e.

$$\tilde{Y}_Z := Y_Z \times_{Y_{Z_1}} \tilde{Y}_{Z_1} \quad ;$$

et  $\tilde{U}_Z$  comme le fibre-produit de  $U_Z$  avec  $\tilde{U}_{Z_1}$  sur  $U_{Z_1}$ , i.e.

$$\tilde{U}_Z := U_Z \times_{U_{Z_1}} \tilde{U}_{Z_1} \quad .$$

Alors la condition (iii) dans l'introduction est vérifiée.

- (2) Supposons que  $Z \in \mathcal{S}_i$  et que  $\tilde{U}_{Z'}$  ne soit construit pour aucun  $Z' \in \{g(Z) \mid g \in G\}$ . Prenons une base de  $X$  compatible avec la décomposition de  $X$  associée à  $Z$ . Soient  $T$  le tore associé à cette base,  $N$  et  $M$  les deux  $\mathbb{Z}$ -modules libres de rang  $n$  déterminés par  $T$ . Supposons que les  $\Sigma_Z$ ,  $\tau_Z$  et  $\tau_{1,Z}$  soient définis comme précédemment. On va construire  $\tilde{U}_Z$  dans la proposition 4.10. Montrons d'abord la proposition suivante.

**Proposition 4.9** *Soient  $Z$  et  $Z'$  deux strates différentes dans  $\mathcal{S}$  telles que  $Z \subset \overline{Z'}$ . Soient  $\Phi_{Z'}$  une subdivision simpliciale de  $\tau_{1,Z'}$ ,  $\Sigma_{Z'}^+$  la subdivision de  $\Sigma_{Z'}^1$  induite par  $\Phi_{Z'}$ , et  $\tilde{\Sigma}_{Z'}$  la subdivision de  $\Sigma_{Z'}$  obtenue à partir de  $\Sigma_{Z'}^+$  en contractant les  $L$ , avec  $L \in \Lambda_{Z'}$ . Posons*

$$\Psi_{Z',Z} := \{\tau' \cap \tau_{1,Z} \mid \tau' \in \tilde{\Pi}_{Z'}\} \quad ,$$

$$\Pi_{Z'}^{+Z} := \{\tau' \cap \tau_1 \mid \tau' \in \tilde{\Pi}_{Z'}, \tau_1 \in \Pi_Z^1\} \quad ,$$

où  $\tilde{\Pi}_{Z'} := (\tilde{\Sigma}_{Z'})|_{\tau_{Z'}} = \{\tau' \in \tilde{\Sigma}_{Z'}, \tau' \subseteq \tau_{Z'}\}$ . Alors

- (a)  $\Psi_{Z',Z}$  est une subdivision de  $\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$ ,
- (b)  $\Pi_{Z'}^{+Z}$  est la subdivision de  $(\Pi_Z^1)|_{\tau_{Z'}}$  induite par  $\Psi_{Z',Z}$ , où  $(\Pi_Z^1)|_{\tau_{Z'}}$  est la restriction de  $\Pi_Z^1$  à  $\tau_{Z'}$ ,
- (c) les arrêtes  $L$  dans  $\Pi_{Z'}^{+Z}$ , avec  $L \in \Lambda_Z \cap \tau_{Z'}$ , sont contractibles. Si on les contracte, on obtient exactement  $\tilde{\Pi}_{Z'}$ .

*Démonstration.* Supposons que la décomposition de  $X$  associée à  $Z$  (définition 2.10) soit de la forme suivante,

$$X = \bigoplus_{i=0}^{k+1} \left( \bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j} \right) \quad ,$$

et que la décomposition de  $X$  associée à  $Z'$  soit de la forme suivante,

$$X = \bigoplus_{i=0}^{k'+1} \left( \bigoplus_{j=1}^{l'_i} E'_{i,j} \right) \quad .$$

Soit  $d_{i,j}$  la dimension de  $E_{i,j}$ , pour  $i = 0, \dots, k+1$  et  $j = 1, \dots, l_i$ . D'après le lemme 2.19, il existe une suite croissante d'entiers  $\{\alpha_i\}_{i=0}^{k'}$ , avec  $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{k'} \leq k$ , telle que pour tout  $i$ , avec  $0 \leq i \leq k'$ , les trois conditions suivantes soient vérifiées:

$$(i) \quad \bigoplus_{p=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} \left( \bigoplus_{q=1}^{l_p} E_{p,q} \right) = \bigoplus_{j=1}^{l'_i} E'_{i,j};$$

(ii) pour tout  $p$ , avec  $\alpha_{i-1} + 1 \leq p \leq \alpha_i$ , et pour tout  $q$ , avec  $1 \leq q \leq l_p$ , il existe un unique  $j$ , avec  $1 \leq j \leq l_i$ , tel que  $E_{p,q} \subseteq E'_{i,j}$ ,

$$(iii) \quad \left( \bigoplus_{p=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} E_{p,1} \right) \subseteq E'_{i,1}.$$

Comme dans le lemme 4.4, on pose

$$e'_i := \sum_{p=i+1}^{k+1} \sum_{q=1}^{l_p} \sum_{s=1}^{d_{p,q}} e_{p,q,s} \quad ,$$

$$e'_{p,q} := \sum_{s=1}^{d_{p,q}} e_{p,q,s} \quad ,$$

et

$$e''_{i,j} := \sum_{e_{p,q,s} \in E'_{i,j}} e_{p,q,s} \quad .$$

Les quatres cônes,  $\tau_Z$ ,  $\tau_{1,Z}$ ,  $\tau_{Z'}$  et  $\tau_{1,Z'}$  sont de formes suivantes,

$$\tau_Z = \langle e'_0, e'_1, \dots, e'_k; e_{p,q,s}, 0 \leq p \leq k+1, 2 \leq q \leq l_p, 1 \leq s \leq d_{p,q} \rangle \quad ,$$

$$\tau_{1,Z} = \langle e'_0, e'_1, \dots, e'_k; e'_{p,q}, 0 \leq p \leq k+1, 2 \leq q \leq l_p \rangle \quad ,$$

$$\tau_{Z'} = \langle e'_{\alpha_0}, e'_{\alpha_1}, \dots, e'_{\alpha_{k'}}; e_{p,q,s} \text{ avec } e_{p,q,s} \notin \bigcup_{i=0}^{k'+1} E'_{i,1} \rangle \quad ,$$

et que

$$\tau_{1,Z'} = \langle e'_{\alpha_0}, e'_{\alpha_1}, \dots, e'_{\alpha_{k'}}; \sum_{e'_{p,q} \in E'_{i,j}} e'_{p,q}, 0 \leq i \leq k'+1, 2 \leq j \leq l'_i \rangle \quad .$$

Supposons que  $\Phi_{Z'}$  soit une subdivision simpliciale de  $\tau_{1,Z'}$  et que  $\Pi_{Z'}^+$  soit la subdivision de  $\Pi_{Z'}^1$  induite par  $\Phi_{Z'}$ . Alors tout cône  $\gamma$  de dimension maximale dans  $\Pi_{Z'}^+$  est de la forme suivante,

$$\gamma = (\gamma_{0,2} \oplus \dots \oplus \gamma_{0,l'_0}) \oplus \dots \oplus (\gamma_{k'+1,2} \oplus \dots \oplus \gamma_{k'+1,l'_{k'+1}}) \oplus \langle v_1, \dots, v_{m'} \rangle \quad ,$$

où  $\gamma_{i,j}$  est une face propre maximale du cône  $C'_{i,j}$ , avec

$$C'_{i,j} := \langle \{e_{p,q,s} \mid \alpha_{i-1} + 1 \leq p \leq \alpha_i, 1 \leq q \leq l_p, 1 \leq s \leq d_{p,q}\} \rangle$$

et où  $\langle v_1, \dots, v_{m'} \rangle$  est un cône de dimension maximale dans  $\Phi_{Z'}$ . On rappelle la définition de  $\Lambda_{Z'}$ ,

$$\Lambda_{Z'} := \{L_{(e''_{i,j})} \mid (L_{(e''_{i,j})} \cap N) = (L_{(e''_{i,j})} \cap N^Z), 0 \leq i \leq k' + 1, 1 \leq j \leq l'_i\} \quad .$$

Même argument que dans le lemme 3.14, on montre qu'il existe un unique cône  $\tau_\gamma \in \tilde{\Pi}_{Z'}$ , de dimension maximale, tel que  $\gamma \subseteq \tau_\gamma$ . De plus  $\tau_\gamma$  peut être décrit de la façon suivante. Quitte à changer les indices, on peut supposer que  $v_c \in \Lambda_{Z'}$  si et seulement si  $1 \leq c \leq \mu$ , et qu'il existe  $(i_c, j_c)$  tels que  $v_c = e''_{i_c, j_c}$ , avec  $c = 1, \dots, \mu$ . On a

$$\tau_\gamma = (C'_{i_1, j_1} \oplus \dots \oplus C'_{i_\mu, j_\mu}) \oplus \left( \bigoplus_{\substack{j \neq 1 \\ (i,j) \neq (i_c, j_c) \\ c=1, \dots, \mu}} \gamma_{i,j} \right) \oplus \langle v_{\mu+1}, \dots, v_{m'} \rangle \quad .$$

Prenons un cône de dimension maximale dans  $\Pi_Z^1$ , noté  $\tau_1$ . Il est de la forme suivante,

$$\tau_1 = \bigoplus_{i=0}^{k+1} \left( \bigoplus_{j=2}^{l_i} \beta_{i,j} \right) \oplus \langle e'_0, \dots, e'_k; e'_{p,q}, 0 \leq p \leq k+1, 2 \leq q \leq l_p \rangle \quad ,$$

où  $\beta_{p,q}$  est une face propre maximale du cône  $C_{p,q}$ , avec

$$C_{p,q} := \langle e_{p,q,s}, 1 \leq s \leq d_{p,q} \rangle \quad ,$$

$0 \leq p \leq k+1$  et  $1 \leq q \leq l_p$ .

Maintenant déterminons  $\tau_\gamma \cap \tau_1$ . Quitte à changer les indices, on peut supposer que

$$\beta_{p,q} = \langle e_{p,q,s}, 2 \leq s \leq d_{p,q} \rangle \quad .$$

Soit  $\{e^{p,q,s} \mid 0 \leq p \leq k+1, 1 \leq q \leq l_p, 1 \leq s \leq d_{p,q}\}$  la base de  $M$ , qui est le dual de la base  $\{e_{p,q,s}\}$  de  $N$ . On peut vérifier que l'orthogonal de  $\tau_1$ , noté  $\tau_1^\perp$ , est de la forme suivante,

$$\tau_1^\perp = \langle \{e^{0,1,s}, -e^{0,1,s} \mid 1 \leq s \leq d_{0,1}\} \rangle \oplus \left( \bigoplus_{p=1}^{k+1} \langle \{(e^{p,1,1} - e^{p,1,s}), (e^{p,1,s} - e^{p,1,1}) \mid 1 \leq s \leq d_{p,1}\} \rangle \right),$$

et que le cône dual de  $\tau_1$ , noté  $\check{\tau}_1$ , est de la forme suivante,

$$\check{\tau}_1 = \tau_1^\perp \oplus \langle \{e^{p,q,1}, e^{p,q,s} - e^{p,q,1} \mid 0 \leq p \leq k+1, 2 \leq q \leq l_p, 2 \leq s \leq d_{p,q}\} \rangle \quad .$$

Puisque  $\check{\check{\tau}}_1 = \tau_1$ , on obtient

$$\tau_\gamma \cap \tau_1 = \{v \in \tau_\gamma \mid \langle h, v \rangle \geq 0, \forall h \in \check{\tau}_1\} \quad .$$

Si  $h \in \tau_1^\perp$  ou  $h = e^{p,q,1}$ ,  $\langle h, v \rangle \geq 0$  pour tout  $v \in \tau_\gamma$ . On en déduit que

$$\tau_\gamma \cap \tau_1 = \{v \in \tau_\gamma \mid \langle e^{p,q,s} - e^{p,q,1}, v \rangle \geq 0, 0 \leq p \leq k+1, 2 \leq q \leq l_p, 2 \leq s \leq d_{p,q}\} \quad .$$

On rappelle que

$$\tau_\gamma = (C'_{i_1, j_1} \oplus \cdots \oplus C'_{i_\mu, j_\mu}) \oplus \left( \bigoplus_{\substack{j \neq 1 \\ (i,j) \neq (i_c, j_c) \\ c=1, \dots, \mu}} \gamma_{i,j} \right) \oplus \langle v_{\mu+1}, \dots, v_{m'} \rangle \quad .$$

Puisque  $\{v_{\mu+1}, \dots, v_{m'}\} \subset \tau_{1, Z'} \subset \tau_{1, Z}$ , on a  $\langle e^{p,q,s} - e^{p,q,1}, v_c \rangle = 0$ , pour  $c = \mu + 1, \dots, m'$ . D'autre part pour tout  $p$ , avec  $0 \leq p \leq k + 1$ , et pour tout  $q$ , avec  $1 \leq q \leq l_p$ , il existe un unique  $E'_{i,j}$  tel que  $E_{p,q} \subseteq E'_{i,j}$ . On en déduit

$$\tau_\gamma \cap \tau_1 = (H_{i_1, j_1} \oplus \cdots \oplus H_{i_\mu, j_\mu}) \oplus \left( \bigoplus_{\substack{j \neq 1 \\ (i,j) \neq (i_c, j_c) \\ c=1, \dots, \mu}} (\gamma_{i,j} \cap H_{i,j}) \right) \oplus \langle v_{\mu+1}, \dots, v_{m'} \rangle \quad ,$$

où

$$H_{i,j} := \bigoplus_{E_{p,q} \subseteq E'_{i,j}} \langle e'_{p,q}, e_{p,q,2}, e_{p,q,3}, \dots, e_{p,q,d_{p,q}} \rangle \quad .$$

Puisque  $\gamma_{i,j}$  est une face propre et maximale de  $C'_{i,j}$ , on déduit que  $\gamma_{i,j} \cap H_{i,j}$  est un cône simplicial.

Ainsi on a montré que  $\tau_\gamma \cap \tau_1$  est la somme directe des cônes simpliciaux, et par suite lui-même est un cône simplicial. En général, soit  $\delta$  (resp.  $\delta_1$ ) un cône dans  $\tilde{\Pi}_{Z'}$  (resp.  $\Pi_Z^1$ ). Il existe un  $\tau_\gamma$  (resp.  $\tau_1$ ), qui est un cône maximal dans  $\tilde{\Pi}_{Z'}$  (resp.  $\Pi_Z^1$ ) contenant  $\delta$  (resp.  $\delta_1$ ). L'intersection  $\delta \cap \delta_1$  est une face de  $\tau_\gamma \cap \tau_1$ . Ce dernier est un cône simplicial, par conséquent  $\delta \cap \delta_1$  est un cône simplicial. Donc  $\tilde{\Pi}_{Z'} \cap \Pi_Z^1$  est un éventail.

Une conséquence immédiate, est que  $\Psi_{Z', Z}$  est une subdivision de  $\tau_{Z'} \cap \tau_{1, Z}$ . En effet  $\Psi_{Z', Z}$  est la restriction de  $\Pi_{Z'}^{+Z}$  à  $\tau_{Z'} \cap \tau_{1, Z}$ . D'autre part, d'après les calculs précédents, pour tout cône  $\tau_\gamma$  dans  $\tilde{\Pi}_{Z'}$  et tout cône  $\tau_1$  dans  $\Pi_Z^1$ , qui sont de dimensions maximales, leur intersection est la somme directe d'une face de  $\tau_{Z'}$  avec un cône de dimension maximal contenu dans  $\tau_{Z'} \cap \tau_{1, Z}$ . Ce dernier est donc un élément de  $\Psi_{Z', Z}$ . Ceci implique que  $\Pi_{Z'}^{+Z}$  est la subdivision de  $(\Pi_Z^1)_{|\tau_{Z'}}$  induite par  $\Psi_{Z', Z}$ .

De nouveau d'après le lemme 3.14, on peut contracter les  $L$ , avec  $L \in \tau_{Z'} \cap \Lambda_Z$ , et obtenir encore un éventail simplicial qui est une subdivision de  $\tilde{\Pi}_{Z'}$ . Or ces deux éventails sont tous simpliciaux et ont les mêmes arrêtes, on en conclut qu'ils sont égaux. La proposition est démontrée. □

**Proposition 4.10** *Il existe une subdivision  $\tilde{\Pi}_Z$  de  $\tau_Z$  telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées.*

- (1) *Pour tout  $Z' \in \mathcal{S}$ , avec  $Z \subset \overline{Z'}$ , on a  $(\tilde{\Pi}_Z)_{|\tau_{Z'}} = \tilde{\Pi}_{Z'}$ ;*

(2) Soit  $\tilde{\Sigma}_Z := \Sigma_{\tilde{\Pi}_Z}$  la subdivision de  $\Sigma_Z$  induite par  $\tilde{\Pi}_Z$ . Alors le morphisme

$$\tilde{\varphi}_Z : V_{\tilde{\Sigma}_Z, N} \longrightarrow V_{\Sigma_Z, N}$$

est équivariant par rapport à  $G(Z)$ .

(3) L'image inverse de  $\varphi_Z(U_Z)$  dans  $V_{\tilde{\Sigma}_Z, N}$ , notée  $\tilde{U}_Z$ , est stable par  $G(Z)$ . De plus  $\tilde{U}_Z/G_0(Z)$  est une désingularisation de  $U_Z/G_0(Z)$ .

*Démonstration.* Pour chaque  $Z' \in \mathcal{S}$  tel que  $Z \subset \overline{Z'}$ , on pose

$$\Pi_{Z'}^{+Z} := \tilde{\Pi}_{Z'} \cap \Pi_Z^1 \quad \text{et} \quad \Psi_{Z', Z} := \tilde{\Pi}_{Z'} \cap \tau_{1, Z} \quad .$$

D'après la proposition précédente,  $\Pi_{Z'}^{+Z}$  est la subdivision de  $(\Pi_Z^1)_{\tau_{Z'}}$  induite par  $\Psi_{Z', Z}$ , qui est une subdivision de  $\tau_{Z'} \cap \tau_{1, Z}$ . D'après le lemme 4.4,  $\tau_{Z'} \cap \tau_{1, Z}$  est une face de  $\tau_{1, Z}$ . Si  $Z''$  est une autre strate dans  $\mathcal{S}$  telle que  $Z' \subset \overline{Z''}$ , alors l'hypothèse de récurrence implique que

$$(\tilde{\Pi}_{Z'})|_{\tau_{Z''}} = \tilde{\Pi}_{Z''} \quad .$$

Par conséquent, on a

$$(\Pi_{Z'}^{+Z})|_{\tau_{Z''} \cap \tau_{1, Z}} = (\Pi_{Z''}^{+Z})|_{\tau_{Z''} \cap \tau_{1, Z}}$$

et donc

$$(\Psi_{Z', Z})|_{\tau_{Z''} \cap \tau_{1, Z}} = \Psi_{Z'', Z} \quad .$$

Donc on obtient une famille compatible de subdivisions des faces de  $\tau_{1, Z}$ . C'est facile de voir qu'il existe une subdivision  $\Phi_Z$  de  $\tau_{1, Z}$ , telle que

- (a) la restriction de  $\Phi_Z$  sur toute face  $\tau_{Z'} \cap \tau_{1, Z}$  soit égale à la subdivision  $\Psi_{Z', Z}$ ,
- (b)  $V_{\Phi_Z, N^Z}$  soit une désingularisation de  $V_{\tau_{1, Z}, N^Z}$ .

En effet une telle  $\Phi_Z$  peut être construite de la façon suivante. Posons  $\Phi_0 := \tau_{1, Z}$ , et notons  $\Phi_1$  la subdivision centrale de  $\tau_{1, Z}$ . On remarque que  $\Phi_1$  est simpliciale et que chaque cône  $\sigma_1 \in \Phi_1$  possède une unique face maximale  $\sigma_0$ , avec  $\sigma_0 < \tau_{1, Z}$ . Donc la famille compatible de subdivisions des faces de  $\tau_{1, Z}$  ci-dessus induit canoniquement une subdivision de  $\Phi_1$ , notée  $\Phi_2$ . Ensuite on prend une subdivision  $\Phi_3$  de  $\Phi_2$  telle que  $V_{\Phi_3, N^Z}$  soit une désingularisation de  $V_{\Phi_2, N^Z}$ . Alors  $\Phi_Z := \Phi_3$  vérifie les conditions (a) et (b) indiquées ci-dessus.

Une telle subdivision  $\Phi_Z$  étant construite, on dénote  $\Pi_Z^1$  la subdivision de  $\Pi_Z^1$  induite par  $\Phi_Z$ . D'après le lemme 3.14, on peut contracter les arrêtes  $L$ , avec  $L \in \Lambda_Z$ , et obtenir une subdivision  $\tilde{\Pi}_Z$  de  $\tau_Z$ . Le morphisme

$$\tilde{\varphi}_Z : V_{\tilde{\Pi}_Z, N} \longrightarrow V_{\Sigma_Z, N}$$

est équivariant par rapport à  $G(Z)$ . D'après le lemme 4.7,  $\tilde{U}_Z := \tilde{\varphi}_Z^{-1}(\varphi_Z(U_Z))$  est un ouvert de  $V_{\tilde{\Pi}_Z, N}$ , stable par  $G(Z)$ , et  $\tilde{U}_Z/G_0(Z)$  est une désingularisation de  $U_Z/G_0(Z)$ . □

Ainsi on arrive à construire la famille  $\{\tilde{U}_Z\}_{Z \in \mathcal{S}}$  telle qu'elle vérifie les trois conditions citées dans l'introduction.

## 4.2 Démonstration du théorème 4.1.

1. Montrons d'abord que les  $\tilde{U}_Z$ , avec  $Z \in \mathcal{S}$ , peuvent se recoller.

Pour tous  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{S}$ , il existe un unique  $Z \in \mathcal{S}$  tel que  $(Z_1 \cup Z_2) \subseteq \bar{Z}$  et tel que  $(U_{Z_1} \cap U_{Z_2}) = U_Z$  (Théorème 2.8). On définit

$$\tilde{U}_{Z_1, Z_2} := \tilde{\varphi}_{Z_1}^{-1}(\varphi_{Z_1}(U_Z)) \quad ,$$

de même manière on définit

$$\tilde{U}_{Z_2, Z_1} := \tilde{\varphi}_{Z_2}^{-1}(\varphi_{Z_2}(U_Z)) \quad .$$

Alors la condition (ii) implique que

$$\tilde{i}_{Z, Z_1} : \tilde{U}_Z \longrightarrow \tilde{U}_{Z_1, Z_2}$$

et

$$\tilde{i}_{Z, Z_2} : \tilde{U}_Z \longrightarrow \tilde{U}_{Z_2, Z_1}$$

sont des isomorphismes. Définissons le morphisme  $\vartheta_{Z_1, Z_2} : \tilde{U}_{Z_1, Z_2} \longrightarrow \tilde{U}_{Z_2, Z_1}$  par

$$\vartheta_{Z_1, Z_2} := \tilde{i}_{Z, Z_2} \circ (\tilde{i}_{Z, Z_1})^{-1} \quad .$$

Alors on a  $\vartheta_{Z_1, Z_2} = (\vartheta_{Z_2, Z_1})^{-1}$ .

Pour tous  $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathcal{S}$ , il existe  $Z_{12}, Z_{23}, Z_{31}, Z_{123}$  uniques dans  $\mathcal{S}$  tels que  $Z_i \cap Z_j = Z_{ij}$ , avec  $1 \leq i < j \leq 3$ , et tels que  $Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 = Z_{123}$ . On peut vérifier directement les deux égalités suivantes:

- $\vartheta_{Z_1, Z_2}(\tilde{U}_{Z_1, Z_2} \cap \tilde{U}_{Z_1, Z_3}) = \tilde{U}_{Z_2, Z_1} \cap \tilde{U}_{Z_2, Z_3}$ ,
- $(\vartheta_{Z_1, Z_3})|_{\tilde{U}_{Z_1, Z_2} \cap \tilde{U}_{Z_1, Z_3}} = (\vartheta_{Z_2, Z_3} \circ \vartheta_{Z_1, Z_2})|_{\tilde{U}_{Z_1, Z_2} \cap \tilde{U}_{Z_1, Z_3}}$ .

On peut donc recoller les  $\tilde{U}_Z$  le long des isomorphismes  $\vartheta_{Z_1, Z_2}$ , pour tous  $Z, Z_1, Z_2 \in \mathcal{S}$  (lemme de recollement, [18] page 80). Notons  $\tilde{X}$  la variété ainsi obtenue et notons  $\psi_Z$  l'immersion ouverte de  $\tilde{U}_Z$  dans  $\tilde{X}$ .

2. Montrons que  $\tilde{X}$  est munie d'une action de  $G$ .

Soient  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  et  $g \in G$ . Alors il existe un  $Z \in \mathcal{S}$  et un  $x \in Z$  tels que  $\tilde{x} = \psi_Z(x)$ . On pose

$$g(\tilde{x}) := \psi_{g(Z)}(g(x)) \quad ,$$

où  $g(x)$  est l'image de  $x$  dans  $\tilde{U}_{g(Z)}$  par l'isomorphisme de  $\tilde{U}_Z$  dans  $\tilde{U}_{g(Z)}$  induit par  $g : U_Z \longrightarrow U_{g(Z)}$ .

Supposons qu'il y ait un autre représentant  $x' \in \tilde{U}_{Z'}$  tel que  $\tilde{x} = \psi_{Z'}(x')$ . Alors on a  $x' = \vartheta_{Z, Z'}(x)$  et par suite  $g(x') = \vartheta_{g(Z), g(Z')} (g(x))$ . Donc on obtient

$$\psi_{g(Z')} (g(x')) = \psi_{g(Z)} (g(x)) \quad .$$

Ceci montre que le morphisme  $g : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  est bien défini. Par conséquent  $\tilde{X}$  est munie d'une action de  $G$ . Le même argument montre aussi que le morphisme canonique de  $\tilde{X}$  dans  $X$ , induit par les morphismes  $\tilde{\varphi}_Z : \tilde{U}_Z \rightarrow U_Z$ , est équivariant par rapport à  $G$ .

3. Montrons que  $\tilde{X}/G$  est une désingularisation de  $X/G$ .

Fixons d'abord quelques notations. Soit  $V$  une variété algébrique. On peut considérer  $V$  comme une variété analytique complexe et on note  $\mathcal{H}_{V,x}$  l'anneau des fonctions holomorphes en  $x$ , pour tout point  $x \in V$ . Le complété de  $\mathcal{O}_{V,x}$  est égal au complété de  $\mathcal{H}_{V,x}$ , i.e.  $\hat{\mathcal{O}}_{V,x} = \hat{\mathcal{H}}_{V,x}$  ([37] Proposition 3). Puisque  $\mathcal{O}_{V,x}$  (resp.  $\mathcal{H}_{V,x}$ ) est régulier si et seulement si  $\hat{\mathcal{O}}_{V,x}$  (resp.  $\hat{\mathcal{H}}_{V,x}$ ) est régulier ([39] page 107, Proposition 24), on en déduit

$$(*) \quad \mathcal{O}_{V,x} \text{ est régulier} \iff \mathcal{H}_{V,x} \text{ est régulier.}$$

Puisque le morphisme  $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow X'$  est propre et birationnel, équivariant par rapport à  $G$ , on déduit que le morphisme  $\tilde{\varphi} : \tilde{X}/G \rightarrow X'/G$  est aussi propre et birationnel.

(a) Montrons que  $\tilde{X}/G$  est lisse.

Soit  $\bar{x}$  un point de  $\tilde{X}/G$  et prenons un point  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  tel que  $\bar{x}$  soit l'image de  $\tilde{x}$ . On a ([7])

$$(**) \quad \mathcal{H}_{\tilde{X}/G, \bar{x}} \simeq (\mathcal{H}_{\tilde{X}, \tilde{x}})/G_{\tilde{x}} \quad ,$$

où  $G_{\tilde{x}}$  est le groupe d'isotropie de  $\tilde{x}$ . Soit  $x' = \tilde{\varphi}(\tilde{x})$ ,  $x'$  est un point de  $X'$ . Il existe une unique strate  $Z \in \mathcal{S}$  telle que  $x' \in Z$ . On en déduit que  $\tilde{U}_Z$  (resp.  $U_Z$ ) est un voisinage ouvert de  $\tilde{x}$  (resp. de  $x'$ ). Comme le morphisme

$$\tilde{\varphi}_Z : \tilde{U}_Z \rightarrow U_Z$$

est équivariant par rapport à  $G_0(Z)$  et que  $G_0(Z) = G_{x'}$  (lemme 2.5), on obtient

$$(\mathcal{H}_{\tilde{U}_Z, \tilde{x}})/G_{\tilde{x}} \simeq \mathcal{H}_{(\tilde{U}_Z/G_0(Z)), \bar{x}_Z} \quad ,$$

où  $\bar{x}_Z$  est l'image de  $\tilde{x}$  dans  $\tilde{U}_Z/G_0(Z)$ . Or  $\tilde{U}_Z/G_0(Z)$  est une désingularisation de  $U_Z/G_0(Z)$  (Proposition 4.10), donc  $\mathcal{O}_{(\tilde{U}_Z/G_0(Z)), \bar{x}_Z}$  est régulier. Le (\*) implique alors que  $\mathcal{H}_{(\tilde{U}_Z/G_0(Z)), \bar{x}_Z}$  est régulier, et par suite  $\mathcal{H}_{\tilde{X}/G, \bar{x}}$ , qui est isomorphe à  $(\mathcal{H}_{\tilde{X}, \tilde{x}})/G_{\tilde{x}} = (\mathcal{H}_{\tilde{U}_Z, \tilde{x}})/G_{\tilde{x}}$ , est régulier. En appliquant encore une fois le (\*), on en déduit que  $\mathcal{O}_{\tilde{X}/G, \bar{x}}$  est un anneau local régulier.

Puisque  $\bar{x}$  est un point quelconque de  $\tilde{X}/G$ , on en conclut que  $\tilde{X}/G$  est lisse.

(b) Montrons que les diviseurs exceptionnels dans  $\widetilde{X}/G$  sont tous contractés dans le lieu singulier de  $X'/G$ , et donc contractés dans le lieu singulier de  $X/G$ .

Ceci est presque évident. D'abord le morphisme canonique de  $X'/G$  dans  $X/G$  induit un isomorphisme sur l'image inverse de  $(X/G) \setminus \text{Sing}(X/G)$  (Remarque 1.14). Ensuite les constructions locales des  $\widetilde{U}_Z$ , avec  $Z \in \mathcal{S}$ , montrent que  $\widetilde{X}/G$  est une désingularisation de  $X'/G$ . Donc  $\bar{\psi} : \widetilde{X}/G \rightarrow X/G$  induit un isomorphisme sur l'image inverse de  $(X/G) \setminus \text{Sing}(X/G)$ .

□

**Définition 4.11** Soit  $\{x_1, \dots, x_n\}$  une base de  $X := \mathbb{C}^n$ . Un éclatement avec poids  $(d_1, \dots, d_n)$ ,  $d_i \geq 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ , de  $X$  est l'éclatement normalisé de l'idéal monômial  $\{x_1^{m/d_1}, \dots, x_n^{m/d_n}\}$ , avec  $m := \text{p.p.c.m.}(d_1, \dots, d_n)$ .

**Définition 4.12** Soient  $K(X)$  le corps de fonctions rationnelles sur  $X := \mathbb{C}^n$  et  $\{x_1, \dots, x_n\}$  un système de paramètres tel que  $K(X) = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ . Une valuation discrète monômiale  $\nu$  de  $K(X)$  est une valuation <sup>4</sup> de  $K(X)$  définie par

$$\nu\left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m_0} c_\alpha x^\alpha\right) = \min_{c_\alpha \neq 0} \{\nu_1 \alpha_1 + \dots + \nu_n \alpha_n\}$$

pour tous  $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$  et  $c_\alpha \in \mathbb{C}$ , où  $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  sont fixés et où  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

**Théorème 4.13** Tout diviseur exceptionnel irréductible dans  $\widetilde{X}/G$  est l'image de diviseurs exceptionnels dans  $\widetilde{X}$ . Tous diviseurs exceptionnels irréductibles dans  $\widetilde{X}$  proviennent à un isomorphisme birationnel près, d'un éclatement avec poids de l'espace affine  $X = \mathbb{C}^n$ . Ou de façon équivalente tout diviseur exceptionnel irréductible dans  $\widetilde{X}$  correspond à une valuation discrète monômiale de  $K(X)$ , avec  $K(X)$  le corps de fonctions rationnelles sur  $X$ .

*Démonstration.* Il est clair que tout diviseur exceptionnel dans  $\widetilde{X}/G$  est l'image d'un diviseur exceptionnel dans  $\widetilde{X}$ , car le morphisme canonique de  $\widetilde{X}$  dans  $\widetilde{X}/G$  est un morphisme fini.

D'après le théorème 4.1, la famille  $\{\widetilde{U}_Z\}_{Z \in \mathcal{S}}$  est un recouvrement de  $\widetilde{X}$ . Pour chaque diviseur exceptionnel  $E$  dans  $\widetilde{X}$ , il existe donc au moins un ouvert  $\widetilde{U}_Z$  tel que le point générique de  $E$  soit contenu dans  $\widetilde{U}_Z$ . Or  $\widetilde{U}_Z$  est isomorphe à un ouvert dense de la variété torique  $V_{\widetilde{\Sigma}_Z, N}$ , ceci implique que l'image de  $E \cap \widetilde{U}_Z$  est un ouvert dense d'un diviseur exceptionnel du morphisme de  $V_{\widetilde{\Sigma}_Z, N}$  dans  $X$ . Puisque tout diviseur exceptionnel dans  $V_{\widetilde{\Sigma}_Z, N}$  correspond de façon unique à une arête dans  $\widetilde{\Sigma}_Z$ , donc à isomorphisme birationnel près provient d'un éclatement avec poids de l'espace affine  $X := \mathbb{C}^n$ . D'où le résultat.

□

---

<sup>4</sup>pour valuation discrète voir [43] chapitre VI.





## 5 Singularités quotient d'un sous-groupe fini de $GL(3, \mathbb{C})$ ou de $SL(3, \mathbb{C})$ .

Dans ce chapitre, on considère des singularités quotient de dimension 3. D'abord on applique la méthode générale (montrée dans les quatre premiers chapitres) pour construire des désingularisations de  $\mathbb{C}^3/G$ , avec  $G$  un sous-groupe fini de  $GL(3, \mathbb{C})$ . Ensuite, dans le deuxième paragraphe on construit, pour une famille de sous-groupes finis de  $SL(3, \mathbb{C})$ , des résolutions crépantes et on vérifie des assertions de M.Reid et Y.Ito.

### 5.1 Résolutions des singularités quotient d'un sous-groupe fini de $GL(3, \mathbb{C})$ .

Soit  $G \subset GL(3, \mathbb{C})$  un sous-groupe fini et petit. On dit que  $G$  est réductible s'il existe un sous-espace  $V$  de  $\mathbb{C}^3$  stable par  $G$ , avec  $V$  différent de  $\{0\}$  et de  $\mathbb{C}^3$ . Si  $G$  n'est pas réductible, on dit que  $G$  est irréductible. Notons  $C(G)$  le centre de  $G$  et posons  $X := \mathbb{C}^3$ .

Pour désingulariser  $\mathbb{C}^3/G$ , dans le cas où  $G$  est abélien, on peut utiliser des éventails et construire des  $\mathcal{G}$ -désingularisations [5], ici  $\mathcal{G}$  désigne le système minimal de générateurs d'un semi-groupe qui définit une variété torique. Quand  $G$  est non abélien, des modèles équivariants abéliens  $X'$  ont été construits dans ([32]), où le quotient  $X'/G$  est appelé modèle à singularités toriques simpliciales de  $X/G$ .

Dans ce paragraphe, nous construisons des désingularisations de ces singularités quotients et surtout des modèles équivariants dont les quotients donnent des désingularisations voulues. Ces constructions seront utilisées dans le paragraphe suivant.

**1<sup>er</sup> Cas:  $G$  réductible (non abélien).**

Il existe dans  $X$  un unique plan  $D$  et une unique droite  $L$  stables par  $G$  tels que  $X = L \times D$ . Choisissons une base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $X$  telle que  $L = \langle e_1 \rangle$ ,  $D = \langle e_2, e_3 \rangle$ . Soient  $\varphi : X' \rightarrow X$  l'éclatement de  $X$  de centre  $L$  et  $D'$  la transformée stricte de  $D$ . Alors  $D'$  est isomorphe à l'éclatement de  $D$  de centre l'origine et  $X' = L \times D'$ . On a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ \varphi^{-1}(D) =: D' & \xrightarrow{\varphi|_{D'}} & D \end{array}$$

où  $p$  et  $p'$  sont des projections. Notons  $E$  le diviseur exceptionnel de  $\varphi$  et posons  $P^1 := \varphi^{-1}(\{0\})$ . Alors  $D'$  (resp.  $X'$ ) est un fibré en droites (resp. fibré vectoriel de rang 2) sur

$P^1$  et  $E \simeq L \times P^1$ . D'après le théorème 1.13,  $X'$  est un modèle équivariant abélien. Plus précisément on a

**Lemme 5.1**

- (1) *Il existe un sous-ensemble fini  $I \subset P^1$  tel que  $G_x$  soit un sous-groupe abélien maximal de  $G$  pour tout  $x \in I$ , et tel que  $G_x = C(G)$  pour tout  $x \in P^1 \setminus I$ .*
- (2) *Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux points différents de  $I$ . Alors soit  $G_{x_1} = G_{x_2}$ , soit  $G_{x_1} \cap G_{x_2} = C(G)$ .*

*Démonstration.*

- (1) Pour tout  $g \in C(G)$ , la restriction de  $g$  sur  $D$  est une homothétie. Donc  $P^1$  est fixe par  $C(G)$ , i.e.  $G_x \supseteq C(G)$  pour tout  $x \in P^1$ . Prenons un  $x \in P^1$  tel que  $G_x \neq C(G)$ . Chaque  $g \in G_x \setminus C(G)$  a exactement deux points fixes dans  $P^1$ , notés  $x$  et  $x'$ . Tout élément  $g' \in G$  qui commute avec  $g$  fixe  $x$  et  $x'$ . Ceci montre que  $G_x$  est un sous-groupe abélien maximal de  $G$ .

Inversement tout sous-groupe abélien maximal de  $G$  contient strictement  $C(G)$ , et donc n'a que deux points fixes dans  $P^1$ . Puisque  $G$  n'a qu'un nombre fini de sous-groupes abéliens maximaux, alors  $I$  est un ensemble fini.

- (2) Supposons que  $x_1$  et  $x_2$  soient deux points différents de  $I$  et que  $G_{x_1} \neq G_{x_2}$ . Alors  $G_{x_1}$  (resp.  $G_{x_2}$ ) a deux points fixes  $x_1$  et  $x'_1$  (resp.  $x_2$  et  $x'_2$ ) dans  $P^1$ . Chaque  $g \in (G_{x_1} \cap G_{x_2})$  fixe ces quatre points distincts, donc fixe  $P^1$  tout entier. Par conséquent  $g \in C(G)$ .

□

**Notations 5.2** *Posons  $G_0 := \{g \in G \mid g|_L \text{ soit l'identité}\}$ , c'est un sous-groupe distingué de  $G$ . Si  $G_0 \not\subseteq C(G)$ , on note  $J$  le sous-ensemble de  $I$  constitué des points de  $P^1$  fixes par un sous-groupe abélien maximal de  $G_0$ . Si  $G_0 \subseteq C(G)$ , on pose  $J = \emptyset$ . Notons  $\Lambda$  l'ensemble des droites dans  $D$  fixes par un élément de  $G \setminus \{e\}$ .*

On a le lemme suivant, qui résulte directement de la définition de  $\mathcal{S}$  (paragraphe 2.1).

**Lemme 5.3** *La stratification  $\mathcal{S}$  de  $X'$  est de la forme suivante,*

- *l'unique strate de dimension 3, est le complémentaire de la réunion du diviseur exceptionnel  $E$  et des transformées strictes des droites dans  $\Lambda$ .*
- *l'unique strate de dimension 2, est celle dont l'adhérence est le diviseur exceptionnel  $E$ ,*
- *les transformées strictes des droites dans  $\Lambda$ , et les fibres au-dessus des  $x \in J$ , qui sont les adhérences des strates de dimension 1; si  $C(G) \not\subseteq G_0$ ,  $P^1 = \varphi^{-1}(\{0\})$  est aussi l'adhérence d'une strate de dimension 1, notée  $Z_0$ ;*

- les points  $x$ , avec  $x \in I$ , sont des strates de dimension 0.

Pour chaque strate  $Z$ , la réunion  $U_Z := \bigcup_{\substack{Z' \in \mathcal{S} \\ Z \subset \overline{Z'}}} Z'$  est un voisinage ouvert de  $Z$ . Si on choisit un tore maximal  $T$  contenant  $G_x = G_0(Z)$  avec  $x \in Z$ , et considère  $X'$  comme une variété torique par rapport à  $T$ , alors  $Z$  (resp. toute strate  $Z'$  avec  $Z \subset \overline{Z'}$ ), est un ouvert dense de l'adhérence d'une orbite du tore.

Dans  $X'/G$ , l'image d'un point de la strate de dimension 3 (resp. de dimension 2) est un point lisse. Supposons que  $C(G) \not\subseteq G_0$ , et considérons la strate  $Z_0$ , avec  $\overline{Z_0} = P^1$ . Tout point de  $Z_0$  a le même groupe d'isotropie  $C(G)$ . Soit  $T$  le tore associé à la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Notons  $N$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang 3 déterminé par  $T$ , et  $\{v_1, v_2, v_3\}$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $N$ . On définit  $N^1$ , le sur-réseau de  $N$ , par

$$N^1 := N + \sum_{g \in C(G)} \mathbb{Z} \cdot \lambda_g \quad ,$$

où  $\lambda_g := (\lambda_1(g), \lambda_2(g), \lambda_3(g)) \in [0, 1]^3$ , tel que  $(\exp(2i\pi\lambda_1(g)), \exp(2i\pi\lambda_2(g)), \exp(2i\pi\lambda_3(g)))$  soit l'image canonique de  $g$  dans  $T$ .

Soit  $C$  le cône régulier dans  $N_{\mathbb{R}}$ , engendré par  $\{v_1, v_2, v_3\}$ . Posons  $v := v_2 + v_3$ . Notons  $\Sigma_0$  l'éventail représentant  $X'$ ,  $\Sigma_0$  est la subdivision élémentaire du cône  $C$  de centre  $v$ . L'adhérence de  $Z_0$  dans  $X' = V_{\Sigma_0, N}$  est  $\overline{O}_{\sigma_0}$ , avec  $\sigma_0$  le cône engendré par  $v_1$  et  $v$ . Pour tout  $g \in C(G)$ ,  $g|_D$  est une homothétie. Ceci implique que  $\lambda_2(g) = \lambda_3(g)$ , et par suite  $\lambda_g \in \sigma_0$ . Soient  $\Pi_0$  la subdivision régulière minimale de  $\sigma_0$  par rapport au réseau  $N^1$ , et  $\Sigma_{\Pi_0}$  la subdivision de  $\Sigma_0$  induite par  $\Pi_0$ . Notons  $\tilde{U}_Z$  l'image inverse de  $U_Z$  dans  $V_{\Sigma_{\Pi_0}, N}$ ,  $\tilde{U}_Z/C(G)$  est une désingularisation de  $U_Z/C(G)$ , équivariante par rapport à  $G$ . On remarque que cette modification ne dépend pas du choix de la base  $\{e_2, e_3\}$  du plan  $D$ .

Chaque strate  $Z$  de dimension 1, avec  $Z \not\subseteq P^1$ , ne contient qu'un seul point  $x \in I$ . On peut donc construire une modification  $\tilde{U}_x$  de l'ouvert  $U_x$  directement, où  $U_x := \bigcup_{Z \in \mathcal{S}, x \in \overline{Z}} Z$ .

Puisque la construction de  $\tilde{U}_{Z_0}$  ne dépend pas du choix de la base de  $D$ , on peut supposer que dans la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , les éléments de  $G_x$  soient diagonaux. Soient  $T, N, \Sigma_0$  et  $\Pi_0$  définis comme précédemment. Le point  $x$  est une orbite du tore  $T$  et correspond à l'un des deux cônes de dimension 3 dans  $\Sigma_0$ , noté  $\tau_x$ . On définit le sur-réseau  $N_x^1$  par

$$N_x^1 := N^1 + \sum_{g \in G_x} \mathbb{Z} \cdot \lambda_g \quad ,$$

avec  $\lambda_g := (\lambda_1(g), \lambda_2(g), \lambda_3(g)) \in [0, 1]^3$ , tel que  $(\exp(2i\pi\lambda_1(g)), \exp(2i\pi\lambda_2(g)), \exp(2i\pi\lambda_3(g)))$  soit l'image canonique de  $g$  dans  $T$ . Puisque  $\lambda_g \in \sigma_0$  si et seulement si  $g \in C(G)$ , on en déduit que

$$N_x^1 \cap \sigma_0 = N^1 \cap \sigma_0 \quad .$$

Par conséquent la subdivision  $\Pi_0$  du cône  $\sigma_0$  est aussi régulière par rapport à  $N_x^1$ . On peut trouver une  $\mathcal{G}$ -subdivision  $\Pi_x$  de  $\tau_x$  (par rapport au réseau  $N_x^1$ ), i.e.  $\Pi_x$  est régulière par

rapport à  $N_x^1$  et chaque arrête de  $\Pi_x$  porte un élément du système minimal de générateurs de  $\tau_x \cap N_x^1$ . Notons  $\Sigma_x$  la subdivision de  $\Sigma_0$  induite par  $\Pi_x$ , on a

$$(*) \quad (\Sigma_x)|_{\sigma_0} = \Pi_0 \quad .$$

Soit  $\tilde{\varphi}_x$  le morphisme canonique de  $V_{\Sigma_x, N}$  dans  $X' = V_{\Sigma_0, N}$ , et posons  $\tilde{U}_x := \tilde{\varphi}_x^{-1}(U_x)$ . La condition (\*) implique que  $\tilde{U}_{Z_0} \simeq \tilde{\varphi}_{x_0}^{-1}(U_{Z_0})$ , et donc  $\tilde{U}_{Z_0}$  et  $\tilde{U}_x$  peuvent se recoller.

Supposons que  $x_1, x_2 \in I$ , et que  $g \in G$  tels que  $x_2 = g(x_1)$ . On a  $G_{x_2} = g \circ G_{x_1} \circ g^{-1}$ . On peut subdiviser le cône  $\tau_{x_2}$  de même manière que  $\tau_{x_1}$  et obtenir le diagramme commutatif suivant.

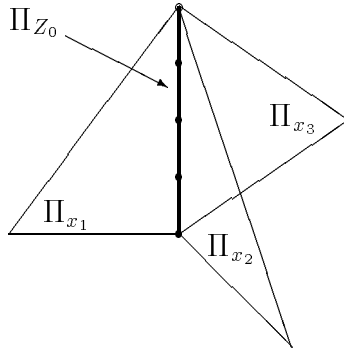
$$\begin{array}{ccc} V_{\Sigma_{x_1}, N} & \xrightarrow{\tilde{g}} & V_{\Sigma_{x_2}, N} \\ \downarrow \tilde{\varphi}_{x_1} & & \downarrow \tilde{\varphi}_{x_2} \\ X' & \xrightarrow{g} & X' \end{array}$$

Notons  $\tilde{X}$  le recollement de  $\tilde{U}_{Z_0}$  et des  $\tilde{U}_x$ , avec  $x \in I$ . On a la proposition suivante. La démonstration est la même que celle du théorème 4.1, on l'a omise.

**Proposition 5.4** *La variété  $\tilde{X}$  est munie d'une action de  $G$  et le morphisme canonique  $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow X'$  est un  $G$ -morphisme propre et birationnel. De plus  $\tilde{X}/G$  est une désingularisation de  $X/G$ .*

Notons  $\bar{\psi}$  le morphisme canonique de  $\tilde{X}/G$  dans  $X/G$ . Alors pour les diviseurs exceptionnels de  $\bar{\psi}$  on a la description suivante.

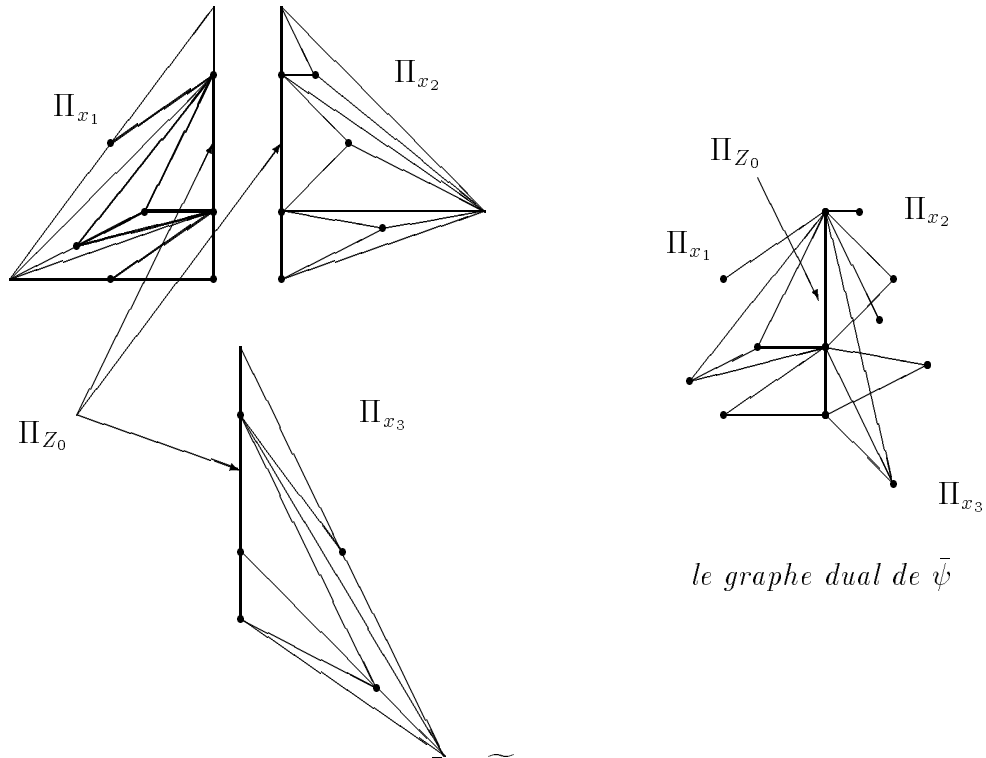
**Corollaire 5.5** *Les points de  $I$  forment trois orbites, appelées orbites spéciales ou exceptionnelles [6]. Soient  $x_1, x_2$  et  $x_3$  trois représentants. Alors les diviseurs exceptionnels de  $\bar{\psi}$  peuvent être représentés par le graphe dual suivant.*



**Exemple 5.6** *Considérons le groupe  $G \subset GL(3, \mathbb{C})$  engendré par*

$$a_1 = \begin{pmatrix} \omega & & \\ & \omega & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \omega & & \\ & 1 & \\ & & \omega \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $\omega := \exp(2i\pi/3)$ . On peut vérifier que  $G$  est petit et d'ordre 18. Les notations sont comme précédemment, alors il y a trois orbites spéciales dans  $P^1$  dont trois représentants sont: un point fixe de  $H := \langle a_1, a_2 \rangle$ , noté  $x_1$ ; les deux points fixes de  $\langle C(G), b \rangle$ , notés respectivement  $x_2$  et  $x_3$ . Une des  $\tilde{X}$  peut être construite de la façon suivante:



Dans le graphe dual du morphisme  $\psi : \tilde{X}/G \rightarrow X/G$ , chaque sommet représente un diviseur exceptionnel irréductible. Chaque arête qui relie deux sommets distincts représente une courbe irréductible qui est l'intersection des deux diviseurs exceptionnels correspondant aux deux sommets. Et chaque triangle formé par trois sommets et trois arêtes représente l'unique point d'intersection des trois diviseurs exceptionnels correspondant.

**Remarque 5.7** *Pour chaque strate  $Z$  de dimension 1, avec  $Z \subset D'$ , il existe un unique  $x \in I$  tel que  $x = \overline{Z} \cap E$ . Notons  $\tau_Z$  le cône dans  $\Sigma_0$  tel que  $Z$  soit un ouvert de l'adhérence de  $O_{\tau_Z}$ . Alors  $\tau_Z < \tau_x$ , i.e.  $\tau_Z$  est une face propre de  $\tau_x$ . Puisque  $\Pi_x$  est une  $\mathcal{G}$ -subdivision de  $\tau_x$  par rapport à  $N_x^1$ , on en déduit que  $\Pi_Z := (\Pi_x)_{\tau_Z}$  est l'unique subdivision minimale de  $\tau_Z$  avec  $V_{\Pi_Z, N}/G_0(Z)$  lisse.*

2<sup>ème</sup> Cas:  $G$  irréductible.

Soit  $\varphi_0 : X_1 \rightarrow X$  l'éclatement de  $X$  de centre l'origine. Notons  $E_0$  le diviseur exceptionnel de  $\varphi_0$ ,  $E_0$  est isomorphe au plan projectif  $\mathbb{P}^2$  et  $X_1$  est un fibré en droites sur  $E_0$ . Pour tout  $x \in E_0$ , notons  $l_x$  la fibre sur  $x$ . Pour tout sous-groupe  $H \subset G$ , on définit  $W^H$  comme l'ensemble des points fixes de  $H$  dans  $X_1$ . Puisque  $G$  est un groupe irréductible, aucun point de  $E_0$  n'est fixe par  $G$  tout entier. Le groupe d'isotropie de tout point de  $X_1$  stabilise la fibre passant par ce point, donc est un sous-groupe réductible de  $G$ .

Soient  $P_1, \dots, P_j$  les droites projectives dans  $E_0$  fixes par un élément de  $G \setminus C(G)$ . Définissons les deux sous-ensembles  $R_1$  et  $R'$  de  $E_0$  par

$$R_1 := \{x \in E_0 \mid G_x \text{ abélien, } x \text{ est un point isolé de } W^{G_x} \cap E_0\},$$

$$R' := \{x \in E_0 \mid G_x \text{ non abélien}\} \quad ,$$

et posons  $R := R' \cup R_1$ . Supposons que  $R' \neq \emptyset$  et définissons  $\varphi_1 : X' \rightarrow X_1$  comme l'éclatement de  $X_1$  de centre la réunion disjointe des fibres  $l_x$ , avec  $x \in R'$ . Notons  $E'_0$  la transformée stricte de  $E_0$ , alors  $X'$  peut être considérée comme un fibré en droites sur  $E'_0$ . D'après le théorème 1.13,  $X'$  est un modèle équivariant abélien. Si  $R' = \emptyset$ , le groupe d'isotropie de tout point de  $X_1$  est abélien. Dans ce cas on pose  $X' := X_1$ . On définit la stratification  $\mathcal{S}$  de  $X'$  de même manière que dans le paragraphe 2.1, alors on a

**Lemme 5.8**

- (1) Toute strate de dimension 0 est un point de  $E'_0$ .
- (2) Soit  $Z$  une strate de dimension 1 avec  $Z \subset E'_0$ . Alors  $\overline{Z}$  est isomorphe à une droite projective. Vues comme des sous-variétés de  $E'_0$ , les  $\overline{Z}$  sont à croisements normaux, pour toute strate  $Z$  de dimension 1 contenue dans  $E'_0$ .

*Démonstration.*

- (1) On a vu que  $X'$  est un fibré en droites sur  $E'_0$  et que l'action de  $G$  sur  $X'$  conserve la structure du fibré. De plus la restriction sur chaque fibre de l'action de  $G$  est linéaire. Donc si un point  $x \notin E'_0$  est fixe par un  $g \in G$ , alors tout point de la fibre  $l_x$  est aussi fixe par  $g$ . D'autre part s'il existe un diviseur exceptionnel irréductible  $E$  passant par  $x$ ,  $E$  doit contenir  $l_x$ . Ceci implique que  $x$  n'est pas une strate, et par suite toute strate de dimension 0 est contenue dans  $E'_0$ .
- (2) Prenons une strate  $Z \in \mathcal{S}$  de dimension 1, avec  $Z \subset E'_0$ . Son adhérence  $\overline{Z}$  est: soit la transformée stricte d'une  $P_k \subset E_0$  avec  $1 \leq k \leq j$ ; soit l'intersection de  $E'_0$  avec un autre diviseur exceptionnel irréductible. Dans les deux cas,  $\overline{Z}$  est une courbe projective rationnelle. D'autre part  $E'_0$  est une surface lisse,  $\overline{Z}$  est une composante de l'ensemble

de points fixes de  $G_0(Z)$ , est donc lisse. Par conséquent  $\overline{Z}$  est isomorphe à la droite projective  $\mathbb{P}^1$ . Comme le groupe d'isotropie de chaque point  $x \in E'_0$  est abélien, il existe au plus deux droites projectives passant par  $x$  qui sont contenues dans  $E'_0$  et fixes par un  $g \in G \setminus C(G)$ . Dans ce cas elles sont transversales en  $x$ . On en déduit que les  $\overline{Z}$ , avec  $Z \in \mathcal{S}_1$  et  $Z \subset E'_0$  sont à croisements normaux dans  $E'_0$ .

□

Pour chaque strate  $Z$  dans  $\mathcal{S}$ , on définit comme précédemment  $U_Z := \bigcup_{\substack{Z' \in \mathcal{S} \\ Z \subset Z'}} Z'$ . Chaque  $U_Z$

est isomorphe à un ouvert dense de la variété torique  $Y_Z := \text{Bl}_{\mathcal{D}_Z} X$  dont le tore  $T$  contient  $G_0(Z)$  comme un sous-groupe fini (théorème 2.8). On peut associer à  $Y_Z$  un éventail  $\Sigma_Z$ , i.e.  $Y_Z = V_{\Sigma_Z, N}$ , dans lequel il existe un unique cône  $\tau_Z$  tel que l'image de  $Z$  soit un ouvert dense de  $\overline{O_{\tau_Z}}$ . Ici  $N$  est le  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang 3 déterminé par  $T$ .

Pour des strates  $Z \in \mathcal{S}$  de dimension plus grande ou égale à 2, l'image de tout point  $x \in Z$  est un point lisse de  $X'/G$ . On pose  $\tilde{U}_Z := U_Z$ .

Si  $Z$  est de dimension 1, il existe une unique subdivision minimale  $\Pi_Z$  de  $\tau_Z$  telle que  $V_{\Pi_Z, N}/G_0(Z)$  soit lisse. Notons  $\tilde{\Sigma}_Z$  la subdivision de  $\Sigma_Z$  induite par  $\Pi_Z$  et prenons l'image inverse  $\tilde{U}_Z$  de  $U_Z$  dans  $\tilde{Y}_Z$  comme la modification torique de  $U_Z$ , où  $\tilde{Y}_Z := V_{\tilde{\Sigma}_Z, N}$ . On remarque que ces modifications pour des strates de dimension 1 sont automatiquement compatibles avec l'action du groupe  $G$ . En effet elles peuvent être obtenues par une suite d'éclatements et de contractions  $G$ -équivariants.

Si  $Z = \{x\}$  est de dimension 0, alors  $\tau_x$  est un cône de dimension 3 dans  $\Sigma_x$ . On pose

$$N_x^1 := N + \sum_{g \in G_x} \mathbb{Z} \cdot \lambda_g \quad ,$$

où  $\lambda_g := (\lambda_1(g), \lambda_2(g), \lambda_3(g)) \in [0, 1]^3$  tel que  $(\exp(2i\pi\lambda_1(g)), \exp(2i\pi\lambda_2(g)), \exp(i\pi\lambda_3(g)))$  soit l'image canonique de  $g$  dans  $T$ . On construit une  $\mathcal{G}$ -subdivision  $\Pi_x$  de  $\tau_x$  par rapport au réseau  $N_x^1$ , et on note  $\tilde{\Sigma}_x$  la subdivision de  $\Sigma_x$  induite par  $\Pi_x$ . Posons  $\tilde{U}_x$  l'image inverse de  $U_x$  dans  $V_{\tilde{\Sigma}_x, N}$ . On demande de plus que ces constructions soient compatibles avec l'action de  $G$ . Si  $Z'$  est une strate de dimension 1 telle que  $x \in Z'$ , le cône  $\tau_Z$  est une face propre de  $\tau_x$ . La condition que  $\Pi_x$  soit une  $\mathcal{G}$ -subdivision (par rapport à  $N_x^1$ ) implique que la restriction de  $\Pi_x$  sur  $\tau_Z$ , notée  $(\Pi_x)|_{\tau_Z}$ , est égale à  $\Pi_Z$ . Car  $N_x^1 \cap \tau_Z = N_Z^1 \cap \tau_Z$ .

On en déduit que les  $\{\tilde{U}_Z\}_{Z \in \mathcal{S}}$  peuvent se recoller et donner une  $G$ -variété  $\tilde{X}$ . Avec même argument que dans la démonstration du théorème 4.1, on conclut que  $\tilde{X}/G$  est une désingularisation de  $X/G$ .

**Exemple 5.9** *Considérons le groupe  $G \subset GL(3, \mathbb{C})$  engendré par*

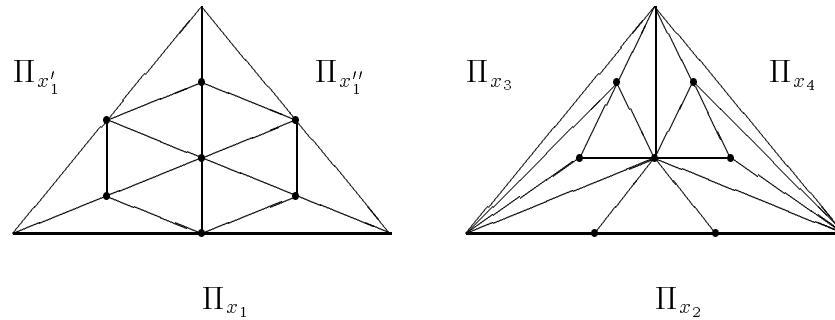
$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



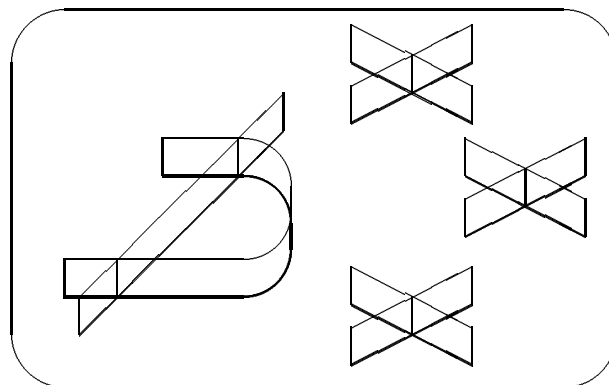
avec  $\lambda := \exp(2i\pi/5)$ . On peut vérifier que  $G$  est d'ordre 60, irréductible et petit. Le groupe  $H := \langle a_1, a_2, ba_1b^{-1} \rangle$  est un sous-groupe abélien distingué de  $G$ , avec  $[G : H] = 3$ . Il y a quatre autres sous-groupes abéliens maximaux qui sont tous conjugués:  $A := \langle a_2, b \rangle$ ,  $a_1Aa_1$ ,  $a'_1Aa'_1$  et  $a''_1Aa''_1$ , avec  $a'_1 := ba_1b^{-1}$  et  $a''_1 := b^{-1}a_1b$ .

L'éclatement  $X_1$  de  $X := \mathbb{C}^3$  de centre  $\{0\}$  est déjà un modèle équivariant abélien. Dans la stratification  $\mathcal{S}$  de  $X_1$ , il y a 15 strates de dimension 0 qui sont des points du diviseur exceptionnel  $E_0$  dont le groupe d'isotropie est un sous-groupe abélien maximal de  $G$ . Ils forment 4 orbites, dont 4 représentants sont:  $x_1 := [1, 0, 0]$ ,  $x_2 := [1, 1, 1]$ ,  $x_3 := [1, \omega, \omega^2]$  et  $x_4 := [1, \omega^2, \omega]$  avec  $\omega := \exp(2i\pi/3)$ . On a  $G_{x_1} = H$  et  $G_{x_2} = G_{x_3} = G_{x_4} = A$ .

Les strates de dimension 1 sont: trois droites projectives dans  $E_0$ ; 7 fibres qui forment deux classes, dont des représentants sont  $l_{x_1}$  et  $l_{x_2}$ . On construit des modifications locales de la façon suivante, où on pose  $x'_1 := [0, 1, 0]$  et  $x''_1 := [0, 0, 1]$ :



Les positions ensemblistes des diviseurs exceptionnels du morphisme  $\bar{\psi} : \widetilde{X}/G \rightarrow X/G$  peuvent être représentées par le dessin suivant:



## 5.2 Singularités quotient d'un sous-groupe fini de $SL(3, \mathbb{C})$ et résolutions crépantes.

Soient  $G \subset SL(3, \mathbb{C})$  un sous-groupe fini. Pour chaque  $g \in G$ , soient  $\{\lambda_1(g), \lambda_2(g), \lambda_3(g)\}$  l'ensemble des trois valeurs propres de  $g$ . Il existe  $a_1(g), a_2(g), a_3(g) \in [0, 1[$ , tels que  $\lambda_i(g) = \exp(2i\pi a_i(g))$  avec  $1 \leq i \leq 3$ ,  $g$  est dit junior si  $a_1(g) + a_2(g) + a_3(g) = 1$ . On remarque que cette somme est un entier positif pour tout  $g \in G \setminus \{e\}$  et vaut 0 si  $g = e$ .

Soient  $X := \mathbb{C}^3$  et  $Y := X/G$ . Une résolution crépante  $f : \tilde{Y} \rightarrow Y$  est une désingularisation de  $Y$ , avec  $K_{\tilde{Y}} = f^*(K_Y) = 0$ , où  $K_*$  désigne le faisceau canonique. Dans [22], on a montré (théorème 1.4) que pour toute résolution crépante, il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des diviseurs exceptionnels de  $f$  et l'ensemble des classes de conjugaisons des éléments juniors dans  $G$ , et que les diviseurs crépants apparaissent dans toute désingularisation de  $\mathbb{C}^3/G$ . On en déduit le lemme suivant.

**Lemme 5.10** *Soit  $G \subset SL(3, \mathbb{C})$  un sous-groupe fini. Alors dans toute désingularisation de  $\mathbb{C}^3/G$ , le nombre de diviseurs exceptionnels irréductibles est plus grand ou égal au nombre de classes juniors. L'égalité a lieu si et seulement si c'est une résolution crépante.*

Si  $G$  est abélien, alors  $Y = \mathbb{C}^3/G$  est une variété torique par rapport à un tore contenant  $G$  comme un sous-groupe fini. Dans ce cas, toute  $\mathcal{G}$ -désingularisation [5] de  $Y$  est crépante. Inversement toute résolution crépante de  $Y$ , qui est équivariante par rapport à un tore contenant  $G$ , provient d'une  $\mathcal{G}$ -désingularisation.

Dans la suite, on construit des résolutions crépantes des quotients  $Y = \mathbb{C}^3/G$  pour des sous-groupes finis non abéliens  $G \subset SL(3, \mathbb{C})$ , réductibles ou irréductibles avec un centre non trivial.

**1<sup>er</sup> Cas:  $G$  réductible (non abélien).**

Il existe un unique plan  $D$  et une unique droite  $L$  stables par  $G$  tels que  $X = L \times D$ . Le centre  $C(G)$  de  $G$  est l'ensemble des éléments de  $G$  dont la restriction sur  $D$  est une homothétie,  $C(G)$  est un groupe cyclique. Notons  $g_0$  l'unique élément de  $SL(3, \mathbb{C})$  tel que  $g_{|L}$  soit l'identité et tel que  $g_{|D}$  soit une homothétie. On distingue les deux cas suivants.

**i)  $C(G)$  d'ordre pair.**

Dans ce cas,  $C(G)$  contient  $g_0$ . On va montrer que la méthode générale du paragraphe précédent peut donner une résolution crépante. Notons  $X_1$  l'éclatement de  $X$  de centre  $L$ . Soient  $E_0$  le diviseur exceptionnel et  $P^1$  l'image inverse de l'origine,  $P^1$  est isomorphe à la droite projective. Soit  $I$  l'ensemble des points dans  $P^1$  dont le groupe d'isotropie est différent de  $C(G)$ ,  $I$  est fini. Le groupe d'isotropie de tout point de  $I$  est un sous-groupe abélien maximal de  $G$ . Tout élément  $g \in G \setminus C(G)$  a deux points fixes dans  $P^1$ , notés respectivement  $x$  et  $x'$ .

Ces deux points, correspondant aux deux valeurs propres différentes de  $g$ , sont nécessairement dans  $I$ .

Quitte à faire un changement linéaire de variables et choisir un tore convenable, noté  $T$ , on peut supposer que  $x$  et  $x'$  soient fixes par  $T$ . Supposons que le réseau  $N$ , le cône  $C$  et l'éventail  $\Sigma_0$  soient définis comme dans le paragraphe précédent. On peut représenter  $X_1 := Bl_L X$  par  $\Sigma_0$ , alors  $x$  (resp.  $x'$ ) correspond à l'un des deux cônes de dimension 3, noté  $\tau_x$  (resp.  $\tau_{x'}$ ). Soit  $G_x$  (resp.  $G_{x'}$ ) le groupe d'isotropie du point  $x$  (resp.  $x'$ ), on a  $G_x = G_{x'}$ . On définit le sur-réseau  $N_x^1$  par

$$N_x^1 := N + \sum_{g' \in G_x} \mathbb{Z} \cdot a_{g'} \quad ,$$

avec  $a_{g'} := (a_1(g'), a_2(g'), a_3(g')) \in [0, 1]^3$ , tel que  $(\exp(2i\pi a_1(g')), \exp(2i\pi a_2(g')), \exp(2i\pi a_3(g')))$  soit l'image canonique de  $g'$  dans  $T$ .

En tenant compte que  $g_0 \in G$  et que  $a_{g_0} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , on vérifie que pour chaque élément junior  $h \in G_x \setminus C(G)$ ,  $a_h$  est contenu dans le système minimal de générateurs de l'un des deux semi-groupes  $N_x^1 \cap \tau_x$  et  $N_x^1 \cap \tau_{x'}$ . En plus  $(N_x^1 \cap \tau_x)$  (resp.  $(N_x^1 \cap \tau_{x'})$ ) est engendré par les  $a_g$ , avec  $g$  junior contenu dans  $G_x$  et  $a_g \in N_x^1 \cap \tau_x$  (resp.  $a_g \in N_x^1 \cap \tau_{x'}$ ).

Posons  $Z_0 := P^1 \setminus I$  et  $\sigma_0 := \tau \cap \tau_{x'}$ ,  $Z_0$  est un ouvert dense de l'orbite  $O_{\sigma_0}$ . Pour chaque élément junior  $h \in C(G) \setminus \{e\}$ ,  $a_h$  est contenu dans le système minimal de générateurs de  $\sigma_0 \cap N_x^1$ , (qui est égal à  $\sigma_0 \cap N_{Z_0}^1$ ).

Maintenant on peut construire des modifications localement toriques de l'ouvert  $U_{Z_0}$  et des ouverts  $U_x$ , avec  $x \in I$ , comme dans le paragraphe précédent. Et notons encore  $\widetilde{X}$  la variété obtenue en recollant ces modifications locales. Puisque  $G \subset SL(3, \mathbb{C})$  et que  $a_{g_0} = (0, 1/2, 1/2)$ , tout élément du système minimal de générateurs de  $N_x^1 \cap \tau_x$  (resp.  $N_x^1 \cap \tau_{x'}$ ) est aussi un élément du système minimal de générateurs de  $N_x^1 \cap C$ . Les analyses ci-dessus impliquent alors qu'il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des diviseurs exceptionnels dans  $\widetilde{X}$  et l'ensemble des éléments juniors de  $G$ .

On en déduit que dans le quotient  $\widetilde{X}/G$ , il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des diviseurs exceptionnels irréductibles et l'ensemble des classes de conjugaisons des éléments juniors de  $G$ . La proposition 5.4 montre que  $\widetilde{X}/G$  est une désingularisation de  $X/G$ . Donc d'après le lemme 5.10,  $\widetilde{X}/G$  est une résolution crépante de  $X/G$ .

## ii) $C(G)$ est d'ordre impair.

Dans ce cas,  $g_0 \notin G$ . Puisque le diviseur exceptionnel provenant de l'éclatement de centre  $L$  n'est pas crépant, la méthode générale du paragraphe précédent ne donne plus des résolutions crépantes. On la modifie de la façon suivante.

**Lemme 5.11** *Soit  $G \subset SL(3, \mathbb{C})$  réductible non abélien, avec  $C(G)$  d'ordre impair. Alors  $G$  est engendré par un sous-groupe abélien distingué  $H$  et un élément  $\kappa$  d'ordre 2. Quitte à faire un changement linéaire de variables, tout élément de  $H$  est diagonal et  $\kappa$  est de la forme*

suivante,

$$\kappa = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

*Démonstration.* Choisissons une base  $\{u, u_1, u_2\}$  de  $X$  telle que  $L = \mathbb{C} \cdot u$  et que  $D = \mathbb{C} \cdot u_1 \oplus \mathbb{C} \cdot u_2$ . Dans cette base chaque élément  $g$  dans  $G$  est sous la forme suivante,

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_g & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{1g} & \alpha_{1g} \\ 0 & \alpha_{2g} & \mu_{2g} \end{pmatrix} .$$

Posons  $G_0 := \{g \in G \mid \lambda_g = 1\}$ ,  $G_0$  est un sous groupe distingué de  $G$ . Posons  $\bar{G}_1 = \{g|_D \mid g \in G_0\}$ ,  $\bar{G}_1$  est un sous-groupe fini de  $SL(2, \mathbb{C})$ , donc est de l'une des trois types:  $A$ ,  $D$  ou  $E$ . D'après l'hypothèse,  $\bar{G}_1$  ne contient aucune homothétie. Ceci implique qu'il est de type  $A_{2k'}$ . Quitte à faire un changement de variables on peut supposer que les éléments de  $G_0$  soient des matrices diagonales.

Posons  $H := \{g \in G \mid gg_0 = g_0g, \forall g_0 \in G_0\}$ ,  $H$  est un sous-groupe abélien de  $G$ , car tout élément de  $H$  a  $u, u_1, u_2$  comme trois vecteurs propres communs. Puisque  $G_0$  est distingué dans  $G$ , tout élément  $g$  de  $G \setminus H$  permute les deux directions  $u_1$  et  $u_2$ , donc est de la forme suivante,

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{1g} \\ 0 & \alpha_{2g} & 0 \end{pmatrix} ,$$

et par suite  $g^2 \in C(G)$ . Puisque  $\lambda_g \neq 1$ , et que  $C(G)$  est d'ordre impair, en multipliant  $g$  par un élément de  $C(G)$  on obtient un  $\kappa \in G \setminus H$ , avec

$$\kappa = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_\kappa \\ 0 & \alpha_\kappa^{-1} & 0 \end{pmatrix} .$$

Quitte à faire encore un changement linéaire de variables, on peut supposer que  $\alpha_\kappa = 1$ . Par conséquent  $G$  est engendré par  $\kappa$  et  $H$ , avec  $H$  distingué abélien d'indice 2 et  $\kappa$  d'ordre 2.

□

Pour tout  $h \in H$ , posons  $\bar{h} := \kappa h \kappa^{-1}$ . Voilà quelques conséquences immédiates du lemme précédent.

### Corollaire 5.12

- (1)  $G = H \cup H\kappa$  et  $H = G_0 \times C(G)$ .
- (2) Soient  $h_1, h_2 \in H$ . Alors  $h_1\kappa$  commute avec  $h_2\kappa$  si et seulement si  $h_1h_2^{-1} \in C(G)$ .

(3) Il y a  $|G_0| + 1$  sous-groupes abéliens maximaux de  $G$ , ils sont de l'un des deux types suivants:  $H$  ou  $\langle g\kappa, C(G) \rangle$ , avec  $g \in G_0$ .

(4) Dans  $G$  il y a trois types de classes de conjugaisons,

- (a)  $\{h, \bar{h}\}$  avec  $h \in H \setminus C(G)$ ,
- (b)  $\{g\}$  avec  $g \in C(G)$ ,
- (c)  $\{g' \cdot g\kappa \mid g' \in G_0\}$ , avec  $g \in C(G)$ .

*Démonstration.*

- (1) Il est clair que  $G = H \cup H\kappa$ . Montrons que  $H$  est le produit direct de  $G_0$  avec  $C(G)$ . D'après l'hypothèse du lemme précédent, on a  $G_0 \cap C(G) = \{e\}$ . Posons  $F_1 := \{\lambda_g \mid g \in C(G)\}$  et  $F_2 := \{\lambda_g \mid g \in H\}$ ,  $F_1$  est un sous-groupe cyclique d'ordre impaire de  $\mathbb{C}^*$ , car  $g_0 \notin C(G)$ . Pour tout  $h \in H$ , on a  $h\bar{h} \in C(G)$ . Donc  $\forall \lambda \in F_2$ , on a  $\lambda^2 \in F_1$ . Supposons qu'il existe un  $g \in H$  avec  $\lambda_g \notin F_1$ . Quitte à multiplier  $g$  par un  $g' \in C(G)$ , on peut supposer que  $\lambda_g = -1$ . Ceci implique  $\mu_{1g}\mu_{2g} = -1$ , et par suite  $g_0 = g\bar{g} \in G$ . D'où une contradiction. Ainsi on a montré que  $F_1 = F_2$ , et donc pour tout  $g \in H$ , il existe  $g' \in C(G)$  tel que  $\lambda_{gg'} = 1$ , i.e.  $gg' \in G_0$ . Par conséquent  $H = G_0 \times C(G)$ .
- (2) Pour tous  $h_1, h_2 \in H$ , on a  $h_1\kappa \cdot h_2\kappa = h_1\bar{h}_2$ . Donc  $h_1\kappa$  et  $h_2\kappa$  commutent si et seulement si  $h_2\bar{h}_1 = h_1\bar{h}_2$ . Ceci équivaut à  $h_2h_1^{-1} = \overline{h_2h_1^{-1}}$ , qui est aussi équivalent à  $h_2h_1^{-1} \in C(G)$ .
- (3) Pour tout  $g \in G \setminus H$ , il existe un unique  $h \in H$  tel que  $g = h\kappa$ . Donc l'ensemble des éléments qui commutent avec  $g$  est  $C(G) \cup g \cdot C(G)$ . Ce dernier est un sous-groupe abélien, car  $g^2 \in C(G)$ . D'après (1),  $h$  est le produit d'un élément de  $G_0$  et un élément de  $C(G)$ . D'où le résultat.
- (4) Puisque  $H$  est distingué dans  $G$ , pour tout  $h \in H \setminus C(G)$ , les seuls éléments conjugués à  $h$  sont  $h$  et  $\bar{h}$ . Ensuite chaque élément de  $C(G)$  forme une classe. Ensuite pour tout  $g\kappa$ , avec  $g \in C(G)$ , sa classe de conjugaison contient au moins  $|G_0| = |H|/|C(G)|$  éléments. Car les  $h \cdot g\kappa \cdot h^{-1}$ , avec  $h \in G_0$ , sont tous différents. D'autre part pour tous  $g, g' \in C(G)$ , avec  $g \neq g'$ ,  $g\kappa$  et  $g'\kappa$  ne sont pas conjugués puisqu'ils ont des valeurs propres différentes. Par conséquent la classe de  $g\kappa$ , avec  $g \in C(G)$ , est  $\{g' \cdot g\kappa \mid g' \in G_0\}$ .

□

Soient  $G_0$  d'ordre  $2k' + 1$  et  $C(G)$  d'ordre  $2k + 1$ . Posons  $g_1 := (\frac{2k-1}{2k+1}, \frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k+1})$  et  $h_1 := (0, \frac{2k'}{2k'+1}, \frac{1}{2k'+1})$ ,  $g_1$  (resp.  $h_1$ ) est un générateur de  $C(G)$  (resp.  $G_0$ ). D'après le corollaire précédent,  $H$  est d'ordre  $(2k + 1)(2k' + 1)$  et  $G$  est d'ordre  $n := 2(2k + 1)(2k' + 1)$ .

**Lemme 5.13** *Le nombre de classes de conjugaisons dans  $G$  est égale à  $(k' + 2)(2k + 1)$ . Si on note  $Ju(G)$  (resp.  $Ju(H)$ ) le nombre de classes juniors dans  $G$  (resp. dans  $H$ ), alors on a  $Ju(G) = Ju(H) + k + 1$ .*

*Démonstration.* D'après le corollaire précédent, le nombre de classes de conjugaisons dans  $G$  est égal à  $|C(G)| + |H \setminus C(G)|/2 + |G \setminus H|/|G_0|$ , qui est égal à  $(2k+1)(k'+2)$ .

Aucun élément  $g\kappa$ , avec  $g \in C(G) \setminus \{e\}$ , n'a 1 comme valeur propre. Donc pour tout  $g \in C(G) \setminus \{e\}$ ,  $g\kappa$  et  $g^{-1}\kappa$  sont deux éléments distincts, parmi lesquels il n'y a qu'un seul élément junior. En utilisant le (4) du corollaire précédent, on en déduit  $Ju(G) = Ju(H) + k + 1$ .  $\square$

Maintenant revenons à la désingularisation de  $X_0/G$ . Puisque  $H$  est un sous-groupe distingué de  $G$ ,  $X_0/G$  est canoniquement isomorphe à  $(X_0/H)/(G/H)$ . D'après le lemme 5.11,  $G/H$  est d'ordre 2. Construisons d'abord une désingularisation minimale de  $X_0/H$ , qui est équivariante par rapport à  $G$ .

Supposons que dans la base  $\{u, u_1, u_2\}$  de  $X_0$ ,  $L$  soit de direction  $u$ , les éléments de  $H$  soient des matrices diagonales, et que  $\kappa$  soit de la forme suivante,

$$\kappa = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Soient  $T$  le tore maximal contenant  $H$  comme un sous-groupe fini,  $N$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang 3 déterminé par  $T$ , et  $\{v, v_1, v_2\}$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $N$ . On peut représenter  $X$  par le cône régulier  $C$  dans  $N_{\mathbb{R}}$  engendré par  $\{v, v_1, v_2\}$ . Définissons le sur-réseau  $N^1$  de  $N$  de la façon suivante,

$$N^1 := N + \sum_{h \in H} \mathbb{Z} \cdot v_h \quad ,$$

avec  $v_h := (a_h, b_{1h}, b_{2h}) \in [0, 1]^3$ , tel que  $(\exp(2i\pi a_h), \exp(2i\pi b_{1h}), \exp(2i\pi b_{2h}))$  soit l'image canonique de  $h$  dans  $T$ . On a  $X_0/H \simeq V_{C, N^1}$ .

Posons  $\Delta := \{\sum_{i=1}^3 x_i v_i \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 x_i = 1\}$ ,  $\Delta$  est un simplexe dans  $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^3$ . Posons  $\Phi := \{v_h \mid h \in H, a_h + b_{1h} + b_{2h} = 1\}$ .

**Lemme 5.14** *Il existe une variété torique  $X_1$  munie d'une action de  $G$  telle que  $X_1/H$  soit une résolution torique minimale de  $X_0/H$ , symétrique par rapport au groupe engendré par  $\kappa$ , noté  $\{\kappa, e\}$ . De plus le nombre de diviseurs exceptionnels irréductibles dans  $X_1/G$  est égal au nombre des classes de conjugaisons des éléments juniors dans  $H$ .*

*Démonstration.* Montrons d'abord qu'il existe une subdivision simpliciale de  $\Delta$  qui est symétrique par rapport au  $\{\kappa, e\}$  et que les sommets sont dans  $\Phi \cup \{v, v_1, v_2\}$ .

- (1) On a  $v_{g_1} = (\frac{2k-1}{2k+1}, \frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k+1})$ . Posons  $g_i := (g_1)^i$ , avec  $1 \leq i \leq 2k$ . Pour chaque  $v_{g_i} = (\frac{2k-2i+1}{2k+1}, \frac{i}{2k+1}, \frac{i}{2k+1})$ , avec  $i = 1, \dots, k$ , on ajoute une arrête entre  $v_{g_i}$  et  $v_1$ , et une arrête entre  $v_{g_i}$  et  $v_2$ . On ajoute aussi une arrête entre  $v_{g_{i-1}}$  et  $v_{g_i}$ , pour  $1 \leq i \leq k$  avec  $v_{g_0} := v$ . On obtient une subdivision simpliciale de  $\Delta$ , qui induit canoniquement une subdivision de  $C$ , notée  $\Sigma_1$ . On vérifie que  $V_{\Sigma_1, N^1}$  est une résolution minimale de  $X_0/C(G)$ , et symétrique par rapport au groupe  $\{\kappa, e\}$ .

- (2) Pour chaque simplexe dans  $\Delta$ , ayant  $\{v_1, v_{g_{i-1}}, v_{g_i}\}$  comme sommets, on prend une subdivision simpliciale minimale quelconque dont les nouveaux sommets sont dans  $\Phi$ . On prend la subdivision symétrique pour le simplexe ayant  $\{v_2, v_{g_{i-1}}, v_{g_i}\}$  comme sommets. Pour le simplexe ayant  $\{v_1, v_2, v_{g_k}\}$  comme sommets, on ajoute une arête entre  $v_h$  et  $v_{g_k}$ , pour tout  $h \in G_0$ .

Notons  $\Pi$  cette subdivision de  $\Delta$ , et notons  $\Sigma$  la subdivision de  $C$  induite par  $\Pi$ . On vérifie que  $\Sigma$ , et par suite  $V_{\Sigma, N}$  et  $V_{\Sigma, N^1}$ , sont symétriques par rapport au groupe  $\{\kappa, e\}$ . Posons  $X_1 := V_{\Sigma, N}$ , alors  $X_1/H \simeq V_{\Sigma, N^1}$  est une désingularisation minimale de  $X_0/H$ , en effet c'est une  $\mathcal{G}$ -désingularisation. Il est clair que cette désingularisation est équivariante par rapport à  $\{\kappa, e\}$ .

Puisqu'il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des diviseurs exceptionnels irréductibles de  $X_1$  et l'ensemble des éléments juniors dans  $H$ , on en déduit en passant au quotient, qu'il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des diviseurs exceptionnels dans  $X_1/G$  et l'ensemble des classes de conjugaisons des éléments juniors dans  $H$ .

□

Considérons l'action de  $\kappa$  sur  $X_1$ . D'abord  $X_1$  est la réunion disjointe des orbites du tore. Chaque orbite sauf le tore correspond à un unique simplexe dans  $\Pi$ ,  $\kappa$  permute ces orbites. Celles qui sont stables correspondent aux simplexes suivants: le triangle  $A$  ayant  $\{v_{g_k}, (0, \frac{k'}{2k'+1}, \frac{k'+1}{2k'+1}), (0, \frac{k'+1}{2k'+1}, \frac{k'}{2k'+1})\}$  comme sommets; les sommets  $v_{g_i}$ , avec  $0 \leq i \leq k$ ; et les arêtes  $\overline{v_{g_{i-1}}v_{g_i}}$ , avec  $1 \leq i \leq k$ .

**Affirmation 5.15** *Dans  $X_1$ , l'ensemble des points fixes de  $\kappa$  est la réunion disjointe de  $(k+1)$  courbes rationnelles. Les adhérences de leurs images dans  $X_1/H$  sont lisses et deux à deux disjointes.*

*Démonstration.* Puisque  $\kappa$  permute les orbites, tout point fixe de  $\kappa$  est contenu dans une des orbites stables. Chaque orbite est isomorphe à un tore de même dimension. D'abord il n'y a pas de point fixe de  $\kappa$  dans le tore.

Prenons le sommet  $v_{g_i} = (\frac{2k-2i+1}{2k+1}, \frac{i}{2k+1}, \frac{i}{2k+1})$  dans  $\Pi$ , avec  $0 \leq i \leq k$ . L'orbite associée, notée  $O_i$ , est isomorphe à un tore de dimension 2. En effet on a l'isomorphisme

$$O_i \simeq \text{Spec}\mathbb{C}[x/y, y/x, x^b/z^a, z^a/x^b] \quad ,$$

où  $a := i/d$  et  $b := (2k+1-2i)/d$ , avec  $d := p.g.c.d.(i, 2k+1-2i)$ .

On rappelle que  $\kappa(x) = y, \kappa(y) = x, \kappa(z) = -z$ . Posons  $s := x/y$  et  $w := y^b/z^a$ . Alors  $O_i \simeq \text{Spec}\mathbb{C}[s, s^{-1}, w, w^{-1}]$ , et on a  $\kappa(s) = s^{-1}, \kappa(w) = (-1)^a s^b w$ . Puisque  $b$  est toujours impair, et que  $a$  a le même parité que  $i$ , on en déduit que l'ensemble des points fixes de  $\kappa$  dans  $O_i$  est défini par:

- $s = 1$ , si  $a$  est pair;
- $s = -1$ , si  $a$  est impair.

Dans tous les cas, l'ensemble des points fixes de  $\kappa$  dans  $O_i$  est une courbe isomorphe à  $C^*$ . Notons  $L_i$  l'adhérence de cette courbe dans  $X_1$ ,  $L_i$  est une courbe rationnelle.

Prenons une orbite stable de dimension 1 associée à l'arrête  $\overline{v_{g_i} v_{g_{i+1}}}$  dans  $\Pi$ , avec  $0 \leq i < k$ . Notons  $O_{ii+1}$  cette orbite,  $O_{ii+1} \simeq \text{Spec} \mathbb{C}[x/y, y/x]$ . Il y a deux points fixes de  $\kappa$  dans  $O_{ii+1}$ ,  $x_i := \{x/y = y/x = 1\}$  et  $x'_i := \{x/y = y/x = -1\}$ . On vérifie facilement que  $x_i \in L_i$  et  $x'_i \in L_{i+1}$  si  $i$  est pair, et que  $x_i \in L_{i+1}$  et  $x'_i \in L_i$  si  $i$  est impair.

L'unique orbite stable de dimension 0 représentée par le triangle  $A$ , notée  $x_m$ , est fixe par  $\kappa$  et contenue dans  $L_k$ . Donc l'ensemble des points fixes de  $\kappa$  dans  $X_1$  est la réunion disjointe des courbes rationnelles  $L_i$ , avec  $0 \leq i \leq k$ .

En tenant compte que  $X_1/H \simeq V_{\Sigma, N^1}$ , on en déduit que les images des  $L_i$  dans  $X_1/H$ , avec  $0 \leq i \leq k$ , sont toutes différentes. Or  $X_1/H$  est une variété lisse, l'ensemble des points fixes de  $\kappa$  dans  $X_1/H$  est une sous-variété lisse. On en conclut que les images des  $L_i$ , avec  $0 \leq i \leq k$ , sont lisses et deux à deux disjointes. □

### Lemme 5.16

- (1) Dans  $X_1/G$ , le lieu singulier  $\text{Sing}(X_1/G)$  est la réunion disjointe des  $(k+1)$  courbes lisses.
- (2) Les singularités de  $X_1/G$  sont toutes localement isomorphes à des singularités quotient d'une variété lisse par un groupe d'ordre 2.
- (3) L'éclatement de  $X_1/G$  de centre  $\text{Sing}(X_1/G)$ , noté  $\tilde{Y}$ , est une résolution crépante de  $X/G$ .

*Démonstration.* Les deux premières assertions résultent directement de l'affirmation précédente. Ensuite le (2) implique que  $\tilde{Y} := \text{Bl}_{\text{Sing}(X_1/G)}(X_1/G)$  est une variété lisse. D'après le lemme 5.14, on sait que le nombre des diviseurs exceptionnels irréductibles dans  $X_1/G$  est égal à  $Ju(H)$ . Par conséquent le nombre de diviseurs exceptionnels irréductibles dans  $\tilde{Y}$  est égal à  $Ju(H) + (k+1)$ , qui est égal à  $Ju(G)$  (lemme 5.13). De nouveau le lemme 5.10 montre que  $\tilde{Y}$  est alors une résolution crépante de  $X_1/G$ . □

**Remarque 5.17** *Le point générique de chaque  $L_i$ , avec  $0 \leq i \leq k$ , n'est contenu dans aucun diviseur exceptionnel du morphisme  $X_1 = V_{\Sigma, N} \rightarrow V_{\Sigma_0, N}$ . Donc pour voir la correspondance des diviseurs exceptionnels irréductibles dans  $\tilde{Y}$  provenant des  $L_i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , avec des classes des éléments juniors dans  $G \setminus H$ , il suffit de l'examiner dans  $V_{\Sigma_0, N}$  qui est munie de l'action du tore contenant  $C(G)$  et  $\kappa$ . A l'aide de cette nouvelle structure torique, on obtient la correspondance cherchée.*



Pour tout  $g \in G_0$ ,  $g\kappa$  a une droite invariante dans  $X$ , notée  $L_{g\kappa}$ . Leur transformées strictes dans  $X_1$ , notées  $\overline{L_{g\kappa}}$ , sont lisses et deux à deux disjointes.

**Proposition 5.18** *Notons  $X_2$  l'éclatement de  $X_1$  de centre  $\bigcup_{g \in G_0} \overline{L_{g\kappa}}$ ,  $X_2$  est une  $G$ -variété.*

- (1) *Soit  $\mathcal{C}$  une droite contenue dans le plan  $D \subset X$ , dont le point générique est fixe par un élément de  $G \setminus \{e\}$ . Alors au voisinage de l'image inverse du point générique de  $\mathcal{C}$ , le morphisme  $\varphi : X_2 \rightarrow X$  est isomorphe à l'éclatement de  $X$  de centre  $\mathcal{C}$ .*
- (2) *Le lieu singulier  $\text{Sing}(X_2/G)$  de  $X_2/G$  est la réunion disjointe de  $k$  droites projectives lisses. L'éclatement de  $X_2/G$  de centre  $\text{Sing}(X_2/G)$  est égal à l'éclatement de  $X_1/G$  de centre  $\text{Sing}(X_1/G)$ , et donc est une résolution crépante de  $X/G$ .*

*Démonstration.* La réunion des  $\overline{L_{g\kappa}}$ , avec  $g \in G_0$ , est une sous-variété lisse de  $X_1$ , stable par  $G$ . D'après le lemme 1.4,  $X_2$  est une  $G$ -variété.

- (1) Un élément de  $G$  a une droite invariante dans  $D$  si et seulement s'il est de la forme  $g\kappa$ , avec  $g \in G_0$ . Notons  $L_{g\kappa}$  la droite invariante. Donc toute courbe  $\mathcal{C} \subset D$  fixe par un  $g \in G \setminus \{e\}$  est forcément de type  $L_{g\kappa}$ , avec  $g \in G_0$ . Par conséquent au voisinage de l'image inverse du point générique de  $\mathcal{C}$ ,  $X_2$  est isomorphe à  $Bl_{L_{g\kappa}} X$ .
- (2) En effet  $X_2/H$  est égal à l'éclatement de  $X_1/H$  de centre l'unique droite affine fixe par  $\kappa$ , qui est l'image des  $\overline{L_{g\kappa}}$ , avec  $g \in G_0$ . D'après le lemme précédent,  $X_2/G$  désingularise les singularités de  $X_1/G$  qui se trouvent sur cette droite, et en dehors de l'image inverse de cette droite  $X_2/G$  est isomorphe à  $X_1/G$ . D'où le (2).

□

On peut aussi obtenir  $X_1, X_2$  de la manière suivante. On ajoute le sommet  $(0, 1/2, 1/2)$  dans  $\Pi$ , et une arête entre  $v_{g_k}$  et  $(0, 1/2, 1/2)$ . Donc on a subdivisé l'unique triangle stable en deux. Notons  $\Pi_3$  cette subdivision de  $\Delta$  (resp. de  $\Pi$ ), et  $\Sigma_3$  la subdivision induite de  $C$  (resp. de  $\Sigma$ ). Notons  $X_3$  la variété associée à  $\Sigma_3$ . Alors  $X_1$  peut être obtenue à partir de  $X_3$  en contractant le diviseur exceptionnel associé au sommet  $(0, 1/2, 1/2)$ .

Cette méthode possède l'interprétation géométrique suivante. D'abord on éclate  $X_0$  de centre  $L$  qui est la droite stable par  $G$ . Cet éclatement, noté  $X_1^1$ , est un fibré en droites ayant l'éclatement de  $D$  de centre l'origine comme base. Notons  $E_0$  le diviseur exceptionnel, et  $\overline{D}$  la transformée stricte de  $D$ . Leur intersection est une droite projective, notée  $P^1$ . Dans cette droite projective il y a deux points dont le groupe d'isotropie est égale à  $H$ . Pour tout  $h \in H$ ,  $h\kappa$  permute ces deux points.

Ensuite on modifie ce  $P^1$ , en faisant des éclatements et des contractions, et obtient une variété  $X_1^2$  de sorte que  $X_1^2/C(G)$  soit une désingularisation minimale de  $X_1^1/C(G)$ . En terme d'éventail, c'est qu'on ajoute une arête entre  $v_j$  et  $v_{g_i}$  pour  $j = 1, 2$  et  $1 \leq i \leq k$ .

Le troisième étape, est de modifier les orbites pour obtenir la variété  $X_3$ . A l'aide des éventails on voit facilement que la transformée stricte dans  $X_3$  du diviseur exceptionnel  $E_0$  est contractible. Si on la contracte, on obtient exactement  $X_1$ .

On remarque que dans  $X_1^1$ , les transformées strictes des  $L_{g\kappa}$ , avec  $g \in G_0$ , sont deux à deux disjointes. Ensuite, dans  $X_1^2$ , leur transformées strictes restent deux à deux disjointes, et sont toutes disjointes de la transformée stricte de  $E_0$ . Le morphisme de  $X_3$  dans  $X_1^2$  induit un isomorphisme au voisinage des  $\overline{L_{g\kappa}}$ , pour tout  $g \in G_0$ . Donc la contraction de  $X_3$  sur  $X_1$  laisse les  $\overline{L_{g\kappa}}$ , avec  $g \in G_0$ , invariées. Au voisinage de l'image inverse des  $\overline{L_{g\kappa}}$ , avec  $g \in G_0$ ,  $X_2$  qui est l'éclatement de  $X_1$  de centre  $(\bigcup_{g \in G_0} \overline{L_{g\kappa}})$ , est isomorphe à l'éclatement de  $X_1^2$  de centre  $(\bigcup_{g \in G_0} \overline{L_{g\kappa}})$ .

Cette construction, i.e. en utilisant un éclatement auxiliaire et une contraction, sera utilisée dans le cas où  $G$  est irréductible.

**2<sup>ème</sup> Cas:  $G$  irréductible et  $C(G) \neq \{e\}$ .**

Posons  $X_1 := Bl_{\{0\}}X$  l'éclatement de  $X$  de centre l'origine, et notons  $E_0$  le diviseur exceptionnel. Alors  $X_1$  est un fibré en droites sur  $E_0$  qui est isomorphe au plan projectif. Pour tout point  $x \in E_0$ , on note  $l_x$  la fibre sur  $x$ . Pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ , notons  $W^H$  la sous-variété de  $X_1$  fixe par  $H$ , i.e.

$$W^H := \{x \in X_1 \mid h(x) = x, \forall h \in H\} \quad .$$

On définit le sous-ensemble  $R$  de  $X_1$  par

$$R := \{x \in E_0 \mid x \text{ est un point isolé de } W^{G_x}\} \quad ,$$

et on définit

$$R_1 := \{x \in R \mid G_x \text{ abélien}\} \quad ,$$

$$R_2 := \{x \in R \mid G_x \text{ non abélien, } C(G_x) \text{ d'ordre pair}\} \quad ,$$

$$R_3 := \{x \in R \mid G_x \text{ non abélien, } C(G_x) \text{ d'ordre impair}\} \quad ,$$

$R$  est la réunion disjointe de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ . Notons  $\{P_k\}_{1 \leq k \leq j}$  l'ensemble des droites projectives dans  $E_0$ , dont le point générique est fixe par un élément de  $G \setminus C(G)$ .

Pour tout point  $x$  dans  $E_0 \setminus (R \cup (\bigcup_{k=1}^j P_k))$ , le groupe d'isotropie  $G_x$  est égal à  $C(G)$  et le groupe d'isotropie du point générique de la fibre  $l_x$  est trivial. Pour tout point  $x$  dans  $(\bigcup_{k=1}^j P_k) \setminus R$ , le groupe d'isotropie de  $x$  est cyclique, et le groupe d'isotropie de la fibre  $l_x$  est trivial.

Pour chaque élément junior  $g \in G \setminus C(G)$ , on peut choisir un tore maximal  $T$  de  $GL(3, \mathbb{C})$  contenant  $g$ . Alors  $X$  et  $X_1$  sont des variétés toriques par rapport à  $T$ . Soient  $N$  le  $\mathbb{Z}$ -module

libre de rang 3 déterminé par  $T$  et  $C$  le cône régulier standard dans  $N_{\mathbb{R}}$ . On peut représenter  $X$  par  $C$ , et représenter  $X_1$  par l'éventail  $\Sigma_0$  comme dans le cas  $GL(3, \mathbb{C})$  (paragraphe 5.1). Il existe un unique cône minimal  $\sigma_g \in \Sigma_0$  tel que  $v_g \in \sigma_g$ , où  $v_g$  est le point dans  $N_{\mathbb{R}}$  associé à  $g$ . On dit alors que  $g$  est junior en  $x$ , pour tout  $x \in \overline{O_{\sigma_g}}$ .

**Lemme 5.19** *Pour tout élément junior  $g \in G \setminus C(G)$ , il existe un  $x \in R$  tel que  $g$  soit junior en  $x$ . Si  $g$  est junior en deux points différents de  $R$ , notés  $x_1$  et  $x_2$ , alors il existe une unique droite projective  $P_k \subset E_0$ ,  $1 \leq k \leq j$ , telle que  $g$  soit junior en tout point de  $P_k$ .*

*Démonstration.* En effet le cône  $\sigma_g$  est de dimension 2 ou 3, car  $G$  est petit et  $g \notin C(G)$ . Si  $\dim(\sigma_g) = 3$  ou si  $\sigma_g$  de dimension 2 mais  $O_{\sigma_g} \not\subset E_0$ ,  $g$  est junior en un seul point  $x := E_0 \cap \overline{O_{\sigma_g}}$ . Comme  $G_x$  contient  $g$  et  $C(G)$ ,  $x$  est un point isolé de  $W^{G_x}$ , et par suite  $x \in R$ .

Si  $g$  est junior en deux points distincts de  $R$ , alors  $\sigma_g$  est de dimension 2 et  $O_{\sigma_g} \subset E_0$ ,  $\overline{O_{\sigma_g}}$  est une droite projective fixe par  $g$ . On en déduit qu'il existe un  $k$ , avec  $1 \leq k \leq j$ , tel que  $\overline{O_{\sigma_g}} = P_k$ , et donc  $g$  est junior en tout point de  $P_k$ .

□

**Lemme 5.20** *Pour tout point  $x \in X_1$ , la singularité locale de  $X_1/G$  en l'image de  $x$  est isomorphe à une singularité quotient d'un sous-groupe fini de  $SL(3, \mathbb{C})$ .*

*Démonstration.* Il suffit de vérifier cette assertion pour les points de  $E_0$ .

Soient  $x \in E_0$  et  $g \in G_x$ . Pour la représentation locale de  $G_x$ ,  $g \in G_x$  est un pseudo-réflexion si et seulement si  $g$  est contenu dans  $C(G)$ . Choisissons une base  $\{u_1, u_2, u_3\}$  de  $X$  formée par des vecteurs propres de  $g$ . Supposons que dans cette base  $g$  soit de la forme suivante,

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

i.e.  $g(u_i) = \lambda_i u_i$  pour  $1 \leq i \leq 3$ , et que la fibre  $l_x$  soit la transformée stricte de la droite définie par  $\{u_2 = u_3 = 0\}$ , Alors  $\{u_1, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}\}$  est un système de coordonnées locales en  $x$ . L'anneau local  $O_{X_1, x}$  est isomorphe à  $(\mathbb{C}[u_1, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}])_{m_x}$ , avec  $m_x$  l'idéal maximal de  $O_{X_1, x}$ . Le sous-anneau de  $O_{X_1, x}$  constitué des invariants de  $C(G)$  est égal à  $\mathbb{C}[u_1^3, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}]_{(u_1^3, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1})}$ . C'est un anneau régulier et on a  $O_{X_1, x}/G_x \simeq [O_{X_1, x}/C(G)]/[G_x/C(G)]$ .

On constate que  $g(u_1^3) = (\lambda_1)^3(u_1^3)$ ,  $g(\frac{u_2}{u_1}) = (\lambda_2 \lambda_1^{-1})(\frac{u_2}{u_1})$  et  $g(\frac{u_3}{u_1}) = (\lambda_3 \lambda_1^{-1})(\frac{u_3}{u_1})$ . Le produit des trois valeurs propres vaut encore 1. D'où le résultat.

□

Grâce à ce lemme, on peut donc construire des modifications locales en utilisant des résultats dans les cas précédents, i.e.  $G$  abélien ou réductible.

On stratifie  $E_0$  de la façon suivante: les strates de dimension 0 sont des points de  $R$ ; les strates de dimension 1 sont des composantes irréductibles de  $(\bigcup_{k=1}^j P_k) \setminus R$ ; et l'unique strate de dimension 2 est  $Z_0 := E_0 \setminus (R \cup (\bigcup_{k=1}^j P_k))$ . On remarque que les strates de dimension 1 sont lisses et deux à deux disjointes, car l'intersection de deux droites différentes  $P_k$  et  $P_{k'}$  est un point de  $R$ . Pour chaque strate  $Z$ , on lui associe un ouvert de  $E_0$  qui est la réunion des strates contenant  $Z$  dans leur adhérences, l'image inverse de cet ouvert dans  $X_1$  par la projection du fibré est un ouvert de  $X_1$ , notée  $U_Z$ . Tous ces ouverts  $U_Z$  forment un recouvrement de  $X_1$  qui est stable par  $G$  et fermé pour l'intersection.

Maintenant pour des  $U_x$ , avec  $x \in R_1$ , on construit des modifications  $\tilde{U}_x$  telles que  $\tilde{U}_x/G_x$  soit un ouvert d'une  $\mathcal{G}$ -désingularisation de  $X/G_x$ . Pour des  $U_x$ , avec  $x \in R_2$ , on construit des modifications  $\tilde{U}_x/G_x$  telles que  $\tilde{U}_x/G_x$  soit une résolution crépante de  $U_x/G_x$ , comme dans le cas où  $G$  est réductible et  $C(G) \neq \{e\}$ . Dans ces deux cas, le nombre de diviseurs exceptionnels irréductibles dans  $\tilde{U}_x$  est égal au nombre des éléments de  $G_x$  (ou de  $G$ ) qui sont juniors en  $x$ .

Pour des  $U_x$ , avec  $x \in R_3$ , on construit des modifications  $\tilde{U}_x$  avec la même méthode utilisée dans la construction de  $X_2$  dans le cas où  $G$  est réductible et  $C(G)$  d'ordre impair (proposition 5.18). Donc  $\tilde{U}_x/G_x$  désingularise la singularité de  $U_x/G_x$  qui se trouve sur le point générique d'une composante irréductible de dimension 1 de  $Sing(U_x/G_x)$ . Le lieu singulier  $Sing(\tilde{U}_x)$  de  $\tilde{U}_x/G_x$  est la réunion disjointe de courbes projectives lisses. Notons  $Ju_x(G_x)$  le nombre de classes de conjugaisons des éléments qui sont juniors en  $x$ . Alors le nombre de composantes irréductibles de  $Sing(\tilde{U}_x/G_x)$  est égal à la différence de  $Ju_x(G_x)$  avec le nombre de diviseurs exceptionnels irréductibles dans  $\tilde{U}_x/G_x$ . Les singularités locales de  $\tilde{U}_x/G_x$  sont toutes isomorphes à des singularités quotient d'une variété lisse par un groupe d'ordre 2.

Ces modifications locales peuvent se recoller et donner une variété  $X_2$ . En effet, si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux points différents de  $R$ , alors l'intersection  $U_{x_1} \cap U_{x_2}$  est égale à  $U_Z$ , avec  $Z \subset E_0$  une strate de dimension supérieure ou égale à 1. L'images inverse de  $U_Z$  dans  $\tilde{U}_{x_1}$  et celle dans  $\tilde{U}_{x_2}$  sont toutes isomorphes à l'image inverse de  $U_Z$  dans l'unique  $\mathcal{G}$ -désingularisation de  $X_1/G_0(Z)$ .

On peut demander que ces modifications locales soient compatibles avec l'action du groupe  $G$ , alors  $X_2$  est une  $G$ -variété. D'après les analyses ci-dessus, le lieu singulier de  $X_2/G$  est une réunion disjointe des courbes lisses. Et le lemme 5.19 implique que le nombre de ces courbes est égal à la différence de  $Ju(G)$  avec le nombre de diviseurs exceptionnels irréductibles dans  $X_2/G$ . Les singularités locales sont toutes isomorphes à des singularités quotient d'une variété lisse par un groupe d'ordre 2.

Par conséquent, si on note  $\tilde{Y}$  l'éclatement de  $X_2/G$  de centre  $Sing(X_2/G)$ , alors  $\tilde{Y}$  est une désingularisation de  $X_2/G$ , et donc est une désingularisation de  $X/G$ . Le nombre de diviseurs exceptionnels irréductibles pour le morphisme canonique de  $\tilde{Y}$  dans  $X/G$  est égal à  $Ju(G)$ . D'après le lemme 5.10, on obtient

**Proposition 5.21** *La variété  $\tilde{Y}$  ci-dessus est une résolution crépante de  $X/G$ .*



## 6 Espaces de configurations et singularités de produits symétriques.

Soient  $X$  une variété irréductible lisse et  $\bar{Y}_0 := X^n$  le produit cartésien de  $n$  copies de  $X$ . Il existe une action naturelle du groupe symétrique  $S_n$  sur  $X^n$ , qui permute les  $n$  facteurs. Chaque point  $y \in X^n$  peut s'écrire comme  $y = (x^1, \dots, x^n)$ , avec  $x^i \in X$  et  $1 \leq i \leq n$ . Posons  $\Delta_{\{ij\}} := \{y \in X^n \mid x^i = x^j\}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , et posons  $F(X, n) := X^n \setminus \left( \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{\{ij\}} \right)$ . On appelle  $F(X, n)$  l'espace de configuration de  $n$  points ordonnés et distincts de la variété  $X$ , ou simplement l'espace de configuration.

Dans le premier paragraphe, on généralise la méthode de construction de modèles équivariants abéliens utilisée dans le chapitre 1, pour construire une compactification de l'espace de configuration  $F(X, n)$ , notée  $\bar{X}[n]$ . On vérifie que  $\bar{X}[n]$  est une  $S_n$ -variété lisse et irréductible, et le morphisme canonique de  $\bar{X}[n]$  dans  $X^n$  est un  $S_n$ -morphisme propre et birationnel.

Ensuite on montre la proposition 6.4, concernant la structure de  $\bar{X}[n]$ . La construction de  $\bar{X}[n]$  est inspirée de celle de la compactification  $X[n]$  dans l'article [12], où l'on se pose la question de l'existence d'une construction directe et symétrique d'une compactification de  $F(X, n)$ .<sup>5</sup> Quand  $n \leq 3$ , les deux constructions donnent la même compactification, i.e.  $X[n] = \bar{X}[n]$ . Quand  $n > 3$ , les deux compactifications sont différentes: la construction de  $\bar{X}[n]$  est directe, i.e. sans récursivité sur  $n$ , et toutes les variétés intermédiaires de la construction sont des  $S_n$ -variétés lisses. Mais nous utilisons d'avantage d'éclatements.

Dans [12], les auteurs ont montré que le groupe d'isotropie de tout point dans  $X[n]$  est résoluble. Nous montrons que, pour l'action du groupe  $S_n$  sur  $\bar{X}[n]$ , le groupe d'isotropie de tout point est un groupe abélien (proposition 6.5.). Ensuite on rappelle brièvement la construction de  $X[n]$  et on montre (proposition 6.6) qu'il existe un  $S_n$ -morphisme canonique, propre et birationnel, de  $\bar{X}[n]$  dans  $X[n]$ .

Le produit symétrique d'une courbe lisse  $\mathcal{C}$  est lisse (théorème de Chevalley). Si la courbe  $\mathcal{C}$  est projective et de genre  $g$  et si  $n > 2g - 2$ , alors  $Sym^{(n)}\mathcal{C}$  est un fibré projectif de rang  $n - g$  sur la jacobienne de  $\mathcal{C}$  [26]. Pour une variété lisse  $X$  de dimension plus grande ou égale à 2, le produit symétrique  $Sym^{(n)}X := X^n/S_n$  avec  $n \geq 2$  est toujours singulier. On peut trouver, dans le même article [12], une discussion du problème de résoudre explicitement des singularités de  $Sym^{(n)}X$ .

Pour le cas local, le résultat principal des quatre premiers chapitres donne une méthode de construction explicite de résolutions. Dans le deuxième paragraphe de ce chapitre on obtient comme exemples d'illustration des désingularisations explicites de  $Sym^{(3)}(\mathbb{C}^d)$  et  $Sym^{(4)}(\mathbb{C}^d)$ , et on montre que pour toute variété  $X$  quasi-projective et lisse, la même méthode avec des petites modifications donne une désingularisation globale du produit symétrique  $Sym^{(n)}X := X^n/S_n$ , avec  $n = 3$  ou 4 (remarques 6.10 et 6.15).

---

<sup>5</sup>[12], page 196.

## 6.1 Une compactification de l'espace de configuration.

Supposons que  $X$  et  $\bar{Y}_0$  soient définies comme précédemment. Une diagonale dans  $X^n$  est l'ensemble des points fixes d'un élément de  $S_n \setminus \{e\}$ . L'ensemble des points fixes d'une transposition est appelé une grande diagonale. On remarque que cette définition de diagonale est différente de celle dans [12], où les diagonales sont définies comme des sous-variétés invariantes des cycles seulement. L'ensemble des points fixes de tout  $n$ -cycle est appelé la petite diagonale, notée  $\Delta$ .

Posons  $N := \{1, \dots, n\}$ . Une partition de  $N$  est, par définition, une collection de sous-ensembles non vides de  $N$ , deux à deux disjoints, dont la réunion est égale à  $N$ . Notons  $\mathcal{P}(N)$  l'ensemble des partitions de  $N$ . Soit  $\pi \in \mathcal{P}(N)$ , il existe un entier  $l$ , avec  $1 \leq l \leq n$ , et des sous-ensembles non vides de  $N$ , notés  $S_1, \dots, S_l$ , tels que  $\pi = \{S_1, \dots, S_l\}$ . D'après la définition d'une partition, on a les deux propriétés suivantes,

- $S_i \cap S_j = \phi$ , si  $i \neq j$ ;
- $\bigcup_{i=1}^l S_i = N$ .

On appelle  $l$  la longueur de la partition  $\pi$ , notée  $l(\pi)$ . Soient  $\pi$  et  $\pi'$  deux partitions de  $N$ . On dit que  $\pi$  est plus fine que  $\pi'$ , noté  $\pi' \leq \pi$ , si et seulement si pour tout  $S \in \pi$ , il existe un  $S' \in \pi'$  tel que  $S \subseteq S'$ . Si de plus  $\pi'$  et  $\pi$  sont différentes, on dit que  $\pi$  est strictement plus fine que  $\pi'$ , noté  $\pi' < \pi$ .

Soit  $S$  un sous-ensemble de  $N$  contenant au moins deux éléments. On définit la diagonale  $\Delta(S)$  de la façon suivante,

$$\Delta(S) := \{y = (x^1, \dots, x^n) \in X^n \mid x^i = x^j, \forall i, j \in S\} \quad .$$

Pour tout  $\pi \in \mathcal{P}(N)$ , avec  $l(\pi) < n$ , on définit la diagonale  $\Delta(\pi)$  comme l'intersection des  $\Delta(S)$ , pour tout  $S \in \pi$  contenant au moins deux éléments. Notons  $\Theta$  l'ensemble des diagonales dans  $X^n$ . On a le lemme suivant.

### Lemme 6.1

- (1) *Il existe une correspondance biunivoque entre  $\Theta$  et  $\mathcal{P}(N) \setminus \{\pi(n)\}$ , où  $\pi(n)$  est l'unique élément dans  $\mathcal{P}(N)$  de longueur  $n$ .*
- (2) *Chaque diagonale  $\Delta(\pi)$  est isomorphe à  $X^{l(\pi)}$ , donc est une variété lisse et irréductible.*
- (3) *L'ensemble des diagonales est fini, fermé pour l'intersection et stable par  $S_n$ .*

*Démonstration.* La première assertion résulte directement de la définition de diagonale et du fait que tout élément  $\sigma \in S_n \setminus \{e\}$  peut se décomposer comme le produit des cycles disjoints.

Montrons la deuxième. Pour chaque partition  $\pi = \{S_1, \dots, S_l\}$ , on a

$$X^n = X^{S_1} \times X^{S_2} \times \dots \times X^{S_l} \quad .$$

On peut vérifier que  $\Delta(\pi) = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_l$ , où  $\Delta_i$  est la petite diagonale dans  $X^{S_i}$ , avec  $i = 1, \dots, l$ . Puisque chaque  $\Delta_i$  est isomorphe à  $X$ , on obtient  $\Delta(\pi) \simeq X^l$ , avec  $l$  la longueur de  $\pi$ . D'après l'hypothèse,  $X$  est lisse et irréductible, on en déduit que toute diagonale est aussi lisse et irréductible.

Pour la troisième assertion, d'abord il est clair que  $\Theta$  est fini et stable par  $S_n$ . Pour voir qu'il est fermé pour l'intersection, il suffit de remarquer que pour tous  $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}(N)$  de longueurs plus petites que  $n$ , il existe un unique élément  $\pi \in \mathcal{P}(N)$  tel que,

(i)  $\pi \leq \pi_1, \pi \leq \pi_2$ ;

(ii)  $\forall \pi' \in \mathcal{P}(N)$ , avec  $\pi' \leq \pi_1$  et  $\pi' \leq \pi_2$ , on ait  $\pi' \leq \pi$ .

En effet  $\pi$  peut être obtenue de la façon suivante. Prenons un graphe ayant  $n$  sommets, notés  $\{s_1, \dots, s_n\}$ . Pour tout couple  $(s_i, s_j)$ , avec  $1 \leq i < j \leq n$ , il existe une arête entre  $s_i$  et  $s_j$  si et seulement s'il existe un  $S$  dans  $\pi$  ou  $\pi'$ , tel que  $i, j \in S$ . La décomposition en composantes connexes de ce graphe donne la partition  $\pi$  cherchée. On vérifie facilement que  $\Delta(\pi_1) \cap \Delta(\pi_2) = \Delta(\pi)$ . Le lemme est démontré. □

Posons  $\Theta_i := \{\Delta(\pi) \mid \pi \in \mathcal{P}(N), l(\pi) = i\}$ , avec  $i = 1, \dots, n-1$ . D'après le lemme précédent, on a  $\Theta = \bigcup_{i=1}^{n-1} \Theta_i$ . Définissons

$$W_i := \bigcup_{\Delta(\pi) \in \Theta_i} \Delta(\pi) \quad .$$

On obtient une chaîne de sous-variétés  $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_{n-1}$ . Supposons que la dimension de  $X$  soit égale à  $d$ , alors chaque diagonale  $\Delta(\pi)$  est de dimension  $l(\pi) \cdot d$ . On définit par récurrence pour  $i$  de 0 à  $(n-2)$  que

- $\overline{W}_{i+1}$  est la transformée stricte de  $W_{i+1}$  dans  $\overline{Y}_i$ ;
- $\overline{Y}_{i+1}$  est l'éclatement de  $\overline{Y}_i$  de centre  $\overline{W}_{i+1}$ .

On note  $\overline{W}_i^{(j)}$  la transformée stricte de  $W_i$  dans  $Y_j$ , avec  $0 \leq j < i$ .

### Lemme 6.2

(1) Pour  $i = 1, \dots, n-2$ , on a  $\text{Sing}(W_{i+1}) = W_i$ .



- (2) Les  $\overline{W}_i$ , avec  $1 \leq i \leq n-1$ , et les  $\overline{Y}_j$ , avec  $0 \leq j \leq n-1$ , sont toutes des  $S_n$ -variétés lisses.

*Démonstration.*

- (1) Les composantes irréductibles de  $W_{i+1}$  sont des  $\Delta(\pi)$ , avec  $\pi \in \mathcal{P}(N)$  et  $l(\pi) = i+1$ . D'après le lemme précédent, toutes ces composantes sont lisses. Donc  $Sing(W_{i+1})$  est contenue dans des intersections de ces composantes, i.e.

$$Sing(W_{i+1}) \subseteq \bigcup_{\substack{\pi, \pi' \in \Theta_{i+1} \\ \pi \neq \pi'}} (\Delta(\pi) \cap \Delta(\pi')) .$$

Puisque  $\Theta$  est fermé pour l'intersection, et que chaque composante irréductible de  $W_i$  est contenue dans au moins deux composantes irréductibles de  $W_{i+1}$ , on en déduit que le terme droit de l'égalité ci-dessus est contenu dans  $Sing(W_{i+1})$  et est exactement égal à  $W_i$ .

- (2) Il est clair que  $\overline{Y}_0$  et  $\overline{W}_1 = W_1$  sont des  $S_n$ -variétés lisses. Pour tous  $\pi_1, \pi_2 \in \Theta_{i+1}$ ,  $\pi_1 \neq \pi_2$ , il existe un unique  $\pi \in \mathcal{P}(N)$ , avec  $l(\pi) \leq i$ , tel que  $\Delta(\pi_1) \cap \Delta(\pi_2) = \Delta(\pi)$ . Avec même argument utilisé dans la proposition 1.8, on peut montrer que, pour tout  $j < l(\pi)$ , on a

$$\overline{\Delta(\pi_1)}^{(j)} \cap \overline{\Delta(\pi_2)}^{(j)} = \overline{\Delta(\pi)}^{(j)} ,$$

et que pour tout  $j$ , avec  $l(\pi) \leq j < i+1$ ,  $\overline{\Delta(\pi_1)}^{(j)}$  et  $\overline{\Delta(\pi_2)}^{(j)}$  sont disjointes, où  $\overline{\Delta(\pi_1)}^{(j)}$  (resp.  $\overline{\Delta(\pi_2)}^{(j)}$ ) est la transformée stricte de  $\Delta(\pi_1)$  (resp.  $\Delta(\pi_2)$ ) dans  $\overline{Y}_j$ . Par conséquent les composantes irréductibles de  $\overline{W}_{i+1}$  sont deux à deux disjointes. Elles sont toutes lisses, car elles sont isomorphes à des éclatements successifs, de centres lisses, des diagonales de dimension  $d(i+1)$ . Et par suite  $\overline{Y}_{i+1} := Bl_{\overline{W}_{i+1}} \overline{Y}_i$  est lisse. En utilisant le lemme 1.4, on déduit que les  $\overline{W}_i^{(j)}$  et les  $\overline{Y}_i$ , avec  $0 \leq j < i < n$ , sont des  $S_n$ -variétés.

□

**Définition 6.3** On définit la compactification  $\overline{X}[n]$  de  $F(X, n)$  par  $\overline{X}[n] := \overline{Y}_{n-1}$ .

D'après le lemme précédent, on vérifie immédiatement les deux propriétés suivantes,

- $\overline{X}[n]$  est une  $S_n$ -variété lisse et irréductible.
- le morphisme canonique  $\overline{\varphi} : \overline{X}[n] \longrightarrow X^n$  est un  $S_n$ -morphisme propre et birationnel.

### Proposition 6.4

- (1) Pour chaque partition  $\pi \in \mathcal{P}(N)$ , avec  $l(\pi) < n$ , il existe un unique diviseur exceptionnel irréductible, noté  $D(\pi)$ , tel que l'image de  $D(\pi)$  dans  $X^n$  soit égale à la diagonale  $\Delta(\pi)$ . De plus cette correspondance est biunivoque.
- (2) Soient  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i$  des partitions différentes dans  $\mathcal{P}(N)$ , de longueurs inférieures à  $n$ . Alors  $\bigcap_{j=1}^i D(\pi_j) \neq \emptyset$  si et seulement si, quitte à changer les indices, on a  $\pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_i$ . Dans ce cas les  $D(\pi_j)$ ,  $1 \leq j \leq i$ , sont à croisements normaux.
- (3) Il existe une immersion ouverte de  $F(X, n)$  dans  $\bar{X}[n]$ . L'image de  $F(X, n)$  est le complémentaire de la réunion des diviseurs exceptionnels.

*Démonstration.*

- (1) Pour chaque  $\pi \in \mathcal{P}(N)$ , avec  $l(\pi) = l < n$ ,  $\overline{\Delta(\pi)}^{(l-1)}$  est une composante irréductible de  $\overline{W}_l$ . Notons  $D_l(\pi)$  le diviseur exceptionnel irréductible dans  $Y_l$  provenant de  $\overline{\Delta(\pi)}^{(l-1)}$ , et notons  $D(\pi)$  sa transformée stricte dans  $\bar{Y}_n$ . Il est clair que l'image de  $D(\pi)$  dans  $X^n$  est égale à  $\Delta(\pi)$ . On obtient une correspondance biunivoque entre l'ensemble des diviseurs exceptionnels irréductibles et l'ensemble des partitions de longueurs inférieures à  $n$ . Le (1) est vérifié.
- (2) Soient  $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}(N)$  de longueurs plus petites que  $n$ , avec  $\pi_1 \not\leq \pi_2$  et  $\pi_2 \not\leq \pi_1$ . Il existe un unique  $\pi \in \mathcal{P}(N)$  tel que  $\Delta(\pi_1) \cap \Delta(\pi_2) = \Delta(\pi)$  et  $l(\pi) < \min\{l(\pi_1), l(\pi_2)\}$ . Dans  $\bar{Y}_{l(\pi)}$ , qui est l'éclatement de  $\bar{Y}_{l(\pi)-1}$  de centre  $\overline{W}_{l(\pi)}$ , les transformées strictes de  $\Delta(\pi_1)$  et de  $\Delta(\pi_2)$  sont disjointes. Donc  $D(\pi_1)$  et  $D(\pi_2)$  sont disjointes.  
Si  $\pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_i$  sont des éléments de  $\mathcal{P}(N)$ , avec  $l(\pi_i) < n$ , alors on a une chaîne de sous-variétés lisses de  $X^n$ ,

$$\Delta(\pi_1) \subset \Delta(\pi_2) \subset \dots \subset \Delta(\pi_i) \quad .$$

Le lemme 1.3 montre que les  $D(\pi_j)$ , avec  $j = 1, \dots, i$ , sont à croisements normaux et la construction de  $\bar{X}[n]$  montre que tout diviseur exceptionnel provient d'une diagonale ou la transformée stricte d'une diagonale. Le (2) est démontré.

- (3) Puisque  $F(X, n)$  est le complémentaire de la réunion de diagonales, on déduit que le morphisme canonique de  $\bar{X}[n]$  dans  $X^n$  induit un isomorphisme au dessus de  $F(X, n)$ , et par suite on obtient l'immersion ouverte de  $F(X, n)$  dans  $\bar{X}[n]$ . Le point (1) implique que l'image de  $F(X, n)$  est le complémentaire de la réunion des diviseurs exceptionnels.

□

**Proposition 6.5** *Pour l'action de  $S_n$ , le groupe d'isotropie de tout point de  $\bar{X}[n]$  est un groupe abélien.*

*Démonstration.* Le problème est local. L'ensemble des points dans  $\bar{X}[n]$ , dont le groupe d'isotropie est non trivial, est contenu dans la réunion des diviseurs exceptionnels. Prenons un point  $\bar{y}$  dans cette réunion, d'après la proposition précédente, il existe une unique chaîne

$$\pi_1 < \pi_2 < \cdots < \pi_i$$

d'éléments dans  $\mathcal{P}(N)$ , avec  $l(\pi_i) < n$ , telle que les  $D(\pi_j)$ ,  $1 \leq j \leq i$ , soient les seuls diviseurs exceptionnels passant par  $\bar{y}$ . Soit  $y = (x^1, \dots, x^n)$  l'image de  $\bar{y}$  dans  $X^n$ . Le groupe d'isotropie de  $y$ , noté  $G_y$ , est l'ensemble des éléments de  $S_n$  qui fixent la diagonale  $\Delta(\pi_1)$ . Choisissons pour chaque  $j$ , avec  $j = 1, \dots, i$ , un système de paramètres de  $X$  en  $x^j$ . Leur réunion est un système de paramètres de  $X^n$  en  $y$ . On est ainsi tombé dans la même situation que celle du théorème 1.13. Avec les mêmes méthodes, on montre que le groupe d'isotropie du point  $\bar{y}$ , noté  $G_{\bar{y}}$ , est abélien.

En tenant compte du fait que  $G_{\bar{y}} = \{e\}$  pour tout point  $\bar{y}$  en dehors des diviseurs exceptionnels, on en conclut que le groupe d'isotropie de tout point de  $\bar{X}[n]$  est abélien. □

Maintenant on rappelle brièvement la construction de la compactification  $X[n]$ , pour plus de détails voir [12].

La construction est récursive sur  $n$ . Pour  $n = 1$ ,  $X[1] := X$ ; pour  $n = 2$ ,  $X[2] := Bl_{\Delta}(X \times X)$ , où  $\Delta$  est la diagonale dans  $X \times X$ . Supposons qu'on ait construit  $X[n]$ . Notons  $N = \{1, \dots, n\}$ . Pour tout sous-ensemble  $S$  de  $N$  contenant au moins deux éléments, notons  $D(S)$  l'unique diviseur exceptionnel irréductible dans  $X[n]$ , dont l'image, par le morphisme canonique de  $X[n]$  dans  $X^n$ , est  $\Delta(S)$ .

Posons  $N^+ := N \cup \{n+1\}$ ,  $Y_0 := X[n] \times X$  et  $S^+ := S \cup \{n+1\}$ , pour tout  $S \subseteq N$  avec  $S \neq \phi$ .

- Si  $S = \{a\}$ , avec  $1 \leq a \leq n$ , on définit  $Y_0\{a\}^+$  comme le graphe d'immersion de  $X[n]$  dans  $X[n] \times X$  donné par la  $a$ -ième projection,

$$X[n] \longrightarrow X^n \longrightarrow X \quad .$$

- Si  $S \subseteq N$  contenant au moins deux éléments, alors l'image de  $D(S)$  dans  $X^S$  par la projection

$$X[n] \longrightarrow X^n \longrightarrow X^S$$

est la petite diagonale  $\Delta(X^S)$  qui est isomorphe à  $X$ . On définit  $Y_0S^+$  comme le graphe d'immersion de  $D(S)$  dans  $X[n] \times X$ , donnée par

$$D(S) \longrightarrow \Delta(S) \longrightarrow \Delta(X^S) \simeq X \quad .$$

On définit une suite d'éclatements

$$Y_n \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_{k+1} \longrightarrow Y_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_0$$

de la façon suivante,

- $Y_1$  est l'éclatement de  $Y_0$  de centre  $Y_0N^+$ ,
- le morphisme  $\varphi_k : Y_{k+1} \longrightarrow Y_k$  est l'éclatement de  $Y_k$  de centre la réunion disjointe des transformées strictes des  $Y_k S^+$ , pour tout sous-ensemble  $S \subseteq N$  de cardinalité  $(n - k)$ .

On pose  $X[n + 1] := Y_n$ .

La proposition suivante montre la relation entre les deux compactifications,  $X[n]$  et  $\bar{X}[n]$ , de l'espace de configuration  $F(X, n)$ .

**Proposition 6.6** *Il existe un  $S_n$ -morphisme canonique de  $\bar{X}[n]$  dans  $X[n]$ , qui est propre et birationnel, et qui contracte tous les diviseurs exceptionnels dans  $\bar{X}[n]$  associés aux partitions  $\pi \in \mathcal{P}(N)$  contenant au moins deux éléments de cardinalité strictement plus grand que 1.*

*Démonstration.* Posons  $N := \{1, \dots, n\}$ . Pour tout  $a \in N$ , on définit le morphisme  $f_a$  de  $\bar{X}[n]$  dans  $X$  comme la composition du morphisme canonique de  $\bar{X}[n]$  dans  $X^n$  avec la  $a$ -ième projection de  $X^n$  sur  $X$ . On obtient donc pour tout  $S \subseteq N$  un morphisme

$$f_S : \bar{X}[n] \longrightarrow X^S \quad ,$$

qui est induit par les  $f_a$ , avec  $a \in S$ .

Soit  $\mathcal{I}_\Delta$  le faisceau d'idéaux de la petite diagonale dans  $X^S$ . D'après la construction de  $\bar{X}[N] := \bar{X}[n]$ , l'image canonique de  $f_S^*(\mathcal{I}_\Delta)$  dans  $\mathcal{O}_{\bar{X}[N]}$ , notée  $\mathcal{L}_S$ , est de la forme suivante,

$$\mathcal{L}_S = \prod_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(N) \\ \exists S' \in \pi \text{ t.q. } S \subseteq S'}} \mathcal{I}(D(\pi)) \quad ,$$

où  $\mathcal{I}(D(\pi))$  est le faisceau d'idéaux du diviseur exceptionnel  $D(\pi)$ . En particulier  $\mathcal{L}_S$  est inversible.

Supposons qu'il existe  $S_1 \subset S_2 \subseteq N$ , avec  $|S_1| \geq 2$ . Alors on a  $f_{S_1} = h \circ f_{S_2}$ , avec  $h$  la projection canonique de  $X^{S_2}$  sur  $X^{S_1}$ . On a

$$f_{S_1}^*(\mathcal{I}(\Delta_1)) = f_{S_2}^*(h^*(\mathcal{I}(\Delta_2))) \quad ,$$

où  $\Delta_1$  (resp.  $\Delta_2$ ) est la petite diagonale dans  $X^{S_1}$  (resp.  $X^{S_2}$ ), et où  $\mathcal{I}(\Delta_1)$  (resp.  $\mathcal{I}(\Delta_2)$ ) est le faisceau d'idéaux de  $\Delta_1$  (resp.  $\Delta_2$ ). Puisque l'image canonique de  $h^*(\mathcal{I}(\Delta_1))$  dans  $\mathcal{O}_{X^{S_2}}$  est le faisceau d'idéaux de l'image inverse de  $\Delta_1$  dans  $X^{S_2}$  qui contient  $\Delta_2$ , on obtient un morphisme de  $h^*(\mathcal{I}(\Delta_1))$  dans  $\mathcal{I}(\Delta_2)$ . Et par suite on obtient le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc}
f_{S_1}^*(\mathcal{I}(\Delta_1)) & \longrightarrow & f_{S_2}^*(\mathcal{I}(\Delta_2)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{L}_{S_1} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{S_2}
\end{array}$$

En appliquant le théorème 4 dans [12], on déduit qu'il existe un morphisme  $\psi$  de  $\bar{X}[n]$  dans  $X[n]$ , qui est compatible avec les projections  $f_a$ , pour tout  $a \in N$ .

Il est clair que le morphisme  $\psi$  est birationnel et équivariant par rapport à  $S_n$ . Notons  $\bar{\varphi}$  le morphisme canonique de  $\bar{X}[n]$  dans  $X^n$ , et  $\varphi$  le morphisme canonique de  $X[n]$  dans  $X^n$ . On a  $\bar{\varphi} = \varphi \circ \psi$ . Puisque  $\varphi$  et  $\bar{\varphi}$  sont propres, on en déduit que  $\psi$  est aussi propre (Corollary 4.8, [18]).

Le reste, i.e.  $\psi$  contracte des diviseurs exceptionnels, résulte du théorème 3 dans [12] et de la proposition 6.4.

□

## 6.2 Singularités de produits symétriques; résolutions de $Sym^{(3)}X$ et de $Sym^{(4)}X$ .

Supposons que  $X$  soit une variété lisse de dimension  $d$ . Le produit symétrique  $Sym^{(n)}X$  de  $X$ , avec  $n \geq 2$ , est lisse si et seulement si  $d = 1$ , i.e.  $X$  est une courbe, résulte du théorème de Chevalley ([8]). Essayer de résoudre explicitement les singularités de produits symétriques, était une motivation principale de ce travail.

Pour le cas local, le résultat principal des quatre premiers chapitres donne une construction explicite de résolutions. Car  $Sym^{(n)}(\mathbb{C}^d)$  est isomorphe au quotient de l'espace affine  $(\mathbb{C}^d)^n = \mathbb{C}^{nd}$  par  $S_n$  qui est un groupe fini. Comme exemples on développe les cas  $n = 3$  ou 4.

Ensuite on montre que la même méthode, avec des petites modifications, donne des désingularisations globales de  $Sym^{(3)}X$  et de  $Sym^{(4)}X$  pour toute  $X$  quasi-projective et lisse.

### 1. Désingularisation de $Sym^{(3)}(\mathbb{C}^d)$ .

D'abord  $Sym^{(3)}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}^{3d}/S_3$ . Prenons un système de coordonnées de  $\mathbb{C}^{3d}$ , noté  $\{x_1^1, \dots, x_d^1; x_1^2, \dots, x_d^2; x_1^3, \dots, x_d^3\}$ . Le seul sous-groupe non abélien de  $S_3$  est  $S_3$  tout entier. Son commutateur est  $\{e, \sigma = (123), \sigma^2 = (132)\}$ , dont le sous-espace invariant est la petite diagonale  $\Delta$ , avec

$$\Delta := \{(x_1^1, \dots, x_d^1; x_1^2, \dots, x_d^2; x_1^3, \dots, x_d^3) \mid x_j^1 = x_j^2 = x_j^3, 1 \leq j \leq d\} \quad .$$

Soient  $Bl_\Delta(\mathbb{C}^{3d})$  l'éclatement de  $\mathbb{C}^{3d}$  de centre  $\Delta$  et  $E_\Delta$  le diviseur exceptionnel dans  $Bl_\Delta(\mathbb{C}^{3d})$ . D'après le théorème 1.13, le groupe d'isotropie de tout point dans  $Bl_\Delta(\mathbb{C}^{3d})$  est abélien. Plus précisément on a la proposition suivante.

**Proposition 6.7** Dans  $Bl_{\Delta}(\mathbb{C}^{3d})$ , l'ensemble des points dont le groupe d'isotropie est non trivial est une sous-variété lisse avec huit composantes irréductibles. Ces composantes forment trois classes suivantes.

- (1) Les transformées strictes des trois grandes diagonales,  $\overline{\Delta}_{\{12\}}$ ,  $\overline{\Delta}_{\{13\}}$ ,  $\overline{\Delta}_{\{23\}}$ .
- (2) Deux sous-variétés irréductibles, notées  $W_1, W_2$ , fixes par les 3-cycles. Elles sont contenues dans le diviseur exceptionnel  $E_{\Delta}$ .
- (3) Trois sous-variétés lisses irréductibles contenues dans  $E_{\Delta}$ , notées  $V_{12}, V_{13}, V_{23}$ . Chaque  $V_{ij}$ , avec  $1 \leq i < j \leq 3$ , est fixe par la transposition  $(ij)$ .

*Démonstration.* Pour tout élément  $g \in S_3$ , et pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $g$ , on note  $Q_g(\lambda)$  le sous-espace propre de  $g$  dans  $\mathbb{C}^{3d}$  correspondant à la valeur propre  $\lambda$ .

Chaque transposition  $\tau = (ij)$ , avec  $1 \leq i < j \leq 3$ , a deux valeurs propres distinctes,  $+1$  et  $-1$ . Dans  $Bl_{\Delta}(\mathbb{C}^{3d})$ , l'ensemble des points fixes de  $\tau$  est une sous-variété lisse avec deux composantes irréductibles. L'une est la transformée stricte de la grande diagonale  $\Delta_{\{ij\}}$ , qui est l'espace propre correspondant à la valeur propre  $+1$ . L'autre est l'intersection du diviseur exceptionnel  $E_{\Delta}$  avec la transformée stricte de la somme directe  $(\Delta \oplus Q_{\tau}(-1))$ , notée  $V_{\{ij\}}$ .

Chaque 3-cycle  $\sigma$  a trois valeurs propres distinctes,  $1, \omega, \omega^2$ , où  $\omega := \exp(2i\pi/3)$ . Puisque  $\Delta$  est l'espace propre de  $\sigma$  correspondant à la valeur propre  $1$ , alors l'ensemble des points fixes de  $\sigma$  dans  $Bl_{\Delta}(\mathbb{C}^{3d})$  est une sous-variété lisses avec deux composantes irréductibles. L'une est l'intersection du diviseur exceptionnel  $E_{\Delta}$  avec la transformée stricte de la somme directe  $(\Delta \oplus Q_{\sigma}(\omega))$ , notée  $E_{\Delta} \cap (\overline{\Delta \oplus Q_{\sigma}(\omega)})$ . L'autre est  $E_{\Delta} \cap (\Delta \oplus Q_{\sigma}(\omega^2))$ . Comme il n'y a que deux 3-cycles, l'un est l'inverse de l'autre, on déduit qu'il existe deux sous-variétés irréductibles fixes par les 3-cycles, notées respectivement  $W_1, W_2$ . La proposition est démontrée. □

**Affirmation 6.8** Notons  $\tilde{Y}$  l'éclatement de  $Bl_{\Delta}(\mathbb{C}^{3d})$  de centre la réunion disjointe des huit sous-variétés,  $W_1, W_2, V_{ij}$  et  $\overline{\Delta_{\{ij\}}}$ , avec  $1 \leq i < j \leq 3$ . Alors  $\tilde{Y}$  est une  $S_3$ -variété lisse et  $\tilde{Y}/S_3$  est une désingularisation de  $Sym^{(3)}(\mathbb{C}^d)$ .

*Démonstration.* Puisque le centre de l'éclatement est une sous-variété lisse et stable par  $S_3$ , d'après le lemme 1.4, on déduit que  $\tilde{Y}$  est une  $S_3$ -variété lisse. Notons  $R$  l'ensemble des points dans  $\tilde{Y}$  dont le groupe d'isotropie est non trivial. On vérifie facilement que  $R$  est la réunion disjointe des huit diviseurs exceptionnels provenant des  $W_1, W_2, V_{ij}$  et  $\overline{\Delta_{\{ij\}}}$ , avec  $1 \leq i < j \leq 3$ . De plus pour tout point  $\tilde{y}$  dans  $R$ , chaque élément de  $S_3$  qui fixe  $\tilde{y}$  fixe la composante irréductible de  $R$  passant par  $\tilde{y}$ . Ceci implique que l'ensemble des points fixes de tout élément de  $S_3 \setminus \{e\}$  est un diviseur lisse. D'après le théorème de Chevalley, on en déduit que  $\tilde{Y}/S_3$  est lisse. D'autre part les diviseurs exceptionnels dans  $\tilde{Y}/S_3$  se projettent sur l'image des diagonales de  $(\mathbb{C}^d)^3$  dans  $Sym^{(3)}(\mathbb{C}^d)$ , qui est exactement le lieu singulier de  $Sym^{(3)}(\mathbb{C}^d)$ . Par conséquent  $\tilde{Y}/S_3$  est une désingularisation de  $Sym^{(3)}(\mathbb{C}^d)$ .

□

**Remarque 6.9** *Si on suit la ligne de la démonstration du résultat principal montré dans les quatre premiers chapitres, alors*

- (1)  $Bl_\Delta(\mathbb{C}^{3d})$  est un  $S_3$ -modèle équivariant abélien de  $(\mathbb{C}^d)^3$ ,
- (2) les strates de la stratification  $\mathcal{S}$  de  $Bl_\Delta(\mathbb{C}^{3d})$  sont:  $W_1, W_2, V_{ij}, \overline{\Delta}_{\{ij\}} \cap E_\Delta, \overline{\Delta}_{\{ij\}} \setminus E_\Delta, E_\Delta \setminus (W_1 \cup W_2 \cup V_{ij} \cup \Delta_{\{ij\}}), Bl_\Delta(\mathbb{C}^{3d}) \setminus (E_\Delta \cup \Delta_{\{ij\}})$ , avec  $1 \leq i < j \leq 3$ ,
- (3) on obtient le recouvrement de  $Bl_\Delta(\mathbb{C}^{3d})$  constitué des ouverts qui sont isomorphes à des ouverts de variétés toriques, ensuite les modifications toriques sont exactement des traductions des éclatements précédents en termes subdivisions des éventails.

**Remarque 6.10** *En général pour une variété  $X$  quasiprojective et lisse, avec  $\dim(X) \geq 2$ , le recouvrement par des ouverts qui sont isomorphes à des ouverts de variétés toriques n'existe plus. Donc on ne peut plus utiliser des modifications localement toriques. Mais les éclatements de centres lisses ont encore un sens. On peut montrer que le groupe d'isotropie de tout point dans  $Bl_\Delta(X^3)$  est abélien, où  $\Delta$  est la petite diagonale dans  $X^3$ . Et dans la démonstration, on doit interpréter  $W_1$ , (resp.  $W_2, V_{12}, V_{13}, V_{23}$ ) comme un sous-fibré de  $E_\Delta$ , qui est un fibré projectif sur  $\Delta$ . Avec des vérifications locales, on montre que l'affirmation 6.8 est encore vraie. Par conséquent on obtient une désingularisation de  $Sym^{(3)}X$ .*

## 2. Désingularisation de $Sym^{(4)}(\mathbb{C}^d)$ .

Comme précédemment,  $Sym^{(4)}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}^{4d}/S_4$ . Prenons un système de coordonnées de  $\mathbb{C}^{4d}$ , noté  $\{x_1^1, \dots, x_d^1; \dots; x_1^4, \dots, x_d^4\}$  ou simplement  $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ . Définissons

$$\begin{aligned} \Delta &:= \{x^1 = x^2 = x^3 = x^4, \text{ i.e. } x_i^1 = x_i^2 = x_i^3 = x_i^4, i = 1, \dots, d\} \quad , \\ \Delta_{(ijk)} &:= \{x^i = x^j = x^k\}, \text{ avec } 1 \leq i < j < k \leq 4 \quad , \\ \Delta_{(ij)(kl)} &:= \{x^i = x^j, x^k = x^l\}, \text{ avec } \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\} \quad , \\ \Delta_{(ij)} &:= \{x^i = x^j\}, \text{ avec } 1 \leq i < j \leq 4 \quad . \end{aligned}$$

Dans  $Bl_\Delta(\mathbb{C}^{4d})$  les transformées strictes des diagonales de dimension  $2d$ , i.e. les  $\Delta_{(ij)(kl)}$  et les  $\Delta_{(ijk)}$ , sont deux à deux disjointes. Éclatons  $Bl_\Delta(\mathbb{C}^{4d})$  de centre la réunion disjointe de ces sept sous-variétés lisses, et notons  $Y$  cet éclatement. D'après le théorème 1.13,  $Y$  est un modèle équivariant abélien.

Dans la suite on donne juste des énoncés et des indications de chaque étape, et on omet les calculs détaillés. Les vérifications des assertions du lemme 6.12 et de la proposition 6.13 sont directes. Pour la construction de  $\tilde{Y}$ , les techniques sont les mêmes que celles utilisées dans la démonstration du théorème 4.1, i.e. d'abord utiliser des isomorphismes locaux pour se ramener au cas des variétés toriques, ensuite pour des modifications locales on utilise la description en termes de subdivisions des éventails de l'éclatement de centre l'adhérence d'une orbite du tore.

**Notations 6.11** Pour chaque élément  $\sigma \in S_4$ , si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\sigma$ , on note  $Q_\sigma(\lambda)$  le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ . Si  $Q$  est un sous-espace de  $\mathbb{C}^{4d}$ , on note  $\overline{Q}$  la transformée stricte de  $Q$  dans  $Y$ .

Posons  $V^\sigma := \{y \in Y \mid \sigma(y) = y\}$ , et notons  $E_\Delta$  (resp.  $E_{(ijk)}$ ,  $E_{(ij)(kl)}$ ) le diviseur exceptionnel dans  $Y$  qui se contracte sur  $\Delta$  (resp.  $\Delta_{(ijk)}$ ,  $\Delta_{(ij)(kl)}$ ).

**Lemme 6.12** Dans  $Y$ , l'ensemble des points fixes d'un élément de  $S_4 \setminus \{e\}$  est de l'une des quatre formes suivantes. Pour chaque  $\sigma \in S_4$ , on donne la décomposition de  $V^\sigma$  en composantes irréductibles.

(i)  $f = (ij)$ .

$V_f = V_{f1} \cup V_{f2} \cup V_{f3} \cup V_{f4} \cup V_{f5}$ , avec

$V_{f1} := E_\Delta \cap (\overline{Q_f(-1) \oplus \Delta})$ ;

$V_{f2} := E_{(ijk)} \cap (\overline{\Delta_{(ijk)} \oplus Q_f(-1)})$ ,  $V_{f3} := E_{(ijl)} \cap (\overline{\Delta_{(ijl)} \oplus Q_f(-1)})$ ,

avec  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ;

$V_{f4} := \overline{E_{(ij)(kl)} \cap (\Delta_{(ij)(kl)} \oplus Q_f(-1))}$ ;

$V_{f5} := \Delta_{(ij)}$ .

$V_{f1}$  est de dimension  $2d - 1$ ,  $V_{f2}$  et  $V_{f3}$  sont de dimension  $3d - 1$  et dans la même orbite,

$V_{f4}$  est de dimension  $3d - 1$ , et  $V_{f5}$  est de dimension  $3d$ .

(ii)  $g = (ijk)$ .

$V_g = V_{g1} \cup V_{g2} \cup V_{g3} \cup V_{g4}$ , avec

$V_{g1} := E_\Delta \cap (\overline{Q_g(\omega) \oplus \Delta})$  avec  $\omega := \exp(\frac{2i\pi}{3})$ ,

$V_{g2} := E_\Delta \cap (\overline{\Delta \oplus Q_g(\omega^2)})$ ;

$V_{g3} := E_{(ijk)} \cap (\overline{\Delta_{(ijk)} \oplus Q_g(\omega)})$ ,  $V_{g4} := E_{(ijk)} \cap (\overline{\Delta_{(ijk)} \oplus Q_g(\omega^2)})$ .

$V_{g1}$  et  $V_{g2}$  sont dans la même orbite et de dimension  $2d - 1$ ,

$V_{g3}$  et  $V_{g4}$  sont dans la même orbite et de dimension  $3d - 1$ .

(iii)  $h = (ijkl)$ .

$V_h = V_{h1} \cup V_{h2} \cup V_{h3} \cup V_{h4}$ , avec

$V_{h1} := E_\Delta \cap (\overline{\Delta \oplus Q_h(i)})$ ,  $V_{h2} := E_\Delta \cap (\overline{\Delta \oplus Q_h(-i)})$ ;

$V_{h3} := E_\Delta \cap E_{(ik)(jl)} \cap (\overline{\Delta_{(ik)(jl)} \oplus Q_h(i)})$ ,  $V_{h4} := E_\Delta \cap E_{(ik)(jl)} \cap (\overline{\Delta_{(ik)(jl)} \oplus Q_h(-i)})$ .

$V_{h1}$  et  $V_{h2}$  sont dans la même orbite et de dimension  $2d - 1$ ,

$V_{h3}$  et  $V_{h4}$  sont dans la même orbite et de dimension  $3d - 2$ .

(iv)  $k = (i_1 i_2)(i_3 i_4)$ .

$V_k = V_{k1} \cup V_{k2} \cup V_{k3} \cup V_{k4}$ , avec

$V_{k1} := E_\Delta \cap (\overline{\Delta \oplus Q_k(-1)})$  qui est de dimension  $3d - 1$ ;

$V_{k2} := E_{(i_1 i_2)(i_3 i_4)}$  qui est de dimension  $4d - 1$ ;

$V_{k3} := E_\Delta \cap E_{(i_1 i_3)(i_2 i_4)} \cap (\overline{\Delta_{(i_1 i_3)(i_2 i_4)} \oplus Q_k(1)})$ ,  $V_{k4} := E_\Delta \cap E_{(i_1 i_4)(i_2 i_3)} \cap (\overline{\Delta_{(i_1 i_4)(i_2 i_3)} \oplus Q_k(1)})$ ,

$V_{k3}$  et  $V_{k4}$  sont dans la même orbite et de dimension  $3d - 2$ .



Notons  $R$  l'ensemble des points de  $Y$  dont le groupe d'isotropie est non trivial. Posons  $\mathcal{Z} := \{Z \in \mathcal{S} \mid Z \subset R\}$ , où  $\mathcal{S}$  est la stratification de  $Y$  définie comme dans le paragraphe 2.1. Maintenant déterminons les strates dans  $\mathcal{Z}$ .

**Propriétés 6.13** *Pour chaque strate  $Z$ , on note  $G_0$  le groupe d'isotropie commun de tout point de  $Z$ , et on note  $G_1$  le groupe de stabilisateur de  $Z$ . Les strates  $Z \in \mathcal{S}$  incluses dans  $R$  sont, suivant l'ordre décroissant de dimension, de formes suivantes. Les adhérences des strates de même classe sont deux à deux disjointes.*

a)  $\mathcal{Z} \cap \mathcal{S}_{4d-1}$ :

- $\mathcal{Z}_1 := \{\sigma(E_{(12)(34)}) \mid \sigma \in S_4\}$ .

*Soit  $x$  le point générique de  $E_{(12)(34)}$ . Alors  $G_0 = G_x = \{(12)(34), e\}$ ,*

$$G_1 = \{(12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423), e\},$$

$$[S_4 : G_1] = 3.$$

*Il y a trois strates dans cette classe.*

b)  $\mathcal{Z} \cap \mathcal{S}_{4d-2}$ :

- $\mathcal{Z}_2 := \{\sigma(E_{(12)(34)} \cap E_\Delta) \mid \sigma \in S_4\}$ .

*Soit  $x$  le point générique de  $E_{(12)(34)} \cap E_\Delta$ . Alors  $G_0 = G_x = \{(12)(34), e\}$ ,*

$$G_1 = \{(12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423), e\},$$

$$[S_4 : G_1] = 3.$$

*Il y a trois strates dans cette classe.*

c)  $\mathcal{Z} \cap \mathcal{S}_{3d}$ :

- $\mathcal{Z}_3 := \{\sigma(\overline{\Delta_{(12)}}) \mid \sigma \in S_4\}$ .

*Soit  $x$  le point générique de  $\overline{\Delta_{(12)}}$ . Alors  $G_0 = G_x = \{(12), e\}$ ,  $G_1 = \{(12), (34), (12)(34), e\}$ .*

$$[S_4 : G_1] = 6.$$

*Il y a six strates dans cette classe.*

d)  $\mathcal{Z} \cap \mathcal{S}_{3d-1}$ :

- $\mathcal{Z}_4 := \{\sigma(V_{f_4}) = \sigma(\overline{\Delta_{(34)}} \cap E_{(12)(34)}) \mid \sigma \in S_4\}$ .

$$G_0 = G_1 = \{(12), (34), (12)(34), e\}.$$

*Il y a six strates dans cette classe. Elles sont minimales, fermées, deux à deux disjointes.*

- $\mathcal{Z}'_4 := \{\sigma(E_\Delta \cap \overline{\Delta_{(12)}}) \mid \sigma \in S_4\}$ .

$$G_0 = \{(12)\}, G_1 = \{(12), (34), (12)(34), e\}.$$

*Il y a six strates dans cette classe.*

- $\mathcal{Z}''_4 := \{\sigma(E_{(123)} \cap \overline{\Delta_{(12)}}) \mid \sigma \in S_4\}$ .

$$G_0 = G_1 = \{(12), e\}.$$

*Il y a douze composantes.*

- $\mathcal{Z}_5 := \{\sigma(V_{f_2}) \mid \sigma \in S_4\}$  avec  $f = (12)$  et  $V_{f_2} = E_{(123)} \cap \overline{(\Delta_{(123)} \oplus Q_f(-1))}$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(12), e\}$ .

*Il y a douze composantes.*

- $\mathcal{Z}_6 := \{\sigma(V_{g_3}) = \sigma(E_{(123)} \cap \overline{(\Delta_{(123)} \oplus Q_g(\omega))}) \mid \sigma \in S_4\}$ , avec  $g = (123)$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(123), (132), e\}$ .

*Il y a huit composantes.*

- $\mathcal{Z}_7 := \{\sigma(V_{k_1}) \mid \sigma \in S_4\}$  avec  $k = (12)(34)$  et  $V_{k_1} := E_\Delta \cap \overline{(\Delta \oplus Q_k(-1))}$ .  
 $G_0 = \{(12)(34), e\}$ ,  
 $G_1 = \{(12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1423), (1324), e\}$ .

*Il y a trois composantes.*

e)  $\mathcal{Z} \cap \mathcal{S}_{3d-2}$ :

- $\mathcal{Z}_8 := \{\sigma(V_{h_3}) \mid \sigma \in S_4\}$  avec  $h = (1234)$  et  $V_{h_3} := E_\Delta \cap E_{(13)(24)} \cap \overline{(\Delta_{(13)(24)} \oplus Q_h(i))}$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(1234), (13)(24), (1432), e\}$ .

*Il y a six composantes.*

- $\mathcal{Z}_9 := \{\sigma(V_{k_3}) \mid \sigma \in S_4\}$  avec  $k = (12)(34)$  et  $V_{k_3} := E_\Delta \cap E_{(13)(24)} \cap \overline{(\Delta_{(13)(24)} \oplus Q_k(1))}$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23), e\}$ .

*Il y a six composantes.*

- $\mathcal{Z}_{10} := \{\sigma(E_\Delta \cap V_{f_2}) \mid \sigma \in S_4\}$  avec  $f = (12)$  et  $V_{f_2} := E_{(123)} \cap \overline{(\Delta_{(123)} \oplus Q_f(-1))}$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(12), e\}$ .

*Il y a douze composantes.*

- $\mathcal{Z}_{11} := \{\sigma(E_\Delta \cap V_{g_3}) \mid \sigma \in S_4\}$  avec  $g = (123)$  et  $V_{g_3} := E_{(123)} \cap \overline{(\Delta_{(123)} \oplus Q_g(\omega))}$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(123), (132), e\}$ .

*Il y a huit composantes.*

- $\mathcal{Z}_{12} = \{\sigma(E_\Delta \cap E_{(123)} \cap \overline{\Delta_{(12)}}) \mid \sigma \in S_4\}$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(12), e\}$ .

*Il y a douze composantes.*

- $\mathcal{Z}_{13} := \{\sigma(E_\Delta \cap V_{f_4}) \mid \sigma \in S_4\}$  avec  $f = (12)$  et  $V_{f_4} := E_{(12)(34)} \cap \overline{\Delta_{(12)}}$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(12), (34), (12)(34), e\}$ .

*Il y a six composantes qui sont toutes fermées.*

f)  $\mathcal{Z} \cap \mathcal{S}_{2d-1}$ :

- $\mathcal{Z}_{14} := \{\sigma(V_{f_1}) \mid \sigma \in S_4\}$  avec  $f = (12)$  et  $V_{f_1} := E_\Delta \cap \overline{(\Delta \oplus Q_f(-1))}$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(12), (34), (12)(34), e\}$ .

*Il y a six composantes qui sont toutes fermées.*

- $\mathcal{Z}_{15} := \{\sigma(V_{g1}) \mid \sigma \in S_4\}$  avec  $g = (123)$  et  $V_{g1} := E_\Delta \cap \overline{(\Delta \oplus Q_g(\omega))}$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(123), (132), e\}$ .  
*Il y a huit composantes qui sont toutes fermées.*
- $\mathcal{Z}_{16} := \{\sigma_{h1} \mid \sigma \in S_4\}$  avec  $h = (1234)$  et  $V_{h1} = E_\Delta \cap \overline{(\Delta \oplus Q_h(i))}$ .  
 $G_0 = G_1 = \{(1234), (13)(24), (1432), e\}$ .  
*Il y a six composantes qui sont toutes fermées.*

L'image inverse du lieu singulier de  $Y/S_4$  dans  $Y$  est contenue dans la réunion des transformées strictes des grandes diagonales  $\overline{\Delta}_{(ij)}$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , et des diviseurs exceptionnels  $E_\Delta, E_{(ijk)}$  avec  $1 \leq i < j < k \leq 4$ .

L'image du point générique de  $E_{(ij)(kl)}$  dans  $Y/S_4$  est un point lisse, car le groupe d'isotropie de ce point est localement un groupe de réflexions. Par conséquent le lieu singulier de  $Y/S_4$  est la réunion des images des strates dans  $\mathcal{Z}_i$  avec  $i \geq 3$ .

Les adhérences des strates de  $\mathcal{Z}_3, \mathcal{Z}_5, \mathcal{Z}_6, \mathcal{Z}_7, \mathcal{Z}_8$  et  $\mathcal{Z}_{15}$  forment cinq classes, dont les images dans  $Y/S_4$  sont des composantes irréductibles du lieu singulier. Parmi elles seulement celles de  $\mathcal{Z}_3$  et de  $\mathcal{Z}_7$  ont des intersections non vides, les autres sont deux à deux disjointes.

On va construire  $\tilde{Y}$  en plusieurs étapes.

- 1<sup>er</sup> étape: Modifications sur  $\mathcal{Z}_{15}$ .

Il y a huit strates. On éclate  $Y$  de centre la réunion de ces huit strates. Dans chaque diviseur exceptionnel qui se contracte en une de ces strates, il y a deux sous-variétés irréductibles et lisses dont les points ont des groupes d'isotropies non triviaux. On continue d'éclater ces deux sous-variétés, alors dans les deux nouveaux diviseurs exceptionnels, le groupe d'isotropie de tout point devient localement un groupe de pseudo-réflexions.

Faisons les mêmes éclatements pour toutes ces huit strates, Notons  $Y_1$  la variété obtenue. Alors  $Y_1/G$  désingularise les singularités de  $Y/S_4$  sur l'image commune de ces huit strates.

- 2<sup>ème</sup> étape: Modifications sur  $\overline{\mathcal{Z}_5}$ .

Il y a douze strates dans la famille  $\mathcal{Z}_5$ . L'adhérence de chaque strate contient une strate de type  $\mathcal{Z}_{10}$ . Prenons  $V_{f2}$  avec  $f = (12)$  comme un représentant. La strate de  $\mathcal{Z}_{10}$  correspondante est  $V_{f2} \cap E_\Delta$ . Le morphisme de  $Y_1$  dans  $Y$  est un isomorphisme au voisinage de l'image inverse de  $\overline{V_{f2}}$ . le groupe d'isotropie de tout point de  $\overline{V_{f2}}$  est d'ordre 2. Par conséquent, l'éclatement de  $Y_1$  de centre  $\bigcup_{\sigma \in S_4} \sigma(\overline{V_{f2}})$ , noté  $Y_2$ , est une  $S_4$ -variété lisse. De plus  $Y_2/S_4$  désingularise les singularités de  $Y/S_4$  qui se trouvent sur l'image des strates de  $\mathcal{Z}_5$  et de  $\mathcal{Z}_{10}$ .

- 3<sup>ème</sup> étape: Modifications sur  $\overline{\mathcal{Z}}_6$ .

Il y a huit strates dans  $\mathcal{Z}_6$ . L'adhérence de chaque strate contient une strate de type  $\mathcal{Z}_{11}$ . Prenons  $V_{g_3}$  avec  $g = (123)$  comme un représentant. La strate de  $\mathcal{Z}_{11}$  correspondante est  $V_{g_3} \cap E_\Delta$ . Si on éclate  $\overline{V_{g_3}}$ ,  $g$  fixe le nouveau diviseur exceptionnel, donc est localement un pseudo-reflexion. Notons  $Y_3$  l'éclatement de  $Y_2$  de centre de la réunion disjointe des  $\sigma(\overline{V_{g_3}})$  avec  $\sigma \in S_4$ . D'après l'analyse précédente, on déduit que  $Y_3/S_4$  désingularise les singularités de  $Y/S_4$  qui se trouvent sur l'image des strates de  $\mathcal{Z}_6$  et de  $\mathcal{Z}_{10}$ .

- 4<sup>ème</sup> étape: Modifications sur  $\overline{\mathcal{Z}}_7$ .

Notons  $Y_4$  l'éclatement de  $Y_3$  de centre la réunion disjointe des  $\overline{V}$  avec  $V \in \mathcal{Z}_7$ . Alors  $Y_4/S_4$  désingularise la singularité de  $Y/S_4$  qui se trouve en l'image du point générique d'une strate de  $\mathcal{Z}_7$ .

Déterminons les nouvelles strates dont l'image dans le quotient est contenue dans le lieu singulier  $Sing(Y_3/S_4)$ . Pour cela, il faut considérer l'image inverse des strates de type  $\mathcal{Z}_9$ ,  $\mathcal{Z}_{14}$  et  $\mathcal{Z}_{16}$ .

- (1) L'image inverse de chaque strate dans  $\mathcal{Z}_{14}$  (resp. dans  $\mathcal{Z}_{16}$ ) est une sous-variété lisse de dimension  $3d - 1$  et à groupe d'isotropie constant. Le groupe d'isotropie commun, pour chaque strate, est d'ordre 4 avec un pseudo-reflexion. Notons  $\mathcal{Z}'_{14}$  (resp.  $\mathcal{Z}'_{16}$ ) l'ensemble de ces nouvelles strates. alors les singularités de  $Y_4/S_4$  le long l'image des strates dans  $\mathcal{Z}'_{14}$  (resp.  $\mathcal{Z}'_{16}$ ) sont toutes isomorphes à des singularités quotients par un groupe d'ordre 2. (ref. [33])
- (2) L'image inverse de chaque strate dans  $\mathcal{Z}_9$  est une sous-variété lisse à groupe d'isotropie constant, qui est d'ordre 4 et engendré par deux réflexions. Par conséquent  $Y_4/S_4$  désingularise les singularités de  $Y/S_4$  qui se trouvent sur l'image des strates de  $\mathcal{Z}_9$ .

On peut résumer ces calculs comme suit.

Soit  $Y_4$  l'éclatement de  $Y_3$  au centre l'adhérence des strates dans  $\mathcal{Z}_7$ , alors  $Y_4/S_4$  désingularise les singularités de  $Y/S_4$ , qui se trouvent sur l'image des strates dans  $\mathcal{Z}_9$ , et aussi la singularité sur l'image du point générique de  $\mathcal{Z}_7$ . L'image des  $V$ , avec  $V \in \mathcal{Z}'_{16}$ , est une composante connexe du lieu singulier dans  $Y_4/S_4$ . Les singularités en chaque point de cette composante sont isomorphes à des singularités quotient par un groupe d'ordre 2.

- 5<sup>ème</sup> étape: Modifications sur  $\overline{\mathcal{Z}}_3$ .

Soit  $Y_5$  l'éclatement de  $Y_4$  de centre la réunion disjointe des transformées strictes des grandes diagonales  $\Delta_{(ij)}$ , avec  $1 \leq i < j \leq 4$ . Alors  $Y_5/S_4$  désingularise la singularité

de  $Y_4/S_4$  qui se trouve sur le point générique de l'image des  $\overline{\Delta_{(ij)}}$ , avec  $1 \leq i < j \leq 4$ . L'image inverse, dans  $Y_5$ , de chaque strate de type  $\mathcal{Z}_4$  (resp.  $\mathcal{Z}'_4, \mathcal{Z}''_4, \mathcal{Z}_{12}, \mathcal{Z}_{13}, \mathcal{Z}'_{14}$ ), est une sous-variété lisse à groupe d'isotropie constant, et le groupe d'isotropie commun est localement un groupe de réflexions. Par conséquent  $Y_5/S_4$  désingularise les singularités de  $Y/S_4$  qui se trouvent sur l'image des strates de types  $\mathcal{Z}_4, \mathcal{Z}'_4, \mathcal{Z}''_4, \mathcal{Z}_{12}, \mathcal{Z}_{13}$  et  $\mathcal{Z}_{14}$ . Le lieu singulier de  $Y_5/S_4$ , noté  $Sing(Y_5/S_4)$ , a deux composantes connexes. L'une est l'image des strates de type  $\mathcal{Z}_8$ , l'autre est l'image des strates de type  $\mathcal{Z}'_{16}$ . Ces deux composantes sont des sous-variétés lisses. Les singularités de  $Y_5/S_4$  sont toutes isomorphes à des singularités quotient d'une variété lisse par un groupe d'ordre 2.

- 6<sup>ème</sup> étape: Modifications sur  $\mathcal{Z}'_{16}$ .

Chaque strate  $W$  dans  $\mathcal{Z}'_{16}$  est l'image inverse, dans  $Y_4$  (l'étape 4), d'une strate  $V$  de type  $\mathcal{Z}'_{16}$ . On éclate  $W$ . Notons  $E_W$  le diviseur exceptionnel provenant de  $W$ . Dans  $E_W$ , l'ensemble des points dont le groupe d'isotropie est non trivial est la réunion disjointe de deux sous-variétés lisses et irréductibles. L'une est de dimension  $3d - 1$ , notée  $W_1$ . L'autre est de dimension  $4d - 2$ , notée  $W_2$ . Éclatons de nouveau  $W_1$ , et notons  $E_{W_1}$  le nouveau diviseur exceptionnel. Ensuite on contracte la transformée stricte du diviseur exceptionnel  $E_W$ . Faisons la même chose pour toutes les six strates de type  $\mathcal{Z}'_{16}$ . Notons  $Y_6$  la variété obtenue. On peut vérifier que  $Y_6/S_4$  désingularise les singularités de  $Y/S_4$  qui se trouvent sur l'image des strates  $V \in \mathcal{Z}'_{16}$ .

- 7<sup>ème</sup> étape: Modifications sur  $\mathcal{Z}_8$ .

Chaque strate de type  $\mathcal{Z}_8$  est une sous-variété lisse et fermée de  $Y_6$ , et a un voisinage ouvert qui est isomorphe à un ouvert d'une variété torique. En effet au voisinage d'une strate  $V \in \mathcal{Z}_8$ ,  $Y_6$  est isomorphe à l'éclatement de  $Bl_{\Delta}(\mathbb{C}^{4d})$  de centre une des 3 transformées strictes  $\overline{\Delta_{(ij)(kl)}}$ . A l'aide de ces structures localement toriques, on peut faire des éclatements et des contractions suivantes. On éclate  $V$ , et note  $E_V$  le diviseur exceptionnel provenant de  $V$ . Dans  $E_V$ , l'ensemble des points dont le groupe d'isotropie est non trivial est la réunion disjointe de deux sous-variétés lisses et irréductibles. L'une est de dimension  $3d - 2$ , notée  $W_1$ . L'autre est de dimension  $4d - 2$ , notée  $W_2$ . On éclate  $W_1$ , et note  $E_{W_1}$  le nouveau diviseur exceptionnel. Ensuite on contracte la transformée stricte du diviseur exceptionnel  $E_V$ . Faisons la même chose pour toutes les six strates de type  $\mathcal{Z}_8$ . Notons  $Y_7$  la variété obtenue. On vérifie que  $Y_7/S_4$  désingularise les singularités de  $Y/S_4$  qui se trouvent sur l'image des strates  $V \in \mathcal{Z}_8$ .

Finalement posons  $\tilde{Y} := Y_7$ . Alors le morphisme de  $\tilde{Y}$  dans  $Y$  (resp. dans  $\bar{Y}_0 := X^n$ ) est propre, birationnel et équivariant par rapport à  $S_4$ . De plus  $\tilde{Y}/S_4$  désingularise  $\bar{Y}_0/S_4$  qui est le produit symétrique  $Sym^{(4)}(C^d)$ .

**Remarque 6.14** *La stratification  $\mathcal{S}$  du modèle équivariant abélien  $Y$  est la réunion de  $\mathcal{Z}$  avec*

*l'ensemble des strates dont le groupe d'isotropie de tout point est trivial. Ce dernier ensemble est constitué des strates de formes suivantes.*

- $Y \setminus (E_\Delta \cup E_{\{ijk\}} \cup E_{\{(ij)(kl)\}} \cup \overline{\Delta}_{\{ij\}})$ , qui est l'unique strate ouverte;
- $E_{\{ijk\}} \setminus (E_\Delta \cup (\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z))$ ,  $E_\Delta \setminus (E_{\{ijk\}} \cup (\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z))$ , qui sont des strates de dimension  $4d - 1$ ;
- $(E_\Delta \cap E_{\{ijk\}}) \setminus (\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z)$ , qui est de dimension  $4d - 2$ , avec  $1 \leq i < j < k \leq 4$ .

**Remarque 6.15** *En général pour une variété  $X$  quasiprojective irréductible et lisse, avec  $\dim(X) \geq 2$ , on peut construire le modèle équivariant abélien  $Y$  et stratifier  $Y$  de même manière que précédemment. Ceci résulte des calculs locaux et de la connexité de  $X$ . Ensuite les cinq premières modifications dans la construction de  $\tilde{Y}$ , qui consistent seulement des éclatements de centres lisses, sont donc bien définies dans ce cas général. Notons encore  $Y_5$  la variété obtenue à partir de  $Y$  en faisant ces cinq étapes d'éclatements,  $Y_5$  est une  $S_4$ -variété. Les vérifications locales montrent que dans  $Y_5/S_4$ , le lieu singulier est la réunion disjointe de deux sous-variétés lisses et irréductibles, qui sont des images des strates de types  $\mathcal{Z}'_{16}$  et  $\mathcal{Z}_8$  respectivement. De plus les singularités de  $Y_5/S_4$  sont toutes isomorphes à des singularités quotient d'une variété lisse par un groupe d'ordre 2. Par conséquent, l'éclatement de  $Y_5/S_4$  de centre  $\text{Sing}(Y_5/S_4)$  est une variété lisse, donc est une désingularisation de  $\text{Sym}^{(4)}X := X^4/S_4$ .*



## References

- [1] M. Artin. Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces. *Amer. J. Math.*, 84:129–136, 1962.
- [2] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [3] J. Bertin and D. Markushevich. Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Calabi-Yau. *Math. Ann.*, 299:105–116, 1994.
- [4] H.F. Blichfeldt, G.A. Miller and L.E. Dickson. *Theory and applications of finite groups*. Wiley, London, 1917.
- [5] C. Bouvier et G. Gonzalez-Sprinberg. Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G-désingularisations de variétés toriques. *Tôhoku Math. J.*, 47:125–149, 1995.
- [6] E. Brieskorn. Rationale Singularitäten komplexer Flächen. *Invent. Math.* 4:336–358, 1968.
- [7] H. Cartan. Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. *Algebraic geometry and topology Princeton*, 90–102, 1957.
- [8] C. Chevalley. Invariants of finite groups generated by reflections. *Am. J. Math.*, 77:778–782, 1955.
- [9] P. DuVal. On isolated singularities which do not affect the condition of adjunction. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 30:453–459, 1934.
- [10] R.H. Fox. Covering spaces with singularities. *Algebraic geometry and topology*, pages 243–257. Princeton: Princeton University Press, 1957.
- [11] A. Fujiki. On resolution of cyclic quotient singularities. *Pur-Res-Inven-Math-Sci*, 10(1):293–328, 1974–1975.
- [12] W. Fulton and R. MacPherson. A compactification of configuration spaces. *Annals of Mathematics*, 139, 1994.
- [13] G. Gonzalez-Sprinberg. Calcul de l'invariant local d'Euler pour les singularités quotient de surfaces. *C.R.A.S. Paris*, t.(288):989–992, 1979.
- [14] G. Gonzalez-Sprinberg. Résolution de Nash des points doubles rationnels. *Ann. Inst. Fourier*, 32(2):111–178, 1982.
- [15] G. Gonzalez-Sprinberg and M. Lejeune-Jalabert. Modèles canoniques plongés 1. *Kodai Math. Journal*, 14(2):194–209, 1991.



- [16] G. Gonzalez-Sprinberg and J.L. Verdier. Construction géométrique de la correspondance de McKay. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, t.16:409–449, 1983.
- [17] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique*. Springer-Verlag, 1971.
- [18] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1977.
- [19] H. Hironaka and M. Rossi. On the equivalence of embeddings of exceptional complex spaces. *Math. Annalen*, 156:313–333, 1964.
- [20] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. *Annals of Math.*, 79:109–203(I),205–326(II), 1964.
- [21] Y. Ito. Crepant resolution of trihedral singularities. *Proc. Japan Acad.*, 70:131–136, 1992.
- [22] Y. Ito and M. Reid. The McKay correspondence for finite subgroups of  $SL(3, \mathbb{C})$ . *Preprint*, 1995.
- [23] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat. *Toroidal Embeddings I*. Lectures Notes in Mathematics, 339, Springer, 1973.
- [24] G. Kempf. Some quotient varieties have rational singularities. *Michigan-Math-Journal*, 24:347–352, 1977.
- [25] H.B. Laufer. Normal two dimensional singularities. *Ann. of Math. Studies*, 71, 1971.
- [26] A. Mattuck. Picard Bundles. *Illinois J. Math.*, 5:550–564, 1962.
- [27] A. Mattuck. On symmetric products of curves. *Amm. Math. Soc.*,13:82–87, 1962.
- [28] J. McKay. Graphs, singularities and finite groupe, in santa cruz conference on finite groups (santa cruz 1979). *Proc. Symp. Pure Math. AMS (1980)*, 37:183–186, 1980.
- [29] T. Oda. *Lectures on Torus Embeddings and Applications*. Tata Inst. of Fund. Reserch, 58, Springer, 1978.
- [30] T. Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties*. Ergebnisse der Math., 15, Springer Verlag, 1988.
- [31] M. Oka. On the resolution of the hypersurface singularities in complex analytic singularities. *Adv. Studies in Pure Math.*, 8:405–436, 1986.
- [32] N. Pouyanne. Une résolution en singularités toriques simpliciales des singularités-quotient de dimension trois. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, Vol I, 3:363–398, 1992.

- [33] D. Prill. Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups. *Duke Math. J.*, 34:375–386, 1967.
- [34] M. Reid. *Young person's guide to canonical singularities*. Algebraic Geometry, Bowdoin, Proc. Sym, 1985.
- [35] O. Riemenschneider. Die invarianten der endlichen untergruppen von  $GL(2, \mathbb{C})$ . *Math. Z.*, 153:37–50, 1977.
- [36] S.S. Roan. On the generalization of Kummer surfaces. *J. Differential Geometry*, 30:523–537, 1989
- [37] J.P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier*, 6:1–42, 1956.
- [38] J.P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann Paris, 1967.
- [39] J.P. Serre. Algèbre locale Multiplicités. *Lecture Note in Mathematics*. Springer-Verlag, 1975.
- [40] M. Spivakovsky. Sandwiched singularities and desingularization of surfaces by normalized Nash transformations. *Ann. of Math.*, 131:411–491, 1990.
- [41] H. Whitney. Local properties of analytic varieties. *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton University Press, 1965.
- [42] H. Whitney. Tangents to an analytic variety. *Ann. Math.*, 81:496–549, 1965.
- [43] O. Zariski and P. Samuel *Commutative Algebra*. Springer-Verlag, 1960.



# Contents

<b>1</b>	<b>Modèles équivariants abéliens.</b>	<b>7</b>
1.1	Rappels sur éclatements et G-variétés. . . . .	7
1.2	Construction d'un modèle équivariant abélien. . . . .	11
<b>2</b>	<b>Stratification de modèles équivariants abéliens.</b>	<b>17</b>
2.1	Une stratification à groupe d'isotropie constant. . . . .	17
2.2	Un recouvrement particulier du modèle équivariant abélien $X'$ . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Variétés toriques munies d'une action d'un groupe non abélien.</b>	<b>31</b>
3.1	Rappels et notations. . . . .	31
3.2	Quelques résultats préliminaires. . . . .	36
<b>4</b>	<b>Constructions de désingularisations locales et globales.</b>	<b>47</b>
4.1	Construction des $\tilde{U}_Z$ . . . . .	48
4.2	Démonstration du théorème 4.1. . . . .	61
<b>5</b>	<b>Singularités quotient d'un sous-groupe fini de <math>GL(3, \mathbb{C})</math> ou de <math>SL(3, \mathbb{C})</math>.</b>	<b>65</b>
5.1	Résolutions des singularités quotient d'un sous-groupe fini de $GL(3, \mathbb{C})$ . . . . .	65
5.2	Singularités quotient d'un sous-groupe fini de $SL(3, \mathbb{C})$ et résolutions crépantes. . . . .	73
<b>6</b>	<b>Espaces de configurations et singularités de produits symétriques.</b>	<b>85</b>
6.1	Une compactification de l'espace de configuration. . . . .	86
6.2	Singularités de produits symétriques; résolutions de $Sym^{(3)}X$ et de $Sym^{(4)}X$ . . . . .	92