

Structures différentielles en géométrie complexe et presque complexe

Nefton PALI

Septembre 2004

This PHD thesis is dedicated in honor of Flora, Ida Lezhia Pali and Franc Pali, for all the sufferings caused to them by the dictatorial Albanian communist government of enver hoxha. I feel that they have resisted to those sufferings just for me, just for example to give me the opportunity to realise a PHD thesis one day. I know very well that my efforts to justify all that they have done for me is nothing, but i will always try my best to express my gratitude.

Remerciements

Le 20 novembre de chaque année, les vietnamiens fêtent le “ngày nhà giáo” (la “journée des Professeurs”). Ce jour là, ils rendent visite à leurs anciens enseignants : ils leur offrent des présents et passent un peu de temps avec eux ; c’est l’occasion de leur rendre hommage et de les remercier pour le savoir transmis.

Même si cette fête n’a pas d’équivalent en Europe j’ai toujours essayé de garder les contacts avec mes maîtres spirituels.

Tout d’abord je veux remercier mon directeur de thèse, Jean-Pierre Demailly, pour l’immense aide scientifique et humaine qu’il a su m’offrir le long des cinq années que j’ai passé en France. Je suis aussi énormément reconnaissant pour la confiance qu’il m’a accordé dès que je l’ai connu. Je remercie Jean-Claude Sikorav et Andrei Teleman pour avoir accepté d’être rapporteurs et membres du jury de cette thèse. Je remercie en particulier Jean-Claude Sikorav pour toutes les précieuses discussions que j’ai eu avec lui et pour m’avoir invité donner un séminaire à l’ENS Lyon en 2003. C’est aussi un grand honneur pour moi la présence dans les membres du jury de Julien Duval et Paul Gauduchon.

Je remercie Chris Peters pour son soutien et pour sa disponibilité amicale le long des derniers trois ans passés à l’Institut Fourier. Je suis particulièrement heureux de sa présence aujourd’hui en tant que membre du jury.

Un grand merci à tous les chercheurs de L’Institut Fourier avec lesquels j’ai eu le plaisir d’avoir des discussions à caractère mathématique. Je tiens à les remercier ici un par un. Je commence par Sylvestre Gallot et Laurent Manivel. Je suis très reconnaissant pour la confiance qu’ils ont montré en moi.

Je remercie Bernard Malgrange pour l’intérêt qu’il a montré pour mes recherches sur les faisceaux et pour la publicité qu’il m’a fait en France et aux Etas Unis.

Je suis très reconnaissant à Laurent Bonavero pour m’avoir aidé à obtenir une amélioration drastique de la qualité de mes exposées. Je remercie aussi Christine Laurent, Yves Colin de Verdière et Thierry Gallay pour avoir écouté mes problèmes mathématiques de caractère souvent désespéré. Je ne sais pas comment remercier Gerard Vinel pour avoir supporté toutes mes betises informatiques et non informatiques.

Je remercie aussi les chercheurs du Département de Mathématiques de l’Université de Rome “La Sapienza” pour leurs disponibilités. Je commence par remercier Alessandro Silva pour sa présence paternelle le long des derniers six ans. Chaque fois que j’ai un problème, il est toujours là pour trouver une solution. Ce qui m’étonne de lui c’est qu’il trouve toujours une solution optimale pour ma carrière académique. J’exprime ici le plus profond sentiment de gratitude envers lui.

Je remercie Kieran O’Grady pour m’avoir transmis des que j’étais “petit” une vision très dynamique des mathématiques.

Un grand merci à Marialuisa de Resmini pour tout. Des fois, les mots ne suffisent pas pour exprimer ce qu’on ressent.

Je remercie Antonio Maschietti et Giulio Campanella pour m’avoir montré pour la première fois la Géométrie, la vraie.

Je suis très reconnaissant à Gang Tian et à Joseph John Kohn pour avoir permis ma longue visite post-doc à l’Université de Princeton. Je remercie aussi Raghavan Narasimhan pour sa grande disponibilité.

Je remercie tous mes chers amis et collègues jeunes mathématiciens, sans doute des grands mathématiciens bientôt. Je commence par David Bourqui, Pierre Emanuel Chaput, Adrien Dubouloze, Franc Doray, Frank Schuhmacher, Tomasz Miernowski, Ion Alexandru Mihai, Ivano Primi, Guillemette Reviron, Fabio Zuddas. Je les remercie pour toutes les discussions de caractère mathématique et non ! Je remercie en particulier David pour ses commentaires très pertinents sur

mon mémoire de thèse. Je remercie également tous ce qui ont lu ma thèse.

Je remercie aussi tous mes chers amis non mathématiciens. La liste serait trop longue. Un grand merci à Iris Simoni et Julien Pichot.

Un remerciement au service du personnel extraordinaire de l'Institut Fourier. Je commence par la célèbre Arlette Guttin-Lombard. On serait tous perdus sans Arlette.

Un merci aux membres les plus souriants, Marie Chebanche et Nathalie Catrain. Un merci à Bruno Le Gougec et Janick Joukoff pour la précieuse aide bibliothécaire des derniers cinq ans. Je remercie également Myriam Charles, Brigitte Loiodice, Françoise Martin et Corinne Sallustio pour leurs grandes efficacités. Je remercie énormément Mickael Marchand pour sa grande compétence et sa disponibilité.

Je remercie tous les membres de ma famille pour leur soutien constant et je m'excuse de ne pas avoir été très présent dans leur vie quotidienne. Ils m'ont tous manqué et ils vont me manquer encore plus dans les années à venir.

Note au Lecteur Je m'excuse au près du lecteur pour le format non usuel de ce manuscrit. J'utilise un format "fullpage" à 11pt pas simplement pour des raisons de préservations des forêts tropicales, (avec le format usuel, à 11pt, le manuscrit devient d'environ 200 pages) mais aussi pour ne pas couper certaines formules et calculs, ce qui aurait rendu la lecture du manuscrit encore plus difficile.

Table des matières

0	Introduction	9
0.1	Philosophie de la thèse	9
0.2	Faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents sur les variétés complexes	13
0.3	Fondements de la géométrie hermitienne sur les variétés presque complexes	17
0.4	Fonctions plurisousharmoniques et courants positifs de type $(1, 1)$ sur une variété presque complexe	22
1	Faisceaux $\bar{\partial}$-cohérents sur les variétés complexes	25
1.1	Présentation du résultat et des applications	26
1.2	Idée de la preuve du théorème 1.1.8 dans le cas des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres avec la technique de type Nash-Moser	37
1.2.1	Expression locale de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$ dans le cas des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres	37
1.2.2	Formulation du problème différentiel dans le cas des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres	37
1.2.3	Choix des normes et opérateur de Leray-Koppelman	38
1.2.4	Esquisse du schéma de convergence rapide de type Nash-Moser dans le cas des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres	39
1.3	Introduction au cas de \mathcal{E} -résolution locale de profondeur homologique égale à un $(m = 1)$	40
1.3.1	Expression locale de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$ dans le cas $m = 1$	40
1.3.2	Introduction à la formulation du problème différentiel dans le cas $m = 1$	43
1.4	Idée de la preuve du théorème 1.1.8 dans le cas général d'une \mathcal{E} -résolution locale de longueur arbitraire	44
1.4.1	Première étape : présentation de l'expression locale de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$	44
1.4.2	Deuxième étape : la notion de recalibration	46
1.4.3	Troisième étape : introduction à la formulation du problème différentiel	48
1.4.4	Quatrième étape : introduction au schéma de convergence rapide de type Nash-Moser	49
1.5	La preuve complète du théorème de caractérisation différentielle des faisceaux analytiques cohérents dans le cas général de longueur arbitraire de la \mathcal{E} -résolution locale	53
1.5.1	Première étape : Preuve de l'expression locale de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$	53
1.5.2	Deuxième étape : le formalisme du procédé itératif	56
1.5.3	Troisième étape : la formulation du problème différentiel	61
1.5.4	Détails sur le choix des normes et sur l'opérateur de Leray-Koppelman	64

1.5.5	Quatrième étape : présentation du schéma de convergence rapide de type Nash-Moser et existence d'une solution du problème différentiel (S_ω)	67
1.5.6	Cinquième étape : fin de la preuve du théorème 1.1.8	78
1.6	Faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents sur les courbes holomorphes lisses	80
1.7	Un résultat d'intégrabilité des connexions sur les faisceaux de \mathcal{E} -modules au dessus d'une variété différentiable	81
1.7.1	Effet de la non intégrabilité forte d'une structure presque-complexes J sur la $\bar{\partial}_J$ -stabilité des faisceaux d'idéaux	81
2	Fondements de la géométrie hermitienne sur les variétés presque complexes	85
2.1	Connexions sur les faisceaux de modules de fonctions \mathcal{C}^∞ au dessus des variétés presque complexes	86
2.2	Connexions hermitiennes sur les fibrés vectoriels au dessus des variétés presque complexes	92
2.3	Extension de l'opérateur $\bar{\partial}_J$ aux puissances de Schur du fibré des $(1,0)$ -formes	94
2.4	Expression locale des opérateurs $\partial_J, \bar{\partial}_J, \theta_J$ et $\bar{\theta}_J$	96
2.5	Relation entre la connexion de Chern du fibré tangent $T_{X,J}$ d'une variété presque complexe et la connection de Levi-Civita	97
2.6	La courbure de Chern des puissances de Schur du fibré des $(1,0)$ -formes	102
2.6.1	Interprétation géométrique de la notion de courbure de Chern dans le cas presque complexe	104
2.6.2	La courbure de Chern du fibré tangent d'une variété presque complexe	106
2.7	Coordonnées presque complexes d'ordre N en un point	106
2.8	Expression asymptotique normale à l'ordre un d'une connexion de Chern sur le fibré tangent	113
2.8.1	Le cas d'une métrique symplectique sur une variété presque complexe	117
2.8.2	Expression asymptotique normale du flot géodésique d'une connexion de Chern sur le fibré tangent	118
3	Fonctions plurisousharmoniques et courants positifs de type $(1,1)$ sur une variété presque complexe	121
3.1	Préliminaires	122
3.2	Plongements par feuilles courbes J -holomorphes et champs de vecteurs J -plats sur les variétés presque complexes	125
3.3	Courants positifs sur les variétés presque complexes	131
3.3.1	Généralités	131
3.3.2	Exemples fondamentaux de courants positifs sur les variétés presque complexes.	135
3.4	Les potentiels des courants positifs de type $(1,1)$ sur les variétés presque complexes	138
3.5	Sur la régularisation des potentiels sur les variétés presque complexes avec contrôle asymptotique de la perte de positivité du courant	142
3.5.1	Expression locale normale, asymptotique à l'ordre deux du Hessian presque complexe	144
3.6	Appendice	149
3.6.1	Expressions des coefficients $R_{*,*}^{*,*}$ du Hessian presque complexe	149

Chapitre 0

Introduction

0.1 Philosophie de la thèse

En géométrie différentielle complexe, on a souvent coexistence de structures très riches et rigides comme par exemple les structures analytiques complexes et d'autres très élastiques, comme les structures différentielles ou encore d'autres extrêmement irrégulières comme celles données par les fonctions localement intégrables ou les distributions. Nous commençons par énoncer quelques résultats classiques qui constituent le point de départ de cette thèse.

Une variété presque complexe (X, J) est une variété différentielle munie d'une section J de classe \mathcal{C}^∞ du fibré des endomorphismes du fibré tangent telle que $J^2 = -\mathbb{I}$. Le complexifié de cette section sur le complexifié du fibré tangent admet deux sous-fibrés propres. Le fibré des vecteurs complexes de type $(1, 0)$, qui est celui relatif à la valeur propre i et le fibré des vecteurs complexes de type $(0, 1)$, qui est celui relatif à la valeur propre $-i$. Une variété presque complexe est dite intégrable si le fibré des vecteurs de type $(0, 1)$ est intégrable, (où de façon équivalente si le fibré des vecteurs de type $(1, 0)$ est intégrable), ce qui signifie que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs de type $(0, 1)$ est encore un champ de vecteurs de type $(0, 1)$. Dans ce contexte on a le célèbre théorème de Newlander-Nirenberg, (voir [We-1], [Hör], [Dem-1], chapitre VIII, [Mal-2], [Nij-Woo] et [New-Nir]), qui permet de caractériser les variétés complexes parmi les variétés presque complexes.

Théorème 1 (Newlander-Nirenberg) *Soit (X, J) une variété presque complexe. L'existence d'une structure holomorphe sur la variété X telle que la structure presque complexe associée soit égale à J est équivalente à l'intégrabilité de la structure presque complexe J .*

Nous donnons maintenant un deuxième exemple. Une fonction semi-continue supérieurement u sur une variété presque complexe (X, J) est dite plurisousharmonique si la restriction à toute courbe J -holomorphe locale est sous-harmonique. Dans le cas d'une variété complexe on a le résultat fondamental suivant due à Bombieri (voir [Bom], [Sko] et [Dem-1], chapitre VIII)

Théorème 2 (Bombieri) *Soit φ une fonction plurisousharmonique sur une variété complexe X . Soit A l'ensemble des points $x \in X$ tels que la fonction $e^{-\varphi}$ soit non intégrable dans un voisinage de x . Alors A est un sous-ensemble analytique complexe de X .*

Ce résultat est d'une importance fondamentale pour prouver par exemple le théorème de semi-continuité de Siu pour les courants positifs fermés. Celui-ci constitue notre troisième exemple. Un courant de bidegré (q, q) sur une variété presque complexe (X, J) de dimension n est une (q, q) -forme à valeurs dans le faisceau des distributions complexes sur X . L'espace des courants de bidegré (q, q) s'identifie par l'intégration des formes avec le dual topologique de l'espace des

$(n - q, n - q)$ -formes \mathcal{C}^∞ à support compact muni de la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées. Un courant de bidegré (q, q) est dit positif si il est positif par rapport à tous les sous-espaces complexes de dimension $p := n - q$. Il est dit fermé si il est fermé par rapport à l'opérateur de différentiation extérieure. Le nombre de Lelong $\nu(\Theta, x)$ d'un courant positif fermé Θ en un point $x \in X$ mesure le comportement asymptotique de la masse du courant Θ par rapport au volume de la boule complexe p -dimensionnelle. Il est bien connu que dans le cas complexe intégrable, si $\Theta = [A]$ est le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique A de X , le nombre de Lelong au point $x \in A$ de $[A]$ est égal à la multiplicité du germe de A en ce point. Dans ce contexte on a le résultat suivant (voir [Siu], et aussi [Dem-1], chapitre III, pour une preuve élégante et plus courte).

Théorème 3 (Siu) *Soit Θ un courant positif fermé sur une variété complexe X et $c > 0$ une constante arbitraire. Alors l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\nu(\Theta, x) \geq c$ est un sous-ensemble analytique de X .*

Nous donnons maintenant une première idée des résultats obtenus dans cette thèse.

Faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents sur les variétés complexes

Dans le premier chapitre de cette thèse nous généralisons au contexte des faisceaux analytiques cohérents un résultat classique de Koszul-Malgrange ([Ko-Mal]) concernant l'intégrabilité des connexions de type $(0, 1)$ sur un fibré vectoriel \mathcal{C}^∞ au dessus d'une variété complexe.

En introduisant la notion de faisceau $\bar{\partial}$ -cohérent, qui est une notion qui vit dans le contexte \mathcal{C}^∞ , nous montrons l'existence d'une équivalence (exacte) entre la catégorie des faisceaux analytiques cohérents et la catégorie des faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents.

Le résultat classique de Koszul-Malgrange (voir [Ko-Mal]) affirme qu'un fibré vectoriel complexe différentiable au dessus d'une variété complexe, qui admet une connexion $\bar{\partial}$ de type $(0, 1)$ telle que $\bar{\partial}^2 = 0$ possède une structure de fibré vectoriel holomorphe. En d'autres termes, en utilisant l'équivalence entre les notions de fibré vectoriel et de faisceau localement libre sur une variété, on observe que le noyau de la connexion $\bar{\partial}$ est un faisceau de \mathcal{O} -modules localement libre. Le point essentiel de ce résultat consiste à prouver l'existence d'une solution de l'équation différentielle quasi-linéaire $g^{-1}\bar{\partial}_j g = A$ (où $\bar{\partial}_j$ est la $(0, 1)$ -connexion canonique sur le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ et A représente la $(0, 1)$ -forme de connexion locale de $\bar{\partial}$) avec la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}_j A + A \wedge A = 0$.

Nous généraliserons cette équation pour prouver notre caractérisation différentielle qui introduit comme objet nouveau la notion de faisceau $\bar{\partial}$ -cohérent. Précisément un faisceau $\bar{\partial}$ -cohérent est un faisceau \mathcal{G} de modules de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes, muni d'une connexion $\bar{\partial}$ de type $(0, 1)$ telle que $\bar{\partial}^2 = 0$, et qui admet localement des résolutions de longueur finie, par des modules de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes. Notre caractérisation affirme essentiellement que le noyau de la connexion $\bar{\partial}$ est un faisceau analytique cohérent. On obtient donc l'équivalence exacte entre la catégorie des faisceaux analytiques cohérents et la catégorie des faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents. L'exactitude de l'équivalence est due à la fidélité plate de l'anneau des germes des fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes sur l'anneau des germes des fonctions holomorphes, (voir [Mal-1]).

L'hypothèse sur les résolutions locales peut sembler à première vue difficile à vérifier, mais dans les applications (voir les corollaires 1.1.13 et 1.1.16) elle est toujours assurée. L'application principale de notre caractérisation est une méthode, la " $\bar{\partial}$ -stabilité" qui permet de trouver des structures analytiques obtenues par déformation \mathcal{C}^∞ d'autres structures analytiques.

La difficulté essentielle de la preuve de notre caractérisation consiste à montrer que quel que soit le choix de la résolution locale du faisceau \mathcal{G} , on peut trouver au voisinage de chaque point

de l'ouvert sur lequel on considère la résolution locale, une autre résolution locale constituée de matrices holomorphes. En d'autres termes on cherche une résolution locale admettant des formes de connexion nulles. Pour atteindre cet objectif on introduit la notion de recalibration, qui généralise la notion classique de changement de jauge pour les formes locales d'une connexion de type $(0, 1)$ intégrable sur un faisceau localement libre. La notion de recalibration ne représente rien d'autre qu'une action d'un semi-groupe sur l'ensemble des formes qui représentent localement la condition d'intégrabilité de la connexion $\bar{\partial}$. La notion en question permet de traduire notre problème en termes d'un système différentiel quasi-linéaire dont le terme principal est un opérateur $\bar{\partial}$ usuel. Les conditions d'intégrabilité de ce système ne sont rien d'autre que les expressions locales de la condition d'intégrabilité de la connexion $\bar{\partial}$. Les solutions du système différentiel seront obtenues à l'aide d'un procédé itératif de type Nash-Moser, dont chaque étape est déterminée par une recalibration obtenue en fonction de l'étape précédente.

La preuve de l'existence de solutions du système différentiel en question est exposée dans la sous-section 1.5.5, et constitue la partie essentielle de la preuve de notre caractérisation des faisceaux analytiques cohérents. La technique qui consiste à utiliser des schémas itératifs pour montrer l'existence des solutions de problèmes non linéaires est aujourd'hui bien connue en analyse complexe. On peut citer par exemple les travaux de Webster [We-1] et [We-2], qui utilisent des techniques de type Nash-Moser, (voir [Mos-1], [Mos-2] et [Gro]) pour prouver l'existence des solutions de deux problèmes différentiels fondamentaux en géométrie complexe. L'ingrédient final qui permet de conclure notre preuve est le résultat profond de Malgrange mentionné précédemment, qui permet aussi d'obtenir une généralisation du théorème de Dolbeault au cas des faisceaux analytiques cohérents ($\bar{\partial}$ -cohérents). Enfin on obtient aussi comme corollaire un résultat d'intégrabilité pour les connexions sur les faisceaux admettant des résolutions locales de longueur finie sur les variétés différentiables. Ce résultat permet de montrer que la notion de $\bar{\partial}$ -stabilité est une notion très restrictive dans le cas presque complexe non intégrable.

Fondements de géométrie hermitienne sur les variétés presque complexes

Sur une variété presque complexe (X, J) l'opérateur $\bar{\partial}_J$ induit une connexion de type $(0, 1)$ sur le fibré des $(p, 0)$ -formes. Dans le cas d'une structure presque complexe intégrable cette connexion induit la structure holomorphe canonique du fibré des $(p, 0)$ -formes. En considérant le cas $p = 1$ on peut étendre la connexion correspondante à toutes les puissances de Schur du fibré des $(1, 0)$ -formes. En utilisant l'isomorphisme \mathbb{C} -linéaire entre le fibré des $(1, 0)$ -formes et le fibré cotangent complexe $T_{X, J}^*$ on déduit aussi des connexions canoniques de type $(0, 1)$ sur les puissances de Schur du fibré cotangent complexe $T_{X, J}^*$.

Dans le cas complexe intégrable ces connexions donnent les structures holomorphes canoniques de ces fibrés. Dans le cas presque complexe non intégrable les connexions en question donnent seulement les structures holomorphes canoniques sur les restrictions des fibrés correspondants aux images des courbes J -holomorphes lisses.

Nous introduisons la notion de courbure de Chern pour ces fibrés, notion dont le sens géométrique est la généralisation naturelle de la notion classique de courbure de Chern pour les fibrés holomorphes sur une variété complexe. Nous remarquons que la notion de courbure négative au sens de Griffiths est liée de manière directe à la J -plurisousharmonicité des normes $|\sigma|^2$ de certaines sections que nous appelons "presque holomorphes spéciales" en un point donné.

Nous portons un intérêt particulier au cas du fibré tangent en vue des applications concernant la régularisation des fonctions J -plurisousharmoniques à l'aide du flot géodésique d'une connexion de Chern sur le fibré tangent. Cette méthode a été déjà utilisée par Demailly [Dem-2] dans le cas complexe intégrable.

Nous montrons une formule explicite qui relie la connexion de Chern du fibré tangent avec la connexion de Levi-Civita à l'aide des obstructions géométriques dérivant de la torsion de la structure presque complexe et du défaut de la métrique à être symplectique. En particulier nous donnons une formule explicite qui permet de relier la torsion de la connexion de Chern du fibré tangent avec les obstructions précédentes. Une formule qui relie les deux connexions précédentes peut être aussi trouvée dans l'article de Gauduchon [Gau]. L'utilité de la connexion de Chern dans le problème de régularisation des fonctions J -plurisousharmoniques dérive du fait que son expression locale par rapport à des repères du fibré des $(1,0)$ -vecteurs tangents est la plus simple possible parmi les connexions hermitiennes.

Ensuite nous introduisons la notion de coordonnées presque complexes au voisinage d'un point. Cette notion nous permet d'étudier la façon dont la torsion de la structure presque complexe et le caractère non symplectique de la métrique se traduisent en une obstruction à l'existence de coordonnées géodésiques complexes, qui n'existent que dans le cas Kählerien. Cette étude est nécessaire pour le calcul asymptotique du flot géodésique induit par une connexion de Chern sur le fibré tangent.

Fonctions plurisousharmoniques et courants positifs de type $(1,1)$ sur une variété presque complexe

Comme dans le cas analytique complexe, nous conjecturons que la notion de plurisousharmonicité pour une fonction u est équivalente à la positivité du $(1,1)$ -courant $i\partial_J\bar{\partial}_J u$, (lequel n'est pas forcément fermé dans le cas non intégrable). La conjecture est triviale dans le cas d'une fonction u de classe \mathcal{C}^2 . Le résultat en question est élémentaire dans le cas complexe intégrable car l'opérateur $i\partial_J\bar{\partial}_J$ s'écrit comme un opérateur à coefficients constants dans des coordonnées complexes. On peut donc facilement conserver la positivité du courant en régularisant avec des noyaux \mathcal{C}^∞ usuels. Dans le cas presque complexe non intégrable ceci ce n'est pas possible et la preuve du résultat exige un étude beaucoup plus intrinsèque. Nous montrons la nécessité de la positivité du $(1,1)$ -courant $i\partial_J\bar{\partial}_J u$ en utilisant la théorie locale des courbes J -holomorphes. Nous montrons aussi la suffisance de la positivité dans le cas particulier d'une fonction f semi-continue supérieurement et continue en dehors du lieu singulier $f^{-1}(-\infty)$. Pour prouver la suffisance de la positivité dans le cas général où u est une distribution réelle nous proposons une méthode qui utilise un délicat argument de régularisation des fonctions plurisousharmoniques introduit par Demailly ([Dem-2]).

Question ouverte. L'étude basique des fonctions J -plurisousharmoniques que nous présentons dans cette thèse peut être considérée comme une première étape vers la compréhension dans le cas presque complexe non intégrable de la question fondamentale suivante. Soit φ une fonction J -plurisousharmonique sur une variété presque complexe (X, J) . Soit A l'ensemble des points $x \in X$ tels que la fonction $e^{-\varphi}$ est non intégrable dans un voisinage de x . Que peut on-dire de la structure J -analytique de A ? Dans le cas où la dimension de Hausdorff de A est deux, peut-on déduire que localement A est donné par les images d'un nombre fini de courbes J -holomorphes?

Nous donnons maintenant une présentation plus détaillée des résultats obtenus dans cette thèse.

0.2 Faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents sur les variétés complexes

Cette section est une version simplifiée de la section 1.1 du chapitre I. On va commencer par rappeler un résultat classique bien connu dû à Koszul-Malgrange. On a besoin d'abord de quelques notations et remarques. Soit (X, J) une variété complexe, où J est le tenseur de la structure presque-complexe supposée intégrable. On désigne par \mathcal{E}_X le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes, par $\mathcal{E}_X^{0,q}$ le faisceau des $(0, q)$ -formes et par $\bar{\partial}_J$ la composante de type $(0, 1)$ de la différentielle. Soit $F \rightarrow X$ un fibré vectoriel complexe \mathcal{C}^∞ . On rappelle que sur une variété complexe il y a une équivalence entre les notions suivantes.

$$\begin{aligned} \{\text{Fibrés vectoriels complexes } \mathcal{C}^\infty\} &\longleftrightarrow \{\text{Faisceaux de } \mathcal{E}\text{-modules localement libres}\} \\ F &\longmapsto \mathcal{E}(F) := \text{Faisceau des sections } \mathcal{C}^\infty \text{ de } F \end{aligned}$$

L'équivalence précédente est aussi valable pour les fibrés vectoriels holomorphes et les faisceaux de \mathcal{O} -modules localement libres définis sur une variété complexe. On considère la définition suivante.

Définition 0.2.1 *Une connexion de type $(0, 1)$ sur un faisceau \mathcal{G} de \mathcal{E}_X -modules est un morphisme de faisceaux de groupes additifs $\bar{\partial} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ tel que $\bar{\partial}(g \cdot f) = (\bar{\partial}g) \cdot f + g \otimes \bar{\partial}_J f$, pour tout $g \in \mathcal{G}_x$ et $f \in \mathcal{E}_{X,x}$.*

Une connexion de type $(0, 1)$ sur le faisceau de \mathcal{E}_X -modules \mathcal{G} s'étend grâce à la règle de Leibnitz à une dérivation $\bar{\partial}$ de type $(0, 1)$ sur le complexe $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,q})_{q \geq 0}$. Souvent on pense une connexion en termes de son extension au complexe $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,q})_{q \geq 0}$. Pour tout faisceau \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -modules on peut considérer la connexion canonique de type $(0, 1)$ sur le faisceau de \mathcal{E}_X -modules

$$\mathcal{F}^\infty := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$$

suivante

$$\bar{\partial}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,q} \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,q+1},$$

définie par la formule

$$\bar{\partial}_{\mathcal{F}}(\psi \otimes_{\mathcal{O}_x} f) := \psi \otimes_{\mathcal{O}_x} \bar{\partial}_J f$$

pour tout $\psi \in \mathcal{F}_x$ et $f \in \mathcal{E}_{X,x}^{0,q}$. Bien évidemment la définition précédente est une généralisation immédiate de la notion classique de connexion de type $(0, 1)$ canonique associée à un fibré vectoriel holomorphe, (voir par exemple les ouvrages [Dem-1], ([Gri-Ha] et ([Wel]). Nous porterons un intérêt particulier aux connexions de type $(0, 1)$ intégrables, c'est à dire aux connexions telles que $\bar{\partial}^2 = 0$. Un exemple de $(0, 1)$ -connexion intégrable est évidemment la connexion $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ introduite précédemment. Avec les notations introduites précédemment on peut énoncer le résultat de Koszul-Malgrange ([Ko-Mal]) sous la forme suivante.

Théorème 0.2.2 (Koszul-Malgrange). *Soit $F \rightarrow X$ un fibré vectoriel complexe \mathcal{C}^∞ sur une variété complexe X . Alors l'existence d'une structure de fibré vectoriel holomorphe sur F est équivalente à l'existence d'une connexion $\bar{\partial} : \mathcal{E}(F) \rightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ de type $(0, 1)$ intégrable (i.e. $\bar{\partial}^2 = 0$) sur le faisceau de \mathcal{E} -modules $\mathcal{E}(F)$.*

En utilisant l'équivalence entre les notions de fibrés vectoriels holomorphes et faisceaux de \mathcal{O} -modules localement libres sur une variété complexe, on peut reformuler en termes équivalents le théorème 0.2.2 sous la forme suivante.

Théorème 0.2.3 (Koszul-Malgrange). *Soit $F \longrightarrow X$ un fibré vectoriel complexe \mathcal{C}^∞ sur une variété complexe X muni d'une connexion $\bar{\partial} : \mathcal{E}(F) \longrightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ telle que $\bar{\partial}^2 = 0$. Alors le faisceau de \mathcal{O} -modules $\text{Ker}\bar{\partial} \subset \mathcal{E}(F)$ est localement libre et $(\text{Ker}\bar{\partial}) \cdot \mathcal{E}_X = \mathcal{E}(F)$, (ceci signifie que les trivialisations locales du noyau $\text{Ker}\bar{\partial}$ sur le faisceau \mathcal{O}_X sont aussi des trivialisations locales de $\mathcal{E}(F)$ sur le faisceau \mathcal{E}_X).*

On a en conclusion que le noyau de la connexion $\bar{\partial}$ est le faisceau des sections holomorphes $\mathcal{O}(F)$ du fibré F et la connexion $\bar{\partial}$ coïncide avec la connexion canonique

$$\bar{\partial}_F : \mathcal{E}(F) \longrightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}.$$

On remarque que si \mathcal{F} est un faisceau \mathbb{C} -analytique cohérent, le théorème des syzygies (voir [Kob], chapitre 5) implique l'existence d'une \mathcal{O} -résolution de longueur finie

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus p_m} \xrightarrow{\varphi_m} \mathcal{O}_U^{\oplus p_{m-1}} \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{O}_U^{\oplus p_1} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{O}_U^{\oplus p_0} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

dans la catégorie des faisceaux \mathbb{C} -analytiques cohérents. En rappelant que $\mathcal{F}^\infty := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$ on obtient grâce à la platitude de l'anneau $\mathcal{E}_{X,x}$ sur l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$, (cf. [Mal-1]) l'exactitude du complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}|_U^\infty \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}|_U^\infty \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,2} \longrightarrow \dots$$

On est donc parti d'un faisceau analytique cohérent \mathcal{F} pour obtenir un faisceau de \mathcal{E} -modules \mathcal{F}^∞ admettant des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie, muni d'une connexion $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ de type $(0,1)$ intégrable dont le noyau est le faisceau \mathbb{C} -analytique cohérent de départ \mathcal{F} . De manière générale on a la caractérisation différentielle suivante.

Théorème 0.2.4 (Caractérisation différentielle des faisceaux analytiques cohérents) *Soit X une variété complexe et soit \mathcal{G} un faisceau de \mathcal{E}_X -modules qu'on suppose muni d'une connexion $\bar{\partial} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ de type $(0,1)$ telle que $\bar{\partial}^2 = 0$. Si de plus le faisceau \mathcal{G} admet des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie, alors le faisceau de \mathcal{O}_X -modules $\text{Ker}\bar{\partial} \subset \mathcal{G}$ est \mathbb{C} -analytique cohérent, on a les égalités $\mathcal{G} = (\text{Ker}\bar{\partial}) \cdot \mathcal{E}_X \cong (\text{Ker}\bar{\partial}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$ et la connexion $\bar{\partial}$ coïncide, à isomorphisme canonique près, avec l'extension naturelle $\bar{\partial}_{\text{Ker}\bar{\partial}}$ associée au faisceau analytique cohérent $\text{Ker}\bar{\partial}$.*

Le théorème précédent montre donc qu'on est dans la même situation que celle décrite précédemment. Bien évidemment le théorème 0.2.4 constitue une généralisation du théorème 0.2.3. Un couple $(\mathcal{G}, \bar{\partial}) \equiv \mathcal{G}_{\bar{\partial}}$ où \mathcal{G} et $\bar{\partial}$ vérifient les hypothèses du théorème 0.2.4 est appelé faisceau $\bar{\partial}$ -cohérent.

Le théorème 0.2.4 et la fidélité plate du faisceau \mathcal{E}_X sur \mathcal{O}_X montrent que sur une variété complexe on a une équivalence exacte entre la catégorie des faisceaux \mathbb{C} -analytiques cohérents et la catégorie des faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents.

Le cas des faisceaux d'idéaux.

Soit $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux de fonctions holomorphes (non nécessairement cohérent). On considère le faisceau d'idéaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes $\mathcal{I}^\infty := \mathcal{I} \cdot \mathcal{E}_X \subseteq \mathcal{E}_X$ et on remarque que la règle de Leibnitz implique que pour tout germe de $(0,1)$ -champs $\xi \in \mathcal{E}(T_X^{0,1})_x$ on a l'inclusion

$$\xi \cdot \mathcal{I}_x^\infty \subseteq \mathcal{I}_x^\infty,$$

pour tout $x \in X$. De manière générale on a la définition suivante :

Définition 0.2.5 (Notion de $\bar{\partial}_J$ -stabilité) Un faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}_X$ de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes est dit $\bar{\partial}_J$ -stable si pour tout germe de $(0,1)$ -champs $\xi \in \mathcal{E}(T_X^{0,1})_x$ on a l'inclusion $\xi \cdot \mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{J}_x$, pour tout $x \in X$.

La $\bar{\partial}_J$ -stabilité d'un faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}_X$ de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes entraîne qu'on peut considérer l'opérateur $\bar{\partial}_J$ comme une connexion

$$\bar{\partial}_J : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$$

de type $(0,1)$ intégrable sur le faisceau \mathcal{J} . Dans le cas où $\mathcal{J} = \mathcal{I}^\infty$ on a comme conséquence de la platitude de l'anneau $\mathcal{E}_{X,x}$ sur l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ que la connexion en question coïncide, à isomorphisme canonique près, avec la connexion canonique $\bar{\partial}_x$ associée au faisceau \mathcal{I} . De plus le noyau de cette connexion est le faisceau \mathcal{I} . Une conséquence immédiate du théorème précédent est le corollaire suivant :

Corollaire 0.2.6 Soit $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}_X$ un faisceau d'idéaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes $\bar{\partial}_J$ -stable admettant des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie. Alors le faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_X$ est analytique cohérent et $(\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_X) \cdot \mathcal{E}_X = \mathcal{J}$, (autrement dit le faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_X$ est un \mathcal{O} -module localement de type fini et ses générateurs locaux sur \mathcal{O}_X sont aussi des générateurs locaux du faisceau \mathcal{J} sur \mathcal{E}_X).

Concrètement pour vérifier la $\bar{\partial}_J$ -stabilité du faisceau \mathcal{J} il suffit de faire un choix arbitraire de repère local $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{E}(T_X^{0,1})^{\oplus n}(U)$, de générateurs $(\psi_1, \dots, \psi_p) \in \mathcal{J}^{\oplus p}(U)$ et de montrer, pour tout $x \in U$, l'existence de germes de fonctions $A_{k,l,j} \in \mathcal{E}_{X,x}$ qui vérifient les égalités

$$\xi_{k,x} \cdot \psi_{l,x} = \sum_{j=1}^p A_{k,l,j} \cdot \psi_{j,x}.$$

Le corollaire 0.2.7 montre l'existence d'une équivalence exacte entre la catégorie des faisceaux d'idéaux de fonctions holomorphes cohérents et la catégorie des faisceaux d'idéaux $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}_X$ de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes admettant des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie, qui sont stables par rapport aux dérivations le long des champs de vecteurs de type $(0,1)$.

Corollaire 0.2.7 Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble fermé d'une variété complexe X tel que pour tout $x \in Z$ il existe un voisinage ouvert coordonné U_x de x et des fonctions $\psi_1, \dots, \psi_{p_x} \in \mathcal{E}_X(U_x)$ telles que $Z \cap U_x = \psi_1^{-1}(0) \cap \dots \cap \psi_{p_x}^{-1}(0)$, les relations

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial \bar{z}_k} = \sum_{j=1}^{p_x} A_{k,l,j} \cdot \psi_j,$$

$A_{k,l,j} \in \mathcal{E}_X(U_x)$ soient satisfaites pour tous les indices l, k (les coordonnées (z_1, \dots, z_n) sont relatives à l'ouvert U_x) et le faisceau des \mathcal{E} -relations $\mathcal{R}^{\mathcal{E}}(\psi_1, \dots, \psi_{p_x}) \subset \mathcal{E}_{U_x}$ admet des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie. Alors Z est un sous-ensemble analytique de X .

On déduit alors le corollaire suivant dans lequel l'hypothèse sur la résolution locale de longueur finie est immédiatement vérifié.

Corollaire 0.2.8 Soit $\Phi : U_1 \longrightarrow U_2$, $\Phi(z) = \zeta$ un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ entre deux ouverts de \mathbb{C}^n , soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{U_1}$ un faisceau d'idéaux de fonctions holomorphes localement de type fini (comme \mathcal{O} -module), et $Z := V(\mathcal{I}) \subset U_1$ son ensemble des zéros.

Si le faisceau d'idéaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes $\Phi_* \mathcal{I}^\infty \subset \mathcal{E}_{U_2}$ est $\bar{\partial}_J$ -stable alors

$\Phi(Z) \subset U_2$ est un sous-ensemble analytique de U_2 .

De façon plus explicite : pour tout $x \in Z$ soient $\psi_1, \dots, \psi_{p_x} \in \mathcal{O}_X(U_x)$, $U_x \subset U_1$ des fonctions holomorphes telles que

$$Z \cap U_x = \psi_1^{-1}(0) \cap \dots \cap \psi_{p_x}^{-1}(0).$$

Si pour tout $x \in Z$ il existe des fonctions $A_{k,l,j} \in \mathcal{E}(\Phi(U_x))$ telles que les fonctions $\Psi_k := \psi_k \circ \Phi^{-1}$ vérifient les relations

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial \bar{\zeta}_l} = \sum_{j=1}^{p_x} A_{k,l,j} \cdot \Psi_j, \quad (0.2.1)$$

alors $\Phi(Z) \subset U_2$ est un sous-ensemble analytique de U_2 .

Dans le cas où $\mathcal{I} = \mathcal{I}_Z$ est le faisceau des fonctions holomorphes qui s'annulent le long de Z et Z est lisse le résultat précédent est élémentaire. En effet la $\bar{\partial}_j$ -stabilité du faisceau d'ideaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes $\Phi_* \mathcal{I}_Z^\infty \subset \mathcal{E}_{U_2}$ entraîne que le fibré tangent $T_{\Phi(Z)}$ de la sous-variété $\Phi(Z)$ est un sous-fibré complexe du fibré T_{U_2} . On déduit alors facilement l'analyticité de Z , (voir [Dem-1], chapitre I). En général les équations holomorphes qui définissent un sous-ensemble analytique présentent des ordres d'annulations arbitraires. Le corollaire 0.2.8 trouve tout son intérêt dans le cas général.

Les corollaires 0.2.6 et 0.2.8 se généralisent facilement au cas des sous-faisceaux $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}(F)$ du faisceau des sections \mathcal{C}^∞ d'un fibré vectoriel holomorphe F , (voir la section 1.1).

Une autre conséquence du théorème 0.2.4

On a aussi le corollaire suivant que l'on déduit des arguments exposés dans la sous-section 1.4.3.

Corollaire 0.2.9 Soit

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(F_m) \xrightarrow{\varphi_m} \mathcal{E}(F_{m-1}) \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{E}(F_1) \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{E}(F_0) \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux de \mathcal{E} -modules sur une variété complexe X , où F_k , $k = 0, \dots, m$ sont des fibrés vectoriels complexes \mathcal{C}^∞ sur X . Supposons qu'il existe une connexion $\bar{D} : \mathcal{E}(F_0) \rightarrow \mathcal{E}(F_0) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ de type $(0,1)$ sur $\mathcal{E}(F_0)$ telle que les inclusions

$$\bar{D} \operatorname{Im} \varphi_1 \subseteq (\operatorname{Im} \varphi_1) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1} \quad \text{et} \quad \bar{D}^2 \mathcal{E}(F_0) \subseteq (\operatorname{Im} \varphi_1) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,2}$$

soient satisfaites. Alors la connexion quotient $\bar{\partial} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ est intégrable et son noyau $\operatorname{Ker} \bar{\partial}$ est un faisceau de \mathcal{O} -modules analytique cohérent tel que $(\operatorname{Ker} \bar{\partial}) \cdot \mathcal{E}_X = \mathcal{G}$. De plus pour tout entier $l \geq 0$ et $k = 1, \dots, m$ les sous-ensembles $Z_l(\varphi_k) := \{x \in X \mid \operatorname{rg}_{\mathbb{C}} \varphi_k(x) \leq l\}$ sont des sous-espaces complexes de X .

On remarque que la cohomologie des faisceaux cohérents ($\bar{\partial}$ -cohérents) sur une variété complexe peut se calculer, grâce à l'isomorphisme fonctoriel de De Rham-Weil (voir par exemple les ouvrages [Dem-1], [Gri-Ha] et [Wel]), par la formule suivante :

$$H^q(X, \mathcal{G}_{\bar{\partial}}) := H^q(X, \operatorname{Ker} \bar{\partial}) \cong H^q(\Gamma(X, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,*}); \bar{\partial}),$$

qui constitue une généralisation du théorème de Dolbeault.

Faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents sur les courbes holomorphes lisses

Dans le cas où la dimension complexe de X est un on peut, pour des raisons banales d'intégrabilité, supprimer l'hypothèse sur les \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie des faisceaux de \mathcal{E} -modules. Nous obtenons les corollaires suivants.

Corollaire 0.2.10 *Soit X une variété complexe de dimension un et soit \mathcal{G} un faisceau de \mathcal{E}_X -modules qu'on suppose muni d'une connexion $\bar{\partial} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ de type $(0,1)$. Si de plus le faisceau \mathcal{G} admet des \mathcal{E} -présentations locales, alors le faisceau de \mathcal{O}_X -modules $\text{Ker}\bar{\partial} \subset \mathcal{G}$ est analytique cohérent, on a les égalités $\mathcal{G} = (\text{Ker}\bar{\partial}) \cdot \mathcal{E}_X \cong (\text{Ker}\bar{\partial}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$ et la connexion $\bar{\partial}$ coïncide, à isomorphisme canonique près, avec l'extension naturelle $\bar{\partial}_{\text{Ker}\bar{\partial}}$ associée au faisceau analytique cohérent $\text{Ker}\bar{\partial}$.*

Corollaire 0.2.11 *Soit X une variété complexe de dimension un, $F \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe sur X et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}(F)$ un sous-faisceau de \mathcal{E} -modules localement de type fini et $\bar{\partial}_F$ -stable, où*

$$\bar{\partial}_F : \mathcal{E}(F) \rightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$$

désigne la connexion canonique associée au faisceau $\mathcal{O}(F)$. Alors le faisceau de \mathcal{O}_X -modules $\mathcal{G} \cap \mathcal{O}(F)$ est analytique cohérent et $(\mathcal{G} \cap \mathcal{O}(F)) \cdot \mathcal{E}_X = \mathcal{G}$, (autrement dit le faisceau $\mathcal{G} \cap \mathcal{O}(F)$ est un \mathcal{O} -module localement de type fini et ses générateurs locaux sur \mathcal{O}_X sont aussi des générateurs locaux du faisceau \mathcal{G} sur \mathcal{E}_X).

Un résultat d'intégrabilité des connexions sur les faisceaux de \mathcal{E} -modules au dessus d'une variété différentiable

Il est possible de déduire aussi un résultat d'intégrabilité dans le cas des variétés \mathcal{C}^∞ . Considérons en effet (X, \mathcal{E}_X) une variété \mathcal{C}^∞ ($\mathcal{E}_X \equiv \mathcal{E}_X(\mathbb{R})$ représente ici le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs réelles) et $D : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}(T_X^*)$ une connexion sur le faisceau de $\mathcal{E}_X(\mathbb{K})$ -modules \mathcal{G} où $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Si le faisceau des sections parallèles $\text{Ker}D$ engendre \mathcal{G} sur $\mathcal{E}_X(\mathbb{K})$ alors évidemment $D^2 = 0$. Le théorème suivant donne une réciproque de ce fait dans un cas particulier.

Théorème 0.2.12 *Soit (X, \mathcal{E}_X) une variété différentiable et soit \mathcal{G} un faisceau de $\mathcal{E}_X(\mathbb{K})$ -modules, muni d'une connexion $D : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}(T_X^*)$ telle que $D^2 = 0$. Si de plus le faisceau \mathcal{G} admet localement une $\mathcal{E}(\mathbb{K})$ -résolution de longueur finie, alors le faisceau des sections parallèles $\text{Ker}D$ engendre sur $\mathcal{E}_X(\mathbb{K})$ le faisceau \mathcal{G} qui est le faisceau des sections d'un système local de coefficients (le faisceau \mathcal{G} est donc localement libre) et le complexe $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}(\Lambda^\bullet T_X^*) ; D)$ est une résolution acyclique du faisceau des sections parallèles. On a alors l'isomorphisme fonctoriel de De Rham-Weil $H^k(X, \text{Ker}D) \cong H^k(\Gamma(X, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}(\Lambda^\bullet T_X^*)) ; D)$.*

Nous utilisons ce résultat pour expliquer l'effet gênant de la $\bar{\partial}_J$ -stabilité des faisceaux d'idéaux dans le cas des variétés presque-complexes. En effet on a le corollaire suivant.

Corollaire 0.2.13 *Soit (X, J) une variété presque-complexe connexe telle que*

$$T_{X,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \langle [\xi, \eta](x) \mid \xi, \eta \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{0,1})(X) \rangle$$

pour tout $x \in X$ et soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}(\mathbb{C})$ un faisceau d'idéaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes sur X admettant des $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ -résolutions locales de longueur finie. Si \mathcal{J} est $\bar{\partial}_J$ -stable alors soit $\mathcal{J} = 0$ soit $\mathcal{J} = \mathcal{E}(\mathbb{C})$.

0.3 Fondements de la géométrie hermitienne sur les variétés presque complexes

Relation entre la connexion de Chern du fibré tangent $T_{X,J}$ d'une variété presque complexe et la connexion de Levi-Civita

Soit (X, J) une variété presque complexe $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$ une métrique hermitienne sur $T_{X,J}$,

$$D_J^\omega : \mathcal{E}(T_{X,J}) \longrightarrow \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_{X,J})$$

la connexion de Chern du fibré hermitien $(T_{X,J}, \omega)$ et $g := \omega(\cdot, J\cdot) \in \mathcal{E}(S_{\mathbb{R}}^2 T_X^*)(X)$ la métrique riemannienne J -invariante associée à ω . On désigne par

$$\nabla^g : \mathcal{E}(T_X) \longrightarrow \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_X)$$

la connexion de Levi-Civita relative à la métrique riemannienne g et par

$$N_J \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,2} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X)$$

le tenseur de Nijenhuis. On rappelle la décomposition

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_{X,J} \simeq_{\mathbb{C}} \Lambda_{\mathbb{C}}^k (T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J} \simeq_{\mathbb{C}} \bigoplus_{p+q=k} \Lambda_J^{p,q} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}.$$

Le théorème suivant relie la connexion de Chern du fibré hermitien $(T_{X,J}, \omega)$ avec la connexion de Levi-Civita relative à la métrique riemannienne g .

Théorème 0.3.1 *Soit (X, J) une variété presque complexe, $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$ une métrique hermitienne sur $T_{X,J}$ et $g := \omega(\cdot, J\cdot) \in \mathcal{E}(S_{\mathbb{R}}^2 T_X^*)(X)$ la métrique riemannienne J -invariante associée à ω . Il existe deux tenseurs réels*

$$\delta_J \omega \in \mathcal{E}((T_X^*)^{\otimes 2} \otimes_{\mathbb{R}} T_X)(X) \quad \text{et} \quad N_J^\omega \in \mathcal{E}((T_{X,J}^{0,1})^*, \otimes^2 \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X)$$

tels que $d\omega = 0$ si et seulement si $\delta_J \omega = 0$; $N_J = 0$ si et seulement si $N_J^\omega = 0$. La connexion de Chern D_J^ω du fibré hermitien $(T_{X,J}, \omega)$ est relié à la connexion de Levi-Civita ∇^g par la formule

$$D_{J,\xi}^\omega \eta := \nabla_\xi^g \eta + \delta_J \omega(\xi, \eta) - N_J^\omega(\xi, \eta) \quad (0.3.1)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$, ($U \subseteq X$ ouvert arbitraire). Le 2-tenseur réel $\delta_J \omega$ est défini par la formule

$$2\delta_J \omega := \gamma_{\omega,J}^{2,0} + \gamma_{\omega,J}^{0,2} + J\gamma_{\omega,J}^{1,1}(\cdot, J\cdot)$$

où

$$\gamma_{\omega,J}^{2,0} \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{2,0} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X), \quad \gamma_{\omega,J}^{1,1} \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X) \quad \text{et} \quad \gamma_{\omega,J}^{0,2} \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,2} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X)$$

sont les composantes, (par rapport à la structure presque complexe J) de la 2-forme réelle $\gamma_\omega \in \mathcal{E}(\Lambda^2 T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_X)(X)$ définie par la formule

$$\omega(\gamma_\omega(\xi, \eta), \mu) = d\omega(\xi, \eta, \mu)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta, \mu \in \mathcal{E}(T_X)(X)$. Enfin le $(0, 2)$ -tenseur réel N_J^ω est définie par la formule $N_J^\omega := \tau_J^\omega + \bar{\tau}_J^\omega$ où

$$\tau_J^\omega \in \mathcal{E}((T_{X,J}^{0,1})^*, \otimes^2 \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}^{1,0})(X)$$

est le $(0, 2)$ -tenseur défini par la formule

$$\omega(\tau_J^\omega(\xi, \eta), \mu) = \omega(\xi, [\eta, \mu]^{1,0})$$

pour tout $(0, 1)$ -champ de vecteurs $\xi, \eta, \mu \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{0,1})(X)$. Si $N_J = 0$ alors $\gamma_{\omega,J}^{0,2} = 0$. La forme de torsion $\mathcal{T}_{D_J^\omega}$ de la connexion de Chern D_J^ω vérifie l'identité

$$\mathcal{T}_{D_J^\omega} = \gamma_{\omega,J}^{2,0} - N_J. \quad (0.3.2)$$

La courbure de Chern des puissances de Schur du fibré des $(1, 0)$ -formes.

Considérons plus généralement les fibrés vectoriels complexes $F_J^\lambda := S^\lambda \Lambda_J^{1,0} T_X^*$ ou $F_J^\lambda := S^\lambda T_{X,J}^*$ au dessus de (X, J) , où S^λ désigne la puissance de Schur relative à une partition λ . Soit h une métrique hermitienne quelconque sur F_J^λ et $D_{F_J^\lambda}^h$ la connexion de Chern du fibré hermitien $(F_J^\lambda, h) \longrightarrow (X, J)$. On donne la définition suivante.

Définition 0.3.2 *Le tenseur de courbure de Chern*

$$\mathcal{C}_h(F_J^\lambda) \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} \text{End}_{\mathbb{C}}(F_J^\lambda))(X)$$

du fibré vectoriel hermitien $(F_J^\lambda, h) \longrightarrow (X, J)$ est la $(1, 1)$ -forme donnée par la formule

$$\mathcal{C}_h(F_J^\lambda) := \Theta(D_{F_J^\lambda}^h)^{1,1}$$

où $\Theta(D_{F_J^\lambda}^h) := (D_{F_J^\lambda}^h)^2$. La courbure de Chern

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h \in \mathcal{E}(\text{Herm}(T_{X,J} \otimes_{\mathbb{C}} F_J^\lambda))(X)$$

est la forme hermitienne sur le fibré vectoriel complexe $T_{X,J} \otimes_{\mathbb{C}} F_J^\lambda$ définie par la formule

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma, \eta \otimes \tau) := h(\mathcal{C}_h(F_J^\lambda)(\xi_J^{1,0}, \eta_J^{0,1}) \cdot \sigma, \tau),$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ et sections $\sigma, \tau \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ sur un ouvert U quelconque.

Bien évidemment il est équivalent de donner soit le tenseur de courbure soit la courbure de Chern. On aura besoin de la définition suivante.

Définition 0.3.3 *Une section $\sigma \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ est dite presque-holomorphe au point $x \in U$ si on a $\bar{\partial}\sigma(x) = 0$. Un repère local $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ est dit presque-holomorphe spécial au point $x \in U$ si $\bar{\partial}\sigma_k(x) = 0$ et $(D^h)^{1,0} \bar{\partial}\sigma_k(x) = 0$ pour tout k .*

La définition de repère local presque-holomorphe spécial en un point est indépendante de la métrique hermitienne. Le lemme élémentaire suivant donne une première idée de l'utilité de la notion de courbure de Chern.

Lemme 0.3.0.1 *Soit $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ un repère local presque-holomorphe spécial en un point $x \in U$ du fibré hermitien $(F_J^\lambda, h) \longrightarrow (X, J)$ et $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ deux champs de vecteurs réels. Alors au point x on a les identités*

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma_k, \eta \otimes \sigma_l)|_x = \bar{\partial}_J \partial_J h(\sigma_k, \sigma_l)(\xi_J^{1,0}, \eta_J^{0,1})|_x + h(\xi_D^{1,0} \cdot \sigma_k, \eta_D^{1,0} \cdot \sigma_l)|_x. \quad (0.3.3)$$

$$i \partial_J \bar{\partial}_J |\sigma_k|_h^2(\xi, J\xi)|_x = -2 \mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma_k, \xi \otimes \sigma_k)|_x + 2 |\xi_D^{1,0} \cdot \sigma_k|_h^2|_x. \quad (0.3.4)$$

Dans le cas d'une variété complexe (X, J) et d'un fibré vectoriel holomorphe hermitien $(F, h) \longrightarrow (X, J)$ on a pour toutes sections holomorphes $\sigma, \tau \in \mathcal{O}(F)(U)$ l'identité

$$\mathcal{C}_F^h(\xi \otimes \sigma, \eta \otimes \tau) = \bar{\partial}_J \partial_J h(\sigma, \tau)(\xi_J^{1,0}, \eta_J^{0,1}) + h(\xi_D^{1,0} \cdot \sigma, \eta_D^{1,0} \cdot \tau)$$

sur l'ouvert U . On déduit en particulier la formule remarquable suivante

$$i\partial_J\bar{\partial}_J|\sigma|_h^2(\xi, J\xi) = -2\mathcal{C}_F^h(\xi \otimes \sigma, \xi \otimes \sigma) + 2|\xi_D^{1,0} \cdot \sigma|_h^2$$

qui montre que pour tout section holomorphe $\sigma \in \mathcal{O}(F)(U)$ la fonction $|\sigma|_h^2$ est plurisousharmonique sur l'ouvert U si la courbure du fibré F est négative au sens de Griffiths, autrement dit si $\mathcal{C}_F^h(\xi \otimes \sigma, \xi \otimes \sigma) \leq 0$ pour tout $\xi \in T_{X,x}$ et $\sigma \in F_x$. On déduit en particulier que si la variété complexe X est compacte, connexe et $\sigma \in \mathcal{O}(F)(X)$ est une section globale d'un fibré vectoriel holomorphe F admettant une métrique hermitienne à courbure négative au sens de Griffiths alors le section σ est identiquement nulle sur X si elle s'annule en un point. On remarque que la notion de positivité (négativité) au sens de Griffiths pour un fibré (F_J^λ, h) ne signifie rien d'autre que pour tout vecteur réel $\xi \in T_{X,J}$ l'endomorphisme h -hermitien $i\mathcal{C}_h(F_J^\lambda)(\xi, J\xi)$ est positif (négatif). Si la courbure du fibré (F_J^λ, h) est strictement négative au sens de Griffiths en un point x alors on déduit d'après la formule (2.6.3) que les fonctions $|\sigma_k|_h^2$ sont strictement J -plurisousharmoniques au voisinage du point x .

Le lemme fondamental suivant est une version presque complexe d'un lemme classique de la géométrie hermitienne complexe ([Dem-1], chapitre V).

Lemme 0.3.0.2 *Soit (X, J) une variété presque complexe et $(F_J^\lambda, h) \rightarrow (X, J)$ le fibré vectoriel hermitien d'une puissance de Schur du fibré des $(1, 0)$ -formes. Soient (z_1, \dots, z_n) des coordonnées \mathcal{C}^∞ complexes centrées en un point x telles que $J(x) = J_0$, où J_0 désigne la structure presque complexe canonique relative à ces coordonnées. Il existe un repère local $(\sigma_k)_k \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)^{\oplus r_\lambda}(U_x)$ presque-holomorphe spécial au point x pour lequel les coefficients de la métrique hermitienne h s'écrivent sous la forme*

$$h(\sigma_l, \sigma_m) = \delta_{l,m} + \sum_{1 \leq j, k \leq n} H_{l,m}^{j,\bar{k}} z_j \bar{z}_k + O(|z|^3).$$

Quel que soit le choix du repère $(\sigma_k)_k \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)^{\oplus r_\lambda}(U_x)$ presque-holomorphe spécial au point x pour lequel les coefficients de la métrique hermitienne h s'écrivent sous la forme précédente on a les expressions suivantes pour le tenseur de courbure et la courbure de Chern au point x ;

$$\mathcal{C}_h(F_J^\lambda)|_x = - \sum_{\substack{1 \leq l, m \leq r_\lambda \\ 1 \leq j, k \leq n}} H_{l,m}^{j,\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes \sigma_m^* \otimes \sigma_l \quad (0.3.5)$$

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma_l, \eta \otimes \sigma_m)|_x = \bar{\partial}_J \partial_J h(\sigma_l, \sigma_m)(\xi^{1,0}, \eta^{0,1})|_x, \quad (0.3.6)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$ et tout indice l, m .

Le lemme nous montre que la courbure de Chern au point x mesure l'obstruction à l'existence de repères locaux presque-holomorphes spéciaux et orthonormaux à l'ordre deux en x .

Coordonnées presque complexes d'ordre $N \geq 1$ en un point.

Avant de donner une explication précise de la notion de coordonnées presque complexes d'ordre $N = 2$ nous voulons donner une idée de cette notion dans le cas général. Soient (z_1, \dots, z_n) des coordonnées locales \mathcal{C}^∞ centrées en $x \in X$ telles que le repère local $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n})$ soit une base complexe de $T_{X,J,x}^{1,0}$ au point x .

Les coordonnées (z_1, \dots, z_n) sont appelées presque complexes d'ordre $N \geq 1$ en x si on a l'équivalence suivante : le jet d'ordre $k = 1, \dots, N$ de la structure presque complexe J en x coïncide avec la structure presque complexe canonique de \mathbb{C}^n relative à ces coordonnées, si et seulement

si le jet d'ordre $k - 1$ de la torsion de la structure presque complexe J en x est nul.

Nous donnons maintenant une explication plus précise de la notion de coordonnées presque complexes d'ordre deux en un point. Soient (z_1, \dots, z_n) des coordonnées locales C^∞ centrées en $x \in X$ telles que le repère local $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n})$ soit une base complexe de $T_{X,J,x}^{1,0}$ au point x . On dénote par $M_J \in M_{2n,2n}(\mathcal{E})$ la matrice de la structure presque complexe $J \in \mathcal{E}(\text{End}_{\mathbb{C}}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))(X)$ par rapport au repère complexe $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n})$. Le fait que $\bar{J} = J$ implique que la matrice M_J s'écrit sous la forme :

$$M_J(z) = \begin{pmatrix} A(z) & \bar{B}(z) \\ B(z) & \bar{A}(z) \end{pmatrix}$$

avec $A(0) = iI_n$, $B(0) = 0_n$. Si on suppose que la structure presque complexe est intégrable il existent d'après le théorème de Newlander-Nirenberg des coordonnées locales holomorphes (z_1, \dots, z_n) . La structure presque complexe s'écrit alors par rapport à ces coordonnées sous la forme

$$J(z) = J_0 = i \sum_k \left(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right),$$

autrement dit $A(z) \equiv iI_n$, $B(z) \equiv 0_n$. Avec les notations introduites précédemment on a la proposition suivante.

Proposition 0.3.4 *Pour tout point x d'une variété presque complexe (X, J) il existe des coordonnées (z_1, \dots, z_n) de classe C^∞ centrées en x telles que les matrices $A(z)$ et $B(z)$ de la structure presque complexe J relatives à ces coordonnées admettent les développements asymptotiques*

$$B(z) = \sum_r B^r z_r + \sum_{r,s} \left(B^{r,s} z_r z_s + B^{r,\bar{s}} z_r \bar{z}_s \right) + O(|z|^3) \quad (0.3.7)$$

$$A(z) = iI_n + \frac{i}{2} \sum_{r,s} \bar{B}^r \cdot B^s z_s \bar{z}_r + O(|z|^3) \quad (0.3.8)$$

où $B^r, B^{r,s}, B^{r,\bar{s}} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ sont des matrices telles que $B^{r,s}$ soit symétrique par rapport aux indices r, s et $B_{k,l}^r = 0$ pour $r \leq l$, $B_{k,l}^{r,s} = 0$ pour $r, s \leq l$, $B_{k,l}^{r,\bar{s}} = 0$ pour $r \leq l$. De plus si on considère l'expression locale de la forme de torsion de la structure presque complexe

$$\tau_J = \sum_{1 \leq k < l \leq n} [\zeta_k, \zeta_l]_J^{0,1} \otimes \zeta_k^* \wedge \zeta_l^* = \sum_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ 1 \leq r \leq n}} \bar{N}_{k,l}^r \zeta_k^* \wedge \zeta_l^* \otimes \bar{\zeta}_r$$

où $\zeta_l := (\partial/\partial z_l)_J^{1,0} \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})(U_x)$, $l = 1, \dots, n$ est le repère locale du fibré des $(1,0)$ -vecteurs $T_{X,J}^{1,0}$ issue des coordonnées (z_1, \dots, z_n) on a l'expression

$$\bar{N}_{k,l}^r(z) = \frac{i}{2} B_{r,k}^l + \frac{i}{2} \sum_s \left[2(B_{r,k}^{l,s} - B_{r,l}^{k,s}) z_s + B_{r,k}^{l,\bar{s}} \bar{z}_s \right] + O(|z|^2)$$

pour tout $k < l$. Le jet d'ordre $k = 0, 1$ de la forme de torsion de la structure presque complexe au point x est nul si et seulement si les coefficients $B_{*,*}(z)$ de la structure presque complexe relatifs aux coordonnées en question s'annulent à l'ordre $k + 1$.

Les coordonnées qui vérifient les propriétés de l'énoncé de la proposition précédent seront appelées coordonnées presque complexes d'ordre deux en x par rapport à la structure presque complexe J . Elle jouent un rôle important dans le calcul asymptotique du flot géodésique induit par une connexion de Chern sur le fibré tangent et dans l'expression asymptotique normale du Hessien presque complexe. Ces deux dernières expressions ont un rôle de base pour la régularisation des fonctions J -plurisousharmoniques sur les variétés presque complexes.

0.4 Fonctions plurisousharmoniques et courants positifs de type (1, 1) sur une variété presque complexe

Soit (X, J) une variété presque complexe de dimension complexe n et soit $u \in \mathcal{D}'_{2n}(\mathbb{R})(X)$ une distribution réelle. Pour l'étude de la J -plurisousharmonicité on est intéressé à la positivité du $(1, 1)$ -courant $i\partial_J\bar{\partial}_J u \in \mathcal{D}'^{1,1}(X)$, autrement dit à la positivité de la distribution

$$i\partial_J\bar{\partial}_J u(\xi, J\xi) = \frac{1}{2}(\xi \cdot \xi \cdot u + J\xi \cdot J\xi \cdot u + J[\xi, J\xi] \cdot u).$$

pour tout champs de vecteurs réel $\xi \in \mathcal{E}(T_X)(U)$, avec $U \subset X$ ouvert. Dans la pratique il est suffisant de se restreindre à une famille dénombrable de champs qu'on introduit de suite. Pour simplifier l'expression précédente il est utile d'utiliser les champs de vecteurs J -plats.

Définition 0.4.1 *Un champ de vecteurs réel $\xi \in \mathcal{E}(T_X \setminus 0_X)(U)$ au dessus d'un ouvert U est dit J -plat si vérifie l'équation différentielle non linéaire de premier ordre $[\xi, J\xi] = 0$ sur l'ouvert U .*

D'après le théorème de Newlander-Nirenberg on déduit que si la structure presque complexe est intégrable alors tout champ de vecteurs réel holomorphe $\xi \in \mathcal{O}(T_X \setminus 0_X)(U)$ au dessus d'un ouvert U quelconque est J -plat. En général on désigne par $P_J(U, T_X)$ l'ensemble des champs de vecteurs J -plats au dessus de l'ouvert U . La remarque élémentaire suivante nous montre qu'un champ de vecteurs J -plat donne lieu localement à des plongements par feuilles courbes J -holomorphes lisses. De façon précise on a le lemme élémentaire suivant.

Lemme 0.4.0.3 *Soit (X, J) une variété presque complexe de dimension complexe n et ξ un champ de vecteurs J -plat sur un ouvert U . Pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert $U_x \subset U$ de x et une carte locale (U_x, σ_ξ^{-1}) , $\sigma_\xi : B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1} \rightarrow U_x$, compatible avec l'orientation canonique de (U_x, J) telle que pour tout $z_2 \in B_\delta^{n-1}$, les applications $z_1 \in B_\delta^1 \mapsto \sigma_\xi(z_1, z_2)$ sont des courbes J -holomorphes et $d\sigma_\xi(\frac{\partial}{\partial t}) = \xi \circ \sigma_\xi$, $z_1 = t + is$.*

On a le résultat général suivant lequel assure la possibilité d'effectuer des plongements du cylindre par feuilles J -holomorphes en toutes les positions possibles et l'existence locale "en grande quantité" des champs de vecteurs J -plats.

Théorème 0.4.2 *Soit (X, J) une variété presque complexe de dimension complexe n . Pour tout point $x_0 \in X$ il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 et un voisinage ouvert $\mathcal{B}(T_{U_{x_0}}) \subset T_{U_{x_0}}$, $\mathcal{B}(T_{U_{x_0}}) \simeq U_{x_0} \times B^n$, de la section nulle sur U_{x_0} tels que :*

A) *Il existe une application de classe \mathcal{C}^∞*

$$\Phi : B_1^1 \times \mathcal{B}(T_{U_{x_0}}) \rightarrow X$$

telle que pour tout $v \in \mathcal{B}(T_{U_{x_0}})$ l'application $z \in B_1^1 \mapsto \Phi(z, v)$ est une courbe J -holomorphe qui vérifie la condition $\partial_t \Phi(0, v) = v$, $z = t + is$.

B) *Il existe une famille de plongements $(\Psi_\alpha : B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1} \rightarrow X)_{\alpha \in I}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que pour tout $\alpha \in I$ et $z_2 \in B_\delta^{n-1}$ les applications*

$$z_1 \in B_\delta^1 \mapsto \Psi_\alpha(z_1, z_2)$$

sont des courbes J -holomorphes, $\Psi_\alpha(B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1}) \supset U_{x_0}$ et

$$T_{X,p} \setminus 0_p = \left\{ \lambda \partial_t \Psi_\alpha(0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0, \alpha \in I \right\} = \left\{ \xi(p) \mid \xi \in P_J(U_{x_0}, T_X) \right\}$$

pour tout $p \in U_{x_0}$, ($z_1 = t + is$).

En conclusion soit $\sigma_\xi : B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1} \rightarrow X$, comme dans l'énoncé du lemme 0.4.0.3. On déduit alors l'expression suivante

$$i\partial_J \bar{\partial}_J u(\xi, J\xi) = \frac{1}{2}(\xi \cdot \xi \cdot u + J\xi \cdot J\xi \cdot u) = \frac{1}{2}(\sigma_\xi^{-1})^* \Delta_{z_1}(u \circ \sigma_\xi)$$

où $\Delta_{z_1} := \partial_t^2 + \partial_s^2$ désigne le Laplacien par rapport à la variable $z_1 = t + is \in B_\delta^1$ dans l'ouvert $B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1}$. Cette formule joue un rôle important pour la preuve du résultat suivant.

Théorème 0.4.3 *Soit (X, J) une variété presque complexe connexe et $f \in Psh(X, J)$. Alors ou bien $f \equiv -\infty$ ou bien $f \in L_{loc}^1(X)$. Dans ce dernier cas le $(1, 1)$ -courant $i\partial_J \bar{\partial}_J f$ est positif.*

Nous proposons une conjecture réciproque du théorème 3.3.9 qu'on énonce sous la forme suivante.

Conjecture 1 *Soit (X, J) une variété presque complexe de dimension complexe n et soit $u \in \mathcal{D}'_{2n}(\mathbb{R})(X)$ une distribution réelle telle que le $(1, 1)$ -courant $i\partial_J \bar{\partial}_J u \in \mathcal{D}'^{1,1}(X)$ soit positif. Alors il existe une unique fonction $f \in Psh(X, J) \cap L_{loc}^1(X)$ telle que la distribution correspondante coïncide avec la distribution u .*

A l'aide de la notion de champ de vecteurs J -plat et de plongement à feuilles courbes J -holomorphes, nous avons montré la conjecture dans le cas particulier suivant.

Théorème 0.4.4 *Soit (X, J) une variété presque complexe et $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty)$ une fonction semi-continue supérieurement telle que f soit continue sur l'ensemble $X \setminus f^{-1}(-\infty)$, $f \in L_{loc}^1(X)$ et telle que le $(1, 1)$ -courant $i\partial_J \bar{\partial}_J f \in \mathcal{D}'^{1,1}(X)$ soit positif. Alors $f \in Psh(X, J)$.*

Pour la solution de la conjecture dans le cas général d'une distribution réelle u (qui est un élément de $W_{loc}^{1,1}(X)$ par conséquence de la positivité du $(1, 1)$ -courant $i\partial_J \bar{\partial}_J u$) nous proposons une technique de régularisation des potentiels u des $(1, 1)$ -courants positifs du type $i\partial_J \bar{\partial}_J u$ sur les variétés presque complexes analogue à celle utilisé avec succès par Demailly [Dem-2] dans le cas complexe intégrable. Soit (X, J) une variété presque complexe et $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$ une métrique hermitienne sur $T_{X,J}$. Soit $\exp : \mathcal{U} \subset T_X \rightarrow X$ le flot géodésique induit par la connexion de Chern du fibré tangent

$$D_J^\omega : \mathcal{E}(T_{X,J}) \rightarrow \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_{X,J})$$

associé à la métrique ω , (Ici $\mathcal{U} \subset T_X$ désigne un voisinage ouvert de la section nulle). Soit $(\chi_\varepsilon(|\cdot|^2))_{\varepsilon>0}$ une famille de noyaux régularisant usuels sur \mathbb{C}^n et considérons l'opérateur régularisant

$$u_\varepsilon(x) := \int_{\zeta \in T_{X,x}} u \circ \exp_x(\zeta) \cdot \chi_\varepsilon(|\zeta|_{\omega_x}^2) d\lambda_x(\zeta),$$

où $d\lambda_x$ désigne la mesure de Lebesgue de l'espace hermitien $(T_{X,J,x}, \omega_x)$. Étudier la conjecture revient à étudier le contrôle asymptotique de la positivité des $(1, 1)$ -formes $i\partial_J \bar{\partial}_J u_\varepsilon$ car si $i\partial_J \bar{\partial}_J u \geq 0$ alors, comme dans [Dem-2], il existe une constante $K > 0$ suffisamment grande telle que la suite de fonctions $u_\varepsilon + K\varepsilon^2$ converge de façon décroissante vers la fonction u lorsque ε tend vers zéro. Comme dans [Dem-2] il est nécessaire d'utiliser une métrique ω avec courbure partiellement positive au sens de Griffiths que nous expliquons à la fin du chapitre III.

Chapitre 1

Faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents sur les variétés complexes

Abstract.-In this chapter we give a generalization, in the context of coherent analytic sheaves, of a classical result of Koszul-Malgrange ([Ko-Mal]) concerning the integrability of connections of type $(0,1)$ over a \mathcal{C}^∞ complex vector bundle over a complex manifold. We introduce the notion of $\bar{\partial}$ -coherent sheaf, which is a \mathcal{C}^∞ notion, and we prove the existence of an (exact) equivalence between the category of coherent analytic sheaves and the category of $\bar{\partial}$ -coherent sheaves. The principal difficulty of the proof is the solution of a quasi-linear differential equation with standard $\bar{\partial}$ as its principal term. We are able to find a solution of this differential equation, using a rapidly convergent iteration scheme of Nash-Moser type. To establish the equivalence between the two previous categories we also use a deep result of Malgrange asserting that the ring of germs of complex differentiable functions at a point is faithfully flat over the ring of germs of holomorphic functions at the same point. The main application of this chapter concerns a method which allows to find analytic structures which are obtained by smooth deformations of other ones.

1.1 Présentation du résultat et des applications

Soit (X, J) une variété complexe, où J est le tenseur de la structure presque-complexe supposée intégrable. On désigne par \mathcal{E}_X le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes, par $\mathcal{E}_X^{0,q}$ le faisceau des $(0, q)$ -formes et par

$$\bar{\partial}_J \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_X^{0,q}, \mathcal{E}_X^{0,q+1})(X)$$

la composante de type $(0, 1)$ de la différentielle. Soit $F \rightarrow X$ un fibré vectoriel complexe \mathcal{C}^∞ . On rappelle que sur une variété complexe il y a une équivalence entre les notions suivantes.

$$\{\text{Fibrés vectoriels complexes } \mathcal{C}^\infty\} \longleftrightarrow \{\text{Faisceaux de } \mathcal{E}\text{-modules localement libres}\}$$

$$F \longmapsto \mathcal{E}(F) := \text{Faisceau des sections } \mathcal{C}^\infty \text{ de } F$$

L'application inverse envoie \mathcal{G} sur $(F, (\bar{\psi}_\alpha)_\alpha)$ où

$$F := \coprod_{x \in X} \mathcal{G}_x / m(\mathcal{E}_x) \cdot \mathcal{G}_x$$

et les trivialisations locales $\bar{\psi}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\cong} F|_{U_\alpha}$ sont obtenues de façon naturelle à partir des trivialisations locales $\psi_\alpha : \mathcal{E}_{U_\alpha}^{\oplus r} \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}|_{U_\alpha}$ du faisceau localement libre \mathcal{G} . L'équivalence précédente est aussi valable pour les fibrés vectoriels holomorphes et les faisceaux de \mathcal{O}_X -modules localement libres définis sur une variété complexe. On considère la définition suivante.

Définition 1.1.1 *Une connexion de type $(0, 1)$ sur un faisceau \mathcal{G} de \mathcal{E}_X -modules est un morphisme de faisceaux de groupes additifs $\bar{\partial} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ tel que $\bar{\partial}(g \cdot f) = (\bar{\partial}g) \cdot f + g \otimes \bar{\partial}_J f$, pour tout $g \in \mathcal{G}_x$ et $f \in \mathcal{E}_{X,x}$.*

La donnée d'une connexion de type $(0, 1)$ sur le faisceau de \mathcal{E}_X -modules \mathcal{G} détermine de façon univoque une dérivation $\bar{\partial}$ de type $(0, 1)$ sur le complexe $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,q})_{q \geq 0}$. En effet on peut définir l'extension

$$\bar{\partial} : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,q} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,q+1}$$

par la formule classique

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}\omega)(\xi_0, \dots, \xi_q) &:= \sum_{0 \leq j \leq q} (-1)^j \bar{\partial}(\omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_q))(\xi_j) + \\ &+ \sum_{0 \leq j < k \leq q} (-1)^{j+k} \omega([\xi_j, \xi_k], \xi_0, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \hat{\xi}_k, \dots, \xi_q), \end{aligned}$$

avec $\omega \in (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,q})(U)$ et $\xi_j \in \mathcal{E}(T_X^{0,1})(U)$, sur un ouvert U quelconque, ou de façon équivalente, par la règle de Leibnitz

$$\bar{\partial}(g \otimes \alpha) := \bar{\partial}g \wedge \alpha + g \otimes \bar{\partial}_J \alpha,$$

avec $g \in \mathcal{G}_x$ et $\alpha \in \mathcal{E}_{X,x}^{0,q}$ pour tout $x \in X$.

Souvent on pense une connexion en termes de son extension au complexe $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,q})_{q \geq 0}$. Pour tout faisceau \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -modules on peut considérer la connexion canonique de type $(0, 1)$ sur le faisceau de \mathcal{E}_X -modules

$$\mathcal{F}^\infty := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$$

suivante

$$\bar{\partial}_{\mathcal{F}} := \mathbb{I}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \bar{\partial}_J : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,q} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,q+1}.$$

De façon explicite cette connexion est définie par la formule

$$\bar{\partial}_{\mathcal{F}}(\psi \otimes_{\mathcal{O}_x} f) = \psi \otimes_{\mathcal{O}_x} \bar{\partial}_J f$$

pour tout $\psi \in \mathcal{F}_x$ et $f \in \mathcal{E}_{X,x}^{0,q}$. Bien évidemment la définition précédente est une généralisation immédiate de la notion classique de connexion de type $(0,1)$ canonique associée à un fibré vectoriel holomorphe, (voir par exemple les ouvrages [Dem-1], chapitre V [Gri-Ha] et [Well]). La donnée d'une connexion de type $(0,1)$ sur \mathcal{G} détermine aussi le tenseur de courbure de la connexion qu'on notera par

$$\Theta_{\bar{\partial}} \in \left(\mathcal{E}nd_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,2} \right)(X)$$

et qu'on définit par la formule

$$\Theta_{\bar{\partial}}(\xi, \eta) \cdot g := (\bar{\partial}^2 g)(\xi, \eta)$$

avec $g \in \mathcal{G}(U)$ et $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X^{0,1})(U)$. On note de plus par $\xi_{\bar{\partial}} \cdot g := \bar{\partial}g(\xi)$ la dérivée covariante de la section g calculée le long du champ ξ et on remarque que la première définition de l'extension de la connexion $\bar{\partial}$ implique de façon triviale la formule

$$\xi_{\bar{\partial}} \cdot (\eta_{\bar{\partial}} \cdot g) - \eta_{\bar{\partial}} \cdot (\xi_{\bar{\partial}} \cdot g) = [\xi, \eta]_{\bar{\partial}} \cdot g + \Theta_{\bar{\partial}}(\xi, \eta) \cdot g, \quad (1.1.1)$$

où $[\xi, \eta] \in \mathcal{E}(T_X^{0,1})(U)$, grâce à l'hypothèse d'intégrabilité du tenseur de la structure presque-complexe $J \in \mathcal{C}^\infty(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_X)(X)$. Le tenseur de courbure $\Theta_{\bar{\partial}}$ exprime donc le défaut de commutativité des dérivées covariantes secondes des sections de \mathcal{G} le long des champs de type $(0,1)$. Il est aussi élémentaire de vérifier l'identité

$$\bar{\partial}^2 \omega = \Theta_{\bar{\partial}} \wedge \omega$$

pour toute forme $\omega \in (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,q})(U)$.

Nous porterons un intérêt particulier aux connexions de type $(0,1)$ intégrables, c'est à dire aux connexions telles que $\bar{\partial}^2 = 0$. La formule (1.1.1) caractérise alors ce type de connexions $(0,1)$ comme étant celles pour lesquelles les dérivées covariantes secondes, calculées le long de deux champs qui commutent, commutent également. En termes explicites on a l'égalité

$$\xi_{\bar{\partial}} \cdot (\eta_{\bar{\partial}} \cdot g) = \eta_{\bar{\partial}} \cdot (\xi_{\bar{\partial}} \cdot g)$$

si $[\xi, \eta] = 0$. Un exemple de $(0,1)$ -connexion intégrable est évidemment la connexion $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ introduite précédemment.

Avec les notations précédentes on peut énoncer le résultat de Koszul-Malgrange ([Ko-Mal]) sous la forme suivante.

Théorème 1.1.2 (Koszul-Malgrange). *Soit $F \longrightarrow X$ un fibré vectoriel complexe \mathcal{C}^∞ sur une variété complexe X . Alors l'existence d'une structure de fibré vectoriel holomorphe sur F est équivalente à l'existence d'une connexion $\bar{\partial} : \mathcal{E}(F) \longrightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ de type $(0,1)$ intégrable (i.e. $\bar{\partial}^2 = 0$) sur le faisceau de \mathcal{E} -modules $\mathcal{E}(F)$.*

En utilisant l'équivalence entre les notions de fibrés vectoriels holomorphes et faisceaux de \mathcal{O}_X -modules localement libres sur une variété complexe, on peut reformuler en termes équivalents le théorème 1.1.2 sous la forme suivante.

Théorème 1.1.3 (Koszul-Malgrange). *Soit $F \rightarrow X$ un fibré vectoriel complexe C^∞ sur une variété complexe X muni d'une connexion $\bar{\partial} : \mathcal{E}(F) \rightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ telle que $\bar{\partial}^2 = 0$. Alors le faisceau de \mathcal{O}_X -modules $\text{Ker} \bar{\partial} \subset \mathcal{E}(F)$ est localement libre et $(\text{Ker} \bar{\partial}) \cdot \mathcal{E}_X = \mathcal{E}(F)$, (ceci signifie que les trivialisations locales du noyau $\text{Ker} \bar{\partial}$ sur le faisceau \mathcal{O}_X sont aussi des trivialisations locales de $\mathcal{E}(F)$ sur le faisceau \mathcal{E}_X).*

On a en conclusion que le noyau de la connexion $\bar{\partial}$ est le faisceau des sections holomorphes $\mathcal{O}(F)$ du fibré F et la connexion $\bar{\partial}$ coïncide avec la connexion canonique

$$\bar{\partial}_F := \mathbb{I}_{\mathcal{O}(F)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \bar{\partial}_J : \mathcal{E}(F) \rightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}.$$

Dans le cas des faisceaux de \mathcal{E}_X -modules inversibles qui admettent une connexion $\bar{\partial}_0$ de type $(0,1)$ telle que $\bar{\partial}_0^2 = 0$ on sait que toutes les connexions de ce type, et seulement celles ci, sont de la forme $\bar{\partial}_0 + A \otimes$ où $A \in \mathcal{E}_X^{0,1}(X)$ est une $(0,1)$ -forme $\bar{\partial}_J$ -fermée. On en déduit que si L est un fibré en droites holomorphe alors les structures de fibré vectoriel holomorphes sur L sont en bijection avec les $(0,1)$ -formes globales $\bar{\partial}_J$ -fermées.

Avant d'énoncer le résultat qu'on se propose de démontrer on aura besoin de quelques rappels et préliminaires. Une catégorie plus générale que la catégorie des faisceaux de \mathcal{O}_X -modules localement libres est la catégorie des faisceaux \mathbb{C} -analytiques cohérents qu'on appellera en abrégé analytiques cohérents. On rappelle ici la définition.

Définition 1.1.4 *Un faisceau \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -modules sur une variété complexe X est dit analytique cohérent si les deux propriétés suivantes sont satisfaites.*

- 1) *Le faisceau \mathcal{F} est localement de type fini comme \mathcal{O}_X -module.*
- 2) *Pour tout ouvert $U \subset X$ et pour tout $(\psi_1, \dots, \psi_p) \in \mathcal{F}^{\oplus p}(U)$ le faisceau des relations*

$$\mathcal{R}(\psi_1, \dots, \psi_p) := \text{Ker} \left((\psi_1, \dots, \psi_p) : \mathcal{O}_U^{\oplus p} \rightarrow \mathcal{F}|_U \right)$$

est localement de type fini comme \mathcal{O}_U -module sur U .

On a les théorèmes classiques suivants, qui donnent des exemples fondamentaux de faisceaux analytiques cohérents.

Théorème 1.1.5 (Oka) *Sur une variété complexe X le faisceau structural \mathcal{O}_X est analytique cohérent.*

Théorème 1.1.6 (Cartan) *Soit $A \subset X$ un sous-ensemble analytique dans une variété complexe X . Alors le faisceau d'idéaux des fonctions holomorphes $\mathcal{I}_A \subset \mathcal{O}_X$ qui s'annulent le long de A est analytique cohérent.*

Une propriété importante des faisceaux cohérents est constituée par le fait que si on a un morphisme de faisceaux cohérents alors le noyau et le conoyau sont aussi cohérents. On déduit alors grâce au théorème de Oka qu'un faisceau de \mathcal{O}_X -modules est analytique cohérent si et seulement si le faisceau \mathcal{F} admet des \mathcal{O}_X -présentations locales, en d'autres termes il existe localement des suites exactes courtes

$$\mathcal{O}_U^{\oplus p_1} \rightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus p_0} \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0.$$

On voit en particulier que tout faisceau \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -modules localement libre est analytique cohérent. On aura besoin aussi du résultat fondamental suivant dû à Malgrange, (voir l'ouvrage de Malgrange [Mal-1]).

Théorème 1.1.7 (Malgrange) Soit X une variété complexe. Pour tout point $x \in X$ l'anneau des germes des fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes $\mathcal{E}_{X,x}$ au point x est fidèlement plat sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes $\mathcal{O}_{X,x}$ au point x .

On remarque que si \mathcal{F} est un faisceau analytique cohérent, le théorème des syzygies (voir [Kob], chapitre V) implique l'existence d'une \mathcal{O} -résolution de longueur finie

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus p_m} \xrightarrow{\varphi_m} \mathcal{O}_U^{\oplus p_{m-1}} \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{O}_U^{\oplus p_1} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{O}_U^{\oplus p_0} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$$

dans la catégorie des faisceaux \mathbb{C} -analytiques cohérents. En rappelant que $\mathcal{F}^\infty := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$ on obtient le diagramme commutatif suivant dont toutes les directions horizontales et verticales sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}|_U & \longrightarrow & \mathcal{F}|_U^\infty & \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F}|_U^\infty \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F}|_U^\infty \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,2} & \longrightarrow & \dots \\
& & \uparrow \psi & & \uparrow \psi & & \uparrow \psi \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \psi \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_U^{\oplus p_0} & \longrightarrow & \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_0} & \longrightarrow & \dots \\
& & \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi_1 \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \varphi_1 \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_U^{\oplus p_1} & \longrightarrow & \mathcal{E}_U^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_1} & \longrightarrow & \dots \\
& & \uparrow \varphi_2 & & \uparrow \varphi_2 & & \uparrow \varphi_2 \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \varphi_2 \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} & & \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
& & \uparrow \varphi_{m-1} & & \uparrow \varphi_{m-1} & & \uparrow \varphi_{m-1} \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \varphi_{m-1} \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_U^{\oplus p_{m-1}} & \longrightarrow & \mathcal{E}_U^{\oplus p_{m-1}} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_{m-1}} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_{m-1}} & \longrightarrow & \dots \\
& & \uparrow \varphi_m & & \uparrow \varphi_m & & \uparrow \varphi_m \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \varphi_m \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_U^{\oplus p_m} & \longrightarrow & \mathcal{E}_U^{\oplus p_m} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_m} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_m} & \longrightarrow & \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

La raison de l'exactitude est la suivante : la platitude de l'anneau $\mathcal{E}_{X,x}$ sur l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ implique l'exactitude des autres flèches verticales. L'exactitude du dernier complexe

$$((\mathcal{E}_U^{0,q})^{\oplus p_m}; \bar{\partial}_J)_{q \geq 0}$$

implique l'exactitude du complexe

$$(\mathcal{R}^{\mathcal{E}}(\varphi_{m-1}) \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,q}; \bar{\partial}_J)_{q \geq 0},$$

où $\mathcal{R}^{\mathcal{E}}(\varphi_{m-1})$ désigne le faisceau des relations de φ_{m-1} sur le faisceau \mathcal{E}_X . En procédant par récurrence décroissante et en utilisant l'exactitude des complexes en $\bar{\partial}_J$ et l'exactitude des flèches verticales on obtient finalement l'exactitude du complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}|_U^\infty \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}|_U^\infty \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,2} \longrightarrow \dots$$

Faisons maintenant le point de la situation obtenue jusqu'ici. On est parti d'un faisceau analytique cohérent \mathcal{F} pour obtenir un faisceau de \mathcal{E} -modules \mathcal{F}^∞ admettant des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie, qui est muni d'une connexion $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ de type $(0,1)$ intégrable dont le noyau est le faisceau analytique cohérent de départ \mathcal{F} . De manière générale on a la caractérisation différentielle suivante.

Théorème 1.1.8 (Caractérisation différentielle des faisceaux analytiques cohérents)

Soit X une variété complexe et soit \mathcal{G} un faisceau de \mathcal{E}_X -modules qu'on suppose muni d'une connexion

$$\bar{\partial} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$$

de type $(0,1)$ telle que $\bar{\partial}^2 = 0$. Si de plus le faisceau \mathcal{G} admet des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie, alors le faisceau de \mathcal{O}_X -modules $\text{Ker}\bar{\partial} \subset \mathcal{G}$ est analytique cohérent, on a les égalités

$$\mathcal{G} = (\text{Ker}\bar{\partial}) \cdot \mathcal{E}_X \cong (\text{Ker}\bar{\partial}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$$

et la connexion $\bar{\partial}$ coïncide, à isomorphisme canonique près, avec l'extension naturelle $\bar{\partial}_{\text{Ker}\bar{\partial}}$ associée au faisceau analytique cohérent $\text{Ker}\bar{\partial}$.

Le théorème précédent montre donc qu'on est dans la même situation que celle décrite précédemment. Bien évidemment le théorème 1.1.8 constitue une généralisation du théorème 1.1.3. Considérons maintenant la définition suivante.

Définition 1.1.9 *Un couple $(\mathcal{G}, \bar{\partial}) \equiv \mathcal{G}_{\bar{\partial}}$ où \mathcal{G} et $\bar{\partial}$ vérifient les hypothèses du théorème 1.1.8 est appelé faisceau $\bar{\partial}$ -cohérent. Un morphisme*

$$\varphi : \mathcal{A}_{\bar{\partial}_1} \longrightarrow \mathcal{B}_{\bar{\partial}_2}$$

de faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents est un morphisme de faisceaux de \mathcal{E}_X -modules tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1} & \xrightarrow{\varphi \otimes \mathbb{I}_{(0,1)}} & \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1} \\ \bar{\partial}_1 \uparrow & & \bar{\partial}_2 \uparrow \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B} \end{array}$$

Le théorème 1.1.8 et la fidélité plate du faisceau \mathcal{E}_X sur \mathcal{O}_X montrent que sur une variété complexe on a une équivalence exacte entre la catégorie \mathcal{OCoh} des faisceaux analytiques cohérents et la catégorie $\bar{\mathcal{C}}\mathcal{Coh}$ des faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents. Plus explicitement on a le foncteur ∞ qui agit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \in \mathcal{OCoh} & \xrightarrow{\infty} \mathcal{F}_{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}}^\infty \in \bar{\mathcal{C}}\mathcal{Coh} \\ \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) & \xrightarrow{\infty} \varphi \otimes \mathbb{I} \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\bar{\partial}_{\mathcal{A}}}^\infty, \mathcal{B}_{\bar{\partial}_{\mathcal{B}}}^\infty) \end{aligned}$$

et son inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\bar{\partial}} \in \bar{\partial}\mathbf{Coh} &\xrightarrow{\infty^{-1}} \text{Ker}\bar{\partial} \in \mathcal{OCoh} \\ \varphi \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\bar{\partial}_1}, \mathcal{B}_{\bar{\partial}_2}) &\xrightarrow{\infty^{-1}} \varphi|_{\cdot} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Ker}\bar{\partial}_1, \text{Ker}\bar{\partial}_2) \end{aligned}$$

Le cas des faisceaux d'idéaux.

Soit $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux de fonctions holomorphes (non nécessairement cohérent). On considère le faisceau d'idéaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes

$$\mathcal{I}^\infty := \mathcal{I} \cdot \mathcal{E}_X \subseteq \mathcal{E}_X$$

et on remarque que la règle de Leibnitz implique que pour tout germe de $(0,1)$ -champs $\xi \in \mathcal{E}(T_X^{0,1})_x$ on a l'inclusion

$$\xi \cdot \mathcal{I}_x^\infty \subseteq \mathcal{I}_x^\infty,$$

pour tout $x \in X$. De manière générale on a la définition suivante :

Définition 1.1.10 (Notion de $\bar{\partial}_j$ -stabilité) *Un faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}_X$ de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes est dit $\bar{\partial}_j$ -stable si pour tout germe de $(0,1)$ -champs $\xi \in \mathcal{E}(T_X^{0,1})_x$ on a l'inclusion $\xi \cdot \mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{J}_x$, pour tout $x \in X$.*

La $\bar{\partial}_j$ -stabilité d'un faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}_X$ de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes implique évidemment qu'on peut considérer l'opérateur $\bar{\partial}_j$ comme une connexion

$$\bar{\partial}_j : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$$

de type $(0,1)$ intégrable sur le faisceaux \mathcal{J} . Dans le cas où $\mathcal{J} = \mathcal{I}^\infty$ on a par conséquence de la platitude de l'anneau $\mathcal{E}_{X,x}$ sur l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ que la connexion en question coïncide, à isomorphisme canonique près, avec la connexion canonique $\bar{\partial}_x$ associée au faisceau \mathcal{I} . De plus le noyau de cette connexion est le faisceau \mathcal{I} . Une conséquence immédiate du théorème précédent est le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.11 *Soit $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}_X$ un faisceau d'idéaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes $\bar{\partial}_j$ -stable admettant des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie. Alors le faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_X$ est analytique cohérent et*

$$(\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_X) \cdot \mathcal{E}_X = \mathcal{J},$$

(autrement dit le faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_X$ est un \mathcal{O} -module localement de type fini et ses générateurs locaux sur \mathcal{O}_X sont aussi des générateurs locaux du faisceau \mathcal{J} sur \mathcal{E}_X).

Concrètement pour vérifier la $\bar{\partial}_j$ -stabilité du faisceau \mathcal{J} il suffit de faire un choix arbitraire de repère local $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{E}(T_X^{0,1})^{\oplus n}(U)$, de générateurs $(\psi_1, \dots, \psi_p) \in \mathcal{J}^{\oplus p}(U)$ et de montrer, pour tout $x \in U$, l'existence de germes de fonctions $A_{k,l,j} \in \mathcal{E}_{X,x}$ qui vérifient les égalités

$$\xi_{k,x} \cdot \psi_{l,x} = \sum_{j=1}^p A_{k,l,j} \cdot \psi_{j,x}.$$

En termes plus élémentaires on a le corollaire suivant.

Corollaire 1.1.12 Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble fermé d'une variété complexe X tel que pour tout $x \in Z$ il existe un voisinage ouvert coordonné U_x de x et des fonctions $\psi_1, \dots, \psi_{p_x} \in \mathcal{E}_X(U_x)$ telles que

$$Z \cap U_x = \psi_1^{-1}(0) \cap \dots \cap \psi_{p_x}^{-1}(0),$$

les relations

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial \bar{z}_k} = \sum_{j=1}^{p_x} A_{k,l,j} \cdot \psi_j,$$

avec $A_{k,l,j} \in \mathcal{E}_X(U_x)$ soient satisfaites pour tous les indices l, k (les coordonnées (z_1, \dots, z_n) sont relatives à l'ouvert U_x) et le faisceau des \mathcal{E} -relations

$$\mathcal{R}^{\mathcal{E}}(\psi_1, \dots, \psi_{p_x}) \subset \mathcal{E}_{U_x}$$

admet des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie. Alors Z est un sous-ensemble analytique de X .

On déduit alors le corollaire suivant.

Corollaire 1.1.13 Soit $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$, $\Phi(z) = \zeta$ un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ entre deux ouverts de \mathbb{C}^n , soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{U_1}$ un faisceau d'ideaux de fonctions holomorphes localement de type fini (comme \mathcal{O} -module), et $Z := V(\mathcal{I}) \subset U_1$ son ensemble des zéros.

Si le faisceau d'ideaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes $\Phi_* \mathcal{I}^\infty \subset \mathcal{E}_{U_2}$ est $\bar{\partial}_j$ -stable alors $\Phi(Z) \subset U_2$ est un sous-ensemble analytique de U_2 .

De façon plus explicite : pour tout $x \in Z$ soient $\psi_1, \dots, \psi_{p_x} \in \mathcal{O}_X(U_x)$, $U_x \subset U_1$ des fonctions holomorphes telles que

$$Z \cap U_x = \psi_1^{-1}(0) \cap \dots \cap \psi_{p_x}^{-1}(0).$$

Si pour tout $x \in Z$ il existe des fonctions $A_{k,l,j} \in \mathcal{E}(\Phi(U_x))$ qui vérifient les relations

$$\sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial \psi_l}{\partial z_r} \circ \Phi^{-1} \right) \cdot \frac{\partial \Phi_r^{-1}}{\partial \bar{\zeta}_k} = \sum_{j=1}^{p_x} A_{k,l,j} \cdot (\psi_j \circ \Phi^{-1}), \quad (1.1.2)$$

alors $\Phi(Z) \subset U_2$ est un sous-ensemble analytique de U_2 .

Preuve. Les faisceaux d'ideaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes $\Phi_* \mathcal{I}^\infty \subset \mathcal{E}_{U_2}$ et

$$\mathcal{J} := \mathcal{E}(\Phi_* \psi_1, \dots, \Phi_* \psi_{p_x}) \subset \mathcal{E}_{\Phi(U_x)}$$

admettent des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie. Bien évidemment les relations différentielles précédentes expriment la $\bar{\partial}_j$ -stabilité du faisceau \mathcal{J} , (remarquer que les relations 1.1.2 sont banalement vérifiées si le difféomorphisme Φ est holomorphe). La conclusion découle alors des corollaires 1.1.11 et 1.1.12. \square

Remarque relative au corollaire 1.1.13. Soient $\psi_1, \dots, \psi_r \in \mathcal{E}_X(U)$ des fonctions telles que

$$d_x \operatorname{Re} \psi_1 \wedge \dots \wedge d_x \operatorname{Re} \psi_r \wedge d_x \operatorname{Im} \psi_1 \wedge \dots \wedge d_x \operatorname{Im} \psi_r \neq 0$$

pour tout $x \in Z := \psi_1^{-1}(0) \cap \dots \cap \psi_r^{-1}(0)$. La $\bar{\partial}_j$ -stabilité du faisceau d'ideaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes

$$\mathcal{J} := \mathcal{E}(\psi_1, \dots, \psi_r) \subset \mathcal{E}_U$$

implique que le fibré tangent de la sous-variété $Z \subset U$ est un sous-fibré complexe de T_U . On déduit alors facilement l'analyticité de Z , (cf. [Dem-1], chapitre I).

En général les équations holomorphes qui définissent un sous-ensemble analytique présentent des ordres d'annulations arbitraires. Le corollaire 1.1.13 trouve tout sa valeur dans ce cas général.

Remarques relatives au corollaire 1.1.11. En général le fait qu'un faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}_X$ soit un \mathcal{E} -module localement de type fini n'implique pas nécessairement que le faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_X$ soit un \mathcal{O} -module localement de type fini. On a le contre-exemple suivant.

Contre-exemple 1. Soit $X = \mathbb{C}$ et $\mathcal{J} := \mathcal{E}(\psi) \subseteq \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ le faisceau d'idéaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes engendré sur $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ par la fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{C} ,

$$\psi(z) := \exp(-1/x^2) \cdot \sin(1/x) + iy,$$

($z = x + iy$). On a que $(\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_{\mathbb{C}})_z = 0$ pour $z = 0$, $(\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_{\mathbb{C}})_z = m(\mathcal{O}_{\mathbb{C},z})$ pour tout $z = 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ et $(\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_{\mathbb{C}})_z = \mathcal{O}_{\mathbb{C},z}$ pour $z \neq 0, 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Le faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ n'est pas un \mathcal{O} -module localement de type fini. En effet pour tout voisinage ouvert $U \subset \mathbb{C}$ tel que $0 \in \bar{U}$ on a $(\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_{\mathbb{C}})(U) = 0$. Ceci signifie bien évidemment que tous les morphismes $\varphi : \mathcal{O}_U^{\oplus r} \rightarrow (\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_{\mathbb{C}})|_U$ sont nuls.

D'autre part la $\bar{\partial}_J$ -stabilité d'un faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}_X$ de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes n'est pas suffisante pour assurer l'égalité $(\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_X) \cdot \mathcal{E}_X = \mathcal{J}$ ni la cohérence du faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_X$. En effet on a les contre-exemples suivants.

Contre-exemple 2. Soit $\mathcal{J} := m_{x_0}^\infty(\mathcal{E}_X)$ le faisceau d'idéaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes plates en un point fixé $x_0 \in X$. Le faisceau \mathcal{J} est bien évidemment $\bar{\partial}_J$ -stable mais $\mathcal{J}_{x_0} \cap \mathcal{O}_{X,x_0} = 0_{x_0}$.

Contre-exemple 3. Soit $X = \mathbb{C}$ et \mathcal{J} le faisceau d'idéaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes tel que $\mathcal{J}_x = \mathcal{E}_{X,x}$ si $x \in B_1(0)$ (boule ouverte de centre l'origine et rayon unité) et $\mathcal{J}_x = 0_x$ si $x \notin B_1(0)$. Le faisceau \mathcal{J} est bien $\bar{\partial}_J$ -stable, non localement de type fini comme \mathcal{E} -module (donc en particulier \mathcal{J} n'admet pas des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie) et le faisceau $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ n'est pas cohérent. On raisonne par l'absurde pour voir que le faisceau \mathcal{J} est non localement de type fini comme \mathcal{E} -module.

En effet soient $\psi_1, \dots, \psi_r \in \mathcal{J}(U_x)$, $x \in \partial B_1(0)$ des générateurs locaux de \mathcal{J} où U_x est un voisinage ouvert de x . On a alors que

$$\psi_1, \dots, \psi_r \in \mathcal{P}_{\mathbb{C} \setminus B_1(0)}(U_x)$$

où $\mathcal{P}_{\mathbb{C} \setminus B_1(0)}$ désigne le faisceau d'idéaux des fonctions à valeurs complexes plates sur $\mathbb{C} \setminus B_1(0)$. D'autre part le faisceau $\mathcal{P}_{\mathbb{C} \setminus B_1(0)} \subset \mathcal{J}$ est non localement de type fini comme \mathcal{E} -module, (voir [Mal-1]) ce qui contredit le fait que les fonctions ψ_1, \dots, ψ_r sont des générateurs locaux du faisceau \mathcal{J} .

Le corollaire 1.1.11 montre l'existence d'une équivalence exacte entre la catégorie des faisceaux d'idéaux de fonctions holomorphes cohérents et la catégorie des faisceaux d'idéaux $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}_X$ de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes admettant des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie, qui sont stables par rapport aux dérivations le long des champs de vecteurs de type $(0,1)$.

Le cas des sous-faisceaux $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}(F)$ du faisceau des sections \mathcal{C}^∞ d'un fibré vectoriel holomorphe F .

De façon un peu plus générale on peut considérer la situation suivante. Soit $F \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe sur X et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(F)$ un sous-faisceau de \mathcal{O} -modules. La platitude de l'anneau $\mathcal{E}_{X,x}$ sur l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ appliquée à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}(F)$ donne l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{O}(F) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X \cong \mathcal{E}(F)$$

L'image du morphisme précédent est le faisceau $\mathcal{G} := \mathcal{F} \cdot \mathcal{E}_X \subseteq \mathcal{E}(F)$. On a alors l'isomorphisme $\mathcal{G} \cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$. Si

$$\bar{\partial}_F := \mathbb{I}_{\mathcal{O}(F)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \bar{\partial}_J : \mathcal{E}(F) \rightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$$

désigne la connexion canonique associée au faisceau $\mathcal{O}(F)$, on a l'inclusion $\bar{\partial}_F \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ qui permet de voir la restriction

$$\bar{\partial}_F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$$

comme une connexion de type $(0,1)$ intégrable sur le faisceau de \mathcal{E} -modules \mathcal{G} et ayant pour noyau le faisceau \mathcal{F} , (ceci découle de la fidélité plate de l'anneau \mathcal{E}_x sur l'anneau \mathcal{O}_x ou plus simplement de la fidélité plate de l'anneau des séries formelles $\mathcal{E}_x/m^\infty(\mathcal{E}_x) = \hat{\mathcal{O}}_x$ en x , sur l'anneau \mathcal{O}_x (voir[Mal-1])).

L'isomorphisme $\mathcal{G} \cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$ implique alors que la connexion précédente coïncide, à isomorphisme canonique près, avec la connexion canonique $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ associée au faisceau \mathcal{F} . On a la définition suivante.

Définition 1.1.14 (Notion de $\bar{\partial}_F$ -stabilité) Soit $F \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe sur une variété complexe X et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}(F)$ un sous-faisceau de \mathcal{E} -modules. Le faisceau \mathcal{G} est dit $\bar{\partial}_F$ -stable si on a l'inclusion

$$\bar{\partial}_F \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}.$$

Dans ce contexte on a une autre conséquence immédiate du théorème 1.1.8.

Corollaire 1.1.15 Soit $F \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe sur une variété complexe X et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}(F)$ un sous-faisceau de \mathcal{E} -modules $\bar{\partial}_F$ -stable admettant des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie. Alors le faisceau de \mathcal{O}_X -modules $\mathcal{G} \cap \mathcal{O}(F)$ est analytique cohérent et

$$(\mathcal{G} \cap \mathcal{O}(F)) \cdot \mathcal{E}_X = \mathcal{G},$$

(autrement dit le faisceau $\mathcal{G} \cap \mathcal{O}(F)$ est un \mathcal{O} -module localement de type fini et ses générateurs locaux sur \mathcal{O}_X sont aussi des générateurs locaux du faisceau \mathcal{G} sur \mathcal{E}_X).

Concrètement pour vérifier la $\bar{\partial}_F$ -stabilité du faisceau \mathcal{G} il suffit de faire un choix arbitraire de repère local holomorphe $e_1, \dots, e_r \in \mathcal{O}(F)(U)$ du fibré F (où r désigne le rang complexe de F), de générateurs locaux $\psi_1, \dots, \psi_p \in \mathcal{G}(U)$ du faisceau \mathcal{G} ,

$$\psi_k = \sum_{l=1}^r e_l \cdot u_{k,l},$$

$u_{k,l} \in \mathcal{E}_X(U)$ et de vérifier pour tout $x \in U$ l'existence de germes de $(0,1)$ -formes $\alpha_{k,j} \in \mathcal{E}_{X,x}^{0,1}$ telles que les égalités

$$\bar{\partial}_J u_{k,l,x} = \sum_{j=1}^p u_{j,l,x} \cdot \alpha_{k,j}$$

soient satisfaites pour tout les indices k, l . On déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1.1.16 Soient $F_1 \rightarrow X_1$, $F_2 \rightarrow X_2$ deux fibrés vectoriels holomorphes sur deux variétés complexes X_1 , X_2 et soit Φ

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow[\simeq]{\Phi} & F_2 \\ \pi_{F_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{F_2} \\ X_1 & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & X_2 \end{array}$$

un isomorphisme \mathcal{C}^∞ de fibrés vectoriels. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(F_1)$ un faisceau de \mathcal{O}_{X_1} -modules localement de type fini (comme \mathcal{O}_{X_1} -module) tel que le faisceau $\Phi_*\mathcal{F}^\infty \subset \mathcal{E}(F_2)$ soit $\bar{\partial}_{F_2}$ -stable. Alors le faisceau de \mathcal{O}_{X_2} -modules $\Phi_*\mathcal{F}^\infty \cap \mathcal{O}(F_2)$ est localement de type fini comme \mathcal{O}_{X_2} -module, on a l'égalité

$$(\Phi_*\mathcal{F}^\infty \cap \mathcal{O}(F_2)) \cdot \mathcal{E}_{X_2} = \Phi_*\mathcal{F}^\infty$$

et l'ensemble des zéros $V(\Phi_*\mathcal{F}^\infty) = \varphi(V(\mathcal{F}))$ est un sous-espace complexe de X .

En effet le faisceau $\Phi_*\mathcal{F}^\infty \subset \mathcal{E}(F_2)$ admet des \mathcal{E}_{X_2} -résolutions locales de longueur finie. On rappelle que l'ensemble des zéros $V(\Phi_*\mathcal{F}^\infty)$ est par définition l'ensemble donné localement par les zéros d'un système de générateurs locaux du faisceau $\Phi_*\mathcal{F}^\infty$.

Une autre conséquence du théorème 1.1.8.

On a aussi le corollaire suivant que l'on déduit des arguments exposés dans la sous-section 1.4.3.

Corollaire 1.1.17 Soit

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(F_m) \xrightarrow{\varphi_m} \mathcal{E}(F_{m-1}) \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{E}(F_1) \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{E}(F_0) \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux de \mathcal{E} -modules sur une variété complexe X , où F_k , $k = 0, \dots, m$ sont des fibrés vectoriels complexes \mathcal{C}^∞ sur X . Supposons qu'il existe une connexion

$$\bar{D} : \mathcal{E}(F_0) \rightarrow \mathcal{E}(F_0) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$$

de type $(0,1)$ sur le faisceau $\mathcal{E}(F_0)$ telle que les inclusions

$$\bar{D} \operatorname{Im} \varphi_1 \subseteq (\operatorname{Im} \varphi_1) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1} \quad \text{et} \quad \bar{D}^2 \mathcal{E}(F_0) \subseteq (\operatorname{Im} \varphi_1) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,2}$$

soient satisfaites. Alors la connexion quotient $\bar{\partial} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ est intégrable et son noyau $\operatorname{Ker} \bar{\partial}$ est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules analytique cohérent tel que $(\operatorname{Ker} \bar{\partial}) \cdot \mathcal{E}_X = \mathcal{G}$. De plus pour tout entier $l \geq 0$ et $k = 1, \dots, m$ les sous-ensembles

$$Z_l(\varphi_k) := \{x \in X \mid \operatorname{rg}_{\mathbb{C}} \varphi_k(x) \leq l\}$$

sont des sous-espaces complexes de X .

On remarque que la cohomologie des faisceaux cohérents ($\bar{\partial}$ -cohérents) sur une variété complexe peut se calculer, grâce à l'isomorphisme fonctoriel de De Rham-Weil (voir par exemple les ouvrages [Dem-1], [Gri-Ha] et [Wel]), par la formule suivante :

$$H^q(X, \mathcal{G}_{\bar{\partial}}) := H^q(X, \operatorname{Ker} \bar{\partial}) \cong H^q(\Gamma(X, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,*}); \bar{\partial}),$$

qui constitue une généralisation du théorème de Dolbeault. Un cas particulier (ou une généralisation si on veut) de la formule précédente est la suivante :

$$\begin{aligned} H^q(X, \mathcal{G}_{\bar{\partial}} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_{\bar{\partial}_{J,p}}^{p,0}) &:= H^q(X, (Ker \bar{\partial}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\Omega_X^p)) \cong \\ &\cong H^q(\Gamma(X, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{p,*}); \bar{\partial}_\pi) =: H^{p,q}(X, \mathcal{G}_{\bar{\partial}}), \end{aligned}$$

où $\bar{\partial}_{J,p} := (-1)^p \bar{\partial}_J$, $\mathcal{G}_{\bar{\partial}} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_{\bar{\partial}_{J,p}}^{p,0} := (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{p,0}, \bar{\partial}_\pi)$ et

$$\bar{\partial}_\pi : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{p,0} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{p,1}$$

désigne la connexion sur le faisceau produit $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{p,0}$, qui est définie par la règle de Leibnitz. On remarque enfin que le fait que les groupes de cohomologie $H^q(U, \mathcal{G})$ d'un faisceau de \mathcal{E} -modules \mathcal{G} (sur X) soient nuls pour tout $q \geq 1$ et tout ouvert $U \subseteq X$ implique qu'une suite de faisceaux de \mathcal{E} -modules (sur X)

$$\dots \longrightarrow \mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow 0$$

est exacte si et seulement si pour tout ouvert $U \subseteq X$ la suite de $\mathcal{E}_X(U)$ -modules

$$\dots \longrightarrow \mathcal{G}_2(U) \longrightarrow \mathcal{G}_1(U) \longrightarrow \mathcal{G}_0(U) \rightarrow 0$$

est exacte. Ce fait sera utilisé de façon systématique à partir de la section 1.3.

Note au lecteur. La technique qui utilise des procédés itératifs de type Nash-Moser pour la solution de problèmes différentiels est une technique très puissante et très souple. Ceci signifie que lorsque le problème différentiel est très simple alors le procédé itératif l'est aussi. Pour des raisons d'ordre didactique nous commençons par présenter le comportement du procédé itératif de type Nash-Moser dans le cas simple des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres, cas qui a été déjà traité par Koszul et Malgrange avec une méthode différente. Nous évitons de donner tous les petits détails techniques dans ce cas, où le procédé itératif est très simple. Le lecteur pourra trouver tout les détails techniques dans la preuve complète du théorème 1.1.8 dans le cas général, (voir la section 1.5).

1.2 Idée de la preuve du théorème 1.1.8 dans le cas des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres avec la technique de type Nash-Moser

1.2.1 Expression locale de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$ dans le cas des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres

A partir de maintenant on va noter par $M_{k,l}(\mathcal{E}_X^{0,q}(U))$ l'espace des matrices $k \times l$ à coefficients dans l'espace des $(0, q)$ formes $\mathcal{E}_X^{0,q}(U)$. Soit $\psi : \mathcal{E}_U^{\oplus r} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{G}|_U$ une trivialisaton locale du faisceau \mathcal{G} . Le fait que ψ est surjective implique l'existence d'une matrice $\omega^{0,0} \in M_{p_0,p_0}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$ telle que

$$\bar{\partial}\psi = \psi \cdot \omega^{0,0}$$

On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}|_U & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}|_U \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}|_U \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,2} \\ \psi \uparrow \wr & & \wr \uparrow \psi \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \wr \uparrow \psi \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} \\ \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{0,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{0,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_0} \end{array}$$

L'hypothèse d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$ est équivalente localement à l'égalité $0 = \bar{\partial}^2\psi$. En explicitant celle-ci on a :

$$0 = \bar{\partial}^2\psi = \bar{\partial}(\psi \cdot \omega^{0,0}) = \bar{\partial}\psi \wedge \omega^{0,0} + \psi \cdot \bar{\partial}_J \omega^{0,0} = \psi(\bar{\partial}_J \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0})$$

Le fait que ψ soit injective implique alors la relation

$$\bar{\partial}_J \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} = 0$$

Donc l'hypothèse d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$ s'exprime localement par cette relation. Dans la suite de cette section on désignera par $\Omega(U) \subset M_{p_0,p_0}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$ l'ensemble constitué par des matrices $\omega^{0,0}$ qui vérifient la condition en question. Les éléments de cet ensemble seront appelés *calibrations*.

1.2.2 Formulation du problème différentiel dans le cas des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres

On veut trouver pour chaque $x \in U$ un voisinage ouvert V de x et un élément $\eta^{0,0} \in M_{p_0,p_0}(\mathcal{E}_X(V))$ tel que $g_0 \equiv g_0(\eta) := \mathbb{I}_{p_0} + \eta^{0,0} \in GL(p_0, \mathcal{E}(V))$, $\eta \equiv \eta^{0,0}$, qui soit solution de l'équation différentielle

$$\bar{\partial}(\psi \cdot g_0) = 0.$$

Si on atteint ce but on obtiendra le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (Ker \bar{\partial})|_V & \longrightarrow & \mathcal{G}|_V & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}|_V \otimes_{\mathcal{E}_V} \mathcal{E}_V^{0,1} \\ & & \psi_\eta \uparrow \wr & & \psi_\eta \uparrow \wr & & \wr \uparrow \psi_\eta \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_V^{\oplus p_0} & \longrightarrow & \mathcal{E}_V^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_V^{0,1})^{\oplus p_0} \end{array}$$

où $\psi_\eta = \psi \cdot g_0(\eta)$, lequel permet de conclure dans le cas des faisceaux localement libres. L'équation précédente est équivalente à l'équation $\psi(\omega^{0,0} \cdot g_0 + \bar{\partial}_J \eta^{0,0}) = 0$. L'injectivité de ψ implique alors que l'équation précédente est équivalente à l'équation

$$(S_\omega) : \bar{\partial}_J \eta^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \eta^{0,0} + \omega^{0,0} = 0.$$

On a la proposition suivante.

Proposition 1.2.1 *La condition $\bar{\partial}_J \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} = 0$ est la condition d'intégrabilité du problème différentiel quasi-linéaire (S_ω) , (le problème est quasi-linéaire car on cherche $\eta^{0,0}$ dans un espace non linéaire).*

Il est élémentaire de vérifier la nécessité de la condition $\bar{\partial}_J \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} = 0$. La matrice

$$\omega_\eta^{0,0} := g_0^{-1}(\bar{\partial}_J \eta^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \eta^{0,0} + \omega^{0,0})$$

vérifie les relations

$$\bar{\partial} \psi_\eta = \psi_\eta \cdot \omega_\eta^{0,0},$$

$$\bar{\partial}_J \omega_\eta^{0,0} + \omega_\eta^{0,0} \wedge \omega_\eta^{0,0} = 0.$$

On voudrait alors appliquer un procédé itératif pour faire de sorte que $\omega_\eta^{0,0} = 0$, ce qui équivaut à résoudre le système (S_ω) . Dans la suite on appellera élément de recalibration un élément $\eta^{0,0} \in M_{p_0, p_0}(\mathcal{E}_X(U))$ tel que $g_0 = \mathbb{I}_{p_0} + \eta^{0,0} \in GL(p_0, \mathcal{E}(U))$ et on désignera par $\mathcal{P}(U)$ l'ensemble constitué par de tels éléments. Venons-en maintenant à un préliminaire technique avant d'exposer l'idée de la preuve de l'existence des solutions pour le système différentiel (S_ω) .

1.2.3 Choix des normes et opérateur de Leray-Koppelman

Dans cette section on va supposer que $U = B_1$ est la boule unité. Soit $u = \sum'_{|I|=q} u_I d\bar{z}_I$ est une $(0, q)$ -forme à coefficients des (k, l) -matrices à coefficients dérivables jusqu'à l'ordre $h \geq 0$. On définit une norme de Hölder invariante par changement d'échelle

$$\|u\|_{r, h, \mu, q} := \sum_{\substack{|I|=q \\ |\alpha| \leq h}} S_{|\alpha|} r^{|\alpha|+q} \|\partial^\alpha u_I\|_{r, \mu}$$

où $\|\cdot\|_{r, \mu}$ est la norme de Hölder invariante usuelle d'une fonction, $\mu \in (0, 1)$ une constante fixée une fois pour toutes dans notre problème et $(S_k)_{k \geq 0} \subset (0, \infty)$ une suite de poids (cette suite sera choisie à décroissance assez rapide de façon à rendre en particulier les séries convergentes). On remarque que si le degré q est supérieur ou égale à un on a que la norme $\|u\|_{r, h, \mu, q}$ tend vers zéro lorsque le rayon r tend vers zéro. On considère maintenant l'opérateur de Leray-Koppelman classique de la boule de rayon r (le lecteur peut consulter avec profit les ouvrages classiques de Henkin-Leiterer [He-Le], de Range [Ra] et l'article de Harvey-Polkin [Ha-Po])

$$T_{r, q} : \mathcal{C}_{0, q+1}^{h, \mu}(\bar{B}_r, M_{k, l}(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{C}_{0, q}^{h, \mu}(B_r, M_{k, l}(\mathbb{C})).$$

Les propriétés de l'opérateur de Leray-Koppelman qui nous intéressent sont les suivantes :

1) Pour toute forme différentielle $u \in \mathcal{C}_{0, q+1}^{h, \mu}(\bar{B}_r, M_{k, l}(\mathbb{C}))$, $0 \leq q \leq n-1$ on a la formule d'homotopie :

$$u = \bar{\partial}_J T_{r, q} u + T_{r, q+1} \bar{\partial}_J u$$

valable sur la boule B_r .

2) Il existe une suite de poids $S = (S_k)_{k \geq 0}$ de la norme de Hölder introduite précédemment telle que pour toute forme différentielle $u \in \mathcal{C}_{0,q+1}^{h,\mu}(\bar{B}_r, M_{k,l}(\mathbb{C}))$ on a l'estimation intérieure :

$$\|T_{r,q} u\|_{r(1-\sigma), h+1, \mu, q} \leq C \cdot \sigma^{-s(h)} \cdot \|u\|_{r, h, \mu, q+1} \quad (1.2.1)$$

avec $C > 0$ une constante *indépendante* de la régularité h et $\sigma \in (0, 1)$, $s(h) \in \mathbb{N}$ une fonction affine strictement croissante. Pour simplifier les notations on identifiera dans la suite de cette section $\|\cdot\|_{r, h, \mu, q} \equiv \|\cdot\|_{r, h}$, $T_{r,q} \equiv T_r$ et $\|\partial^h f\|_{\bullet} \equiv \sum_{|\alpha|=h} \|\partial^\alpha f\|_{\bullet}$.

1.2.4 Esquisse du schéma de convergence rapide de type Nash-Moser dans le cas des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres

Estimation fondamentale du schéma de convergence rapide dans le cas des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres

On désigne par $\varepsilon \in (0, 1/2)$ une constante fixée telle que pour toutes les matrices $A \in M_{p_0, p_0}(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| < \varepsilon$ on a l'inversibilité de la matrice $\mathbb{I}_{p_0} + A$.

Proposition 1.2.2 *Supposons donnés $\omega^{0,0} \in \Omega(B_1)$, $r, \sigma \in (0, 1)$, $h \in \mathbb{N}$ et les poids $S_j > 0$, $j = 0, \dots, h+1$ de la norme de Hölder tels que l'estimation (1.2.1) soit satisfaite. Supposons que le rayon r soit suffisamment petit pour assurer l'estimation*

$$C \cdot \sigma^{-s(h)} \cdot \|\omega^{0,0}\|_{r, h} < \varepsilon.$$

Supposons de plus que le poids S_{h+1} soit suffisamment petit pour pouvoir assurer l'estimation

$$S_{h+1} \|\partial^{h+1} \omega_I^{0,0}\|_{r, \mu} \leq \|\omega_I^{0,0}\|_{r, \mu}$$

où $\omega_I^{0,0}$ sont les coefficients de la forme $\omega^{0,0}$ par rapport aux coordonnées choisies. Alors $\eta^{0,0} := -T_r \omega^{0,0}$ est un paramètre de recalibration tel que

$$\|\omega_\eta^{0,0}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq 6C \cdot \sigma^{-s(h)} \cdot \|\omega^{0,0}\|_{r, h}^2$$

Sans l'hypothèse sur le poids S_{h+1} l'estimation précédente est valable pour h à la place de $h+1$, pour toutes les matrices $\omega^{0,0}$ qui vérifient la relation $\bar{\partial}_j \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} = 0$. L'hypothèse sur les poids S_{h+1} , comme on verra mieux ensuite, joue un rôle fondamental pour la convergence vers une solution \mathcal{C}^∞ du problème (S_ω) .

Preuve. En utilisant la définition du paramètre $\eta^{0,0}$ et la formule d'homotopie pour l'opérateur $\bar{\partial}_j$ on a :

$$\begin{aligned} \omega_\eta^{0,0} &= g_0^{-1}(T_r \bar{\partial}_j \omega^{0,0} - \omega^{0,0} \wedge T_r \omega^{0,0}) = \\ &= -g_0^{-1}(T_r (\omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0}) + \omega^{0,0} \wedge T_r \omega^{0,0}) \end{aligned}$$

Le fait que $\varepsilon \in (0, 1/2)$ implique que $\|g_0^{-1}\|_{r(1-\sigma), h+1} < 2$ (voir les détails dans la preuve complète, prop 1.5.3 dans la sous-section 1.5.5). L'hypothèse sur le poids S_{h+1} implique l'inégalité suivante :

$$\|\omega^{0,0} \wedge T_r \omega^{0,0}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq 2\|\omega^{0,0}\|_{r, h} \cdot \|T_r \omega^{0,0}\|_{r(1-\sigma), h+1}.$$

On obtient alors l'inégalité :

$$\|\omega_\eta^{0,0}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq 2\left(C \cdot \sigma^{-s(h)} \cdot \|\omega^{0,0}\|_{r, h}^2 + 2C \cdot \sigma^{-s(h)} \cdot \|\omega^{0,0}\|_{r, h}^2\right)$$

qui permet de conclure. \square

Idée du procédé itératif dans le cas des faisceaux de \mathcal{E} -modules localement libres

Les calibrations $\omega_k^{0,0} \in \Omega(\bar{B}_{r_k})$ obtenues au k -ième pas du procédé itératif sont définies par la formule récursive $\omega_{k+1}^{0,0} = \omega_{k,\eta_{k+1}}^{0,0}$ où $r_{k+1} := r_k(1 - \sigma_k)$ et où $\sigma_k \in (0, 1)$ est un paramètre qui contrôle la décroissance des rayons des boules, (le rayon initial r_0 étant choisi suffisamment petit). On choisit les quantités $\sigma_k \in (0, 1)$ de telle sorte que la série $\sum \sigma_k$ soit convergente. Le rayon limite $r_\infty := \lim_{k \rightarrow +\infty} r_k$ est alors non nul. Le paramètre $\eta_{k+1}^{0,0} \in \mathcal{P}(\bar{B}_{r_{k+1}})$ qui contrôle la recalibration des éléments $\omega_k^{0,0}$, $k \geq 0$ au k -ième pas du procédé itératif est défini par la formule

$$\eta_{k+1}^{0,0} := -T_{r_k} \omega_k^{0,0}.$$

Les poids sont choisis de telle sorte que les estimations suivantes soient satisfaites pour tout entier $k \geq 0$.

$$S_{k+1} \|\partial^{k+1} \omega_{k,I}^{0,0}\|_{r_k, \mu} \leq \|\omega_{k,I}^{0,0}\|_{r_k, \mu}$$

$$S_{k+1} \|\partial^{k+1} g_0(k)^{\pm 1}\|_{r_k, \mu} \leq 2^{-k-1} \|g_0(k)^{\pm 1}\|_{r_k, \mu}$$

où

$$g_0(k) := \prod_{0 \leq j \leq k}^{\rightarrow} g_{0,j}$$

(on pose par définition $g_0 := \mathbb{I}_{p_0}$). Le symbole de produit avec une flèche vers la droite désigne le produit non commutatif de termes qui sont écrits en ordre croissant de l'indice vers la droite. La dernière inégalité sert à assurer un bon fonctionnement du procédé itératif, plus précisément elle permet d'appliquer la proposition précédente à toutes les étapes du procédé. On pose par définition

$$a_k := \|\omega_k^{0,0}\|_{r_k, k} \quad \text{et} \quad b_k := H \cdot \sigma_k^{-s(k)} \cdot a_k$$

Avec les notations introduites précédemment on a la proposition suivante.

Proposition 1.2.3 *Pour tout entier $k \geq 0$ on a les estimations suivantes ;*

$$a_{k+1} \leq H \cdot \sigma_k^{-s(k)} \cdot a_k^2 \leq 1,$$

$$\|\eta_{k+1}^{0,0}\|_{r_{k+1}, k+1} \leq b_k < \varepsilon < 1/2$$

et les quantités a_k, b_k tendent (avec la bonne vitesse) vers zéro lorsque k tend vers plus l'infini.

En conclusion la limite

$$\eta^{0,0} = -\mathbb{I}_{p_0} + \lim_{k \rightarrow \infty} g_0(k)$$

est une solution du système différentiel (S_ω) .

1.3 Introduction au cas de \mathcal{E} -résolution locale de profondeur homologique égale à un ($m = 1$)

1.3.1 Expression locale de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$ dans le cas $m = 1$

Nous commençons par prouver le lemme élémentaire suivant.

Lemme 1.3.1.1 Soit X une variété complexe et soit \mathcal{G} un faisceau de \mathcal{E}_X -modules. Si le faisceau \mathcal{G} admet des \mathcal{E} -présentations locales, soit par exemple

$$\mathcal{E}_U^{\oplus p_1} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}|_U \rightarrow 0$$

une \mathcal{E} -présentation au dessus d'un ouvert U , alors l'existence d'une connexion $\bar{\partial}$ de type $(0,1)$ sur le faisceau $\mathcal{G}|_U$ telle que $\bar{\partial}^2 = 0$, implique l'existence de matrices $\omega^{s,0} \in M_{p_s, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$, $s = 0, 1$ et $\omega^{0,1} \in M_{p_1, p_0}(\mathcal{E}_X^{0,2}(U))$ telles que $\bar{\partial}\psi = \psi \cdot \omega^{0,0}$ et les relations

$$\bar{\partial}_J \varphi + \omega^{0,0} \cdot \varphi = \varphi \cdot \omega^{1,0}, \quad (1.3.1)$$

$$\bar{\partial}_J \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} = \varphi \cdot \omega^{0,1} \quad (1.3.2)$$

soient satisfaites. Réciproquement l'existence de matrices $\omega^{s,0}$, $s = 0, 1$ et $\omega^{0,1}$ qui vérifient les relations (1.3.1) et (1.3.2), implique l'existence d'une connexion $\bar{\partial}$ de type $(0,1)$ sur le faisceau $\mathcal{G}|_U$ telle que $\bar{\partial}\psi = \psi \cdot \omega^{0,0}$ et $\bar{\partial}^2 = 0$.

Preuve. La \mathcal{E} -présentation de $\mathcal{G}|_U$ considérée dans l'hypothèse implique l'existence des \mathcal{E} -présentations

$$(\mathcal{E}_U^{0,q})^{\oplus p_1} \longrightarrow (\mathcal{E}_U^{0,q})^{\oplus p_0} \longrightarrow \mathcal{G}|_U \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,q} \longrightarrow 0$$

pour $q \geq 0$. On aura alors l'existence d'une matrice $\omega^{0,0} \in M_{p_0, p_0}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$ telle que $\bar{\partial}\psi = \psi \cdot \omega^{0,0}$. En appliquant la connexion $\bar{\partial}$ à l'identité $\psi \circ \varphi = 0$ on obtient la relation

$$\psi(\bar{\partial}_J \varphi + \omega^{0,0} \cdot \varphi) = 0.$$

L'exactitude des \mathcal{E} -présentations précédentes, (pour $q = 1$), implique alors l'existence d'une matrice $\omega^{1,0} \in M_{p_1, p_1}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$ telle que la relation (1.3.1) soit satisfaite. On obtient alors le diagramme commutatif suivant, ayant des flèches verticales exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{G}|_U & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}|_U \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}|_U \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,2} & & \\
\uparrow \psi & & \uparrow \psi \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \psi \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} & & \\
\mathcal{E}_U^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{0,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{0,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_0} & & \\
\uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi_1 \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \varphi_1 \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} & & \\
\mathcal{E}_U^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{1,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{1,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_1} & &
\end{array}$$

L'hypothèse d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$ implique

$$\psi(\bar{\partial}_J \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0}) = 0$$

d'où l'existence d'une matrice $\omega^{0,1} \in M_{p_1, p_0}(\mathcal{E}_X^{0,2}(U))$ telle que la relation (1.3.2) soit satisfaite. Pour prouver la réciproque du lemme il suffit de considérer la connexion quotient $\bar{\partial}$ obtenue par la connexion $\bar{\partial}_J + \omega^{0,0} \wedge \bullet$. \square

En appliquant l'opérateur $\bar{\partial}_J$ à la relation (1.3.1) on obtient l'égalité :

$$\bar{\partial}_J \omega^{0,0} \cdot \varphi - \omega^{0,0} \wedge \bar{\partial}_J \varphi = \bar{\partial}_J \varphi \wedge \omega^{1,0} + \varphi \cdot \bar{\partial}_J \omega^{1,0}.$$

En utilisant la relation (1.3.1) dans l'égalité précédente on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_J \omega^{0,0} \cdot \varphi + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} \cdot \varphi - \omega^{0,0} \wedge \varphi \cdot \omega^{1,0} = \\ = -\omega^{0,0} \cdot \varphi \wedge \omega^{1,0} + \varphi(\omega^{1,0} \wedge \omega^{1,0} + \bar{\partial}_J \omega^{1,0}). \end{aligned}$$

En utilisant la relation (1.3.2) on a :

$$\varphi(\bar{\partial}_J \omega^{1,0} + \omega^{1,0} \wedge \omega^{1,0} - \omega^{0,1} \cdot \varphi) = 0.$$

Dans notre cas φ est injective. On déduit alors la relation

$$\bar{\partial}_J \omega^{1,0} + \omega^{1,0} \wedge \omega^{1,0} = \omega^{0,1} \cdot \varphi.$$

En appliquant l'opérateur $\bar{\partial}_J$ à la relation (1.3.2) on a :

$$\bar{\partial}_J \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} - \omega^{0,0} \wedge \bar{\partial}_J \omega^{0,0} = \bar{\partial}_J \varphi \wedge \omega^{0,1} + \varphi \cdot \bar{\partial}_J \omega^{0,1}.$$

En utilisant les relations (1.3.1) et (1.3.2) dans l'égalité précédente on obtient

$$\begin{aligned} -\omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} + \varphi \cdot \omega^{0,1} \wedge \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} - \omega^{0,0} \wedge \varphi \cdot \omega^{0,1} = \\ = -\omega^{0,0} \cdot \varphi \wedge \omega^{0,1} + \varphi(\omega^{1,0} \wedge \omega^{0,1} + \bar{\partial}_J \omega^{0,1}). \end{aligned}$$

On a donc

$$\varphi(\bar{\partial}_J \omega^{0,1} - \omega^{0,1} \wedge \omega^{0,0} + \omega^{1,0} \wedge \omega^{0,1}) = 0.$$

L'injectivité de φ implique alors la relation

$$\bar{\partial}_J \omega^{0,1} - \omega^{0,1} \wedge \omega^{0,0} + \omega^{1,0} \wedge \omega^{0,1} = 0.$$

On a obtenu en conclusion les relations

$$\bar{\partial}_J \varphi + \omega^{0,0} \cdot \varphi = \varphi \cdot \omega^{1,0}$$

et

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \bar{\partial}_J \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} = \varphi \cdot \omega^{0,1} \\ \bar{\partial}_J \omega^{1,0} + \omega^{1,0} \wedge \omega^{1,0} = \omega^{0,1} \cdot \varphi \\ \bar{\partial}_J \omega^{0,1} - \omega^{0,1} \wedge \omega^{0,0} + \omega^{1,0} \wedge \omega^{0,1} = 0. \end{array} \right.$$

Il faut remarquer que dans la dernière expression on n'a pas de termes du type $\varphi \cdot \omega^{\bullet,\bullet}$ ou $\omega^{\bullet,\bullet} \cdot \varphi$. Les expressions (*) constituent les expressions locales de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$ dans le cas de longueur $m = 1$ de la \mathcal{E} -résolution locale. La relation (1.3.1) est simplement une identité de commutation.

1.3.2 Introduction à la formulation du problème différentiel dans le cas $m = 1$

La partie principale de la preuve consiste à prouver l'existence, pour tout $x \in U$, d'un voisinage ouvert $V \subset U$ de x et $g_0 = \mathbb{I}_{p_0} + \eta^{0,0} \in GL(p_0, \mathcal{E}(V))$, $g_1 = \mathbb{I}_{p_1} + \eta^{1,0} \in GL(p_1, \mathcal{E}(V))$ solution du système différentiel

$$(\Sigma) \begin{cases} \bar{\partial}(\psi \cdot g_0) = 0 \\ \bar{\partial}_J(g_0^{-1} \cdot \varphi \cdot g_1) = 0. \end{cases}$$

Si on atteint ce but on obtiendra le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & (Ker \bar{\partial})|_V & \longrightarrow & \mathcal{G}|_V & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}|_V \otimes_{\mathcal{E}_V} \mathcal{E}_V^{0,1} \\ & & \tilde{\psi}|_{\cdot} \uparrow & & \tilde{\psi} \uparrow & & \tilde{\psi} \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_V^{\oplus p_0} & \longrightarrow & \mathcal{E}_V^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_V^{0,1})^{\oplus p_0} \\ & & \tilde{\varphi}|_{\cdot} \uparrow & & \tilde{\varphi} \uparrow & & \tilde{\varphi} \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_V^{\oplus p_1} & \longrightarrow & \mathcal{E}_V^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_V^{0,1})^{\oplus p_1} \end{array}$$

avec $\tilde{\psi} := \psi_\eta := \psi \cdot g_0$ et $\tilde{\varphi} := \varphi_\eta := g_0^{-1} \cdot \varphi \cdot g_1$. On peut conclure alors en utilisant des arguments élémentaires d'algèbre homologique (voir la preuve complète, section 1.5.6 pour plus de détails). En reprenant un calcul fait dans le cas $m = 0$, mais valable en tous les cas, on a :

$$\bar{\partial}(\psi \cdot g_0) = \psi(\bar{\partial}_J \eta^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \eta^{0,0} + \omega^{0,0}).$$

Si $\bar{\partial}(\psi \cdot g_0) = 0$ alors l'hypothèse d'exactitude implique l'existence d'une matrice $\eta^{0,1} \in M_{p_1, p_0}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$ solution de l'équation

$$\bar{\partial}_J \eta^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \eta^{0,0} + \varphi \cdot \eta^{0,1} + \omega^{0,0} = 0.$$

On a donc que l'équation précédente est équivalente avec l'équation $\bar{\partial}(\psi \cdot g_0) = 0$. Si on pose par définition

$$\omega_\eta^{0,0} := g_0^{-1}(\bar{\partial}_J \eta^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \eta^{0,0} + \varphi \cdot \eta^{0,1} + \omega^{0,0})$$

on aura la validité de la relation $\bar{\partial} \psi_\eta = \psi_\eta \cdot \omega_\eta^{0,0}$. De façon analogue, si on pose par définition

$$\omega_\eta^{1,0} := g_1^{-1}(\bar{\partial}_J \eta^{1,0} + \omega^{1,0} \wedge \eta^{1,0} + \eta^{0,1} \cdot \varphi_\eta + \omega^{1,0}),$$

$$\omega_\eta^{0,1} := g_1^{-1}(\bar{\partial}_J \eta^{0,1} + \omega^{0,1} \wedge \eta^{0,0} + \omega^{1,0} \wedge \eta^{0,1} + \eta^{0,1} \wedge \omega_\eta^{0,0} + \omega^{0,1})$$

on aura la validité des relations (voir article pour les détails des calculs en général prop 1.5.1 de la sous-section 1.5.2)

$$\bar{\partial}_J \varphi_\eta + \omega_\eta^{0,0} \cdot \varphi_\eta = \varphi_\eta \cdot \omega_\eta^{1,0}$$

et

$$\begin{cases} \bar{\partial}_j \omega_\eta^{0,0} + \omega_\eta^{0,0} \wedge \omega_\eta^{0,0} = \varphi_\eta \cdot \omega_\eta^{0,1} \\ \bar{\partial}_j \omega_\eta^{1,0} + \omega_\eta^{1,0} \wedge \omega_\eta^{1,0} = \omega_\eta^{0,1} \cdot \varphi_\eta \\ \bar{\partial}_j \omega_\eta^{0,1} - \omega_\eta^{0,1} \wedge \omega_\eta^{0,0} + \omega_\eta^{1,0} \wedge \omega_\eta^{0,1} = 0 \end{cases}$$

lesquelles sont analogues à la relation (1.3.1) et aux relations (*) considérées précédemment. En utilisant l'hypothèse d'exactitude on obtient le lemme suivant.

Lemme 1.3.2.1 *Pour tout choix de matrices $\omega^{s,0}$, $\omega^{0,1}$, $s = 0, 1$ qui vérifient les relations (1.3.1) et (*) on a que l'existence d'une solution $g := (g_0, g_1)$ du système différentiel (Σ) est équivalente à l'existence d'une solution $\eta := (\eta^{0,0}, \eta^{1,0}, \eta^{0,1})$, $g = g(\eta)$, du système différentiel quasi-linéaire*

$$(S_\omega) \begin{cases} \bar{\partial}_j \eta^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \eta^{0,0} + \varphi \cdot \eta^{0,1} + \omega^{0,0} = 0 \\ \bar{\partial}_j \eta^{1,0} + \omega^{1,0} \wedge \eta^{1,0} + \eta^{0,1} \cdot \varphi_\eta + \omega^{1,0} = 0 \\ \bar{\partial}_j \eta^{0,1} + \omega^{0,1} \wedge \eta^{0,0} + \omega^{1,0} \wedge \eta^{0,1} + \omega^{0,1} = 0 \end{cases}$$

qui n'est rien d'autre que le système différentiel

$$\begin{cases} \omega_\eta^{s,0} = 0 \\ \omega_\eta^{0,1} = 0 \\ s = 0, 1. \end{cases}$$

On a besoin de l'hypothèse d'exactitude de la \mathcal{E} -résolution locale seulement pour prouver que les systèmes (Σ) et (S_ω) sont équivalents. A partir du moment où on s'intéresse seulement au système (S_ω) l'hypothèse d'exactitude n'a plus aucun intérêt. En termes précis on a la proposition suivante.

Proposition 1.3.1 *Supposons données des matrices $\omega^{s,0}$, $\omega^{0,1}$, $s = 0, 1$ et φ telles que*

$$\bar{\partial}_j \varphi + \omega^{0,0} \cdot \varphi = \varphi \cdot \omega^{1,0}.$$

Alors les relations

$$(*) \begin{cases} \bar{\partial}_j \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} = \varphi \cdot \omega^{0,1} \\ \bar{\partial}_j \omega^{1,0} + \omega^{1,0} \wedge \omega^{1,0} = \omega^{0,1} \cdot \varphi \\ \bar{\partial}_j \omega^{0,1} - \omega^{0,1} \wedge \omega^{0,0} + \omega^{1,0} \wedge \omega^{0,1} = 0 \end{cases}$$

constituent les conditions d'intégrabilité du système différentiel (S_ω) .

1.4 Idée de la preuve du théorème 1.1.8 dans le cas général d'une \mathcal{E} -résolution locale de longueur arbitraire

1.4.1 Première étape : présentation de l'expression locale de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$

On pose par définition $I_m := \{(s, k) \mid s = 0, \dots, m, k = -1, \dots, m - s, (s, k) \neq (0, -1)\}$. On utilisera dans la suite la convention qui consiste à négliger les termes d'une somme ou d'un

produit si l'ensemble des indices sur lesquels on effectue ces opérations est vide. On a le lemme suivant.

Lemme 1.4.1.1 *Soit $0 \rightarrow \mathcal{E}_U^{\oplus p_m} \xrightarrow{\varphi_m} \mathcal{E}_U^{\oplus p_{m-1}} \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{E}_U^{\oplus p_1} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_{|U} \rightarrow 0$ une \mathcal{E} -résolution locale de longueur finie. Alors l'existence d'une connexion $\bar{\partial}$ de type $(0,1)$ sur le faisceau \mathcal{G} telle que $\bar{\partial}^2 = 0$, implique l'existence des matrices $\omega^{s,k} \in M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_U^{0,k+1}(U))$ pour $(s,k) \in I_m$ telles que si on utilise l'identification $\varphi_s \equiv \omega^{s,-1}$, on aura la validité des relations $\bar{\partial}\psi = \psi \cdot \omega^{0,0}$ et*

$$\bar{\partial}_j \omega^{s,k} + \sum_{j=-1}^{k+1} (-1)^{k-j} \omega^{s+j, k-j} \wedge \omega^{s,j} = 0. \quad (1.4.1)$$

On obtient alors le diagramme commutatif suivant, dont les flèches verticales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{G}_{|U} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}_{|U} \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}_{|U} \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,2} & & \\
 \uparrow \psi & & \uparrow \psi \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \psi \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} & & \\
 \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{0,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{0,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_0} & & \\
 \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi_1 \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \varphi_1 \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} & & \\
 \mathcal{E}_U^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{1,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{1,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_1} & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & &
 \end{array}$$

La figure 1.1 montre les matrices $\omega^{s,k}$ qui sont représentées par des flèches dans le diagramme suivant lequel représente le complexe déterminé par la \mathcal{E} -résolution locale (φ, ψ) dans le cas de longueur $m = 4$.

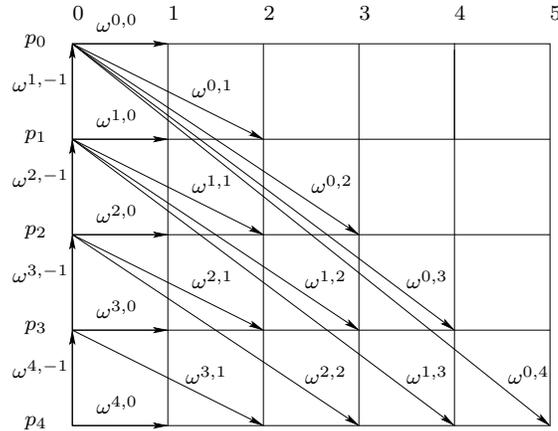


FIG. 1.1 –

Dans la relation (1.4.1) on utilise les conventions formelles $\omega^{0,-1} := 0$, $\omega^{-1,j} := 0$ et $\omega^{s,k} := 0$ si

$s \geq m + 1$ ou $k \geq m - s + 1$. Le diagramme suivant montre les matrices qui interviennent dans la relation (1.4.1) pour $(s, k) = (1, 2)$, dans le cas de longueur $m = 4$.

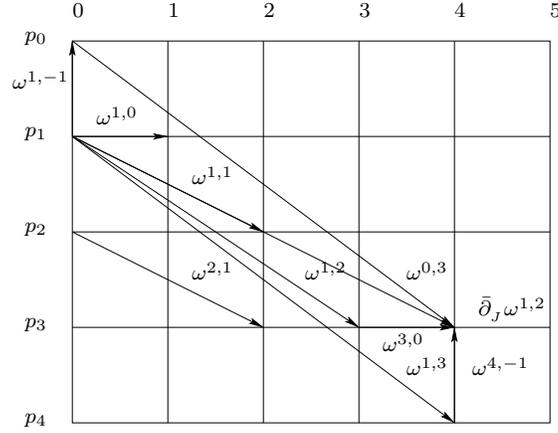


FIG. 1.2 –

On considère le cas $m = 4$ qui est le cas de longueur minimale pour laquelle on voit le problème en toute sa généralité. Les relations (1.4.1) pour les indices $k \geq 0$ constituent les expressions locales de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$ de la connexion $\bar{\partial}$ relativement à la \mathcal{E} -résolution locale choisie. Les relations (1.4.1) pour les indices $(s, k) = (\bullet, -1)$ représentent simplement des identités de commutation. La liberté homologique qui caractérise le choix des matrices $\omega^{s,k}$ est exprimée par une action de semi-groupe qui aura une importance considérable dans la preuve du théorème 1.1.8 et qu'on expose dans la sous-section suivante.

1.4.2 Deuxième étape : la notion de recalibration

On commence avec les définitions suivantes. On pose

$$\Gamma(U) := \bigoplus_{s=0, \dots, m} GL(p_s, \mathcal{E}_X(U)).$$

On considère $\Gamma(U)$ avec la loi de groupe naturelle induite par les groupes $GL(p_\bullet, \mathcal{E}_X(U))$.

Définition 1.4.1 La classe $[\varphi, \psi]$ de \mathcal{E} -isomorphisme de la \mathcal{E} -résolution locale (φ, ψ) est l'ensemble des \mathcal{E} -résolutions locales $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ de longueur m au dessus de l'ouvert U pour lesquelles il existe $g \in \Gamma(U)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_U^{\oplus p_m} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_m} & \dots & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} & \mathcal{E}_U^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} & \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathcal{G}_{|U} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow g_m \wr \wr & & & & \downarrow g_1 \wr \wr & & \downarrow g_0 \wr \wr & & \downarrow \mathbb{I} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_U^{\oplus p_m} & \xrightarrow{\varphi_m} & \dots & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{E}_U^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}_{|U} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On a alors que $[\varphi, \psi] = \{(\varphi_g, \psi_g) \mid g \in \Gamma(U)\}$ où $\psi_g := \psi \cdot g_0$ et $\varphi_{s,g} := g_{s-1}^{-1} \cdot \varphi_s \cdot g_s$. Ensuite on désigne par

$$\Omega(U, \varphi_g, \psi_g, \bar{\partial}) \subset \bigoplus_{(s,k) \in I_m} M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,k+1}(U))$$

l'ensemble, non vide par l'hypothèse d'exactitude de la \mathcal{E} -résolution locale (φ, ψ) , constitué par les éléments $\omega = (\omega^{s,k})_{s,k}$, $\omega^{s,k} \in M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,k+1}(U))$ tels que $\omega^{\bullet,-1} = \varphi_{\bullet,g}$, $\bar{\partial}\psi_g = \psi_g \cdot \omega^{0,0}$ et la relation (1.4.1) soit satisfaite. Ensuite on définit la "fibration"

$$\Omega(U, [\varphi, \psi], \bar{\partial}) := \coprod_{g \in \Gamma(U)} \Omega(U, \varphi_g, \psi_g, \bar{\partial})$$

au dessus du groupe $\Gamma(U)$, dont les éléments seront appelés *calibrations* et l'ensemble des paramètres au dessous de l'ouvert U

$$\mathcal{P}(U) \subset \bigoplus_{\substack{s=0, \dots, m \\ k=0, \dots, m-s}} M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,k}(U))$$

constitué par les éléments $\eta = (\eta^{s,k})_{s,k}$, $\eta^{s,k} \in M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,k}(U))$, tels que $\mathbb{I}_{p_s} + \eta^{s,0} \in GL(p_s, \mathcal{E}_X(U))$, $s = 0, \dots, m$. On munit $\mathcal{P}(U)$ de la loi de semi-groupe donnée par le produit extérieur des paramètres qu'on définit de la façon suivante ; si $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{P}(U)$ on désigne par $\eta_1 \wedge \eta_2 \in \mathcal{P}(U)$ le paramètre dont les composantes sont définies par la formule

$$(\eta_1 \wedge \eta_2)^{s,k} := \eta_1^{s,k} + \eta_2^{s,k} + \sum_{j=0}^k \eta_1^{s+j, k-j} \wedge \eta_2^{s,j}.$$

L'élément neutre de cette loi est le zéro. Considérons maintenant l'application

$$R : \mathcal{P}(U) \times \Omega(U, [\varphi, \psi], \bar{\partial}) \longrightarrow \Omega(U, [\varphi, \psi], \bar{\partial})$$

$$(\eta, \omega) \longmapsto \omega_\eta$$

où les composantes de ω_η sont définies par récurrence sur k , pour tous les indices $(s, k) \in I_m$ par la formule (ici on utilise les définitions formelles $\eta^{s, m-s+1} := 0$, $\eta^{-1, j} := 0$ et $\eta^{s, -1} := 0$)

$$\omega_\eta^{s,k} = \left(\mathbb{I}_{p_{s+k}} + \eta^{s+k,0} \right)^{-1} \left(\bar{\partial}_j \eta^{s,k} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j, k-j} \wedge \eta^{s,j} - \sum_{j=-1}^{k-1} (-1)^{k-j} \eta^{s+j, k-j} \wedge \omega_\eta^{s,j} + \omega^{s,k} \right). \quad (1.4.2)$$

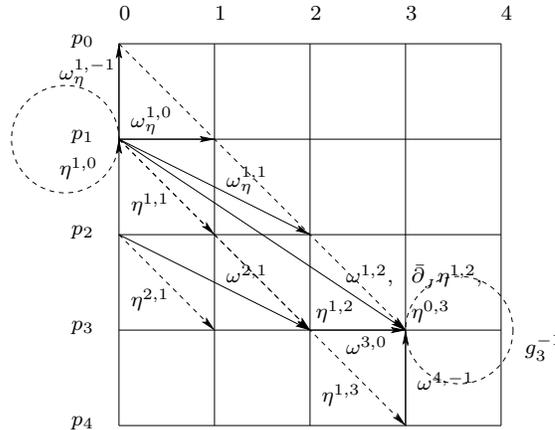


FIG. 1.3 –

Le diagramme 1.3 montre les matrices qui interviennent dans la définition de la matrice $\omega_\eta^{1,2}$

dans le cas où la longueur de la résolution est égale à 4. Le lecteur peut alors essayer d'avoir une perception visuelle de la formule de recalibration (1.4.2). On appelle R application de recalibration et on dit que ω_η est la recalibration de ω avec paramètre de recalibration η . Dans la suite on utilisera aussi les notations $g_s \equiv g_s(\eta) := \mathbb{I}_{p_s} + \eta^{s,0}$, $\psi_\eta \equiv \psi_{g(\eta)}$. Avec la première notation on a évidemment $\omega_\eta^{\bullet,-1} = \omega_{g(\eta)}^{\bullet,-1}$. On remarque aussi que si $\omega \in \Omega(U, \varphi, \psi, \bar{\partial})$ alors pour tout $\eta \in \mathcal{P}(U)$, la recalibration $R(\eta, \omega) \equiv \omega_\eta$ de ω détermine le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & \mathcal{G}_{|U} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}_{|U} \otimes_{\mathcal{E}_V} \mathcal{E}_U^{0,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}_{|U} \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,2} \\
& & \uparrow \psi_\eta & & \uparrow \psi_\eta \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \psi_\eta \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} \\
& & \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega_\eta^{0,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega_\eta^{0,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_0} \\
& & \uparrow \omega_\eta^{1,-1} & & \uparrow \omega_\eta^{1,-1} \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} & & \uparrow \omega_\eta^{1,-1} \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} \\
& & \mathcal{E}_U^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega_\eta^{1,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega_\eta^{1,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_1} \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

On a la proposition fondamentale suivante.

Proposition 1.4.2 *L'application de recalibration R est bien définie et constitue une action de semi-groupe transitive sur l'ensemble $\Omega(U, [\varphi, \psi], \bar{\partial})$.*

1.4.3 Troisième étape : introduction à la formulation du problème différentiel

La partie principale de la preuve consiste à prouver l'existence, pour tout $x \in U$, d'un voisinage ouvert $V \subset U$ de x et $g \in \Gamma(V)$ solution du système différentiel

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \bar{\partial}(\psi \cdot g_0) = 0 \\ \bar{\partial}_J(g_{s-1}^{-1} \cdot \varphi_s \cdot g_s) = 0 \\ s = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Bien évidemment résoudre ce système différentiel équivaut à trouver une autre \mathcal{E} -résolution de $\mathcal{G}_{|V}$ dans la classe $[\varphi, \psi]$, à partir de la \mathcal{E} -résolution donnée (φ, ψ) , de telle sorte qu'elle admette des matrices de connexion $\omega^{s,0}$ nulles. Des arguments élémentaires d'algèbre homologique permettent alors de conclure que le faisceau $Ker \bar{\partial}$ est analytique cohérent, (voir la section 1.5.6 pour les détails).

On a le lemme suivant.

Lemme 1.4.3.1 *Pour tout choix de calibration $\omega \in \Omega(U, \varphi, \psi, \bar{\partial})$ on a que l'existence d'une solution $g \in \Gamma(U)$ du système différentiel (Σ) est équivalente à l'existence d'une solution $\eta \in \mathcal{P}(U)$, $g = g(\eta)$, du système différentiel quasi-linéaire*

$$(S_\omega) \begin{cases} \bar{\partial}_j \eta^{s,k} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j,k-j} \wedge \eta^{s,j} + (-1)^k \eta^{s-1,k+1} \wedge \omega_\eta^{s,-1} + \omega^{s,k} = 0 \\ k = 0, \dots, m \\ s = 0, \dots, m - k \end{cases}$$

qui n'est rien d'autre que le système différentiel

$$\begin{cases} \omega_\eta^{s,t} = 0 \\ s = 0, \dots, m \\ t = 0, \dots, m - s. \end{cases}$$

On a besoin de l'hypothèse d'exactitude de la \mathcal{E} -résolution locale seulement pour prouver que les systèmes Σ et (S_ω) sont équivalents. A partir du moment où on s'intéresse seulement au système (S_ω) l'hypothèse d'exactitude n'a plus aucun intérêt. On a seulement besoin d'avoir le complexe vertical $(\omega^{\bullet,-1})$. La notion de recalibration existe encore et elle est une action de semi-groupe. La proposition suivante permet de traduire notre problème en termes purement différentiels.

Proposition 1.4.3 *Supposons données des matrices $\omega^{s,k} \in M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,k+1}(U))$, $(s, k) \in I_m$ telles que*

$$\omega^{s-1,-1} \cdot \omega^{s,-1} = 0, \quad s = 2, \dots, m$$

et

$$\bar{\partial}_j \omega^{s,-1} + \omega^{s-1,0} \cdot \omega^{s,-1} = \omega^{s,-1} \cdot \omega^{s,0}, \quad s = 1, \dots, m.$$

Alors, pour $k \geq 0$, les relations $((1.4.1)_{s,k})$

$$\bar{\partial}_j \omega^{s,k} + \sum_{j=-1}^{k+1} (-1)^{k-j} \omega^{s+j,k-j} \wedge \omega^{s,j} = 0$$

constituent les conditions d'intégrabilité du système différentiel (S_ω) .

A partir de maintenant on désignera par

$$\Omega(U, m) \subset \bigoplus_{(s,k) \in I_m} M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,k+1}(U))$$

l'ensemble constitué par les éléments ω dont les composantes vérifient la condition $\omega^{s-1,-1} \cdot \omega^{s,-1} = 0$, $s = 2, \dots, m$ et la relation (1.4.1).

1.4.4 Quatrième étape : introduction au schéma de convergence rapide de type Nash-Moser

Idée de la preuve de l'estimation fondamentale du schéma de convergence rapide

Soit $\omega \in \Omega(B_1, m)$. Pour $r \in (0, 1)$ on définit la quantité

$$a_h(\omega, r) := \max\{\|\omega^{s,k}\|_{r,h} \mid 0 \leq s \leq m, 0 \leq k \leq m - s\}.$$

On remarque que, par définition de la norme de Hölder, la quantité $a_h(\omega, r)$ tend vers zéro lorsque le rayon r tend vers zéro. Pour tout $\sigma \in (0, 1)$ on définit les rayons

$$r_l := r(1 - l \cdot \sigma_m)$$

pour $l = 0, \dots, m + 1$ où on pose $\sigma_m := \sigma/(m + 1)$. A partir de maintenant on désigne par $\varepsilon \in (0, 1/2)$ une constante fixée telle que pour toutes les matrices $A \in M_{p_s, p_s}(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| < \varepsilon$ on a l'inversibilité de la matrice $\mathbb{I}_{p_s} + A$.

On désignera par $S(\omega^{\bullet, -1})$ une suite de poids qui vérifie l'inégalité $\|\omega^{\bullet, -1}\|_{1, S(\omega)} < +\infty$. Venons-en maintenant à la partie essentielle de la preuve du théorème. Avec les notations introduites précédemment on a la proposition suivante.

Proposition 1.4.4 *Supposons donnés $\omega \in \Omega(B_1, m)$, $r, \sigma \in (0, 1)$, $h \in \mathbb{N}$ et les poids $0 < S_j \leq S_j(\omega)$, $j = 0, \dots, h + 1$ de la norme de Hölder $\|\cdot\|_{r, h+1}$. Supposons que le rayon r soit suffisamment petit pour assurer l'estimation*

$$L \cdot \sigma_m^{-s(m, h)} \cdot a_h(\omega, r) < \varepsilon$$

où $L = L(\omega^{\bullet, -1}) > 0$ constante positive et $s(m, h) \in \mathbb{N}$, ($m \geq 0, h \geq 0$) une fonction affine strictement croissante par rapport à la variable h et la quantité $a_h(\omega, r)$ est calculée par rapport au poids S_j , $j = 0, \dots, h$. Supposons de plus que le poids S_{h+1} soit suffisamment petit pour pouvoir assurer l'estimation :

$$S_{h+1} \|\partial^{h+1} \omega_I^{s, k}\|_{r, \mu} \leq \|\omega_I^{s, k}\|_{r, \mu}$$

pour tout $k = 0, \dots, m$, $s = 0, \dots, m - k$ et $|I| = k + 1$. Il existe alors le paramètre de recalibration $\eta \in \mathcal{P}(\bar{B}_{r(1-\sigma)})$ dont les composantes sont définies par la formule de récurrence décroissante sur $k = m, \dots, 0$

$$\eta^{s, k} := -T_{r_{m-k}} \left(\omega^{s, k} + \omega^{s+k+1, -1} \wedge \eta^{s, k+1} + (-1)^k \eta^{s-1, k+1} \wedge \omega^{s, -1} \right)$$

tel que les estimations suivantes

$$\|\eta^{\bullet, k}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq L \cdot \sigma_m^{-s(m, h)} \cdot a_h(\omega, r), \quad (1.4.3)$$

$$\|\omega_\eta^{\bullet, k}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq L \cdot \sigma_m^{-s(m, h)} \cdot a_h(\omega, r)^2 \quad (1.4.4)$$

soient satisfaites pour tout $k = 0, \dots, m$.

Sans l'hypothèse sur le poids S_{h+1} l'estimation (1.4.4) est valable pour h à la place de $h + 1$, pour toutes les matrices $\omega^{\bullet, k}$ $k \geq 0$ qui vérifient la relation (1.4.1), une fois qu'on a fixé les matrices du complexe vertical $\omega^{\bullet, -1}$ et les poids $0 < S_j \leq S_j(\omega)$, $j = 0, \dots, h + 1$. L'hypothèse sur les poids S_{h+1} , comme on verra mieux ensuite, joue un rôle fondamental pour la convergence vers une solution \mathcal{C}^∞ du problème (S_ω) . On "pose" (voir la preuve de la proposition 1.5.3 pour l'interprétation correcte !)

$$\omega_{\eta_{[k+1]}}^{s, k} = \omega^{s, k} + \omega^{s+k+1, -1} \wedge \eta^{s, k+1} + (-1)^k \eta^{s-1, k+1} \wedge \omega^{s, -1}.$$

On obtient l'estimation (1.4.4) à l'aide d'une récurrence croissante sur les indices $k \geq 0$. Le problème ici consiste dans le fait qu'on ne peut pas avoir un contrôle quadratique sur le terme $\omega_\eta^{s, -1}$. Précisément les termes qui posent un problème pour obtenir l'estimation quadratique

relativement aux matrices $\omega_\eta^{s,k}$ sont les termes qui apparaissent dans la parenthèse de la définition des composantes $\eta^{s,k}$. En effet on peut écrire $\omega_\eta^{s,-1}$ sous la forme

$$\omega_\eta^{s,-1} = (\mathbb{I} + \theta^{s-1,0}) \cdot \omega^{s,-1} \cdot (\mathbb{I} + \eta^{s,0})$$

avec un contrôle

$$\|\theta^{s,0}\|_{r(1-\sigma),h+1} \leq 2\|\eta^{s,0}\|_{r(1-\sigma),h+1}$$

sur la norme de la matrice $\theta^{s,0}$. Ensuite en décomposant l'expression de la matrice $\omega_\eta^{s,-1}$ à l'aide de l'expression précédente on arrive à séparer le terme gênant $\eta^{\bullet,\bullet} \wedge \omega^{\bullet,-1}$ pour les indices adéquats dans la deuxième somme. On a donc :

$$\omega_\eta^{s,k} = g_{s+k}^{-1}(\bar{\partial}_J \eta^{s,k} + (\text{termes quadratiques}) + \omega_{\eta_{[k+1]}}^{s,k}).$$

On obtient alors en utilisant la formule d'homotopie pour l'opérateur $\bar{\partial}_J$ l'expression :

$$\omega_\eta^{s,k} = g_{s+k}^{-1}(T_{r_{m-k}} \bar{\partial}_J \omega_{\eta_{[k+1]}}^{s,k} + (\text{termes quadratiques})).$$

Le lecteur comprend donc l'exigence d'avoir une estimation quadratique de la norme $h+1$ du terme $T_{r_{m-k}} \bar{\partial}_J \omega_{\eta_{[k+1]}}^{s,k}$. On observe que dans le cas $(s,k) = (0,m)$, ($k=m \Rightarrow s=0$) on a que le terme $\omega_{\eta_{[k+1]}}^{s,k}$ se réduit à $\omega^{0,m}$. On remarque que la relation $((1.4.1)_{0,m})$ est la seule, parmi les autres relations $((1.4.1)_{\bullet,\bullet})$, qui ne présente pas de facteurs de type $\omega^{\bullet,-1}$ dans les termes quadratiques. Le diagramme suivant montre les matrices qui interviennent dans la relation $((1.4.1)_{0,m})$.

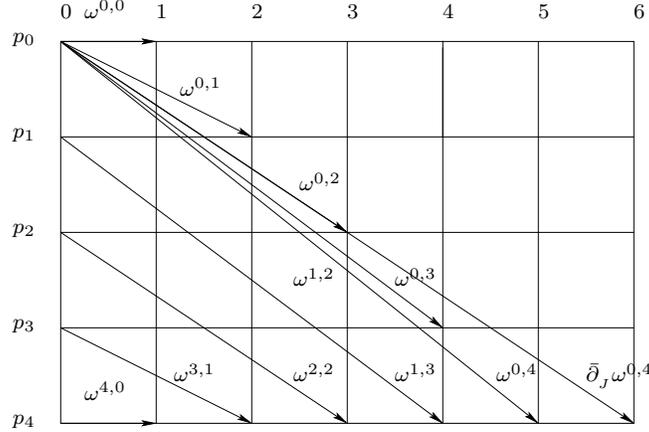


FIG. 1.4 –

On déduit alors à l'aide de l'inégalité (1.2.1), l'estimation quadratique de la norme $h+1$ du terme $T_r \bar{\partial}_J \omega^{0,m}$. Une récurrence décroissante sur les indices $k = m, \dots, 0$ combinée avec le fait que les matrices ω vérifient la condition d'intégrabilité (1.4.1) montre l'estimation quadratique

$$\|T_{r_{m-k}} \bar{\partial}_J \omega_{\eta_{[k+1]}}^{s,k}\|_{r(1-\sigma),h+1} \leq Q \cdot \sigma_m^{-s(m,h)} \cdot a_h^2$$

pour tout $k = 0, \dots, m$, (où $Q > 0$ est une constante positive).

On explique maintenant où intervient l'hypothèse sur le poids S_{h+1} dans la preuve de l'estimation (1.4.4). Pour obtenir celle-ci on doit estimer les normes du type $\|\omega^{\bullet,\bullet} \wedge \eta^{\bullet,\bullet}\|_{r(1-\sigma),h+1}$. L'hypothèse faite sur le poids S_{h+1} nous permet d'obtenir l'estimation

$$\|\omega^{\bullet,\bullet} \wedge \eta^{\bullet,\bullet}\|_{r(1-\sigma),h+1} \leq 2\|\omega^{\bullet,\bullet}\|_{r,h} \cdot \|\eta^{\bullet,\bullet}\|_{r(1-\sigma),h+1}.$$

Voici certaines des idées principales de la preuve de la proposition.

Esquisse du procédé itératif

Les calibrations $\omega_k \in \Omega(\bar{B}_{r_k}, m)$ obtenues au k -ième pas du procédé itératif sont définies par la formule récursive $\omega_{k+1} := \omega_{k, \eta_{k+1}}$ où $r_{k+1} := r_k(1 - \sigma_k)$ et où $\sigma_k \in (0, 1)$ est un paramètre qui contrôle la décroissance des rayons des boules, (le rayon initial r_0 étant choisi suffisamment petit). On choisit les quantités $\sigma_k \in (0, 1)$ de telle sorte que la série $\sum \sigma_k$ soit convergente. Le rayon limite $r_\infty := \lim_{k \rightarrow +\infty} r_k$ est alors non nul. Le paramètre $\eta_{k+1} \in \mathcal{P}(\bar{B}_{r_{k+1}})$ qui contrôle la recalibration des éléments ω_k , $k \geq 0$ au k -ième pas du procédé itératif est défini de façon analogue à celle de la proposition 1.4.4 en fonction de la calibration ω_k . Les poids sont choisis de telle sorte que les estimations suivantes soient satisfaites pour tout entier $k \geq 0$ et $t = 0, \dots, m$.

$$S_{k+1} \|\partial^{k+1} \omega_{k,I}^{\bullet,t}\|_{r_k, \mu} \leq \|\omega_{k,I}^{\bullet,t}\|_{r_k, \mu}, \quad (1.4.5)$$

$$S_{k+1} \|\partial^{k+1} g_\bullet(k)^{\pm 1}\|_{r_k, \mu} \leq 2^{-k-1} \|g_\bullet(k)^{\pm 1}\|_{r_k, \mu} \quad (1.4.6)$$

où

$$g_s(k) := \prod_{0 \leq j \leq k}^{\rightarrow} g_{s,j}$$

(ici on rappelle qu'on pose par définition $g_0 := \mathbb{I}_{p_0}$ et que le symbole de produit avec une flèche vers la droite désigne le produit non commutatif de termes qui sont écrits en ordre croissant de l'indice vers la droite). Cette dernière inégalité sert à assurer un bon fonctionnement du procédé itératif, plus précisément elle permet d'appliquer la proposition précédente à toutes les étapes du procédé. On pose par définition

$$a_k := \max\{\|\omega_k^{s,t}\|_{r_k, k} \mid 0 \leq s \leq m, 0 \leq t \leq m - s\}$$

et

$$b_k := H \cdot \sigma_{m,k}^{-s(m,k)} \cdot a_k \quad \sigma_{m,k} := \sigma_k / (m + 1)$$

Avec les notations introduites précédemment on a la proposition suivante.

Proposition 1.4.5 *Pour tout entier $k \geq 0$ on a les estimations suivantes ;*

$$a_{k+1} \leq H \cdot \sigma_{m,k}^{-s(m,k)} \cdot a_k^2 \leq 1, \quad (1.4.7)$$

$$\|\eta_{k+1}^{\bullet,t}\|_{r_{k+1}, k+1} \leq b_k < \varepsilon < 1/2, \quad (1.4.8)$$

$$\|\omega_{k+1}^{s,-1}\|_{r_{k+1}, k+1} \leq 4 \|\omega^{\bullet,-1}\|_{1, S(\omega^{\bullet,-1})} \quad (1.4.9)$$

et les quantités a_k , b_k tendent (avec la bonne vitesse) vers zéro lorsque k tend vers plus l'infini.

L'estimation (1.4.9) montre que la norme du complexe vertical n'explose pas. La condition (1.4.6) sert aussi à assurer cette inégalité. Si on pose par définition

$$\eta(k) := \bigwedge_{1 \leq j \leq k}^{\rightarrow} \eta_j$$

(ici aussi le symbole de produit extérieur avec une flèche vers la droite désigne le produit non commutatif de termes qui sont écrits en ordre croissant de l'indice vers la droite), le paramètre de recalibration sur la boule B_{r_∞} on aura la formule $\omega_k = \omega_{\eta(k)}$, grâce au fait que la recalibration R est une action. On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.4.6 *La limite*

$$\eta := \lim_{k \rightarrow \infty} \eta(k)$$

existe en topologie $\mathcal{C}^{h,\mu}$ pour tout $h \geq 0$ et constitue un paramètre de recalibration $\eta \in \mathcal{P}(B_{r_\infty})$, solution du problème différentiel (S_ω) .

Le fait que η constitue une solution (de classe \mathcal{C}^∞) pour le problème différentiel (S_ω) est clair. En effet

$$\omega_\eta^{s,t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k^{s,t}$$

et

$$\|\omega_\eta^{s,t}\|_{r_\infty,0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega_k^{s,t}\|_{r_\infty,0} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

ce qui montre que $\eta \in \mathcal{P}(B_{r_\infty})$ est une solution du système différentiel (S_ω) .

1.5 La preuve complète du théorème de caractérisation différentielle des faisceaux analytiques cohérents dans le cas général de longueur arbitraire de la \mathcal{E} -résolution locale

1.5.1 Première étape : Preuve de l'expression locale de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$

On commence par rappeler la définition de l'ensemble d'indices

$$I_m := \{(s, k) \mid s = 0, \dots, m, k = -1, \dots, m - s, (s, k) \neq (0, -1)\}.$$

Avec cette notation on a le lemme élémentaire suivant.

Lemme 1.5.1.1 *Soit X une variété complexe et soit \mathcal{G} un faisceau de \mathcal{E}_X -modules.*

(A) *Supposons que le faisceau \mathcal{G} admet des \mathcal{E} -présentations locales et soit*

$$\mathcal{E}_U^{\oplus p_1} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}|_U \rightarrow 0$$

une \mathcal{E} -présentation au dessus d'un ouvert U . Alors l'existence d'une connexion $\bar{\partial}$ de type $(0, 1)$ sur le faisceau $\mathcal{G}|_U$ telle que $\bar{\partial}^2 = 0$, implique l'existence de matrices $\omega^{s,0} \in M_{p_s, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$, $s = 0, 1$ et $\omega^{0,1} \in M_{p_1, p_0}(\mathcal{E}_X^{0,2}(U))$ telles que $\bar{\partial}\psi = \psi \cdot \omega^{0,0}$ et

$$\bar{\partial}_j \varphi + \omega^{0,0} \cdot \varphi = \varphi \cdot \omega^{1,0}, \tag{1.5.1}$$

$$\bar{\partial}_j \omega^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \omega^{0,0} = \varphi \cdot \omega^{0,1}. \tag{1.5.2}$$

Réciproquement l'existence des matrices $\omega^{s,0}$, $s = 0, 1$ et $\omega^{0,1}$ qui vérifient les relations (1.5.1) et (1.5.2), implique l'existence d'une connexion $\bar{\partial}$ de type $(0, 1)$ sur le faisceau $\mathcal{G}|_U$ telle que $\bar{\partial}\psi = \psi \cdot \omega^{0,0}$ et $\bar{\partial}^2 = 0$.

(B) *Supposons que le faisceau \mathcal{G} admet des \mathcal{E} -résolutions locales de longueur finie et soit*

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_U^{\oplus p_m} \xrightarrow{\varphi_m} \mathcal{E}_U^{\oplus p_{m-1}} \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{E}_U^{\oplus p_1} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}|_U \rightarrow 0$$

une telle \mathcal{E} -résolution. Alors l'existence d'une connexion $\bar{\partial}$ de type $(0, 1)$ sur le faisceau $\mathcal{G}_{|U}$ telle que $\bar{\partial}^2 = 0$, implique l'existence des matrices

$$\omega^{s,k} \in M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,k+1}(U))$$

pour $(s, k) \in I_m$ telles que si on utilise l'identification $\varphi_s \equiv \omega^{s,-1}$ et les conventions formelles $\omega^{0,-1} := 0$, $\omega^{-1,j} := 0$ et $\omega^{s,k} := 0$ si $s \geq m+1$ ou $k \geq m-s+1$, on aura les relations $\bar{\partial}\psi = \psi \cdot \omega^{0,0}$ et

$$\bar{\partial}_J \omega^{s,k} + \sum_{j=-1}^{k+1} (-1)^{k-j} \omega^{s+j, k-j} \wedge \omega^{s,j} = 0 \quad (1.5.3)$$

pour tout $(s, k) \in I_m$.

Réciproquement l'existence des matrices $\omega^{s,k}$ qui vérifient la relation (1.5.3) implique l'existence d'une connexion $\bar{\partial}$ de type $(0, 1)$ sur le faisceau $\mathcal{G}_{|U}$ telle que $\bar{\partial}\psi = \psi \cdot \omega^{0,0}$ et $\bar{\partial}^2 = 0$.

Preuve de (A). La preuve de (A) a été donnée dans la sous-section (1.3.1). On rappelle qu'on obtient le diagramme commutatif suivant, dont les flèches verticales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathcal{G}_{|U} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}_{|U} \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}_{|U} \otimes_{\mathcal{E}_U} \mathcal{E}_U^{0,2} \\
 & \psi \uparrow & & & \psi \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} \uparrow & & \psi \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} \uparrow \\
 & \mathcal{E}_U^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{0,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{0,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_0} \\
 & \varphi_1 \uparrow & & \varphi_1 \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} \uparrow & & \varphi_1 \otimes \mathbb{I}_{(0,2)} \uparrow \\
 & \mathcal{E}_U^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{1,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,1})^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J + \omega^{1,0}} & (\mathcal{E}_U^{0,2})^{\oplus p_1}
 \end{array}$$

Preuve de (B). Pour $(s, k) = (1, -1)$ et $(s, k) = (0, 0)$ la relation (1.5.3) exprime les relations (1.5.1) et (1.5.2) de la partie (A) du lemme. En appliquant l'opérateur $\bar{\partial}_J$ aux identités $\varphi_{t-1} \circ \varphi_t = 0$ on obtient inductivement, de la même façon que pour obtenir la relation (1.5.1), l'existence d'une matrice $\omega^{s,0} \in M_{p_s, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$, $s = 1, \dots, m$ telle que

$$\bar{\partial}_J \varphi_s + \omega^{t-1,0} \cdot \varphi_s = \varphi_s \cdot \omega^{t,0}.$$

Ces relations constituent les relations (1.5.3) pour $(s, -1)$, $s = 1, \dots, m$. On va montrer maintenant l'existence des matrices $\omega^{s,k}$, $k \geq 1$ qui vérifient la relation (1.5.3) à l'aide du procédé récursif triangulaire suivant. Pour un couple (s, k) , $s = 0, \dots, m-1$ et $k = 1, \dots, m-s$ on suppose avoir déjà défini $\omega^{\sigma, \kappa}$ pour $\sigma + \kappa \leq s+k$, $\kappa \leq k+1$, et on applique l'opérateur $\bar{\partial}_J$ à l'expression $((1.5.3)_{s, k-1})$ pour $k \geq 1$. On obtient alors la relation suivante :

$$\sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j-1} \bar{\partial}_J \omega^{s+j, k-j-1} \wedge \omega^{s,j} - \sum_{j=-1}^k \omega^{s+j, k-j-1} \wedge \bar{\partial}_J \omega^{s,j} = 0.$$

En explicitant les termes $\bar{\partial}_j \omega^{\bullet, \bullet}$ dans la relation précédente (qui bien évidemment, grâce à l'hypothèse de récurrence précédente, vérifient la relation $((1.5.3)_{\bullet, \bullet})$ pour les indices voulus) on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j-1} \omega^{s+k,-1} \wedge \omega^{s+j,k-j} \wedge \omega^{s,j} + \\ & + \sum_{j=-1}^k \sum_{r=-1}^{k-j-1} (-1)^{r+1} \omega^{s+j+r,k-j-1-r} \wedge \omega^{s+j,r} \wedge \omega^{s,j} + \\ & + \sum_{j=-1}^{k-1} \sum_{r=-1}^{j+1} (-1)^{j-r} \omega^{s+j,k-j-1} \wedge \omega^{s+r,j-r} \wedge \omega^{s,r} - \omega^{s+k,-1} \wedge \bar{\partial}_j \omega^{s,k} = 0. \end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice $j' = j + r$, $r' = j$ dans la deuxième somme et en rappelant que $\omega^{s-1,-1} \wedge \omega^{s,-1} = 0$ on obtient :

$$\omega^{s+k,-1} \wedge (\bar{\partial}_j \omega^{s,k} + \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j} \omega^{s+j,k-j} \wedge \omega^{s,j}) = 0.$$

L'hypothèse d'exactitude nous permet de choisir $\omega^{s,k+1}$ telle que la relation

$$\bar{\partial}_j \omega^{s,k} + \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j} \omega^{s+j,k-j} \wedge \omega^{s,j} = \omega^{s+k+1,-1} \wedge \omega^{s,k+1}$$

soit satisfaite. Ce type de récurrence peut se visualiser grâce au tableau de la figure 1.5. L'hypothèse de finitude de la longueur des \mathcal{E} -résolutions locales de \mathcal{G} permet d'arrêter ce procédé

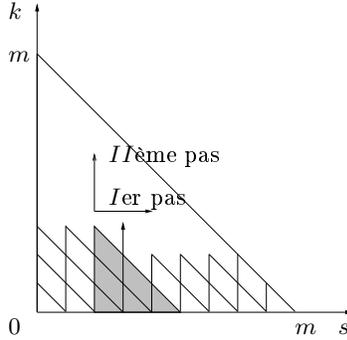


FIG. 1.5 –

après un nombre fini d'étapes. On a donc prouvé la première implication de la partie (B) du lemme. Le réciproque dans la partie (B) est évidemment une conséquence banale de la partie (A) du lemme. \square

Les relations (1.5.3) pour les indices $k \geq 0$ constituent les expressions locales de la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^2 = 0$ de la connexion relativement à la \mathcal{E} -résolution locale choisie. Les relations (1.5.3) pour les indices $(s, k) = (\bullet, -1)$ représentent simplement des identités de commutation. Si on désigne par $\mathcal{P}_0(U) \subset \mathcal{P}(U)$ le sous-semigroupe des paramètres tels que $\eta^{\bullet, 0} = 0$ on a que la restriction de la recalibration $R_0 : \mathcal{P}_0(U) \times \Omega(U, [\varphi, \psi], \bar{\partial}) \longrightarrow \Omega(U, [\varphi, \psi], \bar{\partial})$ est une application fibré qui contrôle la liberté homologique qui caractérise le choix des matrices $\omega^{\bullet, \bullet}$ relativement

aux \mathcal{E} -résolutions locales (φ_g, ψ_g) , $g \in \Gamma(U)$.

Remarque. A partir de maintenant le lecteur doit tenir compte du fait que certains des calculs et formules qui suivront n'existent pas dans le cas de longueur $m = 0$ de la \mathcal{E} -résolution locale, autrement dit dans le cas des faisceaux localement libres. Cependant les calculs qui survivent ont encore sens et ils font partie de notre preuve (différente de la preuve donnée par Koszul-Malgrange) dans ce cas. On rappelle aussi qu'on utilise la convention qui consiste à négliger les termes d'une somme ou d'un produit si l'ensemble des indices sur lesquels on effectue ces opérations est vide.

1.5.2 Deuxième étape : le formalisme du procédé itératif

On commence par prouver la proposition suivante.

Proposition 1.5.1 *L'application de recalibration R est bien définie et constitue une action de semi-groupe transitive sur l'ensemble $\Omega(U, [\varphi, \psi], \bar{\partial})$*

Preuve. Nous commençons par prouver que l'application R est bien définie. On prouve d'abord les relations $\bar{\partial}\psi_\eta = \psi_\eta \cdot \omega_\eta^{0,0}$. En effet on a :

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_\eta &= \bar{\partial}\psi \cdot g_0 + \psi \cdot \bar{\partial}\eta^{0,0} = \psi \cdot (\bar{\partial}\eta^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \eta^{0,0} + \omega^{0,0}) = \\ &= \psi \cdot (\bar{\partial}\eta^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \eta^{0,0} + \omega^{1,-1} \wedge \eta^{0,1} + \omega^{0,0}) = \psi_\eta \cdot \omega_\eta^{0,0}. \end{aligned}$$

On prouve maintenant que les matrices $\omega_\eta^{\bullet,\bullet}$ vérifient la relation (1.5.3) pour l'indice $k = -1$, autrement dit on veut montrer la relation :

$$\bar{\partial}_J \omega_\eta^{s,-1} + \omega_\eta^{s-1,0} \cdot \omega_\eta^{s,-1} = \omega_\eta^{s,-1} \cdot \omega_\eta^{s,0}.$$

On commence par développer le terme $\bar{\partial}\omega_\eta^{s,-1}$, en utilisant la relation (1.5.3) pour l'indice $k = -1$, relativement aux matrices $\omega^{\bullet,\bullet}$. On obtient alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_J \omega_\eta^{s,-1} &= -g_{s-1}^{-1} \cdot \bar{\partial}_J g_{s-1} \cdot g_{s-1}^{-1} \cdot \omega^{s,-1} \cdot g_s + \\ &+ g_{s-1}^{-1} \cdot \bar{\partial}_J \omega^{s,-1} \cdot g_s + g_{s-1}^{-1} \cdot \omega^{s,-1} \cdot \bar{\partial}_J g_s = \\ &= -g_{s-1}^{-1} (\bar{\partial}_J \eta^{s-1,0} + \omega^{s-1,0} \wedge \eta^{s-1,0} + \omega^{s-1,0}) \cdot \omega_\eta^{s,-1} + \\ &+ \omega_\eta^{s,-1} \cdot g_s^{-1} (\bar{\partial}_J \eta^{s,0} + \omega^{s,0} \wedge \eta^{s,0} + \omega^{s,0}). \end{aligned}$$

En rappelant que $\omega^{s-1,-1} \cdot \omega^{s,-1} = 0$ et en rajoutant et en soustrayant le terme $-g_{s-1}^{-1} \cdot \omega^{s,-1} \cdot \eta^{s-1,1} \cdot \omega_\eta^{s,-1}$ à la dernière expression de $\bar{\partial}\omega_\eta^{s,-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_J \omega_\eta^{s,-1} &= -\omega_\eta^{s-1,0} \cdot \omega_\eta^{s,-1} + \\ &+ \omega_\eta^{s,-1} \cdot g_s^{-1} (\bar{\partial}_J \eta^{s,0} + \omega^{s,0} \wedge \eta^{s,0} + \eta^{s-1,1} \wedge \omega_\eta^{s,-1} + \omega^{s,0}) = \\ &= -\omega_\eta^{s-1,0} \cdot \omega_\eta^{s,-1} + \omega_\eta^{s,-1} \cdot \omega_\eta^{s,0}. \end{aligned}$$

On va montrer maintenant la validité de la formule (1.5.3) pour tous les indices, relativement aux matrices $\omega_\eta^{\bullet,\bullet}$, avec un procédé récursif analogue à celui qui nous a permis de définir les matrices

$\omega^{\bullet\bullet}$. Voici les détails de la récurrence. Pour un couple (s, k) , $s = 0, \dots, m$, $k = 0, \dots, m - s$ on suppose avoir déjà montré la relation

$$\bar{\partial}_j \omega_\eta^{\sigma, \kappa} + \sum_{j=-1}^{\kappa+1} (-1)^{\kappa-j} \omega_\eta^{\sigma+j, \kappa-j} \wedge \omega_\eta^{\sigma, j} = 0 \quad ((1.5.3)_\eta^{\sigma, \kappa})$$

pour $\sigma = s$, $\kappa = -1, \dots, k - 1$. En développant le terme en $\bar{\partial}_j$ de l'expression suivante on a l'égalité :

$$\begin{aligned} & \bar{\partial}_j \omega_\eta^{s, k} + \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j} \omega_\eta^{s+j, k-j} \wedge \omega_\eta^{s, j} = \\ & = g_{s+k}^{-1} \left(-\bar{\partial}_j \eta^{s+k, 0} \wedge \omega_\eta^{s, k} + \sum_{j=0}^{k+1} \bar{\partial}_j \omega^{s+j, k-j} \wedge \eta^{s, j} - \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k-j} \omega^{s+j, k-j} \wedge \bar{\partial}_j \eta^{s, j} - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=-1}^{k-1} (-1)^{k-j} \bar{\partial}_j \eta^{s+j, k-j} \wedge \omega_\eta^{s, j} - \sum_{j=-1}^{k-1} \eta^{s+j, k-j} \wedge \bar{\partial}_j \omega_\eta^{s, j} + \bar{\partial}_j \omega^{s, k} \right) + \\ & \quad + \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j} \omega_\eta^{s+j, k-j} \wedge \omega_\eta^{s, j} = (A_1). \end{aligned}$$

En développant les termes $\bar{\partial}_j \omega^{s+j, k-j}$ et $\bar{\partial}_j \omega_\eta^{s, j}$ à l'aide respectivement des expressions (1.5.3) et $((1.5.3)_\eta^{s, j})$ on obtient :

$$\begin{aligned} (A_1) & = g_{s+k}^{-1} \omega^{s+k+1, -1} \left(\bar{\partial}_j \eta^{s, k+1} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j, k+1-j} \wedge \eta^{s, j} \right) + \\ & + g_{s+k}^{-1} \left(\sum_{j=0}^{k+1} \sum_{r=-1}^{k-j} (-1)^{k-j-r+1} \omega^{s+j+r, k-j-r} \wedge \omega^{s+j, r} \wedge \eta^{s, j} - \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \omega^{s+j, k-j} \wedge \bar{\partial}_j \eta^{s, j} - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j} \bar{\partial}_j \eta^{s+j, k-j} \wedge \omega_\eta^{s, j} + \sum_{j=-1}^{k-1} \sum_{r=-1}^{j+1} (-1)^{j-r} \eta^{s+j, k-j} \wedge \omega_\eta^{s+r, j-r} \wedge \omega_\eta^{s, r} + \bar{\partial}_j \omega^{s, k} \right) + \\ & \quad + \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j} \omega_\eta^{s+j, k-j} \wedge \omega_\eta^{s, j} = (A_2). \end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice $j' = j + r$, $r' = j$ dans la première somme double et en développant les premiers facteurs $\omega_\eta^{s+j, k-j}$ de la dernière somme on a :

$$\begin{aligned} (A_2) & = g_{s+k}^{-1} \omega^{s+k+1, -1} \left(\bar{\partial}_j \eta^{s, k+1} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j, k+1-j} \wedge \eta^{s, j} \right) + g_{s+k}^{-1} \bar{\partial}_j \omega^{s, k} \\ & \quad + \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j+1} g_{s+k}^{-1} \omega^{s+j, k-j} \wedge \left(\bar{\partial}_j \eta^{s, j} + \sum_{r=0}^{j+1} \omega^{s+r, j-r} \wedge \eta^{s, r} \right) + \\ & \quad + \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j} g_{s+k}^{-1} \left(\sum_{r=0}^{k-j+1} \omega^{s+j+r, k-j-r} \wedge \eta^{s+j, r} + \omega^{s+j, k-j} \right) \wedge \omega_\eta^{s, j} = (A_3). \end{aligned}$$

En rappelant que $g_{s+j,0} := \mathbb{I}_{s+k} + \eta^{s+j,0}$, en décomposant les termes extrêmes de la somme $\sum_{r=0}^{k-j+1}$ et en décomposant les facteurs $\omega_{\eta}^{s,j}$ qui apparaissent dans les produits $\omega^{s+j,k-j} \wedge \omega_{\eta}^{s,j}$ on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(A_3) &= g_{s+k}^{-1} \omega^{s+k+1,-1} \left(\bar{\partial}_J \eta^{s,k+1} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j,k+1-j} \wedge \eta^{s,j} - \sum_{j=-1}^k (-1)^{k+1-j} \eta^{s+j,k+1-j} \wedge \omega_{\eta}^{s,j} \right) + \\
&\quad + g_{s+k}^{-1} \bar{\partial}_J \omega^{s,k} + \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j} g_{s+k}^{-1} \omega^{s+j,k-j} \wedge \left(\sum_{r=-1}^{j-1} (-1)^{j-r+1} \eta^{s+r,j-r} \wedge \omega_{\eta}^{s,r} + \omega^{s,j} \right) \\
&\quad + \sum_{j=-1}^k \sum_{r=1}^{k-j} (-1)^{k-j} g_{s+k}^{-1} \omega^{s+j+r,k-j-r} \wedge \eta^{s+j,r} \wedge \omega_{\eta}^{s,j} = (A_4).
\end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice $j' = j + r$, $r' = j$ dans la dernière somme double on a finalement :

$$\begin{aligned}
(A_4) &= g_{s+k}^{-1} \omega^{s+k+1,-1} \left(\bar{\partial}_J \eta^{s,k+1} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j,k+1-j} \wedge \eta^{s,j} - \sum_{j=-1}^k (-1)^{k+1-j} \eta^{s+j,k+1-j} \wedge \omega_{\eta}^{s,j} \right) + \\
&\quad + g_{s+k}^{-1} \left(\bar{\partial}_J \omega^{s,k} + \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j} \omega^{s+j,k-j} \wedge \omega^{s,j} \right) = \omega_{\eta}^{s+k+1,-1} \wedge \omega_{\eta}^{s,k+1}
\end{aligned}$$

ce qui justifie la formule $((1.5.3)_{\eta}^{s,k})$. On a alors qu'à la fin de cette récurrence toutes les matrices $\omega_{\eta}^{s,k}$ vérifient la relation $((1.5.3)_{\eta})$. Montrons maintenant que l'application R est une action de semi-groupe. On se propose donc de montrer la formule $R(\eta_2, \omega_{\eta_1}) =: \omega_{\eta_1, \eta_2} = \omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}$ qui en termes de composantes s'exprime sous la forme $\omega_{\eta_1, \eta_2}^{s,k} = \omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}^{s,k}$ pour tout $k \geq -1$. On montre la formule précédente par récurrence sur k . On remarque que la formule est évidente pour $k = -1$. En explicitant l'expression de $\omega_{\eta_1, \eta_2}^{s,k}$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned}
\omega_{\eta_1, \eta_2}^{s,k} &= g_{s+k,2}^{-1} \left(\bar{\partial}_J \eta_2^{s,k} + \sum_{j=1}^{k+1} \omega_{\eta_1}^{s+j,k-j} \wedge \eta_2^{s,j} - \sum_{j=-1}^{k-1} (-1)^{k-j} \eta_2^{s+j,k-j} \wedge \omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}^{s,j} + \omega_{\eta_1}^{s,k} \cdot g_{s,2} \right) = \\
&= (g_{s+k,1} \cdot g_{s+k,2})^{-1} \left[g_{s+k,1} \cdot \bar{\partial}_J \eta_2^{s,k} + \sum_{j=1}^{k+1} \bar{\partial}_J \eta_1^{s+j,k-j} \wedge \eta_2^{s,j} + \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r=1}^{k-j+1} \omega^{s+j+r,k-j-r} \wedge \eta_1^{s+j,r} \wedge \eta_2^{s,j} + \sum_{j=1}^{k+1} \omega^{s+j,k-j} \wedge g_{s+j,1} \cdot \eta_2^{s,j}}_{(1)} - \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r=-1}^{k-j-1} (-1)^{k-j-r} \eta_1^{s+j+r,k-j-r} \wedge \omega_{\eta_1}^{s+j,r} \wedge \eta_2^{s,j} - \sum_{j=-1}^{k-1} (-1)^{k-j} g_{s+k,1} \cdot \eta_2^{s+j,k-j} \wedge \omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}^{s,j}}_{(2)} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\underbrace{\bar{\partial}_J \eta_1^{s,k} + \sum_{j=1}^{k+1} \omega^{s+j,k-j} \wedge \eta_1^{s,j}}_{(1)} - \underbrace{\sum_{j=-1}^{k-1} (-1)^{k-j} \eta_1^{s+j,k-j} \wedge \omega_{\eta_1}^{s,j} + \omega^{s,k} \cdot g_{s,1}}_{(2)} \right) g_{s,2} \right] = (B_1).
\end{aligned}$$

En rappelant l'expression du terme $\bar{\partial}_J(\eta_1 \wedge \eta_2)^{s,k}$, en faisant le changement d'indice $j' = j + r$, $r' = j$ dans la première et deuxième somme double et en regroupant opportunément les termes on obtient :

$$\begin{aligned}
(B_1) &= (g_{s+k,1} \cdot g_{s+k,2})^{-1} \left[\underbrace{\bar{\partial}_J(\eta_1 \wedge \eta_2)^{s,k} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j,k-j} \wedge (\eta_1 \wedge \eta_2)^{s,j} + \omega^{s,k}}_{(1)} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=-1}^{k-1} (-1)^{k-j} \eta_1^{s+j,k-j} \wedge \left(\bar{\partial}_J \eta_2^{s,j} + \underbrace{\sum_{r=0}^{j+1} \omega_{\eta_1}^{s+r,j-r} \wedge \eta_2^{s,r} + \omega_{\eta_1}^{s,j}}_{(2)} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=-1}^{k-1} (-1)^{k-j} g_{s+k,1} \cdot \eta_2^{s+j,k-j} \wedge \omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}^{s,j} \right] = (B_2).
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et la définition des matrices $\omega_{\eta_1, \eta_2}^{s,j}$, on peut écrire le terme entre parenthèses rondes sous la forme suivante :

$$\bar{\partial}_J \eta_2^{s,j} + \sum_{r=0}^{j+1} \omega_{\eta_1}^{s+r,j-r} \wedge \eta_2^{s,r} + \omega_{\eta_1}^{s,j} = \sum_{r=-1}^j (-1)^{j-r} \eta_2^{s+r,j-r} \wedge \omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}^{s,r} + \omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}^{s,j}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
(B_2) &= (g_{s+k,1} \cdot g_{s+k,2})^{-1} \left[\bar{\partial}_J(\eta_1 \wedge \eta_2)^{s,k} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j,k-j} \wedge (\eta_1 \wedge \eta_2)^{s,j} + \omega^{s,k} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=-1}^{k-1} \sum_{r=-1}^j (-1)^{k-r} \eta_1^{s+j,k-j} \wedge \eta_2^{s+r,j-r} \wedge \omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}^{s,r} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=-1}^{k-1} (-1)^{k-j} \left(\eta_1^{s+j,k-j} + \eta_2^{s+j,k-j} \right) \wedge \omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}^{s,j} - \sum_{j=-1}^{k-1} (-1)^{k-j} \eta^{s+k,0} \wedge \eta_2^{s+j,k-j} \wedge \omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}^{s,j} \right].
\end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice $j' = r$, $r' = j - r$ dans la somme double et en regroupant ce terme avec les deux dernières sommes, on obtient le terme cherché $\omega_{\eta_1 \wedge \eta_2}^{s,k}$. La transitivité de l'action R est complètement claire par les calculs qui ont permis de prouver que l'action même est bien définie \square

On va considérer maintenant quelques formules utiles pour le procédé itératif de la convergence rapide qui sera exposé en détail dans la sous-section 1.5.5. On explique formellement les étapes du procédé itératif. On désigne par $\omega_0 := \omega \in \Omega(U, \varphi, \psi, \bar{\partial})$ le choix initial de la calibration ω . Au k -ième pas du procédé itératif on suppose avoir obtenu la calibration $\omega_k \in \Omega(U, [\varphi, \psi], \bar{\partial})$ et avoir déterminé le paramètre $\eta_{k+1} \in \mathcal{P}(U)$ en fonction de ω_k . On définit alors la calibration $\omega_{k+1} := R(\eta_{k+1}, \omega_k) \equiv \omega_{k, \eta_{k+1}}$. Si on pose par définition

$$\eta(k) := \bigwedge_{1 \leq j \leq k} \eta_j,$$

où le symbole de produit extérieur avec une flèche vers la droite désigne le produit non commutatif de termes qui sont écrit en ordre croissant de l'indice vers la droite, on aura la formule $\omega_k = \omega_{\eta(k)}$, grâce au fait que la recalibration R est une action de semi-groupe. Si on pose par définition $g(k) := g(\eta(k)) \in \Gamma(U)$ on aura que les composantes de $g(k)$ sont définies par la formule

$$g_s(k) := \overrightarrow{\prod}_{0 \leq j \leq k} g_{s,j},$$

pour $s = 0, \dots, m$, où $g_j := g(\eta_j)$ et $g_0 := \mathbb{I}_{\rho_0}$, (ici aussi le symbole de produit avec une flèche vers la droite désigne le produit non commutatif de termes qui sont écrits en ordre croissant de l'indice vers la droite). On écrit maintenant, à l'aide de cette dernière définition, les composantes $\eta(k)^{s,t}$, $t \geq 1$ du paramètre $\eta(k)$ défini précédemment, sous une forme utile pour la convergence vers une solution d'un problème différentiel qu'on exposera dans la troisième partie.

Lemme 1.5.2.1 *Pour tout entier $k \geq 1$ on peut écrire les composantes $\eta(k)^{s,t}$, $t \geq 1$ du paramètre $\eta(k)$ sous la forme*

$$\eta(k)^{s,t} = \left(\sum_{\substack{\tau \in \Delta_t \\ J \in J_k(\rho(\tau))}} \overrightarrow{\bigwedge}_{1 \leq r \leq \rho(\tau)} g_{s+\sigma'(\tau,r)}(j_r - 1) \cdot \eta_{j_r}^{s+\sigma(\tau,r), \tau_{\rho(\tau)+1-r}} \cdot g_{s+\sigma(\tau,r)}(j_r)^{-1} \right) g_s(k) \quad (1.5.4)$$

où

$$\Delta_t := \left\{ \tau \in \mathbb{N}^t \mid \tau_j \neq 0 \Rightarrow \tau_{j-1} \neq 0, \sum_{j=1}^t \tau_j = t \right\},$$

$$\rho(\tau) := \max\{j \mid \tau_j \neq 0\},$$

$$J_k(\rho(\tau)) := \{J \in \{1, \dots, k\}^{\rho(\tau)} \mid j_1 < \dots < j_{\rho(\tau)}\},$$

$$\sigma'(\tau, r) := \sum_{j=1}^{\rho(\tau)+1-r} \tau_j \quad \text{et} \quad \sigma(\tau, r) := \sum_{j=1}^{\rho(\tau)-r} \tau_j.$$

Remarquons que $J_k(\rho(\tau)) = \emptyset$ si $k < \rho(\tau)$.

Preuve. On remarque que l'expression (1.5.4) est évidente dans le cas $k = 1, 2$. Il est immédiat de vérifier à l'aide d'une récurrence élémentaire la validité de l'expression (1.5.4) pour $t = 1$ et $k \geq 1$ entier quelconque. Dans ce cas la formule (1.5.4) s'écrit sous la forme

$$\eta(k)^{s,1} = \left(\sum_{j=1}^k g_{s+1}(j-1) \cdot \eta_j^{s,1} \cdot g_s(j)^{-1} \right) \cdot g_s(k).$$

On montre maintenant la validité de l'expression (1.5.4) en général à l'aide du procédé récursif suivant. On suppose vraie la formule (1.5.4) pour les composantes $\eta(k)^{\bullet, j}$, $j = 1, \dots, t+1$, $k \geq 1$

et on prouve la formule pour la composante $\eta(k+1)^{\bullet, t+1}$. En effet on a

$$\begin{aligned}
\eta(k+1)^{s, t+1} &:= (\eta(k) \wedge \eta_{k+1})^{s, t+1} := \\
&= \eta(k)^{s, t+1} \cdot g_{s, k+1} + g_{s+t+1}(k) \cdot \eta_{k+1}^{s, t+1} + \sum_{j=1}^t \eta(k)^{s+j, t+1-j} \wedge \eta_{k+1}^{s, j} = \\
&= \left(\sum_{\tau \in \Delta_{t+1}} \sum_{J \in J_k(\rho(\tau))} \dots \right) \cdot g_s(k+1) + g_{s+t+1}(k) \cdot \eta_{k+1}^{s, t+1} + \\
&\sum_{j=1}^t \sum_{\tau \in \Delta_{t+1-j}} \sum_{J \in J_k(\rho(\tau))} \overrightarrow{\bigwedge}_{1 \leq r \leq \rho(\tau)} (\dots) \wedge g_{s+j}(k) \cdot \eta_{k+1}^{s, j} = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k+1} g_{s+t+1}(j-1) \cdot \eta_j^{s, t+1} \cdot g_s(j)^{-1} \right) \cdot g_s(k+1) + \\
&+ \left(\sum_{\substack{\tau \in \Delta_{t+1} \\ \rho(\tau) \geq 2}} \sum_{J \in J_k(\rho(\tau))} \dots \right) \cdot g_s(k+1) + \left(\sum_{\substack{\tau \in \Delta_{t+1} \\ \rho(\tau) \geq 2}} \sum_{\substack{J \in J_{k+1}(\rho(\tau)) \\ j_{\rho(\tau)} = k+1}} \dots \right) \cdot g_s(k+1) = \\
&\left(\sum_{j=1}^{k+1} g_{s+t+1}(j-1) \cdot \eta_j^{s, t+1} \cdot g_s(j)^{-1} \right) \cdot g_s(k+1) + \left(\sum_{\substack{\tau \in \Delta_{t+1} \\ \rho(\tau) \geq 2}} \sum_{J \in J_{k+1}(\rho(\tau))} \dots \right) \cdot g_s(k+1)
\end{aligned}$$

(les trois points ... désignent les facteurs du produit extérieur non commutatif de la formule (1.5.4)), ce qui prouve la formule (1.5.4) pour la composante $\eta(k+1)^{s, t+1}$ et donc pour tout composantes. \square

1.5.3 Troisième étape : la formulation du problème différentiel

La partie principale de la preuve consiste à prouver l'existence, pour tout $x \in U$, d'un voisinage ouvert $V \subset U$ de x et $g \in \Gamma(V)$ solution du système différentiel

$$(\Sigma) \begin{cases} \bar{\partial}(\psi \cdot g_0) = 0 \\ \bar{\partial}_J(g_{s-1}^{-1} \cdot \varphi_s \cdot g_s) = 0 \\ s = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Bien évidemment résoudre ce système différentiel équivaut à trouver une autre \mathcal{E} -résolution de $\mathcal{G}_{|V}$ dans la classe $[\varphi, \psi]$, à partir de la \mathcal{E} -résolution donnée (φ, ψ) de telle sorte qu'elle admet des matrices de connexion $\omega^{s,0}$ nulles. Maintenant on va prouver les deux résultats suivants.

Lemme 1.5.3.1 *Pour tout choix de calibration $\omega \in \Omega(U, \varphi, \psi, \bar{\partial})$ on a que l'existence d'une solution $g \in \Gamma(U)$ du système différentiel (Σ) est équivalente à l'existence d'une solution $\eta \in \mathcal{P}(U)$, $g = g(\eta)$, du système différentiel quasi-linéaire*

$$(S_\omega) \begin{cases} \bar{\partial}_J \eta^{s, k} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j, k-j} \wedge \eta^{s, j} + (-1)^k \eta^{s-1, k+1} \wedge \omega_\eta^{s, -1} + \omega^{s, k} = 0 \\ k = 0, \dots, m \\ s = 0, \dots, m - k. \end{cases}$$

La proposition suivante permet de traduire notre problème en termes purement différentiels.

Proposition 1.5.2 *Supposons données des matrices $\omega^{s,k} \in M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,k+1}(U))$, $(s, k) \in I_m$ telles que $\omega^{s-1,-1} \cdot \omega^{s,-1} = 0$ pour $s = 2, \dots, m$ et $\bar{\partial}_j \omega^{s,-1} + \omega^{s-1,0} \cdot \omega^{s,-1} = \omega^{s,-1} \cdot \omega^{s,0}$ pour $s = 1, \dots, m$. Alors, pour $k \geq 0$, les relations $((1.5.3)_{s,k})$*

$$\bar{\partial}_j \omega^{s,k} + \sum_{j=-1}^{k+1} (-1)^{k-j} \omega^{s+j,k-j} \wedge \omega^{s,j} = 0$$

constituent les conditions d'intégrabilité du système différentiel (S_ω) .

Venons-en maintenant à la preuve du lemme 1.5.3.1.

Preuve du lemme 1.5.3.1. Soit $g \in \Gamma(U)$ une solution du système (Σ) . On écrit les composantes de g sous la forme $g_s = \mathbb{I}_{p_s} + \eta^{s,0}$. Avec ces notations le système (Σ) s'écrit sous la forme

$$(\Sigma_1) \begin{cases} \bar{\partial} \psi_\eta = 0 \\ \bar{\partial}_j \omega_\eta^{s,-1} = 0 \\ s = 1, \dots, m. \end{cases}$$

On rappelle que les calculs utilisés pour montrer que l'application de recalibration R est bien définie, (proposition 1.5.1) nous donnent les égalités :

$$\begin{cases} \bar{\partial} \psi_\eta = \psi \cdot (\bar{\partial}_j \eta^{0,0} + \omega^{0,0} \wedge \eta^{0,0} + \omega^{0,0}) \\ \bar{\partial}_j \omega_\eta^{s,-1} = -\omega_\eta^{s-1,0} \cdot \omega_\eta^{s,-1} + \omega_\eta^{s,-1} \cdot g_s^{-1} (\bar{\partial}_j \eta^{s,0} + \omega^{s,0} \wedge \eta^{s,0} + \eta^{s-1,0} \wedge \omega_\eta^{s,-1} + \omega^{s,0}) \\ s = 1, \dots, m. \end{cases}$$

L'hypothèse d'exactitude de la \mathcal{E} -résolution locale implique alors l'existence d'une matrice $\eta^{0,1} \in M_{p_1, p_0}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$ telle que

$$\bar{\partial}_j \eta^{0,0} + \sum_{j=0}^1 \omega^{j,-j} \wedge \eta^{0,j} + \omega^{0,0} = 0.$$

L'équation précédente est bien évidemment équivalente à l'équation $\omega_\eta^{0,0} = 0$ (remarquons que la dépendance effective des matrices $\omega_\eta^{\bullet,0}$ du paramètre η est limitée aux composantes $\eta^{\bullet,k}$, $k = 0, 1$). On a donc que l'équation du système (S_ω) , relative aux indices $(s, k) = (0, 0)$ est satisfaite. On obtient alors à l'aide d'une récurrence croissante sur les indices $s = 1, \dots, m$ relatifs aux expressions précédentes des matrices $\bar{\partial}_j \omega_\eta^{s,-1}$ et de l'exactitude de la \mathcal{E} -résolution locale, l'existence de matrices $\eta^{s,1} \in M_{p_{s+1}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$, $s = 0, \dots, m$ telles que $\omega_\eta^{s,0} = 0$ pour les indices en question. Ces équations ne représentent rien d'autre que le système différentiel quasi-linéaire

$$(S_1) \begin{cases} \bar{\partial}_j \eta^{s,0} + \sum_{j=0}^1 \omega^{s+j,-j} \wedge \eta^{s,j} + \eta^{s-1,1} \wedge \omega_\eta^{s,-1} + \omega^{s,0} = 0 \\ s = 0, \dots, m. \end{cases}$$

qui est évidemment équivalent au système (Σ) . On rappelle aussi que les calculs relatifs à la bonne définition de l'application de recalibration R , nous donnent les égalités

$$\begin{aligned} & \bar{\partial}_J \omega_\eta^{s,k} + \sum_{j=-1}^k (-1)^{k-j} \omega_\eta^{s+j,k-j} \wedge \omega_\eta^{s,j} = \\ & = g_{s+k}^{-1} \omega^{s+k+1,-1} \left(\bar{\partial}_J \eta^{s,k+1} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j,k+1-j} \wedge \eta^{s,j} - \sum_{j=-1}^k (-1)^{k+1-j} \eta^{s+j,k+1-j} \wedge \omega_\eta^{s,j} + \omega^{s,k+1} \right) \end{aligned}$$

On obtient alors à l'aide d'une récurrence triangulaire, analogue à celle qui nous a permis de choisir les matrices $\omega^{\bullet,\bullet}$ dans la première étape de la preuve, l'existence des matrices $\eta^{s,k}$ telles que $\omega_\eta^{s,k} = 0$ pour $s = 0, \dots, m$, $k = 0, \dots, m$. Le système formé par ces équations est bien évidemment équivalent au système (S_ω) , ce qui prouve le lemme. \square

Venons maintenant à la proposition 1.5.2. On commence par prouver la nécessité des conditions d'intégrabilité pour le système (S_ω) . La suffisance de ces conditions sera prouvée dans l'étape suivante de la preuve du théorème 1.1.8.

Preuve de la nécessité des conditions d'intégrabilité pour le système (S_ω)

On commence par prouver la validité des relations $((1.5.3)_{\bullet,k})$, $k \geq 0$ à l'aide d'une récurrence croissante sur $k = 0, \dots, m$. On rappelle que, le fait que par hypothèse on dispose des relations $\omega^{s-1,-1} \cdot \omega^{s,-1} = 0$, $s = 2, \dots, m$ et $((1.5.3)_{\bullet,-1})$, combiné avec le fait que les équations du système (S_ω) , relatives aux indices $(s, 0)$ ne représentent rien d'autre que les équations $\omega_\eta^{s,0} = 0$, implique la validité des équations $\bar{\partial}_J \omega_\eta^{s,-1} = 0$. On suppose par hypothèse de récurrence la validité des relations $((1.5.3)_{\bullet,j})$ pour $j = -1, \dots, k-1$. En utilisant la validité des équations du système (S_ω) et en appliquant l'opérateur $\bar{\partial}_J$ à l'équation relative aux indices (s, k) de ce système on obtient les égalités suivantes

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\partial}_J \omega^{s,k} \cdot g_s - (-1)^k \omega^{s,k} \wedge \bar{\partial}_J \eta^{s,0} + \sum_{j=1}^{k+1} \bar{\partial}_J \omega^{s+j,k-j} \wedge \eta^{s,j} - \\ & - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k-j} \omega^{s+j,k-j} \wedge \bar{\partial}_J \eta^{s,j} + (-1)^k \bar{\partial}_J \eta^{s-1,k+1} \wedge \omega_\eta^{s,-1} = \\ & = \bar{\partial}_J \omega^{s,k} \cdot g_s - \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r=-1}^{k-j+1} (-1)^{k-j-r} \omega^{s+j+r,k-j-r} \wedge \omega^{s+j,r} \wedge \eta^{s,j} - \\ & - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k-j} \omega^{s+j,k-j} \wedge \bar{\partial}_J \eta^{s,j} + (-1)^k \bar{\partial}_J \eta^{s-1,k+1} \wedge \omega_\eta^{s,-1}. \end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice $j' = j + r$, $r' = j$ dans la somme double on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\partial}_J \omega^{s,k} \cdot g_s - \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k-j} \omega^{s+j,k-j} \wedge \left(\bar{\partial}_J \eta^{s,j} + \sum_{r=1}^{j+1} \omega^{s+r,j-r} \wedge \eta^{s,r} \right) + \\ & + (-1)^k \bar{\partial}_J \eta^{s-1,k+1} \wedge \omega_\eta^{s,-1} = \left(\bar{\partial}_J \omega^{s,k} + \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k-j} \omega^{s+j,k-j} \wedge \omega^{s,j} \right) \cdot g_s + \\ & + (-1)^k \left(\bar{\partial}_J \eta^{s-1,k+1} + \sum_{j=0}^{k+1} \omega^{s+j,k-j} \wedge \eta^{s-1,j+1} \right) \wedge \omega_\eta^{s,-1} = \end{aligned}$$

$$= \left(\bar{\partial}_j \omega^{s,k} + \sum_{j=-1}^{k+1} (-1)^{k-j} \omega^{s+j,k-j} \wedge \omega^{s,j} \right) \cdot g_s.$$

L'inversibilité de g_s permet alors de conclure la preuve de la nécessité des conditions d'intégrabilité $((1.5.3)_{\bullet,k})$, $k \geq 0$ pour le système (S_ω) . \square

La proposition 1.5.2 nous suggère de considérer les définitions suivantes. On définit l'ensemble non vide

$$\Omega(U, p) \subset \bigoplus_{(s,k) \in I_m} M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,k+1}(U)),$$

$p = (p_1, \dots, p_m)$, constitué par les éléments $\omega = (\omega^{s,t})_{s,t}$ tels que $\omega^{s-1,-1} \cdot \omega^{s,-1} = 0$ et la relation (1.5.3) soit satisfaite. Si on dispose de matrices $\omega_0^{s,-1} \in M_{p_{s-1}, p_s}(\mathcal{E}_X(U))$, $s = 1, \dots, m$ qui vérifient la relation écrite précédemment on peut définir l'ensemble

$$\Omega(U, \omega_0^{\bullet,-1}) := \{ \omega \in \Omega(U, p) \mid \exists g \in \Gamma(U) : \omega^{\bullet,-1} = \omega_{0,g}^{\bullet,-1} \}$$

dont les éléments seront encore appelés calibrations. Les calculs relatifs à la proposition 1.5.1 permettent d'étendre la recalibration R à l'application

$$R : \mathcal{P}(U) \times \Omega(U, \omega_0^{\bullet,-1}) \longrightarrow \Omega(U, \omega_0^{\bullet,-1})$$

qui est encore une action de semi-groupe. A partir de maintenant on va considérer plus généralement la recalibration en termes de l'application définie précédemment. Venons-en maintenant à un préliminaire technique avant d'exposer la preuve de l'existence des solutions pour le système différentiel (S_ω) .

1.5.4 Détails sur le choix des normes et sur l'opérateur de Leray-Koppelman

A partir de maintenant on va supposer que $U = B_1(0)$ est la boule ouverte de \mathbb{C}^n de centre l'origine et de rayon unité. Si $A \in M_{k,l}(\mathbb{C})$ on définit la norme $\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{C}^l - \{0\}} \|Av\| / \|v\|$ et si $u = \sum'_{|I|=q} u_I d\bar{z}_I$ est une $(0, q)$ -forme à coefficients des (k, l) -matrices à coefficients dérivables jusqu'à l'ordre $h \geq 0$, on définit une norme de Hölder invariante par changement d'échelle

$$\|u\|_{r,h,\mu,q} := \sum_{\substack{|I|=q \\ |\alpha| \leq h}} S_{|\alpha|} r^{|\alpha|+q} \|\partial^\alpha u_I\|_{r,\mu}$$

où

$$\|f\|_{r,\mu} := \sup_{z \in B_r} \|f(z)\| + \sup_{\substack{z, \zeta \in B_r \\ z \neq \zeta}} r^\mu \frac{\|f(z) - f(\zeta)\|}{\|z - \zeta\|^\mu},$$

avec $\mu \in (0, 1)$ une constante fixée une fois pour toutes dans notre problème et $(S_k)_{k \geq 0} \subset (0, \infty)$, $S_0 := 1$ est une suite de réels qu'on construira ensuite et qui vérifie l'inégalité

$$S_k \leq \left[\max_{|\alpha+\beta|=k} \binom{\alpha+\beta}{\alpha} \right]^{-1} S_j S_{k-j}$$

pour tout $k \geq 1$ et $j = 1, \dots, k-1$. On remarque que si le degré $q \geq 1$ on a que la norme $\|u\|_{r,h,q}$ tend vers zéro lorsque le rayon r tend vers zéro. On désignera par $\mathcal{C}_{0,q}^{h,\mu}(\bar{B}_r, M_{k,l}(\mathbb{C}))$ l'espace de Banach de $(0, q)$ -formes sur la boule fermée \bar{B}_r à coefficients des (k, l) -matrices à coefficients dérivables jusque à l'ordre $h \geq 0$, telles que la norme $\|\cdot\|_{r,h,q}$ soit finie (on ne notera pas les

dimensions des matrices). On remarque que si $u \in \mathcal{C}_{0,q}^{h,\mu}(\bar{B}_r, M_{k,l}(\mathbb{C}))$ et $v \in \mathcal{C}_{0,p}^{h,\mu}(\bar{B}_r, M_{l,t}(\mathbb{C}))$ alors on a l'inégalité $\|u \wedge v\|_{r,h,p+q} \leq \|u\|_{r,h,q} \cdot \|v\|_{r,h,p}$. On rappelle très rapidement la définition de l'opérateur de Leray-Koppelman (voir les ouvrages classiques de Henkin-Leiterer [He-Le], de Range [Ra] et l'article de Harvey-Polkin [Ha-Po]). L'opérateur de Leray-Koppelman de la boule unité

$$T_q : \mathcal{C}_{0,q+1}^{h,\mu}(\bar{B}_1, M_{k,l}(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{C}_{0,q}^{h,\mu}(B_1, M_{k,l}(\mathbb{C}))$$

pour $0 \leq q \leq n-1$ est défini par une formule du type

$$T_q u(z) := \int_{\zeta \in B_1} u(\zeta) \wedge K_q(\zeta, z) + \int_{\zeta \in \partial B_1} u(\zeta) \wedge k_q(\zeta, z)$$

où le premier opérateur intégral s'exprime en termes des coefficients u_I de la forme u , par des termes du type

$$\int_{\zeta \in B_1} u_I(\zeta) \cdot K(\zeta, z) d\lambda(\zeta) \quad \text{avec} \quad K(\zeta, z) = \frac{\bar{\zeta}_l - \bar{z}_l}{|\zeta - z|^{2n}}$$

et le deuxième par des termes du type

$$\int_{\zeta \in \partial B_1} u_I(\zeta) \cdot k(\zeta, z) d\sigma(\zeta) \quad \text{avec} \quad k(\zeta, z) = \frac{(\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j) \cdot \bar{\zeta}_k}{|\zeta - z|^{2l+2} \cdot [\bar{\zeta} \cdot (\bar{\zeta} - \bar{z})]^{n-1-l}}$$

$l = 0, \dots, n-2$. Pour $n = 1$ on pose par définition $k(\zeta, z) \equiv 0$. L'opérateur de Leray-Koppelman $T_{r,q} : \mathcal{C}_{0,q+1}^{h,\mu}(\bar{B}_r, M_{k,l}(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{C}_{0,q}^{h,\mu}(B_r, M_{k,l}(\mathbb{C}))$, $0 \leq q \leq n-1$ de la boule de rayon r et de centre l'origine est défini par la formule $T_{r,q} := (\lambda_r^{-1})^* \circ T_q \circ \lambda_r^*$ avec $\lambda_r : B_1 \rightarrow B_r$ l'homothétie de rapport r . On pose par définition $T_{r,n} := 0$. Les propriétés de l'opérateur de Leray-Koppelman qui nous intéressent sont les suivantes :

1) Pour toute forme différentielle $u \in \mathcal{C}_{0,q+1}^{h,\mu}(\bar{B}_r, M_{k,l}(\mathbb{C}))$, $0 \leq q \leq n-1$ on a la formule d'homotopie :

$$u = \bar{\partial}_j T_{r,q} u + T_{r,q+1} \bar{\partial}_j u \tag{1.5.5}$$

valable sur la boule B_r .

2) Il existe une suite de poids $S = (S_k)_{k \geq 0}$ de la norme de Hölder introduite précédemment telle que pour toute forme différentielle $u \in \mathcal{C}_{0,q+1}^{h,\mu}(\bar{B}_r, M_{k,l}(\mathbb{C}))$ on a l'estimation intérieure :

$$\|T_{r,q} u\|_{r(1-\sigma), h+1, \mu, q} \leq C \cdot \sigma^{-s(h)} \cdot \|u\|_{r, h, \mu, q+1}, \tag{1.5.6}$$

avec $\sigma \in (0, 1)$, $s(h) = 2n+h+2$ et $C = C(n, \mu) > 0$ une constante *indépendante* de la régularité h . La preuve de la formule d'homotopie est exposée dans les ouvrages classiques mentionnés précédemment. Une estimation analogue à la (1.5.6) a été déjà montrée par S.Webster (voir [We-1]). Nous utiliserons essentiellement les mêmes arguments de Webster pour montrer celle-ci. La différence avec l'estimation obtenue par Webster consiste dans le fait que la constante $C > 0$ est indépendante de la régularité h . A partir de maintenant on désignera par C une constante strictement positive indépendante de la régularité des formes. Pour prouver l'estimation (1.5.6) il suffit de se restreindre au cas $r = 1$, la norme étant choisie invariante par changement d'échelle. On considère à ce propos une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ telle que $\rho(x) = 1$ pour $x \leq 0$ et $\rho(x) = 0$ pour $x \geq 1$. On définit alors la fonction de cut-off χ_σ , avec $\sigma \in (0, 1)$, par la loi

$$\chi_\sigma(z) := \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \leq 1 - \sigma/2 \\ \rho(2\sigma^{-1}(|z| - 1 + \sigma/2)) & \text{si } 1 - \sigma/2 \leq |z| \end{cases}$$

On aura alors, comme conséquence de l'invariance par translation de $K(\zeta, z)$, les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} J_1^\alpha(z) &:= \partial_z^\alpha \int_{\zeta \in B_1} u_I(\zeta) \cdot K(\zeta, z) d\lambda(\zeta) = \\ &= \partial_z^{1_\alpha} \int_{\zeta \in B_1} \partial_\zeta^{\alpha-1_\alpha} (\chi_\sigma \cdot u_I)(\zeta) \cdot K(\zeta, z) d\lambda(\zeta) + \int_{\zeta \in B_1 - B_{1-\sigma/2}} ((1 - \chi_\sigma) \cdot u_I)(\zeta) \cdot \partial_z^\alpha K(\zeta, z) d\lambda(\zeta) \end{aligned}$$

pour $|z| \leq 1 - \sigma$ et pour tout multi-indice $|\alpha| = k + 1$, $k \geq 0$. Ici on désigne par 1_α un multi-indice tel que $|1_\alpha| = 1$ et $1_\alpha \leq \alpha$. La théorie classique du potentiel (voir par exemple [Gi-Tru]) nous fournit alors les estimations

$$\left\| \partial_z^{1_\alpha} \int_{\zeta \in B_1} \partial_\zeta^{\alpha-1_\alpha} (\chi_\sigma \cdot u_I)(\zeta) \cdot K(\zeta, z) d\lambda(\zeta) \right\|_{1-\sigma, \mu} \leq C(n, \mu) \cdot \sigma^{-2n-1} \cdot \|\partial^{\alpha-1_\alpha} (\chi_\sigma \cdot u_I)\|_{1, \mu}$$

et $|\partial_z^\alpha K(\zeta, z)| \leq C(n, \mu) \cdot |\zeta - z|^{1-2n-|\alpha|}$. On aura alors l'estimation suivante :

$$\|J_1^\alpha\|_{1-\sigma, \mu} \leq C(n, \mu) \cdot \sigma^{-2n-1} \cdot \|\partial^{\alpha-1_\alpha} (\chi_\sigma \cdot u_I)\|_{1, \mu} + C(n, |\alpha|) \cdot (\sigma/2)^{1-2n-|\alpha|} \cdot \|u_I\|_{1, 0}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|J_1^0\|_{1-\sigma, h+1, \mu} &\leq \sum_{|\alpha| \leq h+1} S_{|\alpha|} \|J_1^\alpha\|_{1-\sigma, \mu} \leq \\ &\leq \|J_1\|_{1-\sigma, \mu} + C(n, \mu) \cdot \sigma^{-2n-1} \cdot \sum_{|\alpha| \leq h} \sum_{\beta \leq \alpha} S_{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} \sigma^{-|\beta|} \|\partial^\beta \rho\|_{1, \mu} \cdot \|\partial^{\alpha-\beta} u_I\|_{1, \mu} + \\ &+ \sigma^{-2n-h} \cdot \|u_I\|_{1, 0} \cdot \sum_{|\alpha| \leq h+1} S_{|\alpha|} \cdot C(n, |\alpha|) \cdot 2^{|\alpha|+2n-1}. \end{aligned}$$

Pour un choix convenable de la suite $S := (S_k)_{k \geq 0}$, qu'on présentera ensuite, on peut se ramener à supposer que $\|\rho\|_{1, S, \mu} := \sum_{\alpha \geq 0} S_{|\alpha|} \|\partial^\alpha \rho\|_{1, \mu} < +\infty$ et $\sum_{\alpha \geq 0} S_{|\alpha|} \cdot C(n, |\alpha|) \cdot 2^{|\alpha|+2n-1} < +\infty$. On aura alors l'estimation

$$\begin{aligned} \|J_1^0\|_{1-\sigma, h+1, \mu} &\leq C(n, \mu) \cdot \sigma^{-2n-1} \cdot \|u_I\|_{1, \mu} + C(n, \mu) \cdot \sigma^{-2n-h-1} \cdot \|\rho\|_{1, h, \mu} \cdot \|u_I\|_{1, h, \mu} + \\ &+ C \cdot \sigma^{-2n-h} \cdot \|u_I\|_{1, 0} \leq C \cdot \sigma^{-2n-h-1} \cdot \|u_I\|_{1, h, \mu}. \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

Enfin pour estimer les termes du type

$$J_2^\alpha(z) := \partial_z^\alpha \int_{\zeta \in \partial B_1} u_I(\zeta) \cdot k(\zeta, z) d\sigma(\zeta) = \int_{\zeta \in \partial B_1} u_I(\zeta) \cdot \partial_z^\alpha k(\zeta, z) d\sigma(\zeta)$$

avec $|z| \leq 1 - \sigma$, il suffit de dériver $|\alpha| + 1$ fois le noyau $k(\zeta, z)$, de remarquer l'estimation élémentaire :

$$\frac{|J_2^\alpha(z) - J_2^\alpha(\bar{z})|}{|z - \bar{z}|^\mu} \leq |z - \bar{z}|^{1-\mu} \cdot \int_{\zeta \in \partial B_1} |u_I(\zeta)| \cdot |\nabla_z \partial_z^\alpha k(\zeta, \hat{z}_\zeta)| d\sigma(\zeta)$$

(où \hat{z}_ζ est un point entre z et \bar{z}) et les inégalités $|\zeta - z| \geq 3\sigma$, $|\bar{\zeta} \cdot (\zeta - z)| \geq 3\sigma$ pour $|\zeta| = 1$ et $|z| \leq 1 - 3\sigma$. On aura alors l'estimation

$$\|J_2^\alpha\|_{1-\sigma, \mu} \leq C(n, |\alpha|) \cdot \sigma^{-2n-1-|\alpha|} \cdot \|u_I\|_{1,0}.$$

Par l'hypothèse faite précédemment sur la suite de poids on aura l'estimation

$$\|J_2^0\|_{1-\sigma, h+1, \mu} \leq C \cdot \sigma^{-s(h)} \cdot \|u_I\|_{1,0}$$

qui combinée avec l'estimation (1.5.7) nous donne l'estimation (1.5.6) sur la boule de rayon unité.

Venons-en à la définition partielle de la suite $S = (S_k)_{k \geq 0}$ qui sera déterminée en partie par l'exigence de satisfaire les hypothèses faites dans les calculs précédents.

Définition partielle de la suite de poids

On pose par définition

$$A_k := \sum_{|\alpha|=k} \max\{\|\partial^\alpha \rho\|_{1, \mu}, \|\partial^\alpha \omega^{s, -1}\|_{1, \mu}, s = 0, \dots, m, \},$$

$B_k := (\max\{A_k, C(n, k)\})^{-1}$ si $\max\{A_k, C(n, k)\} \neq 0$ et 1 sinon, $D_k := [\max_{|\alpha+\beta|=k} \binom{\alpha+\beta}{\alpha}]^{-1}$. On pose par définition $S_0 = 1$, $S_1 = B_1 > 0$ et on définit S_k , $k \geq 2$ à l'aide de la formule récursive

$$0 < S_k := \min\{2^{-k} B_k, R_k, L_k, D_k \cdot \min_{1 \leq j \leq k-1} S_j \cdot S_{k-j}\}$$

où R_k, L_k sont des constantes qui seront déterminées dans la deuxième étape. On désigne par $S(\omega)$ la suite de poids obtenue si on pose $R_k = L_k = +\infty$, dans la définition précédente des poids. Avec ces définitions on aura $\|\omega^{\bullet, -1}\|_{1, S} \leq \|\omega^{\bullet, -1}\|_{1, S(\omega)} < +\infty$. Pour simplifier les notations on identifiera dans la suite $\|\cdot\|_{r, h, \mu, q} \equiv \|\cdot\|_{r, h}$, $T_{r, q} \equiv T_r$ et $\|\partial^h f\|_{\bullet} \equiv \sum_{|\alpha|=h} \|\partial^\alpha f\|_{\bullet}$.

1.5.5 Quatrième étape : présentation du schéma de convergence rapide de type Nash-Moser et existence d'une solution du problème différentiel (S_ω)

Preuve de l'estimation fondamentale du schéma de convergence rapide

Dans cette partie de la preuve on va montrer l'existence d'un paramètre de recalibration η des calibrations ω , lequel permettra un contrôle quadratique de la norme des matrices $\omega_\eta^{\bullet, t}$, $t \geq 0$ en termes de la norme des matrices $\omega^{\bullet, t}$, $t \geq 0$. Ce contrôle est essentiel pour montrer la convergence vers zéro de la norme des matrices $\omega_k^{\bullet, t}$, $t \geq 0$ obtenues au k -ième pas du procédé itératif de la convergence rapide. La convergence vers une solution du problème différentiel (S_ω) est appelée rapide en raison de l'estimation quadratique mentionnée précédemment. Avant de prouver l'estimation en question on va introduire quelques notations utiles pour la suite. Soit $\omega \in \Omega(B_1, p)$. Pour $r \in (0, 1)$ on définit les quantités

$$a_h(\omega, r) := \max\{\|\omega^{s, k}\|_{r, h} \mid 0 \leq s \leq m, 0 \leq k \leq m - s\},$$

$$c(\omega) := \max\{\|\omega^{s, -1}\|_{1, S(\omega)} \mid 1 \leq s \leq m\}.$$

On remarque que par définition de la norme de Hölder, la quantité $a_h(\omega, r)$ tend vers zéro lorsque le rayon r tend vers zéro. Pour tout $\sigma \in (0, 1)$ on définit les rayons $r_l := r(1 - l \cdot \sigma_m)$ pour $l = 0, \dots, m+1$ où on pose par définition $\sigma_m := \sigma/(m+1)$. Ensuite on définit par récurrence

décroissante sur $k = m, \dots, 0$, les constantes $L_k = L_k(C, c(\omega)) > 0$ par les formules $L_m := C$ et $L_{k-1} := \max\{C, 2c(\omega) \cdot C \cdot L_k\}$. A partir de maintenant on désigne par $\varepsilon \in (0, 1/2)$ une constante fixée telle que pour toutes les matrices $A \in M_{p_s, p_s}(\mathbb{C})$ telles que $\|A\| < \varepsilon$ on a l'inversibilité de la matrice $\mathbb{I}_{p_s} + A$. Avec ces notations on a la proposition suivante :

Proposition 1.5.3 *Supposons donnés $\omega \in \Omega(B_1, p)$, $r, \sigma \in (0, 1)$, $h \in \mathbb{N}$ et les poids $0 < S_j \leq S_j(\omega)$, $j = 0, \dots, h+1$ de la norme de Hölder $\|\cdot\|_{r, h+1}$. Supposons que le rayon r soit suffisamment petit pour assurer les estimations*

$$L_0(C, c(\omega)) \cdot \sigma_m^{-(m+1) \cdot s(h)} \cdot a_h(\omega, r) < \varepsilon$$

et $a_h(\omega, r) \leq 1$, où la quantité $a_h(\omega, r)$ est calculée par rapport au poids S_j , $j = 0, \dots, h$. Supposons de plus que le poids S_{h+1} soit suffisamment petit pour pouvoir assurer l'estimation :

$$S_{h+1} \|\partial^{h+1} \omega_I^{s,k}\|_{r, \mu} \leq \|\omega_I^{s,k}\|_{r, \mu}$$

pour tout $k = 0, \dots, m$, $s = 0, \dots, m-k$ et $|I| = k+1$. Si on définit les composantes $\eta^{s,k}$ du paramètre de recalibration $\eta \in \mathcal{P}(\bar{B}_{r(1-\sigma)})$ par la formule de récurrence décroissante sur $k = m, \dots, 0$

$$\eta^{s,k} := -T_{r_{m-k}} \left(\omega^{s,k} + \omega^{s+k+1, -1} \wedge \eta^{s, k+1} + (-1)^k \eta^{s-1, k+1} \wedge \omega^{s, -1} \right) \in M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,k}(B_{r_{m-k}}))$$

pour $s = 0, \dots, m-k$, alors on aura la validité des estimations

$$\|\eta^{\bullet, k}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq L \cdot \sigma_m^{-(m+1) \cdot s(h)} \cdot a_h(\omega, r), \quad (1.5.8)$$

$$\|\omega_\eta^{\bullet, k}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq R \cdot \sigma_m^{\nu(m, h)} \cdot a_h(\omega, r)^2 \quad (1.5.9)$$

pour tout $k = 0, \dots, m$, avec $L = L(C, c(\omega)) := \max_k L_k > 0$, $R = R(C, c(\omega)) > 0$ constantes positives et $\nu(m, h) := [(m+2) \cdot m + 1] \cdot s(h)$, ($m \geq 0, h \geq 0$).

Preuve. Dans les calculs qui suivront on utilisera les identifications $a_h \equiv a_h(\omega, r)$ et $c = c(\omega)$. On commence par prouver l'estimation (1.5.8). Si on définit $\sigma_{m, l} > 0$ par la formule $r_{l+1} = r_l(1 + \sigma_{m, l})$ on a que $\sigma_{m, l} \geq \sigma_m$. On obtient alors à l'aide de l'estimation (1.5.6) et d'une récurrence élémentaire décroissante sur $k = m, \dots, 0$, l'estimation suivante

$$\|\eta^{\bullet, k}\|_{r_{m-k+1}, h+1} \leq L_k \cdot \sigma_m^{-(m-k+1) \cdot s(h)} \cdot a_h, \quad (1.5.10)$$

qui prouve l'estimation (1.5.8). Venons maintenant à la preuve de l'estimation (1.5.9). Pour cela on définit les troncutures $\eta_{[t]} := (\eta_{[t]}^{s,k})_{s,k} \in \mathcal{P}(B_{r_{m-t}})$ du paramètre η défini dans l'hypothèse de la proposition 1.5.3, de la façon suivante ; $\eta_{[t]}^{s,k} := 0$ si $k < t$ et $\eta_{[t]}^{s,k} := \eta^{s,k}$ sur la boule $B_{r_{m-t}}$, si $k \geq t$. Par définition de la recalibration avec paramètre $\eta_{[k+1]}$ on aura alors :

$$\omega_{\eta_{[k+1]}}^{s,k} = \omega^{s,k} + \omega^{s+k+1, -1} \wedge \eta^{s, k+1} + (-1)^k \eta^{s-1, k+1} \wedge \omega^{s, -1}$$

sur la boule $B_{r_{m-k-1}}$ pour $k = 0, \dots, m$. On montre maintenant à l'aide d'une récurrence en ordre décroissant sur $k = m, \dots, 0$, l'estimation quadratique

$$\|T_{r_{m-k}} \bar{\partial}_j \omega_{\eta_{[k+1]}}^{s,k}\|_{r_{m-k+1}, h+1} \leq Q_k \cdot \sigma_m^{-b(m, k, h)} \cdot a_h^2 \quad (1.5.11)$$

où $Q_k = Q_k(C, c) > 0$ est une constante positive, $b(m, k, h) := [2(m-k) + 1] \cdot s(h)$. Pour $k = m$ on a banalement $\omega_{\eta_{[m+1]}}^{0, m} = \omega^{0, m}$. L'estimation précédente découle alors immédiatement de la relation $((1.5.3)_{0, m})$, qui peut être écrite explicitement sous la forme

$$\bar{\partial}_j \omega^{0, m} = - \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \omega^{j, m-j} \wedge \omega^{0, j}$$

et de l'estimation (1.5.6). Le diagramme de figure 1.6 montre les matrices qui interviennent dans la relation (1.5.3) dans le cas où $k = m$. On remarque que la relation $((1.5.3)_{0,m})$ est la seule,

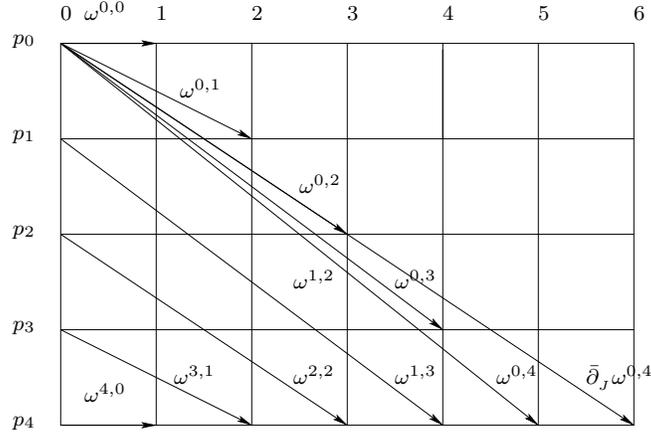


FIG. 1.6 –

parmi les autres relations $((1.5.3)_{\bullet,\bullet})$, qui ne présente pas de facteurs de type $\omega^{\bullet,-1}$ dans les termes quadratiques.

Montrons maintenant l'estimation quadratique (1.5.11) pour $0 \leq k-1 < m$ (si $m \geq 1$, autrement il n'y a plus rien à prouver en ce qui concerne l'estimation (1.5.11)) en admettant qu'elle soit vraie pour $1 \leq k \leq m$. En effet en utilisant la relation (1.5.3) relativement aux matrices $\bar{\partial}_j \omega_{\eta_{[k]}}^{s,k-1}$ on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_j \omega_{\eta_{[k]}}^{s,k-1} &= (-1)^{k+1} \omega_{\eta_{[k]}}^{s-1,k} \wedge \omega^{s,-1} + \omega^{s+k,-1} \wedge \omega_{\eta_{[k]}}^{s,k} + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \omega_{\eta_{[k]}}^{s+j,k-1-j} \wedge \omega_{\eta_{[k]}}^{s,j} \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

(remarquons que $\omega_{\eta_{[k]}}^{\bullet,-1} = \omega^{\bullet,-1}$ étant $k \geq 1$). En explicitant à l'aide de la formule de recalibration relative au paramètre $\eta_{[k]}$ les termes $\omega_{\eta_{[k]}}^{\bullet,k}$ qui apparaissent dans l'expression précédente et en utilisant la formule d'homotopie pour l'opérateur $\bar{\partial}_j$ on obtient :

$$\begin{aligned} \omega_{\eta_{[k]}}^{s,k} &= \bar{\partial}_j \eta^{s,k} + \omega^{s+k,0} \wedge \eta^{s,k} - (-1)^k \eta^{s,k} \wedge \omega_{\eta_{[k]}}^{s,0} + \omega_{\eta_{[k+1]}}^{s,k} = \\ &= T_{r_{m-k}} \bar{\partial}_j \omega_{\eta_{[k+1]}}^{s,k} + \omega^{s+k,0} \wedge \eta^{s,k} - (-1)^k \eta^{s,k} \wedge \omega_{\eta_{[k]}}^{s,0}. \end{aligned}$$

Le diagramme suivant montre les matrices qui interviennent dans la définition de la matrice $\omega_{\eta_{[2]}}^{1,2}$ dans le cas $m = 4$.

On estime donc la norme des matrices $\omega_{\eta_{[k]}}^{s,k}$ à l'aide de l'expression obtenue précédemment, de l'hypothèse récursive et de l'estimation (1.5.10).

$$\begin{aligned} \|\omega_{\eta_{[k]}}^{s,k}\|_{r_{m-k+1},h} &\leq Q_k \cdot \sigma_m^{-[2(m-k)+1] \cdot s(h)} \cdot a_h^2 + \|\omega^{s+k,0} \wedge \eta^{s,k}\|_{r_{m-k+1},h} + \\ &+ \|\eta^{s,k} \wedge \omega^{s,0}\|_{r_{m-k+1},h} + 2c \cdot \|\eta^{s,k}\|_{r_{m-k+1},h} \cdot \|\eta^{\bullet,k}\|_{r_{m-k+1},h} \leq \end{aligned}$$

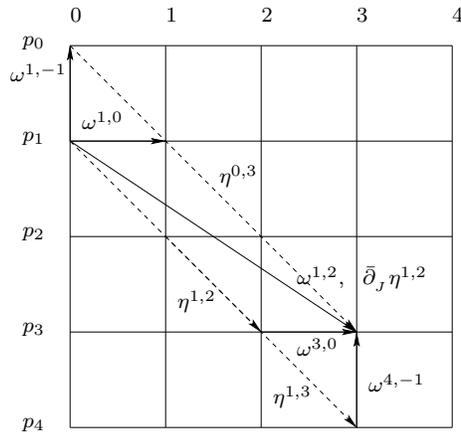


FIG. 1.7 –

$$\leq Q_k \cdot \sigma_m^{-[2(m-k)+1] \cdot s(h)} \cdot a_h^2 +$$

$$+ 2L_k \cdot \sigma_m^{-(m-k+1) \cdot s(h)} \cdot a_h^2 + 2c \cdot L_k^2 \cdot \sigma_m^{-2(m-k+1) \cdot s(h)} \cdot a_h^2.$$

On a alors prouvé l'estimation quadratique

$$\|\omega_{\eta_{[k]}^{s,k}}\|_{r_{m-k+1},h} \leq H_k \cdot \sigma_m^{-2(m-k+1) \cdot s(h)} \cdot a_h^2$$

($k \geq 1$), où $H_k = H_k(C, c) > 0$ est une constante positive (on remarque que le terme quadratique $2c \cdot \|\eta^{s,k}\|_{r_{m-k+1},h} \cdot \|\eta^{\bullet,k}\|_{r_{m-k+1},h}$, et donc le dernier terme

$$2c \cdot L_k^2 \cdot \sigma_m^{-2(m-k+1) \cdot s(h)} \cdot a_h^2$$

de la dernière inégalité précédente, sont présents seulement si $k = 1$ du fait que $\omega_{\eta_{[t]}^{\bullet,0}} = \omega^{\bullet,0}$ si $t \geq 2$). On estime maintenant la norme $\|T_{r_{m-k+1}} \bar{\partial}_J \omega_{\eta_{[k]}^{\bullet,k-1}}\|_{r_{m-k+2},h+1}$ à l'aide de l'expression (1.5.12) et de l'estimation obtenue précédemment. On a :

$$\|T_{r_{m-k+1}} \bar{\partial}_J \omega_{\eta_{[k]}^{\bullet,k-1}}\|_{r_{m-k+2},h+1} \leq 2c \cdot C \cdot \sigma_m^{-s(h)} \cdot \|\omega_{\eta_{[k]}^{\bullet,k}}\|_{r_{m-k+1},h} +$$

$$+ k \cdot C \cdot \sigma_m^{-s(h)} \left(a_h + 2c \cdot \|\eta^{\bullet,k}\|_{r_{m-k+1},h} \right)^2 \leq$$

$$\leq 2c \cdot C \cdot H_k \cdot \sigma_m^{-[2(m-k+1)+1] \cdot s(h)} \cdot a_h^2 +$$

$$+ k \cdot C \cdot \sigma_m^{-s(h)} \left(a_h + 2c \cdot L_k \cdot \sigma_m^{-(m-k+1) \cdot s(h)} \cdot a_h \right)^2$$

ce qui prouve l'estimation (1.5.11) pour l'indice $k - 1$ et donc pour tous les indices $k = 0, \dots, m$. [ici aussi on remarque que les termes quadratiques $(2c)^2 \cdot \|\eta^{\bullet,k}\|_{r_{m-k+1},h}^2$, et donc les termes qui en dérivent

$$\left(2c \cdot L_k \cdot \sigma_m^{-(m-k+1) \cdot s(h)} \cdot a_h \right)^2$$

et qui apparaissent dans l'estimation précédente, sont présents seulement dans le cas $k = 1$. En effet, pour arriver à cette conclusion il suffit de tenir compte de la relation $\omega_{\eta_{[t]}^{\bullet,j}} = \omega^{\bullet,j}$ si $j < t - 1$ dans l'expression (1.5.12). Le cas $k = 1$ est celui pour lequel le "poids" $\sigma_m^{-b(m,k-1,h)}$ figurant dans

l'estimation de la norme $\|T_{r_{m-k+1}} \bar{\partial}_J \omega_{\eta_{[k]}}^{\bullet, k-1}\|_{r_{m-k+2}, h+1}$ est le plus grand]. On est maintenant en position de prouver l'estimation (1.5.9). On pose par définition $\theta^{s,0} := (\mathbb{I}_{p_s} + \eta^{s,0})^{-1} - \mathbb{I}_{p_s} \in M_{p_s, p_s}(\mathcal{E}_X(B_{r_m}))$. Le fait que $\sup_{z \in B_{r(1-\sigma)}} \|\eta^{s,0}(z)\| < \varepsilon < 1$ implique l'égalité

$$\theta^{s,0} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\eta^{s,0})^j$$

(a priori la série précédente est convergente en topologie \mathcal{C}^0 vers l'élément $\theta^{s,0}$ de classe \mathcal{C}^∞ , mais une étude élémentaire plus précise, dont on n'aura pas besoin ici, montre que l'estimation précédente $\sup_{z \in B_{r(1-\sigma)}} \|\eta^{s,0}(z)\| < \varepsilon < 1$ est suffisante pour assurer la convergence de la série en topologie \mathcal{C}^h pour tout h). L'inégalité

$$\|\eta^{s,0}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq L_0 \cdot \sigma_m^{-(m+1) \cdot s(h)} \cdot a_h < \varepsilon < 1/2$$

implique la convergence de la série précédente en topologie $\mathcal{C}^{h+1, \mu}(\bar{B}_{r(1-\sigma)})$ et permet d'effectuer les estimations

$$\|\theta^{s,0}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\eta^{s,0}\|_{r(1-\sigma), h+1}^j \leq 2 \|\eta^{s,0}\|_{r(1-\sigma), h+1}$$

et $\|g_{\bullet}^{\pm 1}\|_{r(1-\sigma), h+1} < 2$. On utilisera ces deux inégalités et l'estimation (1.5.11) obtenue précédemment pour prouver l'estimation (1.5.9) sous la forme plus précise suivante :

$$\|\omega_{\eta}^{\bullet, k}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq R'_k \cdot \sigma_m^{-[(k+2) \cdot m+1] \cdot s(h)} \cdot a_h^2 \quad (1.5.13)$$

où $R'_k = R'_k(C, c) > 0$ est une constante positive. Nous considérons pourtant l'expression suivante de $\omega_{\eta}^{s, k}$, pour tous les indices $k = 0, \dots, m$

$$\begin{aligned} \omega_{\eta}^{s, k} &= g_{s+k}^{-1} \cdot \left(\bar{\partial}_J \eta^{s, k} + \sum_{j=0}^k \omega^{s+j, k-j} \wedge \eta^{s, j} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \eta^{s+j, k-j} \wedge \omega_{\eta}^{s, j} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \eta^{s-1, k+1} \wedge \theta^{s-1, 0} \wedge \omega^{s, -1} + (-1)^k \eta^{s-1, k+1} \wedge g_{s-1}^{-1} \cdot \omega^{s, -1} \wedge \eta^{s, 0} + \omega_{\eta_{[k+1]}}^{s, k} \right) = \\ &= g_{s+k}^{-1} \cdot \left(T_{r_{m-k}} \bar{\partial}_J \omega_{\eta_{[k+1]}}^{s, k} + \sum_{j=0}^k \omega^{s+j, k-j} \wedge \eta^{s, j} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \eta^{s+j, k-j} \wedge \omega_{\eta}^{s, j} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \eta^{s-1, k+1} \wedge \theta^{s-1, 0} \wedge \omega^{s, -1} + (-1)^k \eta^{s-1, k+1} \wedge g_{s-1}^{-1} \cdot \omega^{s, -1} \wedge \eta^{s, 0} \right). \end{aligned}$$

Dans le cas $k = 0$, l'expression précédente s'écrit sous la forme :

$$\omega_{\eta}^{s, 0} = g_s^{-1} \cdot \left(T_{r_m} \bar{\partial}_J \omega_{\eta_{[1]}}^{s, 0} + \omega^{s, 0} \wedge \eta^{s, 0} + \eta^{s-1, 1} \wedge \theta^{s-1, 0} \wedge \omega^{s, -1} + \eta^{s-1, 1} \wedge g_{s-1}^{-1} \cdot \omega^{s, -1} \wedge \eta^{s, 0} \right).$$

On estime maintenant la norme $\|\omega_{\eta}^{s, 0}\|_{r(1-\sigma), h+1}$. L'hypothèse faite sur le poids S_{h+1} implique l'inégalité

$$\|\omega^{s, 0} \wedge \eta^{s, 0}\|_{r(1-\sigma), h+1} \leq 2 \|\omega^{s, 0}\|_{r, h} \cdot \|\eta^{s, 0}\|_{r(1-\sigma), h+1},$$

qui combinée avec les inégalités $\|\theta^{s,0}\|_{r(1-\sigma),h+1} \leq 2\|\eta^{s,0}\|_{r(1-\sigma),h+1}$, $\|g_{\bullet}^{\pm 1}\|_{r(1-\sigma),h+1} < 2$, l'estimation (1.5.10) et l'estimation (1.5.11) pour $k = 0$, prouvée précédemment, donne les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\|\omega_{\eta}^{s,0}\|_{r(1-\sigma),h+1} &\leq 2Q_0 \cdot \sigma_m^{-(2m+1)\cdot s(h)} \cdot a_h^2 + 4\|\omega^{s,0}\|_{r,h} \cdot \|\eta^{s,0}\|_{r(1-\sigma),h+1} + \\
&+ 2c \cdot \|\eta^{s-1,1}\|_{r(1-\sigma),h+1} \cdot \|\theta^{s-1,0}\|_{r(1-\sigma),h+1} + \\
&+ 4c \cdot \|\eta^{s-1,1}\|_{r(1-\sigma),h+1} \cdot \|\eta^{s,0}\|_{r(1-\sigma),h+1} \leq \\
&\leq 2Q_0 \cdot \sigma_m^{-(2m+1)\cdot s(h)} \cdot a_h^2 + 4L_0 \cdot \sigma_m^{-(m+1)\cdot s(h)} \cdot a_h^2 + \\
&+ 4c \cdot L_1 \cdot L_0 \cdot \sigma_m^{-(2m+1)\cdot s(h)} \cdot a_h^2.
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'estimation (1.5.13) dans le cas $k = 0$. On montre maintenant l'estimation quadratique (1.5.13) pour tous les indices à l'aide d'une récurrence croissante sur $k = 0, \dots, m - s$, appliquée à l'expression précédente de la matrice $\omega_{\eta}^{s,k}$ et à l'aide de l'estimation quadratique (1.5.11). On suppose vraie l'estimation (1.5.13) pour tout $j = 0, \dots, k - 1$ et on considère l'estimation suivante dans laquelle on utilise comme précédemment l'hypothèse faite sur le poids S_{h+1} de la norme de Hölder et l'hypothèse $a_h \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\|\omega_{\eta}^{s,k}\|_{r(1-\sigma),h+1} &\leq 2Q_k \cdot \sigma_m^{-[2(m-k)+1]\cdot s(h)} \cdot a_h^2 + \\
&+ 4 \sum_{j=0}^k \|\omega^{s+j,k-j}\|_{r,h} \cdot \|\eta^{s,j}\|_{r(1-\sigma),h+1} + \\
&+ \sum_{j=0}^{k-1} \|\eta^{s+j,k-j}\|_{r(1-\sigma),h+1} \cdot \|\omega_{\eta}^{s,j}\|_{r(1-\sigma),h+1} + \\
&+ 8c \cdot \|\eta^{s-1,k+1}\|_{r(1-\sigma),h+1} \cdot \|\eta^{\bullet,0}\|_{r(1-\sigma),h+1} \leq \\
&\leq (2Q_k + 4(k+1) \cdot L) \cdot \sigma_m^{-(2m+1)\cdot s(h)} \cdot a_h^2 + \\
&+ \sum_{j=0}^{k-1} (L_{k-j} \cdot R'_j) \cdot \sigma_m^{-[m+(j+2)\cdot m+1]\cdot s(h)} \cdot a_h^2 + \\
&+ 8c \cdot L_{k+1} \cdot L_0 \cdot \sigma_m^{-(2m+1)\cdot s(h)} \cdot a_h^2.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité implique évidemment l'estimation (1.5.13) et donc l'estimation (1.5.9), ce qui prouve la proposition 1.5.3. \square

Bon fonctionnement du procédé itératif

Dans cette partie on va établir les hypothèses qui permettent d'appliquer l'estimation fondamentale (1.5.9) à une étape quelconque du procédé itératif. On commence par préciser les paramètres qui contrôleront les étapes de la convergence rapide. Pour cela on définit d'abord les

paramètres $\sigma_k := e^{-k-2}$ qui contrôleront les restrictions des rayons des boules, lesquels sont définis de façon récursive par la formule $r_{k+1} := r_k(1 - \sigma_k)$ pour tout entier $k \geq 0$. Bien évidemment le rayon limite

$$r_\infty := \lim_{k \rightarrow +\infty} r_k = r_0 \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \sigma_k)$$

est non nul étant donné que $-\sum_{k=0}^{\infty} \log(1 - \sigma_k) \leq Cst \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k < \infty$. Ensuite on désigne par $r(k, l) := r_k(1 - l \cdot \sigma_{m,k})$, $l = 0, \dots, m + 1$ où $\sigma_{m,k} := \sigma_k / (m + 1)$. Pour le choix du rayon initial on considère les suites numériques

$$\alpha_k(r) := a_0(r)^{2^k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} H^{2^{k-1-j}} \cdot \sigma_j^{-\nu(m,j) \cdot 2^{k-1-j}},$$

$$\beta_k(r) := b_0(r)^{2^k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} P^{2^{k-1-j}} \cdot e^{-\gamma(m,j) \cdot 2^{k-1-j}}$$

où $b_0(r) := H \cdot \sigma_{m,0}^{-(m+1) \cdot s(0)} \cdot a_0(r)$, $H > 0$, $P > 0$ sont deux constantes (dépendantes seulement de m) et $\gamma(m, j)$ est une fonction affine strictement croissante en j . On rappelle que par définition de la norme de Hölder on a que la quantité $a_0 = a_0(r)$ tend vers zéro lorsque $r > 0$ tend vers zéro. Avant de faire le choix du rayon initial on a besoin du lemme élémentaire suivant.

Lemme 1.5.5.0 *Il existe $\rho \in (0, 1)$ tel que ;*

(A), *pour tout $r \in (0, \rho]$ les séries numériques $\sum_{k \geq 0} \alpha_k(r)$ et $\sum_{k \geq 0} \beta_k(r)$ sont convergentes.*

(B)

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(r) = 0$$

(C), *pour tout $r \in (0, \rho]$ et entier $k \geq 0$ on a les inégalités $\alpha_k(r) \leq 1$ et $\beta_k(r) < \varepsilon$*

Preuve. Par le critère du rapport il suffit de vérifier que les suites $\ln(\alpha_{k+1}/\alpha_k)$ et $\ln(\beta_{k+1}/\beta_k)$ tendent vers $-\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$. En explicitant les logarithmes on a :

$$\ln(\alpha_{k+1}/\alpha_k) = 2^k \cdot \left(\ln a_0(\rho) + 2^{-1}(\ln H) \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j} - 2^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \nu(m, j) 2^{-j} \ln \sigma_{m,j} \right) -$$

$$-\nu(m, k) \ln \sigma_{m,k} + \ln H$$

$$\ln(\beta_{k+1}/\beta_k) = 2^k \cdot \left(\ln b_0(\rho) + 2^{-1}(\ln P) \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j} + 2^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \gamma(m, j) 2^{-j} \right) + \gamma(m, k) + \ln P.$$

Il suffit donc de choisir $\rho > 0$ suffisamment petit pour assurer les inégalités

$$\ln a_0(\rho) + 2^{-1}(\ln H) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} + 2^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \nu(m, j) [j + 2 + \ln(m + 1)] 2^{-j} < 0,$$

$$\ln b_0(\rho) + 2^{-1}(\ln P) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} + 2^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(m, j) 2^{-j} < 0$$

(se rappeler la définition de σ_j). On aura alors la convergence voulue pour les suites $\ln(\alpha_{k+1}/\alpha_k)$ et $\ln(\beta_{k+1}/\beta_k)$. Le fait que pour tout entier $k \geq 0$ les quantités $\alpha_k(r)$ et $\beta_k(r)$ tendent monotonement vers zéro lorsque r tend vers zéro, implique par le théorème de la convergence dominée les conclusions (B) et (C) du lemme. \square

D'après le lemme précédent on peut choisir le rayon initial $r_0 \in (0, \rho]$ de telle sorte que l'inégalité $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(r_0) < 1/2 + 1/(4 \ln 2)$ soit satisfaite. Dans la suite on notera $\alpha_k := \alpha_k(r_0)$ et $\beta_k := \beta_k(r_0)$. On définit maintenant le paramètre η_{k+1} , qui contrôle la recalibration des calibrations ω_k , $k \geq 0$ au k -ième pas du procédé itératif (on désigne avec $\omega_0 = \omega$ le choix initial de ω associée au système différentiel (S_ω)), de la façon suivante ; on définit récursivement en ordre décroissant sur $t = m, \dots, 0$ les matrices

$$\eta_{k+1}^{s,t} := -T_{r(k,m-t)} \left(\omega_k^{s,t} + \omega_k^{s+t+1,-1} \wedge \eta_{k+1}^{s,t+1} + (-1)^t \eta_{k+1}^{s-1,t+1} \wedge \omega_k^{s,-1} \right) \in M_{p_{s+t}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,t}(B_{r(k,m-t)}))$$

et on pose $\eta_{k+1} := (\eta_{k+1}^{s,t})_{s,t} \in \mathcal{P}(\bar{B}_{r(k,m)})$. On va justifier ensuite l'estimation $\sup_{z \in B_r} \|\eta_{k+1}^{s,0}(z)\| < \varepsilon$ qui assure l'inversibilité de la matrice $g_{s,k+1}$. On définit alors les matrices $\omega_{k+1}^{s,t} := \omega_{k, \eta_{k+1}}^{s,t} \in M_{p_{s+k}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,t+1}(\bar{B}_{r_{k+1}}))$ pour tout $t = -1, \dots, m$. Les constantes R_k, L_k qui apparaissent dans la définition des poids $S = (S_k)_{k \geq 0}$ de la norme de Hölder sont définies par les formules :

$$R_{k+1} := \max\{\|\omega_{k,I}^{s,t}\|_{r_k, \mu} / \|\partial^{k+1} \omega_{k,I}^{s,t}\|_{r_k, \mu} \mid 0 \leq s \leq m, 0 \leq t \leq m-s, |I| = t+1\},$$

$$L_{k+1} := \max\{2^{-k-1} \|g_s(k)^{\pm 1}\|_{r_k, \mu} / \|\partial^{k+1} g_s(k)^{\pm 1}\|_{r_k, \mu} \mid 0 \leq s \leq m\}$$

pour tout entier $k \geq 0$. Ici on suppose que $\max\{\|\omega_{k,I}^{s,t}\|_{r_k, \mu} \mid 0 \leq s \leq m, 0 \leq t \leq m-s, |I| = t+1\} > 0$, autrement il n'y a rien à prouver. Avec ce choix des poids $S_k > 0$ on aura que les inégalités

$$S_{k+1} \|\partial^{k+1} \omega_{k,I}^{\bullet,t}\|_{r_k, \mu} \leq \|\omega_{k,I}^{\bullet,t}\|_{r_k, \mu}, \quad (1.5.14)$$

$$S_{k+1} \|\partial^{k+1} g_\bullet(k)^{\pm 1}\|_{r_k, \mu} \leq 2^{-k-1} \|g_\bullet(k)^{\pm 1}\|_{r_k, \mu} \quad (1.5.15)$$

seront satisfaites pour tout entier $k \geq 0$ et $t = 0, \dots, m$. On pose par définition

$$a_k := \max\{\|\omega_k^{s,t}\|_{r_k, k} \mid 0 \leq s \leq m, 0 \leq t \leq m-s\},$$

$b_k := H \cdot \sigma_{m,k}^{-(m+1) \cdot s(k)} \cdot a_k$ et $c \equiv c(\omega_0)$. Avec les notations introduites précédemment on a la proposition suivante.

Proposition 1.5.4 *Pour tout entier $k \geq 0$ on a les estimations suivantes ;*

$$a_{k+1} \leq H \cdot \sigma_{m,k}^{-\nu(m,k)} \cdot a_k^2 \leq 1, \quad (1.5.16)$$

$$\|\eta_{k+1}^{s,t}\|_{r_{k+1}, k+1} \leq b_k < \varepsilon < 1/2, \quad (1.5.17)$$

$$\|\omega_{k+1}^{s,-1}\|_{r_{k+1}, k+1} \leq 4c \quad (1.5.18)$$

où $H := \max\{R(C, 4c), L(C, 4c)\} > 0$ et les inégalités $a_k \leq \alpha_k, b_k \leq \beta_k$.

Preuve. On montre les trois estimations précédentes à l'aide d'une récurrence sur $k \geq 0$. Pour $k = 0$ on a d'après le lemme 1.5.5.0, la validité des inégalités $\alpha_0(r) \leq 1$ et $\beta_0(r) < \varepsilon < 1/2$. On

est donc en position d'appliquer la proposition 1.5.3, qui assure les inégalités (1.5.16) et (1.5.17) pour $k = 0$. On obtient alors l'estimation $\|\eta_1^{\bullet,0}\|_{r_{1,1}} < 1/2$ laquelle, pour les calculs faits dans la preuve de la proposition 1.5.3, assure les inégalités $\|g_{\bullet,1}^{\pm 1}\|_{r_{1,1}} < 2$. Ces inégalités assurent donc l'estimation (1.5.18) pour $k = 0$, car

$$\|\omega_1^{s,-1}\|_{r_{1,1}} \leq \|g_{s-1,1}^{-1}\|_{r_{1,1}} \cdot \|\omega^{s,-1}\|_{r_{1,1}} \cdot \|g_{s,1}\|_{r_{1,1}}.$$

Supposons maintenant par hypothèse récursive que les estimations (1.5.16), (1.5.17) et (1.5.18), sont vraies pour tout $l = 0, \dots, k-1$. L'inégalité (1.5.16) implique alors l'inégalité

$$b_{l+1} \leq P \cdot e^{\gamma(m,l)} \cdot b_l^2$$

pour les indices en question. On obtient donc les inégalités $a_l \leq \alpha_l \leq 1$, $b_l \leq \beta_l < \varepsilon$. Le fait que par hypothèse inductive on dispose de l'estimation $\|\omega_k^{\bullet,-1}\|_{r_k,k} < 4c$ permet alors d'appliquer la proposition 1.5.3 qui assure la validité des estimations (1.5.16) et (1.5.17) pour $l = k$. En particulier l'estimation (1.5.17) assure la validité de l'estimation

$$\|\eta_{k+1}^{\bullet,0}\|_{r_{k+1},k+1} \leq \beta_k < \varepsilon < 1/2.$$

On passe maintenant à l'estimation des normes $\|\omega_{k+1}^{s,-1}\|_{r_{k+1},k+1}$. On a par définition des matrices $\omega_{k+1}^{s,-1}$ l'estimation

$$\|\omega_{k+1}^{s,-1}\|_{r_{k+1},k+1} \leq \|g_{s-1}(k+1)^{-1}\|_{r_{k+1},k+1} \cdot \|\omega^{s,-1}\|_{r_{k+1},k+1} \cdot \|g_s(k+1)\|_{r_{k+1},k+1}.$$

La condition (1.5.15) sur les poids implique que pour tout $k \geq 0$ on dispose de l'inégalité

$$\|g_s(k+1)^{\pm 1}\|_{r_{k+1},k+1} \leq (1 + 2^{-k-1}) \cdot \|g_{s,k+1}^{\pm 1}\|_{r_{k+1},k+1} \cdot \|g_s(k)^{\pm 1}\|_{r_k,k}.$$

L'hypothèse inductive nous permet alors d'effectuer les estimations suivantes pour $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \|g_s(k+1)^{\pm 1}\|_{r_{k+1},k+1} &\leq \prod_{j=2}^{k+1} (1 + 2^{-j}) \cdot \prod_{j=1}^{k+1} \|g_{s,j}^{\pm 1}\|_{r_j,j} \leq \\ &\leq \sqrt{e} \cdot \prod_{j=1}^{k+1} (1 \pm \|\eta_j^{s,0}\|_{r_j,j})^{\pm 1} \leq \sqrt{e} \cdot \exp\left(2(\ln 2) \sum_{j=1}^{k+1} \|\eta_j^{s,0}\|_{r_j,j}\right) \leq \\ &\leq \sqrt{e} \cdot \exp\left(2(\ln 2) \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j\right) < 2 \end{aligned}$$

(rappeler le choix initial du rayon r_0). On obtient donc l'estimation voulue $\|\omega_{k+1}^{s,-1}\|_{r_{k+1},k+1} \leq 4c$, ce qui conclut la preuve des trois estimations (1.5.16), (1.5.17) et (1.5.18) pour $j = k$ et donc pour tout entier positif k . \square

Preuve de la convergence vers une solution du problème différentiel (S_ω)

Avec les notations introduites précédemment on a la proposition suivante.

Proposition 1.5.5 . *Les limites*

$$\eta^{s,t} := \lim_{k \rightarrow \infty} \eta(k)^{s,t}$$

$s = 0, \dots, m$, $t = 0, \dots, m-s$ existent en topologie $\mathcal{C}^{h,\mu}(B_{r_\infty})$ pour tout $h \geq 0$ et elles constituent les composantes du paramètre de recalibration $\eta = (\eta^{s,t})_{s,t} \in \mathcal{P}(B_{r_\infty})$, solution du problème différentiel (S_ω).

Preuve. Nous commençons par prouver l'existence des limites

$$g_s := \overrightarrow{\prod}_{j \geq 1} g_{s,j} = \lim_{k \rightarrow \infty} g_s(k) = \mathbb{I}_{p_s} + \lim_{k \rightarrow \infty} \eta(k)^{s,0}$$

en topologie $\mathcal{C}^{h,\mu}(B_{r_\infty})$ pour $h \geq 0$ quelconque et le fait que les matrices g_s sont inversibles. On aura alors $\eta^{s,0} = g_s - \mathbb{I}_{p_s}$. On déduit immédiatement de la proposition 1.5.4 les estimations $\|\eta_k^{\bullet,\bullet}\|_{r_\infty,h} < \beta_k < 1/2$ et $\|g_\bullet(k)^{\pm 1}\|_{r_\infty,h} < 2$ pour tout $k \geq h$. Le fait que $g_s(k+1) - g_s(k) = \eta_{k+1}^{s,0} \cdot g_s(k)$ implique les estimations suivantes :

$$\|g_s(k+1) - g_s(k)\|_{r_\infty,h} \leq \|\eta_{k+1}^{s,0}\|_{r_\infty,h} \cdot \|g_s(k)\|_{r_\infty,h} \leq 2\|\eta_{k+1}^{s,0}\|_{r_\infty,h} \leq 2\beta_k$$

pour tout $k \geq h$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|g_s(k+1) - g_s(k)\|_{r_\infty,h} \leq \sum_{k=0}^h \|g_s(k+1) - g_s(k)\|_{r_\infty,h} + 2 \cdot \sum_{k=h+1}^{\infty} \beta_k < \infty$$

et donc l'existence des matrices $g_s \in \mathcal{C}^{h,\mu}(B_{r_\infty}, M_{p_s,p_s}(\mathbb{C}))$ pour tout $h \geq 0$ telles que

$$g_s = \lim_{k \rightarrow \infty} g_s(k) = \mathbb{I}_{p_s} + \sum_{k=0}^{\infty} (g_s(k+1) - g_s(k))$$

en topologie $\mathcal{C}^{h,\mu}(B_{r_\infty})$. D'autre part l'égalité

$$g_s(k+1)^{-1} - g_s(k)^{-1} = g_s(k)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\eta_{k+1}^{s,0})^j$$

permet d'effectuer les estimations suivantes :

$$\|g_s(k+1)^{-1} - g_s(k)^{-1}\|_{r_\infty,h} \leq \|g_s(k)^{-1}\|_{r_\infty,h} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|\eta_{k+1}^{s,0}\|_{r_\infty,h}^j \leq 4\|\eta_{k+1}^{s,0}\|_{r_\infty,h} \leq 4\beta_k$$

pour tout $k \geq h$, lesquelles assurent la convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|g_s(k+1)^{-1} - g_s(k)^{-1}\|_{r_\infty,h} \leq \sum_{k=0}^h \|g_s(k+1)^{-1} - g_s(k)^{-1}\|_{r_\infty,h} + 4 \cdot \sum_{k=h+1}^{\infty} \beta_k < \infty,$$

ce qui prouve l'existence des matrices $\rho_s \in \mathcal{C}^{h,\mu}(B_{r_\infty}, M_{p_s,p_s}(\mathbb{C}))$ telles que $\rho_s = \lim_{k \rightarrow \infty} g_s(k)^{-1}$ en topologie $\mathcal{C}^{h,\mu}(B_{r_\infty})$, pour tout $h \geq 0$. On a alors l'égalité $\mathbb{I}_{p_s} = \lim_{k \rightarrow \infty} g_s(k) \cdot g_s(k)^{-1} = g_s \cdot \rho_s$, qui montre que $g_s \in GL(p_s, \mathcal{E}(B_{r_\infty}))$ et $\rho_s = g_s^{-1}$. Montrons maintenant l'existence des limites $\eta^{s,t}$ pour $t \geq 1$. En rappelant l'expression des composantes $\eta(k)^{s,t}$, $t \geq 1$, du paramètre $\eta(k)$ introduite dans la sous-section 1.5.1 et en tenant compte de l'existence de la limite $g \in \Gamma(U)$ prouvée précédemment, on déduit qu'il suffit de prouver l'existence des limites

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{J \in J_k(\rho(\tau))} \bigwedge_{1 \leq r \leq \rho(\tau)} g_{s+\sigma'(\tau,r)}(j_r - 1) \cdot \eta_{j_r}^{s+\sigma(\tau,r), \tau\rho(\tau)+1-r} \cdot g_{s+\sigma(\tau,r)}(j_r)^{-1}$$

$\tau \in \Delta_t$, $t \geq 1$ en topologie $\mathcal{C}^{h,\mu}(B_{r_\infty})$, avec $h \geq 0$ quelconque, pour obtenir l'existence de la limite $\eta^{s,t} \in M_{p_{s+t}, p_s}(\mathcal{E}_X^{0,t}(B_{r_\infty}))$. Il suffit donc de prouver que pour tout $h \geq \rho(\tau)$ la limite

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{J \in J_k(\rho(\tau))} \prod_{r=1}^{\rho(\tau)} \|g_\bullet(j_r - 1) \cdot \eta_{j_r}^{\bullet, \bullet} \cdot g_\bullet(j_r)^{-1}\|_{r_\infty, h} = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l+p=\rho(\tau) \\ l, p \geq 0}} \sum_{I \in J_h(l)} \prod_{r=1}^l \|g_\bullet(i_r - 1) \cdot \eta_{i_r}^{\bullet, \bullet} \cdot g_\bullet(i_r)^{-1}\|_{r_\infty, h} \times \\ & \quad \times \sum_{I \in J_{h,k}(p)} \prod_{r=1}^p \|g_\bullet(j_r - 1) \cdot \eta_{j_r}^{\bullet, \bullet} \cdot g_\bullet(j_r)^{-1}\|_{r_\infty, h} \end{aligned}$$

est finie. Ici on pose par définition $J_{h,k}(p) := \{J \in \{h+1, \dots, k\}^p \mid j_1 < \dots < j_p\}$, $J_h(0) = J_{h,k}(0) := \emptyset$, (rappeler qu'on utilise la convention qui consiste à négliger les symboles de somme et de produit si l'ensemble d'indices sur lequel on effectue ces opérations est vide). On considère pourtant les estimations suivantes pour $1 \leq p \leq \rho(\tau)$

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{I \in J_{h,k}(p)} \prod_{r=1}^p \|g_\bullet(j_r - 1)\|_{r_\infty, h} \cdot \|\eta_{j_r}^{\bullet, \bullet}\|_{r_\infty, h} \cdot \|g_\bullet(j_r)^{-1}\|_{r_\infty, h} < \\ & < 4^p \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{J \in J_{h,k}(p)} \prod_{r=1}^p \beta_{j_r - 1} < 4^p \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{J \in J_{h,k}(p)} \beta_{j_p - 1} = 4^p \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=h+p}^k \binom{j-h-1}{p-1} \cdot \beta_{j-1} < \infty. \end{aligned}$$

La dernière limite est finie par le critère du rapport, rappeler en fait que $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k+1}/\beta_k = 0$, d'après la preuve du lemme 1.5.5.0. On a donc prouvé l'existence du paramètre limite $\eta \in \mathcal{P}(B_{r_\infty})$. Prouvons maintenant qu'il constitue une solution (de classe \mathcal{C}^∞) pour le problème différentiel (S_ω) . En effet l'existence de la limite η en topologie $\mathcal{C}^{h,\mu}(B_{r_\infty})$, pour $h \geq 1$ implique les égalités

$$\omega_\eta^{s,t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{\eta(k)}^{s,t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k^{s,t}$$

en topologie $\mathcal{C}^{h-1,\mu}(B_{r_\infty})$. En rappelant l'inégalité $a_k \leq \alpha_k$ obtenue dans la preuve de la proposition 1.5.4 on obtient

$$\|\omega_\eta^{s,t}\|_{r_\infty, 0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega_k^{s,t}\|_{r_\infty, 0} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0,$$

ce qui prouve que $\eta \in \mathcal{P}(B_{r_\infty})$ est une solution du système différentiel

$$\begin{cases} \omega_\eta^{s,t} = 0 \\ s = 0, \dots, m \\ t = 0, \dots, m - s \end{cases}$$

qui n'est rien d'autre que le système différentiel (S_ω) . □

1.5.6 Cinquième étape : fin de la preuve du théorème 1.1.8

L'étape précédente montre qu'on peut se ramener à considérer le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & (Ker\bar{\partial})|_V & \longrightarrow & \mathcal{G}|_V & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}|_V \otimes_{\mathcal{E}_V} \mathcal{E}_V^{0,1} \\
 & & \uparrow \tilde{\psi}|_{\cdot} & & \uparrow \tilde{\psi} & & \uparrow \tilde{\psi} \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_V^{\oplus p_0} & \longrightarrow & \mathcal{E}_V^{\oplus p_0} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_V^{0,1})^{\oplus p_0} \\
 & & \uparrow \tilde{\varphi}|_{\cdot} & & \uparrow \tilde{\varphi} & & \uparrow \tilde{\varphi} \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_V^{\oplus p_1} & \longrightarrow & \mathcal{E}_V^{\oplus p_1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_J} & (\mathcal{E}_V^{0,1})^{\oplus p_1}
 \end{array}$$

avec $V := B_{r_\infty}$, $\tilde{\psi} := \psi_g$ et $\tilde{\varphi} := \varphi_{1,g}$. Ce diagramme est exact, sauf pour l'instant au niveau des premières flèches verticales à gauche. Pour conclure il nous reste donc à montrer l'exactitude de la suite

$$\mathcal{O}_V^{\oplus p_1} \xrightarrow{\tilde{\varphi}|_{\cdot}} \mathcal{O}_V^{\oplus p_0} \xrightarrow{\tilde{\psi}|_{\cdot}} (Ker\bar{\partial})|_V \rightarrow 0$$

On identifie $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{p_1})$, on désigne par $\tilde{\varphi}_l^k \in \mathcal{O}_X(V)$ la k -ème composante de $\tilde{\varphi}_l$, et on pose par définition

$$a_{k,x} := \mathcal{O}_x \tilde{\varphi}_{1,x}^k + \dots + \mathcal{O}_x \tilde{\varphi}_{p_1,x}^k \triangleleft \mathcal{O}_x$$

Le fait que $(a_{k,x} \cdot \mathcal{E}_x) \cap \mathcal{O}_x = a_{k,x}$ (par définition de fidélité plate de l'anneau \mathcal{E}_x sur l'anneau \mathcal{O}_x . On peut aussi déduire l'égalité précédente en utilisant un résultat beaucoup plus simple, i.e la fidélité plate de l'anneau des séries formelles $\mathcal{E}_x/m^\infty(\mathcal{E}_x) = \hat{\mathcal{O}}_x$ en x , sur l'anneau \mathcal{O}_x (voir[Mal-1])) implique la surjectivité du morphisme

$$\tilde{\varphi}|_{\cdot} : \mathcal{O}_V^{\oplus p_1} \longrightarrow \mathcal{R}^{\mathcal{O}}(\tilde{\psi})$$

où $\mathcal{R}^{\mathcal{O}}(\tilde{\psi}) = \mathcal{R}^{\mathcal{E}}(\tilde{\psi}) \cap \mathcal{O}_V^{\oplus p_0}$ désigne le faisceau des relations holomorphes de $\tilde{\psi}$. On pose par définition

$$\mathcal{F} := Im(\tilde{\psi}|_{\cdot} : \mathcal{O}_V^{\oplus p_1} \longrightarrow (Ker\bar{\partial})|_V)$$

L'exactitude de la suite

$$\mathcal{O}_V^{\oplus p_1} \xrightarrow{\tilde{\varphi}|_{\cdot}} \mathcal{O}_V^{\oplus p_0} \xrightarrow{\tilde{\psi}|_{\cdot}} \mathcal{F} \rightarrow 0$$

implique la cohérence du faisceau \mathcal{F} . Considérons maintenant le morphisme de faisceaux de \mathcal{E} -modules $\alpha : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{E}_V \longrightarrow \mathcal{G}|_V$, défini par la loi

$$\alpha : \sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \otimes_{\mathcal{O}_y} f_{k,y} \mapsto \sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \cdot f_{k,y},$$

$f_{k,y} \in \mathcal{E}_y$. Le morphisme en question est bien évidemment surjectif. Il est aussi injectif, en effet soient $f_{k,y} \in \mathcal{E}_y$ telles que

$$\sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \cdot f_{k,y} = 0.$$

L'exactitude de la suite

$$\mathcal{E}_V^{\oplus p_1} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} \mathcal{E}_V^{\oplus p_0} \xrightarrow{\tilde{\psi}_1} \mathcal{G}|_V \rightarrow 0$$

implique l'existence de germes de fonctions $u_{1,y}, \dots, u_{p_1,y} \in \mathcal{E}_y$ tels que

$$f_{k,y} = \sum_{l=1}^{p_1} \tilde{\varphi}_{l,y}^k \cdot u_{l,y}.$$

On a alors les égalités

$$\sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \otimes_{\mathcal{O}_y} f_{k,y} = \sum_{k=1}^{p_0} \sum_{l=1}^{p_1} \tilde{\psi}_{k,y} \otimes_{\mathcal{O}_y} \tilde{\varphi}_{l,y}^k \cdot u_{l,y} = \sum_{l=1}^{p_1} \left(\sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \cdot \tilde{\varphi}_{l,y}^k \right) \otimes_{\mathcal{O}_y} u_{l,y}$$

Le fait que

$$\sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \cdot \tilde{\varphi}_{l,y}^k = 0$$

implique l'injectivité du morphisme α lequel est donc un isomorphisme. Les égalités

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{\mathcal{F}} \left(\sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \otimes_{\mathcal{O}_y} f_{k,y} \right) &= \sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \otimes_{\mathcal{O}_y} \bar{\partial}_J f_{k,y} \cong \sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \otimes_{\mathcal{E}_y} \bar{\partial}_J f_{k,y} \\ \bar{\partial} \left(\sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \cdot f_{k,y} \right) &= \sum_{k=1}^{p_0} \tilde{\psi}_{k,y} \otimes_{\mathcal{E}_y} \bar{\partial}_J f_{k,y} \end{aligned}$$

impliquent la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}|_V & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{G}|_V \otimes_{\mathcal{E}_V} \mathcal{E}_V^{0,1} \\ \alpha \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{E}_V & \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{E}_V^{0,1} \simeq \mathcal{F}^\infty \otimes_{\mathcal{E}_V} \mathcal{E}_V^{0,1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \swarrow \alpha \otimes \mathbb{I}_{(0,1)} \\ \end{array}$$

Le fait que le faisceau \mathcal{F} soit analytique cohérent implique, par les remarques faites dans la section 1.1, (remarques qui utilisent de façon essentielle la platitude de l'anneau \mathcal{E}_x sur l'anneau \mathcal{O}_x) que $\mathcal{F} = \text{Ker} \bar{\partial}_{\mathcal{F}}$. La commutativité du diagramme précédent montre alors que $\mathcal{F} = (\text{Ker} \bar{\partial})|_V$, ce qui démontre le théorème 1.1.8. \square

Remarque. Dans la situation en examen la platitude de l'anneau \mathcal{E}_x sur l'anneau \mathcal{O}_x n'est pas nécessaire pour prouver que $\text{Ker} \bar{\partial}$ est un faisceau analytique cohérent. En effet la quatrième étape montre l'existence des éléments $\tilde{\psi}, \tilde{\varphi}_k, k = 1, \dots, m$ tels que $\bar{\partial} \tilde{\psi} = 0, \bar{\partial}_J \tilde{\varphi}_k = 0$. La platitude de l'anneau des séries formelles $\mathcal{E}_x / m^\infty(\mathcal{E}_x) = \hat{\mathcal{O}}_x$ en x sur l'anneau \mathcal{O}_x implique alors l'exactitude du complexe

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_V^{\oplus p_m} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_m} \mathcal{O}_V^{\oplus p_{m-1}} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{m-1}} \dots \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} \mathcal{O}_V^{\oplus p_1} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} \mathcal{O}_V^{\oplus p_0} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{F} := \text{Im}(\tilde{\psi} : \mathcal{O}_V^{\oplus p_1} \rightarrow (\text{Ker} \bar{\partial})|_V)$. De plus on dispose des suites exactes

$$0 \rightarrow (\mathcal{E}_V^{0,q})^{\oplus p_m} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_m} (\mathcal{E}_V^{0,q})^{\oplus p_{m-1}} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{m-1}} \dots \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} (\mathcal{E}_V^{0,q})^{\oplus p_1} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} (\mathcal{E}_V^{0,q})^{\oplus p_0} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{G}|_V \otimes_{\mathcal{E}_V} \mathcal{E}_V^{0,q} \rightarrow 0,$$

pour tout $q \geq 0$. Le même argument récursif utilisé pour prouver l'exactitude du complexe

$$(\mathcal{F}_{|V}^\infty \otimes_{\mathcal{E}_V} \mathcal{E}_V^{0,q}; \bar{\partial}_{\mathcal{F}})_{q \geq 0}$$

dans la section 1.1, (avec $\mathcal{G}_{|V}$ à la place de $\mathcal{F}_{|V}^\infty$ et $\bar{\partial}$ à la place de $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$) montre en particulier que $\mathcal{F} = (Ker \bar{\partial})_{|V}$, ce qui prouve la cohérence du faisceau $Ker \bar{\partial}$. Les faits que $\mathcal{G} \cong (Ker \bar{\partial}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$ et que la connexion $\bar{\partial}$ coïncide, à isomorphisme canonique près, avec l'extension naturelle $\bar{\partial}_{Ker \bar{\partial}}$ associée au faisceau analytique cohérent $Ker \bar{\partial}$ découlent immédiatement des arguments de la cinquième étape qui n'utilisent pas la platitude de l'anneau \mathcal{E}_x sur l'anneau \mathcal{O}_x . A la fin de la cinquième étape on utilise la platitude de l'anneau \mathcal{E}_x sur l'anneau \mathcal{O}_x pour prouver la cohérence du faisceau $Ker \bar{\partial}$, (en effet pour montrer que $\mathcal{F} = Ker \bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ on utilise de façon essentielle la platitude de l'anneau \mathcal{E}_x sur l'anneau \mathcal{O}_x) car on peut considérer la situation plus générale dans laquelle on dispose seulement de la suite exacte

$$\mathcal{E}_V^{\oplus p_1} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathcal{E}_V^{\oplus p_0} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{G}_{|V} \rightarrow 0,$$

avec $\bar{\partial} \tilde{\psi} = 0$ et $\bar{\partial}_J \tilde{\varphi} = 0$. Cette situation est vérifiée sous les hypothèses du corollaire 1.6.1 de la section suivante, dont la conclusion est assurée par l'argument exposé dans la cinquième étape.

1.6 Faisceaux $\bar{\partial}$ -cohérents sur les courbes holomorphes lisses

Soit X une variété complexe de dimension un et $\omega^{0,0} \in M_{p_0, p_0}(\mathcal{E}_X^{0,1}(U))$ une matrice à coefficients $(0,1)$ -formes définie sur un ouvert $U \subseteq X$. Les considérations faites dans la sous-section 1.2.2 montrent que pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert V de x et un élément $\eta^{0,0} \in M_{p_0, p_0}(\mathcal{E}_X(V))$ tel que $\mathbb{I}_{p_0} + \eta^{0,0} \in GL(p_0, \mathcal{E}(V))$, qui soit solution de l'équation différentielle

$$(S_\omega) : \bar{\partial}_J \eta^{0,0} + \omega^{0,0} \cdot \eta^{0,0} + \omega^{0,0} = 0.$$

Les considérations faites dans les sous-sections 1.4.3 et 1.5.6 impliquent immédiatement la conclusion suivante.

Corollaire 1.6.1 *Soit X une variété complexe de dimension un et soit \mathcal{G} un faisceau de \mathcal{E}_X -modules qu'on suppose muni d'une connexion $\bar{\partial} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ de type $(0,1)$. Si de plus le faisceau \mathcal{G} admet des \mathcal{E} -présentations locales, alors le faisceau de \mathcal{O}_X -modules $Ker \bar{\partial} \subset \mathcal{G}$ est analytique cohérent, on a les égalités $\mathcal{G} = (Ker \bar{\partial}) \cdot \mathcal{E}_X \cong (Ker \bar{\partial}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$ et la connexion $\bar{\partial}$ coïncide, à isomorphisme canonique près, avec l'extension naturelle $\bar{\partial}_{Ker \bar{\partial}}$ associée au faisceau analytique cohérent $Ker \bar{\partial}$.*

La remarque précédente implique aussi le corollaire suivant.

Corollaire 1.6.2 *Soit X une variété complexe de dimension un, $F \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe sur X et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}(F)$ un sous-faisceau de \mathcal{E} -modules localement de type fini et $\bar{\partial}_F$ -stable (autrement dit on a l'inclusion $\bar{\partial}_F \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$), où*

$$\bar{\partial}_F := \mathbb{I}_{\mathcal{O}(F)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \bar{\partial}_J : \mathcal{E}(F) \rightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$$

désigne la connexion canonique associée au faisceau $\mathcal{O}(F)$. Alors le faisceau de \mathcal{O}_X -modules $\mathcal{G} \cap \mathcal{O}(F)$ est analytique cohérent et $(\mathcal{G} \cap \mathcal{O}(F)) \cdot \mathcal{E}_X = \mathcal{G}$, (autrement dit le faisceau $\mathcal{G} \cap \mathcal{O}(F)$ est un \mathcal{O} -module localement de type fini et ses générateurs locaux sur \mathcal{O}_X sont aussi des générateurs locaux du faisceau \mathcal{G} sur \mathcal{E}_X).

Un faisceau $\bar{\partial}$ -cohérent sur une variété complexe de dimension un est simplement un couple $(\mathcal{G}, \bar{\partial}) \equiv \mathcal{G}_{\bar{\partial}}$ où \mathcal{G} est un faisceau de \mathcal{E}_X -modules admettant des \mathcal{E} -présentations locales et $\bar{\partial} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ une connexion de type $(0, 1)$, (bien évidemment en dimension un toutes les connexions de type $(0, 1)$ sont intégrables).

1.7 Un résultat d'intégrabilité des connexions sur les faisceaux de \mathcal{E} -modules au dessus d'une variété différentiable

Le présent travail s'est situé principalement dans le cadre complexe car c'était notre principal intérêt. Toutefois, il est possible de déduire aussi un résultat d'intégrabilité dans le cas des variétés \mathcal{C}^∞ . Considérons en effet (X, \mathcal{E}_X) une variété \mathcal{C}^∞ ($\mathcal{E}_X \equiv \mathcal{E}_X(\mathbb{R})$ représente ici le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs réelles) et $D : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}(T_X^*)$ une connexion sur le faisceau de $\mathcal{E}_X(\mathbb{K})$ -modules \mathcal{G} où $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Si le faisceau des sections parallèles $\text{Ker} D$ engendre \mathcal{G} sur $\mathcal{E}_X(\mathbb{K})$ alors évidemment $D^2 = 0$. Le théorème suivant donne une réciproque de ce fait dans un cas particulier.

Théorème 1.7.1 *Soit (X, \mathcal{E}_X) une variété différentiable et soit \mathcal{G} un faisceau de $\mathcal{E}_X(\mathbb{K})$ -modules, muni d'une connexion $D : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}(T_X^*)$ telle que $D^2 = 0$. Si de plus le faisceau \mathcal{G} admet localement une $\mathcal{E}(\mathbb{K})$ -résolution de longueur finie, alors le faisceau des sections parallèles $\text{Ker} D$ engendre sur $\mathcal{E}_X(\mathbb{K})$ le faisceau \mathcal{G} qui est le faisceau des sections d'un système local de coefficients (le faisceau \mathcal{G} est donc localement libre) et le complexe $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}(\Lambda^\bullet T_X^*) ; D)$ est une résolution acyclique du faisceau des sections parallèles. On a alors l'isomorphisme fonctoriel de De Rham-Weil $H^k(X, \text{Ker} D) \cong H^k(\Gamma(X, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}(\Lambda^\bullet T_X^*)) ; D)$.*

Preuve. On commence par substituer formellement dans les étapes de la preuve du théorème 1.1.8 la connexion $\bar{\partial}$ avec D , les opérateurs $\bar{\partial}_j$ avec d et l'opérateur de Leray-Koppelman avec l'opérateur d'homotopie de Poincaré

$$P_q : \mathcal{C}_{q+1}^h(B_r, M_{k,l}(\mathbb{K})) \rightarrow \mathcal{C}_q^h(B_r, M_{k,l}(\mathbb{K}))$$

pour $q \geq 0$. Il est élémentaire de vérifier qu'on peut choisir une suite de poids $S = (S_k)_{k \geq 0} \subset (0, +\infty)$ pour les normes \mathcal{C}^h de telle sorte à obtenir une estimation du type $\|P_q u\|_{r,h} \leq C \cdot \|u\|_{r,h}$, avec $C > 0$ indépendante de la régularité $h \geq 0$ de la $q + 1$ -forme u . À condition de restreindre opportunément le rayon $r > 0$ on obtient un schéma de convergence rapide considérablement plus simple que celui expliqué dans la preuve du théorème 1.1.8. En effet dans le cas en considération on n'a pas besoin de restreindre les rayons de la boule pendant les étapes du procédé itératif car on dispose de l'estimation précédente. Les détails de simplification et d'adaptation du procédé itératif relatif à la preuve du théorème 1.1.8, au cas en examen sont laissés au lecteur. On obtient en conclusion une $\mathcal{E}(\mathbb{K})$ -résolution locale, à partir d'une $\mathcal{E}(\mathbb{K})$ -résolution initiale, telle que les nouvelles matrices $\hat{\varphi}_j$ (ici on utilise les mêmes notations que dans le théorème 1.1.8) soient toutes constantes. En particulier le fait que $\hat{\varphi}_1 = \text{Cst}$ implique que \mathcal{G} est un faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{K})$ -modules localement libre. La suite du théorème 1.7.1 dérive alors de résultats classiques bien connus. \square

1.7.1 Effet de la non intégrabilité forte d'une structure presque-complexes J sur la $\bar{\partial}_j$ -stabilité des faisceaux d'idéaux

Pour les notions de base de la géométrie presque complexe nous renvoyons le lecteur au première paragraphe du chapitre qui suivra. Un corollaire du théorème 1.7.1 est le suivant.

Corollaire 1.7.2 Soit (X, J) une variété presque-complexe connexe telle que

$$T_{X,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \langle [\xi, \eta](x) \mid \xi, \eta \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{0,1})(X) \rangle$$

pour tout $x \in X$ et soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}(\mathbb{C})$ un faisceau d'idéaux de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes sur X admettant des $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ -résolutions locales de longueur finie. Si \mathcal{J} est $\bar{\partial}_J$ -stable alors soit $\mathcal{J} = 0$ soit $\mathcal{J} = \mathcal{E}(\mathbb{C})$.

L'hypothèse sur le complexifié de l'espace tangent signifie que la structure presque-complexe est "fortement non-intégrable". Les variétés presque-complexes pour lesquelles le complexifié de l'espace tangent est engendré ponctuellement par les crochets des champs de vecteurs de type $(0, 1)$ seront appelées "fortement non-intégrables". Les variétés presque-complexes fortement non-intégrables ont nécessairement une dimension complexe supérieure à deux. En effet toutes les structures presque complexes sont intégrables en dimension complexe un. En dimension complexe deux on a $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda^{0,2} T_X = 1$. Si

$$\bar{\tau}_J \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,2} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}^{1,0})(X)$$

désigne le tenseur conjugué de la torsion de la structure presque-complexe ($\bar{\tau}_J(\xi, \eta) := [\xi^{0,1}, \eta^{0,1}]^{1,0}$ pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$, où $U \subset X$ désigne un ouvert quelconque), on a que $\bar{\tau}_J(\Lambda_J^{0,2} T_X) \subset T_{X,J}^{1,0}$ est contenu strictement dans $T_{X,J}^{1,0}$ si $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \bar{\tau}_J(x) : \mathcal{E}(T_{X,J}^{0,1})^{\oplus 2}_x & \longrightarrow & T_{X,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\pi_J^{1,0}} T_{X,J,x}^{1,0} \\ (\xi, \eta) & \longmapsto & [\xi, \eta](x) \longmapsto [\xi, \eta]^{1,0}(x) \end{array}$$

(où $\pi_J^{1,0} : T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow T_{X,J}^{1,0}$ désigne la projection sur le fibré des $(1, 0)$ -vecteurs tangents) montre alors que pour tout point $x \in X$ le complexifié de l'espace tangent $T_{X,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ne peut pas être engendré par les crochets des champs de vecteurs de type $(0, 1)$. On donne maintenant un exemple de variété presque complexe fortement non-intégrable.

Exemple. Sur un voisinage ouvert $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$ de l'origine on considère la structure presque-complexe dont le fibré $T_{U,J}^{0,1}$ est engendré par les champs de vecteurs complexes

$$\xi_k := \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ k < r \leq n}} C_{l,k}^r \bar{z}_r \frac{\partial}{\partial z_l},$$

$k = 1, \dots, n$, où $C_{l,k}^r \in \mathbb{C}$ sera définie en suite, (on rappelle qu'on utilise la convention qui consiste à négliger les termes d'une somme si l'ensemble des indices sur lesquels on effectue cette opération est vide). On remarque que donner une structure presque-complexe sur $U \subseteq \mathbb{C}^n$ est équivalent à donner un sous-fibré complexe $F \subset T_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $rg_{\mathbb{C}} F = n$ tel que $F \oplus \bar{F} = T_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Bien évidemment dans notre cas le voisinage ouvert U de l'origine est choisi suffisamment petit pour pouvoir assurer cette dernière condition. Il est facile de vérifier que pour tout $k < t$ on a :

$$[\xi_k, \xi_t] = \sum_{r=1}^n C_{r,k}^t \frac{\partial}{\partial z_r}.$$

Le fait que $n \geq 3$ permet de choisir n -multi-indices $(L_k)_{k=1, \dots, n}$, $L_k = (l_{1,k}, l_{2,k})$, $1 \leq l_{1,k} < l_{2,k} \leq n$ différents. On définit alors les constantes $C_{r,k}^t$ par la règle suivante ; $C_{r,k}^t = 1$ si $(k, t) = (l_{1,r}, l_{2,r})$ et $C_{r,k}^t = 0$ autrement. On aura alors

$$[\xi_{l_{1,k}}, \xi_{l_{2,k}}] = \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Le fait que $[\xi_k, z_k \xi_k] = \xi_k$ montre alors que

$$T_{U,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \langle [\xi_{l_{1,k}}, \xi_{l_{2,k}}](0), [\xi_k, z_k \xi_k](0), k = 1, \dots, n \rangle.$$

Si on désigne par $X \subset U$ le voisinage ouvert de l'origine sur lequel la propriété précédente est vérifiée on a que la variété presque-complexe (X, J) est fortement non-intégrable.

La conclusion du corollaire précédent montre qu'en général sur une variété presque complexe non-intégrable, la notion de faisceau d'ideaux $\bar{\partial}_J$ -cohérent ne se généralise pas de façon immédiate. Venons-en maintenant à la preuve du corollaire 1.7.2.

Preuve. Le fait que le faisceau \mathcal{J} soit $\bar{\partial}_J$ -stable combiné avec le fait que le complexifié de l'espace tangent est engendré ponctuellement par les crochets des champs de vecteurs de type $(0, 1)$, implique que le faisceau \mathcal{J} est d -stable, en d'autres termes stable par rapport à tous les champs de vecteurs. On peut voir alors l'opérateur d comme une connexion

$$d: \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}(T_X^*)$$

intégrable sur le faisceau d'ideaux \mathcal{J} . Une conséquence de la preuve du théorème 1.7.1 est l'existence locale d'un générateur ψ du faisceaux d'ideaux \mathcal{J} tel que $d\psi = 0$, ce qui permet de conclure. \square

Chapitre 2

Fondements de la géométrie hermitienne sur les variétés presque complexes

Abstract. The $\bar{\partial}_J$ operator over an almost complex manifold induces canonical connections of type $(0,1)$ over the bundles of $(p,0)$ -forms. If the almost complex structure is integrable then the previous connections induce the canonical holomorphic structures of the bundles of $(p,0)$ -forms. For $p = 1$ we can extend the corresponding connection to all Schur powers of the bundle of $(1,0)$ -forms. Moreover using the canonical \mathbb{C} -linear isomorphism between the bundle of $(1,0)$ -forms and the complex cotangent bundle $T_{X,J}^*$ we deduce canonical connections of type $(0,1)$ over the Schur powers of the complex cotangent bundle $T_{X,J}^*$. If the almost complex structure is integrable then the previous $(0,1)$ -connections induces the canonical holomorphic structures of those bundles. In the non integrable case those $(0,1)$ -connections induces just the holomorphic canonical structures of the restrictions of the corresponding bundles to the images of smooth J -holomorphic curves. We introduce the notion of Chern curvature for those bundles. The geometrical meaning of this notion is a natural generalisation of the classical notion of Chern curvature for the holomorphic vector bundles over a complex manifold. We have a particular interest for the case of the tangent bundle in view of applications concerning the regularisation of J -plurisubharmonic functions by means of the geodesic flow induced by a Chern connection on the tangent bundle. This method has been used by Demailly [Dem-2] in the complex integrable case. Our specific study in the case of the tangent bundle gives an asymptotic expansion of the Chern flow which relates in a optimal way the geometric obstructions caused by the torsion of the almost complex structure, and the non symplectic nature of the metric.

2.1 Connexions sur les faisceaux de modules de fonctions \mathcal{C}^∞ au dessus des variétés presque complexes

Soit (X, J) une variété presque complexe de classe \mathcal{C}^∞ et de dimension réelle $2n$. On désigne par $\mathcal{E}_X \equiv \mathcal{E}_X(\mathbb{R})$ le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs réelles, par $\pi_j^{1,0} : T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow T_{X,J}^{1,0}$ la projection sur le fibré des $(1, 0)$ -vecteurs tangents et par $\pi_j^{0,1}$ celle sur le fibré des $(0, 1)$ -vecteurs tangents. On désigne par $T_{X,J}$ le fibré tangent dont les fibres sont munies de la structure complexe donnée par J et par

$$\mathcal{E}_{X,J}^{p,q} \equiv \mathcal{E}(\Lambda_J^{p,q} T_X^*), \quad \Lambda_J^{p,q} T_X^* := \Lambda_{\mathbb{C}}^p(T_{X,J}^{1,0})^* \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_{\mathbb{C}}^q(T_{X,J}^{0,1})^*$$

le faisceau des (p, q) -formes par rapport à la structure presque complexe J . On rappelle que sur une variété presque complexe la différentielle se décompose sous la forme

$$d = \partial_J + \bar{\partial}_J - \theta_J - \bar{\theta}_J,$$

où pour toute k -forme complexe $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{C}}^k(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^*)(U)$ au dessus d'un ouvert U et tout champ de vecteurs complexes $\xi_0, \dots, \xi_k \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$ on a les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_J \omega(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \xi_j^{1,0} \cdot \omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_k) + \\ &+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi_j^{1,0}, \xi_l^{1,0}]^{1,0} + [\xi_j^{0,1}, \xi_l^{0,1}]^{0,1} + [\xi_j^{1,0}, \xi_l^{0,1}]^{0,1}, \xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \widehat{\xi}_l, \dots, \xi_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_J \omega(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \xi_j^{0,1} \cdot \omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_k) + \\ &+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi_j^{0,1}, \xi_l^{0,1}]^{0,1} + [\xi_j^{0,1}, \xi_l^{1,0}]^{1,0} + [\xi_j^{1,0}, \xi_l^{0,1}]^{1,0}, \xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \widehat{\xi}_l, \dots, \xi_k) \end{aligned}$$

$$\theta_J \omega(\xi_0, \dots, \xi_k) := - \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi_j^{1,0}, \xi_l^{1,0}]^{0,1}, \xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \widehat{\xi}_l, \dots, \xi_k)$$

$$\bar{\theta}_J \omega(\xi_0, \dots, \xi_k) := - \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi_j^{0,1}, \xi_l^{0,1}]^{1,0}, \xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \widehat{\xi}_l, \dots, \xi_k)$$

avec $\xi_j^{1,0} := \pi_j^{1,0}(\xi)$, $[\cdot, \cdot]^{1,0} := \pi_j^{1,0}[\cdot, \cdot]$ et de façon analogue pour les indices $(0, 1)$. Les bidegrés des opérateurs ∂_J , $\bar{\partial}_J$, θ_J et $\bar{\theta}_J$ sont respectivement $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, -1)$ et $(-1, 2)$. En effet si $\omega \in \mathcal{E}_{X,J}^{p,q}(U)$ est une (p, q) -forme alors les $(p+q+1)$ -formes $\partial_J \omega$, $\bar{\partial}_J \omega$, $\theta_J \omega$, $\bar{\theta}_J \omega$ sont nulles en restriction aux fibrés $\Lambda_J^{r,s} T_X$, $r+s = p+q+1$ respectivement aux bidegrés $(r, s) \neq (p+1, q)$, $(r, s) \neq (p, q+1)$, $(r, s) \neq (p+2, q-1)$, $(r, s) \neq (p-1, p+2)$. On déduit alors que l'opérateur $T = \partial_J$, $\bar{\partial}_J$, θ_J où $\bar{\theta}_J$ vérifie la règle de Leibnitz

$$T(u \wedge v) = Tu \wedge v + (-1)^{\deg u} u \wedge Tv.$$

On a aussi les formules $\overline{(\partial_J u)} = \bar{\partial}_J \bar{u}$, $\overline{(\theta_J u)} = \bar{\theta}_J \bar{u}$.

Définition 2.1.1 On désigne par $\tau_J \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{2,0} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}^{0,1})(X)$ le tenseur de la torsion de la structure presque complexe définie par la formule $\tau_J(\xi, \eta) := [\xi^{1,0}, \eta^{1,0}]^{0,1}$ pour tout $\xi, \eta \in$

$\mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$, où $U \subset X$ désigne un ouvert quelconque. Le tenseur de la structure presque complexe est dit intégrable si $\tau_J = 0$.

On remarque que $\tau_J = 0$ si et seulement si $\theta_J = 0$, si et seulement si $d = \partial_J + \bar{\partial}_J$.

Note au lecteur. Le \mathbb{C} -isomorphisme canonique $T_{X,J,x} \rightarrow T_{X,J,x}^{1,0}$ implique le \mathbb{C} -isomorphisme $\Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x} \rightarrow \Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x}^{1,0}$, $\alpha \mapsto u$. Pour tout vecteur réel $\xi \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{p+q} T_{X,x}$ on a l'égalité $\alpha(\xi) = u(\xi) + \bar{u}(\xi)$, en effet soit $(\zeta_k)_k \subset (T_{X,J,x}^{1,0})^{\oplus n}$ un repère complexe de $T_{X,J,x}^{1,0}$. Alors $(v_k)_k \subset (T_{X,J,x})^{\oplus n}$, $v_k = \zeta_k + \bar{\zeta}_k$ est un repère complexe de $T_{X,J,x}$. La forme α s'écrit alors sous la forme $\alpha = \sum_k \alpha_k \otimes_J v_k$, $\alpha \in \Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^*$ et $u = \sum_k \alpha_k \otimes \zeta_k$. Pour tout élément $\xi \in \Lambda_{\mathbb{C}}^{p+q}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ on a par définition

$$\alpha(\xi) = \sum_k \alpha_k(\xi) \times_J v_k = \sum_k (\alpha_k(\xi) \zeta_k + \overline{\alpha(\xi)} \bar{\zeta}).$$

Si $\xi \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{p+q} T_{X,x} \subset \Lambda_{\mathbb{C}}^{p+q}(T_{X,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ on a l'égalité voulue. Nous considérons l'espace vectoriel

$$R_J^{p,q}(T_{X,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) := \{u + \bar{u} \mid u \in \Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x}^{1,0}\}$$

avec la structure de produit \times_J définie par la formule $c \times_J (u + \bar{u}) := cu + \bar{c}u$, $c \in \mathbb{C}$. Le fait qu'une forme \mathbb{C} -linéaire sur le complexifié $T_{X,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de l'espace tangent $T_{X,x}$ soit déterminée de façon univoque à partir de sa restriction à $T_{X,x}$ nous suggère qu'il est très naturel de considérer le \mathbb{C} -isomorphisme $\Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x} \rightarrow R_J^{p,q}(T_{X,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, $\alpha \mapsto u + \bar{u}$. Dans la suite on identifiera donc les éléments de l'espace vectoriel $\Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x}$ avec les éléments du type $u + \bar{u}$, $u \in \Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x}^{1,0}$. L'utilité d'un tel formalisme sera clarifié dans la suite. \square

On définit le tenseur de Nijenhuis

$$N_J \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,2} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X)$$

par la formule $N_J := \tau_J + \bar{\tau}_J$. Bien évidemment $N_J = 0$ si et seulement si $\tau_J = 0$. Il est élémentaire de vérifier l'identité :

$$4N_J(\xi, \eta) = [\xi, \eta] + J[\xi, J\eta] + J[J\xi, \eta] - [J\xi, J\eta]$$

pour tout champ de vecteurs complexes $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(X)$. On rappelle le célèbre théorème de Newlander-Nirenberg (voir [We-1], [Hör], [Dem-1], chapitre VIII, [Mal-2], [Nij-Woo] et [New-Nir]).

Théorème 2.1.2 (Newlander-Nirenberg). *Soit (X, J) une variété presque complexe. L'existence d'une structure holomorphe \mathcal{O}_X sur la variété X telle que la structure presque complexe associée $J_{\mathcal{O}_X}$ soit égale à J est équivalente à l'intégrabilité de la structure presque complexe J .*

On considère les définitions suivantes.

Définition 2.1.3 *Soient (X, J_1) et (Y, J_2) deux variétés presque complexes et $f : X \rightarrow Y$ une application différentiable. L'application f est dite (J_1, J_2) -holomorphe si sa différentielle vérifie la condition $J_2(f(x)) \cdot d_x f = d_x f \cdot J_1(x)$ pour tout $x \in X$.*

Pour tout application différentiable $f : X \rightarrow Y$, la différentielle $df \in \Gamma(X, T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} f^* T_Y)$ se décompose sous la forme

$$df = \partial_{J_1, J_2} f + \bar{\partial}_{J_1, J_2} f,$$

où

$$\begin{aligned}\partial_{J_1, J_2} f|_x &:= \frac{1}{2} \left(d_x f - J_2(f(x)) \cdot d_x f \cdot J_1(x) \right) \\ \bar{\partial}_{J_1, J_2} f|_x &:= \frac{1}{2} \left(d_x f + J_2(f(x)) \cdot d_x f \cdot J_1(x) \right).\end{aligned}$$

Bien évidemment

$$\partial_{J_1, J_2} f \in \Gamma(X, T_{X, J_1}^* \otimes_{\mathbb{C}} f^* T_{Y, J_2})$$

$$\bar{\partial}_{J_1, J_2} f \in \Gamma(X, T_{X, -J_1}^* \otimes_{\mathbb{C}} f^* T_{Y, J_2})$$

et l'application f est (J_1, J_2) -holomorphe si et seulement si $\bar{\partial}_{J_1, J_2} f = 0$.

Définition 2.1.4 Soit (X, J) une variété presque complexe et (Σ, j) une courbe holomorphe lisse. Une courbe (j, J) -holomorphe est une application différentiable $\gamma : (\Sigma, j) \rightarrow (X, J)$ dont la différentielle vérifie la condition $J(\gamma(z)) \cdot d_z \gamma = d_z \gamma \cdot j$ pour tout $z \in \Sigma$. On désigne par i la structure presque complexe canonique sur $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Une courbe J -holomorphe locale est une courbe (i, J) -holomorphe $\gamma : (B_\delta^1, i) \rightarrow (X, J)$ définie sur le disque complexe de rayon $\delta > 0$.

On a alors qu'une application différentiable $\gamma : B_\delta^1 \rightarrow X$ est une courbe J -holomorphe locale si et seulement si elle vérifie l'équation $\bar{\partial}_{j, J} \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = 0$, $z = t + is$ qui s'écrit explicitement sous la forme

$$\partial_s \gamma = J(\gamma) \cdot \partial_t \gamma,$$

où $\partial_s \gamma := d\gamma \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)$. On peut montrer, (voir prop.2.3.6 dans l'article de Sikorav, dans l'ouvrage [Au-La]) que si γ est une courbe J -holomorphe alors $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(B_\delta^1; X)$. On aura besoin aussi de la définition suivante.

Définition 2.1.5 Soit \mathcal{G} un faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ -modules sur X . Une connexion sur le faisceau \mathcal{G} est un morphisme de faisceaux de groupes additifs $\nabla_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(T_X^*) \simeq \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ tel que $\nabla_{\mathcal{G}}(g \cdot f) = \nabla_{\mathcal{G}} g \cdot f + g \otimes df$ pour tout $g \in \mathcal{G}(U)$ et $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})(U)$, où $U \subset X$ est un ouvert quelconque.

La donnée d'une connexion $\nabla_{\mathcal{G}}$ sur le faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ -modules \mathcal{G} détermine de façon univoque une dérivation sur le complexe $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*))_{k \geq 0}$. En effet on peut définir l'extension

$$\nabla_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*) \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^{k+1} T_X^*)$$

par la formule classique

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathcal{G}} \omega(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \nabla_{\mathcal{G}}(\omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_k))(\xi_j) + \\ &+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi_j, \xi_l], \xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \widehat{\xi}_l, \dots, \xi_k)\end{aligned}$$

pour tout $\omega \in (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*))(U)$ et tout champ de vecteurs complexes $\xi_0, \dots, \xi_k \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$. L'extension ainsi définie vérifie la règle de Leibnitz $\nabla_{\mathcal{G}}(g \otimes f) = \nabla_{\mathcal{G}} g \wedge f + g \otimes df$ pour tout

$g \in \mathcal{G}(U)$ et $f \in \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*)(U)$. En effet

$$\begin{aligned}
\nabla_g(g \otimes f)(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \nabla_g(g \cdot f(\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_k))(\xi_j) + \\
&+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} g \cdot f([\xi_j, \xi_l], \xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \widehat{\xi}_l, \dots, \xi_k) = \\
&= \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \left[\nabla_g g(\xi_j) \cdot f(\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_k) + g \cdot (\xi_j \cdot f(\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_k)) \right] + \\
&+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} g \cdot f([\xi_j, \xi_l], \xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \widehat{\xi}_l, \dots, \xi_k) = \\
&= (\nabla_g g \wedge f + g \otimes df)(\xi_0, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

Le fait que $d^2 = 0$ entraîne l'existence du tenseur de courbure de ∇_g

$$\Theta(\nabla_g) \in \left(\mathcal{E}nd_{\mathcal{E}(C)}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{E}(C)} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^2 T_X^*) \right)(X)$$

définie par la formule $\Theta(\nabla_g)(\xi, \eta) \cdot g := (\nabla_g^2 g)(\xi, \eta)$ pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ et $g \in \mathcal{G}(U)$. On note de plus par $\xi_{\nabla_g} \cdot g := \nabla_g g(\xi)$ la dérivée covariante de la section g le long du champ de vecteurs ξ . La définition de l'extension de la connexion ∇_g implique de façon immédiate la formule

$$\xi_{\nabla_g} \cdot (\eta_{\nabla_g} \cdot g) - \eta_{\nabla_g} \cdot (\xi_{\nabla_g} \cdot g) = [\xi, \eta]_{\nabla_g} \cdot g + \Theta(\nabla_g)(\xi, \eta) \cdot g.$$

Le tenseur de courbure $\Theta(\nabla_g)$ de la connexion ∇_g mesure donc le défaut de commutation des dérivées covariantes secondes des sections de \mathcal{G} . Il est aussi élémentaire de vérifier l'identité

$$\nabla_g^2 \omega = \Theta(\nabla_g) \wedge \omega \tag{2.1.1}$$

pour tout $\omega \in (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^{\bullet} T_X^*)) (U)$. Le fait que les opérateurs θ_J et $\bar{\theta}_J$ vérifient la règle de Leibnitz entraîne que

$$\theta_J \in \mathcal{H}om_{\mathcal{E}(C)}(\mathcal{E}_{X,J}^{p,q}, \mathcal{E}_{X,J}^{p+2,q-1})(X) \quad \text{et} \quad \bar{\theta}_J \in \mathcal{H}om_{\mathcal{E}(C)}(\mathcal{E}_{X,J}^{p,q}, \mathcal{E}_{X,J}^{p-1,q+2})(X)$$

On définit alors les opérateurs de torsion sur \mathcal{G}

$$\theta_{g,J} := \mathbb{I}_g \otimes_{\mathcal{E}(C)} \theta_J : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(C)} \mathcal{E}_{X,J}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(C)} \mathcal{E}_{X,J}^{p+2,q-1}$$

$$\bar{\theta}_{g,J} := \mathbb{I}_g \otimes_{\mathcal{E}(C)} \bar{\theta}_J : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(C)} \mathcal{E}_{X,J}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(C)} \mathcal{E}_{X,J}^{p-1,q+2}.$$

De façon explicite ces opérateurs sont définis de façon analogue aux opérateurs θ_J et $\bar{\theta}_J$. Ce sont des dérivations, autrement dit on a les formules

$$\theta_{g,J}(\omega \wedge f) = \theta_{g,J} \omega \wedge f + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \theta_J f$$

$$\bar{\theta}_{g,J}(\omega \wedge f) = \bar{\theta}_{g,J} \omega \wedge f + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \bar{\theta}_J f$$

pour tout $\omega \in (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^{\bullet} T_X^*)) (U)$ et $f \in \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^{\bullet} T_X^*)(U)$. Comme dans le cas de la différentielle extérieure on a la décomposition

$$\nabla_g = \nabla_{g,J}^{1,0} + \nabla_{g,J}^{0,1} - \theta_{g,J} - \bar{\theta}_{g,J}$$

où les opérateurs

$$\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0} : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}_{X,J}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}_{X,J}^{p+1,q}$$

et

$$\nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1} : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}_{X,J}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}_{X,J}^{p,q+1}$$

sont définis par les formules analogues à celles qui définissent les opérateurs $\bar{\partial}_J$ et ∂_J ,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0} \omega(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \nabla_{\mathcal{G}}(\omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_k))(\xi_j^{1,0}) + \\ &+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi_j^{1,0}, \xi_l^{1,0}]^{1,0} + [\xi_j^{0,1}, \xi_l^{1,0}]^{0,1} + [\xi_j^{1,0}, \xi_l^{0,1}]^{0,1}, \xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \widehat{\xi}_l, \dots, \xi_k) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1} \omega(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \nabla_{\mathcal{G}}(\omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_k))(\xi_j^{0,1}) + \\ &+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi_j^{0,1}, \xi_l^{0,1}]^{0,1} + [\xi_j^{0,1}, \xi_l^{1,0}]^{1,0} + [\xi_j^{1,0}, \xi_l^{0,1}]^{1,0}, \xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \widehat{\xi}_l, \dots, \xi_k) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Le fait que $\nabla_{\mathcal{G}}$ vérifie la règle de Leibnitz implique les formules

$$\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}(g \otimes f) = \nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}g \wedge f + g \otimes \partial_J f$$

$$\nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}(g \otimes f) = \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}g \wedge f + g \otimes \bar{\partial}_J f$$

pour tout $g \in \mathcal{G}(U)$ et $f \in \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^{\bullet} T_X^*)(U)$. En degré zéro on a les formules

$$\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}g = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathcal{G}}g - i(\nabla_{\mathcal{G}}g) \circ J \right) \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}g = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathcal{G}}g + i(\nabla_{\mathcal{G}}g) \circ J \right)$$

pour tout $g \in \mathcal{G}(U)$. En général on a la définition suivante.

Définition 2.1.6 *Soit \mathcal{G} un faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ -modules sur X . Une connexion de type $(0, 1)$ sur le faisceau \mathcal{G} est un morphisme de faisceaux de groupes additifs $\nabla_{\mathcal{G}}'' : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}_{X,J}^{0,1}$ tel que $\nabla_{\mathcal{G}}''(g \cdot f) = \nabla_{\mathcal{G}}''g \cdot f + g \otimes \bar{\partial}_J f$ pour tout $g \in \mathcal{G}(U)$ et $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})(U)$, où $U \subset X$ est un ouvert quelconque.*

On a bien sûr une définition analogue pour les connexions de type $(1, 0)$. Comme précédemment une connexion de type $(0, 1)$, (resp. $(1, 0)$) peut être étendue à une dérivation extérieure de type $(0, 1)$, (resp. $(1, 0)$) sur le complexe

$$(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*))_{k \geq 0}$$

grâce à la formule 2.1.3, (resp. 2.1.2) ou grâce à la règle de Leibnitz. On rappelle maintenant que si A et B sont deux endomorphismes du faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ -modules $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^{\bullet} T_X^*)$, leur crochet de commutation est défini par la formule

$$[A, B] := AB - (-1)^{\deg A \cdot \deg B} BA.$$

La décomposition précédente de $\nabla_{\mathcal{G}}$ implique la décomposition suivante au niveau des opérateurs,

$$\nabla_{\mathcal{G}}^2 = (\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0} + \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1} - \theta_{\mathcal{G},J} - \bar{\theta}_{\mathcal{G},J})^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{(\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0})^2 - [\nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}, \theta_{\mathcal{G},J}]}_{2,0} + \underbrace{(\nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1})^2 - [\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}]}_{0,2} + \underbrace{\theta_{\mathcal{G},J}^2}_{4,-2} + \underbrace{\bar{\theta}_{\mathcal{G},J}^2}_{-2,4} + \\
&\quad + \underbrace{[\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}, \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}]}_{1,1} + \underbrace{[\theta_{\mathcal{G},J}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}]}_{1,1} - \underbrace{[\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}, \theta_{\mathcal{G},J}]}_{3,-1} - \underbrace{[\nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}]}_{-1,3}.
\end{aligned}$$

D'autre part en considérant la décomposition de la forme de courbure

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}}) = \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{2,0} + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{1,1} + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{0,2}$$

en ses composantes de type (2, 0), (1, 1), (0, 2) et la formule (2.1.1) on déduit les identités suivantes au sens des opérateurs

$$\begin{aligned}
\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{2,0} \wedge \cdot &= (\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0})^2 - [\nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}, \theta_{\mathcal{G},J}] & \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{0,2} \wedge \cdot &= (\nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1})^2 - [\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}] \\
\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{1,1} \wedge \cdot &= [\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}, \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}] + [\theta_{\mathcal{G},J}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}] & \theta_{\mathcal{G},J}^2 &= 0, \quad \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}^2 = 0 \\
[\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}, \theta_{\mathcal{G},J}] &= 0 & [\nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}] &= 0.
\end{aligned}$$

En particulier si $\mathcal{G} = \mathcal{E}(\mathbb{C})$ et $\nabla_{\mathcal{G}} = d$ on a les identités supplémentaires

$$\partial_J^2 = [\bar{\partial}_J, \theta_J], \quad \bar{\partial}_J^2 = [\partial_J, \bar{\theta}_J] \quad \text{et} \quad [\partial_J, \bar{\partial}_J] = -[\theta_J, \bar{\theta}_J].$$

En conclusion on a les identités fondamentales de la géométrie presque complexe :

$$\partial_J^2 = \bar{\partial}_J \theta_J + \theta_J \bar{\partial}_J, \quad \bar{\partial}_J^2 = \partial_J \bar{\theta}_J + \bar{\theta}_J \partial_J,$$

$$\partial_J \bar{\partial}_J + \bar{\partial}_J \partial_J = -\theta_J \bar{\theta}_J - \bar{\theta}_J \theta_J,$$

$$\partial_J \theta_J = -\theta_J \partial_J, \quad \bar{\partial}_J \bar{\theta}_J = -\bar{\theta}_J \bar{\partial}_J,$$

$$\theta_J^2 = 0, \quad \bar{\theta}_J^2 = 0.$$

En général en degré zéro on a les formules

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{2,0} = (\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0})^2 - \theta_{\mathcal{G},J} \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}, \tag{2.1.4}$$

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{0,2} = (\nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1})^2 - \bar{\theta}_{\mathcal{G},J} \nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}, \tag{2.1.5}$$

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{1,1} = [\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}, \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}], \tag{2.1.6}$$

qui sont équivalentes aux identités évidentes

$$\xi_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{1,0} \cdot (\eta_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{1,0} \cdot g) - \eta_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{1,0} \cdot (\xi_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{1,0} \cdot g) = [\xi^{1,0}, \eta^{1,0}]_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{2,0}(\xi^{1,0}, \eta^{1,0}) \cdot g,$$

$$\xi_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{0,1} \cdot (\eta_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{0,1} \cdot g) - \eta_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{0,1} \cdot (\xi_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{0,1} \cdot g) = [\xi^{0,1}, \eta^{0,1}]_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{0,2}(\xi^{0,1}, \eta^{0,1}) \cdot g,$$

$$\xi_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{1,0} \cdot (\eta_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{0,1} \cdot g) - \eta_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{0,1} \cdot (\xi_{\nabla_{\mathcal{G}}}^{1,0} \cdot g) = [\xi^{1,0}, \eta^{0,1}]_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{1,1}(\xi^{1,0}, \eta^{0,1}) \cdot g.$$

On a donc en particulier que la composante de type $(2, 0)$, (resp. $(0, 2)$) du tenseur de courbure mesure le défaut de commutation des dérivées covariantes secondes des sections de \mathcal{G} le long des champs de vecteurs de type $(1, 0)$, (resp. $(0, 1)$). La composante de type $(1, 1)$ du tenseur de courbure exprime le défaut de commutation des dérivées covariantes secondes des sections de \mathcal{G} le long des champs de vecteurs de type $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Soit \mathcal{G} un faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ -modules localement de type fini, soit $\psi \equiv (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \mathcal{G}^{\oplus r}(U)$ un système de générateurs locaux et

$$\omega = \psi \cdot f \in (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*))(U), \quad f \in M_{r,1}(\mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*)(U)).$$

Soient de plus $A \in M_{r,r}(\mathcal{E}(T_X^*)(U))$, $A'_J \in M_{r,r}(\mathcal{E}_{X,J}^{1,0}(U))$, $A''_J \in M_{r,r}(\mathcal{E}_{X,J}^{0,1}(U))$ telles que $\nabla_{\mathcal{G}} \psi = \psi \cdot A$ et $A = A'_J + A''_J$. La règle de Leibnitz implique alors les égalités

$$\nabla_{\mathcal{G}} \omega = \psi \cdot (df + A \wedge f) \quad \text{et} \quad \Theta(\nabla_{\mathcal{G}}) \wedge \omega = \psi \cdot (dA + A \wedge A) \wedge f.$$

De plus on a les identités

$$\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0} \omega = \psi \cdot (\partial_J f + A'_J \wedge f), \quad \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1} \omega = \psi \cdot (\bar{\partial}_J f + A''_J \wedge f),$$

$$\theta_{\mathcal{G},J} \omega = \psi \cdot \theta_J f, \quad \bar{\theta}_{\mathcal{G},J} \omega = \psi \cdot \bar{\theta}_J f.$$

En décomposant la 2-forme $dA + A \wedge A$ où en explicitant les identités (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.6) on obtient les expressions locales suivantes.

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_{J,J}^{2,0} \wedge \omega = \psi \cdot (\partial_J A'_J + A'_J \wedge A'_J - \theta_J A''_J) \wedge f$$

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_{J,J}^{0,2} \wedge \omega = \psi \cdot (\bar{\partial}_J A''_J + A''_J \wedge A''_J - \bar{\theta}_J A'_J) \wedge f$$

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_{J,J}^{1,1} \wedge \omega = \psi \cdot (\bar{\partial}_J A'_J + \partial_J A''_J + A'_J \wedge A''_J + A''_J \wedge A'_J) \wedge f,$$

2.2 Connexions hermitiennes sur les fibrés vectoriels au dessus des variétés presque complexes

Nous considérons à partir de maintenant un fibré vectoriel complexe \mathcal{C}^{∞} , $F \longrightarrow X$ et $\mathcal{G} = \mathcal{E}(F) :=$ faisceau des sections \mathcal{C}^{∞} de F . Soit $h \in \mathcal{E}(F^* \otimes_{\mathbb{C}} \bar{F}^*)(X)$ une métrique hermitienne sur F . On rappelle qu'une connexion

$$\nabla_F : \mathcal{E}(F) \longrightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(T_X^*) \simeq \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

sur F est dite h -hermitienne si pour tout champ de vecteurs complexes $\xi \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$ et toute sections $\sigma, \tau \in \mathcal{E}(F)(U)$, ($U \subseteq X$ est un ouvert quelconque), on a la formule

$$\xi.h(\sigma, \tau) = h(\xi_{\nabla} \cdot \sigma, \tau) + h(\sigma, \bar{\xi}_{\nabla} \cdot \tau).$$

Il est bien sûr équivalent de restreindre l'identité précédente aux seuls champs de vecteurs $\xi \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})(U)$. On a alors que la donnée d'une connexion

$$\nabla''_F : \mathcal{E}(F) \longrightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}_{X,J}^{0,1}$$

de type $(0, 1)$ entraîne l'existence d'une unique connexion h -hermitienne ∇_F sur le fibré F telle que $\nabla_F^{0,1} = \nabla''_F$. En effet la partie de type $(1, 0)$ de ∇_F est donnée par la formule

$$h(\nabla_F^{1,0} \sigma(\xi), \tau) = \xi.h(\sigma, \tau) - h(\sigma, \nabla''_F \tau(\bar{\xi}))$$

pour tout $(1,0)$ -champ de vecteurs $\xi \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})(U)$ et toutes sections $\sigma, \tau \in \mathcal{E}(F)(U)$. Bien évidemment on a un résultat analogue pour les connexions de type $(1,0)$. Soit $(e_1, \dots, e_r) \in \mathcal{E}(F)^{\oplus r}(U)$ un repère de $F|_U$. On a l'identification $\nabla_F \simeq_e d + A$ par rapport au repère (e_1, \dots, e_r) . Soit de plus $H := (h(e_\lambda, e_\mu))_{\lambda, \mu}$ la matrice hermitienne de la métrique h . Le fait que la connexion ∇_F soit h -hermitienne équivaut localement aux égalités

$$\xi \cdot H_{\lambda, \mu} = \sum_{1 \leq s \leq r} \left(A'_{s, \lambda}(\xi) H_{s, \mu} + \overline{A''_{s, \mu}(\bar{\xi})} H_{\lambda, s} \right),$$

$\xi \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})(U)$. On a alors avec des notations matricielles la relation $\partial_j H = A'_j H + H \overline{A''_j}$. Le fait que la matrice H soit hermitienne implique que cette relation est équivalente à la relation

$$A'_j = \overline{H}^{-1} (\partial_j \overline{H} - \overline{A''_j} \overline{H}). \quad (2.2.1)$$

On a en conclusion qu'une connexion ∇_F est h -hermitienne si et seulement si la relation (2.2.1) est satisfaite sur tout les ouverts de trivialisations de F . Considérons maintenant le produit sesquilinéaire

$$\{\cdot, \cdot\}_h : \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^p T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} F) \times \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^q T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} F) \longrightarrow \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^{p+q} T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

sur le faisceau $\mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^{\bullet} T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} F)$ défini par la formule

$$\{\sigma, \tau\}_h(\xi) = \sum_{|I|=p} \varepsilon(I) h(\sigma(\xi_I), \tau(\bar{\xi}_{\mathbb{C}I})),$$

où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{p+q})$, $\xi_j \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$ et $\varepsilon(I)$ désigne le signe de la permutation $(1, \dots, p+q) \rightarrow (I, \mathbb{C}I)$. Alors le fait que la connexion ∇_F soit hermitienne est équivalent à l'identité plus générale

$$d\{\sigma, \tau\}_h = \{\nabla_F \sigma, \tau\}_h + (-1)^{\deg \sigma} \{\sigma, \nabla_F \tau\}_h$$

qui équivaut aussi à une des identités

$$\partial_j \{\sigma, \tau\}_h = \{\nabla_{F,J}^{1,0} \sigma, \tau\}_h + (-1)^{\deg \sigma} \{\sigma, \nabla_{F,J}^{0,1} \tau\}_h$$

$$\bar{\partial}_j \{\sigma, \tau\}_h = \{\nabla_{F,J}^{0,1} \sigma, \tau\}_h + (-1)^{\deg \sigma} \{\sigma, \nabla_{F,J}^{1,0} \tau\}_h.$$

On obtient alors, en appliquant la différentielle extérieure à la première des trois identités précédentes, l'identité $0 = \{\Theta(\nabla_F) \sigma, \tau\}_h + \{\sigma, \Theta(\nabla_F) \tau\}_h$ qui implique, pour des raisons de bidegré, l'identité

$$0 = \{\Theta(\nabla_F)_J^{1,1} \sigma, \tau\}_h + \{\sigma, \Theta(\nabla_F)_J^{1,1} \tau\}_h.$$

Si $\deg \sigma = \deg \tau = 0$ on déduit l'égalité

$$0 = h\left(\Theta(\nabla_F)_J^{1,1}(\xi, \eta) \cdot \sigma, \tau\right) + h\left(\sigma, \Theta(\nabla_F)_J^{1,1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot \tau\right) \quad (2.2.2)$$

qui montre que pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ on a

$$i\Theta(\nabla_F)_J^{1,1}(\xi, \eta) \in \mathcal{E}(\text{Herm}_h(F))(U),$$

où $\text{Herm}_h(F)$ désigne le fibré (réel) des endomorphismes h -hermitiens de F . Considérons maintenant l'expression locale de la composante de type $(1,1)$ du tenseur de courbure

$$\Theta(\nabla_F)_J^{1,1} = \sum_{1 \leq \lambda, \mu \leq r} C_{\lambda, \mu} \otimes e_{\mu}^* \otimes e_{\lambda}$$

de la connexion hermitienne ∇_F . On a

$$C := \bar{\partial}_J A'_J + \partial_J A''_J + A'_J \wedge A''_J + A''_J \wedge A'_J.$$

Si $(\zeta_k)_k \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})^{\oplus n}(U)$ est un repère du fibré $T_{U,J}^{1,0}$, on a l'expression locale suivante

$$\Theta(\nabla_F)_J^{1,1} = \sum_{\substack{1 \leq \lambda, \mu \leq r \\ 1 \leq k, l \leq n}} C_{\lambda, \mu}^{k, l} \zeta_k^* \wedge \bar{\zeta}_l^* \otimes e_\mu^* \otimes e_\lambda.$$

L'identité (2.2.2) entraîne que si en un point $x_0 \in U$ le repère $e_1(x_0), \dots, e_r(x_0)$ est $h(x_0)$ -orthonormé alors on a les relations $\overline{C_{\lambda, \mu}^{k, l}}(x_0) = C_{\mu, \lambda}^{l, k}(x_0)$. Si de plus $\nabla_F^{0,1} e_k(x_0) = 0$ pour tout k , on obtient en utilisant l'expression (2.2.1) l'égalité

$$C(x_0) = (\bar{\partial}_J \partial_J \bar{H} - \bar{\partial}_J \bar{H} \wedge \partial_J \bar{H} + \partial_J A''_J - \bar{\partial}_J \overline{A''_J^t})(x_0). \quad (2.2.3)$$

2.3 Extension de l'opérateur $\bar{\partial}_J$ aux puissances de Schur du fibré des $(1, 0)$ -formes

Rappelons qu'étant donné un espace vectoriel complexe V de dimension complexe r , les représentations irréductibles de $GL_{\mathbb{C}}(V)$ sont en correspondance biunivoque avec le plus haut poids $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ de la représentation d'un sous-tore maximal $T^r \simeq (\mathbb{C}^*)^r < GL_{\mathbb{C}}(V)$, $(t_1, \dots, t_r) \mapsto t_1^{\lambda_1} \dots t_r^{\lambda_r}$. On note $S^\lambda V$ l'espace de la représentation associée, qu'on appelle puissance de Schur associée au poids λ . On a par exemple

$$\begin{aligned} S^{(m, 0, \dots, 0)} V &= S^m V && \text{puissance symétrique usuelle} \\ S^{(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)} V &= \Lambda^k V && \text{puissance extérieure.} \end{aligned}$$

Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages classiques de [Fu-Ha] pour une explication détaillée de la notion de puissance de Schur.

Considérons maintenant les connexions de type $(0, 1)$

$$\bar{\partial}_{J,p} := (-1)^p \bar{\partial}_J : \mathcal{E}_{X,J}^{p,0} \longrightarrow \mathcal{E}_{X,J}^{p,0} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}_{X,J}^{0,1}$$

sur les fibrés $\Lambda_J^{p,0} T_X^*$. De façon explicite les connexions $\bar{\partial}_{J,p}$ sont définies par les formules

$$\begin{aligned} \langle \bar{\partial}_{J,p} \omega(\eta), \xi_1, \dots, \xi_p \rangle &:= \bar{\partial}_J \omega(\eta, \xi_1, \dots, \xi_p) \\ &= \eta \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_p) + \sum_{1 \leq l \leq p} (-1)^l \omega([\eta, \xi_l]^{1,0}, \xi_1, \dots, \widehat{\xi}_l, \dots, \xi_p) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

pour tout $\omega \in \mathcal{E}_{X,J}^{p,0}(U)$, $\eta \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{0,1})(U)$ et $\xi_1, \dots, \xi_p \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})(U)$. Bien évidemment dans le cas complexe intégrable les faisceaux de $\mathcal{O}_{X,J}$ -modules $\Omega_{X,J}^p \equiv \mathcal{O}(\Lambda_J^{p,0} T_X^*) := \text{Ker } \bar{\partial}_{J,p}$ sont localement libres et donnent une structure de fibré vectoriel holomorphe aux fibrés $\Lambda_J^{p,0} T_X^*$. De plus on a l'identité

$$\bar{\partial}_{J,p} = \mathbb{I}_{\Omega_{X,J}^p} \otimes_{\mathcal{O}_X} \bar{\partial}_J.$$

Dans le cas presque complexe, en étendant la connexion $\bar{\partial}_{J,1}$ à toutes les puissances de Schur $F_J^\lambda := S^\lambda \Lambda_J^{1,0} T_X^*$ on obtient des connexions de type $(0, 1)$ canoniques

$$\bar{\partial}_{F_J^\lambda} : \mathcal{E}(F_J^\lambda) \longrightarrow \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,1} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} F_J^\lambda)$$

sur les fibrés F_J^λ . De façon analogue, la connexion induite sur $T_{X,J}^*$ par $\bar{\partial}_{J,1}$ grâce au \mathbb{C} -isomorphisme canonique de $\Lambda_J^{1,0}T_X^*$ avec $T_{X,J}^*$ peut être étendue aux puissances de Schur $S^\lambda T_{X,J}^*$. Pour simplifier nous désignerons aussi $S^\lambda T_{X,J}^*$ par F_J^λ . Les définitions précédentes sont compatibles avec les définitions classiques de la géométrie complexe. En effet dans le cas complexe intégrable les fibrés F_J^λ admettent une structure holomorphe canonique donné par le faisceau des sections holomorphes $\mathcal{O}(F_J^\lambda)$, qui est définie de façon naturelle à partir du faisceau $\Omega_{X,J}^1$. La connexion canonique de type $(0,1)$ sur le fibré F_J^λ induite par le faisceau $\mathcal{O}(F_J^\lambda)$

$$\mathbb{I}_{\mathcal{O}(F_J^\lambda)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \bar{\partial}_J$$

coïncide évidemment avec la connexion $\bar{\partial}_{F_J^\lambda}$ induite par la connexion $\bar{\partial}_{J,1}$ et de plus on a toujours l'égalité évidente

$$\mathcal{O}(F_J^\lambda) = \text{Ker } \bar{\partial}_{F_J^\lambda}.$$

Dans le cas d'une variété complexe intégrable on a donc le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{X,J}^1 & \longleftrightarrow & \bar{\partial}_{J,1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(F_J^\lambda) & \longleftrightarrow & \bar{\partial}_{F_J^\lambda} \end{array}$$

Dans le cas presque complexe non intégrable le faisceau $\mathcal{O}_X := \text{Ker } \bar{\partial}_J$ est un faisceaux de fonctions constantes pour un choix générique de structure presque complexe J non intégrable. Il suffit de prendre par exemple une structure fortement non intégrable. On rappelle qu'une structure presque complexe est dit fortement non-intégrable si le fibré tangent est engendré ponctuellement par les crochets des champs de vecteurs de type $(0,1)$. D'autre part dans cette situation il n'existe pas de repères locaux complexes $(\alpha_k)_k \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,0}T_X^*)^{\oplus n}(U)$ tels que $\bar{\partial}_{J,1} \alpha_k \equiv 0$ sur l'ouvert U pour tout $k = 1, \dots, n$, car sinon ceci entraînerait que le fibré $\Lambda_J^{1,0}T_X^*$ est plat, ce qui n'est pas toujours le cas pour une variété presque complexe. Un tel phénomène peut être aussi envisagé pour les fibrés F_J^λ et la connexion canonique $\bar{\partial}_{F_J^\lambda}$.

Cependant la connexion $\bar{\partial}_{F_J^\lambda}$ induit une structure holomorphe canonique sur toutes les restrictions $F_{J|\gamma(\Sigma)}^\lambda$ du fibré F_J^λ aux images des plongements (j, J) -holomorphes $\gamma : (\Sigma, j) \rightarrow (X, J)$ d'une courbe holomorphe lisse $\Sigma \subset \mathbb{C}^m$. En effet la restriction

$$\bar{\partial}_{F_J^\lambda|_{\gamma(\Sigma)}} : \mathcal{E}\left(F_{J|\gamma(\Sigma)}^\lambda\right) \rightarrow \mathcal{E}\left(\Lambda_J^{0,1}T_{\gamma(\Sigma)}^* \otimes_{\mathbb{C}} F_{J|\gamma(\Sigma)}^\lambda\right)$$

de la connexion $\bar{\partial}_{F_J^\lambda}$ est bien évidemment intégrable étant donné que $\Lambda_J^{0,2}T_{\gamma(\Sigma)}^* = 0$. La structure holomorphe canonique sur le fibré $F_{J|\gamma(\Sigma)}^\lambda$ est alors donné par la formule

$$\mathcal{O}\left(F_{J|\gamma(\Sigma)}^\lambda\right) := \text{Ker}\left(\bar{\partial}_{F_J^\lambda|_{\gamma(\Sigma)}}\right).$$

Soit h une métrique hermitienne quelconque sur F_J^λ . On définit alors la connexion de Chern $D_{F_J^\lambda}^h$ comme étant l'unique connexion hermitienne sur F_J^λ telle que

$$(D_{F_J^\lambda}^h)^{0,1} = \bar{\partial}_{F_J^\lambda}.$$

2.4 Expression locale des opérateurs ∂_J , $\bar{\partial}_J$, θ_J et $\bar{\theta}_J$.

Soit $(\zeta_k)_k \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})^{\oplus n}(U)$ un repère locale du fibré $T_{X,J}^{1,0}$ et $M^k, N^k, U^k, V^k \in M_n(\mathcal{E}(U))$ les $n \times n$ -matrices définies par les relations

$$\begin{aligned} [\bar{\zeta}_j, \bar{\zeta}_r]_J^{1,0} &= \sum_{k=1}^n N_{j,r}^k \zeta_k & [\bar{\zeta}_j, \bar{\zeta}_r]_J^{0,1} &= \sum_{k=1}^n M_{j,r}^k \bar{\zeta}_k \\ [\zeta_j, \zeta_r]_J^{1,0} &= \sum_{k=1}^n \bar{M}_{j,r}^k \zeta_k & [\zeta_j, \zeta_r]_J^{0,1} &= \sum_{k=1}^n \bar{N}_{j,r}^k \bar{\zeta}_k \\ [\zeta_j, \bar{\zeta}_r]_J^{1,0} &= \sum_{k=1}^n U_{j,r}^k \zeta_k & [\zeta_j, \bar{\zeta}_r]_J^{0,1} &= \sum_{k=1}^n V_{j,r}^k \bar{\zeta}_k \end{aligned}$$

On a les relations $M_{j,r}^k = -M_{r,j}^k$, $N_{j,r}^k = -N_{r,j}^k$ et $V_{j,r}^k = -\bar{U}_{r,j}^k$. De plus on a l'expression locale

$$\tau_J = \sum_{1 \leq k < l \leq n} [\zeta_k, \zeta_l]_J^{0,1} \otimes \zeta_k^* \wedge \zeta_l^* = \sum_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ 1 \leq r \leq n}} \bar{N}_{k,l}^r \zeta_k^* \wedge \zeta_l^* \otimes \bar{\zeta}_r$$

pour la forme de torsion de la structure presque complexe J . On rappelle que les éléments de l'espace vectoriel $\Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x}$ s'identifient naturellement avec les éléments du type $u + \bar{u}$, $u \in \Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x}^{1,0}$. On introduit maintenant une notation très utile pour la suite. Soit $(\zeta_k)_k \in (T_{X,J,x}^{1,0})^{\oplus n}$ un repère. Alors $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in (T_{X,J,x})^{\oplus n}$ est un repère complexe de l'espace vectoriel $(T_{X,x}, J_x)$. On notera

$$c \times_J \zeta_k := c \cdot \zeta_k + \bar{c} \cdot \bar{\zeta}_k$$

l'opération de produit d'un scalaire $c \in \mathbb{C}$ avec le vecteur réel $\zeta_k + \bar{\zeta}_k \in T_{X,x}$. Si $\alpha \in \Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^*$ on notera

$$\alpha \otimes_J \zeta_k := \alpha \otimes \zeta_k + \bar{\alpha} \otimes \bar{\zeta}_k$$

la (p, q) -forme à valeurs dans l'espace vectoriel $T_{X,J,x}$. Avec ces notations on aura par exemple l'expression locale suivante pour le tenseur de Nijenhuis

$$N_J = \sum_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ 1 \leq r \leq n}} N_{k,l}^r \bar{\zeta}_k^* \wedge \bar{\zeta}_l^* \otimes_J \zeta_r = \sum_{1 \leq k, l, r \leq n} N_{k,l}^r \bar{\zeta}_k^* \otimes \bar{\zeta}_l^* \otimes_J \zeta_r.$$

Si f est une fonction on a $\partial_J f = \sum_{k=1}^n (\zeta_k \cdot f) \zeta_k^*$, $\bar{\partial}_J f = \sum_{k=1}^n (\bar{\zeta}_k \cdot f) \bar{\zeta}_k^*$, $\theta_J f = 0$ et $\bar{\theta}_J f = 0$. De plus en utilisant les expressions intrinsèques des opérateurs ∂_J , $\bar{\partial}_J$, θ_J et $\bar{\theta}_J$ on a les expressions

$$\begin{aligned} \partial_J \zeta_k^* &= - \sum_{1 \leq l < t \leq n} \bar{M}_{l,t}^k \zeta_l^* \wedge \zeta_t^* & \partial_J \bar{\zeta}_k^* &= \sum_{1 \leq l, t \leq n} \bar{U}_{t,l}^k \zeta_l^* \wedge \bar{\zeta}_t^* \\ \bar{\partial}_J \zeta_k^* &= - \sum_{1 \leq l, t \leq n} U_{l,t}^k \zeta_l^* \wedge \bar{\zeta}_t^* & \bar{\partial}_J \bar{\zeta}_k^* &= - \sum_{1 \leq l < t \leq n} M_{l,t}^k \bar{\zeta}_l^* \wedge \bar{\zeta}_t^* \\ \theta_J \bar{\zeta}_k^* &= \sum_{1 \leq l < t \leq n} \bar{N}_{l,t}^k \zeta_l^* \wedge \zeta_t^* & \bar{\theta}_J \zeta_k^* &= \sum_{1 \leq l < t \leq n} N_{l,t}^k \bar{\zeta}_l^* \wedge \bar{\zeta}_t^* \end{aligned}$$

Soit

$$u = \sum_{\substack{|K|=p \\ |L|=q}} u_{K,L} \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_L^*$$

une (p, q) -forme par rapport à la structure presque complexe J . Le fait que l'opérateur $T := \partial_J, \bar{\partial}_J, \theta_J$ où $\bar{\theta}_J$ vérifie la règle de Leibnitz implique l'égalité

$$Tu = \sum_{\substack{|K|=p \\ |L|=q}} \left(Tu_{K,L} \wedge \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_L^* + \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} u_{K,L} T \zeta_{k_j}^* \wedge \zeta_{\hat{K}_j}^* \wedge \bar{\zeta}_L^* + \sum_{j=1}^q (-1)^{p+j-1} u_{K,L} T \bar{\zeta}_{l_j}^* \wedge \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_{\hat{L}_j}^* \right),$$

où $\hat{K}_j := (k_1, \dots, \hat{k}_j, \dots, k_p)$ et analoguement pour \hat{L}_j . On déduit alors les expressions locales

$$\begin{aligned} \partial_J u = \sum_{\substack{|K|=p \\ |L|=q}} \left(\sum_{1 \leq r \leq n} (\zeta_r \cdot u_{K,L}) \zeta_r^* \wedge \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_L^* + \sum_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq r < t \leq n}} (-1)^j u_{K,L} \cdot \bar{M}_{r,t}^{k_j} \zeta_r^* \wedge \zeta_t^* \wedge \zeta_{\hat{K}_j}^* \wedge \bar{\zeta}_L^* \right. \\ \left. - (-1)^p \sum_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq r, t \leq n}} (-1)^j u_{K,L} \cdot \bar{U}_{t,r}^{l_j} \zeta_r^* \wedge \bar{\zeta}_t^* \wedge \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_{\hat{L}_j}^* \right) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_J u = \sum_{\substack{|K|=p \\ |L|=q}} \left(\sum_{1 \leq r \leq n} (\bar{\zeta}_r \cdot u_{K,L}) \bar{\zeta}_r^* \wedge \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_L^* + \sum_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq r, t \leq n}} (-1)^j u_{K,L} \cdot U_{r,t}^{k_j} \zeta_r^* \wedge \bar{\zeta}_t^* \wedge \zeta_{\hat{K}_j}^* \wedge \bar{\zeta}_L^* \right. \\ \left. + (-1)^p \sum_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq r < t \leq n}} (-1)^j u_{K,L} \cdot M_{r,t}^{l_j} \bar{\zeta}_r^* \wedge \bar{\zeta}_t^* \wedge \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_{\hat{L}_j}^* \right) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

$$\theta_J u = -(-1)^p \sum_{\substack{|K|=p \\ |L|=q}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq r < t \leq n}} (-1)^j u_{K,L} \cdot \bar{N}_{r,t}^{l_j} \zeta_r^* \wedge \zeta_t^* \wedge \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_{\hat{L}_j}^* \quad (2.4.3)$$

$$\bar{\theta}_J u = - \sum_{\substack{|K|=p \\ |L|=q}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq r < t \leq n}} (-1)^j u_{K,L} \cdot N_{r,t}^{k_j} \bar{\zeta}_r^* \wedge \bar{\zeta}_t^* \wedge \zeta_{\hat{K}_j}^* \wedge \bar{\zeta}_L^* \quad (2.4.4)$$

2.5 Relation entre la connexion de Chern du fibré tangent $T_{X,J}$ d'une variété presque complexe et la connexion de Levi-Civita

Pour $p = 1$ la définition (2.3.1) de la connexion $\bar{\partial}_{J,1}$ s'écrit sous la forme

$$\bar{\partial}_{J,1} \alpha(\eta) \cdot \xi = \eta \cdot \alpha(\xi) - \alpha([\eta, \xi]^{1,0})$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_{X,J}^{1,0}(U)$, $\eta \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{0,1})(U)$ et $\xi \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})(U)$. La connexion duale

$$\bar{\partial}_{T_{X,J}^{1,0}} : \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0}) \longrightarrow \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,1} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}^{1,0})$$

sur le fibré $T_{X,J}^{1,0}$, définie par la formule

$$(\bar{\partial}_{J,1} \alpha) \cdot \xi = \bar{\partial}_J(\alpha \cdot \xi) - \alpha \cdot \bar{\partial}_{T_{X,J}^{1,0}} \xi$$

vérifie alors l'identité

$$\bar{\partial}_{T_{X,J}^{1,0}} \xi(\eta) = [\eta, \xi]^{1,0}.$$

Soit $(\zeta_k)_k \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})^{\oplus n}(U)$ un repère local du fibré $T_{X,J}^{1,0}$ et $A''_J = \sum_r (A''_J)^r \bar{\zeta}_r^*$ la forme de connexion de $\bar{\partial}_{T_{X,J}^{1,0}}$ par rapport au repère en question. On a alors

$$\bar{\partial}_{T_{X,J}^{1,0}} \zeta_j(\bar{\zeta}_r) = -[\zeta_j, \bar{\zeta}_r]^{1,0} = \sum_k (A''_J)_{k,j}(\bar{\zeta}_r) \zeta_k = - \sum_k U_{j,r}^k \zeta_k.$$

On déduit alors la formule $(A''_J)_{k,j}^r = -U_{j,r}^k$. En utilisant l'isomorphisme \mathbb{C} -linéaire canonique du fibré $T_{X,J}^{1,0}$ avec le fibré tangent $T_{X,J}$ on déduit la connexion de type $(0,1)$ canonique

$$\bar{\partial}_{T_{X,J}} : \mathcal{E}(T_{X,J}) \longrightarrow \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,1} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})$$

du fibré tangent $T_{X,J}$. De façon explicite on a pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{T_{X,J}} \xi(\eta) &= \bar{\partial}_{T_{X,J}} \xi(\eta^{0,1}) = [\eta^{0,1} \xi^{1,0}]^{1,0} + [\eta^{1,0}, \xi^{0,1}]^{0,1} \\ &= \frac{1}{4} \left([\eta, \xi] + [J\eta, J\xi] + J[J\eta, \xi] - J[\eta, J\xi] \right). \end{aligned}$$

Soit $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$ une métrique hermitienne sur $T_{X,J}$. On désignera par

$$D_J^\omega : \mathcal{E}(T_{X,J}) \longrightarrow \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_{X,J})$$

la connexion de Chern du fibré hermitien $(T_{X,J}, \omega)$, autrement dit l'unique connexion ω -hermitienne telle que

$$(D_J^\omega)^{0,1} = \bar{\partial}_{T_{X,J}}.$$

Considérons maintenant la métrique riemannienne J -invariante associée $g := \omega(\cdot, J\cdot) \in \mathcal{E}(S_{\mathbb{R}}^2 T_X^*)(X)$. On désigne par

$$\nabla^g : \mathcal{E}(T_X) \longrightarrow \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_X)$$

la connexion de Levi-Civita relative à la métrique riemannienne g . Dans la suite on aura besoin de considérer la décomposition

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_{X,J} \simeq_{\mathbb{C}} \Lambda_{\mathbb{C}}^k (T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J} \simeq_{\mathbb{C}} \bigoplus_{p+q=k} \Lambda_J^{p,q} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}.$$

Le théorème suivant relie la connexion de Levi-Civita avec une connexion fondamentale de la géométrie presque complexe. Une autre formule peut être trouvée dans [Gau].

Théorème 2.5.1 *Soit (X, J) une variété presque complexe, $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$ une métrique hermitienne sur $T_{X,J}$ et $g := \omega(\cdot, J\cdot) \in \mathcal{E}(S_{\mathbb{R}}^2 T_X^*)(X)$ la métrique riemannienne J -invariante associée à ω . Il existe deux tenseurs réels*

$$\delta_J \omega \in \mathcal{E}((T_X^*)^{\otimes 2} \otimes_{\mathbb{R}} T_X)(X) \quad \text{et} \quad N_J^\omega \in \mathcal{E}((T_{X,J}^{0,1})^{*, \otimes 2} \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X)$$

tels que $d\omega = 0$ si et seulement si $\delta_J \omega = 0$; $N_J = 0$ si et seulement si $N_J^\omega = 0$. La connexion de Chern D_J^ω du fibré hermitien $(T_{X,J}, \omega)$ est relié à la connexion de Levi-Civita ∇^g par la formule

$$D_{J,\xi}^\omega \eta := \nabla_\xi^g \eta + \delta_J \omega(\xi, \eta) - N_J^\omega(\xi, \eta) \tag{2.5.1}$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$, ($U \subseteq X$ ouvert arbitraire). Le 2-tenseur réel $\delta_J \omega$ est défini par la formule

$$2\delta_J \omega := \gamma_{\omega, J}^{2,0} + \gamma_{\omega, J}^{0,2} + J\gamma_{\omega, J}^{1,1}(\cdot, J\cdot)$$

où

$$\gamma_{\omega, J}^{2,0} \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{2,0} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X, J})(X), \quad \gamma_{\omega, J}^{1,1} \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X, J})(X) \text{ et } \gamma_{\omega, J}^{0,2} \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,2} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X, J})(X)$$

sont les composantes, (par rapport à la structure presque complexe J) de la 2-forme réelle $\gamma_{\omega} \in \mathcal{E}(\Lambda^2 T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_X)(X)$ définie par la formule

$$\omega(\gamma_{\omega}(\xi, \eta), \mu) = d\omega(\xi, \eta, \mu)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta, \mu \in \mathcal{E}(T_X)(X)$. Enfin le $(0, 2)$ -tenseur réel N_J^{ω} est définie par la formule $N_J^{\omega} := \tau_J^{\omega} + \bar{\tau}_J^{\omega}$ où

$$\tau_J^{\omega} \in \mathcal{E}((T_{X, J}^{0,1})^{*, \otimes 2} \otimes_{\mathbb{C}} T_{X, J}^{1,0})(X)$$

est le $(0, 2)$ -tenseur défini par la formule

$$\omega(\tau_J^{\omega}(\xi, \eta), \mu) = \omega(\xi, [\eta, \mu]^{1,0})$$

pour tout $(0, 1)$ -champ de vecteurs $\xi, \eta, \mu \in \mathcal{E}(T_{X, J}^{0,1})(X)$. Si $N_J = 0$ alors $\gamma_{\omega, J}^{0,2} = 0$. La forme de torsion $\mathcal{T}_{D_J^{\omega}}$ de la connexion de Chern D_J^{ω} vérifie l'identité

$$\mathcal{T}_{D_J^{\omega}} = \gamma_{\omega, J}^{2,0} - N_J. \quad (2.5.2)$$

Remarque. Il est bien connue (cf. [Gau]) que pour tout connexion hermitienne D sur le fibré hermitien $(T_{X, J}, \omega)$ la composante $\mathcal{T}_D^{0,2}$ de type $(0, 2)$ de la torsion de D vérifie l'identité $\mathcal{T}_D^{0,2} = -N_J$. D'autre part il est aussi bien connue que la connexion de Chern du fibré hermitien $(T_{X, J}, \omega)$ peut être caractérisé par la condition $\mathcal{T}_D^{1,1} = 0$, dans l'espace des connexions hermitiennes D du fibré hermitien $(T_{X, J}, \omega)$.

Preuve du théorème

Expression de la connexion de Chern D_J^{ω} du fibré hermitien $(T_{X, J}, \omega)$.

Soit h_{ω} la forme hermitienne sur le fibré $T_{X, J}$ associée à ω . On rappelle qu'elle est définie par la formule $h_{\omega}(\xi, \eta) := \omega(\xi, J\eta) - i\omega(\xi, \eta)$. La connexion de Chern D_J^{ω} est définie par les formules

$$D_{J, \xi}^{\omega} \eta = D_{J, \xi^{1,0}}^{\omega} \eta + \bar{\partial}_{T_{X, J}} \eta(\xi^{0,1}),$$

$$h_{\omega}(D_{J, \xi^{1,0}}^{\omega} \eta, \mu) = \xi^{1,0} \cdot h_{\omega}(\eta, \mu) - h_{\omega}(\eta, \bar{\partial}_{T_{X, J}} \eta(\xi^{0,1})) \quad (2.5.3)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta, \mu \in \mathcal{E}(T_X)(U)$. L'identité $h_{\omega}(\xi, \eta) = h_{\omega}(\xi^{1,0}, \eta^{0,1}) = -2i\omega(\xi^{1,0}, \eta^{0,1})$ et la définition de la connexion canonique $\bar{\partial}_{T_{X, J}}$ montrent que la formule 2.5.3 est équivalente à la formule

$$\omega(D_{J, \xi^{1,0}}^{\omega} \eta, \mu^{0,1}) = \xi^{1,0} \cdot \omega(\eta^{1,0}, \mu^{0,1}) - \omega(\eta^{1,0}, [\xi^{1,0}, \mu^{0,1}]^{0,1})$$

On obtient en conclusion que la connexion de Chern peut être définie par la formule

$$\omega(D_{J, \xi}^{\omega} \eta, \mu^{0,1}) = \xi^{1,0} \cdot \omega(\eta^{1,0}, \mu^{0,1}) - \omega(\eta^{1,0}, [\xi^{1,0}, \mu^{0,1}]^{0,1}) + \omega([\xi^{0,1}, \eta^{1,0}]^{1,0}, \mu^{0,1}) \quad (2.5.4)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta, \mu \in \mathcal{E}(T_X)(U)$.

Expression de la connexion de Levi-Civita ∇^g .

La connexion de Levi-Civita $\nabla^g : \mathcal{E}(T_X) \longrightarrow \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_X)$ est définie par la formule classique

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi}^g \eta, \mu) &= \xi . g(\eta, \mu) - \mu . g(\xi, \eta) + \eta . g(\mu, \xi) \\ &\quad - g(\xi, [\eta, \mu]) + g(\mu, [\xi, \eta]) + g(\eta, [\mu, \xi]) \end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta, \mu \in \mathcal{E}(T_X)(U)$. Bien évidemment la définition précédente est équivalente à la formule

$$\begin{aligned} 2\omega(\nabla_{\xi}^g \eta, -i\mu^{0,1}) &= \xi . \omega(\eta^{1,0}, -i\mu^{0,1}) - \mu^{0,1} . \omega(\xi, J\eta) + \eta . \omega(\mu^{0,1}, i\xi^{1,0}) \\ &\quad - \omega(\xi, J[\eta, \mu^{0,1}]) + \omega(\mu^{0,1}, i[\xi, \eta]^{1,0}) + \omega(\eta, J[\mu^{0,1}, \xi]). \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Expression des 2-tenseurs $\gamma_{\omega, J}^{2,0}, \gamma_{\omega, J}^{1,1}(\cdot, J\cdot)$ et $\gamma_{\omega, J}^{0,2}$.

On rappelle que les éléments de l'espace vectoriel $\Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x}$ s'identifient naturellement avec les éléments du type $u + \bar{u}$, $u \in \Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x}^{1,0}$ (voir la section 2.1). On a donc les identités

$$\gamma_{\omega, J}^{2,0} = \hat{\gamma}_{\omega, J}^{2,0} + \overline{\hat{\gamma}_{\omega, J}^{2,0}}, \quad \gamma_{\omega, J}^{1,1} = \hat{\gamma}_{\omega, J}^{1,1} + \overline{\hat{\gamma}_{\omega, J}^{1,1}}, \quad \gamma_{\omega, J}^{0,2} = \hat{\gamma}_{\omega, J}^{0,2} + \overline{\hat{\gamma}_{\omega, J}^{0,2}},$$

sur T_X , avec

$$\hat{\gamma}_{\omega, J}^{2,0} \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{2,0} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}^{1,0})(X), \quad \hat{\gamma}_{\omega, J}^{1,1} \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}^{1,0})(X) \text{ et } \hat{\gamma}_{\omega, J}^{0,2} \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,2} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}^{1,0})(X).$$

La décomposition $d\omega = \partial_J \omega + \bar{\partial}_J \omega - \theta_J \omega - \bar{\theta}_J \omega$ implique alors les identités

$$\omega(\hat{\gamma}_{\omega, J}^{2,0}(\xi, \eta), \mu^{0,1}) = \omega(\hat{\gamma}_{\omega, J}^{2,0}(\xi^{1,0}, \eta^{1,0}), \mu^{0,1}) = \partial_J \omega(\xi^{1,0}, \eta^{1,0}, \mu^{0,1}),$$

$$\begin{aligned} \omega(\hat{\gamma}_{\omega, J}^{1,1}(\xi, J\eta), \mu^{0,1}) &= \omega(\hat{\gamma}_{\omega, J}^{1,1}(\xi^{1,0}, -i\eta^{0,1}), \mu^{0,1}) + \omega(\hat{\gamma}_{\omega, J}^{1,1}(\xi^{0,1}, i\eta^{1,0}), \mu^{0,1}) = \\ &= \bar{\partial}_J \omega(\xi^{1,0}, -i\eta^{0,1}, \mu^{0,1}) + \bar{\partial}_J \omega(\xi^{0,1}, i\eta^{1,0}, \mu^{0,1}), \end{aligned}$$

$$\omega(\hat{\gamma}_{\omega, J}^{0,2}(\xi^{0,1}, \eta^{0,1}), \mu^{0,1}) = -\bar{\theta}_J \omega(\xi^{0,1}, \eta^{0,1}, \mu^{0,1})$$

En explicitant les formes $\partial_J \omega$, $\bar{\partial}_J \omega$ et $\bar{\theta}_J \omega$ dans les identités précédentes on obtient les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \omega(\hat{\gamma}_{\omega, J}^{2,0}(\xi, \eta), \mu^{0,1}) &= \xi^{1,0} . \omega(\eta^{1,0}, \mu^{0,1}) - \eta^{1,0} . \omega(\xi^{1,0}, \mu^{0,1}) \\ &\quad - \omega([\xi^{1,0}, \eta^{1,0}]^{1,0}, \mu^{0,1}) + \omega([\xi^{1,0}, \mu^{0,1}]^{0,1}, \eta^{1,0}) - \omega([\eta^{1,0}, \mu^{0,1}]^{0,1}, \xi^{1,0}), \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

$$\begin{aligned}
\omega(\hat{\gamma}_{\omega,J}^{1,1}(\xi, J\eta), \mu^{0,1}) &= i\eta^{0,1} \cdot \omega(\xi^{1,0}, \mu^{0,1}) - i\mu^{0,1} \cdot \omega(\xi^{1,0}, \eta^{0,1}) \\
&\quad + i\xi^{0,1} \cdot \omega(\eta^{1,0}, \mu^{0,1}) - i\mu^{0,1} \cdot \omega(\eta^{1,0}, \xi^{0,1}) \\
&+ i\omega([\xi^{1,0}, \eta^{0,1}]^{1,0}, \mu^{0,1}) - i\omega([\xi^{1,0}, \mu^{0,1}]^{1,0}, \eta^{0,1}) + i\omega([\eta^{0,1}, \mu^{0,1}]^{0,1}, \xi^{1,0}) \\
&+ i\omega([\eta^{1,0}, \xi^{0,1}]^{1,0}, \mu^{0,1}) - i\omega([\eta^{1,0}, \mu^{0,1}]^{1,0}, \xi^{0,1}) + i\omega([\xi^{0,1}, \mu^{0,1}]^{0,1}, \eta^{1,0})
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

et en fin

$$\begin{aligned}
\omega(\hat{\gamma}_{\omega,J}^{0,2}(\xi^{0,1}, \eta^{0,1}), \mu^{0,1}) &= -\omega([\xi^{0,1}, \eta^{0,1}]^{1,0}, \mu^{0,1}) \\
&\quad + \omega([\xi^{0,1}, \mu^{0,1}]^{1,0}, \eta^{0,1}) - \omega([\eta^{0,1}, \mu^{0,1}]^{1,0}, \xi^{0,1}).
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

En remplaçant $-i\mu^{0,1}$ à la place de $\mu^{0,1}$ dans les identités 2.5.6 et 2.5.8, en sommant les identités obtenues avec l'identité 2.5.7 et en tenant compte de la formule 2.5.4 on obtient l'identité voulue 2.5.1. Le fait que le 2-tenseur $\gamma_{\omega,J}^{1,1}(\cdot, J\cdot)$ soit symétrique implique l'identité

$$\mathcal{T}_{D^\omega}(\xi, \eta) = \left[\gamma_{\omega,J}^{2,0} + \gamma_{\omega,J}^{0,2} \right](\xi, \eta) - N_J^\omega(\xi, \eta) + N_J^\omega(\eta, \xi).$$

pour la forme de torsion de la connexion de Chern. Pour montrer l'identité (2.5.2) on va montrer l'identité

$$-N_J(\xi, \eta) = \gamma_{\omega,J}^{0,2}(\xi, \eta) - N_J^\omega(\xi, \eta) + N_J^\omega(\eta, \xi)$$

pour tout champs de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$. Il suffit de montrer pour tout $(0,1)$ -champs de vecteurs $\xi, \eta, \mu \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{0,1})(U)$, l'identité

$$-\bar{\tau}_J(\xi, \eta) = \hat{\gamma}_{\omega,J}^{0,2}(\xi, \eta) - \tau_J^\omega(\xi, \eta) + \tau_J^\omega(\eta, \xi), \tag{2.5.9}$$

ou $\bar{\tau}_J \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,2} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}^{1,0})(X)$ désigne le conjugué du tenseur de la torsion de la structure presque complexe J . Si on pose par définition

$$S(\xi, \eta) := \hat{\gamma}_{\omega,J}^{0,2}(\xi, \eta) - \tau_J^\omega(\xi, \eta) + \tau_J^\omega(\eta, \xi),$$

on aura l'égalité

$$\begin{aligned}
\omega(S(\xi, \eta), \mu) &= -\omega([\xi, \eta]^{1,0}, \mu) + \omega([\xi, \mu]^{1,0}, \eta) \\
&\quad - \omega([\eta, \mu]^{1,0}, \xi) - \omega(\xi, [\eta, \mu]^{1,0}) + \omega(\eta, [\xi, \mu]^{1,0}).
\end{aligned}$$

On obtient en conclusion l'identité

$$\omega(S(\xi, \eta), \mu) = -\omega([\xi, \eta]^{1,0}, \mu)$$

pour tout $(0,1)$ -champs de vecteurs $\xi, \eta, \mu \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{0,1})(U)$, ce qui prouve l'identité (2.5.9). \square

2.6 La courbure de Chern des puissances de Schur du fibré des $(1, 0)$ -formes

On a la définition suivante.

Définition 2.6.1 *Le tenseur de courbure de Chern*

$$\mathcal{C}_h(F_J^\lambda) \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} \text{End}_{\mathbb{C}}(F_J^\lambda))(X)$$

du fibré vectoriel hermitien $(F_J^\lambda, h) \longrightarrow (X, J)$ est la $(1, 1)$ -forme donnée par la formule

$$\mathcal{C}_h(F_J^\lambda) := \Theta(D_{F_J^\lambda}^h)^{1,1}.$$

La courbure de Chern

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h \in \mathcal{E}(\text{Herm}(T_{X,J} \otimes_{\mathbb{C}} F_J^\lambda))(X)$$

est la forme hermitienne sur le fibré vectoriel complexe $T_{X,J} \otimes_{\mathbb{C}} F_J^\lambda$ définie par la formule

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma, \eta \otimes \tau) := h(\mathcal{C}_h(F_J^\lambda)(\xi_J^{1,0}, \eta_J^{0,1}) \cdot \sigma, \tau)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ et sections $\sigma, \tau \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ sur un ouvert U quelconque.

La courbure de Chern $\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h$ est une forme hermitienne sur le fibré vectoriel complexe $T_{X,J} \otimes_{\mathbb{C}} F_J^\lambda$ grâce à la relation (2.2.2) (remarquée dans la section 2.2). Soit

$$\mathcal{C}_h(F_J^\lambda) = \sum_{\substack{1 \leq l, m \leq r_\lambda \\ 1 \leq j, k \leq n}} C_{l,m}^{j,k} \zeta_j^* \wedge \bar{\zeta}_k^* \otimes e_m^* \otimes e_l$$

l'expression locale du tenseur de courbure de Chern, (ici $r_\lambda := r_{g_{\mathbb{C}} F_J^\lambda}$). Si le repère local $(e_l)_l \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)^{\oplus r_\lambda}(U)$ est $h(x_0)$ -orthonormé en un point x_0 alors l'expression locale de la courbure de Chern s'écrit sous la forme

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(x_0) = \sum_{\substack{1 \leq l, m \leq r_\lambda \\ 1 \leq j, k \leq n}} \overline{C_{l,m}^{j,k}(x_0)} \zeta_j^* \otimes e_m^* \otimes \bar{\zeta}_k^* \otimes \bar{e}_l^*$$

où les coefficients vérifient la relation $\overline{C_{l,m}^{j,k}(x_0)} = C_{m,l}^{k,j}(x_0)$ vue dans la section 2.2. Remarquons que $(\zeta_k^*|_{T_X})_k \in \mathcal{E}(T_{X,J}^*)^{\oplus n}(U)$ est le repère dual du repère $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in \mathcal{E}(T_{X,J})^{\oplus n}(U)$ par rapport à la structure J . Bien évidemment il est équivalent de donner soit le tenseur de courbure soit la courbure de Chern. On aura besoin de la définition suivante.

Définition 2.6.2 *Une section $\sigma \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ est dite presque-holomorphe au point $x \in U$ si on a $\bar{\partial}\sigma(x) = 0$. Un repère local $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ est dit presque-holomorphe spécial au point $x \in U$ si $\bar{\partial}\sigma_k(x) = 0$ et $(D^h)^{1,0}\bar{\partial}\sigma_k(x) = 0$ pour tout k .*

La définition de repère local presque-holomorphe spécial en un point est indépendante de la métrique hermitienne. En effet si A_σ'' est la matrice de la connexion de type $(0, 1)$ canonique du fibré vectoriel F_J^λ relative au repère $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$, la condition que le repère local $(\sigma_k)_k$ soit presque-holomorphe spécial au point x s'exprime par les égalités $A_\sigma''(x) = 0$ et $\partial_J A_\sigma''(x) = 0$. Le lemme élémentaire suivant donne une première idée de l'utilité de la notion de courbure de Chern.

Lemme 2.6.0.1 Soient $\sigma, \tau \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ deux sections presque-holomorphes en un point $x \in U$ du fibré hermitien $(F_J^\lambda, h) \longrightarrow (X, J)$ et $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ deux champs de vecteurs réels. Alors au point x on a l'identité

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma, \eta \otimes \tau)|_x &= \bar{\partial}_J \partial_J h(\sigma, \tau)(\xi^{1,0}, \eta^{0,1})|_x + h(\xi_D^{1,0} \cdot \sigma, \eta_D^{1,0} \cdot \tau)|_x \\ &+ h(\xi_D^{1,0} \cdot \eta_D^{0,1} \cdot \sigma, \tau)|_x + h(\sigma, \eta_D^{1,0} \cdot \xi_D^{0,1} \cdot \tau)|_x. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Soit $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ un repère local presque-holomorphe spécial au point $x \in U$. Alors au point x on a l'identité

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma_k, \eta \otimes \sigma_l)|_x = \bar{\partial}_J \partial_J h(\sigma_k, \sigma_l)(\xi^{1,0}, \eta^{0,1})|_x + h(\xi_D^{1,0} \cdot \sigma_k, \eta_D^{1,0} \cdot \sigma_l)|_x. \quad (2.6.2)$$

En particulier

$$i \partial_J \bar{\partial}_J |\sigma_k|_h^2 (\xi, J\xi)|_x = -2 \mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma_k, \xi \otimes \sigma_k)|_x + 2 |\xi_D^{1,0} \cdot \sigma_k|_h^2|_x. \quad (2.6.3)$$

Dans le cas d'une variété complexe (X, J) et d'un fibré vectoriel holomorphe hermitien $(F, h) \longrightarrow (X, J)$ on a pour toutes sections holomorphes $\sigma, \tau \in \mathcal{O}(F)(U)$ l'identité

$$\mathcal{C}_F^h(\xi \otimes \sigma, \eta \otimes \tau) = \bar{\partial}_J \partial_J h(\sigma, \tau)(\xi^{1,0}, \eta^{0,1}) + h(\xi_D^{1,0} \cdot \sigma, \eta_D^{1,0} \cdot \tau)$$

sur l'ouvert U . On déduit en particulier la formule remarquable suivante

$$i \partial_J \bar{\partial}_J |\sigma|_h^2 (\xi, J\xi) = -2 \mathcal{C}_F^h(\xi \otimes \sigma, \xi \otimes \sigma) + 2 |\xi_D^{1,0} \cdot \sigma|_h^2$$

qui montre que pour tout section holomorphe $\sigma \in \mathcal{O}(F)(U)$ la fonction $|\sigma|_h^2$ est plurisousharmonique sur l'ouvert U si la courbure du fibré F est négative au sens de Griffiths, autrement dit si $\mathcal{C}_F^h(\xi \otimes \sigma, \xi \otimes \sigma) \leq 0$ pour tout $\xi \in T_{X,x}$ et $\sigma \in F_x$, (voir [Gri] et [Dem-1], chapitre VII pour des applications fondamentales de la notion de courbure au sens de Griffiths). On déduit en particulier que si la variété complexe X est compacte, connexe et $\sigma \in \mathcal{O}(F)(X)$ est une section globale d'un fibré vectoriel holomorphe F admettant une métrique hermitienne à courbure négative au sens de Griffiths alors le section σ est identiquement nulle sur X si elle s'annule en un point. On remarque que la notion de positivité (négativité) au sens de Griffiths pour un fibré (F_J^λ, h) ne signifie rien d'autre que pour tout vecteur réel $\xi \in T_{X,J}$ l'endomorphisme h -hermitien $i \mathcal{C}_h(F_J^\lambda)(\xi, J\xi)$ est positif (négatif). Si la courbure du fibré (F_J^λ, h) est strictement négative au sens de Griffiths en un point x alors on déduit d'après la formule (2.6.3) que les fonctions $|\sigma_k|_h^2$ sont strictement J -plurisousharmoniques au voisinage du point x , (voir le chapitre III pour la notion de fonction strictement J -plurisousharmoniques et pour plus de détails).

Preuve du lemme 2.6.0.1. On a l'égalité

$$\partial_J \bar{\partial}_J h(\sigma, \tau) = \{D_F^{1,0} \bar{\partial}_F \sigma, \tau\}_h - \{\bar{\partial}_F \sigma, \bar{\partial}_F \tau\}_h + \{D_F^{1,0} \sigma, D_F^{1,0} \tau\}_h + \{\sigma, \bar{\partial}_F D_F^{1,0} \tau\}_h.$$

Le fait que $\deg \sigma = \deg \tau = 0$ et l'identité $\{\mathcal{C}_h(F) \cdot \sigma, \tau\}_h + \{\sigma, \mathcal{C}_h(F) \cdot \tau\}_h = 0$ impliquent

$$\begin{aligned} \partial_J \bar{\partial}_J h(\sigma, \tau) &= -\{\mathcal{C}_h(F) \cdot \sigma, \tau\}_h - \{\sigma, D_F^{1,0} \bar{\partial}_F \tau\}_h + \{D_F^{1,0} \bar{\partial}_F \sigma, \tau\}_h \\ &\quad - \{\bar{\partial}_F \sigma, \bar{\partial}_F \tau\}_h + \{D_F^{1,0} \sigma, D_F^{1,0} \tau\}_h. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

En explicitant l'égalité précédente par rapport au champs de vecteurs réels ξ et η on obtient l'identité

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_F^h(\xi \otimes \sigma, \eta \otimes \tau) &= \bar{\partial}_J \partial_J h(\sigma, \tau)(\xi^{1,0}, \eta^{0,1}) + h(\xi_D^{1,0} \cdot \eta_D^{0,1} \cdot \sigma, \tau) + h(\sigma, \eta_D^{1,0} \cdot \xi_D^{0,1} \cdot \tau) \\ &+ h([\eta^{0,1}, \xi^{1,0}]_D^{0,1} \cdot \sigma, \tau) + h(\sigma, [\xi^{0,1}, \eta^{1,0}]_D^{0,1} \cdot \tau) + h(\xi_D^{1,0} \cdot \sigma, \eta_D^{1,0} \cdot \tau) + h(\eta_D^{0,1} \cdot \sigma, \xi_D^{0,1} \cdot \tau) \end{aligned}$$

qui permet de déduire la formule (2.6.1). Soit $(\sigma_k)_k$ le repère de l'énoncé du lemme. On déduit d'après l'identité (2.6.4) l'égalité suivante au point x ;

$$\partial_J \bar{\partial}_J h(\sigma_k, \sigma_l)|_x = -\{\mathcal{C}_h(F) \cdot \sigma_k, \sigma_l\}_h|_x + \{D_F^{1,0} \sigma_k, D_F^{1,0} \sigma_l\}_h|_x$$

qui permet de conclure la preuve du lemme. \square

Dans la sous-section suivante on montre l'existence de repères locaux $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ presque-holomorphes spéciaux en un point $x \in U$ tels que $D_J^\omega \sigma_k(x) = 0$ pour tout k . Dans ce cas on déduit d'après les formules (2.6.2) et (2.6.3) les identités suivantes au point x ;

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{X,J}^\omega(\xi \otimes \sigma_k, \eta \otimes \sigma_l)|_x &= \bar{\partial}_J \partial_J h(\sigma_k, \sigma_l)(\xi^{1,0}, \eta^{0,1})|_x \\ i \partial_J \bar{\partial}_J |\sigma_k|_h^2(\xi, J\xi)|_x &= -2\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma_k, \xi \otimes \sigma_k)|_x, \end{aligned}$$

pour tout champs de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$.

2.6.1 Interprétation géométrique de la notion de courbure de Chern dans le cas presque complexe

Le lemme fondamental suivant est une version presque complexe d'un lemme classique de la géométrie hermitienne complexe (voir [Dem-1], chapitre V).

Lemme 2.6.1.1 *Soit (X, J) une variété presque complexe et $(F_J^\lambda, h) \rightarrow (X, J)$ le fibré vectoriel hermitien d'une puissance de Schur du fibré des $(1, 0)$ -formes. Soient (z_1, \dots, z_n) des coordonnées \mathcal{C}^∞ complexes centrées en un point x telles que $J(x) = J_0$, où J_0 désigne la structure presque complexe canonique relative à ces coordonnées. Il existe un repère local $(\sigma_k)_k \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)^{\oplus r_\lambda}(U_x)$ presque-holomorphe spécial au point x pour lequel les coefficients de la métrique hermitienne h s'écrivent sous la forme*

$$h(\sigma_l, \sigma_m) = \delta_{l,m} + \sum_{1 \leq j, k \leq n} H_{l,m}^{j,\bar{k}} z_j \bar{z}_k + O(|z|^3).$$

Quel que soit le choix du repère $(\sigma_k)_k \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)^{\oplus r_\lambda}(U_x)$ presque-holomorphe spécial au point x pour lequel les coefficients de la métrique hermitienne h s'écrivent sous la forme précédente on a les expressions suivantes pour le tenseur de courbure et la courbure de Chern au point x :

$$\mathcal{C}_h(F_J^\lambda)|_x = - \sum_{\substack{1 \leq l, m \leq r_\lambda \\ 1 \leq j, k \leq n}} H_{l,m}^{j,\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes \sigma_m^* \otimes \sigma_l \quad (2.6.5)$$

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma_l, \eta \otimes \sigma_m)|_x = \bar{\partial}_J \partial_J h(\sigma_l, \sigma_m)(\xi^{1,0}, \eta^{0,1})|_x, \quad (2.6.6)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$ et tout indice l, m .

Le lemme nous montre que la courbure de Chern au point x mesure l'obstruction à l'existence de repères locaux presque-holomorphes spéciaux et orthonormaux à l'ordre deux en x .

Preuve. Soit $e \equiv (e_k)_k \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)^{\oplus r_\lambda}(U_x)$ un repère local $h(x)$ -orthonormé au point x . On peut supposer que la forme de la connexion de Chern $D_{F^\lambda}^h$ relative à ce repère vérifie la condition $A_e(x) = 0$. En effet en effectuant un changement de repère $e' = e \cdot g_0$ avec $g_0 = \mathbb{I} + O(|z|)$, $dg_0(x) = -A_e(x)$ on a que la forme de connexion $A_{e'} = g_0^{-1}(dg_0 + A_e \cdot g_0)$ relative au repère e' vérifie la propriété voulue. Soient

$$(H_e)_{l,m} = \delta_{l,m} + \sum_{1 \leq j \leq n} \left(H_{l,m}^j z_j + \overline{H}_{m,l}^j \bar{z}_j \right) \\ + \sum_{1 \leq j,k \leq n} \left(H_{l,m}^{j,k} z_j z_k + \overline{H}_{m,l}^{j,k} \bar{z}_j \bar{z}_k + \hat{H}_{l,m}^{j,\bar{k}} z_j \bar{z}_k \right) + O(|z|^3)$$

les coefficients de la métrique hermitienne h par rapport au repère e . La relation

$$A'_e = \overline{H}_e^{-1} (\partial_J \overline{H}_e - \overline{A}_e'^t \overline{H}_e)$$

combinée avec les égalités $A'_e(x) = 0$, $A''_e(x) = 0$ implique alors $\bar{\partial}_J H_e(x) = 0$ et donc $H_{l,m}^j = 0$ pour tout les indices j, l, m . Par rapport aux coordonnées choisies on a l'écriture

$$(\partial_J A''_e)_{m,l} = \sum_{1 \leq j,k \leq n} (\partial_J A''_e)_{m,l}^{j,\bar{k}}(0) dz_j \wedge d\bar{z}_k + O(|z|).$$

Considérons maintenant le changement de repère $\sigma = e \cdot g$ donné par la formule

$$\sigma_l = e_l - \sum_{\substack{1 \leq m \leq r_\lambda \\ 1 \leq j,k \leq n}} \left(H_{l,m}^{j,k} z_j z_k + (\partial_J A''_e)_{m,l}^{j,\bar{k}}(0) z_j \bar{z}_k \right) e_m \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U_x).$$

Un calcul élémentaire montre que les coefficients de la métrique hermitienne h par rapport à ce repère s'écrivent sous la forme

$$(H_\sigma)_{l,m} = \delta_{l,m} + \sum_{j,k} H_{l,m}^{j,\bar{k}} z_j \bar{z}_k + O(|z|^3).$$

Si A''_σ désigne la forme de connexion relative au repère σ on a la formule de changement de matrice de connexion $A''_\sigma = g^{-1}(\bar{\partial}_J g + A''_e \cdot g)$. Le fait que $A''_e(x) = 0$ et $\bar{\partial}_J g(x) = 0$ implique alors l'égalité $A''_\sigma(x) = 0$. De plus au point x on a l'égalité

$$\partial_J A''_\sigma(x) = \partial_J \bar{\partial}_J g(x) + \partial_J A''_e(x) = 0.$$

On déduit alors d'après la formule 2.2.3 que la courbure de Chern s'écrit au point x sous la forme

$$\mathcal{C}_h(F_J^\lambda)|_x = - \sum_{m,l} \partial_J \bar{\partial}_J h_{l,m}(x) \otimes \sigma_m^* \otimes_J \sigma_l.$$

qui montre la validité de la formule (2.6.5). La formule (2.6.6) est une conséquence immédiate des identités

$$A'_\sigma(x) = \overline{H}_\sigma^{-1} (\partial_J \overline{H}_\sigma - \overline{A}_\sigma'^t \overline{H}_\sigma)(x) = 0$$

et (2.6.2). □

2.6.2 La courbure de Chern du fibré tangent d'une variété presque complexe

Dans le cas du fibré tangent d'une variété presque complexe le tenseur de courbure de Chern

$$\mathcal{C}_\omega(T_{X,J}) := \Theta(D_J^\omega)^{1,1} \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X)$$

s'écrit sous la forme locale

$$\mathcal{C}_\omega(T_{X,J}) = \sum_{1 \leq j,k,l,m \leq n} C_{l,m}^{j,k} \zeta_j^* \wedge \bar{\zeta}_k^* \otimes \zeta_m^* \otimes_J \zeta_l. \quad (2.6.7)$$

La notation $\alpha \otimes \zeta_l^* \otimes_J \zeta_m$ où α est une $(1,1)$ -forme par exemple doit être interprétée sous la forme suivante. Si $\xi_1, \xi_2 \in T_{X,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $\eta = \eta_l \zeta_l + \bar{\eta}_l \bar{\zeta}_l \in T_{X,x}$ alors

$$\alpha \otimes \zeta_l^* \otimes_J \zeta_m(\xi_1, \xi_2, \eta) = \alpha(\xi_1, \xi_2) \eta_l \zeta_m + \overline{\alpha(\xi_1, \xi_2)} \eta_l \zeta_m.$$

En particulier la courbure de Chern du fibré tangent

$$\mathcal{C}_{X,J}^\omega \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{*,\otimes 2} \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,-J}^{*,\otimes 2})(X)$$

est définie par la formule

$$\mathcal{C}_{X,J}^\omega(\xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2) := h_\omega(\mathcal{C}_\omega(T_{X,J})(\xi_1^{1,0}, \xi_2^{0,1}) \cdot \eta_1, \eta_2)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi_j, \eta_j \in \mathcal{E}(T_X)(U)$, $j = 1, 2$, où h_ω est la forme hermitienne associée à ω . On rappelle qu'elle est définie par la formule $h_\omega(\xi, \eta) := \omega(\xi, J\eta) - i\omega(\xi, \eta)$. Le fait que $\mathcal{C}_{X,J}^\omega$ soit une forme hermitienne sur le fibré $T_{X,J}^{\otimes 2}$ implique que la quantité $\mathcal{C}_{X,J}^\omega(\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta)$, $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ est réelle. On déduit alors les identités

$$\mathcal{C}_{X,J}^\omega(\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta) = \omega(\mathcal{C}_\omega(T_{X,J})(\xi, J\xi) \cdot \eta, \eta)$$

et

$$\omega(\mathcal{C}_\omega(T_{X,J})(\xi, J\xi) \cdot \eta, J\eta) = 0.$$

La courbure de Chern du fibré tangent s'écrit en un point x où le repère $(\zeta_k)_k \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})^{\oplus n}(U)$ est choisie $\omega(x)$ -orthonormé sous la forme

$$\mathcal{C}_{X,J}^\omega(x) = \sum_{1 \leq j,k,l,m \leq n} C_{l,m}^{j,k}(x) \zeta_j^* \otimes \zeta_m^* \otimes \bar{\zeta}_k^* \otimes \bar{\zeta}_l^*$$

avec la relation de symétrie hermitienne $\overline{C_{l,m}^{j,k}(x)} = C_{m,l}^{k,j}(x)$.

Remarque. Le fait que la connexion de Chern soit hermitienne implique que en un point x on a $\Theta(D_J^\omega)|_x^{0,2} = 0$ si et seulement si $\Theta(D_J^\omega)|_x^{2,0} = 0$. On peut montrer que $\Theta(D_J^\omega)|_x^{0,2} = 0$ si le jet d'ordre un de la forme de torsion de la structure presque complexe est nul au point x .

2.7 Coordonnées presque complexes d'ordre N en un point

Soient (z_1, \dots, z_n) des coordonnées locales \mathcal{C}^∞ centrées en $x \in X$ telles que le repère local $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n})$ soit une base complexe de $T_{X,J,x}^{1,0}$ au point x . On désigne par $M_J \in M_{2n,2n}(\mathcal{E})$ la matrice de la structure presque complexe $J \in \mathcal{E}(\text{End}_{\mathbb{C}}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))(X)$ par rapport au repère complexe $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n})$. Le fait que $\bar{J} = J$ implique que la matrice M_J s'écrit sous la forme :

$$M_J(z) = \begin{pmatrix} A(z) & \bar{B}(z) \\ B(z) & \bar{A}(z) \end{pmatrix}$$

On voit alors que la structure presque complexe s'exprime sous la forme :

$$J(z) = \sum_{k,l} \left(A_{k,l}(z) dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} + B_{k,l}(z) dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \bar{B}_{k,l}(z) d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{A}_{k,l}(z) d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right)$$

avec $A(0) = iI_n$, $B(0) = 0_n$. Si on suppose que la structure presque complexe est intégrable il existe d'après le théorème de Newlander-Nirenberg des coordonnées locales holomorphes (z_1, \dots, z_n) . La structure presque complexe s'écrit alors par rapport à ces coordonnées sous la forme

$$J(z) = J_0 = i \sum_k \left(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) \quad (2.7.1)$$

autrement dit $A(z) \equiv iI_n$, $B(z) \equiv 0_n$. Avec les notations introduites précédemment on a la proposition suivante.

Proposition 2.7.1 *Pour tout point x d'une variété presque complexe (X, J) et pour tout entier $N \geq 2$ il existe des coordonnées (z_1, \dots, z_n) de classe \mathcal{C}^∞ centrées en x telles que les matrices $A(z)$ et $B(z)$ de la structure presque complexe J relatives à ces coordonnées admettent les développements asymptotiques*

$$A(z) = iI_n + \frac{i}{2} \sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq N \\ |\alpha|, |\beta| \geq 1}} A^{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+1}) \quad (2.7.2)$$

$$B(z) = \sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq N \\ |\alpha| \geq 1}} B^{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+1}) \quad (2.7.3)$$

où $A^{\alpha,\beta}, B^{\alpha,\beta} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ sont des matrices telles que les coefficients des matrices $B^{\alpha,\beta}$ vérifient la propriété ; $B_{k,l}^{\alpha,\beta} = 0$ pour tout $l \geq \max\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \alpha_k \neq 0\}$. Les matrices $A^{\alpha,\beta}$ sont obtenues à partir des matrices $B^{\alpha,\beta}$, (avec la convention $B^{0,\beta} := 0$), grâce à la formule :

$$A^{\alpha,\beta} = \sum_{k=1}^{[\alpha+\beta/2]} \sum_{\substack{\sum_{r=1}^k (\rho_r + \mu_r) = \alpha \\ \sum_{r=1}^k (\lambda_r + \gamma_r) = \beta}} (-4)^{-(k-1)} \overrightarrow{\prod}_{1 \leq r \leq k} \bar{B}^{\lambda_r, \mu_r} \cdot B^{\rho_r, \gamma_r} \quad (2.7.4)$$

où le symbole $[c]$ désigne la partie entière de c et le symbole de produit avec une flèche vers la droite désigne le produit non commutatif des termes qui sont écrits en ordre croissant de l'indice vers la droite.

(Remarquons que dans la formule (2.7.4) la convention $B^{0,\beta} = 0$ implique que les sommes non nulles sont celles correspondantes aux multi-indices $|\lambda_r|, |\rho_r| \geq 1$).

Définition 2.7.2 *Les coordonnées qui vérifient les propriétés de l'énoncé de la proposition précédente seront appelées coordonnées presque complexes d'ordre N en x par rapport à la structure J .*

Dans le cas particulier $N = 3$ la formule (2.7.4) s'écrit sous la forme ;

$$A^{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \bar{B}^\lambda \cdot B^{\rho,\gamma}$$

On ré-énonce la proposition précédente dans le cas $N = 3$ sous une forme plus explicite et pratique pour les calculs relatifs à la sous-section qui suivra.

Corollaire 2.7.3 *Pour tout point x d'une variété presque complexe (X, J) il existe des coordonnées (z_1, \dots, z_n) de classe C^∞ centrées en x telles que les matrices $A(z)$ et $B(z)$ de la structure presque complexe J relatives à ces coordonnées admettent les développements asymptotiques*

$$B(z) = \sum_r B^r z_r + \sum_{r,s} \left(B^{r,s} z_r z_s + B^{r,\bar{s}} z_r \bar{z}_s \right) + \sum_{r,s,t} \left(B^{r,s,t} z_r z_s z_t + B^{r,s,\bar{t}} z_r z_s \bar{z}_t + B^{r,\bar{s},\bar{t}} z_r \bar{z}_s \bar{z}_t \right) + O(|z|^4) \quad (2.7.5)$$

$$A(z) = i I_n + \frac{i}{2} \sum_{r,s} \bar{B}^r \cdot B^s z_s \bar{z}_r + \frac{i}{4} \sum_{r,s,t} \left(\bar{B}^{t,\bar{r}} \cdot B^s + \bar{B}^{t,\bar{s}} \cdot B^r + 2\bar{B}^t \cdot B^{r,s} \right) z_r z_s \bar{z}_t + \frac{i}{4} \sum_{r,s,t} \left(\bar{B}^t \cdot B^{r,\bar{s}} + \bar{B}^s \cdot B^{r,\bar{t}} + 2\bar{B}^{s,t} \cdot B^r \right) z_r \bar{z}_s \bar{z}_t + O(|z|^4) \quad (2.7.6)$$

où $B^r, B^{r,s}, B^{r,\bar{s}}, B^{r,s,t}, B^{r,s,\bar{t}}, B^{r,\bar{s},\bar{t}} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ sont des matrices telles que $B^{r,s}$ soit symétrique par rapport aux indices r, s , $B^{r,s,t}$ par rapport à r, s, t , $B^{r,s,\bar{t}}$ par rapport à r, s , $B^{r,\bar{s},\bar{t}}$ par rapport à s, t et $B_{k,l}^r = 0$ pour $r \leq l$, $B_{k,l}^{r,s} = 0$ pour $r, s \leq l$, $B_{k,l}^{r,\bar{s}} = 0$ pour $r \leq l$, $B_{k,l}^{r,s,t} = 0$ pour $r, s, t \leq l$, $B_{k,l}^{r,s,\bar{t}} = 0$ pour $r, s \leq l$, et $B_{k,l}^{r,\bar{s},\bar{t}} = 0$ pour $r \leq l$. De plus si on considère l'expression locale de la forme de torsion de la structure presque complexe

$$\tau_J = \sum_{1 \leq k < l \leq n} [\zeta_k, \zeta_l]_J^{0,1} \otimes \zeta_k^* \wedge \zeta_l^* = \sum_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ 1 \leq r \leq n}} \bar{N}_{k,l}^r \zeta_k^* \wedge \zeta_l^* \otimes \bar{\zeta}_r$$

où $\zeta_l := (\partial/\partial z_l)_J^{1,0} \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})(U_x)$, $l = 1, \dots, n$ est le repère locale du fibré des $(1,0)$ -vecteurs $T_{X,J}^{1,0}$ issue des coordonnées (z_1, \dots, z_n) on a l'expression

$$\bar{N}_{k,l}^r(z) = \frac{i}{2} B_{r,k}^l + \frac{i}{2} \sum_s \left[2(B_{r,k}^{l,s} - B_{r,l}^{k,s}) z_s + B_{r,k}^{l,\bar{s}} \bar{z}_s \right] + O(|z|^2)$$

pour tout $k < l$. Le jet d'ordre $k = 0, 1$ de la forme de torsion de la structure presque complexe au point x est nul si et seulement si les coefficients $B_{*,*}(z)$ de la structure presque complexe relatifs aux coordonnées en question s'annulent à l'ordre $k + 1$.

Les coordonnées précédentes seront appelées coordonnées presque complexes d'ordre 3 au point x .

Preuve de la proposition 2.7.1

I) Les changements de coordonnées

La condition $J^2 = -\mathbb{I}$ est exprimée par les conditions locales $A^2 = -I_n - \bar{B} \cdot B$ et $\bar{A} \cdot B = -B \cdot A$. Le choix fait sur les coordonnées locales implique que relativement à celles-ci on a $J(0) = J_0$, $A(0) = i I_n$, $B(0) = 0_n$. La relation $A^2 = -I_n - \bar{B} \cdot B$ implique alors que la matrice A admet un développement asymptotique du type $A(z) = i I_n + O(|z|^2)$. Si $Z = \Phi(z)$ est un changement de coordonnées alors la matrice de la structure presque complexe

$$\mathcal{M}_J(Z) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(Z) & \bar{\mathcal{B}}(Z) \\ \mathcal{B}(Z) & \bar{\mathcal{A}}(Z) \end{pmatrix}$$

par rapport aux nouvelles coordonnées est donné par la formule $\mathcal{M}_J(Z) = d\Phi \cdot M_J(z) \cdot d\Phi^{-1}$. De manière explicite on a alors les formules

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{k,l}(Z) &:= \sum_{s,t} \left(A_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial z_s} + B_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_s} \right. \\ &\quad \left. + \bar{B}_{s,t}(Z) \frac{\partial \bar{z}_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial z_s} + \bar{A}_{s,t}(Z) \frac{\partial \bar{z}_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_s} \right) \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{k,l}(z) &:= \sum_{s,t} \left(A_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial z_s} + B_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial \bar{z}_s} \right. \\ &\quad \left. + \bar{B}_{s,t}(Z) \frac{\partial \bar{z}_t}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial z_s} + \bar{A}_{s,t}(Z) \frac{\partial \bar{z}_t}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial \bar{z}_s} \right). \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Considérons maintenant pour tout entier $N \geq 1$ les changements de coordonnées $Z = \Phi_N(z)$

$$Z_k = z_k - \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ |\alpha| \geq 1}} \frac{i \bar{B}_{k,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{2\alpha_{l(\alpha)}} z^\beta \bar{z}^\alpha$$

où $l(\alpha) := \max\{r \in \{1, \dots, n\} \mid \alpha_r \neq 0\}$ et les coefficients $B^{\alpha,\beta}$, $|\alpha + \beta| = N$ seront définis dans la suite. On considère aussi les changements inverses

$$z_k = Z_k + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ |\alpha| \geq 1}} \frac{i \bar{B}_{k,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{2\alpha_{l(\alpha)}} Z^\beta \bar{Z}^\alpha + O(|Z|^{2N+1})$$

On définit aussi

$$\mathcal{B}_{k,l}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta} := B_{k,l}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta} - \alpha_l \cdot \frac{B_{k,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{\alpha_{l(\alpha)}}$$

pour tout les multi-indices α tels que $\alpha_l \geq 1$. Avec la convention $0 = \max \emptyset$, on a alors $\mathcal{B}_{k,l}^{\alpha,\beta} = 0$ pour tout les multi-indices $|\alpha + \beta| = N$ tels que $l(\alpha) \leq l$. Avec la convention précédente on a en particulier $\mathcal{B}^{0,\beta} = 0$ lorsque $|\beta| = N$. On a les expressions suivantes pour les dérivées partielles :

$$\frac{\partial z_t}{\partial Z_l} = \delta_{t,l} + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ |\alpha|, |\beta| \geq 1}} \beta_l \cdot \frac{i \bar{B}_{t,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{2\alpha_{l(\alpha)}} Z^{\beta-\delta_l} \bar{Z}^\alpha + O(|Z|^{2N})$$

$$\frac{\partial z_t}{\partial \bar{Z}_l} = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ \alpha_l \geq 1}} \alpha_l \cdot \frac{i \bar{B}_{t,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{2\alpha_{l(\alpha)}} Z^\beta \bar{Z}^{\alpha-\delta_l} + O(|Z|^{2N})$$

$$\frac{\partial Z_k}{\partial z_s} = \delta_{s,k} - \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ |\alpha|, |\beta_s| \geq 1}} \beta_s \cdot \frac{i \bar{B}_{k,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{2\alpha_{l(\alpha)}} Z^{\beta-\delta_s} \bar{Z}^\alpha + O(|Z|^{2N})$$

$$\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_s} = - \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ \alpha_s \geq 1}} \alpha_s \cdot \frac{i \bar{B}_{k,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{2\alpha_{l(\alpha)}} Z^\beta \bar{Z}^{\alpha-\delta_s} + O(|Z|^{2N})$$

Nous allons montrer maintenant à l'aide d'une récurrence sur N , l'existence de coordonnées pour lesquelles les matrices $A(z)$ et $B(z)$ admettent les développements asymptotiques (2.7.2) et (2.7.3) avec les conditions sur les coefficients $B_{k,l}^{\alpha,\beta}$ expliquées dans l'énoncé du lemme. On commence par effectuer le changement de coordonnées $Z = \Phi_1(z)$ où les matrices $B^{\alpha,\beta}$, $|\alpha + \beta| = 1$ qui apparaissent dans la définition de tel changement sont celles du développement :

$$B(z) = \sum_{|\alpha+\beta|=1} B^{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^2)$$

(rappelons que $B(0) = 0_n$). En substituant les expressions des dérivées partielles relatives au changement de coordonnées $Z = \Phi_1(z)$ et en tenant compte des développements asymptotiques des matrices $A(z)$ et $B(z)$ obtenues précédemment dans les expressions (2.7.7), (2.7.8) on aura, relativement aux nouvelles coordonnées, les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{k,l}(Z) &= \sum_{s,t} A_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial z_s} + O(|Z|^2) = i \delta_{k,l} + O(|Z|^2) \\ \mathcal{B}_{k,l}(Z) &= \sum_s i \left(\frac{\partial z_s}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial z_s} - \frac{\partial \bar{z}_s}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial \bar{z}_s} \right) + B_{k,l}(Z) + O(|Z|^2) = \\ &= - \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=2 \\ \alpha_l \geq 1}} \alpha_l \cdot \frac{B_{k,l}^{\alpha-\delta_l(\alpha),\beta}}{\alpha_l(\alpha)} Z^{\alpha-\delta_l} \bar{Z}^\beta + B_{k,l}(Z) + O(|Z|^2) = \\ &= \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=2 \\ \alpha_l \geq 1}} \mathcal{B}_{k,l}^{\alpha-\delta_l,\beta} Z^{\alpha-\delta_l} \bar{Z}^\beta + O(|Z|^2) \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations dans les calculs qui suivront on va noter à partir de maintenant A à la place de \mathcal{A} , B à la place de \mathcal{B} et z à la place de Z . Avec ces notations on a alors que la matrice $B(z)$ peut être écrite sous la forme asymptotique (2.7.3) avec $N = 1$ et les conditions correspondantes sur les coefficients $B_{k,l}^{\alpha,\beta}$. La relation $A^2 = -I_n - \bar{B} \cdot B$ entraîne alors que la matrice $A(z)$ admet le développement asymptotique (2.7.2) avec $N = 2$. Supposons maintenant qu'il existe des coordonnées telles que la matrice $B(z)$ admette le développement (2.7.3) relativement à l'entier $N-1$, $N \geq 2$. On peut alors écrire le développement asymptotique suivant :

$$B(z) = \sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq N-1 \\ |\alpha| \geq 1}} B^{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + \sum_{|\alpha+\beta|=N} B^{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+1})$$

relativement aux coordonnées en question, où $B_{k,l}^{\alpha,\beta} = 0$ pour $l \geq l(\alpha)$, $|\alpha + \beta| \leq N-1$, $|\alpha| \geq 1$. L'expression précédente de $B(z)$ combinée avec la relation $A^2 = -I_n - \bar{B} \cdot B$ implique que la matrice $A(z)$ s'écrit sous la forme (2.7.2). On considère maintenant le changement de coordonnées $Z = \Phi_N(z)$ où les matrices $B^{\alpha,\beta}$, $|\alpha + \beta| = N$ qui apparaissent dans la définition de tel changement sont celles qui apparaissent dans l'expression asymptotique précédente de $B(z)$. Par rapport aux nouvelles coordonnées les matrices $A(z)$ et $B(z)$ admettent les développements

asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{k,l}(Z) &= \sum_{s,t} A_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial z_s} + O(|Z|^{N+1}) = \\
&= i\delta_{k,l} + \frac{i}{2} \sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq N \\ |\alpha|,|\beta|\geq 1}} A_{k,l}^{\alpha,\beta} Z^\alpha \bar{Z}^\beta + O(|Z|^{N+1}), \\
\mathcal{B}_{k,l}(\zeta) &= \sum_s i \left(\frac{\partial z_s}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial z_s} - \frac{\partial \bar{z}_s}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial \bar{z}_s} \right) + B_{k,l}(Z) + O(|Z|^{N+1}) = \\
&= - \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ \alpha_l \geq 1}} \alpha_l \cdot \frac{B_{k,l}^{\alpha-\delta_l(\alpha),\beta}}{\alpha_l(\alpha)} Z^{\alpha-\delta_l} \bar{Z}^\beta + B_{k,l}(Z) + O(|Z|^{N+1}) = \\
&= \sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq N-1 \\ |\alpha|\geq 1}} B_{k,l}^{\alpha,\beta} Z^\alpha \bar{Z}^\beta + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ \alpha_l \geq 1}} B_{k,l}^{\alpha-\delta_l,\beta} Z^{\alpha-\delta_l} \bar{Z}^\beta + O(|Z|^{N+1}).
\end{aligned}$$

De la même façon que précédemment, on va noter à partir de maintenant A à la place de \mathcal{A} , B à la place de \mathcal{B} et z à la place de Z . Avec ces notations on obtient en conclusion que les matrices $A(z)$ et $B(z)$ peuvent être écrites sous les formes asymptotiques (2.7.2) et (2.7.3), avec les conditions correspondantes sur les coefficients $B_{k,l}^{\alpha,\beta}$.

II) Preuve de la formule (2.7.4)

On montre maintenant la formule (2.7.4) à l'aide d'une récurrence sur $N \geq 2$. Pour simplifier les notations dans les calculs qui suivront on utilisera les conventions $A^{\alpha,0} = A^{0,\beta} = 0$. En tenant compte des expressions (2.7.2) et (2.7.3) pour $2 \leq N \leq 3$ on peut écrire la relation $A^2 = -I_n - \bar{B} \cdot B$ sous la forme

$$\begin{aligned}
&-I_n - \sum_{|\alpha+\beta|\leq N} A^{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+1}) = \\
&= -I_n - \sum_{|\alpha+\beta|\leq N} \left(\sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \bar{B}^\lambda \cdot B^{\rho,\gamma} \right) z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+1}),
\end{aligned}$$

(rappelons qu'on utilise la convention $B^{0,\beta} = 0$). On a alors

$$A^{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \bar{B}^\lambda \cdot B^{\rho,\gamma}$$

pour $2 \leq |\alpha + \beta| \leq 3$, qui n'est rien d'autre que la formule (2.7.4) dans les cas particuliers en considération. Nous supposons maintenant avoir montré la formule (2.7.4) pour $2 \leq |\alpha + \beta| \leq N$. Comme précédemment la relation $A^2 = -I_n - \bar{B} \cdot B$ s'écrit, à l'aide des expressions (2.7.2) et (2.7.3) pour $N + 1$, sous la forme :

$$-I_n - \sum_{|\alpha+\beta|\leq N+1} A^{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta - \frac{1}{4} \sum_{|\alpha+\beta|\leq N+1} \left(\sum_{\substack{\lambda+\rho=\alpha \\ \mu+\gamma=\beta}} A^\lambda \cdot A^{\rho,\gamma} \right) z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+2}) =$$

$$= -I_n - \sum_{|\alpha+\beta|\leq N+1} \left(\sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \overline{B}^\lambda \cdot B^{\rho,\gamma} \right) z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+2})$$

Cette identité implique que pour tout α, β , $|\alpha + \beta| = N + 1$ on a :

$$A^{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \overline{B}^\lambda \cdot B^{\rho,\gamma} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{\lambda+\rho=\alpha \\ \mu+\gamma=\beta}} A^\lambda \cdot A^{\rho,\gamma}.$$

En rappelant la convention $A^{0,\beta} = A^{\alpha,0} = 0$ on a que les termes non nuls de la dernière somme sont les termes relatifs aux multi-indices $|\lambda + \mu|, |\rho + \gamma| \leq N$. En utilisant l'hypothèse réursive relativement à l'expression (2.7.4) on peut écrire l'expression précédente de la matrice $A^{\alpha,\beta}$ sous la forme ;

$$A^{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \overline{B}^\lambda B^{\rho,\gamma} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{\lambda+\rho=\alpha \\ \mu+\gamma=\beta}} \sum_{\substack{\sum_{r_1=1}^{k_1} (\rho_{r_1} + \mu_{r_1}) = \lambda \\ \sum_{r_1=1}^{k_1} (\lambda_{r_1} + \gamma_{r_1}) = \mu \\ \sum_{r_2=1}^{k_2} (\rho_{r_2} + \mu_{r_2}) = \rho \\ \sum_{r_2=1}^{k_2} (\lambda_{r_2} + \gamma_{r_2}) = \gamma}} (-4)^{-(k_1+k_2-2)} \prod_{1 \leq r_1 \leq k_1} \overline{B}^{\lambda_{r_1}, \mu_{r_1}} B^{\rho_{r_1}, \gamma_{r_1}} \prod_{1 \leq r_2 \leq k_2} \overline{B}^{\lambda_{r_2}, \mu_{r_2}} B^{\rho_{r_2}, \gamma_{r_2}}.$$

En analysant l'ensemble des indices qui apparaissent sous les sommes précédentes on s'aperçoit de la validité de l'expression (2.7.4) relativement aux multi-indices α, β en considération. \square

Preuve du corollaire 3.5.3

Le repère local $\zeta_k = (\partial/\partial z_k)^{1,0}$, $k = 1, \dots, n$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \zeta_k &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_k} - \frac{i}{2} \sum_r \left(A_{r,k} \frac{\partial}{\partial z_r} + B_{r,k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{1}{4} \sum_{p,h,t,j} \overline{B}_{t,j}^h B_{j,k}^p z_p \bar{z}_h \frac{\partial}{\partial z_t} - \frac{i}{2} \sum_t \mathbf{jet}_2 B_{t,k}(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_t} + O(|z|^3) \end{aligned}$$

où $\mathbf{jet}_2 B_{t,l}(z)$ désigne le jet d'ordre 2 du coefficient $B_{t,l}$ de la structure presque complexe J par rapport aux coordonnées en question. On déduit alors facilement l'expression suivante pour le crochet

$$[\zeta_k, \zeta_l] = \frac{i}{2} \sum_r \left\{ B_{r,k}^l + \sum_p \left[2(B_{r,k}^{l,p} - B_{r,k}^{k,p}) z_p + B_{r,k}^{l,\bar{p}} \bar{z}_p \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} - \frac{1}{4} \sum_{pr,j} \overline{B}_{r,j}^p B_{j,k}^l \bar{z}_p \frac{\partial}{\partial z_r} + O(|z|^2).$$

En tenant compte de l'expression de la structure presque complexe à l'ordre un

$$J(z) = i \sum_k \left(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) + \sum_{k,l,p} \left(B_{k,l}^p z_p dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \overline{B}_{k,l}^p \bar{z}_p d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} \right) + O(|z|^2)$$

on obtient l'expression

$$J[\zeta_k, \zeta_l] = \frac{1}{2} \sum_r \left\{ B_{r,k}^l + \sum_p \left[2(B_{r,k}^{l,p} - B_{r,k}^{k,p}) z_p + B_{r,k}^{l,\bar{p}} \bar{z}_p \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} + \frac{i}{4} \sum_{pr,j} \overline{B}_{r,j}^p B_{j,k}^l \bar{z}_p \frac{\partial}{\partial z_r} + O(|z|^2).$$

On déduit alors l'expression

$$[\zeta_k, \zeta_l]_J^{0,1} = \frac{i}{2} \sum_r \left\{ B_{r,k}^l + \sum_p \left[2(B_{r,k}^{l,p} - B_{r,k}^{k,p}) z_p + B_{r,k}^{l,\bar{p}} \bar{z}_p \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} - \frac{1}{4} \sum_{pr,j} \bar{B}_{r,j}^p B_{j,k}^l \bar{z}_p \frac{\partial}{\partial z_r} + O(|z|^2).$$

En tenant compte de l'expression

$$\bar{\zeta}_r = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} + \frac{i}{2} \sum_{s,p} \bar{B}_{s,r}^p \bar{z}_p \frac{\partial}{\partial z_s} + O(|z|^2)$$

on déduit l'expression voulue pour les coefficients $\bar{N}_{*,*}^*$ de la forme de torsion de la structure presque complexe. Ces coefficients s'annulent à l'ordre $k = 0, 1$ si et seulement si les coefficients $B_{*,*}(z)$ de la structure presque complexe s'annulent à l'ordre $k + 1$. En effet supposons que $T_r^{k,l,s} := B_{r,k}^{l,s} - B_{r,l}^{k,s}$ soit nul pour tout les indices k, l, s, r . Si k ou l est le maximum de l'ensemble $\{k, l, s\}$ alors on a immédiatement $B_{r,k}^{l,s} = B_{r,l}^{k,s} = 0$. Sinon, $s = \max\{k, l, s\}$ et donc $T_r^{k,s,l} = B_{r,k}^{s,l} = B_{r,l}^{k,s} = 0$. \square

Le calcul fait dans la preuve du corollaire 3.5.3 montre que $M^* = O(|z|^2)$. Une conséquence immédiate des formules (2.7.7) et (2.7.8) est le corollaire suivant.

Corollaire 2.7.4 *Soient (z_1, \dots, z_n) des coordonnées presque complexes à l'ordre $N \geq 1$ en un point x et soit $Z_k = z_k + \sum_{|\alpha|=N+1} C_\alpha^k z^\alpha$ un changement de coordonnées holomorphe. Alors les coordonnées (Z_1, \dots, Z_n) sont presque complexes à l'ordre N en x et les coefficients $B_{*,*}^{*,*}$ du jet d'ordre N de la structure presque complexe par rapport aux nouvelles coordonnées sont les mêmes que les coefficients relatifs aux coordonnées (z_1, \dots, z_n) .*

2.8 Expression asymptotique normale à l'ordre un d'une connexion de Chern sur le fibré tangent

Le lemme suivant est nécessaire pour le calcul asymptotique du flot géodésique induit par une connexion de Chern sur le fibré tangent. L'expression asymptotique du flot de Chern est utile pour une technique de régularisation globale des $(1, 1)$ -courants positifs du type $i\partial_j \bar{\partial}_j u$ sur les variétés presque complexes (voir le chapitre trois pour plus de détails). Ce lemme et celui qui suivra montrent de façon optimale combien on est loin du cas Kählerien, où on dispose de coordonnées géodésiques complexes centrées en un point.

Lemme 2.8.0.1 *Soit (X, J) une variété presque complexe, $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$ une métrique hermitienne et soient (z_1, \dots, z_n) des coordonnées presque complexes d'ordre $N \geq 2$ en un point x telles que le repère normal $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$, $\zeta_k = (\partial/\partial z_k)_J^{1,0}$ soit $\omega(x)$ -orthonormé. La métrique ω s'écrit alors sous la forme*

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{i}{2} \sum_{l,m} \left[h_{l,m} + \frac{i}{4} \sum_{j,k,r} B_{r,l}^j \bar{B}_{r,m}^k z_j \bar{z}_k \right] dz_l \wedge d\bar{z}_m \\ &- \frac{1}{4} \sum_{l,m} \mathbf{jet}_2 B_{l,m}(z) dz_l \wedge dz_m - \frac{1}{4} \sum_{l,m} \overline{\mathbf{jet}_2 B_{l,m}(z)} d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_m + O(|z|^3), \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

où

$$h_{l,m} = \delta_{l,m} + \sum_p \left(H_{l,m}^p z_p + \bar{H}_{m,l}^p \bar{z}_p \right) + \sum_{p,h} \left(H_{l,m}^{p,h} z_p z_h + \bar{H}_{m,l}^{p,h} \bar{z}_p \bar{z}_h + H_{l,m}^{p,\bar{h}} z_p \bar{z}_h \right) + O(|z|^3)$$

et $\mathbf{jet}_2 B_{l,m}$ désigne le jet d'ordre 2 du coefficient $B_{l,m}$ de la structure presque complexe J par rapport aux coordonnées en question. Pour tous champs de vecteurs réels $\eta = \sum_k (\eta_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{\eta}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}) \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$ on a l'expression asymptotique de la dérivée de Chern

$$D_J^\omega \eta = \sum_k \left[d\eta_k + \sum_l \left(E_{k,l} \eta_l - \frac{i}{2} (d \overline{\mathbf{jet}_2 B_{k,l}}) \bar{\eta} \right) \right] \otimes_{J_0} \frac{\partial}{\partial z_k} + O(|z|^2),$$

où

$$E_{k,l} := \sum_p \left[H_{l,k}^p + \sum_h (S_{k,l}^{p,h} z_h + S_{k,l}^{p,\bar{h}} \bar{z}_h) \right] dz_p + \sum_{p,h} (S_{k,l}^{\bar{p},h} z_h + S_{k,l}^{\bar{p},\bar{h}} \bar{z}_h) d\bar{z}_p.$$

Les coefficients $S_{k,l}^{*,*}$ sont données par les formules

$$\begin{aligned} S_{k,l}^{\bar{p},h} &= \frac{1}{4} \sum_j (\bar{B}_{k,p}^j - \bar{B}_{k,j}^p) B_{j,l}^h, & S_{k,l}^{\bar{p},\bar{h}} &= \frac{i}{2} \bar{B}_{k,p}^{\bar{l}} - \frac{i}{2} \sum_j H_{l,k}^j \bar{B}_{j,p}^h, \\ S_{k,l}^{p,h} &= 2H_{l,k}^{p,h} - \frac{i}{2} B_{l,p}^{h,\bar{k}} - \sum_j \left(H_{l,j}^p H_{j,k}^h + \frac{i}{2} \bar{H}_{k,l}^j B_{j,p}^h \right), & S_{k,l}^{p,\bar{h}} &= -C_{k,l}^{p,h}(0) - \frac{1}{4} \sum_j \bar{B}_{k,h}^j B_{j,l}^p, \end{aligned}$$

où $C_{k,l}^{p,h}(0)$ sont les coefficients de la courbure de Chern

$$C_\omega(T_X, J) = \sum_{j,k,m,l} C_{m,l}^{j,k}(0) dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes dz_l \otimes_{J_0} \frac{\partial}{\partial z_m} + O(|z|).$$

au point x . Ils sont donnés par la formule

$$C_{m,l}^{j,k}(0) = -H_{l,m}^{j,\bar{k}} + \frac{1}{4} \sum_r \left[4H_{l,r}^j \bar{H}_{m,r}^k + (\bar{B}_{m,r}^k - \bar{B}_{m,k}^r) B_{r,l}^j + (B_{l,r}^j - B_{l,j}^r) \bar{B}_{r,m}^k \right]. \quad (2.8.2)$$

Preuve

On déduit facilement d'après la preuve du corollaire 3.5.3 l'expression asymptotique à l'ordre deux du repère $(\zeta_l)_l$ et du repère dual $(\zeta_l^*)_l$. On a les expressions asymptotiques suivantes.

$$\zeta_l = \frac{\partial}{\partial z_l} + \frac{1}{4} \sum_{p,h,t,j} \bar{B}_{t,j}^h B_{j,l}^p z_p \bar{z}_h \frac{\partial}{\partial z_t} - \frac{i}{2} \sum_t \mathbf{jet}_2 B_{t,l}(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_t} + O(|z|^3) \quad (2.8.3)$$

$$\zeta_l^* = dz_l - \frac{i}{2} \sum_t \overline{\mathbf{jet}_2 B_{l,t}(z)} d\bar{z}_t + O(|z|^3). \quad (2.8.4)$$

En tenant compte de cette dernière expression on déduit que la métrique $\omega = \frac{i}{2} \sum_{l,m} h_{l,m} \zeta_l^* \wedge \bar{\zeta}_m^*$ s'écrit sous la forme (2.8.1). On calcule maintenant les expressions asymptotiques des coefficients U^* , définis dans la section 1, relativement au repère $\zeta_l = (\partial/\partial z_l)^{1,0}$, $l = 1, \dots, n$. Pour tout indice k, h on a

$$\begin{aligned} [\zeta_k, \bar{\zeta}_h] &= \sum_{r,l} \left[\frac{i}{2} \bar{B}_{r,h}^{l,\bar{k}} \bar{z}_l + \frac{1}{4} \sum_j (\bar{B}_{r,h}^j - \bar{B}_{r,j}^h) B_{j,k}^l z_l \right] \frac{\partial}{\partial z_r} \\ &+ \sum_{r,l} \left[\frac{i}{2} B_{r,k}^{l,\bar{h}} z_l + \frac{1}{4} \sum_j (B_{r,j}^k - B_{r,k}^j) \bar{B}_{j,h}^l \bar{z}_l \right] \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} + O(|z|^2) \end{aligned}$$

En tenant compte de l'expression de la structure presque complexe à l'ordre un

$$J(z) = i \sum_k \left(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) + \sum_{k,l,p} \left(B_{k,l}^p z_p dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \bar{B}_{k,l}^p \bar{z}_p d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} \right) + O(|z|^2)$$

on obtient l'expression

$$\begin{aligned} J[\zeta_k, \bar{\zeta}_h] &= \sum_{r,l} \left[-\frac{1}{2} \bar{B}_{r,h}^{l,\bar{k}} \bar{z}_l + \frac{i}{4} \sum_j (\bar{B}_{r,h}^j - \bar{B}_{r,j}^h) B_{j,k}^l z_l \right] \frac{\partial}{\partial z_r} \\ &+ \sum_{r,l} \left[\frac{1}{2} B_{r,k}^{l,\bar{h}} z_l - \frac{i}{4} \sum_j (B_{r,j}^k - B_{r,k}^j) \bar{B}_{j,h}^l \bar{z}_l \right] \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} + O(|z|^2) \end{aligned}$$

On a alors

$$[\zeta_k, \bar{\zeta}_h]_j^{1,0} = \sum_{r,l} \left[\frac{1}{4} \sum_j (\bar{B}_{r,h}^j - \bar{B}_{r,j}^h) B_{j,k}^l z_l + \frac{i}{2} \bar{B}_{r,h}^{l,\bar{k}} \bar{z}_l \right] \frac{\partial}{\partial z_r} + O(|z|^2).$$

En tenant compte de l'expression asymptotique à l'ordre un du repère $(\zeta_k)_k$ on déduit l'expression

$$U_{k,h}^r(z) = \sum_l \left[\frac{1}{4} \sum_j (\bar{B}_{r,h}^j - \bar{B}_{r,j}^h) B_{j,k}^l z_l + \frac{i}{2} \bar{B}_{r,h}^{l,\bar{k}} \bar{z}_l \right] + O(|z|^2), \quad (2.8.5)$$

qui nous donne l'expression normale asymptotique à l'ordre un de la forme de connexion A'_ζ relative au repère normal $\zeta_k = (\partial/\partial z_k)_j^{1,0}$. Nous calculons maintenant l'expression asymptotique à l'ordre un de la forme de connexion A'_ζ à l'aide de l'expression précédente de la forme A''_ζ . La matrice inverse $H^{-1} = (h^{r,k})$ admet le développement asymptotique suivant.

$$h^{r,k} = \delta_{r,k} - \sum_j (H_{r,k}^j z_j + \bar{H}_{k,r}^j \bar{z}_j) + O(|z|^2).$$

En utilisant l'expression de la forme A'_ζ obtenue dans la preuve du théorème 2.5.1 on déduit l'expression

$$(A'_\zeta)_{k,l} = \sum_r h^{r,k} \partial_j h_{l,r} + \sum_p \bar{U}_{k,p}^l dz_p + O(|z|^2),$$

avec $\partial_j h_{l,r} = \sum_p (\zeta_p \cdot h_{l,r}) \zeta_p^*$, où

$$\zeta_p \cdot h_{l,r} = H_{l,r}^p + \sum_h \left[\left(2H_{l,r}^{p,h} - \frac{i}{2} \sum_t \bar{H}_{r,t}^p B_{t,p}^h \right) z_h + H_{l,r}^{p,\bar{h}} \bar{z}_h \right] + O(|z|^2).$$

En utilisant l'expression du jet d'ordre un du repère $(\zeta_p^*)_p$ on obtient l'expression

$$\begin{aligned} \partial_j h_{l,r} &= \sum_p \left\{ H_{l,r}^p + \sum_h \left[\left(2H_{l,r}^{p,h} - \frac{i}{2} \sum_t \bar{H}_{r,t}^p B_{t,p}^h \right) z_h + H_{l,r}^{p,\bar{h}} \bar{z}_h \right] \right\} dz_p \\ &\quad - \frac{i}{2} \sum_{p,t,h} H_{l,r}^t \bar{B}_{t,p}^h \bar{z}_h d\bar{z}_p + O(|z|^2). \end{aligned}$$

On déduit alors l'expression asymptotique à l'ordre un de la forme de connexion de Chern $A_\zeta = A'_\zeta + A''_\zeta$.

$$A_\zeta = \partial_j h_{l,k} - \sum_{p,r,j} H_{l,r}^p (H_{r,k}^j z_j + \bar{H}_{k,r}^j \bar{z}_j) dz_p + \sum_p (\bar{U}_{k,p}^l dz_p - U_{l,p}^k d\bar{z}_p).$$

La matrice de la forme de connexion de l'extension $D_J^\omega : \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} (T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))$ de la connexion de Chern au complexifié du fibré tangent $T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ par rapport au repère $(\zeta_k, \bar{\zeta}_k)_k$ est

$$A_{\zeta, \bar{\zeta}} = \begin{pmatrix} A_\zeta & 0_n \\ 0_n & \bar{A}_\zeta \end{pmatrix}.$$

On doit maintenant calculer la matrice A_z de la forme de connexion de l'extension de la connexion de Chern par rapport au repère $(\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k})_k$ du complexifié du fibré tangent $T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. La formule (2.8.3) nous donne l'expression asymptotique de la matrice g^{-1} du changement de repère $(\zeta_k, \bar{\zeta}_k)_k = (\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k})_k \cdot g^{-1}$. Les expressions asymptotiques à l'ordre deux des matrices g et g^{-1} sont les suivantes

$$g = \begin{pmatrix} I_n & -\frac{i}{2} \overline{\mathbf{jet}_2 B} \\ \frac{i}{2} \mathbf{jet}_2 B & I_n \end{pmatrix} + O(|z|^3), \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} T & \frac{i}{2} \overline{\mathbf{jet}_2 B} \\ -\frac{i}{2} \mathbf{jet}_2 B & \bar{T} \end{pmatrix} + O(|z|^3),$$

où $T_{k,l} = \delta_{k,l} + \frac{1}{4} \sum_{p,h,j} \bar{B}_{k,j}^h B_{j,l}^p z_p \bar{z}_h$. La matrice de la forme de connexion qu'on cherche est donnée par la formule $A_z = g^{-1}(dg + A_{\zeta, \bar{\zeta}} g)$. On a alors les expressions asymptotiques

$$A_z = g^{-1} \begin{pmatrix} A_\zeta & -\frac{i}{2} d \overline{\mathbf{jet}_2 B} \\ \frac{i}{2} d \mathbf{jet}_2 B & \bar{A}_\zeta \end{pmatrix} + O(|z|^3) = \begin{pmatrix} E & -\frac{i}{2} d \overline{\mathbf{jet}_2 B} \\ \frac{i}{2} d \mathbf{jet}_2 B & \bar{E} \end{pmatrix} + O(|z|^3),$$

ce qui nous donne l'expression voulue de la connexion de Chern. Le fait que le repère $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ soit $\omega(x)$ -orthonormé en x entraîne qu'on dispose de l'égalité (2.2.3) au point x . On en déduit donc la formule

$$C_{m,l}(x) = \left(\bar{\partial}_j \partial_j h_{l,m} - \sum_r \bar{\partial}_j h_{r,m} \wedge \partial_j h_{l,r} + \partial_j (A''_\zeta)_{m,l} - \bar{\partial}_j \overline{(A''_\zeta)_{l,m}} \right)(x).$$

pour les coefficients de l'expression locale (2.6.7) du tenseur de courbure de Chern du fibré tangent. On a l'expression

$$\bar{\partial}_j \partial_j H = - \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} (\zeta_j \cdot H) dz_j \wedge d\bar{z}_k + O(|z|)$$

avec $\zeta_j \cdot H = \sum_p (2H^{j,p} z_p + H^{j,\bar{p}} \bar{z}_p) + O(|z|^2)$. On déduit alors l'expression

$$\bar{\partial}_j \partial_j H = - \sum_{j,k} H^{j,\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k + O(|z|).$$

On a aussi l'expression

$$\partial_j A''_\zeta = \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (A''_\zeta)^k dz_j \wedge d\bar{z}_k + O(|z|).$$

En rappelant l'expression normale asymptotique (2.8.5) de la forme de connexion A''_ζ par rapport au repère normal $(\zeta_k)_k$ on déduit l'expression

$$\partial_j (A''_\zeta)_{m,l} = \frac{1}{4} \sum_{j,k,r} (\bar{B}_{m,r}^k - \bar{B}_{m,k}^r) B_{r,l}^j dz_j \wedge d\bar{z}_k + O(|z|).$$

En combinant les expressions ainsi obtenues on obtient l'expression (2.8.2) pour les coefficients $C_{m,l}^{j,k}(x)$ de la courbure au point x . \square

2.8.1 Le cas d'une métrique symplectique sur une variété presque complexe

Dans le cas où la variété presque complexe admet une métrique symplectique, certains des coefficients du lemme précédent se simplifient. On a le lemme suivant.

Lemme 2.8.1.1 *Soit (X, J) une variété presque complexe admettant une métrique symplectique $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$. Pour tout point x on peut choisir des coordonnées presque complexes (z_1, \dots, z_n) d'ordre $N \geq 2$ en x telles que*

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{i}{2} \sum_l dz_l \wedge d\bar{z}_l + \frac{i}{2} \sum_{l,m,j,k} \left[H_{l,m}^{j,k} z_j z_k + \overline{H}_{m,l}^{j,k} \bar{z}_j \bar{z}_k + \left(H_{l,m}^{j,\bar{k}} + \frac{i}{4} \sum_r B_{r,l}^j \overline{B}_{r,m}^k \right) z_j \bar{z}_k \right] dz_l \wedge d\bar{z}_m \\ & - \frac{1}{4} \sum_{l,m} \mathbf{jet}_2 B_{l,m}(z) dz_l \wedge dz_m - \frac{1}{4} \sum_{l,m} \overline{\mathbf{jet}_2 B_{l,m}(z)} d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_m + O(|z|^3). \end{aligned}$$

Quels que soient les coordonnées presque complexes (z_1, \dots, z_n) d'ordre $N \geq 2$ en x pour lesquelles la métrique ω s'écrit sous la forme précédente on a l'expression suivante pour le tenseur de courbure de Chern.

$$C_\omega(T_{X,J}) = \sum_{j,k,m,l} C_{m,l}^{j,k}(0) dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes dz_l \otimes_{J_0} \frac{\partial}{\partial z_m} + O(|z|)$$

avec

$$C_{m,l}^{j,k}(0) = -H_{l,m}^{j,\bar{k}} + \frac{1}{4} \sum_r \left[(\overline{B}_{m,r}^k - \overline{B}_{m,k}^r) B_{r,l}^j + (B_{l,r}^j - B_{l,j}^r) \overline{B}_{r,m}^k \right].$$

Contrairement au cas Kählerien, (voir [B-D-I-P]) on ne peut pas éliminer les termes $H_{l,m}^{j,k} z_j z_k$ et $\overline{H}_{m,l}^{j,k} \bar{z}_j \bar{z}_k$. L'obstruction dérive des termes d'ordre un du jet de la torsion de la structure presque complexe.

Preuve

Soient (z_1, \dots, z_n) des coordonnées presque complexes d'ordre un au point x et $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in \mathcal{E}(T_X)(U)$, $\zeta_k = (\partial/\partial z_k)_J^{1,0}$ un repère $\omega(x)$ -orthonormé. En considérant l'expression du jet d'ordre un du repère $(\zeta_k^*)_k$ on obtient l'expression locale suivante de la métrique

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{i}{2} \sum_l dz_l \wedge d\bar{z}_l + \frac{i}{2} \sum_{l,m,p} \left(H_{l,m}^p z_p + \overline{H}_{m,l}^p \bar{z}_p \right) dz_l \wedge d\bar{z}_m \\ & - \frac{1}{4} \sum_{l,m,p} B_{l,m}^p z_p dz_l \wedge dz_m - \frac{1}{4} \sum_{l,m} \overline{B}_{l,m}^p \bar{z}_p d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_m + O(|z|^2). \end{aligned}$$

Le fait que la métrique ω soit symplectique implique l'égalité $H_{l,m}^p = H_{p,m}^l$. En effectuant le changement de variables

$$Z_m = z_m + \frac{1}{2} \sum_{p,l} H_{l,m}^p z_p z_l$$

on obtient, d'après le corollaire 2.7.4, des coordonnées presque complexes (Z_1, \dots, Z_n) à l'ordre un en x avec les mêmes coefficients $B_{*,*}^{*,*}$ du jet d'ordre un de la structure presque complexe. L'expression de la métrique par rapport aux nouvelles coordonnées est

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_l dZ_l \wedge d\bar{Z}_l - \frac{1}{4} \sum_{l,m,p} B_{l,m}^p Z_p dZ_l \wedge dZ_m - \frac{1}{4} \sum_{l,m} \overline{B}_{l,m}^p \bar{Z}_p d\bar{Z}_l \wedge d\bar{Z}_m + O(|Z|^2).$$

A partir des coordonnées ainsi obtenues on peut construire (d'après la preuve de la proposition 2.7.1) des coordonnées presque complexes d'ordre $N \geq 2$ en x tout en conservant les coefficients $B_{*,*}^{*,*}$ du jet d'ordre un de J . En tenant compte de l'expression (2.8.4) du jet d'ordre deux du repère $(\zeta_k^*)_k$ par rapport aux coordonnées en question on déduit facilement que la métrique ω s'écrit sous la forme donnée dans l'énoncé du lemme. \square

2.8.2 Expression asymptotique normale du flot géodésique d'une connexion de Chern sur le fibré tangent

On rappelle que par définition $\exp_z(v) := \gamma(1)$, où $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ est la courbe géodésique solution de l'équation différentielle ordinaire $(\gamma^* D_J^\omega) \dot{\gamma} = 0$, $\dot{\gamma} := d\gamma/dt \in \mathcal{E}(\gamma^* T_X)((0, 1])$ avec les conditions initiales $\gamma(0) = z$ et $\dot{\gamma}(0) = v$. Le résultat suivant est une généralisation dans le cas presque complexe non intégrable d'un calcul fait par Demailly dans [Dem-2].

Théorème 2.8.1 *Soit (X, J) une variété presque complexe, $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$ une métrique hermitienne et soient (z_1, \dots, z_n) des coordonnées presque complexes d'ordre $N \geq 2$ en un point x telles que le repère normal $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$, $\zeta_k = (\partial/\partial z_k)_J^{1,0}$ soit $\omega(x)$ -orthonormé. Le flot géodésique $\exp : \mathcal{U} \subset T_X \rightarrow X$ induit par la connexion de Chern du fibré tangent*

$$D_J^\omega : \mathcal{E}(T_{X,J}) \rightarrow \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_{X,J})$$

associé à la métrique ω , (ici $\mathcal{U} \subset T_X$ désigne un voisinage ouvert de la section nulle), admet l'expression asymptotique suivante au point $(x, 0) \in T_{X,x}$:

$$\begin{aligned} \exp_z(v)_k &= z_k + v_k - \frac{1}{2} \sum_{l,p,h} \left[\left(\hat{S}_{k,l}^{p,h} z_h + S_{k,l}^{p,\bar{h}} \bar{z}_h \right) v_p v_l + \left(S_{k,l}^{\bar{p},h} z_h + S_{k,l}^{\bar{p},\bar{h}} \bar{z}_h \right) \bar{v}_p v_l \right] \\ &\quad + \frac{i}{4} \sum_{p,l} \left[\bar{B}_{k,l}^p + \sum_h \left(\bar{B}_{k,l}^{p,\bar{h}} z_h + 2\bar{B}_{k,l}^{p,h} \bar{z}_h \right) \right] \bar{v}_p \bar{v}_l + O(|v|^2(|z|^2 + |v|)) \end{aligned}$$

où $v = \sum_k (v_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{v}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}) \in T_{X,z}$, $\hat{S}_{k,l}^{p,h} := 2H_{l,k}^{p,h} - \frac{i}{2} B_{l,p}^{h,\bar{k}} - \frac{i}{2} \sum_j \bar{H}_{k,l}^j B_{j,p}^h$ et les autres coefficients $S_{k,l}^{*,*}$ sont donnés dans l'énoncé du lemme 2.8.0.1.

Preuve. Par rapport aux coordonnées presque complexes en question nous considérons les écritures $\gamma(t) \equiv (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ et

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_k \left(\dot{\gamma}_k(t) \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_{\gamma(t)} + \overline{\dot{\gamma}_k(t)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \Big|_{\gamma(t)} \right).$$

On pose par définition $\ddot{\gamma}_k := d^2 \gamma_k / dt^2$. On déduit d'après le lemme 2.8.0.1 que l'équation différentielle ordinaire $(\gamma^* D_J^\omega) \dot{\gamma} = 0$ s'écrit sous la forme

$$\ddot{\gamma}_k(t) + \sum_l \left[E_{k,l} \Big|_{\gamma(t)} (\dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}_l(t) - \frac{i}{2} d \overline{\mathbf{jet}_2 B_{k,l} \Big|_{\gamma(t)}} (\dot{\gamma}(t)) \cdot \overline{\dot{\gamma}_l(t)} \right] + O(|\gamma(t)|^2) |\dot{\gamma}(t)|^2 = 0. \quad (2.8.6)$$

Les conditions initiales $\gamma(0) = z$ et $\dot{\gamma}(0) = v$ donnent l'expression asymptotique $\gamma_k(t) = z_k + tv_k + O(t^2|v|^2)$. On remarque que si $\tau_j(x) = 0$ alors le terme d'erreur est $O(t^2|z||v|^2)$. En remplaçant l'expression précédente dans l'équation (2.8.6) et en remarquant qu'on peut toujours supposer la condition $H_{l,k}^p = -H_{p,k}^l$ on obtient l'expression asymptotique suivante pour les

dérivées deuxièmes de la courbe γ :

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_k(t) &= - \sum_{l,p,h} \left[\left(\hat{S}_{k,l}^{p,h} z_h + S_{k,l}^{p,\bar{h}} \bar{z}_h \right) v_p v_l + \left(S_{k,l}^{\bar{p},h} z_h + S_{k,l}^{\bar{p},\bar{h}} \bar{z}_h \right) \bar{v}_p v_l \right] \\ &+ \frac{i}{2} \sum_{p,l} \left[\bar{B}_{k,l}^p + \sum_h \left(\bar{B}_{k,l}^{p,\bar{h}} z_h + 2\bar{B}_{k,l}^{p,h} \bar{z}_h \right) \right] \bar{v}_p \bar{v}_l + O(|v|^2(|z|^2 + |v|))(t). \end{aligned}$$

Si $\tau_J(x) = 0$ alors le calcul peut être effectuée avec plus de précision car les termes $\bar{B}_{k,l}^p$ sont nuls dans ce cas. Le terme d'erreur serait alors $O(|v|^2(|z|^2 + |v|)^2)(t)$. En intégrant deux fois de suite l'expression précédente on obtient l'expression asymptotique

$$\begin{aligned} \gamma_k(t) &= z_k + tv_k - \frac{t^2}{2} \sum_{l,p,h} \left[\left(\hat{S}_{k,l}^{p,h} z_h + S_{k,l}^{p,\bar{h}} \bar{z}_h \right) v_p v_l + \left(S_{k,l}^{\bar{p},h} z_h + S_{k,l}^{\bar{p},\bar{h}} \bar{z}_h \right) \bar{v}_p v_l \right] \\ &+ \frac{it^2}{4} \sum_{p,l} \left[\bar{B}_{k,l}^p + \sum_h \left(\bar{B}_{k,l}^{p,\bar{h}} z_h + 2\bar{B}_{k,l}^{p,h} \bar{z}_h \right) \right] \bar{v}_p \bar{v}_l + O(|v|^2(|z|^2 + |v|))(t) \end{aligned}$$

qui permet de conclure la preuve du théorème. □

Chapitre 3

Fonctions plurisousharmoniques et courants positifs de type $(1, 1)$ sur une variété presque complexe

Abstract.-If (X, J) is an almost complex manifold, then a function u is said to be plurisubharmonic on X if it is upper semi-continuous and its restriction to every local pseudo-holomorphic curve is subharmonic. As in the complex case, it is conjectured that plurisubharmonicity is equivalent to the fact that the $(1, 1)$ -current $i\partial_j\bar{\partial}_j u$ is positive, (the $(1, 1)$ -current $i\partial_j\bar{\partial}_j u$ need not be closed here!). The conjecture is trivial if u is of class \mathcal{C}^2 . The result is elementary in the complex integrable case because the operator $i\partial_j\bar{\partial}_j$ can be written as an operator with constant coefficients in complex coordinates. Hence the positivity of the current is preserved by regularising with usual convolution kernels. This is not possible in the almost complex non integrable case and the proof of the result requires a much more intrinsic study. In this chapter we prove the necessity of the positivity of the $(1, 1)$ -current $i\partial_j\bar{\partial}_j u$. We prove also the sufficiency of the positivity in the particular case of an upper semi-continuous function f which is continuous in the complement of the singular locus $f^{-1}(-\infty)$. For the proof of the sufficiency of the positivity in the general case of a real distribution u , we suggest a method depending on a rather delicate regularisation argument introduced by Demailly ([Dem-2]). This method consists of regularizing the function u by means of the flow induced by a Chern connection on the tangent bundle.

3.1 Préliminaires

Dans tout ce chapitre (X, J) désigne une variété presque complexe de classe \mathcal{C}^∞ et de dimension réelle $2n$. On désigne par \mathcal{H}_m^p la mesure de Hausdorff p -dimensionnelle dans \mathbb{R}^m et par λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^m . On désigne par $B_r(x)$ la boule ouverte de \mathbb{R}^m de centre l'origine et de rayon $r > 0$ et par $S_r(x)$ la sphère de dimension $m - 1$ dans \mathbb{R}^m de centre l'origine et de rayon $r > 0$. Soit f une fonction Borel-mesurable et localement bornée sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$. Pour tout $\overline{B_r(x)} \subset U$ on définit les quantités

$$\mu_B(f, x, r) := \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f d\lambda \quad \text{et} \quad \mu_S(f, x, r) := \frac{1}{\mathcal{H}_m^{m-1}(S_r(x))} \int_{S_r(x)} f d\mathcal{H}_m^{m-1}.$$

On a la définition suivante (cf. [Dem-1] pour plus de détails).

Définition 3.1.1 *Une fonction $f : U \rightarrow [-\infty, +\infty)$ semi-continue supérieurement est dite sous-harmonique si elle vérifie une des deux propriétés équivalentes suivantes :*

- a) $f(x) \leq \mu_B(f, x, r)$ pour tout $\overline{B_r(x)} \subset U$;
- b) $f(x) \leq \mu_S(f, x, r)$ pour tout $S_r(x) \subset U$.

Si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ alors on déduit d'après la deuxième identité de Green que f est sous-harmonique si et seulement si $\Delta f \geq 0$. De façon générale on a le théorème classique suivant (cf. [Dem-1], chapitre I).

Théorème 3.1.2 *Soit f une fonction sous-harmonique sur un ouvert connexe U . Alors soit $f \equiv -\infty$, soit $f \in L_{loc}^1(U)$ et dans ce cas le Laplacien au sens des distributions Δf est une mesure positive. Réciproquement soit u une distribution sur U telle que Δu soit une mesure positive. Alors il existe une unique fonction f sous-harmonique sur U telle que u soit la distribution associée à f .*

On déduit d'après le théorème 3.1.2 qu'une fonction f est sous-harmonique sur un ouvert U si et seulement si pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert $V_x \subset U$ de x tel que f est sous-harmonique sur V_x .

On désigne par j la structure presque complexe canonique sur $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, par J_0 la structure presque complexe canonique sur $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$ et par $B_\delta^1 \subset \mathbb{R}^2$ la boule complexe de centre l'origine et de rayon δ . On rappelle la définition suivante.

Définition 3.1.3 *Soit (X, J) une variété presque complexe. Une courbe J -holomorphe locale est une application différentiable $\gamma : B_\delta^1 \rightarrow X$ telle que sa différentielle vérifie la condition $J(\gamma(z)) \cdot d_z \gamma = d_z \gamma \cdot j$ pour tout $z \in B_\delta^1$.*

On a la définition suivante.

Définition 3.1.4 *Soit (X, J) une variété presque complexe. Une fonction $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty)$ semi-continue supérieurement est dite J -plurisousharmonique si pour toute courbe J -holomorphe locale γ définie sur le disque $B_\delta \subset \mathbb{R}^2$, la composée $f \circ \gamma$ est sous-harmonique sur le disque B_δ .*

Nous désignerons par $Psh(X, J)$ l'ensemble des fonctions J -plurisousharmoniques. Si $u \in \mathcal{D}'_{2n}(X, \mathbb{C})$ est une distribution à valeurs complexes sur X nous sommes particulièrement intéressés par le courant $i\partial_j \bar{\partial}_j u \in \mathcal{D}'^{1,1}(X)$. En général on désigne par $\mathcal{D}'^{k,k}(X)$ les sections globales du faisceau

$$\mathcal{E}(\Lambda_J^{k,k} T_X^*) \otimes_{\mathcal{E}_X(\mathbb{C})} \mathcal{D}'_{2n}(\mathbb{C})$$

où $\mathcal{D}'_{2n}(\mathbb{C})$ représente le faisceau des distributions à valeurs complexes sur X . Il est bien connu que $\mathcal{D}'^{k,k}(X)$ s'identifie naturellement par intégration au dual topologique $\mathcal{D}'_{n-k,n-k}(X)$ de l'espace $\mathcal{D}^{n-k,n-k}(X)$ des $(n-k, n-k)$ -formes \mathcal{C}^∞ à support compact muni de la topologie de la convergence localement uniforme de toutes les dérivées (cf. [Dem-1], chapitre I et [DeR]). On utilisera pourtant dans la suite l'identification des notations $\mathcal{D}'^{k,k}(X) \equiv \mathcal{D}'_{n-k,n-k}(X)$. Le courant $i\partial_J\bar{\partial}_J u$ s'écrit explicitement sous la forme

$$i\partial_J\bar{\partial}_J u(\xi_0, \xi_1) = i\xi_0^{1,0} \cdot \xi_1^{0,1} \cdot u - i\xi_1^{1,0} \cdot \xi_0^{0,1} \cdot u - i[\xi_0^{0,1}, \xi_1^{1,0}]^{0,1} \cdot u - i[\xi_0^{1,0}, \xi_1^{0,1}]^{0,1} \cdot u \quad (3.1.1)$$

pour tout champ de vecteurs complexes $\xi_0, \xi_1 \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(X)$. On rappelle que la dérivée $\xi \cdot u$ d'une distribution u par rapport à un champ de vecteurs ξ est donnée par la formule

$$\langle \xi \cdot u, \varphi \rangle := -\langle u, d(\xi \lrcorner \varphi) \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^{2n}(X, \mathbb{C})$. On remarque que si la distribution u est réelle alors le courant $i\partial_J\bar{\partial}_J u$ l'est aussi. En effet en degré zéro on a l'identité $\partial_J\bar{\partial}_J = -\bar{\partial}_J\partial_J$. Ceci découle de la relation

$$\partial_J\bar{\partial}_J + \bar{\partial}_J\partial_J = -\theta_J\bar{\theta}_J - \bar{\theta}_J\theta_J$$

et du fait que les opérateurs θ_J et $\bar{\theta}_J$ sont nuls en degré zéro. Si $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ est un repère local du fibré $T_{X,J}^{1,0}$ alors l'expression du courant en question par rapport au repère choisi est :

$$i\partial_J\bar{\partial}_J u = i \sum_{1 \leq k, l \leq n} (\zeta_k \cdot \bar{\zeta}_l \cdot u - [\zeta_k, \bar{\zeta}_l]^{0,1} \cdot u) \zeta_k^* \wedge \bar{\zeta}_l^* \quad (3.1.2)$$

On remarque que dans le cas intégrable, si on considère un repère local holomorphe $\zeta_k \in \mathcal{O}(T_{X,J}^{1,0})(U)$, $k = 1, \dots, n$, on a $[\zeta_k, \bar{\zeta}_l] = 0$ pour tout indice k, l . Rappelons maintenant la définition suivante :

Définition 3.1.5 Une (p, p) -forme $u \in \Lambda_J^{p,p} T_{X,x}^*$ est dite positive si $u(\xi_1, J\xi_1, \dots, \xi_p, J\xi_p) \geq 0$ pour tout vecteur $\xi_1, \dots, \xi_p \in T_{X,x}$.

Une (q, q) -forme $v \in \Lambda_J^{q,q} T_{X,x}^*$ est dite fortement positive si elle peut être exprimée sous la forme

$$v = \sum_t \lambda_t i\alpha_{t,1} \wedge \bar{\alpha}_{t,1} \wedge \dots \wedge i\alpha_{t,q} \wedge \bar{\alpha}_{t,q}$$

avec $\lambda_t \geq 0$ et $\alpha_{t,k} \in (T_{X,J,x}^{1,0})^*$.

Bien évidemment l'ensemble des (q, q) -formes fortement positives est un cône convexe fermé. Il est bien connu que l'ensemble des (p, p) -formes positives est le cône dual des (q, q) -formes fortement positives, où $q = n - p$, via la dualité donnée par le produit extérieur (cf. [Dem-1], chapitre III et [Lel]). La dualité en question implique alors que toutes les formes positives sont réelles, (les formes fortement positives étant réelles). Soit

$$u = i^{p^2} \sum_{|K|=|H|=p} u_{K,H} \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_H^*$$

une (p, p) -forme et $\xi_t = \sum_k (\lambda_{t,k} \zeta_k + \bar{\lambda}_{t,k} \bar{\zeta}_k)$, $t = 1, \dots, p$, vecteurs réels. On désigne par $\lambda = (\lambda_{t,k}) \in M_{p,n}(\mathbb{C})$ la (p, n) -matrice associée aux coefficients $\lambda_{t,k}$. Les identités

$$\xi_1 \wedge J\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p \wedge J\xi_p = 2^p (-i)^p \xi_1^{1,0} \wedge \xi_1^{0,1} \wedge \dots \wedge \xi_p^{1,0} \wedge \xi_p^{0,1}$$

et $i^{p^2}(-1)^{p(p-1)/2} = i^p$ impliquent les égalités

$$\begin{aligned} u(\xi_1, J\xi_1, \dots, \xi_p, J\xi_p) &= 2^p(-i)^p u(\xi_1^{1,0}, \xi_1^{0,1}, \dots, \xi_p^{1,0}, \xi_p^{0,1}) = \\ &= 2^p(-i)^p(-1)^{p(p-1)/2} u(\xi_1^{1,0}, \dots, \xi_p^{1,0}, \xi_1^{0,1}, \dots, \xi_p^{0,1}) = \\ &= 2^p \sum_{|K|=|H|=p} u_{K,H} \det \lambda_K \cdot \overline{(\det \lambda_H)}. \end{aligned}$$

On aura alors que la (p, p) -forme u est positive si et seulement le dernier terme de l'égalité précédente est positif pour toute matrice λ . Dans le cas $p = 1$ la matrice hermitienne $(u_{k,h})$ associée au coefficients de la forme u est semidéfinie positive et une diagonalisation de celle ci montre qu'on peut exprimer u sous la forme $u = \sum_{1 \leq t \leq r} i \alpha_t \wedge \bar{\alpha}_t$, où r est le rang de la forme u . On a donc que la notion de positivité coïncide avec celle de forte positivité en degré $(1, 1)$ et par dualité aussi en degré $(n-1, n-1)$ (et bien évidemment en bidegré $(0, 0)$ et (n, n)). Nous montrons maintenant un premier résultat qui exprime la relation forte qui existe entre les formes positives et les fonctions plurisousharmoniques.

Lemme 3.1.0.1 *Soit $f \in \mathcal{C}^2(X, \mathbb{R})$. Alors $f \in Psh(X, J)$ si et seulement si la forme $i\partial_J \bar{\partial}_J f$ est positive.*

Preuve. Nous commençons par montrer la nécessité de la positivité de la forme $i\partial_J \bar{\partial}_J f$. En effet soit $\xi \in T_{X,x}$ un vecteur réel. Il existe alors une courbe J -holomorphe γ telle que $\gamma(0) = x$ et $\xi = d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}|_0\right)$ (voir par exemple l'article de Sikorav, théorème 3.1.1 dans l'ouvrage de Audin et Lafontaine [Au-La] ou la preuve du théorème 3.2.2 qui suivra). Le fait que la courbe γ soit J -holomorphe implique la première et troisième des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} i\partial_J \bar{\partial}_J f(\xi, J\xi) &= i\partial_J \bar{\partial}_J f\left(d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}|_0\right), d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}|_0\right)\right) = \\ &= \gamma^* i\partial_J \bar{\partial}_J f\left(\frac{\partial}{\partial x}|_0, \frac{\partial}{\partial y}|_0\right) = i\partial_j \bar{\partial}_j (f \circ \gamma)\left(\frac{\partial}{\partial x}|_0, \frac{\partial}{\partial y}|_0\right) = \\ &= i \frac{\partial^2 (f \circ \gamma)}{\partial z \partial \bar{z}}(0) dz \wedge d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial x}|_0, \frac{\partial}{\partial y}|_0\right) = \frac{1}{2} \Delta(f \circ \gamma)(0) \end{aligned}$$

ce qui montre la nécessité de la positivité. Le même calcul, avec $z \in B_\delta$ à la place de 0, montre aussi la suffisance de la positivité. \square

Définition 3.1.6 *Une fonction $f \in \mathcal{C}^2(X, \mathbb{R})$ sur une variété presque complexe (X, J) est dite strictement J -plurisousharmonique s'il existe une métrique hermitienne $\omega \in \mathcal{C}^0(\Lambda_{J,1}^{1,1} T_X^*)(X)$ sur le fibré tangent telle que $i\partial_J \bar{\partial}_J f \geq \omega$.*

Quelques exemples élémentaires de fonctions strictement J -plurisousharmonique.

Exemple 1. On déduit facilement que si (z_1, \dots, z_n) sont des coordonnées \mathcal{C}^∞ telles que $J(0) = J_0$ et $f(z) = |z|^2$, on a l'écriture

$$i\partial_J \bar{\partial}_J f(\xi, J\xi)(z) = 2 \sum_{k,l} \frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(z) \xi_k \bar{\xi}_l + O(|z|)(\xi, \bar{\xi}),$$

(voir par exemple le lemme 3.5.1.1). On a alors que la fonction $f(z) = |z|^2$ est strictement J -plurisousharmonique sur un voisinage de l'origine des coordonnées.

Exemple 2. Soit $F_J^\lambda := S^\lambda T_{X,J}$ une puissance de Schur du fibré tangent et considérons une métrique hermitienne sur F_J^λ telle que la courbure au sens de Griffiths soit strictement négative en un point x . Soit $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ un repère local presque-holomorphe spécial au point $x \in U$. En utilisant le lemme précédent on déduit d'après la formule (2.6.3), prouvée dans le chapitre II, que les fonctions $f_k := |\sigma_k|_h^2$ sont strictement J -plurisousharmoniques au voisinage du point x . \square

Pour réduire l'hypothèse de régularité de la fonction f , on a besoin de donner quelques éléments de la théorie des courants positifs sur les variétés presque complexes. Pour faire ceci on a besoin de quelques résultats et notions préliminaires que nous présentons tout de suite.

3.2 Plongements par feuilles courbes J -holomorphes et champs de vecteurs J -plats sur les variétés presque complexes

On désigne par $B_{2r}^n \subset \mathbb{C}^n$ la boule ouverte de dimension $2n$, de rayon $2r$ et de centre l'origine. On veut plonger dans une variété presque complexe (X, J) de dimension complexe n le cylindre $B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$, avec $\delta > 0$ suffisamment petit, de telle sorte que les disques $B_\delta^1 \times p$, $p \in B_\delta^{n-1}$ se plongent de façon J -holomorphe dans X . De plus on veut pouvoir plonger dans toutes les "positions possibles" les cylindres précédents. L'existence de ces plongements est directement liée à la notion de champ de vecteurs J -plat qu'on introduit ci-dessous.

Définition 3.2.1 *Un champ de vecteurs réel $\xi \in \mathcal{E}(T_X \setminus 0_X)(U)$ au dessus d'un ouvert U est dit J -plat s'il vérifie l'équation différentielle non linéaire de premier ordre $[\xi, J\xi] = 0$ sur l'ouvert U . On désigne par $P_J(U, T_X)$ l'ensemble des champs de vecteurs J -plats au dessus de U .*

D'après le théorème de Newlander-Nirenberg on déduit que si la structure presque complexe est intégrable alors tout champ de vecteurs réel holomorphe $\xi \in \mathcal{O}(T_X \setminus 0_X)(U)$ au dessus d'un ouvert U quelconque est J -plat. On a le résultat général suivant qui assure la possibilité d'effectuer des plongements du cylindre, dont les feuilles sont des courbes J -holomorphes, en toutes les positions possibles et l'existence locale "en grande quantité" des champs de vecteurs J -plats.

Théorème 3.2.2 *Soit (X, J) une variété presque complexe de dimension complexe n . Pour tout point $x_0 \in X$ il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 et un voisinage ouvert $\mathcal{B}(T_{U_{x_0}}) \subset T_{U_{x_0}}$, $\mathcal{B}(T_{U_{x_0}}) \simeq U_{x_0} \times B^n$, de la section nulle sur U_{x_0} tels que :*

A) *Il existe une application de classe \mathcal{C}^∞*

$$\Phi : B_1^1 \times \mathcal{B}(T_{U_{x_0}}) \longrightarrow X$$

telle que pour tout $v \in \mathcal{B}(T_{U_{x_0}})$ l'application $z \in B_1^1 \mapsto \Phi(z, v)$ est une courbe J -holomorphe qui vérifie la condition $\partial_t \Phi(0, v) = v$, $z = t + is$.

B) *Il existe une famille de plongements $(\Psi_\alpha : B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1} \longrightarrow X)_{\alpha \in I}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que pour tout $\alpha \in I$ et $z_2 \in B_\delta^{n-1}$ les applications*

$$z_1 \in B_\delta^1 \mapsto \Psi_\alpha(z_1, z_2)$$

sont des courbes J -holomorphes, $\Psi_\alpha(B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1}) \supset U_{x_0}$ et

$$T_{X,p} \setminus 0_p = \left\{ \lambda \partial_t \Psi_\alpha(0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0, \alpha \in I \right\} = \left\{ \xi(p) \mid \xi \in P_J(U_{x_0}, T_X) \right\}$$

pour tout $p \in U_{x_0}$, ($z_1 = t + is$).

Avant de passer à la preuve du théorème 3.2.2 on a besoin de quelques préliminaires techniques. Soit J_0 la structure presque complexe usuelle sur \mathbb{R}^{2n} identifié avec \mathbb{C}^n via l'identification $z \equiv (x, y)$. Nous considérons un système de coordonnées locales centrées en $x_0 \in X$ et on suppose, quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, que $J(0) = J_0$. On considère aussi une boule ouverte $B_{2r}^n \subset \mathbb{C}^n$ sur laquelle l'endomorphisme $J + J_0$ est inversible et on pose par définition

$$q_J := (J_0 + J)^{-1} \cdot (J_0 - J) \in C^\infty(\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}))(B_{2r}^n).$$

On remarque que $q_J(0) = 0$. On suppose pour simplifier les notations qui suivront que $r = 1$. Si $\gamma : B_1^1 \rightarrow (B_2^n, J)$ est une courbe J -holomorphe, la condition de J -holomorphie $\partial_s \gamma = J(\gamma) \partial_t \gamma$, $z = t + is$ peut être écrite de façon équivalente sous la forme

$$\partial_{\bar{z}} \gamma + q_J(\gamma) \partial_z \gamma = 0 \quad (3.2.1)$$

où $\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_t + J_0 \partial_s)$ et $\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_t - J_0 \partial_s)$. En effet en utilisant les identités $\partial_t = \frac{1}{2}(\partial_z + \partial_{\bar{z}})$ et $\partial_s = \frac{J_0}{2}(\partial_z - \partial_{\bar{z}})$ on peut écrire la condition $\partial_s \gamma = J(\gamma) \partial_t \gamma$ sous la forme

$$(J_0 + J(\gamma)) \partial_{\bar{z}} \gamma = (J_0 - J(\gamma)) \partial_z \gamma.$$

L'inversibilité de l'endomorphisme $J + J_0$ donne alors l'écriture sous la forme (3.2.1). On rappelle aussi (voir l'article de Sikorav dans l'ouvrage de Audin et Lafontaine [Au-La] pour plus de détails) que l'opérateur

$$P : C^{k+\mu}(B_1^1; \mathbb{C}^n) \rightarrow C^{k+\mu+1}(B_1^1; \mathbb{C}^n),$$

$k \in \mathbb{N}$, $\mu \in (0, 1)$ défini par la formule $P\gamma(z) := P'\gamma(z) - P'\gamma(0)$, avec

$$P'\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta \in B_1^1} \frac{\gamma(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

vérifie les propriétés suivantes : $\partial_{\bar{z}} \circ P = \mathbb{I}$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et $\mu \in (0, 1)$ il existe une constante $c_{k,\mu} > 0$ telle que pour toute courbe $\gamma \in C^{k+\mu}(B_1^1; \mathbb{C}^n)$ on a l'estimation

$$\|P\gamma\|_{k+\mu+1} \leq (2 + c_{k,\mu}) \|\gamma\|_{k+\mu}, \quad (3.2.2)$$

où $\|\cdot\|_{k+\mu}$ désigne la norme de Hölder usuelle sur B_1^1 . Pour prouver le théorème 3.2.2 on utilisera la remarque essentielle suivante, utilisée par McDuff (voir le lemme 1.4 dans [McD]) et aussi par Sikorav pour prouver le théorème 3.1.1 dans l'ouvrage [Au-La] : une courbe $\gamma : B_1^1 \rightarrow (B_2^n, J)$ est J -holomorphe si et seulement si la courbe

$$\gamma_0 := \gamma + P(q_J(\gamma) \partial_z \gamma)$$

est J_0 -holomorphe. De plus on a l'égalité $\gamma_0(0) = \gamma(0)$.

On aura besoin de quelques remarques élémentaires de topologie différentielle qui seront utilisées plusieurs fois dans la suite.

Remarque 1. Soit $f : X \times Y \rightarrow Z$ une application entre espaces topologiques telle que l'application $\Phi_f : X \times Y \rightarrow X \times Z$, $\Phi_f(x, y) := (x, f(x, y))$ soit ouverte. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in X \times Y$, pour tout voisinage ouvert $V_{y_0} \subset Y$ de y_0 et pour tout compact $K \subset f_{x_0}(V_{y_0})$ (ici on pose par définition $f_x := f(x, \cdot)$) il existe un voisinage ouvert $U_{x_0} \subset X$ de x_0 tel que

pour tout $x \in U_{x_0}$ on a $f_x(V_{y_0}) \supset K$. L'hypothèse précédente est vérifiée par exemple si f est une application de classe \mathcal{C}^1 entre variétés de Banach telle que pour tout $x \in X$ l'application $f_x : Y \rightarrow Z$ soit un plongement ouvert, autrement dit f_x est injective et

$$d_y f_x : T_{Y,y} \rightarrow T_{Z,f_x(y)}$$

est un isomorphisme pour tout $y \in Y$. En effet dans ce cas le théorème d'inversion locale implique que l'application Φ_f est ouverte.

Remarque 2. Dans le cas où l'application $f_{x_0} : Y \rightarrow Z$ est un plongement ouvert seulement en un point $x_0 \in X$ on a d'après le théorème des fonctions implicites que pour tout compact $K \subset Z$ il existe un voisinage ouvert $V_K \subset Z$ de K , un voisinage ouvert $W \subset Y$ de $f_{x_0}^{-1}(V_K)$ et un voisinage ouvert $U_{x_0} \subset X$ de x_0 tel que pour tout $x \in U_{x_0}$ l'application

$$f_x : f_x^{-1}(V_K) \cap W \rightarrow V_K$$

soit un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 .

Remarque 3. Le théorème des fonctions implicites implique que si $f : X \times Y' \rightarrow Z$ est une application de classe \mathcal{C}^1 entre variétés de Banach telle qu'il existe un point $x_0 \in X$ et un ouvert relativement compact $Y \subset Y'$ (donc Y' est de dimension finie) tels que $f_{x_0} : Y \rightarrow Z$ soit injective et

$$d_y f_{x_0} : T_{Y',y} \rightarrow T_{Z,f_{x_0}(y)}$$

soit un isomorphisme pour tout $y \in \overline{Y}$, alors il existe un voisinage ouvert $U_{x_0} \subset X$ de x_0 tel que pour tout $x \in U_{x_0}$ l'application $f_x : Y \rightarrow Z$ est un plongement ouvert.

Preuve du théorème 3.2.2

Preuve de la partie A

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ nous considérons l'application de classe \mathcal{C}^{k-1}

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times \mathcal{C}^{k+\mu}(B_1^1 \times B_1^n \times B_1^n; B_2^n) &\rightarrow \mathcal{C}^{k+\mu}(B_1^1 \times B_1^n \times B_1^n; \mathbb{C}^n) \\ (\varepsilon, \phi) &\mapsto \phi + P_z(q_J(\varepsilon\phi) \partial_z \phi) \end{aligned}$$

où $\mu \in (0, 1)$ est une constante fixée et $(P_z \phi)(z, x, v) := (P\phi(\cdot, x, v))(z)$, $(z, x, v) \in B_1^1 \times B_1^n \times B_1^n$. Considérons aussi l'application holomorphe $H \in \mathcal{O}(B_1^1 \times B_1^n \times B_1^n; B_2^n)$ définie par la formule $H(z, x, v) := x + zv$.

Le fait que l'application

$$F_0 := F(0, \cdot) : \mathcal{C}^{k+\mu}(B_1^1 \times B_1^n \times B_1^n; B_2^n) \rightarrow \mathcal{C}^{k+\mu}(B_1^1 \times B_1^n \times B_1^n; \mathbb{C}^n)$$

soit l'inclusion canonique entraîne, d'après la remarque 2, l'existence d'un voisinage ouvert $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{C}^{k+\mu}(B_1^1 \times B_1^n \times B_1^n; B_2^n)$ de H (avec $\mathcal{V}_k \supset \mathcal{V}_{k+1}$), d'un voisinage ouvert

$$\mathcal{W}_k \subset \mathcal{C}^{k+\mu}(B_1^1 \times B_1^n \times B_1^n; B_2^n)$$

de \mathcal{V}_k , $\mathcal{W}_k \supset \mathcal{W}_{k+1}$ et de $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ tel que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ l'application

$$F_\varepsilon : F_\varepsilon^{-1}(\mathcal{V}_k) \cap \mathcal{W}_k \rightarrow \mathcal{V}_k$$

est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^{k-1} . On pose alors par définition $\phi_\varepsilon := F_\varepsilon^{-1}(H)$ et on remarque que l'application $\varepsilon\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(B_1^1 \times B_1^n \times B_1^n; B_2^n)$ est J -holomorphe par rapport à la variable $z \in B_1^1$. Nous considérons maintenant l'application de classe \mathcal{C}^∞

$$\begin{aligned} \chi : [0, \varepsilon_0] \times B_1^n \times B_1^n &\longrightarrow B_2^n \times \mathbb{C}^n \\ (\varepsilon, x, v) &\longmapsto (x, \partial_t \phi_\varepsilon(0, x, v)), \end{aligned}$$

$z = t + is$. On rappelle que $\phi_\varepsilon(0, x, v) = x$. Le fait que l'application $\chi_0 := \chi(0, \cdot, \cdot)$ soit l'inclusion canonique entraîne, d'après les remarques 3 et 1, que quelque soit $r \in (0, 1)$ et $\rho \in (0, r)$ il existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r, \rho) \in (0, \varepsilon_0]$ tel que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ l'application

$$\chi_\varepsilon : B_r^n \times B_r^n \longrightarrow \chi_\varepsilon(B_r^n \times B_r^n) \supset \overline{B_\rho^n} \times \overline{B_\rho^n}$$

est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ . On considère l'application $\chi_\varepsilon^{-1} : \overline{B_\rho^n} \times \overline{B_\rho^n} \longrightarrow B_r^n \times B_r^n$ et on définit l'application

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : B_1^1 \times B_{\varepsilon\rho}^n \times B_{\varepsilon\rho}^n &\longrightarrow B_2^n \\ (z, x, v) &\longmapsto \varepsilon\phi_\varepsilon(z, \chi_\varepsilon^{-1}(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}v)). \end{aligned}$$

Si on pose par définition $U_{x_0} := B_{\varepsilon\rho}^n$ et $\mathcal{B}(T_{U_{x_0}}) := B_{\varepsilon\rho}^n \times B_{\varepsilon\rho}^n$ on a que l'application Φ_ε vérifie les conditions de la partie A de l'énoncé du théorème 3.2.2. On verra de suite que pour satisfaire aussi la conclusion B du théorème 3.2.2 il est nécessaire de considérer un voisinage ouvert U_{x_0} plus petit.

Preuve de la partie B

On rappelle qu'on désigne par J_0 la structure presque complexe usuelle sur \mathbb{R}^{2n} identifié à \mathbb{C}^n via $z \equiv (x, y)$. Avec cette identification on voit le groupe $Gl(n, \mathbb{C})$ comme sous-groupe du groupe $Gl(2n, \mathbb{R})$. Précisément $A \in Gl(n, \mathbb{C}) \subset Gl(2n, \mathbb{R})$ si et seulement si $AJ_0 = J_0A$. Dans la suite on désignera par $U(n) := O(2n) \cap Gl(n, \mathbb{C})$ le groupe unitaire. Soit $\delta = \rho/2$ et

$$l : B_\delta^n \times B_\delta^{n-1} \times U(n) \longrightarrow B_\rho^n \subset \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$$

l'application définie par la formule

$$l(p, z_2, A) = p + A \left(x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + y_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y_2} \right),$$

avec l'identification $z_2 \equiv (x_2, y_2)$ et $x_2 \equiv (x_2, \dots, x_n)$, $y_2 \equiv (y_2, \dots, y_n)$. Considérons donc l'application de classe \mathcal{C}^∞

$$\begin{aligned} \Phi : [0, \varepsilon_1] \times (B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1}) \times B_\delta^n \times U(n) &\longrightarrow B_2^n \\ (\varepsilon; (z_1, z_2); (p, A)) &\longmapsto \phi_\varepsilon \left(z_1, \chi_\varepsilon^{-1} \left(l(p, z_2, A); A \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right), \end{aligned}$$

où $\phi_\varepsilon := F_\varepsilon^{-1}(H)$ est l'application définie dans la preuve de la partie A. Avec l'identification $\Phi(\varepsilon; (z_1, z_2); (p, A)) \equiv \Phi_\varepsilon^{p,A}(z_1, z_2)$ on a les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_\varepsilon^{p,A}(0, z_2) = l(p, z_2, A) \\ \partial_t \Phi_\varepsilon^{p,A}(0, z_2) = A \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \Phi_0^{p,A}(z_1, z_2) = t A \frac{\partial}{\partial x_1} + s A \frac{\partial}{\partial y_1} + l(p, z_2, A) \end{array} \right.$$

(rappelons que $z_1 := t + is$). Soit $\delta_1 \in (0, \delta)$ un réel suffisamment petit pour pouvoir assurer l'inclusion $\overline{B_{\delta_1}^n} \subset \Phi_0^{p,A}(B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1})$ pour tout $p \in \overline{B_{\delta_1}^n}$ et $A \in U(n)$. On aura alors que l'image du plongement

$$\begin{aligned} \Phi_0 \times \mathbb{I} : (B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1}) \times \overline{B_{\delta_1}^n} \times U(n) &\longrightarrow B_2^n \times \overline{B_{\delta_1}^n} \times U(n) \\ ((z_1, z_2); (p, A)) &\longmapsto (\Phi_0^{p,A}(z_1, z_2); (p, A)) \end{aligned}$$

contient le compact $\overline{B_{\delta_1}^n} \times \overline{B_{\delta_1}^n} \times U(n)$ (rappelons que le groupe $U(n)$ est compact). On aura d'après les remarques 3 et 1 l'existence de $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ et $(p, A) \in B_{\delta_1}^n \times U(n)$ l'application

$$\Phi_\varepsilon^{p,A} : B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1} \longrightarrow \Phi_\varepsilon^{p,A}(B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1}) \supset B_{\delta_1}^n$$

est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ . Nous considérons donc l'application

$$\Psi_\varepsilon : (B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1}) \times B_{\varepsilon\delta_1}^n \times U(n) \longrightarrow B_2^n$$

définie par la formule $\Psi_\varepsilon^{p,A} := \varepsilon \Phi_\varepsilon^{\varepsilon^{-1}p,A}$, $(p, A) \in B_{\varepsilon\delta_1}^n \times U(n)$ et on remarque qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}_1} \Psi_\varepsilon^{p,A} + q_J(\Psi_\varepsilon^{p,A}) \partial_{z_1} \Psi_\varepsilon^{p,A} &= 0 & \Psi_\varepsilon^{p,A}(0, 0) &= p \\ \Psi_\varepsilon^{p,A}(B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1}) \supset B_{\varepsilon\delta_1}^n & & \partial_t \Psi_\varepsilon^{p,A}(0, z_2) &= \varepsilon A \frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned}$$

On définit les champs de vecteurs J -plats

$$\xi_{p,A} := \partial_t \Psi_\varepsilon^{p,A} \circ (\Psi_\varepsilon^{p,A})^{-1} \quad \xi_{p,A}(p) = \varepsilon A \frac{\partial}{\partial x_1}$$

sur l'ouvert $B_{\varepsilon\delta_1}^n$. Le fait que l'action de $U(n)$ est transitive sur la sphère S^{2n-1} , (voir [Bo-Tu]) entraîne que la famille

$$\{\lambda \xi_{p,A} \in P_J(B_{\varepsilon\delta_1}^n, T_X) \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, (p, A) \in B_{\varepsilon\delta_1}^n \times U(n)\}$$

engendre ponctuellement (au sens ensembliste) $T_X|_{B_{\varepsilon\delta_1}^n} \setminus 0_X$, ce qui prouve la partie B du théorème 3.2.2 avec $U_{x_0} := B_{\varepsilon\delta_1}^n$ et $I := B_{\varepsilon\delta_1}^n \times U(n)$. \square

Le lemme élémentaire suivant montre que tout champ de vecteurs J -plat provient localement d'un plongement dont les feuilles sont des courbes J -holomorphes.

Lemme 3.2.0.2 *Soit (X, J) une variété presque complexe de dimension complexe n et ξ un champ de vecteurs J -plat sur un ouvert U . Pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert $U_x \subset U$ de x et une carte locale (U_x, σ_ξ^{-1}) , $\sigma_\xi : B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1} \longrightarrow U_x$, compatible avec l'orientation canonique de (U_x, J) telle que pour tout $z_2 \in B_\delta^{n-1}$, les applications $z_1 \in B_\delta^1 \mapsto \sigma_\xi(z_1, z_2)$ sont des courbes J -holomorphes et $d\sigma_\xi(\frac{\partial}{\partial x_1}) = \xi \circ \sigma_\xi$, $z_1 = x_1 + iy_1$.*

Preuve. Soient $v_2, \dots, v_n \in T_{X,x}$ des vecteurs tels que $\xi(x), v_2, \dots, v_n$ soit une base sur \mathbb{C} de $T_{X,x}$ et τ des coordonnées locales centrées en x telles que :

$$\begin{aligned} d\tau^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0\right) &= \xi(x) & d\tau^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_0\right) &= J\xi(x) \\ d\tau^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_0\right) &= v_k & d\tau^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_0\right) &= Jv_k \end{aligned}$$

pour tout $k = 2, \dots, n$, (on désigne par $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ les coordonnées sur \mathbb{R}^{2n}). On désigne par $\phi_\xi, \phi_{J\xi} : V_x \times (-\delta, \delta) \subset X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ les flots respectifs des champs ξ et $J\xi$ au voisinage V_x de x (pour simplifier les notations on utilisera dans la suite l'identification $\phi_\xi(x, t) \equiv \phi_\xi^t(x)$) et on considère l'application $\sigma_\xi : \text{Im } \tau \rightarrow X$ définie par la formule

$$\begin{aligned} \sigma_\xi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) &:= \phi_\xi^{x_1} \circ \phi_{J\xi}^{y_1} \circ \tau^{-1}(0, 0, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) = \\ &= \phi_{J\xi}^{y_1} \circ \phi_\xi^{x_1} \circ \tau^{-1}(0, 0, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n). \end{aligned}$$

D'après le théorème d'inversion locale on a l'existence d'un voisinage ouvert $U_x \subset U$ de x tel que (U_x, σ_ξ^{-1}) soit une carte locale compatible avec l'orientation canonique de (U_x, J) telle que

$$d\sigma_\xi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \xi \circ \sigma_\xi \quad \text{et} \quad d\sigma_\xi\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) = J\xi \circ \sigma_\xi.$$

Si on suppose $\sigma_\xi^{-1}(U_x) = B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n}$ on en déduit que les applications $(t, s) \in B_\delta^1 \mapsto \sigma_\xi(t, s, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$ sont des courbes J -holomorphes pour tout $(a_2, b_2, \dots, a_n, b_n) \in B_\delta^{n-1}$. \square

On aura besoin aussi du lemme suivant.

Lemme 3.2.0.3 *Soit (X, J) une variété presque complexe de dimension complexe n et soit $\gamma : B_\delta^1 \rightarrow X$ une courbe J -holomorphe lisse. Il existe alors un plongement $\sigma : B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1} \rightarrow X$, $\rho \in (0, \delta)$ de classe C^∞ qui préserve les orientations canoniques tel que les applications $\sigma(\cdot, z_2)$, $z_2 \in B_\rho^{n-1}$ soient des courbes J -holomorphes et $\sigma(\cdot, 0) = \gamma$.*

Preuve. Soit $B_2^n \subset X$ une boule coordonnée telle que $J(0) = J_0$ et $\gamma(0) = 0$. Soit $\mu_\lambda : B_1^1 \rightarrow B_\lambda^1$, $\mu_\lambda(z) = \lambda z$ l'homothétie de facteur $\lambda > 0$ et γ_λ , $\lambda \in (0, \delta]$ la courbe J -holomorphe définie par la formule $\gamma_\lambda := \gamma \circ \mu_\lambda$. Considérons la famille de courbes J_0 -holomorphes $(u_\lambda)_{\lambda \in (0, \delta]}$ définie par la formule

$$u_\lambda := \lambda^{-1} \left[\gamma_\lambda + P \left(q_J(\gamma_\lambda) \partial_z \gamma_\lambda \right) \right].$$

Considérons des vecteurs $\xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$ tels que les vecteurs $\lambda \partial_t u_\lambda(0), \xi_2, \dots, \xi_n$ forment une base J_0 -complexe de \mathbb{R}^{2n} et la famille d'applications J_0 -holomorphes

$$(H_\lambda)_{\lambda \in (0, \delta]} \subset \mathcal{O}(B_1^1 \times B_1^{n-1}; B_2^n),$$

définie par la formule $H_\lambda(z_1, z_2) = u_\lambda(z_1) + \xi \cdot z_2$. Nous considérons aussi l'application

$$F : [0, 1] \times \mathcal{C}^{k+\mu}(B_1^1 \times B_1^{n-1}; B_2^n) \rightarrow \mathcal{C}^{k+\mu}(B_1^1 \times B_1^{n-1}; \mathbb{C}^n)$$

définie comme dans la preuve du théorème 3.2.2. Le fait que l'ensemble

$$\overline{(H_\lambda)_{\lambda \in (0, \delta]}} \subset \mathcal{C}^{k+\mu}(B_1^1 \times B_1^{n-1}; B_2^n)$$

soit compact, (pour tout $k \geq 1$) entraîne, d'après la remarque 2 de la preuve du théorème 3.2.2, l'existence d'un $\rho \in (0, \delta]$ pour lequel il existe les applications $\phi_\varepsilon := F_\varepsilon^{-1}(H_\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \rho]$, (les applications F_ε^{-1} sont définies comme dans la preuve du théorème 3.2.2). De façon explicite on a donc l'identité

$$\phi_\varepsilon + P_{z_1} \left(q_J(\varepsilon \phi_\varepsilon) \partial_{z_1} \phi_\varepsilon \right) = H_\varepsilon.$$

On déduit alors, grâce à l'inégalité (3.2.2), que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, (disons $\varepsilon \in (0, \rho]$), on a l'inégalité

$$\|\phi_\varepsilon - H_\varepsilon\|_{k+\mu+1} \leq \varepsilon C_{k,\mu} \|d_0 q_J\| \cdot \|\phi_\varepsilon\|_{k+\mu} \cdot \|d\phi_\varepsilon\|_{k+\mu},$$

qui compte tenu de la compacité de la famille $\overline{(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0, \rho]}} \subset \mathcal{C}^{k+\mu}(B_1^1 \times B_1^{n-1}; B_2^n)$, (pour tout $k \geq 1$) implique l'inégalité

$$\|\phi_\varepsilon - H_\varepsilon\|_{k+\mu+1} \leq C'_{k,\mu} \varepsilon.$$

On considère le plongement linéaire $L(z_1, z_2) := d_0\gamma(z_1) + \xi \cdot z_2$ et on remarque l'inégalité

$$\|H_\varepsilon - L\|_{k+\mu+1} = \|u_\varepsilon - d_0\gamma\|_{k+\mu+1} \leq \varepsilon C'_{k,\mu} \|d_0q_J\| \cdot \|d_0\gamma\|^2,$$

pour tout $\varepsilon \in (0, \rho]$. On déduit alors que les applications ϕ_ε sont des plongements pour $\rho > 0$ suffisamment petit (voir lemme 1.3 du chapitre 2 dans l'ouvrage de Hirsch [Hir]). On considère donc les plongements $\psi_\varepsilon := \varepsilon\phi_\varepsilon$ et on remarque les égalités

$$\left[\psi_\varepsilon + P_{z_1} \left(q_J(\psi_\varepsilon) \partial_{z_1} \psi_\varepsilon \right) \right] (\cdot, 0) = \varepsilon u_\varepsilon = \gamma_\varepsilon + P_{z_1} \left(q_J(\gamma_\varepsilon) \partial_{z_1} \gamma_\varepsilon \right)$$

qui montrent l'égalité $\psi_\varepsilon(\cdot, 0) = \gamma_\varepsilon$. On déduit alors que l'application

$$(z_1, z_2) \in B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1} \mapsto \sigma(z_1, z_2) := \psi_\rho(\rho^{-1}z_1, z_2)$$

est le plongement voulu. \square

3.3 Courants positifs sur les variétés presque complexes

3.3.1 Généralités

On commence par rappeler quelques définitions générales de la théorie des courants.

Définition 3.3.1 Soit $\Theta \in \mathcal{D}^k(X)$ un courant de degré k , d'ordre zéro sur une variété différentiable X orientable et orientée de dimension n . Une masse du courant Θ est une mesure de Radon positive μ sur X telle que si $\psi \in \mathcal{E}(\Lambda^n T_X^*)(X)$ est une forme de volume arbitraire et si $A \subset X$ est un ensemble de Borel alors $\mu(A) = 0$ si et seulement si $\int_A \Theta(\xi_1, \dots, \xi_k) \cdot \psi = 0$ pour tout champ de vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{E}(T_X)(X)$.

On remarque que si μ_1 et μ_2 sont deux masses du même courant alors l'une est absolument continue par rapport à l'autre. Il est bien connu, (cf. [Fed], [G-M-S]) que tout courant d'ordre zéro admet une masse qui peut être définie par la formule

$$\mu_g(\Theta)(U) := \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}^{n-k}(U) \\ |\varphi|_g \leq 1}} \left| \int_U \Theta \wedge \varphi \right|$$

pour tout ouvert $U \subset X$ relativement compact dans X , (ici g est une métrique Riemannienne sur X). Avec les notations de la définition 3.3.1 on a par conséquence du Théorème de Radon-Nikodym l'existence d'une k -forme $\theta_{\mu,\psi}$ telle que pour tout champ de vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{E}(T_X)(X)$ la fonction $\theta_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_k) \in L^1_{loc}(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ (ici \mathcal{B}_X désigne la σ -algèbre de Borel) est définie μ -presque partout par la formule

$$\theta_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_k)(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \Theta(\xi_1, \dots, \xi_k) \cdot \psi$$

où $B_r(x)$ est une boule de rayon r relative à un ouvert coordonné quelconque. On aura alors pour tout Borelien $A \in \mathcal{B}_X$ l'égalité

$$\int_A \Theta(\xi_1, \dots, \xi_k) \cdot \psi = \int_A \theta_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_k) d\mu$$

qu'on dénote souvent sous la forme $\Theta = \theta_{\mu,\psi} \cdot \mu$. Nous rappelons maintenant quelques résultats de base de la théorie des courants d'ordre zéro (cf. [Fed], [G-M-S]).

Théorème 3.3.2 (Compacité faible de la masse). *Soit $\{\Theta_\nu\}_\nu \subset \mathcal{D}'^k(X)$ une suite de courants d'ordre zéro telle que $\sup_\nu \mu(\Theta_\nu)(U) < \infty$ pour tout ouvert relativement compact U de X . Il existe alors une sous-suite $\{\Theta_{\nu_j}\}_{\nu_j}$ de $\{\Theta_\nu\}_\nu$ convergente pour la topologie faible des courants d'ordre zéro vers un courant d'ordre zéro $\Theta \in \mathcal{D}'^k(X)$.*

Ce théorème est juste une conséquence du théorème classique de Banach-Alaoglu. Le théorème précédent admet un réciproque que nous énonçons sous la forme suivante.

Théorème 3.3.3 *Soit $\{\Theta_\nu\}_\nu \subset \mathcal{D}'^k(X)$ une suite de courants d'ordre zéro sur X telle que $\sup_\nu |\langle \Theta_\nu, \varphi \rangle| < \infty$ pour toute forme à support compact $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Lambda^{n-k}T_X^*)(X)$. Alors les masses des courants Θ_ν sont localement équi-bornées au sens suivant : pour tout ouvert relativement compact U de X on a $\sup_\nu \mu(\Theta_\nu)(U) < \infty$.*

Ce théorème est simplement une conséquence du théorème classique de Banach-Steinhaus. Nous avons aussi la lemme très utile suivant.

Lemme 3.3.1.1 *Soit $\{\Theta_\nu\}_\nu \subset \mathcal{D}'^k(X)$ une suite de courants d'ordre zéro convergente faiblement vers un courant d'ordre zéro $\Theta \in \mathcal{D}'^k(X)$. Si $\sup_\nu \mu(\Theta_\nu)(X) < \infty$ alors la suite $\{\Theta_\nu\}_\nu$ converge vers le courant Θ dans la topologie faible des courants d'ordre zéro.*

Considérons à partir de maintenant une variété presque complexe (X, J) de classe \mathcal{C}^∞ et de dimension réelle $2n$ munie d'une métrique $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1}T_X^*)(X)$ et les (p, p) -formes fortement positives $\omega_p := 1/p! \omega^p$ pour $p = 0, \dots, n$. On remarque que ω_n est la forme de volume associée à la métrique ω . Les notations précédentes seront utiles pour montrer l'équivalence des définitions suivantes.

Définition 3.3.4 *Un courant $\Theta \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ sur une variété presque complexe (X, J) est dit positif si il vérifie une des trois propriétés équivalentes suivantes.*

a) *Pour tout champ de vecteurs réels $\xi_1, \dots, \xi_{n-p} \in \mathcal{E}(T_X)(X)$ et pour toute forme $\varphi \in \mathcal{D}^{2n}(X)$ positive on a l'inégalité*

$$\langle \Theta(\xi_1, J\xi_1, \dots, \xi_{n-p}, J\xi_{n-p}), \varphi \rangle \geq 0.$$

b) *Le courant Θ est d'ordre zéro et le courant $\Theta \wedge \omega_p$ détermine une masse $\|\Theta\|_\omega$ du courant Θ telle que quel que soit le représentant*

$$\theta_\omega \in \theta_{\|\Theta\|_\omega, \omega_n} \in \left(\mathcal{E}(\Lambda_J^{n-p, n-p} T_X^*) \otimes_{\mathcal{E}_X(\mathcal{C})} \mathcal{L}_{loc}^1(\mathcal{B}_X, \|\Theta\|_\omega) \right) (X)$$

de la forme $\theta_{\|\Theta\|_\omega, \omega_n}$ on a que la forme $\theta_\omega(x) \in \Lambda_J^{n-p, n-p} T_{X,x}^$ est positive pour $\|\Theta\|_\omega$ -presque tout $x \in X$.*

c) *Pour tout (p, p) -forme $\varphi \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{p,p} T_X^*)(X)$ fortement positive le courant $\Theta \wedge \varphi$ détermine une mesure de Radon positive.*

Le cône des courants positifs de bidimension (p, p) sera noté par $\mathcal{D}'_{p,p}(X)^+$.

Preuve de l'équivalence. Nous montrons les implications a) \implies c) et c) \implies b). L'implication b) \implies a) est évidente. Commençons par prouver l'implication a) \implies c).

Soit $U \subset X$ un ouvert coordonnée, soit $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ un repère du fibré $T_{X,J|U}^{1,0}$ et $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de noyaux régularisants usuels. Si

$$\Theta = i^{(n-p)^2} \sum_{|K|=|H|=n-p} \Theta_{K,H} \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_H^*$$

est l'expression locale du courant Θ on définit les $(n-p, n-p)$ -formes

$$\Theta * \rho_\varepsilon := i^{(n-p)^2} \sum_{|K|=|H|=n-p} \Theta_{K,H} * \rho_\varepsilon \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_H^*.$$

Soient de plus $\xi_1, \dots, \xi_{n-p} \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ des champs de vecteurs à coefficients constants par rapport au repère $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. L'égalité

$$\Theta(\xi_1, J\xi_1, \dots, \xi_{n-p}, J\xi_{n-p}) * \rho_\varepsilon = (\Theta * \rho_\varepsilon)(\xi_1, J\xi_1, \dots, \xi_{n-p}, J\xi_{n-p})$$

entraîne que les formes $\Theta * \rho_\varepsilon$ sont positives. Pour tout (p, p) -forme $\varphi \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{p,p} T_X^*)(X)$ fortement positive on a alors l'inégalité $(\Theta * \rho_\varepsilon) \wedge \varphi \geq 0$. En passant à la limite on obtient la conclusion voulue.

Nous montrons maintenant l'implication $c) \implies b)$. Montrons d'abord que le courant Θ est d'ordre zéro. Soit $U \subset X$ sur lequel $T_X|_U$ est trivial et soit $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ un repère ω -orthonormé du fibré $T_{X,J}^{1,0}|_U$. Les formes ω_p s'expriment alors par rapport au repère choisi sous la forme

$$\omega_p = \frac{i^{p^2}}{2^p} \sum_{|K|=p} \zeta_K^* \wedge \bar{\zeta}_K^*.$$

Pour tout multi-indice $|L| = n-p$ on désigne par $R := \mathbb{C}L$ le multi-indice complémentaire de L dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On a alors que le courant

$$\Theta_{L,L} \cdot \omega_n = i^{p^2} 2^{-n} \Theta \wedge \zeta_R^* \wedge \bar{\zeta}_R^*$$

peut être identifié avec une mesure de Radon positive sur l'ouvert U . Nous reprenons maintenant un calcul fait par Demailly dans [Dem-1], chapitre III. On désigne par $R := \mathbb{C}K$, $Q := \mathbb{C}H$ les multi-indices complémentaires de K et H dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et avec $\varepsilon_\bullet := \pm 1, \pm i$. Avec ces notations on aura alors :

$$\begin{aligned} \Theta_{K,H} \cdot \omega_n &= \pm i^{p^2} 2^{-n} \Theta \wedge \zeta_R^* \wedge \bar{\zeta}_Q^* = \pm 2^{-n} \Theta \wedge \bigwedge_{1 \leq s \leq p} i \zeta_{r_s}^* \wedge \bar{\zeta}_{q_s}^* = \\ &= 2^{-n} \Theta \wedge \bigwedge_{1 \leq s \leq p} \left(\sum_{a_s \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})} \varepsilon_{a_s} \frac{i}{4} (\zeta_{r_s}^* + i^{a_s} \zeta_{q_s}^*) \wedge \overline{(\zeta_{r_s}^* + i^{a_s} \zeta_{q_s}^*)} \right). \end{aligned}$$

En effet il suffit de remarquer l'identité extérieure

$$\begin{aligned} 4\zeta_j^* \wedge \bar{\zeta}_k^* &= (\zeta_j^* + \zeta_k^*) \wedge \overline{(\zeta_j^* + \zeta_k^*)} - (\zeta_j^* - \zeta_k^*) \wedge \overline{(\zeta_j^* - \zeta_k^*)} \\ &\quad + i(\zeta_j^* + i\zeta_k^*) \wedge \overline{(\zeta_j^* + i\zeta_k^*)} - i(\zeta_j^* - i\zeta_k^*) \wedge \overline{(\zeta_j^* - i\zeta_k^*)}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

On obtient donc l'expression

$$\Theta_{K,H} \cdot \omega_n = 2^{-n} \Theta \wedge \sum_{a \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^p} \varepsilon_a \bigwedge_{1 \leq s \leq p} \frac{i}{4} (\zeta_{r_s}^* + i^{a_s} \zeta_{q_s}^*) \wedge \overline{(\zeta_{r_s}^* + i^{a_s} \zeta_{q_s}^*)}. \quad (3.3.2)$$

Le fait que les formes

$$\gamma_a := \bigwedge_{1 \leq s \leq p} \frac{i}{4} (\zeta_{r_s}^* + i^{a_s} \zeta_{q_s}^*) \wedge \overline{(\zeta_{r_s}^* + i^{a_s} \zeta_{q_s}^*)},$$

$a \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^p$ sont fortement positives entraîne, par hypothèse, que les courants $\Theta_{K,H} \cdot \omega_n$ peuvent être identifiés avec des mesures de Radon complexes sur l'ouvert U , ce qui montre que le courant Θ est d'ordre zéro. D'autre part on a les égalités

$$\begin{aligned} 2^{-n} \Theta \wedge \bigwedge_{1 \leq s \leq p} \left(\sum_{a_s \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})} \frac{i}{4} (\zeta_{r_s}^* + i^{a_s} \zeta_{q_s}^*) \wedge (\overline{\zeta_{r_s}^* + i^{a_s} \zeta_{q_s}^*}) \right) &= \\ &= 2^{-n} \Theta \wedge \bigwedge_{1 \leq s \leq p} (i \zeta_{r_s}^* \wedge \bar{\zeta}_{r_s}^* + i \zeta_{q_s}^* \wedge \bar{\zeta}_{q_s}^*) = \\ &= 2^{-n} \Theta \wedge \sum_{t \in E} i^{p^2} \zeta_{M_t}^* \wedge \bar{\zeta}_{M_t}^* = \sum_{t \in E} \Theta_{H_t, H_t} \cdot \omega_n \end{aligned}$$

où E est un ensemble d'indices de cardinalité inférieure ou égale à 2^p , $M_t \subset R \cup Q$ est un p -multi-indice et $H_t := \mathfrak{C}M_t$. En utilisant l'expression (3.3.2) on obtient alors l'inégalité suivante :

$$\left| \int_A \Theta_{K,H} \cdot \omega_n \right| \leq 2^p \sum_{L \supset K \cap H} \int_A \Theta_{L,L} \cdot \omega_n < +\infty \quad (3.3.3)$$

pour tout Borelien $A \subset U$. On remarque de plus que le courant $\Theta \wedge \omega_p$ s'écrit sous la forme

$$\Theta \wedge \omega_p = 2^{n-p} \left(\sum_{|L|=n-p} \Theta_{L,L} \right) \cdot \omega_n.$$

Le courant $\Theta \wedge \omega_p$ détermine une mesure de Radon Positive $\|\Theta\|_\omega$ donnée explicitement par la formule

$$\|\Theta\|_\omega(A) := \inf_{U \supset A} \int_U \Theta \wedge \omega_p$$

pour tout sous-ensemble $A \subset X$ relativement compact. L'inégalité (3.3.3) montre alors que les mesures de Radon complexes déterminées par les courants $\Theta_{K,H} \cdot \omega_n$ sont absolument continues par rapport à la mesure $\|\Theta\|_\omega$ restreinte à l'ouvert trivialisant U , ce qui prouve que la mesure de Radon $\|\Theta\|_\omega$ est une masse du courant Θ .

Nous montrons maintenant que la forme $\theta_\omega(x) \in \Lambda_J^{n-p, n-p} T_{X,x}^*$ est positive pour $\|\Theta\|_\omega$ -presque tout $x \in X$. On désigne par $FP_p(T_{X,x}) \subset \Lambda_J^{p,p} T_{X,x}^*$ l'ensemble des (p,p) -formes fortement positives au point x et par

$$FP_p(\zeta) \subset \mathcal{E}(\Lambda_J^{p,p} T_X^*)(U)$$

l'ensemble des (p,p) -formes fortement positives à coefficients constants par rapport au repère $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. On considère un sous-ensemble $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset FP_p(\zeta)$ dense dans $FP_p(\zeta)$. Soit $\xi_\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{n,n} T_X)(X)$ le (n,n) -champ de vecteurs tel que $\omega_n(\xi_\omega) = 1$ sur X . On remarque que pour tout (p,p) -forme $\varphi \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{p,p} T_X^*)(X)$ et tout Borelien $A \subset X$ on a les identités

$$\int_A \Theta \wedge \varphi = \int_A (\Theta \wedge \varphi)(\xi_\omega) \cdot \omega_n = \int_A (\theta_\omega \wedge \varphi)(\xi_\omega) \|\Theta\|_\omega.$$

On a alors que l'ensemble

$$E_\nu := \{x \in \text{Dom } \theta_\omega \cap U \mid \theta_\omega(x) \wedge \varphi_\nu(x) < 0\}$$

est un ensemble de $\|\Theta\|_\omega$ -mesure nulle (ici $\text{Dom } \theta_\omega$ désigne le domaine du représentant θ_ω). Le fait que

$$FP_p(T_{X,x}) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in FP_p(\zeta)\}$$

pour tout $x \in U$ combiné avec le fait que, par densité, pour tout $\varphi \in FP_p(\zeta)$ il existe une suite $(\nu_l)_l$ telle que $\varphi = \lim_{l \rightarrow +\infty} \varphi_{\nu_l}$ entraînent

$$\theta_\omega(x) \wedge \varphi(x) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \theta_\omega(x) \wedge \varphi_{\nu_l}(x) \geq 0$$

pour tout point $x \in \text{Dom } \theta_\omega \cap U \setminus \cup_\nu E_\nu$. Ceci entraîne la conclusion voulue sur la forme θ_ω . \square

Voyons maintenant quelques exemples fondamentaux de $(1,1)$ -courant positif sur les variétés presque complexes.

3.3.2 Exemples fondamentaux de courants positifs sur les variétés presque complexes.

On commence par une définition.

Définition 3.3.5 *Une sous-variété $Y \subset X$ de dimension $2p$ d'une variété presque complexe (X, J) est dite presque complexe si $J(T_Y) = T_Y$.*

Un exemple de sous-variété presque complexe est constitué par les images $\gamma(\mathbb{P}_\mathbb{C}^1) \subset X$ des courbes J -holomorphes régulières. Les résultats qui suivront vont assurer l'existence d'exemples de sous-variétés presque complexes de dimension complexe supérieure à un. On commence par rappeler la proposition suivante (voir [McD-Sa]).

Proposition 3.3.6 *Soit X une variété différentielle de dimension réelle $2n$. S'il existe une 2-forme $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda^2 T_X^*)(X)$ non dégénéré alors l'espace des structures presque complexes compatibles avec ω*

$$\mathcal{J}_{X,\omega} := \left\{ J \in \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_X)(X) \mid J^2 = -\mathbb{I}, \omega(Ju, Jv) = \omega(u, v), \omega(u, Ju) > 0 \forall u, v \in T_{X,x} \setminus \{0_x\} \right\}$$

est non vide et contractile.

On a aussi la proposition suivante, (voir l'article de Audin dans l'ouvrage [Au-La]).

Proposition 3.3.7 *Soit X une variété différentielle de dimension réelle $2n$ admettant une 2-forme $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda^2 T_X^*)(X)$ non dégénérée et soit $Y \subset X$ une sous-variété telle que $i_Y^* \omega$ soit non dégénérée. Il existe alors une structure presque complexe $J \in \mathcal{J}_{X,\omega}$ telle que $(Y, J|_Y)$ soit une sous-variété presque complexe de (X, J) .*

On a le résultat fondamental suivant dû à S.K Donaldson (voir [Don]).

Théorème 3.3.8 *Soit (X, ω) une variété symplectique compacte de dimension réelle $2n$. Pour tout $p = 1, \dots, n$ il existe des sous-variétés symplectiques $(Y_p, i_Y^* \omega)$ fermées de dimension réelle $2p$.*

Le premier exemple de courant positif qu'on considère est le courant d'intégration sur une sous-variété presque complexe Y de dimension $2p$ de mesure localement finie avec l'orientation canonique donnée par la structure presque complexe $J|_Y \in \mathcal{E}(T_Y^* \otimes_{\mathbb{R}} T_Y)$. Le courant $[Y] \in \mathcal{D}'_{2p}(X)$ s'identifie naturellement avec un élément de l'espace $\mathcal{D}'_{p,p}(X)$ étant $\int_Y \varphi = \int_Y \varphi^{p,p}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^{2p}(X)$, où $\varphi^{p,p}$ désigne la composante de type (p,p) de la forme φ . Le courant $[Y]$ est

évidemment positif grâce à la propriété 3.3.4.c. Sous les hypothèses du théorème 3.3.8 on a alors l'existence de courants $[Y_p]$ lesquels sont de bidegré $(n-p, n-p)$ et positifs par rapport à une structure presque complexe $J_p \in \mathcal{J}_{X,\omega}$. De plus les courants en question sont fermés, i.e $d[Y_p] = 0$ en conséquence de la formule de Stokes. La notion intuitive de la masse $\|[Y]\|_\omega$ est clarifiée par le lemme suivant qui est une généralisation immédiate d'un résultat bien connu dans le cas des variétés complexes (voir le chapitre III dans l'ouvrage de Demailly [Dem-1]).

Lemme de Wirtinger 3.3.3 *Soit $Y \subset X$ une sous-variété orientable et orientée de dimension $2p$ d'une variété presque complexe (X, J) munie d'une métrique $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$. Si on désigne par $dV_{Y,\omega}$ la forme de volume associée à la restriction à T_Y de la métrique riemannienne $g(\cdot, \cdot) := \omega(\cdot, J\cdot)$ associée à la métrique ω on a l'existence d'une fonction $\alpha \in C^0(Y, [-1, 1])$ telle que $\omega_{p|_Y} = \alpha \cdot dV_{Y,\omega}$. De plus $|\alpha| = 1$ si et seulement si Y est une sous-variété presque complexe. Dans ce cas $\alpha = 1$ si l'orientation de Y coïncide avec l'orientation canonique donnée par la structure $J|_Y$ et $\alpha = -1$ sinon. La fonction α est identiquement nulle si et seulement si Y est une sous-variété ω -isotropique.*

Le théorème suivant nous fournit un autre exemple fondamental de $(1, 1)$ -courant positif.

Théorème 3.3.9 *Soit (X, J) une variété presque complexe connexe et $f \in Psh(X, J)$. Alors ou bien $f \equiv -\infty$ ou bien $f \in L^1_{loc}(X)$. Dans ce dernier cas le $(1, 1)$ -courant $i\partial\bar{\partial}f$ est positif.*

Preuve

Intégrabilité locale de f . Avec les notations du théorème 3.2.2 on a que pour tout $x \in U_{x_0}$ l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : (0, \delta) \times S^1 \times S^{2n-1}(T_{X,x}) &\longrightarrow X \\ (r, \theta, v) &\longmapsto \Phi(re^{i\theta}, v) \end{aligned}$$

est une submersion de classe C^∞ . Par hypothèse on a l'inégalité de la moyenne

$$f(x) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f \circ \varphi_x(r, \theta, v) d\theta.$$

On considère les ouverts relativement compacts

$$C_{r_1, r_2}(x) := \varphi_x\left((r_1, r_2) \times S^1 \times S^{2n-1}(T_{X,x})\right), \quad 0 < r_1 < r_2 < \delta$$

et la forme de volume de classe C^∞

$$d\mathcal{V}_x(p) := \int_{(r, \theta, v) \in \varphi_x^{-1}(p)} dr d\theta d\sigma(v)$$

sur l'ouvert $\text{Im}\varphi_x$, où $d\sigma$ désigne la forme de volume sur la sphère $S^{2n-1}(T_{X,x})$. Avec ces notations on a alors

$$\int_{p \in C_{r_1, r_2}(x)} f(p) d\mathcal{V}_x(p) = \int_{v \in S^{2n-1}(T_{X,x})} d\sigma(v) \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{2\pi} f \circ \varphi_x(r, \theta, v) d\theta \geq f(x) K_{r_1, r_2} \quad (3.3.4)$$

où $K_{r_1, r_2} > 0$ est une constante. Soit $W \subset X$ l'ensemble des points $p \in X$ tels que la fonction f soit intégrable sur un voisinage de p . Par définition le sous-ensemble W est ouvert en X et

$f > -\infty$ presque partout sur W . Si $p \in \overline{W}$, on peut choisir un point $x \in W$ tel que $f(x) > -\infty$ et $p \in C_{r_1, r_2}(x)$. On déduit alors d'après l'inégalité (3.3.4), que la fonction f est intégrable sur le voisinage $C_{r_1, r_2}(x)$ de p , ce qui montre que $p \in W$ et donc que W est aussi fermé en X . On a alors soit $W = X$, soit $W = \emptyset$. Dans le dernier cas l'inégalité (3.3.4), implique $f \equiv -\infty$. On a donc prouvé que soit $f \equiv -\infty$ soit $f \in L^1_{loc}(X)$.

Positivité du courant $i\partial_J\bar{\partial}_J f$. On montre d'abord que pour tout $\xi \in P_J(U_{x_0}, T_X)$ la distribution $i\partial_J\bar{\partial}_J f(\xi, J\xi)$ est positive sur U_{x_0} . Pour tout $x \in U_{x_0}$ soient (U_x, σ_ξ^{-1})

$$\sigma_\xi : B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1} \longrightarrow U_x \subset U_{x_0}$$

les coordonnées du lemme 3.2.0.2. En rappelant l'expression explicite (3.1.1) du courant $i\partial_J\bar{\partial}_J f$ on aura pour tout $\xi \in \mathcal{E}(T_X)(U_{x_0})$ les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} i\partial_J\bar{\partial}_J f(\xi, J\xi) &= 2\partial_J\bar{\partial}_J f(\xi^{1,0}, \xi^{0,1}) = 2(\xi^{1,0} \cdot \xi^{0,1} \cdot f - [\xi^{1,0}, \xi^{0,1}]^{0,1} \cdot f) = \\ &= \frac{1}{2}(\xi \cdot \xi \cdot f + J\xi \cdot J\xi \cdot f + J[\xi, J\xi] \cdot f) \end{aligned}$$

Le fait que dans notre cas $[\xi, J\xi] = 0$, implique les expressions :

$$i\partial_J\bar{\partial}_J f(\xi, J\xi) = 2\xi^{1,0} \cdot \xi^{0,1} \cdot f = \frac{1}{2}(\xi \cdot \xi \cdot f + J\xi \cdot J\xi \cdot f) = \frac{1}{2}(\sigma_\xi^{-1})^* \Delta_{z_1}(f \circ \sigma_\xi)$$

où $\Delta_{z_1} := \partial_{x_1}^2 + \partial_{y_1}^2$ désigne le Laplacien par rapport à la variable $z_1 = x_1 + iy_1 \in B_\delta^1$ dans l'ouvert $B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1}$. Grâce au théorème de Fubini on en déduit l'inégalité

$$\int_{B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1}} (f \circ \sigma_\xi) \cdot \Delta_{z_1} \varphi \, d\lambda \geq 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(B_\delta^1 \times B_\delta^{n-1})$, $\varphi \geq 0$. Le Laplacien $\Delta_{z_1}(f \circ \sigma_\xi)$ est donc positif, ce qui prouve la positivité de la distribution $i\partial_J\bar{\partial}_J f(\xi, J\xi)$ sur l'ouvert U_{x_0} pour tout champ $\xi \in P_J(U_{x_0}, T_X)$. Nous montrons maintenant que le courant $i\partial_J\bar{\partial}_J f$ est d'ordre zéro.

Soit ζ_1, \dots, ζ_n un repère complexe du fibré des $(1, 0)$ -vecteurs tangents $T_{X, J|U_{x_0}}^{1,0}$. On déduit d'après l'identité extérieure (3.3.1), (avec ζ à la place de ζ^*) l'existence de champs de vecteurs $\rho_k \in \mathcal{E}(T_{X, J}^{1,0})(U_{x_0})$, $k = 1, \dots, n^2$ du type $\rho_k = \zeta_{s_k} + i^{a_k} \zeta_{t_k}$, $a_k \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tels que les $(1, 1)$ -champs de vecteurs $(\rho_k \wedge \bar{\rho}_k)_{k=1}^{n^2}$ forment un repère complexe du fibré $\Lambda_J^{1,1} T_{U_{x_0}}$. On choisit un point $x \in U_{x_0}$ et $\xi_k \in P_J(U_{x_0}, T_X)$ tels que $\xi_k^{1,0}(x) = \rho_k(x)$. On aura alors que les $(1, 1)$ -champs de vecteurs $(\xi_k^{1,0} \wedge \bar{\xi}_k^{0,1})_{k=1}^{n^2}$ forment un repère complexe du fibré $\Lambda_J^{1,1} T_{V_x}$ ou $V_x \subset U_{x_0}$ est un voisinage ouvert du point x . L'identité

$$i\partial_J\bar{\partial}_J f(\xi_k, J\xi_k) = 2\partial_J\bar{\partial}_J f(\xi_k^{1,0} \wedge \bar{\xi}_k^{0,1})$$

montre alors que le courant $i\partial_J\bar{\partial}_J f$ est d'ordre zéro.

Venons-en maintenant à la positivité du courant en question. Soit μ une masse du courant $i\partial_J\bar{\partial}_J f$ et considérons l'écriture $i\partial_J\bar{\partial}_J f = \theta \cdot \mu$. Nous montrons que la forme $\theta(x) \in \Lambda_J^{1,1} T_{X, x}^*$ est positive pour μ -presque tout $x \in X$. On désigne par

$$\mathbb{Q}T_{X|U_{x_0}} := T_{X|U_{x_0}} \cap (\mathbb{Q}^{2n} \times \mathbb{Q}^{2n}),$$

en supposant que l'ouvert U_{x_0} est un ouvert coordonné. D'après la preuve du théorème 3.2.2 il existe une famille dénombrable de champs $(\xi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset P_J(U_{x_0}, T_X)$ telle que pour tout $v \in$

$\mathbb{Q}T_{X|U_{x_0}} \searrow 0_X$ il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $\xi_\nu(\pi(v)) = v$ (π désigne la projection canonique $\pi : T_X \rightarrow X$) et pour tout $x \in U_{x_0}$ l'ensemble $(\xi_\nu(x))_{\nu \in \mathbb{N}}$ est dense dans $T_{X,x}$. La positivité de la distribution $i\partial_j\bar{\partial}_j f(\xi, J\xi)$ sur l'ouvert U_{x_0} entraîne que l'ensemble

$$E_\nu := \{x \in \text{Dom } \theta \cap U_{x_0} \mid \theta(\xi_\nu, J\xi_\nu)(x) < 0\}$$

est de μ -mesure nulle (ici $\text{Dom } \theta$ désigne le domaine du représentant θ). Pour tout point

$$x \in \text{Dom } \theta \cap U_{x_0} \setminus \cup_\nu E_\nu$$

et pour tout $v \in T_{X,x}$ considérons une suite $(\nu_l)_l$ telle que $v = \lim_{l \rightarrow +\infty} \xi_{\nu_l}(x)$. La limite

$$\theta(v, Jv)(x) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \theta(\xi_{\nu_l}, J\xi_{\nu_l})(x) \geq 0$$

entraîne alors la conclusion voulue sur la forme θ . □

3.4 Les potentiels des courants positifs de type $(1, 1)$ sur les variétés presque complexes

Dans cette section nous proposons une conjecture réciproque du théorème 3.3.9 qu'on énonce sous la forme suivante.

Conjecture 2 *Soit (X, J) une variété presque complexe de dimension complexe n et soit $u \in \mathcal{D}'_{2n}(\mathbb{R})(X)$ une distribution réelle telle que le $(1, 1)$ -courant $i\partial_j\bar{\partial}_j u \in \mathcal{D}'^{1,1}(X)$ soit positif. Alors il existe une unique fonction $f \in \text{Psh}(X, J) \cap L^1_{\text{loc}}(X)$ telle que la distribution correspondante coïncide avec la distribution u .*

Il est bien connu que la conjecture est vraie dans le cas complexe intégrable (voir [Dem-1]).

Remarque 1. On considère l'opérateur

$$d_j^c := \frac{i}{2}(\bar{\partial}_j - \partial_j).$$

En degré zéro il se réduit à la forme $d_j^c := -\frac{1}{2}df \circ J$. En utilisant les identités fondamentales de la géométrie presque complexe on déduit facilement qu'en degré zéro on a l'identité

$$i\partial_j\bar{\partial}_j = dd_j^c + i\theta_j\bar{\partial}_j - i\bar{\theta}_j\partial_j,$$

qui montre de quelle façon la torsion de la structure presque complexe représente l'obstruction pour le $(1, 1)$ -courant $i\partial_j\bar{\partial}_j u$ à être d -fermé. D'après l'identité précédente on déduit alors l'égalité

$$dd_j^c u(\xi, J\xi) = i\partial_j\bar{\partial}_j u(\xi).$$

On a donc que le $(1, 1)$ -courant $i\partial_j\bar{\partial}_j u$ est positif si et seulement si pour tout champs de vecteurs réel ξ la distribution $dd_j^c u(\xi, J\xi)$ est positive. On remarque de plus que comme dans le cas complexe intégrable, (cf. [Dem-1]) on a d'après la formule de Stokes l'égalité

$$\int_U \varphi \wedge dd_j^c \psi - dd_j^c \varphi \wedge \psi = \int_{\partial U} \varphi \wedge d_j^c \psi - d_j^c \varphi \wedge \psi \quad (3.4.1)$$

pour tout ouvert $U \subset X$ relativement compact à bord \mathcal{C}^1 par morceaux et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Lambda_J^{p,p} T_X^*)(\bar{U})$ et $\psi \in \mathcal{C}^2(\Lambda_J^{q,q} T_X^*)(\bar{U})$, $p + q = n - 1$. En utilisant la formule précédente et le

fait que $\partial_J \bar{\partial}_J + \bar{\partial}_J \partial_J = 0$ en bidegré $(n-1, n-1)$, on déduit pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^{n-1, n-1}(X)$ les égalités suivantes

$$\int_X i\partial_J \bar{\partial}_J u \wedge \varphi = \int_X dd_J^c u \wedge \varphi = \int_X u \cdot dd_J^c \varphi = \int_X u \cdot i\partial_J \bar{\partial}_J \varphi.$$

Remarque 2. Soit $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$ une métrique hermitienne sur $T_{X,J}$. On définit le Laplacien de $u \in \mathcal{D}'_{2n}(\mathbb{R})(X)$ par rapport à la structure presque complexe J et la métrique ω par la formule

$$\Delta_{J,\omega} u := \text{Trace}_\omega(i\partial_J \bar{\partial}_J u) = \frac{n \cdot i\partial_J \bar{\partial}_J u \wedge \omega^{n-1}}{2 \cdot \omega^n}.$$

Soit $(\xi_k)_k \in \mathcal{E}(T_{X,J})(U)^{\oplus n}$ un repère local complexe ω -orthonormé du fibré $T_{X,J}$ et soit $\zeta_k := \xi_k^{1,0}$. En rappelant l'écriture locale (3.1.2) on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \Delta_{J,\omega} u &= \sum_{k=1}^n (\zeta_k \cdot \bar{\zeta}_k \cdot u - [\zeta_k, \bar{\zeta}_k]^{0,1} \cdot u) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (\xi_k \cdot \xi_k \cdot u + J\xi_k \cdot J\xi_k \cdot u + J[\xi_k, J\xi_k] \cdot u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i\partial_J \bar{\partial}_J u(\xi_k, J\xi_k). \end{aligned}$$

Ce calcul montre que le symbole de $\Delta_{J,\omega}$ coïncide avec le symbole du Laplacien classique $\Delta \equiv \Delta_{J_0, \omega_0}$ sur \mathbb{C}^n , où $\omega_0 = \frac{i}{2} \partial_{J_0} \bar{\partial}_{J_0} |z|^2$ est la métrique J_0 -invariante plate sur \mathbb{C}^n . On obtient alors que l'opérateur de Green de $\Delta_{J,\omega}$ coïncide avec l'opérateur de Green classique de Δ au sens des opérateurs pseudo-différentiels. Si le courant $i\partial_J \bar{\partial}_J u$ est positif alors $\Delta_{J,\omega} u$ est une mesure de Radon positive. On déduit alors d'après la théorie classique des opérateurs elliptiques d'ordre deux que $u \in W_{loc}^{1,1}(X) := \{v \in L_{loc}^1(X) \mid dv \in L_{loc}^1(T_X^*)(X)\}$, (cf. [Sta], paragraphe 9, théorèmes 9.1 et 9.4).

Nous montrons maintenant la conjecture dans le cas particulier suivant.

Théorème 3.4.1 *Soit (X, J) une variété presque complexe et $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty)$ une fonction semi-continue supérieurement telle que f soit continue sur l'ensemble $X \setminus f^{-1}(-\infty)$, $f \in L_{loc}^1(X)$ et telle que le $(1, 1)$ -courant $i\partial_J \bar{\partial}_J f \in \mathcal{D}'^{1,1}(X)$ soit positif. Alors $f \in Psh(X, J)$.*

Avant de passer à la preuve du théorème 3.4.1 nous aurons besoin de quelques notions et résultats préliminaires. On commence par prouver le lemme suivant.

Lemme 3.4.0.1 *Sous les hypothèses du théorème 3.4.1, le courant $i\partial_J \bar{\partial}_J \log(e^f + \varepsilon)$ est positif pour tout $\varepsilon > 0$.*

Preuve. Le fait que $f \in L_{loc}^1(X)$ implique que l'intérieur de l'ensemble $f^{-1}(-\infty)$ est vide. On déduit que pour tout $x \in f^{-1}(-\infty)$ et pour tout $r > 0$ il existe $y \in B_r^n(x) \setminus f^{-1}(-\infty)$. L'hypothèse de semi-continuité combinée avec la continuité de la fonction f sur l'ensemble $X \setminus f^{-1}(-\infty)$ entraînent alors la continuité de la fonction e^f sur tout X , (en particulier l'ensemble $f^{-1}(-\infty)$ est fermé dans X). On obtient alors la continuité des fonctions $f_\varepsilon := \log(e^f + \varepsilon)$. On remarque que si u est une fonction de classe \mathcal{C}^2 on a la formule

$$i\partial_J \bar{\partial}_J u_\varepsilon = \frac{e^u}{e^u + \varepsilon} i\partial_J \bar{\partial}_J u + \frac{\varepsilon e^u}{(e^u + \varepsilon)^2} i\partial_J u \wedge \bar{\partial}_J u$$

et la $(1,1)$ -forme $i\partial_J u \wedge \bar{\partial}_J u$ est positive. En effet pour tout champs de vecteurs réels ξ on a les égalités

$$\begin{aligned} i\partial_J u \wedge \bar{\partial}_J u(\xi, J\xi) &= i\partial_J u(\xi) \cdot \bar{\partial}_J u(J\xi) - i\partial_J u(J\xi) \cdot \bar{\partial}_J u(\xi) = \\ &= 2\partial_J u(\xi) \cdot \bar{\partial}_J u(\xi) = \frac{1}{2}(du(\xi)^2 + du(J\xi)^2) \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit alors que si notre fonction f est de classe \mathcal{C}^2 la $(1,1)$ -forme $i\partial_J \bar{\partial}_J f_\varepsilon$ est positive. Dans le cas général nous considérons une famille de noyaux régularisants $(\rho_\eta)_{\eta>0}$ sur un ouvert coordonnée $V \subset X$ et les fonctions $f^\eta := f * \rho_\eta$, $f_\varepsilon^\eta := \log(e^{f^\eta} + \varepsilon) \in \mathcal{E}(U, \mathbb{R})$ où $U \subset V$ est un ouvert relativement compact dans V . (On remarque que si la structure presque complexe n'est pas intégrable les $(1,1)$ -formes $i\partial_J \bar{\partial}_J f^\eta$ ne sont pas positives). Pour prouver la positivité du courant $i\partial_J \bar{\partial}_J f_\varepsilon$ on remarque que pour tout forme $\varphi \in \mathcal{D}^{2n}(U)$ positive et pour tout champ de vecteurs réels $\xi \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_U i\partial_J \bar{\partial}_J f_\varepsilon(\xi, J\xi) \varphi &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_U i\partial_J \bar{\partial}_J f_\varepsilon^\eta(\xi, J\xi) \varphi = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_U \frac{e^{f^\eta}}{e^{f^\eta} + \varepsilon} i\partial_J \bar{\partial}_J f^\eta(\xi, J\xi) \varphi + \int_U \frac{\varepsilon e^{f^\eta}}{(e^{f^\eta} + \varepsilon)^2} i\partial_J f^\eta \wedge \bar{\partial}_J f^\eta(\xi, J\xi) \varphi \right]. \end{aligned}$$

De plus on va montrer l'égalité

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_U \frac{e^{f^\eta}}{e^{f^\eta} + \varepsilon} i\partial_J \bar{\partial}_J f^\eta(\xi, J\xi) \varphi = \int_U \frac{e^f}{e^f + \varepsilon} i\partial_J \bar{\partial}_J f(\xi, J\xi) \varphi \geq 0. \quad (3.4.2)$$

On aura alors

$$\int_U i\partial_J \bar{\partial}_J f_\varepsilon(\xi, J\xi) \varphi = \int_U \frac{e^f}{e^f + \varepsilon} i\partial_J \bar{\partial}_J f(\xi, J\xi) \varphi + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_U \frac{\varepsilon e^{f^\eta}}{(e^{f^\eta} + \varepsilon)^2} i\partial_J f^\eta \wedge \bar{\partial}_J f^\eta(\xi, J\xi) \varphi.$$

La dernière limite est positive car la forme $i\partial_J f^\eta \wedge \bar{\partial}_J f^\eta$ est positive. Pour prouver l'égalité (3.4.2) il suffit de montrer que la suite $(i\partial_J \bar{\partial}_J f^\eta)_{\eta>0}$ converge vers le courant $i\partial_J \bar{\partial}_J f$ aussi dans la topologie faible des courants d'ordre zéro. Ce fait combiné avec le fait que la suite de fonctions $e^{f^\eta}/(e^{f^\eta} + \varepsilon)$ converge uniformément vers la fonction $e^f/(e^f + \varepsilon)$ prouve l'égalité (3.4.2). Pour prouver la convergence de la suite $(i\partial_J \bar{\partial}_J f^\eta)_{\eta>0}$ dans la topologie faible des courants d'ordre zéro il suffit de montrer la convergence de la suite

$$(i\partial_J \bar{\partial}_J f^\eta - (i\partial_J \bar{\partial}_J f) * \rho_\eta)_{\eta>0}$$

dans la même topologie étant donné que la suite $((i\partial_J \bar{\partial}_J f) * \rho_\eta)_{\eta>0}$ est convergente dans cette topologie. D'après le lemme 3.3.1.1 il suffit donc de remarquer l'inégalité

$$\sup_{\eta>0} \mu(i\partial_J \bar{\partial}_J f^\eta - (i\partial_J \bar{\partial}_J f) * \rho_\eta)(U) \leq C \|f\|_{W^{1,1}(U)} < \infty$$

qui découle du lemme de K.O. Friedrichs (cf. [Hör-1]). □

On rappelle la définition suivante.

Définition 3.4.2 Un sous-ensemble $A \subset U$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ est dit polaire si pour tout point $x \in U$ il existe un voisinage ouvert connexe $V_x \subset U$ de x et une fonction u sous-harmonique sur V_x , $u \not\equiv -\infty$, telle que $A \cap V_x \subset \{y \in V_x \mid u(y) = -\infty\}$.

D'après le théorème 3.1.2 on a qu'un sous-ensemble polaire est de mesure de Lebesgue nulle. On a le théorème classique suivant (cf. [Dem-1], chapitre I).

Théorème 3.4.3 Soit $A \subset U$ un sous-ensemble polaire fermé et soit v une fonction sous-harmonique sur l'ouvert $U \setminus A$, borné supérieurement sur un voisinage de tout point de A . Il existe alors une unique extension sous-harmonique \tilde{v} de v sur U . En particulier si v est une fonction continue sur U et sous-harmonique sur l'ouvert $U \setminus A$ alors v est sous-harmonique sur U .

Preuve du théorème 3.4.1. D'après le lemme 3.4.0.1 il suffit de montrer le théorème dans le cas d'une fonction continue étant donné que la fonction f est limite décroissante des fonctions continues $f_\varepsilon := \log(e^f + \varepsilon)$ (lorsque ε tend vers zéro) et une limite décroissante de fonctions plurisousharmoniques est plurisousharmonique. A partir de maintenant on suppose donc f continue et on remarque que pour tout courbe J -holomorphe $\gamma : B_\rho^1 \rightarrow X$ la fonction $f \circ \gamma$ est sous-harmonique sur B_ρ^1 si et seulement si elle est sous-harmonique sur l'ouvert

$$\{z \in B_\rho^1 \mid d_z \gamma \neq 0\}.$$

Ceci découle du fait que l'ensemble $\{z \in B_\rho^1 \mid d_z \gamma = 0\}$ est fini (voir [McD-1], chapitre II) et du théorème 3.4.3. On peut donc supposer que la courbe J -holomorphe $\gamma : B_\rho^1 \rightarrow X$ est un plongement.

D'autre part on remarque qu'une fonction continue $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est sous-harmonique si et seulement si $\Delta u \geq 0$. En effet en considérant une famille de noyaux régularisants usuels $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ on a $0 \leq (\Delta u) * \rho_\varepsilon = \Delta(u * \rho_\varepsilon)$. On déduit alors l'inégalité

$$\frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} u * \rho_\varepsilon d\lambda \geq (u * \rho_\varepsilon)(x).$$

En passant à la limite pour ε tendent vers zéro on déduit la sous-harmonicité de u . On va donc montrer l'inégalité $\Delta(f \circ \gamma) \geq 0$ pour tout plongement J -holomorphe $\gamma : B_\rho^1 \rightarrow X$. D'après le lemme 3.2.0.3 on a, quitte à restreindre $\rho > 0$, l'existence d'un plongement

$$\sigma : B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1} \rightarrow \sigma(B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1}) \subset X$$

qui préserve les orientations canoniques tel que $\sigma(\cdot, z_2)$ soit une courbe J -holomorphe pour tout $z_2 \in B_\rho^{n-1}$ et $\sigma(z_1, 0) = \gamma(z_1)$, $z_1 = t + is$. Le fait que le champ $\xi := d\sigma(\frac{\partial}{\partial t}) \circ \sigma^{-1}$ soit J -plat sur l'ouvert $\sigma(B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1})$ implique les égalités

$$i\partial_J \bar{\partial}_J f(\xi, J\xi) = 2\xi^{1,0} \cdot \xi^{0,1} \cdot f = \frac{1}{2}(\xi \cdot \xi \cdot f + J\xi \cdot J\xi \cdot f) = \frac{1}{2}(\sigma^{-1})^* \Delta_{z_1}(f \circ \sigma)$$

où $\Delta_{z_1} := \partial_t^2 + \partial_s^2$ désigne le Laplacien par rapport à la variable $z_1 = t + is \in B_\rho^1$ dans l'ouvert $B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1}$. Le fait que le plongement σ préserve les orientations canoniques implique l'inégalité

$$\Delta_{z_1}(f \circ \sigma) \geq 0$$

sur l'ouvert $B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1}$. Considérons maintenant une famille de formes positives

$$(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset \mathcal{D}^{n-1, n-1}(B_\rho^{n-1})^+$$

convergentes faiblement vers le courant de Dirac $\delta_0 \in \mathcal{D}^{n-1, n-1}(B_\rho^{n-1})^+$ en 0 lorsque ε tend vers 0, (sur le cône des courants positifs la topologie faible coïncide avec la topologie faible des courants d'ordre zéro). Si on désigne par $p_2 : B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1} \longrightarrow B_\rho^{n-1}$ la deuxième projection on a

$$[B_\rho^1 \times 0] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_2^* \delta_\varepsilon,$$

où la limite est considéré dans la topologie faible des courants d'ordre zéro.

Pour tout forme $\varphi \in \mathcal{D}^{1,1}(B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1}, J_0)^+$ positive par rapport à la structure presque complexe canonique de \mathbb{C}^n on a

$$0 \leq \int_{B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1}} \Delta_{z_1}(f \circ \sigma) p_2^* \delta_\varepsilon \wedge \varphi = \int_{B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1}} (f \circ \sigma) p_2^* \delta_\varepsilon \wedge \Delta_{z_1} \varphi.$$

Si on désigne par $j : B_\rho^1 \rightarrow B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1}$, $j(B_\rho^1) = B_\rho^1 \times 0$, l'immersion canonique on a

$$\int_{B_\rho^1} \Delta(f \circ \gamma) j^* \varphi = \int_{B_\rho^1} (f \circ \gamma) \Delta(j^* \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1}} (f \circ \sigma) p_2^* \delta_\varepsilon \wedge \Delta_{z_1} \varphi \geq 0.$$

La surjectivité de l'application $\varphi \in \mathcal{D}^{1,1}(B_\rho^1 \times B_\rho^{n-1}, J_0)^+ \mapsto j^* \varphi \in \mathcal{D}^{1,1}(B_\rho^1)^+$ permet alors de conclure. \square

3.5 Sur la régularisation des potentiels sur les variétés presque complexes avec contrôle asymptotique de la perte de positivité du courant

Pour la solution de la conjecture dans le cas général d'une distribution réelle u (qui est un élément de $W_{loc}^{1,1}(X)$ d'après la remarque 2 de la section précédente) nous proposons une technique de régularisation globale des potentiels u des $(1,1)$ -courants positifs du type $i\partial_j \bar{\partial}_j u$ sur les variétés presque complexes analogue à celle utilisé avec succès par Demailly [Dem-2] dans le cas complexe intégrable. La nécessité d'utiliser une technique globale dérive du fait que sur une variété presque complexe non intégrable on a pas de coordonnées naturelles qui permettent de régulariser u sans perte de positivité du courant $i\partial_j \bar{\partial}_j u$.

Soit (X, J) une variété presque complexe et $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_j^{1,1} T_X^*)(X)$ une métrique hermitienne sur $T_{X,J}$. Soit $\exp^\omega : \mathcal{U} \subset T_X \longrightarrow X$ le flot géodésique induit par la connexion de Chern du fibré tangent

$$D_j^\omega : \mathcal{E}(T_{X,J}) \longrightarrow \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_{X,J})$$

associé à la métrique ω , (ici $\mathcal{U} \subset T_X$ désigne un voisinage ouvert de la section nulle). On désigne par

$$\exp_{x,\varepsilon}^\omega := \exp_x^\omega(\varepsilon \cdot) : T_{X,x} \cap \varepsilon^{-1} \mathcal{U} \longrightarrow X, \varepsilon > 0,$$

et on considère une fonction $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\chi(t) > 0$ pour $t < 1$, $\chi(t) = 0$ pour $t \leq 1$ et $\int_{\mathbb{C}^n} \chi(|v|^2) dv = 1$. On introduit alors les fonctions $\chi_\varepsilon(t) := \chi(t/\varepsilon^2)/\varepsilon^{2n}$ et l'opérateur régularisant

$$u_\varepsilon(x) := \int_{\zeta \in T_{X,x}} u \circ \exp_x^\omega(\zeta) \cdot \chi_\varepsilon(|\zeta|_{\omega_x}^2) \frac{\omega_{x,\zeta}^n}{n!} = \int_{\zeta \in T_{X,x}} u \circ \exp_{x,\varepsilon}^\omega(\zeta) \cdot \chi(|\zeta|_{\omega_x}^2) \frac{\omega_{x,\zeta}^n}{n!}.$$

Étudier la conjecture revient à étudier le contrôle asymptotique de la positivité des $(1, 1)$ -formes $i\partial_j\bar{\partial}_j u_\varepsilon$ car si $i\partial_j\bar{\partial}_j u \geq 0$ alors, comme dans le théorème de Demailly qui suivra [Dem-2], il existe une constante $K > 0$ suffisamment grande telle que la suite de fonctions $u_\varepsilon + K\varepsilon^2$ converge de façon décroissante vers la fonction u lorsque ε tend vers zéro. Avant de présenter le théorème de Demailly nous introduisons les définitions suivantes.

Définition 3.5.1 Soit (X, J) une variété presque complexe et $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1}T_X^*)(X)$ une métrique hermitienne sur $T_{X,J}$. On appelle courbure de Griffiths inférieure du fibré hermitien $(T_{X,J}, \omega)$ la fonction $G_\omega(T_{X,J}) : T_X \setminus 0_X \rightarrow \mathbb{R}$ homogène de degré deux sur les fibres de T_X définie par la formule

$$G_\omega(T_{X,J})_x(\xi) := \min_{\eta \in T_{X,x}} \frac{\mathcal{C}_{X,J}^\omega(\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta)}{|\eta|_h^2}$$

où $\mathcal{C}_{X,J}^\omega \in \mathcal{E}(\text{Herm}(T_{X,J}^{\otimes 2}))(X)$ désigne la courbure de Chern de $(T_{X,J}, \omega)$. Soit

$$\alpha : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(T_{X,J}) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(T_{X,J}^*), \bar{\xi} \mapsto \alpha_{\bar{\xi}}$$

une application fibré de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\alpha_{\bar{\xi}} \oplus \mathbb{C}\xi = T_{X,x}$, $\xi \in T_{X,x} \setminus 0_x$ pour tout $x \in X$. On appelle courbure de Griffiths α -partielle inférieure du fibré hermitien $(T_{X,J}, \omega)$ la fonction $G_\omega^{\perp\alpha}(T_{X,J}) : T_X \setminus 0_X \rightarrow \mathbb{R}$ homogène de degré deux sur les fibres de T_X définie par la formule

$$G_\omega^{\perp\alpha}(T_{X,J})_x(\xi) := \min_{\eta \in \alpha_{\bar{\xi}}} \frac{\mathcal{C}_{X,J}^\omega(\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta)}{|\eta|_h^2}.$$

On remarque que le nombre $G_\omega(T_{X,J})$ est la plus petite valeur propre de l'endomorphisme hermitien $i\mathcal{C}_\omega(T_{X,J})(\xi, J\xi)$ de $(T_{X,J}, \omega)$, où $\mathcal{C}_\omega(T_{X,J})$ désigne le tenseur de courbure de Chern de $(T_{X,J}, \omega)$. De plus on a l'inégalité évidente $G_\omega^{\perp\alpha}(T_{X,J}) \geq G_\omega(T_{X,J})$. Une application α peut être induite par une métrique hermitienne sur T_X par exemple. Il est facile de voir (cf. [Dem-2]) qu'il existe une métrique hermitienne ω sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times C$, où C est une courbe holomorphe de genre $g \geq 2$ telle que $G_\omega^{\perp\omega}(T_{X,J}) > 0$. On peut énoncer le résultat de Demailly sur la forme suivante.

Théorème 3.5.2 (Demailly) Soit (X, J, ω) une variété complexe hermitienne telle que $G_\omega^{\perp\alpha}(T_{X,J}) \geq 0$ pour une certaine α et soit ψ une fonction quasi-plurisousharmonique telle que $i\partial_j\bar{\partial}_j\psi \geq \gamma$, où γ est une $(1, 1)$ -forme continue. Soit exp^ω la partie holomorphe sur les fibres du fibré tangent de l'application exponentielle exp^ω . L'opérateur régularisant

$$\psi_\varepsilon(x) := \int_{\zeta \in T_{X,x}} \psi \circ \text{exp}_x^\omega(\zeta) \cdot \chi_\varepsilon(|\zeta|_{\omega_x}^2) \frac{\omega_{x,\zeta}^n}{n!}$$

vérifie les propriétés suivantes :

A) pour tout point $x \in X$ il existe une constante $K_x > 0$ suffisamment grande telle que la suite de fonctions $(\psi_\varepsilon + K_x\varepsilon^2)_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{E}(X, \mathbb{R})$ converge ponctuellement, de façon décroissante sur un voisinage de x , vers ψ lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers zéro,

B) on a le contrôle $i\partial_j\bar{\partial}_j\psi_\varepsilon \geq \gamma - \delta_\varepsilon\omega$ sur la perte de positivité, où $(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset (0, +\infty)$ est une famille de réels qui tend vers zéro de façon décroissante lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers zéro.

Le théorème précédent reste valable même si on considère simplement l'application exponentielle exp^ω , mais les calculs de la preuve deviennent plus compliqués. Dans le cas presque complexe non intégrable on ne peut pas envisager de définir l'application exp^ω , pour des raisons délicates sur le jet d'ordre deux de la structure presque complexe.

On estime que le lemme 3.5.1.1 de la sous-section qui suivra peut être utile pour la preuve de la conjecture. On rappelle d'abord la notion de coordonnées presque complexes centrées en un point, notion qui a été introduite dans le chapitre II. On rappelle le corollaire suivant qui a été exposé dans le chapitre II.

Corollaire 3.5.3 *Pour tout point x d'une variété presque complexe (X, J) il existe des coordonnées (z_1, \dots, z_n) de classe C^∞ centrées en x telles que les matrices $A(z)$ et $B(z)$ de la structure presque complexe*

$$J(z) = \sum_{k,l} \left(A_{k,l}(z) dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} + B_{k,l}(z) dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \bar{B}_{k,l}(z) d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{A}_{k,l}(z) d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right),$$

relatives à ces coordonnées admettent les développements asymptotiques

$$B(z) = \sum_r B^r z_r + \sum_{r,s} \left(B^{r,s} z_r z_s + B^{r,\bar{s}} z_r \bar{z}_s \right) + \sum_{r,s,t} \left(B^{r,s,t} z_r z_s z_t + B^{r,s,\bar{t}} z_r z_s \bar{z}_t + B^{r,\bar{s},\bar{t}} z_r \bar{z}_s \bar{z}_t \right) + O(|z|^4) \quad (3.5.1)$$

$$A(z) = i I_n + \frac{i}{2} \sum_{r,s} \bar{B}^r \cdot B^s z_s \bar{z}_r + \frac{i}{4} \sum_{r,s,t} \left(\bar{B}^{t,\bar{r}} \cdot B^s + \bar{B}^{t,\bar{s}} \cdot B^r + 2\bar{B}^t \cdot B^{r,s} \right) z_r z_s \bar{z}_t + \frac{i}{4} \sum_{r,s,t} \left(\bar{B}^t \cdot B^{r,\bar{s}} + \bar{B}^s \cdot B^{r,\bar{t}} + 2\bar{B}^{s,t} \cdot B^r \right) z_r \bar{z}_s \bar{z}_t + O(|z|^4) \quad (3.5.2)$$

où $B^r, B^{r,s}, B^{r,\bar{s}}, B^{r,s,t}, B^{r,s,\bar{t}}, B^{r,\bar{s},\bar{t}} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ sont des matrices telles que $B^{r,s}$ soit symétrique par rapport aux indices r, s , $B^{r,s,t}$ par rapport à r, s, t , $B^{r,s,\bar{t}}$ par rapport à r, s , $B^{r,\bar{s},\bar{t}}$ par rapport à s, t et $B_{k,l}^r = 0$ pour $r \leq l$, $B_{k,l}^{r,s} = 0$ pour $r, s \leq l$, $B_{k,l}^{r,\bar{s}} = 0$ pour $r \leq l$, $B_{k,l}^{r,s,t} = 0$ pour $r, s, t \leq l$, $B_{k,l}^{r,s,\bar{t}} = 0$ pour $r, s \leq l$, et $B_{k,l}^{r,\bar{s},\bar{t}} = 0$ pour $r \leq l$. De plus si on considère l'expression locale de la forme de torsion de la structure presque complexe

$$\tau_J = \sum_{1 \leq k < l \leq n} [\zeta_k, \zeta_l]_J^{0,1} \otimes \zeta_k^* \wedge \zeta_l^* = \sum_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ 1 \leq r \leq n}} \bar{N}_{k,l}^r \zeta_k^* \wedge \zeta_l^* \otimes \bar{\zeta}_r$$

où $\zeta_l := (\partial/\partial z_l)^{1,0} \in \mathcal{E}(T_{X,J}^{1,0})(U_x)$, $l = 1, \dots, n$ est le repère local du fibré des $(1,0)$ -vecteurs $T_{X,J}^{1,0}$ issue des coordonnées (z_1, \dots, z_n) on a l'expression

$$\bar{N}_{k,l}^r(z) = \frac{i}{2} B_{r,k}^l + \frac{i}{2} \sum_s \left[2(B_{r,k}^{l,s} - B_{r,l}^{k,s}) z_s + B_{r,k}^{l,\bar{s}} \bar{z}_s \right] + O(|z|^2)$$

pour tout $k < l$. Le jet d'ordre $k = 0, 1$ de la forme de torsion de la structure presque complexe au point x est nul si et seulement si les coefficients $B_{*,*}(z)$ de la structure presque complexe relatifs aux coordonnées en question s'annulent à l'ordre $k + 1$.

Les coordonnées précédentes sont appelées coordonnées presque complexes d'ordre 3 au point x .

3.5.1 Expression locale normale, asymptotique à l'ordre deux du Hessien presque complexe

Nous avons la définition suivante.

Définition 3.5.4 Soit (X, J) une variété presque complexe de dimension complexe n . Pour tout distribution réelle $u \in \mathcal{D}'_{2n}(\mathbb{R})(X)$ et tout champ de vecteurs réel $\xi \in \mathcal{E}(T_X)(X)$ on définit le Hessien presque complexe par la formule

$$H_J u(\xi) := i\partial_J \bar{\partial}_J u(\xi, J\xi) = 2\partial_J \bar{\partial}_J u(\xi^{1,0}, \xi^{0,1}) = \frac{1}{2}(\xi \cdot \xi \cdot u + J\xi \cdot J\xi \cdot u + J[\xi, J\xi] \cdot u).$$

Avec les notations du corollaire 3.5.3 on a le lemme suivant.

Lemme 3.5.1.1 Soit (X, J) une variété presque complexe et $u \in \mathcal{D}'_{2n}(\mathbb{R})(X)$ une distribution réelle sur X . Soient (z_1, \dots, z_n) des coordonnées locales presque complexes d'ordre $N \geq 3$ en un point $x \in X$. Alors pour tout champ de vecteurs réels $\xi = \sum_k \left(\xi_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{\xi}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right)$ on a l'expression asymptotique à l'ordre deux du Hessien presque complexe suivante :

$$\begin{aligned} H_J u(\xi)(z) &= 2 \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(z) \xi_k \bar{\xi}_l + \sum_{k,l} \Re \left[Q_{k,\bar{l}}(z, \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(z) + Q_{k,l}(z, \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_l}(z) \right] + \\ &+ \sum_{k,l,s} \Re \left[\left(R_{k,l}^s(z) \xi_k \xi_l + \bar{R}_{k,\bar{l}}^s(z) \xi_k \bar{\xi}_l + R_{\bar{k},\bar{l}}^s(z) \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l \right) \frac{\partial u}{\partial z_s}(z) \right] + O(|z|^3)(\xi, \bar{\xi}) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Q_{k,\bar{l}}(z, \xi) &:= 2i \sum_t \mathbf{jet}_2 B_{l,t}(z) \xi_k \xi_t + \sum_{s,t,r,h} \bar{B}_{k,s}^h \left(B_{s,t}^r \xi_t \bar{\xi}_l + B_{l,t}^r \xi_t \bar{\xi}_s \right) z_r \bar{z}_h, \\ Q_{k,l}(z, \xi) &:= i \sum_t \left(\overline{\mathbf{jet}_2 B_{k,t}(z)} \xi_l \bar{\xi}_t + \mathbf{jet}_2 B_{l,t}(z) \xi_k \bar{\xi}_t \right) - \\ &- \sum_{s,t,r,h} \left[\frac{1}{2} \left(\bar{B}_{k,s}^h \xi_l \xi_t + \bar{B}_{l,s}^h \xi_k \xi_t \right) B_{s,t}^r z_r \bar{z}_h - \bar{B}_{k,s}^r \bar{B}_{l,t}^h \bar{z}_r \bar{z}_h \bar{\xi}_s \bar{\xi}_t \right] \end{aligned}$$

et $\mathbf{jet}_2 B_{l,t}(z)$ est la composante (l, t) du jet d'ordre deux au point zéro de la matrice $B(z)$ de la structure presque complexe par rapport aux coordonnées en question. De plus

$$\begin{aligned} R_{k,l}^s(z) &:= \sum_{r,h} \left(R_{k,l}^{s,r,h} z_r z_h + R_{k,l}^{s,r,\bar{h}} z_r \bar{z}_h + R_{k,l}^{s,\bar{r},\bar{h}} \bar{z}_r \bar{z}_h \right) \\ R_{k,\bar{l}}^s(z) &:= \sum_r \left(\sum_t B_{t,k}^r \bar{B}_{s,l}^t z_r + 2i \bar{B}_{s,l}^{r,\bar{k}} \bar{z}_r \right) \\ &+ \sum_{r,h} \left(R_{k,\bar{l}}^{s,r,h} z_r z_h + R_{k,\bar{l}}^{s,r,\bar{h}} z_r \bar{z}_h + R_{k,\bar{l}}^{s,\bar{r},\bar{h}} \bar{z}_r \bar{z}_h \right) \\ R_{\bar{k},\bar{l}}^s(z) &:= \sum_{r,h} \left(R_{\bar{k},\bar{l}}^{s,r,\bar{h}} z_r \bar{z}_h + R_{\bar{k},\bar{l}}^{s,\bar{r},\bar{h}} \bar{z}_r \bar{z}_h \right) \end{aligned}$$

(voir l'appendice pour les expressions des coefficients $R_{*,*}^{*,*,*}$). Enfin $O(|z|^3)(\xi, \bar{\xi})$ désigne un polynôme homogène de degré deux par rapport aux variables $\xi_k, \bar{\xi}_k$ et à coefficients dans $m(\mathcal{E}_0(\mathbb{C}))^3 \cdot \mathcal{D}'_{2n}(\mathbb{C})_0$, (ici $m(\mathcal{E}_0(\mathbb{C}))$ désigne l'idéal maximal dans l'anneau des germes des fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes définis sur l'origine) tel que $O(|z|^3)(\xi, \bar{\xi}) = \overline{O(|z|^3)(\xi, \bar{\xi})}$. Si le jet d'ordre un de la forme de torsion de la structure presque complexe est nul au point x alors l'expression

asymptotique du Hessien presque complexe se réduit à la forme

$$H_J u(\xi)(z) = 2 \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(z) \xi_k \bar{\xi}_l -$$

$$-2 \sum_{k,l,s,r,h} \operatorname{Im} \left[\left(2\bar{B}_{s,l}^{h,\bar{r},\bar{k}} z_r \bar{z}_h + \bar{B}_{s,l}^{r,h,\bar{k}} \bar{z}_r \bar{z}_h \right) \frac{\partial u}{\partial z_s}(z) \xi_k \bar{\xi}_l \right] + O(|z|^3)(\xi, \bar{\xi})$$

Si de plus la structure presque complexe est intégrable alors par rapport à tout coordonnées complexes centrées en $x \in X$ on a l'expression classique

$$H_J u(\xi)(z) = 2 \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(z) \xi_k \bar{\xi}_l$$

Preuve. On va écrire les expressions des opérateurs différentiels $J\xi$, $J\xi$ et $J[\xi, J\xi]$. Avec les notations introduites précédemment on a

$$J\xi = \sum_{k,l} \left[(A_{k,l}\xi_l + \bar{B}_{k,l}\bar{\xi}_l) \frac{\partial}{\partial z_k} + (\bar{A}_{k,l}\bar{\xi}_l + B_{k,l}\xi_l) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right] \quad (3.5.3)$$

Bien évidemment il suffit d'effectuer nos calculs pour des champs de vecteurs réels à coefficients constants. A partir de maintenant on va donc supposer que le champ ξ est à coefficients constants par rapport aux coordonnées presque complexes en considération. On a alors $J\xi$, $J\xi = T + \bar{T}$ où

$$T := \sum_{k,l,s,t} \left(A_{k,l}\xi_l + \bar{B}_{k,l}\bar{\xi}_l \right) \left(\frac{\partial A_{s,t}}{\partial z_k} \xi_t + \frac{\partial \bar{B}_{s,t}}{\partial z_k} \bar{\xi}_t \right) \frac{\partial}{\partial z_s}$$

$$+ \sum_{k,l,s,t} \left(A_{k,l}\xi_l + \bar{B}_{k,l}\bar{\xi}_l \right) \left(A_{s,t}\xi_t + \bar{B}_{s,t}\bar{\xi}_t \right) \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_s}$$

$$+ \sum_{k,l,s,t} \left(A_{k,l}\xi_l + \bar{B}_{k,l}\bar{\xi}_l \right) \left(\frac{\partial \bar{A}_{s,t}}{\partial z_k} \bar{\xi}_t + \frac{\partial B_{s,t}}{\partial z_k} \xi_t \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s}$$

$$+ \sum_{k,l,s,t} \left(A_{k,l}\xi_l + \bar{B}_{k,l}\bar{\xi}_l \right) \left(\bar{A}_{s,t}\bar{\xi}_t + B_{s,t}\xi_t \right) \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_s}$$

En utilisant les expressions (3.5.2) et (3.5.1) on a

$$\frac{\partial A}{\partial z_k}(z) = \frac{i}{2} \sum_r \bar{B}^r \cdot B^k \bar{z}_r + \frac{i}{2} \sum_{r,t} \left(\bar{B}^{t,\bar{k}} \cdot B^r + \bar{B}^{t,\bar{r}} \cdot B^k + 2\bar{B}^t \cdot B^{k,r} \right) z_r \bar{z}_t$$

$$+ \frac{i}{4} \sum_{r,t} \left(\bar{B}^t \cdot B^{k,\bar{r}} + \bar{B}^r \cdot B^{k,\bar{t}} + 2\bar{B}^{r,t} \cdot B^k \right) \bar{z}_r \bar{z}_t + O(|z|^3)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}_k}(z) = \frac{i}{2} \sum_r \bar{B}^k \cdot B^r z_r + \frac{i}{4} \sum_{r,t} \left(\bar{B}^{k,\bar{r}} \cdot B^t + \bar{B}^{k,\bar{t}} \cdot B^r + 2\bar{B}^k \cdot B^{r,t} \right) z_r z_t$$

$$+ \frac{i}{2} \sum_{r,t} \left(\bar{B}^t \cdot B^{r,\bar{k}} + \bar{B}^k \cdot B^{r,\bar{t}} + 2\bar{B}^{k,t} \cdot B^r \right) z_r \bar{z}_t + O(|z|^3)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z_k}(z) = B^k + \sum_r \left(2B^{k,r} z_r + B^{k,\bar{r}} \bar{z}_r \right) + \sum_{r,s} \left(3B^{k,r,s} z_r z_s + 2B^{k,r,\bar{s}} z_r \bar{z}_s + B^{k,\bar{r},\bar{s}} \bar{z}_r \bar{z}_s \right) + O(|z|^3)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \bar{z}_k}(z) = \sum_r B^{r,\bar{k}} z_r + \sum_{r,s} \left(B^{r,s,\bar{k}} z_r z_s + 2B^{r,\bar{s},\bar{k}} z_r \bar{z}_s \right) + O(|z|^3)$$

On explicite maintenant les quatre termes de l'opérateur T à l'aide des expressions précédentes sur les dérivées premières des matrices A , B et des relations (3.5.2), (3.5.1).

I-er terme de l'opérateur T :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,l,s,t} \left(A_{k,l} \xi_l + \bar{B}_{k,l} \bar{\xi}_l \right) \left(\frac{\partial A_{s,t}}{\partial z_k} \xi_t + \frac{\partial \bar{B}_{s,t}}{\partial z_k} \bar{\xi}_t \right) \frac{\partial}{\partial z_s} = \\
& = \sum_{k,s,t} i \left(\frac{\partial A_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \xi_t + \frac{\partial \bar{B}_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \bar{\xi}_t \right) \frac{\partial}{\partial z_s} \\
& + \frac{i}{2} \sum_{k,l,s,t,r,h,j} \left(\bar{B}_{k,j}^r B_{j,l}^h B_{s,t}^k z_h \bar{z}_r + \bar{B}_{k,t}^r \bar{B}_{s,j}^h B_{j,l}^k \bar{z}_r \bar{z}_h \right) \xi_l \bar{\xi}_t \frac{\partial}{\partial z_s} \\
& + \sum_{k,l,s,t,r,h} \bar{B}_{k,l}^r \bar{B}_{s,t}^{h,\bar{k}} \bar{z}_r \bar{z}_h \bar{\xi}_l \bar{\xi}_t \frac{\partial}{\partial z_s} + O(|z|^3) \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

II-ème terme de l'opérateur T :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,l,s,t} \left(A_{k,l} \xi_l + \bar{B}_{k,l} \bar{\xi}_l \right) \left(A_{s,t} \xi_t + \bar{B}_{s,t} \bar{\xi}_t \right) \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_s} = \\
& = \sum_{k,l} \left[-\xi_k \xi_l + 2i \sum_t \overline{\text{jet}_2 B_{l,t}(z)} \xi_k \bar{\xi}_t - \sum_{r,h,j,t} \bar{B}_{k,j}^r B_{j,t}^h z_h \bar{z}_r \xi_l \bar{\xi}_t \right] \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_l} \\
& + \sum_{k,l,s,t,r,h} \bar{B}_{k,s}^r \bar{B}_{l,t}^h \bar{z}_r \bar{z}_h \bar{\xi}_s \bar{\xi}_t \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_l} + O(|z|^3) \frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

III-ème terme de l'opérateur T :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,l,s,t} \left(A_{k,l} \xi_l + \bar{B}_{k,l} \bar{\xi}_l \right) \left(\frac{\partial \bar{A}_{s,t}}{\partial z_k} \bar{\xi}_t + \frac{\partial B_{s,t}}{\partial z_k} \xi_t \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s} = \\
& = \sum_{k,s,t} i \left(\frac{\partial \bar{A}_{s,t}}{\partial z_k} \bar{\xi}_t \xi_k + \frac{\partial B_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \xi_t \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s} \\
& + \sum_{k,l,s,t,r} \left[\bar{B}_{k,l}^r B_{s,t}^k \bar{z}_r \bar{\xi}_l \xi_t + \frac{i}{2} \sum_{j,h} \left(\bar{B}_{k,j}^r B_{j,l}^h B_{s,t}^k z_h \bar{z}_r \xi_l \xi_t - \bar{B}_{k,l}^r B_{s,j}^h \bar{B}_{j,t}^k \bar{z}_h \bar{z}_r \bar{\xi}_l \bar{\xi}_t \right) \right] \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s} \\
& + \sum_{k,l,s,t,r,h} \left[\left(2\bar{B}_{k,l}^r B_{s,t}^{k,h} + \bar{B}_{k,l}^{r,\bar{h}} B_{s,t}^k \right) \bar{z}_r z_h + \left(\bar{B}_{k,l}^r B_{s,t}^{k,\bar{h}} + \bar{B}_{k,l}^{r,h} B_{s,t}^k \right) \bar{z}_r \bar{z}_h \right] \bar{\xi}_l \xi_t \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s} + O(|z|^3) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}
\end{aligned}$$

IV-ème terme de l'opérateur T :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,l,s,t} \left(A_{k,l} \xi_l + \bar{B}_{k,l} \bar{\xi}_l \right) \left(\bar{A}_{s,t} \bar{\xi}_t + B_{s,t} \xi_t \right) \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_s} = \\
& = \sum_{k,l} \xi_k \bar{\xi}_l \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} + \frac{1}{2} \sum_{k,l,t,r,h,j} \left(\bar{B}_{k,j}^r B_{j,t}^h z_h \bar{z}_r \xi_t \bar{\xi}_l \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} + B_{k,j}^r \bar{B}_{j,t}^h \bar{z}_h z_r \bar{\xi}_t \xi_l \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_k \partial z_l} \right) \\
& \quad + i \sum_{k,l,t} \left(\mathbf{jet}_2 B_{l,t}(z) \xi_k \xi_t \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} - \overline{\mathbf{jet}_2 B_{l,t}(z)} \bar{\xi}_k \bar{\xi}_t \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_k \partial z_l} \right) \\
& \quad + \sum_{k,l,s,t,r,h} \bar{B}_{k,s}^r B_{l,t}^h \bar{z}_r z_h \bar{\xi}_s \xi_t \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} + O(|z|^3) \frac{\partial}{\partial z \partial \bar{z}}
\end{aligned}$$

Venons-en maintenant au calcul du champ de vecteurs $J[\xi, J\xi]$. On remarque d'abord que :

$$\begin{aligned}
[\xi, J\xi] &= \sum_{k,s,t} \left(\frac{\partial A_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \xi_t + \frac{\partial \bar{B}_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \bar{\xi}_t + \frac{\partial A_{s,t}}{\partial \bar{z}_k} \xi_t \bar{\xi}_k + \frac{\partial \bar{B}_{s,t}}{\partial \bar{z}_k} \bar{\xi}_k \bar{\xi}_t \right) \frac{\partial}{\partial z_s} \\
& \quad + \sum_{k,s,t} \left(\frac{\partial \bar{A}_{s,t}}{\partial \bar{z}_k} \bar{\xi}_k \bar{\xi}_t + \frac{\partial B_{s,t}}{\partial \bar{z}_k} \bar{\xi}_k \xi_t + \frac{\partial \bar{A}_{s,t}}{\partial z_k} \bar{\xi}_t \xi_k + \frac{\partial B_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \xi_t \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s}
\end{aligned}$$

En appliquant la relation (3.5.3) avec $[\xi, J\xi]$ à la place de ξ on a $J[\xi, J\xi] = \eta + \bar{\eta}$ avec :

$$\begin{aligned}
\eta &:= \sum_{k,s,t,r} \left[A_{r,s} \left(\frac{\partial A_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \xi_t + \frac{\partial \bar{B}_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \bar{\xi}_t + \frac{\partial A_{s,t}}{\partial \bar{z}_k} \xi_t \bar{\xi}_k + \frac{\partial \bar{B}_{s,t}}{\partial \bar{z}_k} \bar{\xi}_k \bar{\xi}_t \right) \right. \\
& \quad \left. + \bar{B}_{r,s} \left(\frac{\partial \bar{A}_{s,t}}{\partial \bar{z}_k} \bar{\xi}_k \bar{\xi}_t + \frac{\partial B_{s,t}}{\partial \bar{z}_k} \bar{\xi}_k \xi_t + \frac{\partial \bar{A}_{s,t}}{\partial z_k} \bar{\xi}_t \xi_k + \frac{\partial B_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \xi_t \right) \right] \frac{\partial}{\partial z_r}
\end{aligned}$$

En tenant compte des relations (3.5.2), (3.5.1) et celles sur les dérivées premières des matrices A, B dans l'expression du champ η on obtient :

$$\begin{aligned}
\eta &= i \sum_{k,s,t} \left(\frac{\partial A_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \xi_t + \frac{\partial \bar{B}_{s,t}}{\partial z_k} \xi_k \bar{\xi}_t + \frac{\partial A_{s,t}}{\partial \bar{z}_k} \xi_t \bar{\xi}_k + \frac{\partial \bar{B}_{s,t}}{\partial \bar{z}_k} \bar{\xi}_k \bar{\xi}_t \right) \frac{\partial}{\partial z_s} \\
& \quad + \sum_{k,l,s,t,r,h} \left(\bar{B}_{r,s}^l B_{s,k}^{h,\bar{t}} z_h \bar{z}_l - \frac{i}{2} \sum_j \bar{B}_{r,j}^l B_{j,s}^k \bar{B}_{s,t}^h \bar{z}_l \bar{z}_h \right) \xi_k \bar{\xi}_t \frac{\partial}{\partial z_r} \\
& \quad + \sum_{k,l,s,t,r} \left[\bar{B}_{r,s}^l B_{s,t}^k \bar{z}_l + \sum_h \left(2\bar{B}_{r,s}^l B_{s,t}^{k,h} z_h \bar{z}_l + \bar{B}_{r,s}^l B_{s,t}^{k,\bar{h}} \bar{z}_l \bar{z}_h \right) \right] \xi_k \xi_t \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} + O(|z|^3) \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

En regroupant et en simplifiant les termes obtenus jusqu'ici (et en symétrisant de façon adéquate les coefficients) on obtient l'expression asymptotique voulue pour la distribution $H_J u(\xi)$. Si maintenant on suppose que la structure presque complexe est intégrable il existe d'après le théorème de Newlander-Nirenberg des coordonnées locales complexes. La structure presque complexe s'écrit alors par rapport à ces coordonnées sous la forme

$$J(z) = J_0 = i \sum_k \left(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right).$$

Un calcul immédiat montre alors que pour tout champs de vecteurs réels ξ à coefficients constants par rapport aux coordonnées complexes on a :

$$\frac{1}{2}(\xi \cdot \xi + J\xi \cdot J\xi) = 2 \sum_{k,l} \xi_k \bar{\xi}_l \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l},$$

(bien évidemment $[\xi, J\xi] = 0$), ce qui permet de conclure dans le cas d'une structure presque complexe intégrable. \square

3.6 Appendice

3.6.1 Expressions des coefficients $R_{*,*}^{*,*,*}$ du Hessien presque complexe

$$\begin{aligned} R_{k,l}^{s,r,h} &:= \frac{i}{8} \sum_{t,j} \bar{B}_{s,j}^t \left(B_{t,k}^r B_{j,l}^h + B_{t,k}^h B_{j,l}^r + B_{t,l}^r B_{j,k}^h + B_{t,l}^h B_{j,k}^r \right) \\ R_{k,l}^{s,r,\bar{h}} &:= -\frac{1}{2} \sum_t \left[\bar{B}_{s,t}^{h,\bar{k}} B_{t,l}^r + \bar{B}_{s,t}^{h,\bar{l}} B_{t,k}^r + \bar{B}_{s,t}^{h,\bar{r}} \left(B_{t,l}^k + B_{t,k}^l \right) \right] \\ R_{k,l}^{s,\bar{r},\bar{h}} &:= -\frac{1}{2} \sum_t \bar{B}_{s,t}^{r,h} \left(B_{t,l}^k + B_{t,k}^l \right) \\ R_{k,\bar{l}}^{s,r,h} &:= \frac{1}{2} \sum_t \left(B_{t,k}^r \bar{B}_{s,l}^{t,\bar{h}} + B_{t,k}^h \bar{B}_{s,l}^{t,\bar{r}} + 2B_{t,k}^{r,h} \bar{B}_{s,l}^t \right) \\ R_{k,\bar{l}}^{s,r,\bar{h}} &:= 4i \bar{B}_{s,l}^{h,\bar{r},\bar{k}} + \sum_t \left(2B_{t,k}^r \bar{B}_{s,l}^{t,h} + B_{t,k}^{r,\bar{h}} \bar{B}_{s,l}^t + B_{t,k}^{r,\bar{l}} \bar{B}_{s,t}^h + \frac{i}{2} \sum_j \bar{B}_{t,j}^h B_{j,k}^r B_{s,l}^t \right) \\ R_{k,\bar{l}}^{s,\bar{r},\bar{h}} &:= 2i \bar{B}_{s,l}^{r,h,\bar{k}} + \frac{i}{4} \sum_{t,j} \left(\bar{B}_{t,l}^r \bar{B}_{s,j}^h + \bar{B}_{t,l}^h \bar{B}_{s,j}^r \right) \left(B_{j,k}^t - B_{j,t}^k \right) \\ R_{k,\bar{l}}^{s,r,\bar{h}} &:= -\frac{i}{4} \sum_{t,j} B_{t,j}^r \left(\bar{B}_{j,k}^h \bar{B}_{s,l}^t + \bar{B}_{j,l}^h \bar{B}_{s,k}^t \right) \\ R_{k,\bar{l}}^{s,\bar{r},\bar{h}} &:= \frac{1}{4} \sum_t \left(\bar{B}_{t,k}^r \bar{B}_{s,l}^{h,\bar{t}} + \bar{B}_{t,k}^h \bar{B}_{s,l}^{r,\bar{t}} + \bar{B}_{t,l}^r \bar{B}_{s,k}^{h,\bar{t}} + \bar{B}_{t,l}^h \bar{B}_{s,k}^{r,\bar{t}} \right). \end{aligned}$$

Bibliographie

- [Au-La] AUDIN. M, LAFONTAINE. J.(1994) Eds Holomorphic curves in symplectic geometry, Birkhuser, Basel.
- [B-D-I-P] J. BERTIN, J.-P. DEMAILLY, L.ILLUSIE, C. PETERS (1996). Introduction à la théorie de Hodge. Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation, 4-111, publication de la SMF, nr3.
- [Bom] BOMBIERI, E. (1970) Algebraic values of meromorphic maps, Invent. Math. 10,(1970), 267-287; Addendum, Invent. Math. 11, (1970), 163-166.
- [Bo-Tu] BOTT, R. TU, L. W (1982) Differential forms in Algebraic Topology, GTM 82, Springer-Verlag, New York
- [Dem-1] DEMAILLY, J.P. (1997) Complex analytic and differential geometry, available at : <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr>
- [Dem-2] DEMAILLY, J.P.(1992) Regularisation of closed positive currents of type (1,1) by the flow of a Chern connection. (English) Skoda, Henry (ed.) et al., Contributions to complex analysis and analytic geometry. Based on a colloquium dedicated to Pierre Dolbeaut, Paris, France, June 23-26, 1992. Braunschweig : Vieweg. Aspects Math. E 26, 105-126 (1994)
- [DeR] DE RHAM, G. (1955) Variétés différentiables, Herman, Paris.
- [Don] DONALDSON,S.K. (1996) Symplectic submanifolds and almost complex geometry, Journal of Differential Geometry 44, 666-705.
- [Fed] FEDERER, H.(1969) Geometric measure theory, Springer-Verlag, Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 153, Berlin
- [Fu-Ha] FULTON, W, HARRIS.J (1991) Representation theory. A first course. GTM 129, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, New York
- [McD] MCDUFF.D.(1992) Singularities of J -holomorphic curves in almost-complex 4-manifolds, J. Geom. Anal 2, 249-265.
- [McD-1] MCDUFF.D. (1994) J -holomorphic Curves and Quantum Cohomology, University Lecture Series, vol 6.
- [McD-Sa] MCDUFF.D, SALOMON (1995) Symplectic topology, Oxford University Press.
- [Gau] GAUDUCHON, P. (1997) Hermitian Connections and Dirac operators, Boll. U.M.I. (7), 11-B, Suppl. fasc. 2, 257-288.
- [G-M-S] GIAQUINTA, M., MODICA, G., SOUCEK, J.(1998) Cartesian currents in the calculus of variations I, Springer vol. 37.
- [Gi-Tru] GILBARG, D., TRUDINGER, N. (1977) Elliptic partial differential equations of second order. Berlin Heidelberg New York : Springer
- [Gro] GRIOMOV, M. (1986) Partial Differential Relations, Springer-Verlag, 9, Berlin, Heidelberg

- [Gri] GRIFFITHS, P.A. (1969) Hermitian differential Geometry, Chern classes and positive vector bundles, Global Analysis, papers in honor of K. Kodaira, Princeton Univ. Press, Princeton, 181-251.
- [Gri-Ha] GRIFFITHS, P.A., HARRIS, J. (1978) Principles of algebraic geometry, Wiley, New-York
- [Ha-Po] HARVEY, R., POLKIN, J. (1979) Fundamental solutions in complex analysis I. II. Duke Math. J. 46. 253-340
- [He-Le] HENKIN, G.M., LEITERER, J. (1984) Theory of functions on complex manifolds. Boston : Birkhäuser
- [Hör] HÖRMANDER, L. (1966) An introduction to Complex Analysis in several variables, 3rd edition, North-Holland Math. Libr., vol. 7, Amsterdam, London (1990)
- [Hör-1] HÖRMANDER, L. (1963) Linear Partial Differential Operators, Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 116, Springer-Verlag, Berlin.
- [Hir] HIRSCH, M.W. (1991) Differential topology, GTM 33, Springer-Verlag.
- [Kob] KOBAYASHI, S. (1987) Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Publications of the mathematical society of Japan 15 (Kanô Memorial Lectures 5). Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press
- [Ko-Mal] KOSZUL, J-L., MALGRANGE, B. (1958) Sur certaines structures fibrées complexes, arch.mat, vol.IX.
- [Lel] LELONG, P. (1968) Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Dound, Paris, Gordon Breach, New York.
- [Mal-1] MALGRANGE, B. (1966) Ideals of differentiable functions, Oxford university press.
- [Mal-2] MALGRANGE, B. (1969) Sur l'intégrabilité des structures presque complexes. Symposia Math. vol. II, 289-296, London : Academic Press.
- [Mos-1] MOSER, J.K. (1961) A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, vol 47, pp 1824-1831
- [Mos-2] MOSER, J.K. (1966) A rapidly convergent iteration method and nonlinear differential equations I, II. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 20, 499-535
- [New-Nir] NEWLANDER, A., NIRENBERG, L. (1957) Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. Ann. Math. 65, 391-404
- [Nij-Woo] NIJENHUIS, A., WOOLF, W. (1963) Some integrations problems in almost complex manifolds, Ann. Math. 77, 424-489
- [Ra] RANGE, M. (1986) Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Berlin Heidelberg New York : Springer
- [Siu] SIU, Y.T. (1974) Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, Invent. Math. 27, 53-156.
- [Sko] SKODA, H. (1976) Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ et applications arithmétiques, Séminaire P. Lelong (Analyse), année 1975/76, Lecture Notes in Math. no 538, Springer-Verlag, Berlin (1977), 314-323.
- [Sta] STAMPACCHIA, G. (1963) Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15, 1, 185-258.
- [We-1] WEBSTER, S.M. (1989) A new proof of the Newlander-Nirenberg theorem, Math.Zeit. 201, 303-316
- [We-2] WEBSTER, S.M. (1989) On the proof of Kuranishi's embedding theorem. Ann. Inst. Henri Poincaré, Nouv. Serie., B(ANL) vol. 6

[Wel] WELLS, R.O (1980) Differential analysis on complex manifolds, Graduate Texts in Math. 65, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin

Nefton Pali
Institut Fourier, UMR 5582, Université Joseph Fourier
BP 74, 38402 St-Martin-d'Hères cedex, France
E-mail : *nefton.pali@ujf-grenoble.fr*