ESTIMATIONS $\mathcal{C}^k$ POUR L'OPÉRATEUR DE CAUCHY-RIEMANN SUR DES DOMAINES À COINS q-CONVEXES ET q-CONCAVES.

Hélène RICARD[1]

Prépublication de l'Institut Fourier n°571 (2002)
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Le but de cet article est d'étudier les estimations $\mathcal{C}^k$ pour la résolution du $\bar\partial$ dans le cas des domaines à coins q-convexes et q-concaves et de donner quelques applications de cette résolution. On se donne la définition suivante :

Définition 0.1 *Une collection $(U,\rho_1,\ldots,\rho_N)$ est appelée* configuration q-convexe *(resp.* configuration q-concave*) de classe $\mathcal{C}^d$ dans $\mathbb{C}^n$ avec $d\geq 2$ (resp. $d\geq 3$), si $U\subset\mathbb{C}^n$ est un domaine convexe et $\rho_1,\ldots,\rho_N$ sont des applications à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^d$ sur U vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $E=\{z\in U\big|\rho_1(z)=\cdots=\rho_N(z)=0\}\neq\varnothing$.

(ii) $d\rho_1(z)\wedge\cdots\wedge d\rho_N(z)\neq 0$ *pour tout* $z\in U$.

(iii) *Pour tout $I=(j_1,\ldots,j_l)\subset\{1,\ldots,N\}$ avec $1\leq j_1<\cdots<j_l\leq N$, et toute famille $(\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_l})$de réels positifs tels que $\lambda_{j_1}+\cdots+\lambda_{j_l}=1$, la forme de Levi de l'application $\lambda_{j_1}\rho_{j_1}+\cdots+\lambda_{j_l}\rho_{j_l}$ admet au moins $q+1$ valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) en tout point de U.*

Les résultats principaux de ce travail sont les deux théorèmes suivants, le premier traite du cas q-convexe et le second du cas q-concave.

Théorème 0.2 *Supposons que $(U,\rho_1,\ldots,\rho_N)$ est une configuration q-convexe de classe $\mathcal{C}^d$ dans $\mathbb{C}^n$, avec $d\geq 2$.*
Pour tout $\xi\in E$, il existe $R>0$, que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1,\ldots,\rho_N$ (ce qui entraîne de petites perturbations de ξ), tel que si on note $G=\cap_{i=1}^N\{z\in U|\rho_i(z)<0\}$ et $D_R=G\cap B(\xi,R)$, alors :
(i) Si $n-q\leq r\leq n$, il existe un opérateur linéaire

$$R_r:\mathcal{C}^0_{0,r}(\overline{D_R})\to\mathcal{C}^0_{0,r-1}(D_R)$$

tel que si f est une $(0,r)$-forme différentielle sur D_R, continue sur $\overline{D_R}$ avec $\bar\partial f=0$ on a :

[1]avec la participation financière du Réseau Européen «ANACOGA» T.M.R. ERBFMX-CT 98-0163 et de la Région Rhône-Alpes.
Classification Math. : 32A25, 32F10
Mots-clés : domaines à coins q-convexes, q-concaves, équation de Cauchy-Riemann, résolution locale, régularité jusqu'au bord, théorème d'Andreotti-Vesentini

1. $\bar{\partial} R_r f = f$ *sur* D_R.

2. Si $f \in \mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{D_R})$, $s \in \mathbb{N}^*$, *pour tout* $0 \leq \delta_0 < \frac{1}{2}$ *:*

$$\|R_r f\|_{s-1+\delta_0, D_R} \leq C_{\delta_0} \|f\|_{s, D_R}$$

Théorème 0.3 *Supposons que* $d \geq 3$ *et que* $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ *est une configuration q-concave de classe* $\mathcal{C}^d$ *dans* $\mathbb{C}^n$.
Pour tout $\xi \in E$, *il existe* $R > 0$, *que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations* $\mathcal{C}^2$ *des applications* $\rho_1, \ldots, \rho_N$, *tel que si on note* $G = \cap_{i=1}^N \{z \in U | \rho_i(z) < 0\}$ *et* $D_R = G \cap B(\xi, R)$, *alors :*
(i) Si $r \leq q - N$, *il existe* $R' > 0$ *avec* $R' < R$ *que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations* $\mathcal{C}^2$ *des applications* $\rho_1, \ldots, \rho_N$ *et un opérateur linéaire*

$$T_r : \mathcal{C}^0_{0,r}(\overline{D_R}) \to \mathcal{C}^0_{0,r-1}(D_{R'})$$

tels que si f *est une* $(0, r)$*-forme différentielle sur* D_R, *continue sur* $\overline{D_R}$ *avec* $\bar{\partial} f = 0$ *on a :*

1. $\bar{\partial} T_r f = f$ *sur* $D_{R'}$.

2. Si $f \in \mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{D_R})$, $s \in \{1, \ldots, d-2\}$, *pour tout* $0 \leq \delta_0 < \frac{1}{2}$ *:*

$$\|T_r f\|_{s-1+\delta_0, D_{R'}} \leq C_{\delta_0} \|f\|_{s, D_R}$$

(ii) Il existe un opérateur linéaire

$$T_{q-N+1} : \mathcal{C}^0_{0,q-N+1}(\overline{D_R}) \to \mathcal{C}^0_{0,q-N}(D_R)$$

tel que si f *est une* $(0, q-N+1)$*-forme différentielle sur* D_R, *continue sur* $\overline{D_R}$ *avec* $\bar{\partial} f = 0$ *telle que* $\operatorname{supp} f \subset\subset \overline{G} \cap B(\xi, R)$, *vérifiant la condition :*

(C1) *Si* $q = n - 1$,

$$\int_{S_{(1,\ldots,N)}} f(\zeta) \wedge g(\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n = 0, \text{ pour tout } g \in \mathcal{O}(B(\xi, R)).$$

alors :

1. $\bar{\partial} T_{q-N+1} f = f$ *sur* D_R.

2. Si $f \in \mathcal{C}^s_{0,q-N+1}(\overline{D_R})$, $s \in \{1, \ldots, d-2\}$, *alors pour tout* $0 \leq \delta_0 < \frac{1}{2}$ *:*

$$\|T_{q-N+1} f\|_{s-1+\delta_0, D_R} \leq C_{\delta_0} \|f\|_{s, D_R}$$

Dans [16], R.M. Range et Y.T. Siu ont obtenu à l'aide de noyaux intégraux, des estimations uniformes dans le cas d'un domaine D strictement pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^d$ par morceaux ($q = n-1$, $N \geq 1$). En 1980, dans [12], I. Lieb et R.M. Range ont obtenu des estimations $\mathcal{C}^k$ lorsque D est strictement pseudoconvexe à bord lisse ($q = n-1$, $N = 1$). En combinant les techniques employées dans ces articles et en utilisant des pseudocoordonnées, J. Michel (avec une condition de transversalité complexe) et M. Perotti/J.

Michel, dans [13] et [14], ont obtenu des estimations $\mathcal{C}^k$ lorsque D est strictement pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^d$ par morceaux.
Cependant, on ne peut utiliser directement ces noyaux pour $q < n-1$ et $N > 1$ car la section de Leray dépend non-linéairement du coefficient λ, alors que dans le cas pseudoconvexe, λ était éliminé explicitement par une intégration. Suivant une idée de G.M. Henkin (voir l'introduction de [9]), C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer ont démontré, dans [9] et [10], des théorèmes analogues pour les estimations uniformes. Ils les ont obtenues sans effectuer l'intégration en λ mais en l'estimant de façon adéquate.

Ainsi, les théorèmes annoncés ci-dessus sont démontrés en s'appuyant à la fois sur les travaux de J. Michel et M. Perotti et sur cette estimation de l'intégration en λ. Il faut noter que par rapport aux estimations obtenues dans [14], pour le cas $q = n-1$, il y a une perte de régularité puisque le point *3.* du Théorème 0.2 est démontré pour $0 \leq \delta_0 < \frac{1}{2}$ alors que J. Michel et M. Perotti obtenaient des estimations pour $0 \leq \delta_0 < 1$. L'auteur ne sait pas à l'heure actuelle si ces estimations sont optimales.

Il faut noter aussi que le Théorème 0.2 a été annoncé et partiellement démontré par M.Y. Barkatou, dans [2], il a obtenu des estimations pour $0 \leq \delta_0 < 1$, utilisant des noyaux de sa fabrication, dans le cas où les applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ vérifient une hypothèse plus forte, en remplaçant par exemple la condition (iii) de la Définition 0.1 par la condition (iii') suivante :

(iii') *Il existe un sous-espace fixé T de $\mathbb{C}^n$ de dimension $q+1$ tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, la forme de Lévi de ρ_j est définie positive sur T en tout point de U.*

Les quatre premières parties de ce travail sont consacrées à la démonstration des Théorèmes 0.2 et 0.3. On utilise ensuite ces résultats pour démontrer un théorème de résolution locale avec régularité jusqu'au bord, sur le complémentaire W d'un domaine q-convexe, D,à bord $\mathcal{C}^d$ par morceaux, il s'agit du Théorème 6.1. On est alors placé dans le cadre suivant :
Soit $D \subset\subset U \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine défini par

$$D = \{z \in U | \forall i \in \{1, \ldots, N\} \ r_i(z) < 0\}$$

avec les propriétés suivantes :

(i) pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, r_i est de classe $\mathcal{C}^d$ sur U, avec d assez grand

(ii) pour tout $I = (j_1, \ldots, j_l)$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq N$:
$dr_{j_1}(z) \wedge \cdots \wedge dr_{j_l}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \{\zeta \in U | r_{j_1}(\zeta) = \cdots = r_{j_l}(\zeta) = 0\}$

(iii) pour tout $I = (j_1, \ldots, j_l)$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq N$, et tout $(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_l})$ famille de réels positifs tels que $\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_l} = 1$, la forme de Levi de l'application $\lambda_{j_1} r_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_l} r_{j_l}$ admet au moins $q+1$ valeurs propres strictement positives en tout point de U

Soit $\xi \in \partial D$, on s'intéresse à la résolution de $\bar{\partial}$ sur $W \cap B(\xi, R)$ pour $R > 0$ assez petit.

Le théorème obtenu généralise le Corollaire 0.2 dans [10], qui donne aussi une résolution sur ce type d'ouvert. C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer ont obtenu en effet des résultats pour des formes continues, avec des solutions continues, mais sans régularité jusqu'au bord de W.
Par ailleurs, H. Grauert, dans [4], a obtenu une résolution plus globale avec régularité jusqu'au bord pour des formes définies sur W mais en supposant que les applications $r_1, \ldots, r_N$ vérifient la condition (iii').
Sous cette hypothèse, il a montré qu'il existe une base de voisinages de Stein V de $\xi \in \partial D$ telle que si f est définie sur $W \cap V$, il existe u telle que $\bar{\partial} u = f$ sur $W \cap V$.

Enfin, dans une dernière partie, on démontre un théorème de résolution globale pour les $(0, r)$-formes à support compact dans le complémentaire d'un domaine $\Omega \subset\subset X$ strictement q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, où X est une variété complexe, (voir Définition 7.3). Ceci conduit à généraliser le théorème de séparation d'Andreotti-Vesentini, (voir [1] et aussi [11]) pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, pour des $(0, q)$-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ jusqu'au bord.

Pour finir, je tiens à remercier Mme Laurent-Thiébaut pour m'avoir proposé ce problème et pour ses conseils ainsi que J. Leiterer et M.Y. Barkatou pour toutes nos discussions sur ce sujet. Lors d'un exposé à Lille, J. Michel m'a conseillé de généraliser au cas $\mathcal{C}^m$ le Théorème 6.1 qui était alors démontré uniquement dans le cas $\mathcal{C}^\infty$, je l'en remercie.

1 Préliminaires.

1.1 – Pour $z \in \mathbb{C}^n$, on note $z_1, \ldots, z_n$ les coordonnées complexes canoniques de z. Pour $(z, w) \in \mathbb{C}^n$, on note $< z, w >= z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n$ et $|z| =< z, z >^{\frac{1}{2}}$.

1.2 – Si ρ est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, on note $\mathcal{L}_\rho(\zeta)$ la forme de Levi de ρ au point $\zeta \in U$, on note de plus $F_\rho(z, \zeta)$ le polynôme de Levi de ρ au point $\zeta \in U$ appliqué en $z \in \mathbb{C}^n$, i.e. pour tout $\zeta \in U$, tout $z \in \mathbb{C}^n$

$$\mathcal{L}_\rho(\zeta)(z) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_j \partial \zeta_k} \overline{z}_j z_k$$

$$F_\rho(\zeta, z) = 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(\zeta)}{\partial \zeta_j} (\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} (\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k)$$

Alors d'après la formule de Taylor à l'ordre 2, on a

$$\text{Re } F_\rho(\zeta, z) = \rho(\zeta) - \rho(z) + \mathcal{L}_\rho(\zeta)(\zeta - z) + o(|\zeta - z|^2) \tag{1.1}$$

1.3 – Pour $h \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{aligned} P(h) &= \left\{ I = (j_1, \ldots, j_l) \middle| 1 \leq l \leq h, \forall i \in \{1, \ldots, l\}, j_i \in \{1, \ldots, h\} \right\} \\ P'(h) &= \left\{ I = (j_1, \ldots, j_l) \middle| 1 \leq l \leq h, 1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq h \right\} \\ P'(h,*) &= \left\{ I = (j_1, \ldots, j_l) \middle| (j_1, \ldots, j_{l-1}) \in P'(h), j_l = * \right\} \end{aligned}$$

1.4 – Pour $I \in P'(N+1)$ et $0 \leq \delta \leq 1$ on note :

$$\begin{aligned} \Delta_I &= \left\{ (\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}) \in [0,1]^{N+2} \middle| \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k = 1, \lambda_i = 0 \ \forall i \notin I \right\} \\ \Delta_{0I} &= \left\{ (\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}) \in [0,1]^{N+2} \middle| \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k = 1, \lambda_i = 0 \ \forall i \notin I \cup \{0\} \right\} \\ \Delta_{0I}^{\delta} &= \left\{ (\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}) \in \Delta_{0I} \middle| 0 \leq \lambda_0 \leq \delta \right\} \end{aligned}$$

1.5 – Si $I = (j_1, \ldots, j_l)$ est une collection ordonnée d'entiers, et si $\nu \in \{1, \ldots, l\}$, on note $I(\widehat{\nu}) = (j_1, \ldots, j_{\nu-1}, j_{\nu+1}, \ldots, j_l)$.
Soit $\lambda \in \Delta_{0(1,\ldots,N+1)}$, alors, on pose :

- si $\lambda_0 \neq 1$, $\overset{\circ}{\lambda} = (0, \frac{\lambda_1}{1-\lambda_0}, \ldots, \frac{\lambda_{N+1}}{1-\lambda_0})$, alors $\overset{\circ}{\lambda} \in \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$,
- si $\lambda_{N+1} \neq 1$, $\overset{*}{\lambda} = (\frac{\lambda_0}{1-\lambda_{N+1}}, \ldots, \frac{\lambda_N}{1-\lambda_{N+1}}, 0)$, alors $\overset{*}{\lambda} \in \Delta_{0(1,\ldots,N)}$,
- si $\lambda_{N+1}+\lambda_0 \neq 1$, $\overset{\circ *}{\lambda} = (0, \frac{\lambda_1}{1-\lambda_0-\lambda_{N+1}}, \ldots, \frac{\lambda_N}{1-\lambda_0-\lambda_{N+1}}, 0)$, alors $\overset{\circ *}{\lambda} \in \Delta_{(1,\ldots,N)}$.

1.6 – Pour $j \in \{0, \ldots, N+1\}$, on note $\tau^j = (\tau_0^j, \ldots, \tau_{N+1}^j) \in \Delta_{0(1,\ldots,N+1)}$ défini par $\tau_j^j = 1$.

1.7 – Soit χ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $\chi(t) = 0$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{8}$ et $\chi(t) = 1$ si $\frac{1}{4} \leq t \leq 1$.

1.8 – Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$, on dit que D est une *intersection de classe* $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, s'il existe un voisinage $U_{\overline{D}}$ de $\overline{D}$ et un nombre fini de fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^k$, $\rho_1, \ldots, \rho_{N+1}$ définies sur un voisinage de $U_{\overline{D}}$ telles que

$$D = \left\{ z \in U_{\overline{D}} \middle| \forall i \in \{1, \ldots, N+1\}, \rho_i(z) < 0 \right\}$$

et telles que pour tout $I = (j_1, \ldots, j_l)$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq N+1$:
$d\rho_{j_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_{j_l}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \{\zeta \in \partial D | \rho_{j_1}(\zeta) = \cdots = \rho_{j_l}(\zeta) = 0\}$.
On dit alors que $(U_{\overline{D}}, \rho_1, \ldots, \rho_{N+1})$ est un *cadre de classe* $\mathcal{C}^k$ pour D.

1.9 – Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ une intersection de classe $\mathcal{C}^1$, pour laquelle on pose $\rho_* = \rho_{N+1}$. Pour $I = (j_1, \ldots, j_l) \in P(N+1)$ on pose :

$$S_I = \{z \in \partial D | \forall i \in I, \rho_i(z) = 0\}$$

si les éléments de I sont deux à deux distincts, $S_I = \varnothing$ sinon.
On oriente S_I par récurrence sur le nombre d'éléments de I de manière

antisymétrique en les éléments de I, de la façon suivante :
si $j \in \{1, \dots, N+1\}$, S_j est orienté de manière à avoir

$$\partial D = \sum_{j=1}^{N+1} S_j \tag{1.2}$$

si S_I est orienté, on oriente les S_{Ij} pour avoir

$$\partial S_I = \sum_{j=1}^{N+1} S_{Ij} \tag{1.3}$$

où, si $I = (j_1, \dots, j_l)$, S_{Ij} désigne $S_{(j_1,\dots,j_l,j)}$.
Si $I = (j_1, \dots, j_l) \in P'(N+1)$ contient l'indice $*$, i.e. $j_l = N+1$, alors on notera parfois :

$$S_I = S_{J*} \text{ avec } J = (j_1, \dots, j_{l-1})$$

1.10 – Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ une intersection de classe $\mathcal{C}^1$, pour laquelle on pose $\rho_* = \rho_{N+1}$. On définit pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit :

$$D_0 = \left\{ z \in U_{\overline{D}} \middle| \forall i \in \{1, \dots, N+1\}, \rho_i(z) < \varepsilon_0 \right\}$$

Si $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit, D_0 est une intersection de classe $\mathcal{C}^1$ et on pose alors, pour $I = (j_1, \dots, j_l) \in P(N+1)$:

$$S_I^0 = \{z \in \partial D_0 | \forall i \in I, \rho_i(z) = \varepsilon_0\}$$

$$R_I = \{z \in U_{\overline{D}} | \forall i \in I, 0 \le \rho_{j_1}(z) = \dots = \rho_{j_l}(z) \le \varepsilon_0,\ \rho_j(z) \le \rho_{j_1}(z) \text{ si } j \notin I\}$$

si les éléments de I sont deux à deux distincts, $S_I^0 = R_I = \varnothing$ sinon.
On oriente les S_I^0 comme les S_I et les R_I par récurrence sur le nombre d'éléments de I de manière antisymétrique en les éléments de I, de la façon suivante :
si $j \in \{1, \dots, N+1\}$, R_j est orienté de manière à avoir

$$\overline{D_0} \setminus D = \sum_{j=1}^{N+1} R_j \tag{1.4}$$

si R_I est orienté, on oriente les R_{Ij} pour avoir

$$\partial R_I = -\sum_{j=1}^{N+1} R_{Ij} - S_I + S_I^0 \tag{1.5}$$

où, si $I = (j_1, \dots, j_l)$, R_{Ij} désigne $R_{(j_1,\dots,j_l,j)}$.

1.11 – Soient V un ouvert borné de $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$, $s \in \mathbb{N}$ et $0 < \lambda < 1$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, $(x_1, \dots, x_{2n})$ un point de V, on note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{2n}$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{2n}^{\alpha_{2n}}}$$

$\mathcal{C}^s_{p,q}(V)$ désigne l'espace des (p,q)-formes différentielles telles que chaque coefficient est s fois continûment dérivable sur V et $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(V)$ celui des (p,q)-formes différentielles telles que chaque coefficient est continûment dérivable à tout ordre. De plus $\mathcal{C}^s_{p,q}(\overline{V})$ désigne l'espace des (p,q)-formes différentielles telles que chaque coefficient est s fois continûment dérivable sur un voisinage de $\overline{V}$ et $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(\overline{V})$ celui des (p,q)-formes différentielles telles que chaque coefficient est continûment dérivable à tout ordre sur un voisinage de $\overline{V}$. Soit $f : V \to \mathbb{C}$, une application, on note :

$$\|f\|_{s,V} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{2n}\\|\alpha|\leq s}} \sup_{x\in V} |D^\alpha f(x)|$$

$$\|f\|_{s+\lambda,V} = \|f\|_{s,V} + \sup\left\{\left|\frac{D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)}{|x-y|^\lambda}\right|,\ (x,y)\in V^2,\ \alpha\in\mathbb{N}^{2n}, |\alpha| = s\right\}$$

Pour les formes différentielles sur V, on définit ces normes comme la borne supérieure sur tous les coefficients des normes précédentes.

1.12 – Si D est un domaine borné à bord $\mathcal{C}^t$ par morceaux, $t \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, inclus dans $\mathbb{C}^n$, si $\mathcal{V}$ est un voisinage de $\overline{D}$, il existe un opérateur linéaire E, appelé *opérateur de Seeley*, voir [18], tel que, si α est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ alors $E\alpha$ est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\mathbb{C}^n$ avec $E\alpha \equiv \alpha$ sur $\overline{D}$ et *supp* $E\alpha \subset \mathcal{V}$.
De plus, si $\alpha \in \mathcal{C}^s_{(0,r)}(\overline{D})$ alors $E\alpha \in \mathcal{C}^s_{(0,r)}(\mathcal{V})$ et il existe une constante C_s telle que

$$\|E\alpha\|_{s,\mathcal{V}} \leq C_s \|\alpha\|_{s,D}$$

1.13 – Une application f définie sur une variété complexe X est dite *s-holomorphe* si pour tout point $\zeta \in X$, il existe des coordonnées holomorphes $h_1, \dots, h_n$ dans un voisinage de ζ telles que f soit holomorphe par rapport à $h_1, \dots, h_s$.

2 Opérateurs solutions.

Soit D une intersection de classe $\mathcal{C}^2$, définie avec les notations du paragraphe 1.8, $\mathfrak{D}$ désigne la diagonale de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.
Supposons qu'il existe une fonction

$$\begin{array}{rccl}\omega\ : & \big(\big((U_{\overline{D}} \setminus D) \times \overline{D}\big) \setminus \mathfrak{D}\big) \times \Delta_{0(1,\dots,N+1)} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (\zeta, z, \lambda) & \longmapsto & (\omega_1(\zeta,z,\lambda), \dots, \omega_n(\zeta,z,\lambda))\end{array}$$

telle que :

1. ω est $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à λ.

2. Pour tout $(\zeta, z) \in \big((U_{\overline{D}} \setminus D) \times \overline{D}\big) \setminus \mathfrak{D}$, pour tout $\lambda \in \Delta_{0(1,\ldots,N+1)}$

$$< \omega(\zeta, z, \lambda), \zeta - z >= 1$$

Une telle application ω sera appelée *section de Leray* associée à D. On suppose de plus :

3. Pour tout $(\zeta, z) \in \big((U_{\overline{D}} \setminus D) \times \overline{D}\big) \setminus \mathfrak{D}$,

$$\omega(\zeta, z, (1, 0, \ldots, 0)) = \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^2}$$

Posons, lorsque cela est défini

$$\eta(\zeta, z, \lambda) =< \omega(\zeta, z, \lambda), d\zeta >$$

et

$$D_{n,r}(\zeta, z, \lambda) = \frac{(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \binom{n-1}{r} \eta \bigwedge^{r} \bar{\partial}_z \eta \bigwedge^{n-r-1} \bar{\partial}_{\zeta,\lambda} \eta \tag{2.1}$$

où $\bar{\partial}_{\zeta,\lambda} = \bar{\partial}_\zeta + d_\lambda$.

En suivant une construction due à R.M. Range et Y.T. Siu (voir [16]), basée sur la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman, on peut établir une formule du type *formule de Cauchy-Fantappié*. Nous renvoyons le lecteur à [9] pour les commentaires d'ordre historique sur cette équation. Ainsi, si f est une $(0, r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar{\partial} f$ est continue sur $\overline{D}$, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \bar{\partial}\widetilde{T}_r f(z) + \widetilde{T}_{r+1}(\bar{\partial} f)(z) + L_r f(z) && \text{si } r \geq 1 \\ f(z) &= \widetilde{T}_1(\bar{\partial} f)(z) + L_0 f(z) && \text{si } r = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

où,

$$\widetilde{T}_r f(z) = -\int_{D \times \Delta_0} f \wedge D_{n,r-1} - \sum_{I \in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \int_{S_I \times \Delta_{0I}} f \wedge D_{n,r-1}$$

$$L_r f(z) = \sum_{I \in P'(N+1)} \int_{S_I \times \Delta_I} f \wedge D_{n,r}$$

3 Pour une configuration q-convexe.

Le but de cette partie est de démontrer le Théorème 0.2. Soit $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ une configuration q-convexe de classe $\mathcal{C}^d$, $d \geq 2$, dans $\mathbb{C}^n$. Soit $\xi \in E$, pour $R > 0$ on note $\rho_*(z) = \rho_{N+1}(z) = |\xi - z|^2 - R^2$ et

$$D_R = \bigcap_{j=1}^{N} \{z \in U | \rho_i(z) < 0\} \cap B(\xi, R)$$

3.1 Construction d'une section de Leray

On rappelle brièvement ici comment construire une section de Leray associée à D_R, si R est suffisamment petit. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [9].
On note, comme dans [9], $G(n,q)$ la variété grassmannienne complexe des sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ de dimension q et $MO(n,q)$ la variété complexe de toutes les matrices complexes $n \times n$ qui définissent une projection orthogonale de $\mathbb{C}^n$ sur un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ de dimension q. On peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Si $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ est une configuration q-convexe de classe $\mathcal{C}^d$, $d \geq 2$, dans $\mathbb{C}^n$ et si $\xi \in E$.*
Alors, il existe $R_0 > 0$, que l'on peut choisir indépendemment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ tel que

1. *pour tout $R < R_0$, D_R est une intersection de classe $\mathcal{C}^d$ avec $U_{\overline{D_R}} = B(\xi, R_0)$*
2. *si $R < R_0$ et si on note $\rho_{N+1}(z) = |\xi - z|^2 - R^2$, il existe une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, $Q : \Delta_{(1,\ldots,N+1)} \to MO(n, n-q-1)$ et des constantes α, $A > 0$ telles que*

$$\text{Re } F_{\rho_\lambda}(\zeta, z) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \alpha|\zeta - z|^2 - A|Q(\lambda)(\zeta - z)|^2$$

pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{N+1}) \in \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$, $\rho_\lambda := \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_{N+1}\rho_{N+1}$ et $(\zeta, z) \in U^2_{\overline{D}}$.

Soit un tel $R_0 > 0$, et soit $0 < R < R_0$.
Comme les applications $\rho_1, \ldots, \rho_{N+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$, il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, a^ν_{kj}, $(1 \leq \nu \leq N+1,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n)$ sur $U_{\overline{D_R}}$ telles que

$$\left| a^\nu_{kj}(\zeta) - \frac{\partial^2 \rho_\nu(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} \right| \leq \frac{\alpha}{2n^2}, \quad \forall \zeta \in U_{\overline{D_R}}$$

On pose pour tout $\lambda \in \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$, $a^\lambda_{kj} = \lambda_1 a^1_{kj} + \cdots + \lambda_{N+1} a^{N+1}_{kj}$.
On définit pour $(\zeta, z, \lambda) \in U_{\overline{D_R}} \times \mathbb{C}^n \times \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$:

$$\begin{cases} w_j(\zeta, z, \lambda) = 2\frac{\partial \rho_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta_j} - \sum_{k=1}^n a^\lambda_{kj}(\zeta)(\zeta_k - z_k) + A \sum_{k=1}^n \overline{Q(\lambda)^{kj}(\zeta_k - z_k)} \\ w(\zeta, z, \lambda) = (w_1(\zeta, z, \lambda), \ldots, w_n(\zeta, z, \lambda)) \\ \varphi(\zeta, z, \lambda) = < w(\zeta, z, \lambda), \zeta - z > \end{cases}$$

Alors w est une application $(q+1)$-holomorphe (voir le paragraphe 1.13) en $z \in \mathbb{C}^n$ pour $(\zeta, \lambda) \in B(\xi, R_0) \times \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$ fixé. De plus φ vérifie l'estimation suivante : $\forall (\zeta, z, \lambda) \in (B(\xi, R_0))^2 \times \Delta_{(1,\ldots,N+1)}$,

$$\text{Re } \varphi(\zeta, z, \lambda) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 \tag{3.1}$$

Avec les notations des paragraphes 1.5 et 1.7, posons lorsque cela est défini

$$\omega(\zeta, z, \lambda) = \chi(\lambda_0)\frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^2} + (1 - \chi(\lambda_0))\frac{w(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})}{\varphi(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})} \tag{3.2}$$

Alors ω est une section de Leray associée à D_R comme cela a été défini dans la partie précédente.

3.2 Résolution du $\bar{\partial}$.

Soit maintenant f une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D_R}$ telle que $\bar{\partial} f$ est continue sur $\overline{D_R}$. On utilise les notations du paragraphe 1.10, en notant D à la place de D_R et $U_{\overline{D}}$ à la place de $U_{\overline{D_R}}$. Alors un raisonnement classique, voir par exemple [9], utilisant la $(q+1)$-holomorphie de $\eta(\zeta, z, \lambda)$ en z lorque $\lambda_0 = 0$ transforme l'équation (2.2) en une formule d'homotopie lorsque $r \geq n - q$. De plus si $\bar{\partial} f = 0$, on obtient lorsque $n - q \leq r \leq n$

$$f(z) = \bar{\partial}\widetilde{T}_r f(z)$$

On utilise une idée due à I. Lieb et R.M. Range, voir [12] et aussi [13] et [14], pour obtenir un noyau possèdant les propriétés de régularité cherchée. Ainsi, à l'aide de l'opérateur de prolongement de Seeley défini au paragraphe 1.12, à support dans D_0, on obtient un autre opérateur solution :
si f est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D_R}$ telle que $\bar{\partial} f = 0$, avec $r \geq n - q$

$$f(z) = \bar{\partial} R_r f(z) \tag{3.3}$$

où,

$$\begin{aligned} R_1 f &= \widetilde{T}_1(Ef|_D) - \textstyle\sum_{I \in P'(N+1)} \int_{R_I \times \Delta_I} Ef \wedge D_{n,0} && \text{si } r = 1 \\ R_r f &= \widetilde{T}_r(Ef|_D) + \textstyle\sum_{I \in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \bar{\partial} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} Ef \wedge D_{n,r-2} && \text{si } r \geq 2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Alors, la formule de Stokes permet d'affirmer que si $f \in \mathcal{C}^1_{0,r}(\overline{D})$ avec $r \geq n - q$:

$$R_r f(z) = -\int_{D_0 \times \Delta_0} Ef \wedge D_{n,r-1} + \sum_{I \in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar{\partial}(Ef) \wedge D_{n,r-1}$$

3.3 Estimations.

Comme les estimations pour l'opérateur de Bochner-Martinelli sur D_0 sont connues, il reste à démontrer les estimations pour

$$\sum_{I \in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar{\partial}(g) \wedge D_{n,r-1}$$

avec $g \in \mathcal{C}^k_{0,r}(\overline{D_0})$, pour $r > 0$ et $k > 0$, avec $\bar{\partial} g = 0$ sur D. Soit g une telle forme.
Contrairement au cas strictement pseudoconvexe, la section de Leray associée à D ne dépend pas linéairement de λ (voir [13] et [14]), on ne peut donc effectuer directement l'intégration en λ. Nous allons suivre ici une idée de C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer, voir [9], pour majorer l'opérateur (ou ses dérivées). Pour cela, nous devons tout d'abord en donner une expression plus explicite.

3.3.1 Simplification de l'écriture de l'opérateur.

Soit $I \in P'(N+1)$. Une réflexion sur la dimension de R_I et les bidegrés des formes que l'on intègre permet d'affirmer que la partie de $D_{n,r-1}$ qui entre en compte dans l'intégrale est proportionnelle à

$$\eta(\zeta,z,\lambda) \bigwedge^{r-1} \left(\bar{\partial}_z \eta(\zeta,z,\lambda)\right) \bigwedge^{n-|I|-r} \left(\bar{\partial}_\zeta \eta(\zeta,z,\lambda)\right) \bigwedge^{|I|} \left(d_\lambda \eta(\zeta,z,\lambda)\right)$$

avec

$$\eta(\zeta,z,\lambda) = \chi(\lambda_0)\frac{< \overline{\zeta - z}, d\zeta >}{|\zeta - z|^2} + (1-\chi(\lambda_0))\frac{< w(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda}), d\zeta >}{\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})}$$

En utilisant que si v est une 1-forme alors $v \wedge v = 0$, on démontre la proposition suivante (voir aussi [3]) :

Proposition 3.2 *Si v est une 1-forme, ψ une fonction qui ne s'annule pas, l un entier et D est un opérateur différentiel d'ordre 1, alors*

$$v \wedge (D\frac{v}{\psi})^l = \frac{v \wedge (Dv)^l}{\psi^l}$$

On désigne par $f^s_\nu = f^s_\nu(\zeta,z,\lambda)$ une forme différentielle ne dépendant pas de g, de classe $\mathcal{C}^s$ sur $\overline{D_0} \times \overline{D} \times \Delta^{\frac{1}{4}}_{0I}$, de classe $\mathcal{C}^s$ en ζ sur $\overline{D_0}$, réelle analytique suivant z, de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (z,λ) sur $\overline{D} \times \Delta^{\frac{1}{4}}_{0I}$ pour tout ζ fixé, qui s'annule à l'ordre ν en $\zeta = z$.
On remarque que comme f^s_ν est réelle analytique suivant la variable z si D^j_z désigne un opérateur différentiel d'ordre j en z, $D^j_z f^s_\nu = f^s_{\nu-j}$
On remarque aussi que si $(\zeta,z,\lambda) \in U^2_{\overline{D}} \times \Delta^{\frac{1}{4}}_{0(1,\ldots,N+1)}$, alors

$$\mu(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda}) = \sum_{\nu=1}^{N+1} \overset{\circ}{\lambda}_\nu \mu_\nu(\zeta,z) + f^\infty_1(\zeta,z,\lambda)$$
$$\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda}) = \sum_{\nu=1}^{N+1} \overset{\circ}{\lambda}_\nu \varphi_\nu(\zeta,z) + f^\infty_2(\zeta,z,\lambda)$$

où $\mu_\nu(\zeta,z)=\mu(\zeta,z,\tau^\nu)$ et $\varphi_\nu(\zeta,z)=\varphi(\zeta,z,\tau^\nu)$ avec les notations du paragraphe 1.6.

En utilisant la Proposition 3.2 et les remarques précédentes, on peut écrire $\displaystyle\int_{R_I\times\Delta_{0I}}\bar\partial(g)\wedge D_{n,r-1}$, comme une combinaison linéaire de termes de la forme suivante (le lecteur pourra trouver les calculs détaillés dans [17]) :

$$J^+(\nu,J,a_0,a_1)=\int_{R_I\times\Delta_{0I}^{\frac14}}\mathcal{A}\frac{c(\zeta)\wedge\Theta_J(\zeta,z)\wedge f_\nu^{d-2}(\zeta,z,\lambda)}{|\zeta-z|^{2a_0}\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})^{a_1}}$$

où $(\nu,J,a_0,a_1)=(l-l'+1,J,\alpha_0,\alpha_1)$ ou $(l-l'+2,J,\alpha_0,\alpha_1+1)$ avec

$$|I|=l,\ J=(\nu_1,\dots,\nu_{l'})\subset I,\ |J|=l',$$

$$\Theta_J(\zeta,z)=\mu_{\nu_1}(\zeta,z)\wedge\cdots\wedge\mu_{\nu_{l'}}(\zeta,z),$$

$$\alpha_0\geq1,\ \alpha_1\geq|I|\geq1,\alpha_0+\alpha_1=n,$$

$c(\zeta)$ est un coefficient de $\bar\partial(g)$ et $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\lambda_0)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ en λ_0 sur $[0,1]$ qui s'annule à l'ordre ∞ pour $\lambda_0\geq\frac14$.

Soit D^p un opérateur différentiel en z d'ordre p. Si on applique D^p, à $J^+(\nu,J,a_0,a_1)$, on obtient une combinaison linéaire finie de termes de la forme suivante :

$$\int_{R_I\times\Delta_{0I}^{\frac14}}\mathcal{A}c(\zeta)\wedge D^{p_1}\left(\frac{1}{\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})^{a_1}}\right)\wedge D^{p_2}\left(\Theta_J(\zeta,z)\right)\wedge D^{p_3}\left(\frac{f_\nu^{d-2}(\zeta,z,\lambda)}{|\zeta-z|^{2a_0}}\right)$$

avec $p_1+p_2+p_3=p$.
Ce qui donne une combinaison linéaire finie d'intégrales de la forme :

$$\mathcal{J}^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)=\int_{R_I\times\Delta_{0I}^{\frac14}}\mathcal{A}\frac{c(\zeta)\wedge\Theta_L(\zeta,z)\wedge f_v^{d-2}(\zeta,z,\lambda)}{|\zeta-z|^{2b_0}\varphi(\zeta,z,\overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$

où

1. $L\subset J\subset I$, $|L|=m=max(l'-p_2,0)$, $L=(l_1,\dots,l_m)$.
2. $a_0\leq b_0\leq a_0+p_3$
   $a_1\leq b_1\leq a_1+p_1$
3. $2b_0-v\leq 2a_0+p_3-\nu$

Remarque. Si $p=0$, alors, on a $J^+(\nu,J,a_0,a_1)=\mathcal{J}^+(\nu,J,J,a_0,a_1)$

3.3.2 Une estimation auxiliaire.

Ce paragraphe reprend des résultats obtenus par C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer dans [9], ceux-ci vont permettre d'estimer l'intégration en λ afin de pouvoir ensuite utiliser des méthodes d'estimation employées par R.M. Range et Y.T. Siu dans [16], par J. Michel dans [13] ainsi que par J. Michel et A. Perotti dans [14].

Soient $h \geq 2$, un entier et $K = (k_1, \ldots, k_s) \in P'(h)$, on pose $d\lambda_K = d\lambda_{k_2} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{k_s}$. Soient de plus C_*, δ et ε des constantes positives, $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ des nombres complexes tels que

$$\text{Re } \varphi_j \geq \delta + \varepsilon \tag{3.5}$$

Si $i, j \in \{1, \ldots, h\}$ avec $i \neq j$, ∇^i_j représente la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial \lambda_j}$ en considérant λ_j dans le système de coordonnées $(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda}_i, \ldots, \lambda_h)$ sur $\Delta_{(1,\ldots,h)}$ et on note $\nabla^{i_1 \ldots i_t}_{j_1 \ldots j_t} = \nabla^{i_1}_{j_1} \ldots \nabla^{i_t}_{j_t}$ pour $t \geq 2$, et $1 \leq i_\nu, j_\nu \leq h$, avec $i_\nu \neq j_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, t)$.
Soient γ et Γ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Delta_{(1,\ldots,h)}$ telles que

$$|\gamma(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.6}$$

$$|\nabla^{i_1 \ldots i_t}_{j_1 \ldots j_t} \gamma(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.7}$$

$$|\Gamma(\lambda)| \leq C_* \tag{3.8}$$

$$|\nabla^{i_1 \ldots i_t}_{j_1 \ldots j_t} \Gamma(\lambda)| \leq C_* \tag{3.9}$$

pour tout $\lambda \in \Delta_{(1,\ldots,h)}$, $1 \leq t \leq h+2$, $1 \leq i_\nu, j_\nu \leq h$, avec $i_\nu \neq j_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, t)$.

Alors, on a le résultat suivant

Théorème 3.3 *Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $C_p = (3p)!2^{7p}$, alors*

1. *pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left| \int_{\Delta_{(1,\ldots,h)}} \frac{\Gamma(\lambda) d\lambda_{(1,\ldots,h)}}{\left(\sum_{j=1}^h \lambda_j \varphi_j + \gamma(\lambda)\right)^p} \right| \leq \frac{C_p C_*}{(\delta + \varepsilon)^p}$$

2. *pour tout $K \in P'(h)$ et tout $p \geq |K| + 1$*

$$\left| \int_{\Delta_{(1,\ldots,h)}} \frac{\Gamma(\lambda) d\lambda_{(1,\ldots,h)}}{\left(\sum_{j=1}^h \lambda_j \varphi_j + \gamma(\lambda)\right)^p} \right| \leq \frac{C_p C_*}{\prod_{j \in K} |\varphi_j| (\delta + \varepsilon)^{p-|K|}}$$

Démonstration : Il s'agit du Théorème 6.1 dans [9]. □

On donne maintenant la définition de la notion de famille de sommets admissibles correspondant à la Définition 7.3 dans [9] :

Définition 3.4 *Soit α la constante donnée par la Proposition 3.1. Une* famille de sommets admissibles *est une famille ordonnée $(\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ de points de $\Delta_{(1,\dots,N+1)}$ telle que*

(i) Il existe $K = (k_1, \dots, k_l) \in P'(N+1)$ tel que $\lambda^j \in \Delta_K$, pour $j = 1, \dots, l$.

(ii) $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^l$.

(iii) Pour tout $(\zeta, z, \tau) \in \mathbb{C}^n \times U_{\overline{D}} \times \Delta_{(1,\dots,l)}$ la fonction γ définie par

$$\gamma(\zeta, z, \tau) = \varphi(\zeta, z, \sum_{j=1}^{l} \tau_j \lambda^j) - \sum_{j=1}^{l} \tau_j \varphi(\zeta, z, \lambda^j)$$

vérifie les relations suivantes :

$$|\gamma(\zeta, z, \tau)| \leq \frac{\alpha}{8} |\zeta - z|^2 \tag{3.10}$$

$$|\nabla^{i_1 \dots i_t}_{j_1 \dots j_t} \gamma(\zeta, z, \tau)| \leq \frac{\alpha}{8} |\zeta - z|^2 \tag{3.11}$$

pour tout $1 \leq t \leq l+2$, $1 \leq i_\nu, j_\nu \leq l$, avec $i_\nu \neq j_\nu$ $(\nu = 1, \dots, t)$.

Si $(\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ est une famille de sommets admissibles, alors, on note

$$\Delta(\lambda^1, \dots, \lambda^l) = \{ \sum_{j=1}^{l} \tau_j \lambda^j, \tau \in \Delta(1, \dots, l) \}$$

On dit alors qu'un simplexe Δ est *admissible* s'il existe une famille de sommets admissibles, $(\lambda^1, \dots, \lambda^l)$, telle que $\Delta = \Delta(\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ et on peut énoncer le lemme suivant, dont on trouve aussi la démonstration dans [9] :

Lemme 3.5 *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $K = (k_1, \dots, k_l) \in P'(N+1)$ et $\lambda^1, \dots, \lambda^l \in \Delta_K$ sont des vecteurs linéairement indépendants avec*

$$|\lambda^i - \lambda^j| < \varepsilon, \ (1 \leq i, j \leq l)$$

alors $(\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ est une famille de sommets admissibles.

3.3.3 Pseudocoordonnées.

Dans ce paragraphe, nous construisons des pseudocoordonnées analogues à celles de J. Michel (voir par exemple [13]), qui nous permettront d'intégrer dans de bonnes directions pour obtenir les estimations cherchées.
Soient $z \in D$, $\zeta_0 \in R_I$ et soient $\lambda^1, \dots, \lambda^l \in \Delta_I$, des vecteurs linéairement indépendants (comme vecteurs de $\mathbb{R}^l$).
L'indépendance des vecteurs $\lambda^1, \dots, \lambda^l$ permet d'affirmer qu'il existe un voisinage $U(\zeta_0)$ de ζ_0 et un système de coordonnées de classe $\mathcal{C}^{d-1}$ sur $U(\zeta_0)$:

$$\begin{aligned} x(\zeta) &= (x_1, \dots, x_{2n}) \\ &= (x_1, \dots, x_{2n-l}, \rho_{\lambda^1}(\zeta) - \rho_{\lambda^1}(z), \rho_{\lambda^2}(\zeta) - \rho_{\lambda^1}(z), \dots, \rho_{\lambda^l}(\zeta) - \rho_{\lambda^1}(z)) \end{aligned}$$

On pose $y = x(z) = (0, \dots, 0, 0, \rho_{\lambda^2}(z) - \rho_{\lambda^1}(z), \dots, \rho_{\lambda^l}(z) - \rho_{\lambda^1}(z))$, $x' = (x_1, \dots, x_{2n-l}),\ t(\zeta) = \rho_{\lambda^1}(\zeta)$ et $x'' = (x_{2n-l+2}, \dots, x_{2n})$.

On pose de plus, pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, et pour $(\zeta, z) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^n$

$$u_j(\zeta, z) = \operatorname{Im}\, \varphi(\zeta, z, \lambda^j)$$

Notons $\mathcal{E}^s_\nu(\zeta, z)$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^s$ définie sur $(U_{\overline{D}} \setminus D) \times \overline{D}$ indépendante de g et qui s'annule à l'ordre ν en $\zeta = z$ et $\mathcal{E}^s_\nu(\zeta, z, \lambda)$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^s$ définie sur $(U_{\overline{D}} \setminus D) \times \overline{D} \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$ indépendante de g et qui s'annule à l'ordre ν en $\zeta = z$.
Pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, on effectue le développement de Taylor de u_j à l'ordre 2, centré en z, il vient

$$u_j(\zeta, z) = \sum_{\nu=1}^{2n} d_{j,\nu}(y)(x_\nu - y_\nu) + \sum_{\nu,\mu=1}^{2n} d'_{j,\nu,\mu}(y)(x_\nu - y_\nu)(x_\mu - y_\mu) + \mathcal{E}_2^{d-1}(\zeta, z)$$

On pose $q_j(x, y) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{2n} d_{j,\nu}(y)(x_\nu - y_\nu) + \sum_{\substack{\nu,\mu=1 \\ \nu,\mu \neq 2n-l+1}}^{2n} d'_{j,\nu,\mu}(y)(x_\nu - y_\nu)(x_\mu - y_\mu)$

On a donc $u_j(\zeta) = q_j(x, y) + \mathcal{E}_2^{d-1}(\zeta, z)$ et ainsi

$$d_\zeta u_j(\zeta) = d_x q_j(x, y) + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta, z) \tag{3.12}$$

On a par ailleurs

$$d_\zeta u_j(\zeta) = \frac{1}{2i}\left(d_\zeta \varphi(\zeta, z, \lambda^j) - d_\zeta \overline{\varphi(\zeta, z, \lambda^j)}\right)$$

Or

$$\varphi(\zeta, z, \lambda^j) = < w(\zeta, z, \lambda^j), \zeta - z >$$

donc, par définition de w et comme les ρ_i sont réels, on a

$$\begin{cases} d_\zeta \varphi(\zeta, z, \lambda^j) = 2\partial_\zeta \rho_{\lambda^j}(\zeta) + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta, z) \\ d_\zeta \overline{\varphi(\zeta, z, \lambda^j)} = 2\overline{\partial}_\zeta \rho_{\lambda^j}(\zeta) + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta, z) \\ \qquad\qquad\qquad = 2 d_\zeta \rho_{\lambda^j}(\zeta) - 2\partial_\zeta \rho_{\lambda^j}(\zeta) + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta, z) \end{cases} \tag{3.13}$$

D'où, $d_\zeta u_j(\zeta) = \dfrac{1}{2i}\left(4\partial_\zeta \rho_{\lambda^j}(\zeta) - 2 d_\zeta \rho_{\lambda^j}(\zeta) + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta, z)\right)$
De plus

$$\mu(\zeta, z, \lambda^j) = 2\partial_\zeta \rho_{\lambda^j}(\zeta) + \mathcal{E}_1^{\infty}(\zeta, z) \tag{3.14}$$

et sur R_I, $d_\zeta \rho_{\lambda^j}(\zeta) = d_\zeta \rho_{\lambda^1}(\zeta) = dt$, on a

$$\mu(\zeta, z, \lambda^j) = i d_\zeta u_j(\zeta) + dt + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta, z)$$

Et en utilisant l'équation (3.12), on obtient, sur $R_I \cap U(\zeta_0)$

$$\mu(\zeta, z, \lambda^j) = i d_x q_j(x) + dt + \mathcal{E}_1^{d-2}(\zeta, z) \tag{3.15}$$

Proposition 3.6 *Si $L \subset I$, $L = (l_1, \dots, l_m)$,
pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in (R_I \cap U(\zeta_0)) \times D \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$, on a*

$$\Theta_L(\zeta, z) \wedge f_v^{d-2}(\zeta, z, \lambda) = \mathcal{E}_v^{d-2}(\zeta, z, \lambda) \wedge d_x q_{l_1} \wedge \cdots \wedge d_x q_{l_m} \wedge dt + \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_s)\subset(l_1,\dots,l_m) \\ s<m}} \mathcal{E}_{v+m-s-1}^{d-2} \wedge d_x q_{m_1} \wedge \cdots \wedge d_x q_{m_s} \wedge dt$$

Démonstration : Soit $(\zeta, z, \lambda) \in U(\zeta_0) \times D \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}$.
Avec les notations du paragraphe 1.6, on a

$$\Theta_L(\zeta, z) = \mu_{l_1}(\zeta, z) \wedge \cdots \wedge \mu_{l_m}(\zeta, z) = \mu(\zeta, z, \tau^{l_1}) \wedge \dots, \wedge \mu(\zeta, z, \tau^{l_m})$$

Comme $(\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^l$, et que $(\tau^{l_1}, \dots, \tau^{l_m})$ peut être vue comme une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^l$, pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, il existe $c_1^j, \dots, c_l^j$ tels que $\tau^{l_j} = \sum_{k=1}^{l} c_k^j \lambda^k$ et donc pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$,

$$\partial_\zeta \rho_{\tau^{l_j}} = \sum_{k=1}^{l} c_k^j \partial_\zeta \rho_{\lambda^k}$$

Ce qui permet d'écrire, grâce à (3.14) :

$$\Theta_L(\zeta, z) \wedge f_v^{d-2}(\zeta, z, \lambda) = \sum_{(s_1,\dots,s_p)\subset(l_1,\dots,l_m)} \mathcal{E}_{v+m-p}^{d-2}(\zeta, z, \lambda) \wedge \mu(\zeta, z, \lambda^{s_1}) \wedge \cdots \wedge \mu(\zeta, z, \lambda^{s_p})$$

Un raisonnement analogue à celui effectué dans [13] en utilisant (3.15) permet alors de conclure. □

3.3.4 Intégration en fonction de λ.

On peut supposer sans perdre de généralité que $I = (1, \dots, l)$.
Rappelons que

$$\mathcal{J}^+(v, J, L, b_0, b_1)(z) = \int_{R_I \times \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \Theta_L(\zeta, z) \wedge f_v^{d-2}(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2b_0} \varphi(\zeta, z, \mathring{\lambda})^{b_1}}$$

Si $\lambda^1, \dots, \lambda^l$ est une famille de sommets admissible, on pose

$$\widetilde{\Delta} = \left\{ \lambda \in \Delta_{0I}^{\frac{1}{4}} \middle| \mathring{\lambda} \in \Delta(\lambda^1, \dots, \lambda^l) \right\}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{J}}^+(v, J, L, b_0, b_1)(z) = \int_{R_I \times \widetilde{\Delta}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \Theta_L(\zeta, z) \wedge f_v^{d-2}(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2b_0} \varphi(\zeta, z, \mathring{\lambda})^{b_1}}$$

D'après le Lemme 3.5, on peut diviser Δ_I en un nombre fini de simplexes admissibles. Donc il suffit de prouver les estimations pour $\widetilde{\mathcal{J}}^+$.

Soit $\lambda^1, \ldots, \lambda^l$ une famille de sommets admissibles fixée. Comme dans [14], on recouvre maintenant R_I par un ensemble fini de voisinages $U(\zeta_0)$ sur lequel on peut définir des pseudocoordonnées. La Proposition 3.6 et le raisonnement sur les pseudocoordonnées montrent que $\widetilde{\mathcal{J}}^+(v, J, L, b_0, b_1)$ est une combinaison linéaire d'intégrales de formes suivantes :

$$A^+(v, J, L, b_0, b_1)(z) = \int_{(R_I \cap U(\zeta_0)) \times \widetilde{\Delta}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \mathcal{E}_v^{d-2}(\zeta, z, \lambda) \wedge d_x q_{l_1} \wedge \cdots \wedge d_x q_{l_m} \wedge dt \wedge d\lambda_{0I}}{|\zeta - z|^{2b_0} \varphi(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$

$$B^+(v, J, L, M, b_0, b_1)(z) = \int_{(R_I \cap U(\zeta_0)) \times \widetilde{\Delta}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \mathcal{E}_{v+m-s-1}^{d-2}(\zeta, z, \lambda) \wedge d_x q_{m_1} \wedge \cdots \wedge d_x q_{m_s} \wedge dt \wedge d\lambda_{0I}}{|\zeta - z|^{2b_0} \varphi(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$

où

1. $d\lambda_{0I} = d\lambda_0 \wedge d\lambda_2 \wedge \cdots \wedge d\lambda_l$
2. $\mathcal{E}_{\ldots}^{d-2}(\zeta, z, \lambda)$ a les propriétés définies dans le paragraphe 3.3.3 et $c(\zeta)$ provient de $\bar{\partial} g$.
3. $M \subset L \subset J \subset I$, $|J| = l'$, $|L| = m = max(l' - p_2, 0)$, $L = (l_1, \ldots, l_m)$, $M = (m_1, \ldots, m_s)$ et $s < m$.
4. $a_0 \leq b_0 \leq a_0 + p_3$
   $a_1 \leq b_1 \leq a_1 + p_1$
5. $2b_0 - v \leq 2a_0 + p_3 - \nu$

et ce pour $(\nu = l - l' + 1, a_0 = \alpha_0, a_1 = \alpha_1)$
et $(\nu = l - l' + 2, a_0 = \alpha_0, a_1 = \alpha_1 + 1)$,
avec $\alpha_0 \geq 1$, $\alpha_1 \geq |I|$ et $\alpha_0 + \alpha_1 = n$.

On peut supposer sans perdre de généralité que $J = (1, \ldots, l')$, $L = (1, \ldots, m)$ et $M = (1, \ldots, s)$, pour $s < m$.
Sur $R_I \cap U(\zeta_0)$, on choisit comme coordonnées $t, q_1, \ldots, q_m, \sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{2n-l}$ (resp. $t, q_1, \ldots, q_s, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{2n-l}$) et on note $\sigma^2 = \sigma_{m+1}^2 + \cdots + \sigma_{2n-l}^2$ (resp. $\sigma^2 = \sigma_{s+1}^2 + \cdots + \sigma_{2n-l}^2$). Alors

$$A^+(v, J, L, b_0, b_1)(z) = \int_{(R_I \cap U(\zeta_0)) \times \widetilde{\Delta}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \mathcal{E}_v^{d-2} \wedge dq_{1\ldots m} \wedge dt \wedge d\sigma_{m+1\ldots 2n-l} \wedge d\lambda_{0I}}{|\zeta - z|^{2b_0} \varphi(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$

$$B^+(v, J, L, M, b_0, b_1)(z) = \int_{(R_I \cap U(\zeta_0)) \times \widetilde{\Delta}} \mathcal{A} \frac{c(\zeta) \wedge \mathcal{E}_{v+m-s-1}^{d-2} \wedge dq_{1\ldots s} \wedge dt \wedge d\sigma_{s+1\ldots 2n-l} \wedge d\lambda_{0I}}{|\zeta - z|^{2b_0} \varphi(\zeta, z, \overset{\circ}{\lambda})^{b_1}}$$

où on a repris les notations précédentes et posé pour $j \in \{1, \ldots, 2n-l\}$: $d\sigma_{j\ldots 2n-l} = d\sigma_j \wedge \cdots \wedge d\sigma_{2n-l}$, $dq_{1\ldots j} = dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_j$

On procède alors comme dans [9] pour majorer l'intégration en λ. Considérons

$$\begin{aligned} \psi : [0, \tfrac{1}{4}] \times \Delta_I &\longrightarrow \widetilde{\Delta} \\ (\tau, \vartheta) &\longmapsto \Big(\tau, (1-\tau)\textstyle\sum_{j=1}^{l} \vartheta_j \lambda_1^j, \ldots, (1-\tau)\sum_{j=1}^{l} \vartheta_j \lambda_l^j\Big) \end{aligned}$$

ψ est un difféomorphisme, notons $a(\tau)$, la fonction telle que

$$(1-\tau)^{l-1} d\tau \wedge \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_2^j d\vartheta_j\right) \wedge \ldots, \wedge \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_l^j d\vartheta_j\right) = a(\tau) d\tau \wedge d\vartheta_{1\ldots l}$$

avec $d\vartheta_{1\ldots l} = d\vartheta_2 \wedge \cdots \wedge d\vartheta_l$.
Posons, pour $(\zeta, z, \tau, \vartheta) \in R_I \times D \times [0, \frac{1}{4}] \times \Delta_I$

$$\begin{aligned} \Gamma_v(\zeta, z, \tau, \vartheta) &= a(\tau) \mathcal{A} \mathcal{E}_v^{d-2}(\zeta, z, \psi(\tau, \vartheta)), \\ \Gamma'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, \vartheta) &= a(\tau) \mathcal{A} \mathcal{E}_{v+m-s-1}^{d-2}(\zeta, z, \psi(\tau, \vartheta)), \\ \gamma(\zeta, z, \vartheta) &= \varphi(\zeta, z, \sum_{j=1}^{l} \vartheta_j \lambda^j) - \sum_{j=1}^{l} \vartheta_j \varphi(\zeta, z, \lambda^j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Omega_v(\zeta, z, \tau, b_1) &= \int_{\vartheta \in \Delta_I} \frac{\Gamma_v(\zeta, z, \tau, \vartheta) d\vartheta_{1\ldots l}}{\left(\sum_{j=1}^{l} \vartheta_j \varphi(\zeta, z, \lambda^j) + \gamma(\zeta, z, \vartheta)\right)^{b_1}} \\ \Omega'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, b_1) &= \int_{\vartheta \in \Delta_I} \frac{\Gamma'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, \vartheta) d\vartheta_{1\ldots l}}{\left(\sum_{j=1}^{l} \vartheta_j \varphi(\zeta, z, \lambda^j) + \gamma(\zeta, z, \vartheta)\right)^{b_1}} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} &|\, A^+ (v, J, L, b_0, b_1)(z)| \leq \qquad (3.16) \\ &\int_{R_I \cap U(\zeta_0)} \max_{0 \leq \tau \leq \frac{1}{4}} |\Omega_v(\zeta, z, \tau, b_1)| \frac{|c(\zeta)||dq_{1\ldots m} \wedge dt \wedge d\sigma_{m+1\ldots 2n-l}|}{|\zeta - z|^{2b_0}} \\ &|\, B^+ (v, J, L, M, b_0, b_1)(z)| \leq \qquad (3.17) \\ &\int_{R_I \cap U(\zeta_0)} \max_{0 \leq \tau \leq \frac{1}{4}} |\Omega'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, b_1)| \frac{|c(\zeta)||dq_{1\ldots s} \wedge dt \wedge d\sigma_{s+1\ldots 2n-l}|}{|\zeta - z|^{2b_0}} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant vérifier que l'on peut utiliser le Théorème 3.3 pour majorer Ω_v (resp. pour $\Omega'_{v+m-s-1}$). Soit $(\zeta, z, \tau) \in U(\zeta_0) \times D \times [0, \frac{1}{4}]$. Posons $\gamma(\vartheta) = \gamma(\zeta, z, \vartheta)$ et $\Gamma(\vartheta) = \Gamma'_v(\zeta, z, \tau, \vartheta)$, (resp. $\Gamma(\vartheta) = \Gamma'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, \vartheta)$). D'après les définitions de a et $\mathcal{A}$, les propriétés de $\mathcal{E}_v^{d-2}$ (resp. $\mathcal{E}_{v+m-s-1}^{d-2}$), et en utilisant le fait que $(\lambda^1, \ldots, \lambda^l)$ est une famille de sommets admissibles,

on vérifie facilement que γ et Γ satisfont les hypothèses du Théorème 3.3 avec $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2$ et $C_* = C|\zeta - z|^v$ (resp. $C_* = C|\zeta - z|^{v+m-s-1}$) où C est une constante positive indépendante de (ζ, z, τ).
Par ailleurs, pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, on a

$$\text{Re } \varphi(\zeta, z, \lambda^j) \geq \rho_{\lambda^j}(\zeta) - \rho_{\lambda^j}(z) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2$$

Or, il existe une constante $C' > 0$ telle que si on note $\delta(z) = d(z, \partial D)$, alors pour tout $z \in D$, on a

$$-\rho_{\lambda^j}(z) \geq C'\delta(z) \tag{3.18}$$

de plus, si $\zeta \in R_I$, $\rho_{\lambda^j}(t) = t(\zeta)$. Ainsi

$$\text{Re } \varphi(\zeta, z, \lambda^j) \geq C'(\delta(z) + t(\zeta)) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 \tag{3.19}$$

Alors, en posant $\delta = C'(\delta(z) + t(\zeta))$, $\varphi_j = \varphi(\zeta, z, \lambda^j)$, $C_{b_1} = (3b_1)!2^{7b_1}$, on peut appliquer le Théorème 3.3 pour Ω_v et $\Omega'_{v+m-s-1}$, on obtient pour tout $K \subset I$, tel que $|K| \leq b_1 - 1$

$$|\Omega_v(\zeta, z, \tau, b_1)| \leq \frac{C_{b_1} C_1 |\zeta - z|^v}{\prod_{j \in K} |\varphi(\zeta, z, \lambda^j)| (c(\delta(z) + t(\zeta)) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2)^{b_1 - |K|}} \tag{3.20}$$

$$|\Omega'_{v+m-s-1}(\zeta, z, \tau, b_1)| \leq \frac{C_{b_1} C_1 |\zeta - z|^{v+m-s-1}}{\prod_{j \in K} |\varphi(\zeta, z, \lambda^j)| (c(\delta(z) + t(\zeta)) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2)^{b_1 - |K|}} \tag{3.21}$$

3.3.5 Quelques relations supplémentaires.

Nous allons citer dans ce paragraphe quelques inéquations utiles pour obtenir les estimations. Le lecteur pourra trouver la démonstration de (3.22) dans [14], par exemple.

1. Si $g \in \mathcal{C}^k_{0,r}(\overline{D_0})$, $k > 0$, avec $\bar\partial g = 0$ sur D, il existe une constante $C > 0$, indépendante de g telle que pour tout $\zeta \in R_I$

$$|c(\zeta)| \leq C\|g\|_{k,D_0} t(\zeta)^{k-1} \tag{3.22}$$

2. D'après les relations (3.18) et (3.19), il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(\zeta, z) \in (R_I \cap U(\zeta_0)) \times D$ et pour tout $j \in I$,

$$|\varphi(\zeta, z, \lambda^j)| \geq C(|q_j| + t(\zeta) + \delta(z) + |\zeta - z|^2) \tag{3.23}$$

$$|\zeta - z| \geq C(|q_1| + \cdots + |q_l| + t(\zeta) + \delta(z) + |x'|) \tag{3.24}$$

3. $l' - m = \min(p_2, l')$

Pour toute la suite, C désigne une constante positive indépendante de g.

3.3.6 Estimations lorsque $g \in \mathcal{C}^k_{0,r}(\overline{D_0})$, $k > 0$.

Supposons que $g \in \mathcal{C}^k_{0,r}(\overline{D_0})$, $k > 0$ et que $\bar\partial g = 0$ sur D. Notons $T = (\nu, a_0, a_1)$, on rappelle qu'il suffit de considérer les cas où
$T = (l - l' + 1, \alpha_0, \alpha_1)$ et $T = (l - l' + 2, \alpha_0, \alpha_1 + 1)$ avec $\alpha_0 \geq 1$, $\alpha_1 \geq |I| \geq 1$ et $\alpha_0 + \alpha_1 = n$.
D'après le Lemme 4 dans [7] (voir aussi [16]) et la définition des normes höldériennes (cf paragraphe 1.11), il suffit d'étudier le cas où $p = k-1$ en obtenant des majorations de $\widetilde{\mathcal{J}}^+$ par $C_\alpha \|g\|_{k,D_0}$ et d'étudier le cas $p = k$ en obtenant des majorations du type : $|\widetilde{\mathcal{J}}^+(v, J, L, b_0, b_1)(z)| \leq C_\alpha \|g\|_{k,D_0} \delta(z)^{-\alpha}$ avec $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

Remarque. Ici, $\alpha = 1 - \delta_0$ où δ_0 est défini dans le Théorème 0.2. Par ailleurs, comme $\overline{D}$ est compact, si $\alpha \geq \varepsilon \geq 0$, il existe $C_\alpha > 0$ telle que pour tout $z \in D$, $\delta(z)^{-\varepsilon} \leq C_\alpha \delta(z)^{-\alpha}$.

3.3.6.1 – L'intégrale $A^+(v, J, L, b_0, b_1)$.
(α) Si $b_1 = |I| = l = m$, dans ce cas, on a $a_1 = \alpha_1 = l$ et $J = L = I$, et donc, $\nu = 1$, on peut utiliser l'équation (3.20), avec $K = (1, \ldots, l-1)$, alors, pour tout $z \in D$,

$$\left|A^+(v, I, I, b_0, l)(z)\right| \leq C \int_{R_I \cap U(\zeta_0)} \frac{|\zeta - z|^v |c(\zeta)| |dq_{1\ldots l} \wedge dt \wedge d\sigma_{l+1\ldots 2n-l}|}{\prod_{j=1}^{l-1} |\varphi(\zeta, z, \lambda^j)| (\delta(z) + t + |\zeta - z|^2) |\zeta - z|^{2b_0}}$$

avec

1. $\alpha_0 \leq b_0 \leq \alpha_0 + p_3$
2. $2b_0 - v \leq 2\alpha_0 + p_3 - 1$

Alors, d'après les relations (3.22) et (3.23), en effectuant de plus un passage en coordonnées polaires en fonction des coordonnées $\sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_{2n-l}$, on obtient

$$\begin{aligned} &| \; A^+ \; (v, I, I, b_0, l)(z)| \\ &\leq \; C \|g\|_{k,D_0} \int_{t, q_i, \sigma} \frac{t^{k-1} \sigma^{2n-2l-1} |dq_{1\ldots l} \wedge dt \wedge d\sigma|}{\prod_{j=1}^{l-1} (|q_j| + t + \delta(z) + |\zeta - z|^2)(\delta(z) + t + |\zeta - z|^2) |\zeta - z|^{2b_0 - v}} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $2b_0 - v \leq 2\alpha_0 + p_3 - 1$ et en intégrant par rapport aux variables $q_1, \ldots, q_l$, on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit,

$$\left|A^+(v, I, I, b_0, l)(z)\right| \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} \sigma^{2n-2l-1} dt d\sigma}{(\delta(z) + t + |\zeta - z|^2)^{1+\varepsilon} |\zeta - z|^{p_3 + 2\alpha_0 - 1}}$$

or $\alpha_0 = n - \alpha_1 = n - l$ d'où

$$\left|A^+(v, I, I, b_0, l)(z)\right| \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} dt d\sigma}{(\delta(z) + t + \sigma^2)^{1+\varepsilon} |\zeta - z|^{p_3}}$$

et d'après l'inégalité (3.24),

$$\left|A^+(v,I,I,b_0,l)(z)\right| \leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1} dt d\sigma}{(\delta(z)+t+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(t+\delta(z)+\sigma)^{p_3}}$$

Comme $|L| = \max(|J|-p_2, 0)$, on a $p_2 = 0$ et donc $p = p_1 + p_3$, avec $p = k-1$ ou k.
- Si $p = k-1$,

$$\begin{aligned}\left|A^+(v,I,I,b_0,l)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{p_1+p_3}|dt\wedge d\sigma|}{(\delta(z)+t+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(t+\delta(z)+\sigma)^{p_3}} \\ &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dt d\sigma}{(\delta(z)+t+\sigma^2)^{1+\varepsilon}} \\ &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}\end{aligned}$$

- Si $p = k$,

1. si $p_3 > 0$

$$\begin{aligned}\left|A^+(v,I,I,b_0,l)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{p_3-1}|dt\wedge d\sigma|}{(\delta(z)+t+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(t+\delta(z)+\sigma)^{p_3-1+1}} \\ &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dt d\sigma}{(\delta(z)+t+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(t+\delta(z)+\sigma)} \\ &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \delta^{-2\varepsilon}\end{aligned}$$

2. si $p_3 = 0$, alors $p_1 - 1 = k-1 \geq 0$ et

$$\begin{aligned}\left|A^+(v,I,I,b_0,l)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dt d\sigma}{(\delta(z)+t+\sigma^2)^{1+\varepsilon}} \\ &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}\end{aligned}$$

(β) Si $b_1 > |I|$, alors, on peut utiliser l'équation (3.20) pour $K = L$, et il vient

$$\left|A^+(v,J,L,b_0,l)(z)\right| \leq C \int_{R_I\cap U(\zeta_0)} \frac{|\zeta - z|^v |c(\zeta)||dq_{1\ldots m}\wedge dt\wedge d\sigma_{m+1\ldots 2n-l}|}{\prod_{j=1}^m |\varphi(\zeta,z,\lambda^j)|(\delta(z)+t+|\zeta-z|^2)^{b_1-m}|\zeta-z|^{2b_0}}$$

où

1. $L \subset J \subset I$ avec $I = (1,\ldots,l)$, $J = (1,\ldots,l')$, $L = (1,\ldots,m)$ et $m = \max(l'-p_2, 0)$
2. $a_0 \leq b_0 \leq a_0 + p_3$
3. $a_1 \leq b_1 \leq a_1 + p_1$
4. $2b_0 - v \leq 2a_0 + p_3 - \nu$

On raisonne alors comme dans le cas précédent, et on obtient pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit

$$\begin{aligned}
\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| &\le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}\sigma^{2n-l-m-1}|dt\wedge d\sigma|}{(\delta(z)+t+|\zeta-z|^2)^{b_1-m+\varepsilon}|\zeta-z|^{2b_0-v}} \\
&\le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}\sigma^{2n-l-m-1}dtd\sigma}{(\delta(z)+t+|\zeta-z|^2)^{p_1+\varepsilon+a_1-m}|\zeta-z|^{p_3+2a_0-\nu}} \\
&\le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}\sigma^{2n-l-m-1}dtd\sigma}{(\delta(z)+t+\sigma^2)^{p_1+\varepsilon}|\zeta-z|^{p_3+2(a_0+a_1)-2m-\nu}} \\
&\le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}dtd\sigma}{(\delta+t+\sigma^2)^{p_1+\varepsilon}(\delta+t+\sigma)^{p_3+2(a_0+a_1-n)-m+l+1-\nu}}
\end{aligned}$$

Posons $\Pi_1 = p_3+2(a_0+a_1-n)-m+l+1-\nu$.

$$\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| \le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}dtd\sigma}{(\delta+t+\sigma^2)^{p_1+\varepsilon}(\delta+t+\sigma)^{\Pi_1}}$$

Si $T=(l-l'+1,\alpha_0,\alpha_1)$, $\Pi_1 = p_3+l'-m \le p_3+p_2$, alors

$$\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| \le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}dtd\sigma}{(\delta+t+\sigma^2)^{p_1+\varepsilon}(\delta+t+\sigma)^{p_3+p_2}}$$

et on trouve comme dans [14] que, si $p_1+p_2+p_3 = k-1$ ou k

$$\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| \le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}$$

Si $T=(l-l'+2,\alpha_0,\alpha_1+1)$, $\Pi_1 = p_3+l'-m+1 \le p_3+p_2+1$, alors

$$\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| \le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{t^{k-1}dtd\sigma}{(\delta+t+\sigma^2)^{p_1+\varepsilon}(\delta+t+\sigma)^{p_3+p_2+1}}$$

- Si $p_1+p_2+p_3 = k-1$,

$$\begin{aligned}
\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| &\le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dtd\sigma}{(\delta+t+\sigma^2)^{\varepsilon}(\delta+t+\sigma)} \\
&\le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}
\end{aligned}$$

- Si $p_1+p_2+p_3 = k$,

1. avec $p_2+p_3 \ge 1$, alors

$$\begin{aligned}
\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| &\le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0} \int_{t,\sigma} \frac{dtd\sigma}{(\delta+t+\sigma^2)^{\varepsilon}(\delta+t+\sigma)^2} \\
&\le C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}\delta^{-2\varepsilon}
\end{aligned}$$

2. avec $p_2+p_3=0$, alors $p_1-1=k-1\geq 0$ donc

$$\begin{aligned}\left|A^+(v,J,L,b_0,b_1)(z)\right| &\leq C_\varepsilon \|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{dtd\sigma}{(\delta+t+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(\delta+t+\sigma)}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\delta^{-2\varepsilon}\end{aligned}$$

3.3.6.2 – L'intégrale $B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)$.

Comme $|M|<|I|$, on a toujours $b_1\geq |M|+1$, on peut donc appliquer (3.21) pour $K=M$, et on a

$$|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)|\leq C\int_{R_I\cap U(\zeta_0)}\frac{|c(\zeta)||\zeta-z|^{v+m-s-1}|dq_{1\dots s}\wedge dt\wedge d\sigma_{s+1\dots 2n-l}|}{\prod_{j=1}^s|\varphi(\zeta,z,\lambda^j)|(\delta(z)+t|\zeta-z|^2)^{b_1-s}|\zeta-z|^{2b_0}}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, en intégrant par rapport aux variables $q_1,\dots,q_s$, en utilisant la relation (3.22) et en passant en coordonnées polaires par rapport à $\sigma_{s+1},\dots,\sigma_{2n-l}$, on a

$$\begin{aligned}&|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)|\\ &\quad\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{t^{k-1}|\zeta-z|^{v+m-s-1}\sigma^{2n-l-s-1}dtd\sigma}{(t+\delta+|\zeta-z|^2)^{b_1-s+\varepsilon}|\zeta-z|^{2b_0}}\\ &\quad\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{t^{k-1}\sigma^{2n-l-s-1}dtd\sigma}{(t+\delta+|\zeta-z|^2)^{p_1+1+\varepsilon+a_1-s-1}|\zeta-z|^{p_3+2a_0-\nu-m+s+1}}\\ &\quad\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{t^{k-1}\sigma^{2n-l-s-1}dtd\sigma}{(t+\delta+|\zeta-z|^2)^{p_1+1+\varepsilon}|\zeta-z|^{p_3+2(a_0+a_1-1)-\nu-m-s+1}}\\ &\quad\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{t^{k-1}\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+|\zeta-z|^2)^{p_1+1+\varepsilon}|\zeta-z|^{p_3+2(a_0+a_1-1-n)-\nu-m+l+3}}\end{aligned}$$

Notons $\Pi_2=p_3+2(a_0+a_1-1-n)-\nu-m+l+3$.
Alors,

$$\begin{aligned}&|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)|\\ &\quad\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{t^{k-1}\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+|\zeta-z|^2)^{p_1+1+\varepsilon}|\zeta-z|^{\Pi_2}}\end{aligned}$$

(α) Si $T=(l-l'+1,\alpha_0,\alpha_1)$, $\Pi_2=p_3+l'-m\leq p_3+p_2$, donc

$$\begin{aligned}&|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)|\\ &\quad\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{t^{k-1}\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{p_1+1+\varepsilon}(t+\delta+\sigma)^{p_3+p_2}}\end{aligned}$$

- Si $p_1+p_2+p_3=k-1$, on a

$$\begin{aligned}|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{1+\varepsilon}}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\end{aligned}$$

- Si $p_1+p_2+p_3=k$

1. avec $p_2+p_3\geq 1$, alors

$$\begin{aligned}|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(t+\delta+\sigma)}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{1+\varepsilon}}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\end{aligned}$$

2. avec $p_2+p_3=0$, alors

$$\begin{aligned}|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{2+\varepsilon}}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\delta^{-\varepsilon}\end{aligned}$$

(β) Si $T=(l-l'+2,\alpha_0,\alpha_1+1)$, $\Pi_2=p_3+l'-m+1\leq p_3+p_2+1$, donc

$$\begin{aligned}&|B^+(v,\ J\ ,L,M,b_0,b_1)(z)|\\ &\qquad\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{t^{k-1}\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{p_1+1+\varepsilon}(t+\delta+\sigma)^{p_3+p_2+1}}\end{aligned}$$

- Si $p_1+p_2+p_3=k-1$, on a

$$\begin{aligned}|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(t+\delta+\sigma)}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{1+\varepsilon}}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\end{aligned}$$

- Si $p_1+p_2+p_3=k$

1. avec $p_2+p_3\geq 1$, alors

$$\begin{aligned}|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(t+\delta+\sigma)^2}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{1+\varepsilon}(t+\delta+\sigma)}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\delta^{-2\varepsilon}\end{aligned}$$

2. avec $p_2+p_3=0$, alors

$$\begin{aligned}|B^+(v,J,L,M,b_0,b_1)(z)| &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{\sigma dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{2+\varepsilon}(t+\delta+\sigma)}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\int_{t,\sigma}\frac{dtd\sigma}{(t+\delta+\sigma^2)^{2+\varepsilon}}\\ &\leq C_\varepsilon\|g\|_{k,D_0}\delta^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 0.2.

4 Pour une configuration q-concave.

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 0.3. Le plan de la démonstration est analogue à celui du Théorème 0.2, les principales différences sont dues au fait que dans ce cas, ρ_{N+1} a des propriétés de convexité opposées à celles des applications $\rho_1, \dots, \rho_N$.
Soit $(U, \rho_1, \dots, \rho_N)$ une configuration q-concave de classe $\mathcal{C}^d$, avec $d \geq 3$. Soit $\xi \in E$. Pour $R > 0$, on note $\rho_{N+1}(z) = \rho_*(z) = |\xi - z|^2 - R^2$ et

$$D_R = \bigcap_{j=1}^{N} \{z \in U | \rho_i(z) < 0\} \cap B(\xi, R)$$

4.1 Construction d'une section de Leray

Le raisonnement effectué ci-dessous est classique, on peut le trouver par exemple dans [10]. Nous renvoyons donc le lecteur à cette référence pour plus de détails. Pour $R > 0$ on définit

$$\begin{aligned} w_*(\zeta, z) &= 2\left(\frac{\partial \rho_*(\zeta)}{\partial \zeta_1}, \dots, \frac{\partial \rho_*(\zeta)}{\partial \zeta_n}\right) \\ \Phi_*(\zeta, z) &= < w_*(\zeta, z), \zeta - z > \end{aligned}$$

Alors, comme w_* et Φ_* ne dépendent pas de R, on peut choisir $R_1 > 0$ tel qu'il existe $\widetilde{\gamma} > 0$ vérifiant pour tout $R \leq R_1$:

$$\forall (\zeta, z) \in B(\xi, R)^2, \quad \operatorname{Re} \Phi_*(\zeta, z) \geq \rho_*(\zeta) - \rho_*(z) + \widetilde{\gamma}|\zeta - z|^2 \qquad (4.1)$$

Proposition 4.1 *Si $(U, \rho_1, \dots, \rho_N)$ est une configuration q-concave de classe $\mathcal{C}^d$, avec $d \geq 3$ et si $\xi \in E$. Il existe $R_0 > 0$ que l'on peut choisir indépendemment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \dots, \rho_N$ tel que :*

1. *$R_0 \leq R_1$*
2. *pour tout $R < R_0$, D_R est une intersection de classe $\mathcal{C}^d$ sur $U_{\overline{D_R}} = B(\xi, R_0)$*
3. *il existe une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, $Q : \Delta_{(1,\dots,N)} \to MO(n, n-q-1)$ et des constantes α, $A > 0$ telles que*

   $$-\operatorname{Re} F_{\rho_\lambda}(\zeta, z) \geq \rho_\lambda(z) - \rho_\lambda(\zeta) + \alpha|\zeta - z|^2 - A|Q(\lambda)(\zeta - z)|^2$$

   pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Delta_{(1,\dots,N)}$, $\rho_\lambda := \lambda_1\rho_1 + \dots + \lambda_N\rho_N$ et $(\zeta, z) \in U^2_{\overline{D_R}}$.

Soit un tel R_0 et soit $R < R_0$. On note maintenant D à la place de D_R et $U_{\overline{D}} = B(\xi, R_0)$.

Comme $\rho_1, \ldots, \rho_N$ sont de classe $\mathcal{C}^3$, il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, $\left(a^1_{kj}\right)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le n}}, \ldots, \left(a^N_{kj}\right)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le n}}$ telles que, si on pose pour $\lambda \in \Delta_{(1,\ldots,N)}$, $a^\lambda_{kj} = \lambda_1 a^1_{kj} + \cdots + \lambda_N a^N_{kj}$ pour tout $1 \le j \le n$ et $1 \le k \le n$, on a

$$\left| a^\lambda_{kj}(\zeta) - \frac{\partial^2 \rho_\lambda(\zeta)}{\partial\zeta_j \partial\zeta_k} \right| \le \frac{\alpha}{2n^2}, \quad \forall \zeta \in U$$

Comme précédemment, on note $Q(\lambda)^{kj}$ les coefficients de la matrice $Q(\lambda) : Q(\lambda) = \left(Q(\lambda)^{kj}\right)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le n}}$ (k est l'indice de la colonne).
On pose alors , pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $(\zeta, z, \lambda) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^n \times \Delta_{(1,\ldots,N)}$:

$$v_j(\zeta, z, \lambda) = 2\frac{\partial \rho_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta_j} - \sum_{k=1}^n a^\lambda_{kj}(\zeta)(\zeta_k - z_k) - A \sum_{k=1}^n \overline{Q(\lambda)^{kj}(\zeta_k - z_k)}$$

De plus, on définit pour $z \in U_{\overline{D}},\ \zeta \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \Delta_{(1,\ldots,N)}$

$$\begin{cases} w_j(\zeta, z, \lambda) = v_j(z, \zeta, \lambda) \\ w(\zeta, z, \lambda) = (w_1(\zeta, z, \lambda), \ldots, w_n(\zeta, z, \lambda)) \\ \Phi(\zeta, z, \lambda) = < w(\zeta, z, \lambda), \zeta - z > \end{cases}$$

Alors w est une application $(q+1)$-holomorphe en $\zeta \in \mathbb{C}^n$, pour $(z, \lambda) \in U_{\overline{D}} \times \Delta_{(1,\ldots,N)}$ fixé.
De plus

$$\mathrm{Re}\, \Phi(\zeta, z, \lambda) \ge \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 \tag{4.2}$$

Avec les notations des paragraphes 1.5 et 1.7, posons lorsque cela est défini :

$$\begin{aligned} \omega(\zeta, z, \lambda) = {} & \chi(\lambda_0)\frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^2} + (1 - \chi(\lambda_0))(1 - \chi(\lambda_{N+1}))\frac{w(\zeta, z, \overset{\circ *}{\lambda})}{\Phi(\zeta, z, \overset{\circ *}{\lambda})} \\ & + (1 - \chi(\lambda_0))\chi(\lambda_{N+1})\frac{w_*(\zeta, z)}{\Phi_*(\zeta, z)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Alors ω est une section de Leray associée à D satisfaisant les propriétés demandées dans la Partie 2. On peut donner les formules d'homotopie suivantes :

Proposition 4.2 *Si f est une $(0, r)$-forme différentielle sur D, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar\partial f$ est continue sur $\overline{D}$, alors :*

1. *si $r = 0$, avec $q \ge N$,*

$$f(z) = \widetilde{T}_1(\bar\partial f)(z) + L^*_0 f(z)$$

2. *si $1 \le r \le q - N$,*

$$f(z) = \bar\partial \widetilde{T}_r f(z) + \widetilde{T}_{r+1}(\bar\partial f)(z) + L^*_r f(z)$$

3. si $r = q - N + 1 = 0$,

$$f(z) = \widetilde{T}_1(\bar\partial f)(z) + L_0^* f(z) + L_0^N f(z)$$

4. si $r = q - N + 1 \geq 1$,

$$f(z) = \bar\partial \widetilde{T}_r f(z) + \widetilde{T}_{r+1}(\bar\partial f)(z) + L_r^* f(z) + L_r^N f(z)$$

où si h est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar\partial h$ est continue sur $\overline{D}$, $\widetilde{T}_r h$ est donné par l'équation (2.2) et

$$L_r^*\, h\,(z) = \sum_{I \in P'(N)} \int_{S_{I*} \times \Delta_{I*}} h \wedge D_{n,r}$$

$$L_r^N\, h\,(z) = \int_{S_{(1,\ldots,N)} \times \Delta_{(1,\ldots,N)}} h \wedge D_{n,r}$$

Démonstration : D'après l'équation (2.2), il suffit de montrer que si f est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$, pour de bonnes valeurs de r, les intégrales

$$\int_{S_I \times \Delta_I} f \wedge D_{n,r}$$

sont nulles pour tout $I \in P'(N)$, sauf peut-être si $I = (1,\ldots,N)$. Ce qui est une conséquence directe de la dimension de S_I et du fait que si $I \in P'(N)$, ω est une application $(q+1)$-holomorphe en $\zeta \in \mathbb{C}^n$, pour $(z,\lambda) \in U_{\overline{D}} \times \Delta_I$. On peut trouver un raisonnement analogue dans [10]. $\square$

4.2 Les termes de bord.

4.2.1 – Si $r = q - N + 1$.
Soient $R_2 > 0$ et $\beta > 0$ avec $R_2^2 - \beta > 0$, assez petits pour que $(U, -\rho_1 - \beta, \ldots, -\rho_N - \beta)$ soit une configuration q-convexe et que $\cap_{i=1}^N \{z \in U| - \rho_i < \beta\} \cap B(\xi, R_2)$ soit une intersection de classe $\mathcal{C}^d$.
Quitte à diminuer R, on peut supposer que

$$\begin{cases} 1.\ \ B(\xi,R) \subset\subset \bigcap_{i=1}^N \{z \in U| - \rho_i(z) < \beta\} \cap B(\xi, R_2) \\ 2.\ \qquad R^2 \ < \ R_2^2 - \beta \end{cases}$$

On remarque ici que R_2 et donc R peuvent être choisis indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$.

Soit f une $(0,r)$-forme différentielle, continue sur $\overline{D}$ et telle que $\bar\partial f = 0$, supp $f \subset\subset \overline{G} \cap B(\xi, R)$, et f vérifie la condition (C1).

La condition de support imposée à f implique que $L_{q-N+1}^* f = 0$. Montrons maintenant, par une méthode similaire à celle de C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer dans [11], qu'il en est de même pour $L_{q-N+1}^N f$.

Définition 4.3 *Soit X une variété complexe de dimension n, on dit que X est une* extension q-convexe, $1 \leq q \leq n-1$, *de K où K est un fermé inclus dans X, s'il existe c, C, avec $-\infty < c < C \leq +\infty$ et une fonction $r : U \to (-\infty, C[$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs réelles telle que pour tout $\zeta \in U$, la forme de Levi de r au point ζ admette au moins $(q+1)$ valeurs propres strictement positives, où U est un voisinage de $\overline{X \setminus K}$, tels que :*

(i) $K \cap U = \{r \leq c\}$

(ii) $\{c \leq r \leq t\}$ *est compact pour tout* $t < C$.

Soit $\varepsilon > 0$, on construit une fonction θ_ε définie sur $\mathbb{R}$, convexe et $\mathcal{C}^\infty$ qui coincide avec la fonction valeur absolue sur $]-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty[$. On peut ainsi supposer que :

(i) $\theta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \geq \varepsilon$, $\theta_\varepsilon(t) = |t|$

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\theta''_\varepsilon(t) \geq 0$

(iv) $\forall t \in [-\varepsilon, 0]$, $-1 \leq \theta'_\varepsilon(t) \leq 0$

(v) $\forall t \in [0, \varepsilon]$, $0 \leq \theta'_\varepsilon(t) \leq 1$

Définition 4.4 *Soient h et g deux fonctions définies sur $U \subset\subset \mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^k$, à valeurs réelles, on définit le* maximum généralisé, de h et g, $m_\varepsilon(h,g)$ *de la manière suivante :*

$$\forall z \in U, \quad m_\varepsilon(h,g)(z) = \frac{1}{2}\left[h(z) + g(z) + \theta_\varepsilon(h(z) - g(z))\right]$$

On remarque que si h et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors $m_\varepsilon(h,g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$. De plus, un calcul direct donne la proposition suivante :

Proposition 4.5 *Si $k \geq 2$, et si on suppose que pour tout λ_1, $\lambda_2 \geq 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, la forme de Levi de $\lambda_1 h + \lambda_2 g$ admet au moins $q+1$ valeurs propres positives alors la forme de Levi de $m_\varepsilon(h,g)$ admet au moins $q+1$ valeurs propres positives.*

Considérons les applications $r_i = -\rho_i$, pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $r_{N+1}(z) = |\xi - z|^2 - R_2^2 + \beta$ (alors $B(\xi, R_2) = \{z \in U | r_{N+1}(z) < \beta\}$, et $B(\xi, R) \subset\subset \{z \in U | r_{N+1}(z) < 0\}$), on définit pour $z \in U$:

$$\begin{cases} \eta_1(z) = r_1(z) \\ \eta_k(z) = m_\varepsilon(\eta_{k-1}, r_k)(z) \quad \forall k \in \{2, \ldots, N+1\} \end{cases}$$

D'après les propriétés des applications $r_1, \ldots, r_{N+1}$ et la proposition précédente, pour tout $k \in \{1, \ldots, N+1\}$, la forme de Levi de η_k admet au moins $q+1$ valeurs propres strictement positives.
Si $0 < \beta' \leq \beta$, on note $F^\varepsilon_{\beta'} = \{z \in U | \eta_{N+1}(z) < \beta'\}$. Alors on peut choisir $\varepsilon > 0$ pour que les inclusions suivantes soient vraies :

$$B(\xi, R) \subset\subset F^\varepsilon_\beta \subset\subset U \tag{4.4}$$

Par ailleurs, pour tout $0 < \beta' < \beta$, F_β^ε est une extension q-convexe de $F_{\beta'}^\varepsilon$.

On va maintenant démontrer que $L_{q-N+1}^N f$ est nul en tout point $z \in D$. Soit $z \in D$ et soit $\beta' \in]0;\beta[$ assez petit tel que pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, $r_i(z) > 2\beta'$.
Soit $\mathcal{G}$ un voisinage de z tel que

$$\mathcal{G} \subset\subset D \cap \{\zeta \in U | \forall i \in \{1,\dots,N\}\ r_i(\zeta) > 2\beta'\}$$

Si ε est assez petit, comme $B(\xi,R) \subset\subset \{z \in U | r_{N+1}(z) < 0\}$, on a les inclusions suivantes :

$$S_{(1,\dots,N)} \subset\subset F_{\beta'}^\varepsilon \tag{4.5}$$
$$\mathcal{G} \subset U \setminus F_{\beta'}^\varepsilon \tag{4.6}$$

La partie de $D_{n,r}(\zeta,z,\lambda)$ qui intervient dans l'intégrale est de bidegré $(n, n-q-1)$ en ζ. Donc, comme ω est $(q+1)$-holomorphe en ζ pour tout $(z,\lambda) \in U_{\overline{D}} \times \Delta_{(1,\dots,N)}$, elle est $\bar\partial$-fermée en ζ sur $F_{\beta'}^\varepsilon$ et ce pour tout $(z,\lambda) \in \mathcal{G} \times \Delta_{(1,\dots,N)}$. De plus F_β^ε est une extension q-convexe de $F_{\beta'}^\varepsilon$, alors d'après le Théorème 12.11 dans [6], on peut trouver une suite $(g_p(z,\lambda))_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $Z_{n,n-q-1}^0(F_\beta^\varepsilon)$ qui converge uniformément vers $D_{n,r}(\cdot,z,\lambda)$ quand p tend vers $+\infty$. La convergence étant uniforme, on a

$$L_{q-N+1}^N f(z) = \lim_{p\to+\infty} \int_{(\zeta,\lambda)\in S_{(1,\dots,N)}\times\Delta_{(1,\dots,N)}} f(\zeta) \wedge g_p(z,\lambda)(\zeta) \tag{4.7}$$

Si $q = n-1$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \Delta_{(1,\dots,N)}$, $g_p(z,\lambda)$ est une $(n,0)$-forme $\bar\partial$-fermée dans F_β^ε donc sur $B(\xi,R)$, alors la condition (C1) implique que le terme de droite dans l'égalité (4.7) est nul et donc $L_{q-N+1}^N f = 0$.
Si $q \le n-2$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \Delta_{(1,\dots,N)}$, $g_p(z,\lambda) \in Z_{n,n-q-1}^0(F_\beta^\varepsilon)$, considérons leurs restrictions à $B(\xi,R)$, $B(\xi,R)$ étant pseudoconvexe, il existe $h_p(z,\lambda) \in \mathcal{C}_{n,n-q-2}^0(B(\xi,R))$ telle que $\bar\partial_\zeta h_p(z,\lambda) = g_p(z,\lambda)$. On utilise alors le théorème de Stokes :

$$\int_{S_{(1,\dots,N)}\times\Delta_{(1,\dots,N)}} f(\zeta) \wedge g_p(z,\lambda)(\zeta) \overset{Stokes}{=} \int_{\Delta_{(1,\dots,N)}} \int_{\partial S_{(1,\dots,N)}} f(\zeta) \wedge h_p(z,\lambda)(\zeta)$$

or $\partial S_{(1,\dots,N)} = S_{(1,\dots,N,*)}$ et f est nulle sur $S_{(1,\dots,N,*)}$, donc le terme de droite dans l'égalité (4.7) est nul.

4.2.2 – Si $r \le q-N$.
Soit f une $(0,r)$-forme différentielle sur D, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar\partial f$ est continue sur $\overline{D}$, on veut étudier

$$L_r^* f(z) = \sum_{I\in P'(N)} \int_{S_{I*}\times\Delta_{I*}} f(\zeta) \wedge D_{n,r}(\zeta,z,\lambda)$$

Lemme 4.6 *Il existe R_4 que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de $\rho_1, \ldots, \rho_N$ tel que si f est une $(0,r)$-forme différentielle sur D, avec $r \leq q-N$, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar\partial f$ est continue sur $\overline{D}$, alors $L_r^* f$ est de classe $\mathcal{C}^{d-2}$ sur $\overline{B(\xi, R_4)}$.*
De plus si $f \in \mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{D})$, $s \in \{0, \ldots, d-2\}$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de f telle que

$$\|L_r^* f\|_{s, B(\xi, R_4)} \leq C \|f\|_{s,D} \tag{4.8}$$

Démonstration : Soit $R' > 0$ tel que $R' < R$ et $B(\xi, R') \subset\subset U$.
Pour tout $I \in P(N, *)$, on a $S_I \subset S_*$ donc pour tout couple $(\zeta, z) \in S_I \times B(\xi, R')$,

$$|\zeta - z|^2 \geq (R - R')^2 \tag{4.9}$$

Les applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ étant continues et nulles au point ξ, et l'ensemble $\Delta_{(1,\ldots,N)}$ étant compact, il existe un réel $R_3 > 0$, que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de $\rho_1, \ldots, \rho_N$, tel que $R_3 < R$ et pour tout $J \in P'(N)$ et tout $(z, \lambda) \in B(\xi, R_3) \times \Delta_J$

$$\rho_\lambda(z) < \frac{\alpha}{4}(R - R')^2$$

Alors, d'après (4.2), pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in S_I \times B(\xi, R_3) \times \Delta_I$ tels que $\lambda_0 + \lambda_{N+1} \neq 1$, on a

$$\mathrm{Re}\ \Phi(\zeta, z, \overset{\circ *}{\lambda}) \geq -\rho_{\overset{\circ *}{\lambda}}(z) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 \geq \frac{\alpha}{4}(R - R')^2$$

De plus, $R_3 < R$ donc, d'après (4.1), pour tout $(\zeta, z) \in S_I \times B(\xi, R_3)$, on a

$$\mathrm{Re}\ \Phi_*(\zeta, z) \geq -\rho_*(z) + \widetilde{\gamma}|\zeta - z|^2 \geq \widetilde{\gamma}(R - R')^2$$

Ainsi, pour tout $I \in P'(N, *)$, les dénominateurs qui rentrent en compte dans le noyau $D_{n,r}$ sont non nuls et leurs parties réelles sont minorées par une constante strictement positive pour tout $(\zeta, z, \lambda) \in S_I \times B(\xi, R_3) \times \Delta_I$, de plus, $\omega(\zeta, z, \lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^{d-1}$ en z sur $B(\xi, R_3) \subset U$. Donc le noyau $D_{n,r}$ est de classe $\mathcal{C}^{d-2}$.
On peut alors utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale, pour montrer que, pour tout $I \in P'(N, *)$, $z \mapsto \int_{\zeta \in S_I \times \Delta_I} f(\zeta) \wedge D_{n,r}(\zeta, z, \lambda)$ est une application de classe $\mathcal{C}^{d-2}$ sur $B(\xi, R_3)$. Soit $R_4 < R_3$, alors, $L_r^* f$ est de classe $\mathcal{C}^{d-2}$ sur $\overline{B(\xi, R_4)}$. Donc R_4 convient.
Pour démontrer (4.8), il suffit de remarquer que chaque composante de $D_{n,r}$ est de classe $\mathcal{C}^s$ sur $\overline{B(\xi, R_4)}$. Ainsi, si l'on applique un opérateur différentiel d'ordre inférieur ou égal à s à $L_r^* f$, on a une combinaison linéaire finie de termes majorés à une constante près par la norme infinie de f, celle-ci étant inférieure à la norme $\mathcal{C}^s$, cela démontre l'inégalité cherchée. □

On utilise maintenant l'opérateur T défini par le Corollaire 1.12.2 dans [5], avec la section de Leray associée à $\mathcal{D} = B(\xi, R_4)$ (voir la Définition 2.1.2 et le Corollaire 2.1.4 dans [5]), on a alors :

$$\forall z \in B(\xi, R_4), \ L_r^* f(z) = \bar{\partial} T L_r^* f(z) + T \bar{\partial} L_r^* f(z) \tag{4.10}$$

De plus, d'après les propriétés du noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman et la construction de T (voir [5]) on a la proposition suivante :

Proposition 4.7 *Si $g \in \mathcal{C}_{0,r}^s(\overline{\mathcal{D}})$, si $\mathcal{D}' \subset\subset \mathcal{D}$, alors pour tout $0 < \delta_0 < 1$, il existe une constante C_{δ_0} indépendante de g telle que*

$$\|Tg\|_{s+\delta_0, \mathcal{D}'} \leq C_{\delta_0} \|g\|_{s, \mathcal{D}} \tag{4.11}$$

On choisit $R_5 < R_4$, et on pose $\mathcal{D}' = B(\xi, R_5)$. Alors, on peut établir la formule d'homotopie suivante :

Proposition 4.8 *Si f est une $(0,r)$-forme différentielle sur D, avec $r \leq q - N - 1$, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar{\partial} f$ est continue sur $\overline{D}$, alors pour tout $z \in \mathcal{D}'$, on a :*

- *si $r = 0$, $f(z) = \widetilde{T}_1(\bar{\partial} f)(z) + T L_1^*(\bar{\partial} f)(z) + \bar{\partial} T L_0^* f(z)$*
- *si $r \geq 1$, $f(z) = \widetilde{T}_{r+1}(\bar{\partial} f)(z) + T L_{r+1}^*(\bar{\partial} f)(z) + \bar{\partial} \widetilde{T}_r f(z) + \bar{\partial} T L_r^* f(z)$*

Démonstration : - Supposons que $r = 0$. Soit $z \in \mathcal{D}'$.
D'après la Proposition 4.2, comme $r \leq q - N$, on a :

$$f(z) = \widetilde{T}_1(\bar{\partial} f)(z) + L_0^* f(z)$$

En appliquant l'opérateur de Cauchy-Riemann à cette équation puis en appliquant la Proposition 4.2 à la fonction $\bar{\partial} f$ $(r + 1 \leq q - N)$, on obtient, en identifiant

$$\bar{\partial} L_0^* f(z) = L_1^*(\bar{\partial} f)(z)$$

Ainsi, l'équation (4.10) devient : $L_0^* f(z) = \bar{\partial} T L_0^* f(z) + T L_1^* \bar{\partial} f(z)$
Ce qui donne le résultat pour $r = 0$ en insérant cette équation dans celle de la Proposition 4.2.
- Si $r \geq 1$, le même raisonnement donne le résultat. □

Par ailleurs, on a :

Lemme 4.9 *Si f est une $(0,r)$-forme différentielle sur D, avec $r \leq q - N$, continue sur $\overline{D}$ et telle que $\bar{\partial} f = 0$, alors $\bar{\partial} L_r^* f = 0$ sur D.*

Démonstration : Il s'agit ici d'appliquer l'opérateur de Cauchy-Riemann aux équations données par la Proposition 4.2 et d'annuler $\bar{\partial} f$. □

On peut maintenant résumer les résultats de ce paragraphe dans la proposition suivante :

Proposition 4.10 *Supposons que $N \leq q$.*
Il existe $R_5 > 0$ que l'on peut choisir indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ de $\rho_1, \dots, \rho_N$ tel que si f est une $(0,r)$-forme différentielle sur D, avec $r \leq q - N$, continue sur $\overline{D}$ telle que $\bar{\partial} f = 0$ sur $\overline{D}$, alors on a :

- *si $r = 0$, c'est-à-dire que f est une fonction holomorphe sur D, continue sur $\overline{D}$, alors f se prolonge holomorphiquement à $B(\xi, R_5)$.*
- *si $r \geq 1$, pour tout $z \in D \cap B(\xi, R_5)$, on a*

$$f(z) = \bar{\partial} \widetilde{T}_r f(z) + \bar{\partial} T L_r^* f(z) \tag{4.12}$$

Si de plus $f \in \mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{D})$, $s \in \{0, \dots, d-2\}$, alors pour tout $0 < \delta_0 < 1$, il existe une constante C_{δ_0} indépendante de f telle que

$$\|T L_r^* f\|_{s+\delta_0, D \cap B(\xi, R_5)} \leq C_{\delta_0} \|f\|_{s,D} \tag{4.13}$$

Démonstration : Il reste à traiter le cas où $r = q - N$, qui est immédiat d'après la Proposition 4.2 et le lemme précédent. □

Il reste encore à modifier l'opérateur $\widetilde{T}_r$ de manière analogue au cas q-convexe pour obtenir les propriétés de régularité cherchées. Considérons $g \in \mathcal{C}^0_{0,r}(D_0)$, $r \geq 1$ avec supp g ⊂⊂ D$_0$, posons maintenant,

$$T'_r g = \widetilde{T}_r(g|_D) + \sum_{I \in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \bar{\partial} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} g \wedge D_{n,r-2} \tag{4.14}$$

avec $D_{n,-1} := 0$.
Il est clair que $T'_r g - \widetilde{T}_r(g)$ est $\bar{\partial}$-fermé.

Par ailleurs, la $(q+1)$-holomorphie de la section de Leray permet d'affirmer que si $r \leq q - N + 1$, on a :

$$\sum_{I \in P'(N+1)} \int_{R_I \times \Delta_I} Ef \wedge D_{n,r-1} = \sum_{I \in P'(N)} \int_{R_{I*} \times \Delta_{I*}} Ef \wedge D_{n,r-1} \tag{4.15}$$

Alors un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas q-convexe, permet d'affirmer que si $f \in C^1_{0,r}(\overline{D})$, on a

$$\begin{aligned} T'_r Ef = &- \int_{D_0 \times \Delta_0} Ef \wedge D_{n,r-1} + \sum_{I \in P'(N+1)} (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar{\partial}(Ef) \wedge D_{n,r-1} \\ &+ \sum_{I \in P'(N)} \int_{R_{I*} \times \Delta_{I*}} Ef \wedge D_{n,r-1} \end{aligned}$$

Alors, si f est une $(0,r)$-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ et telle que $\bar{\partial} f = 0$, et si on pose $T_r f = T'_r Ef$, avec $1 \leq r \leq q - N$ on obtient :

$$f(z) = \bar{\partial} T_r f(z) + \bar{\partial} T L_r^* f(z) \tag{4.16}$$

4.3 Estimations de $T_r f$.

Soit f une $(0,r)$ forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{D}$ et telle que $\bar{\partial} f = 0$, alors, pour tout $z \in D$

$$T_r f(z) = -\int_{D_0 \times \Delta_0} Ef(\zeta) \wedge D_{n,r-1}(\zeta, z, \lambda) + T_r^1 f(z) + T_r^2 f(z)$$

avec

$$\begin{aligned} T_r^1 f(z) &= \sum_{I \in P'(N)} (-1)^{|I|+1} \int_{R_{I*} \times \Delta_{0I*}} \bar{\partial}(Ef)(\zeta) \wedge D_{n,r-1}(\zeta, z, \lambda) \\ &\quad + \sum_{I \in P'(N)} \int_{R_{I*} \times \Delta_{I*}} Ef \wedge D_{n,r-1} \\ T_r^2 f(z) &= \sum_{I \in P'(N)} (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar{\partial}(Ef)(\zeta) \wedge D_{n,r-1}(\zeta, z, \lambda) \end{aligned}$$

L'estimation du premier terme est déjà connue car il s'agit du noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman. On remarque ensuite que dans le cas où $r = q - N + 1$, les conditions supplémentaires sur f annulent le terme $T_r^1 f$. Si $1 \leq r \leq q - N$, soit R_5 donné par la Proposition 4.10. Le même raisonnement que celui effectué pour démontrer le Lemme 4.6 permet d'affirmer que si $f \in \mathcal{C}^s_{0,r}(\overline{D})$, avec $s \in \{0, \ldots, d-3\}$ et si $0 < \delta_0 < 1$ alors il existe une constante C_{s,δ_0} indépendante de f telle que

$$\|T_r^1 f\|_{s+\delta_0, B(\xi, R_5) \cap D} \leq C_{s,\delta_0} \|f\|_{s,D}$$

L'estimation de $T_r^2 f$ s'effectue comme dans le cas q-convexe avec quelques nuances apportées par l'inversion des variables z et ζ dont on trouvera les détails dans [17]. Ce qui achève la démonstration du Théorème 0.3.

5 Résolution à support compact quand $r = q - N + 1$.

Soient $U, \rho_1, \ldots, \rho_N$ tels que $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ configuration q-concave de classe $\mathcal{C}^d$, $d \geq 3$ dans $\mathbb{C}^n$, avec les notations de la Définition 0.1.
Le fait que les réels R et R' donnés par le Théorème 0.3 puissent être choisis indépendamment de petites perturbations $\mathcal{C}^2$ des applications $\rho_1, \ldots, \rho_N$ peut s'énoncer de la façon suivante :

Proposition 5.1 *Soit $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ configuration q-concave de classe $\mathcal{C}^d$, $d \geq 3$ dans $\mathbb{C}^n$, soit $\xi \in E$. Il existe $\varepsilon > 0$, V voisinage de ξ, ainsi que $R_\xi > 0$ tels que si $R < R_\xi$, il existe $R' < R$ vérifiant :*
si $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N$ sont des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec :

$$\forall j \in \{1, \ldots, N\} \quad \|\rho_j - \widetilde{\rho}_j\|_{2,U} < \varepsilon \tag{5.1}$$

Alors $(U, \widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N)$ *est une configuration q-concave. De plus,*

$$V \cap \left\{z \in U \middle| \widetilde{\rho}_1(z) = \cdots = \widetilde{\rho}_N(z) = 0\right\} \neq \varnothing$$

et pour tout $\widetilde{\xi} \in V \cap \left\{z \in U \middle| \widetilde{\rho}_1(z) = \cdots = \widetilde{\rho}_N(z) = 0\right\}$, *$R$ et R' vérifient les propriétés du Théorème 0.3 par rapport aux applications* $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N$ *et à* $\widetilde{\xi}$.

On peut alors établir pour le résultat suivant :

Théorème 5.2 *Soit* $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ *une configuration q-concave de classe* $\mathcal{C}^d$, $d \geq 5$, *dans* $\mathbb{C}^n$, $1 \leq N \leq q \leq n-1$, *soit* $\xi \in E$ *et soit* R_ξ *donné par la proposition précédente. Soit R tel que* $0 < R < R_\xi$, *(on note D à la place de* D_R*), alors il existe* R_0 *avec* $0 < R_0 < R$, *tel que*
pour tout R' *avec* $0 < R' < R_0$, *il existe* $R'' > 0$ *avec* $0 < R'' < R'$ *ayant les propriétés suivantes :*
si $f \in \mathcal{C}^m_{0,q-N+1}(\overline{D})$, *avec* $3 \leq m \leq d-2$ *est telle que :*

1. $\bar{\partial} f = 0$
2. $\operatorname{supp} f \subset\subset \left\{z \in U \middle| \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \rho_i(z) \leq 0\right\} \cap \{z \in U | |\xi - z| < R''\}$
3. *f vérifie* $(C1)$

alors il existe $u \in \mathcal{C}^{m-3}_{0,q-N}(\overline{D})$ *telle que :*

1. $\bar{\partial} u = f$ *sur D.*
2. $\operatorname{supp} u \subset\subset \left\{z \in U \middle| \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \rho_i(z) \leq 0\right\} \cap \{z \in U | |\xi - z| < R'\}$

Démonstration : Soient ε_0, V_0 et R_ξ donnés par la Proposition 5.1. Soient $R > 0$ avec $R < R_\xi$ et R_2 avec $R_2 < \frac{1}{2}R$ correspondant au R' de la proposition précédente par rapport à $\frac{1}{2}R$.
Soient $R_0 > 0$ et $R' > 0$ tels que $4R_0 < R_2$ et $B(\xi, R_0) \subset V_0$ et $0 < R' < R_0$.
Alors, si $R'' < R'$ est assez petit, on peut construire des applications $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N$, telles que :

1. $\operatorname{supp}(\widetilde{\rho}_j - \rho_j) \subset\subset B(\xi, R')$, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$.
2. $\|\widetilde{\rho}_j - \rho_j\|_{2,U} < \varepsilon_0$, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$.
3. $\widetilde{\rho}_j(z) \geq \rho_j(z)$, pour tout $z \in U$ et tout $j \in \{1, \ldots, N\}$.
4. $\widetilde{\rho}_j(z) > \rho_j(z)$ pour $z \in \overline{B(\xi, R'')}$ et tout $j \in \{1, \ldots, N\}$.

En particulier, les applications $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N$ vérifient les hypothèses de la Proposition 5.1. Soit $\widetilde{\xi} \in V_0 \cap \left\{z \in U \middle| \widetilde{\rho}_1(z) = \cdots = \widetilde{\rho}_N(z) = 0\right\}$, alors $\widetilde{\xi} \in B(\xi, R')$.
Soit R_1 tel que $\dfrac{1}{2}R < R_1 < \dfrac{3}{4}R$ alors $B(\xi, R_0) \subset\subset B(\widetilde{\xi}, R_1) \subset\subset B(\xi, R)$, on pose

$$\widetilde{D} = \left\{z \in U \middle| \widetilde{\rho}_i(z) < 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, N\}\right\} \cap B(\widetilde{\xi}, R_1)$$

on remarque que, comme $R_1 > \dfrac{R}{2}$, R_2 vérifie le premier point du Théorème 0.3 par rapport à $\widetilde{D}$. De plus, on a $\widetilde{D} \subset D$.

Soit $f \in \mathcal{C}^m_{0,q-N+1}(\overline{D})$, vérifiant les hypothèses du théorème, alors d'après le Théorème 0.3, il existe $v \in \mathcal{C}^{m-1}_{0,q-N}(\overline{D})$ telle que $\bar\partial v = f$ sur D.

Si $q-N=0$, v est une fonction holomorphe, alors, d'après la Proposition 4.10, elle se prolonge en une fonction $w \in \mathcal{C}^\infty_{0,0}(B(\widetilde{\xi}, R_2))$. Remarquons que $B(\xi, R') \subset\subset B(\widetilde{\xi}, R_2)$. On pose pour tout $z \in D \cap B(\widetilde{\xi}, R_2)$, $u = v - w$, alors supp $u \subset \overline{D} \cap B(\xi, R')$, on prolonge ensuite u par 0 à D. u convient.

Si $q-N \geq 1$, comme $v \in \mathcal{C}^{m-1}_{0,q-N}(\overline{\widetilde{D}})$ est $\bar\partial$-fermée, d'après le Théorème 0.3, il existe $w \in \mathcal{C}^{m-2}_{0,q-N-1}(\overline{\widetilde{D} \cap B(\widetilde{\xi}, R_2)})$ tels que $\bar\partial w = v$ sur $\widetilde{D} \cap B(\widetilde{\xi}, R_2)$. On prolonge alors w à $\overline{D \cap B(\widetilde{\xi}, R_2)}$ de manière $\mathcal{C}^{m-2}$, et on pose pour tout $z \in D \cap B(\widetilde{\xi}, R_2)$, $u = v - \bar\partial w$ alors supp $u \subset \overline{D} \cap B(\xi, R')$, on prolonge ensuite u par 0 à D. Alors $u \in \mathcal{C}^{m-3}_{0,q-N}(\overline{D})$ convient. $\square$

6 Sur le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux.

Dans cette partie, on résout le $\bar\partial$ jusqu'au bord sur le complémentaire d'un domaine q-convexe, au voisinage d'un point du bord de ce domaine. On se place pour cela dans la situation suivante.
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $r_1, \dots, r_N : U \to \mathbb{R}$. On suppose que :

(i) Les applications $r_1, \dots, r_N$ sont de classe $\mathcal{C}^d$, avec d assez grand.

(ii) Pour tout $I \in P'(N)$, $I = (j_1, \dots, j_l)$, $dr_{j_1}(z) \wedge \cdots \wedge dr_{j_l}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \{\zeta \in U | r_{j_1}(\zeta) = \cdots = r_{j_l}(\zeta) = 0\} =: E_I$.

(iii) Pour tout $I \in P'(N)$, et tout $\lambda \in \Delta_I$, la forme de Levi de l'application $\lambda_{j_1} r_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_l} r_{j_l}$ admet au moins $q+1$ valeurs propres strictement positives.

On pose

$$D = \{z \in U | \forall i \in \{1, \dots, N\}\ r_i(z) < 0\}$$

$$W = \bigcup_{i=1}^{N} \{z \in U | r_i(z) > 0\} = U \setminus \overline{D}$$

On va montrer le résultat suivant :

Théorème 6.1 *Soit $\xi \in \partial D$*

(i) Si $1 \leq r \leq q-1$, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de ξ dans $\mathbb{C}^n$ tel que si $f \in \mathcal{C}^m_{0,r}\left(\overline{W}\right)$, avec $2N-1 \leq m \leq d-2$, est $\bar\partial$-fermée, alors il existe une forme différentielle $u \in \mathcal{C}^M_{0,r-1}\left(\overline{W \cap \mathcal{W}}\right)$, avec $M \geq m-2N+1$, telle que $\bar\partial u = f$ sur $W \cap \mathcal{W}$.

(ii) Si on suppose de plus que $q \leq n-2$ et $D \subset\subset U$, si $\alpha > 0$ vérifie :

$$D_\alpha = \bigcap_{j=1}^{N} \{z \in U | r_j(z) < \alpha\} \subset\subset U \tag{6.1}$$

alors, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de ξ dans $\mathbb{C}^n$ tel que si $f \in \mathcal{C}^m_{0,q}(D_\alpha \setminus D)$, $4N \leq m \leq d-2$, à support compact, est $\bar\partial$-fermée, alors il existe une forme différentielle $u \in \mathcal{C}^{M'}_{0,q-1}(\overline{(D_\alpha \setminus D) \cap \mathcal{W}})$, avec $M' \geq m-4N$ telle que $\bar\partial u = f$ sur $\left(D_\alpha \setminus \overline{D}\right) \cap \mathcal{W}$.

Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser des sections de Whitney, dont nous allons rappeler brièvement quelques propriétés. Nous renvoyons le lecteur à [19] et à [15] (qui traite le cas $\mathcal{C}^\infty$) pour plus de détails.

6.1 Complexes de chaines de sections de Whitney.

6.1.1 – Définition.

Soit X une variété différentiable lisse et E un fibré vectoriel $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Etant donné un ouvert Ω de X, on note $\Gamma^m(\Omega, E)$ l'espace des sections de classe $\mathcal{C}^m$ de E sur Ω.

Si $x \in \Omega$, on dit que $f \in \Gamma^m(\Omega, E)$ est *m-plate en x* si pour tout choix de coordonnées locales en x, les composantes de f s'annulent ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre m en x. Si A est un fermé dans Ω, on note $\mathcal{F}^m_A(\Omega, E)$ l'espace des sections $f \in \Gamma^m(\Omega, E)$ qui sont m-plates en tout point de A.

L'espace $W^m(A, E)$ des sections de Whitney de classe $\mathcal{C}^m$ de E sur un fermé A de Ω est alors défini par la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{F}^m_A(\Omega, E) \to \Gamma^m(\Omega, E) \to W^m(A, E) \to 0 \tag{6.2}$$

Pour A fermé dans X, on remarque que

$$U \to \Gamma^m(U, E), \qquad U \to \mathcal{F}^m_{A\cap U}(U, E), \qquad U \to W^m(A \cap U, E) = W^m_A(U, E)$$

sont des faisceaux et que la suite (6.2) induit une suite exacte de faisceaux.

Définition 6.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, deux sous-ensembles fermés A et B de Ω sont dits* régulièrement situés *(resp.* fortement régulièrement situés*) s'ils vérifient une des deux propriétés suivantes :*

(i) $A \cap B = \varnothing$

(ii) pour tout $x_0 \in A \cap B$, il existe un voisinage V de x_0 dans Ω et des constantes α, $C > 0$ tels que pour tout $x \in V$

$$dist(x, A) + dist(x, B) \geq C\ dist(x, A \cap B)^\alpha$$

$$\big(\text{resp. } dist(x, A) + dist(x, B) \geq C\ dist(x, A \cap B)\big)$$

Le fait que A et B soient fortement régulièrement situés, pour $m > 0$, (resp. régulièrement situés, pour $m = \infty$) est équivalent à l'exactitude de la suite suivante pour tout fibré vectoriel E sur Ω (voir [19]) :

$$0 \to W^m(A \cup B, E) \to W^m(A, E) \oplus W^m(B, E) \to W^m(A \cap B, E) \to 0 \tag{6.3}$$

Le cas $m = 0$ est trivial.

Soit $\mathcal{U} = \{A_0, \ldots, A_\eta\}$ une famille de fermés de X, on dit que $\mathcal{U}$ est un *système (fortement) régulièrement situé*, si pour tout $0 \leq i_0, \ldots, i_t \leq \eta$ et $0 \leq j_0, \ldots, j_s \leq \eta$, $0 \leq t, s \leq \eta$, les fermés $A_{i_0} \cap \cdots \cap A_{i_t}$ et $A_{j_0} \cap \cdots \cap A_{j_s}$ sont (fortement) régulièrement situés .

6.1.2 – Complexe de chaines et opérateur cobord.

Considérons le fibré vectoriel $E^{p,q}$ sur $\mathbb{C}^n$ des (p,q)-formes différentielles sur U, on a alors $\Gamma^m(U, E^{p,q}) = \mathcal{C}^m_{p,q}(U)$, le faisceau des (p,q)-formes $\mathcal{C}^m$ sur U et on note $W^m(A, E^{p,q}) = W^m_{p,q}(A)$, pour tout A fermé dans U, on peut alors démontrer facilement la proposition suivante :

Proposition 6.3 *Si A est un fermé vérifiant $\overline{\mathring{A}} = A$, alors on a :*

$$\mathcal{C}^m_{p,q}(A) \simeq W^m_{p,q}(A) \tag{6.4}$$

On note $C^s(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q}))$, $0 \leq s \leq \eta$, l'espace des chaines de la forme :

$$f = (f_{j_0 \ldots j_s}) \quad \text{avec} \quad f_{j_0 \ldots j_s} \in W^m_{p,q}(A_{j_0} \cap \cdots \cap A_{j_s})$$

On définit l'opérateur cobord

$$\delta : C^s(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q})) \to C^{s+1}(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q}))$$

en posant

$$(\delta f)_{j_0 \ldots j_{s+1}} = \sum_{h=0}^{s+1} (-1)^h f_{j_0, \ldots, \widehat{j}_h, \ldots, j_{s+1}}|_{A_{j_0} \cap \cdots \cap A_{j_{s+1}}}$$

Alors, pour tout $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a le complexe suivant :

$$C^0(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q})) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q})) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C^\eta(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q})) \to 0 \tag{6.5}$$

On pose de plus pour tout $s \in \{0, \ldots, \eta\}$

$$Z^s(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q})) = \{f \in C^s(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q})) | \delta f = 0\}$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 6.4 *Soit $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On suppose que, si $m \in \mathbb{N}$ (resp. $m = +\infty$), $\mathcal{U}$ est un système fortement régulièrement situé (resp. un système régulièrement situé) de fermés de X, alors le complexe (6.5) est acyclique, de plus pour tout $f \in Z^0(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q}))$, il existe une unique $g \in W^m_{p,q}(A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_\eta)$ telle que $g|_{A_j} = f$, pour tout $j \in \{0, \ldots, \eta\}$.*

Démonstration : On trouve la démonstration de cette proposition dans [15] pour le cas $\mathcal{C}^\infty$, le cas général se démontre de la même façon. □

6.1.3 – Opérateur de Cauchy-Riemann.

Soit $\mathcal{U} = \{A_0, \ldots, A_\eta\}$ un système (fortement) régulièrement situé, on peut alors définir l'opérateur de Cauchy-Riemann pour les chaines de sections de Whitney de la façon suivante :

– Si $m = +\infty$, pour $h \in C^s(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q}))$, on pose

$$\bar\partial h = \big((\bar\partial h)_{j_0 \dots j_s}\big) \in C^s(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q+1}))$$

où $(\bar\partial h)_{j_0 \dots j_s} \in \mathcal{C}^m_{p,q+1}(A_{j_0} \cap \dots \cap A_{j_s})$

– Si $m \in \mathbb{N}^*$, pour $h \in C^s(\mathcal{U}, W^m(E^{p,q}))$, on pose

$$\bar\partial h = \big((\bar\partial h)_{j_0 \dots j_s}\big) \in C^s(\mathcal{U}, W^{m-1}(E^{p,q+1}))$$

où $(\bar\partial h)_{j_0 \dots j_s} \in \mathcal{C}^{m-1}_{p,q+1}(A_{j_0} \cap \dots \cap A_{j_s})$

Il est clair que l'opérateur de Cauchy-Riemann ainsi défini et le cobord commutent.

6.2 Démonstration du Théorème 6.1.

Soit $\xi \in \partial D$, soit $I \in P'(N)$, maximal tel que $\xi \in E_I$, pour simplifier les notations, on va supposer que $I = (1, \dots, l)$, on note aussi pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, $\rho_j = -r_j$.

Posons, pour $R > 0$ et pour $j \in I$,

$$C_j^R = \big\{z \in U \big| r_j(z) \geq 0\big\} \cap \overline{B(\xi, R)}$$

$$\mathcal{U}^R = \big\{C_1^R, \dots, C_l^R\big\}$$

Alors, il existe $R_\xi > 0$, avec $B(\xi, R_\xi) \subset\subset U$ tel que pour tout $J = (j_1, \dots, j_k) \subset I$, R_ξ vérifie les propriétés de la Proposition 5.1 par rapport à la configuration q-concave $(U, \rho_{j_1}, \dots, \rho_{j_k})$. De plus, quitte à diminuer R_ξ, les conditions de transversalité imposées sur les applications r_i, $i \in \{1, \dots, l\}$, impliquent que pour tout R, avec $0 < R < R_\xi$, $\mathcal{U}^R$ est un système fortement régulièrement situé.

On peut alors écrire le Théorème 0.3 de la façon suivante (pour le cas $m = 0$, on utilise les résultats de C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer dans [10] à la place du Théorème 0.3).

Théorème 6.5 *Soit $R \in]0, R_\xi[$. Alors il existe $R' \in]0, R]$ tel que pour toute $f \in C^s(\mathcal{U}^R, W^m(E^{0,r}))$, avec $r \leq q-s-1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\bar\partial$-fermée, il existe $g \in C^s(\mathcal{U}^{R'}, W^{\max(0,m-1)}(E^{0,r-1}))$ telle que $\bar\partial g = f$ dans $C^s(\mathcal{U}^{R'}, W^m(E^{0,r}))$.*

Démonstration du Théorème 6.1, (i) :

Soient R_0 tel que $0 < R_0 < R_\xi$ et $f \in \mathcal{C}^m_{0,r}(C_1^{R_0} \cup \dots \cup C_l^{R_0})$, $\bar\partial$-fermée avec $2N - 1 \leq m \leq d - 2$ et $1 \leq r \leq q - 1$.

L'équation (6.4) permet d'affirmer que $\widetilde{f} = (f_j)_{j=1,\dots,l}$ définie par

$$f_j = f|_{C_j^{R_0}} \quad \text{avec} \quad j \in \{1, \dots, l\}$$

vérifie $\widetilde{f} \in C^0(\mathcal{U}^{R_0}, W^m(E^{0,r}))$, $\delta \widetilde{f} = 0$ et $\bar\partial \widetilde{f} = 0$.

La démonstration de la première partie du théorème s'effectue en considérant deux cas distincts, d'abord celui où $l \leq r \leq q - 1$ (ce cas peut être vide si $l \geq q$), puis le cas où $1 \leq r \leq \min(l-1, q-1)$.

- Si $l \leq r \leq q-1$.

On construit par récurrence en utilisant le Théorème 6.5, les suites $(R_j)_{j=1,\dots,l}$ et $(g^j)_{j=1,\dots,l}$ ayant les propriétés suivantes :
la suite $(R_j)_{j=1,\dots,l}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs, pour tout $k \in \{1,\dots,l\}$, $g^k \in C^{k-1}(\mathcal{U}^{R_k}, W^{m-k}(E^{0,r-k}))$ et la suite $(g^k)_{k=1,\dots,l}$ vérifie :

(i) $\bar\partial g^1 = \widetilde{f}$.

(ii) Pour tout $k \in \{2,\dots,l\}$ $\bar\partial g^k = \delta g^{k-1}$ si on se restreint à $\mathcal{U}^{R_k}$.

Ensuite, on modifie la suite (g^k) en une suite $(\widetilde{g}^k)$ de manière à avoir pour tout $k \in \{1,\dots,l\}$, $\bar\partial \widetilde{g}^k = \bar\partial g^k$ et $\delta \widetilde{g}^k = 0$.
Pour cela, on effectue une récurrence décroissante construisant des suites $(h^k)_{k=2,\dots,l}$ et $(\widetilde{g}^k)_{k=1,\dots,l}$ telles que,
pour tout $s \in \{2,\dots,l\}$, $h^s \in C^{s-2}(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-2l+s}(E^{0,r-s}))$,
pour tout $s \in \{1,\dots,l\}$, $\widetilde{g}^s \in C^{s-1}(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-2l+s}(E^{0,r-s}))$ et :

(i) $\delta h^l = g^l$ et $\widetilde{g}^l = g^l$

(ii) Pour tout $k \in \{1,\dots,l-1\}$, $\widetilde{g}^{l-k} = g^{l-k} - \bar\partial h^{l-k+1}$ et, si de plus $k \leq l-2$, $\delta h^{l-k} = \widetilde{g}^{l-k}$.

Alors, $\widetilde{g}^1 \in Z^0(\mathcal{U}^{R_l}, W^{m-2l+1}(E^{0,r-1}))$, donc, d'après la Proposition 6.4, il existe $g \in \mathcal{C}^{m-2l+1}(C_1^{R_l} \cup \dots \cup C_l^{R_l})$ telle que pour tout $j \in \{1,\dots l\}$, $g|_{C_j^{R_l}} = \widetilde{g}^1_j$.
Soit g une telle fonction, comme $\bar\partial \widetilde{g}^1 = \widetilde{f}$, g vérifie $\bar\partial g = f$ sur $C_1^{R_l} \cup \dots \cup C_l^{R_l}$.

- Si $1 \leq r \leq \min(l-1, q-1)$.

Ici, on ne peut construire les suites (R_k) et (g^k) jusqu'au rang l mais seulement jusqu'au rang r, alors contrairement au cas précédent, le dernier terme de la suite (g^k) n'est pas automatiquement de cobord nul, on ne peut donc modifier la suite comme on l'a fait précédemment. On va donc procéder comme suit.
Construisons les suites $(R_k)_{k=1,\dots,r}$ et $(g^k)_{k=1,\dots,r}$ de la même façon et considérons le terme g^r.
On a $\bar\partial g^r = \delta g^{r-1}$ mais a priori, $\delta g^r \neq 0$, on va donc modifier g^r au moyen d'une chaine de fonctions holomorphes dont le cobord est égal à celui de g^r.
$g^r \in C^{r-1}(\mathcal{U}^{R_r}, W^{m-r}(E^{0,0}))$ et vérifie $\bar\partial \delta g^r = 0$, donc δg^r est une chaine composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $C_{j_0}^{R_r} \cap \dots \cap C_{j_r}^{R_r}$, $(j_0,\dots,j_r) \subset \{1,\dots,l\}$, qui sont holomorphes, elle sont donc $\mathcal{C}^\infty$. Or les ensembles de la formes $C_{j_0}^{R_r} \cap \dots \cap C_{j_r}^{R_r}$, $(j_0,\dots,j_r) \subset \{1,\dots,l\}$ sont les adhérences de domaines à coins q-concaves, alors d'après la Proposition 4.10, il existe $R_{r+1} > 0$ tel que $R_{r+1} < R_r$ et si on note $\mathcal{V} = B(\xi, R_{r+1})$, toute fonction holomorphe sur $C_{j_0}^{R_r} \cap \dots \cap C_{j_r}^{R_r}$, $(j_0,\dots,j_r) \subset \{1,\dots,l\}$, se prolonge holomorphiquement sur $\mathcal{V}$. Quitte à réduire un peu R_{r+1}, on peut supposer que les prolongements sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\mathcal{V}}$.

On note pour tout $(j_0, \dots, j_r) \subset \{1, \dots, l\}$, $h_{j_0 \dots j_r}$ le prolongement holomorphe de la fonction $(\delta g^r)_{j_0 \dots j_r}$ sur $\mathcal{V}$.
Si $r = l-1$, alors, il n'y a qu'un seul $(r+1)$-uplet : $(j_0, \dots, j_r) = (1, \dots, l)$.
On pose :

$$\begin{aligned}\widetilde{h}_{1\dots l-1} &= h_{1\dots l} \quad \text{sur } C_1^{R_{r+1}} \cap \dots \cap C_{l-1}^{R_{r+1}} \\ \widetilde{h}_{j_0 \dots j_{r-1}} &= 0 \quad \text{si } (j_0, \dots, j_{r-1}) \neq (1, \dots, l-1)\end{aligned}$$

Alors $\widetilde{h} \in C^{r-1}(\mathcal{U}^{R_{r+1}}, W^\infty(E^{0,0}))$, elle est holomorphe et $\delta\widetilde{h} = \delta g^r$.
On pose alors $\widetilde{g}^r = g^r - \widetilde{h}$. On peut ainsi conclure en effectuant une récurrence décroissante pour créer la suite $(\widetilde{g}^k)_{k=1,\dots,r}$ de la même manière que dans le cas précédent.
Si $r < l-1$, alors pour tout $(j_0, \dots, j_r, j_{r+1}) \subset \{1, \dots, l\}$ on a :

$$\sum_{s=0}^{r+1} (-1)^s h_{j_0 \dots \widehat{j_s} \dots j_{r+1}} \big|_{C_{j_0}^{R_{r+1}} \cap \dots \cap C_{j_{r+1}}^{R_{r+1}}} = 0$$

Or, les $h_{j_0 \dots \widehat{j_s} \dots j_{r+1}}$ sont holomorphes, donc le principe du prolongement analytique des fonctions holomorphes permet de dire que les sommes ci-dessus sont nulles sur tout $\mathcal{V}$.
On note $\mathfrak{V}$ la famille de l copies de $\overline{\mathcal{V}}$, c'est un système de fermés régulièrement situé, de plus $h = (h_{j_0 \dots j_r})$ est un élément de $C^r(\mathfrak{V}, W^\infty(E^{0,0}))$ dont le cobord est nul. D'après la Proposition 6.4, le complexe de chaines est acyclique donc il existe $\widetilde{h}^0 \in C^{r-1}(\mathfrak{V}, W^\infty(E^{0,0}))$ tel que $\delta\widetilde{h}^0 = h$. Alors, par définition du cobord, $\widetilde{h}^0$ est solution du système linéaire défini sur $\overline{\mathcal{V}}$, par les équations suivantes :
Pour tout $(j_0, \dots, j_r) \subset \{1, \dots, l\}$

$$h_{j_0 \dots j_r} = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \widetilde{h}^0_{j_0 \dots \widehat{j_s} \dots j_r} \tag{6.6}$$

Ainsi pour tout $(i_0, \dots, i_{r-1}) \subset \{1, \dots, l\}$, $\widetilde{h}^0_{i_0 \dots i_{r-1}}$ est combinaison linéaire sur $\mathcal{V}$ des éléments de h qui sont holomorphes, donc $\bar{\partial}\widetilde{h}^0 = 0$.
On considère la restriction de $\widetilde{h}^0$ à $\mathcal{U}^{R_{r+1}}$, cela donne un élément noté $\widetilde{h}$, vérifiant $\bar{\partial}\widetilde{h} = 0$ et $\delta\widetilde{h} = h = \delta g^r$.
On pose alors $\widetilde{g}^r = g^r - \widetilde{h}$. On peut ainsi conclure en effectuant une récurrence décroissante pour créer la suite $(\widetilde{g}^k)_{k=1,\dots,r}$ de la même manière que dans le cas précédent. □

Démonstration du Théorème 6.1, (ii) :
Si $\gamma \in \mathbb{R}$, on note :

$$D_\gamma = \{z \in U | \forall i \in \{1, \dots, N\}\ r_i(z) < \gamma\}$$

on remarque si $|\gamma|$ est assez petite, $D_\gamma \subset\subset U$.
L'idée principale de cette démonstration consiste à modifier le support de f pour pouvoir utiliser le Théorème 5.2 de manière analogue au cas précédent.

On reprend les notations du début du paragraphe, on suppose de plus que $B(\xi, R_\xi) \subset\subset D_\alpha$ et on considère V voisinage de ξ et $\varepsilon > 0$, tels que R_ξ, V et ε vérifient les propriétés de la Proposition 5.1 pour chaque configuration q-concave $(U, \rho_{j_1}, \ldots, \rho_{j_k})$ avec $J = (j_1, \ldots, j_k) \subset I$. Pour $R > 0$ tel que $R < R_\xi$ et pour $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_l$, $\widetilde{\xi}$ vérifient les hypothèses de la Proposition 5.1, on pose, pour $j \in \{1, \ldots, l\}$:

$$\widetilde{C}_j^R = \{z \in U \big| \widetilde{\rho}_j(z) \leq 0\} \cap \overline{B(\widetilde{\xi}, R)}$$

D'après le Théorème 5.2, on peut construire une suite finie, strictement décroissante, de réels strictement positifs $(R_j)_{j\in\{1,\ldots,l+1\}}$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, l+1\}$, $R_j < R$ et si $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_l$, $\widetilde{\xi}$ vérifient les hypothèses de la Proposition 5.1. Ainsi, pour tout $(j_1, \ldots, j_s) \in \{1, \ldots, l\}$, avec $1 \leq s \leq \min(l, q)$, pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$, si $f \in \mathcal{C}^s_{0,q-s+1}(\widetilde{C}^R_{j_1} \cap \cdots \cap \widetilde{C}^R_{j_s})$, avec $s \geq 3$, $\bar{\partial}$-fermée et telle que supp $f \subset \widetilde{C}^R_{j_1} \cap \cdots \cap \widetilde{C}^R_{j_s} \cap B(\widetilde{\xi}, R_{i+1})$ alors, il existe $u \in \mathcal{C}^{s-3}_{0,q-s}(\widetilde{C}^R_{j_1} \cap \cdots \cap \widetilde{C}^R_{j_s})$ telle que $\bar{\partial} u = f$ et supp $u \subset \widetilde{C}^R_{j_1} \cap \cdots \cap \widetilde{C}^R_{j_s} \cap B(\widetilde{\xi}, R_i)$.
Soit $\eta > 0$ assez petit pour que $0 < R_{l+1} - \eta < R_{l+1} + \eta < R$.
Considérons maintenant des fonctions $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_l$ de classe $\mathcal{C}^d$ sur U et vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, $\|\rho_j - \widetilde{\rho}_j\|_{2,U} < \varepsilon$
2. pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, supp $(\rho_j - \widetilde{\rho}_j) \subset B(\xi, R_{l+1} + \eta) \setminus \overline{B(\xi, R_{l+1} - \eta)}$
3. pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$ et tout $z \in U$, $\rho_j(z) \leq \widetilde{\rho}_j(z)$
4. il existe $\gamma \in]0, \alpha[$, tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$ et tout $z \in (\overline{D_\gamma} \setminus D) \cap (\overline{B(\xi, R_{l+1} + \frac{\eta}{2})} \setminus B(\xi, R_{l+1} - \frac{\eta}{2}))$, $\rho_j(z) < \widetilde{\rho}_j(z)$

Soit γ', avec $0 < \gamma' < \gamma$. Soit $f \in \mathcal{C}^m_{0,q}(D_\alpha \setminus D)$, avec $4N \leq m \leq d - 2$, $\bar{\partial}$-fermée, à support compact.
Comme cela a déjà été remarqué, pour tout $\vartheta > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $||t| - \theta_\vartheta(t)| \leq \vartheta$, ainsi, si on pose avec les notations du paragraphe 4.4, pour $z \in U$:

$$\begin{cases} \eta_1^\vartheta(z) = r_1(z) \\ \eta_k^\vartheta(z) = m_\vartheta(\eta_{k-1}, r_k)(z) \quad \forall k \in \{2, \ldots, N\} \end{cases}$$

il existe un réel positif $\vartheta_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \vartheta < \vartheta_0$, on a :

$$\begin{aligned} \text{supp } f &\subset \{z \in U | \eta_N^\vartheta(z) < \alpha\} \setminus D \\ B(\xi, R) &\subset\subset \{z \in U | \eta_N^\vartheta(z) < \alpha\} \end{aligned}$$

Pour s_1, s_2 positifs et assez petits, notons

$$\mathcal{D}_{s_1,s_2} = \{z \in U | \eta_N^{s_2}(z) < s_1\}$$

Quitte à diminuer ϑ_0, on peut supposer que pour tout $\vartheta \in]0, \vartheta_0[$, on a $\eta_N^\vartheta(z) = \max_{i=1,\ldots,N} r_i(z)$ pour tout $z \in (D_\gamma \setminus D) \cap \Big(B(\xi, R_{l+1} + \eta) \setminus \overline{B(\xi, R_{l+1} - \eta)} \Big)$.
On peut choisir $\vartheta \in]0, \vartheta_0[$ tel que $D \subset\subset \mathcal{D}_{\gamma',\vartheta} \subset\subset \mathcal{D}_{\alpha,\vartheta}$, alors, par construction des fonctions $\widetilde{\rho}_i$, on a pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$, $\widetilde{\rho}_i > 0$ sur $\big(\overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}} \setminus \overline{D}\big) \cap \Big(\overline{B(\xi, R_{l+1} + \frac{\eta}{2})} \setminus B(\xi, R_{l+1} - \frac{\eta}{2})\Big)$.
De plus, $\mathcal{D}_{\alpha,\vartheta}$ est une extension q-convexe de $\overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}}$, comme le support de f est compact dans $\mathcal{D}_{\alpha,\vartheta} \setminus D$, d'après le Théorème 16.1 dans [6] et l'isomorphisme de Dolbeault, il existe $v \in \mathcal{C}^m_{0,q-1}(\mathcal{D}_{\alpha,\vartheta} \setminus \overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}})$ telle que $\bar{\partial} v = f$ sur $\mathcal{D}_{\alpha,\vartheta} \setminus \overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}}$.

Alors D_γ est un voisinage de $\overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}}$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$, $\widetilde{\rho}_i > 0$ sur $(\overline{D_\gamma} \setminus D) \cap (\overline{B(\xi, R_{l+1} + \frac{\eta}{2})} \setminus B(\xi, R_{l+1} - \frac{\eta}{2}))$.
Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{D}_\alpha$ telle que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de $D_\alpha \setminus D_\gamma$ et $\chi \equiv 0$ sur un voisinage de $\overline{\mathcal{D}_{\gamma',\vartheta}}$. On note $f' = f - \bar{\partial}(\chi v)$, f' est de classe $\mathcal{C}^{m-1}$, $\bar{\partial}$-fermée et on a supp $f' \subset\subset (D_\gamma \setminus D)$. On considère la restriction de f' à $\Big((D_\gamma \setminus D) \setminus (\bigcap_{i=1}^l \{z \in U | \widetilde{\rho}_i(z) > 0\})\Big)$, on note encore f' cette restriction et on la prolonge par 0 à $D_\alpha \setminus (\bigcap_{i=1}^l \{z \in U | \widetilde{\rho}_i(z) > 0\})$, on note aussi f' ce prolongement.
Alors $f' \in \mathcal{C}^{m-1}_{0,q}(\cup_{j=1}^l \widetilde{C}^R_j)$, de plus, supp $f' \subset\subset B(\xi, R_{l+1}) \cap \Big(\cup_{j=1}^l C^R_j\Big)$.
On peut alors utiliser le Théorème 5.2, pour effectuer le même type de raisonnement par récurrence que pour (i) en prenant garde à ce que les formes (g^k) que l'on construit aient leur support inclus dans $B(\xi, R_{l-k+1})$ afin de pouvoir appliquer de nouveau le Théorème 5.2. On montre ainsi qu'il existe un voisinage $\mathcal{W} \subset\subset B(\xi, R_{l+1} - \eta)$ de ξ dans $\mathbb{C}^n$, indépendant de f' et une forme différentielle $g' \in \mathcal{C}^{M'}_{0,q-1}(\overline{(\mathcal{W} \setminus D)})$ avec $M' = m - 4\min(l, r) \geq m - 4N$ telle que $\bar{\partial} g' = f'$ sur $\mathcal{W} \setminus \overline{D}$.
Posons maintenant $u = \chi v + g'$, alors $u \in \mathcal{C}^{M'}_{0,q-1}(\overline{(\mathcal{W} \setminus D)})$, de plus comme $\mathcal{W} \subset\subset B(\xi, R) \subset\subset D_\alpha$, on a $u \in \mathcal{C}^{M'}_{0,q-1}(\overline{\mathcal{W} \cap (D_\alpha \setminus D)})$
$\bar{\partial} u = \bar{\partial}(\chi v) + \bar{\partial} g' = \bar{\partial}(\chi v) + f' = f$ sur $\mathcal{W} \cap (D_\alpha \setminus \overline{D})$.
Ce qui achève la démonstration du Théorème 6.1. $\square$

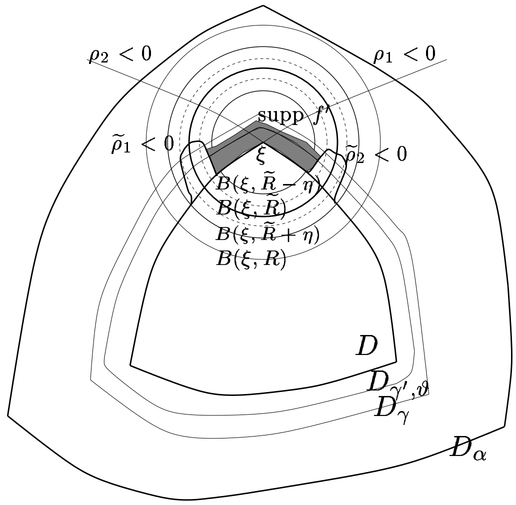

Illustration de la démonstration du Théorème 6.1 (ii)

7 Résolution jusqu'au bord pour des formes à support compact et Théorème de séparation d'Andreotti-Vesentini.

Soit X une variété complexe de dimension n et soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Définition 7.1 *Une* fonction q-convexe, $1 \leq q \leq n$, *sur X est une fonction ρ de classe $\mathcal{C}^2$ sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $\zeta \in X$ et pour tout système de coordonnées holomorphes $(z_1, \ldots, z_n)$ dans un voisinage de ζ, la matrice de Lévi de ρ au point ζ admet au moins q valeurs propres strictement positives.*

Définition 7.2 *On dit que X est une* extension q-convexe généralisée *de K, où K est un fermé de X si pour tout voisinage ouvert V de K dans X, il existe un fermé K_0 à bord $\mathcal{C}^\infty$ tel que $K \subset K_0 \subset V$ et que X soit une extension q-convexe de K_0 (voir la Définition 4.3).*

Remarque : Lorsque le bord de K est de classe $\mathcal{C}^\infty$, le fait que X soit une extension q-convexe de K implique trivialement que X est une extension q-convexe généralisée de K.

Définition 7.3 $\Omega \subset\subset X$ *est* un domaine strictement q-convexe à bord $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, par morceaux *s'il existe $N \geq 2$, des ouverts $U_1, \ldots, U_N$ de X et des applications $\rho_i : U_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$ tels que*

1. $\partial\Omega \subset U_1 \cup \cdots \cup U_N$.
2. *Un point $z \in U_1 \cup \cdots \cup U_N$ appartient à Ω si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $z \in U_k$, $\rho_k(z) < 0$.*

3. *Pour toute collection d'indices* $1 \leq k_1 < \cdots < k_l \leq N$, *on a* $d\rho_{k_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_{k_l}(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in U_{k_1} \cap \cdots \cap U_{k_l}$.
4. *Pour tout* $I = (i_1, \ldots, i_l) \in P'(N)$ *et tout* $(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_l}) \in \Delta_I$, *la fonction* $\lambda_{i_1}\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_l}\rho_{i_l}$ *est* $(q+1)$*-convexe sur* $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_l}$.

Pour un tel domaine Ω *et pour* $I = (i_1, \ldots, i_l) \in P'(N)$, *on note*

$$E_I := \{z \in \partial\Omega \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_l} | \rho_{i_1}(z) = \cdots = \rho_{i_l}(z) = 0\}$$

Dans cette partie, nous démontrons dans un premier temps un théorème de résolution du $\bar{\partial}$ pour des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, nous utilisons ensuite ce résultat pour démontrer un théorème du type théorème de séparation d'Andreotti-Vesentini.

7.1 Résolution à support compact.

Nous allons mettre en place un raisonnement du type «Beulenmethode» de Grauert, voir dans [8] pour les ouverts strictement pseudoconvexes ou [6] pour les domaines q-convexes et q-concaves à bord lisse. Celui-ci nous permettra de démontrer le théorème suivant :

Théorème 7.4 *Soit* $\Omega \subset\subset X$ *un domaine* q*-convexe à bord* $\mathcal{C}^\infty$ *par morceaux tel que* X *soit une extension* q*-convexe généralisée de* $\overline{\Omega}$. *On note* $W = X \setminus \overline{\Omega}$. *On a le résultat suivant :*
si $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(\overline{W}, E)$ *avec* $1 \leq r \leq q-1$ *ou, si* $q \leq n-2$, $1 \leq r \leq q$, *à support compact,* $\bar{\partial}$*-fermée, alors il existe* $u \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{W}, E)$, *à support compact telle que* $\bar{\partial}u = f$ *sur* W.

La démonstration de ce théorème s'effectue en plusieurs étapes qui sont représentées par les différents lemmes suivants.

Lemme 7.5 *Soit* $\Omega \subset\subset X$ *un domaine* q*-convexe à bord* $\mathcal{C}^\infty$ *par morceaux, soit* $\xi \in \partial\Omega$. *Soit* V^0 *un voisinage ouvert de* ξ *dans* X.
Alors, il existe un réel $\varepsilon > 0$ *et des voisinages ouverts de* ξ *dans* X, V^1, V^2 *tels que :*

$$V^2 \subset\subset V^1 \subset\subset V^0$$

pour toutes applications $\widetilde{\rho}_i : U_i \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *telles que*

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\},\ \|\rho_i - \widetilde{\rho}_i\|_{2,U_i} < \varepsilon \tag{7.1}$$

et

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\},\ \forall z \in U_i,\ \rho_i(z) \leq \widetilde{\rho}_i(z) \tag{7.2}$$

si on définit $\widetilde{\Omega}$ *par les points 1, 2 et 3 de la Définition 7.3, alors* $\widetilde{\Omega}$ *est inclus dans* Ω *et c'est un domaine* q*-convexe à bord* $\mathcal{C}^\infty$ *par morceaux et de plus, si on note* $\widetilde{W} = X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}$, *on a* *(i) Pour $i = 0, 1$, si $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(\overline{\widetilde{W} \cap V^i}, E)$, avec $1 \leq r \leq q-1$, $\bar\partial$-fermée, il existe $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{\widetilde{W} \cap V^{i+1}}, E)$ telle que $\bar\partial v = f$ sur $\widetilde{W} \cap V^{i+1}$.*

(ii) Si $q \leq n-2$, pour toute $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(\overline{\widetilde{W}}, E)$, $\bar\partial$-fermée, à support compact, il existe $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(\overline{\widetilde{W} \cap V^1}, E)$ telle que $\bar\partial v = f$ sur $\widetilde{W} \cap V^1$.

Si $(\varepsilon, V^2, V^1, V^0)$ vérifie les propriétés ci-dessus pour un domaine à coins q-convexe Ω donné, on dit qu'il est adapté à Ω.

Démonstration : Comme Ω est un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, le point *4* de la Définition 7.3 est vérifié donc $\widetilde{\Omega}$ est aussi un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. Soit $I = (j_1, \dots, j_l) \in P'(N)$ maximal pour l'inclusion tel que $\xi \in E_I$, on remarque que si $U \subset\subset U_{j_1} \cap \cdots \cap U_{j_l}$ est un voisinage de ξ, alors quitte à diminuer ε, il existe $\widetilde{\xi} \in U \cap \partial\widetilde{\Omega}$ tel que $\widetilde{\xi} \in \widetilde{E}_I := \{z \in U_{j_1} \cap \cdots \cap U_{j_l} | \widetilde{\rho}_j(z) = 0 \ \forall j \in I\}$ et tel que I soit aussi maximal pour l'inclusion, de plus si $\widetilde{\varsigma} \in U \cap \partial\widetilde{\Omega}$, alors pour tout J tel que $\widetilde{\varsigma} \in \widetilde{E}_J$, on a $J \subset I$. On peut supposer sans perdre de généralité que $I = \{1, \dots, l\}$.
Quitte à diminuer V^0, on peut supposer que $V^0 \subset\subset U_1 \cap \cdots \cap U_l$, que E est holomorphiquement trivial au dessus de V^0 et qu'il existe des coordonnées holomorphes $h : V^0 \to \mathbb{C}^n$ telles que $h(V^0) = U^0$ avec $U^0 \subset\subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert convexe.
Posons pour $i \in I$, $r_i = \rho_i \circ h^{-1}$ et pour toutes applications $\widetilde{\rho}_i : U_i \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \dots N$ vérifiant (7.1) posons pour tout $i \in I$, $\widetilde{r}_i = \widetilde{\rho}_i \circ h^{-1}$. Alors

1. pour tout $i \in I$, $\widetilde{r}_i = \widetilde{\rho}_i \circ h^{-1}$ est définie sur U^0
2. $(U^0, \widetilde{r}_1, \dots, \widetilde{r}_l)$ est une configuration q-convexe

On note

$$\widetilde{D} = \bigcap_{i=1}^{l} \{z \in U^0 | \widetilde{r}_i(z) < 0\}$$

Par ailleurs, il est clair que si $\widetilde{\rho}_1, \dots, \widetilde{\rho}_N$ vérifient les équations (7.1), alors, il existe $C > 0$ tel que $\widetilde{r}_1, \dots, \widetilde{r}_l$ vérifient :

$$\forall i \in \{1, \dots, l\}, \ \|r_i - \widetilde{r}_i\|_{2,U^0} < C\varepsilon \tag{7.3}$$

Soient $\varepsilon' > 0$, $U_{h(\xi)}$ voisinage de $h(\xi)$ dans $\mathbb{C}^n$ (avec $U_{h(\xi)} \subset U^0$) et $R_{h(\xi)}$ donnés par la Proposition 5.1 par rapport aux configurations q-concaves $(U^0, -r_{j_1}, \dots, -r_{j_k})$ avec $(j_1, \dots, j_k) \subset I$, $k \leq q$ et à $h(\xi)$. Le nombre d'ensemble $(j_1, \dots, j_k) \subset I$ étant fini, de tels $\varepsilon' > 0$, $U_{h(\xi)}$ et $R_{h(\xi)}$ existent.
On suppose de plus que $C\varepsilon \leq \varepsilon'$. On peut alors reprendre la démonstration du Théorème 6.1 en utilisant les mêmes suites (R_j) et le même réel $\gamma > 0$ (où γ est celui utilisé dans la démonstration, voir l'illustration) pour toutes les configurations q-convexes $(U^0, \widetilde{r}_1, \dots, \widetilde{r}_l)$ définies à partir d'applications $\widetilde{\rho}_1, \dots, \widetilde{\rho}_N$ vérifiant les inégalités (7.1) et (7.2) et pour tout

$h(\widetilde{\xi}) \in U_{h(\xi)} \cap \partial \widetilde{D}$. On peut donc affirmer qu'il existe $R^1 > 0$, avec $R^1 < R_{h(\xi)}$ tel que $\widetilde{\mathcal{W}} = B(h(\widetilde{\xi}), R^1)$ est un voisinage de $h(\widetilde{\xi})$ qui vérifie les propriétés du Théorème 6.1, en ajoutant dans *(ii)*, l'hypothèse que les formes sont à support dans $\widetilde{D}_\gamma \setminus \widetilde{D}$.

En effet, il faut remarquer ici que $\widetilde{D}$ n'est pas relativement compact dans U^0, aussi, on doit travailler avec des formes à support compact dans $\widetilde{D}_\gamma \setminus \widetilde{D}$, car on ne peut pas utiliser le Théorème 16.1 dans [6] pour restreindre le support. La restriction du support de $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(\overline{\widetilde{W}}, E)$ se fera directement dans X, avant de passer en coordonnées locales.

On peut maintenant construire V^1 :
supposons, quitte à diminuer ε et $U_{h(\xi)}$ que $U_{h(\xi)} \subset\subset B(h(\xi), \frac{R^1}{2})$, ainsi, pour tout $\widetilde{\xi} \in h^{-1}(U_{h(\xi)})$, on a $U_{h(\xi)} \subset\subset B(h(\widetilde{\xi}), R^1)$.
Soit U^1 un ouvert tel que

$$U_{h(\xi)} \subset\subset U^1 \subset\subset B(h(\xi), \frac{R^1}{2}) \subset\subset \bigcap_{\widetilde{\xi} \in h^{-1}(U_{h(\xi)})} B(h(\widetilde{\xi}), R^1)$$

Posons alors $V^1 = h^{-1}(U^1)$. Montrons alors qu'un tel ouvert convient pour vérifier *(i)* pour $i = 0$ et *(ii)*.
Montrons tout d'abord que *(i)* est vérifié pour $i = 0$, soit $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(\overline{\widetilde{W} \cap V^0}, E)$, avec $1 \le r \le q-1$, $\bar{\partial}$-fermée et posons $g = (h^{-1})^* f$. D'après le raisonnement précédent, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}\left(\overline{(\mathbb{C}^n \setminus \widetilde{D}) \cap B(h(\widetilde{\xi}), R^1)}, E\right)$ telle que $\bar{\partial} u = g$, alors considérons la restriction de u à U^1 et posons $v = h^* u$, alors $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{\widetilde{W} \cap V^1}, E)$ convient.
Montrons maintenant que *(ii)* est vérifié, soit $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(\overline{\widetilde{W}}, E)$, $\bar{\partial}$-fermée, à support compact.
Pour $\alpha > 0$, assez petit, on note Ω_α, (resp. $\widetilde{\Omega}_\alpha$) le domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux dans X défini par les applications $\rho_1 - \alpha, \ldots, \rho_N - \alpha$, (resp. $\widetilde{\rho}_1 - \alpha, \ldots, \widetilde{\rho}_N - \alpha$). Supposons de plus que $\alpha < \gamma$.
Quitte à diminuer à nouveau ε et $U_{h(\xi)}$, on peut supposer que $\Omega \subset\subset \widetilde{\Omega}_\alpha$. Comme X est une extension q-convexe généralisée de $\overline{\Omega}$, il existe $\mathcal{D} \subset\subset \widetilde{\Omega}_\alpha$ tel que X est une extension q-convexe de $\overline{\mathcal{D}}$ et que $\Omega \subset\subset \mathcal{D}$ alors, $\widetilde{\Omega} \subset\subset \mathcal{D} \subset\subset \widetilde{\Omega}_\alpha$. D'après le Théorème 3.1 dans [11], il existe w, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact telle que $\bar{\partial} w = f$ sur $X \setminus \overline{\mathcal{D}}$, soit χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, positive, telle que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de $X \setminus \widetilde{\Omega}_\alpha$ et $\chi \equiv 0$ sur un voisinage de $\mathcal{D}$. On pose $f' = f - \bar{\partial}(\chi w)$, alors, si on restreint f' à $\overline{V^0}$, $f' \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(\overline{\widetilde{\Omega}_\alpha \setminus \widetilde{\Omega} \cap V^0}, E)$, $\bar{\partial}$-fermé et à support compact. Posons $g' = (h^{-1})^* f'$, d'après ce qui précède, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(\overline{(\widetilde{D}_\alpha \setminus \widetilde{D}) \cap B(h(\widetilde{\xi}), R^1)}, E)$ telle que $\bar{\partial} u = g'$ sur $(\widetilde{D}_\alpha \setminus \widetilde{D}) \cap B(h(\widetilde{\xi}), R^1)$.
Considérons la restriction de u à U^1 et posons $v = h^* u$, comme

$V^1 \subset\subset h^{-1}(B(h(\widetilde{\xi}), R_{h(\xi)}))$, on a $(\widetilde{\Omega}_\alpha \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V^1 = (X \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V^1$. Alors la forme différentielle $v' = v + \chi w$ convient.

Il reste maintenant à construire V^2 vérifiant *(i)* pour $i = 1$. Soit $R' > 0$ tel que $B(h(\xi), 2R') \subset U^1$. Alors quitte à réduire encore ε et $U_{h(\xi)}$, on peut supposer que $U_{h(\xi)} \subset\subset B(h(\xi), R')$, et on a :

$$\bigcup_{\widetilde{\xi} \in h^{-1}(U_{h(\xi)})} B(h(\widetilde{\xi}), R') \subset\subset U^1$$

On effectue alors le même raisonnement que précédemment en remplaçant $R_{h(\xi)}$ par R', ce qui donne l'existence de $R^2 > 0$ avec $R^2 < R'$ tel que $\widetilde{\mathcal{W}} = B(h(\widetilde{\xi}), R^1)$ est un voisinage de $h(\widetilde{\xi})$ qui vérifie les propriétés du Théorème 6.1 par rapport aux configurations q-convexes $(U^1, \widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_l)$.
On construit ensuite V^2 exactement de la même manière que V^1 en utilisant R^2 à la place de R^1. $\square$

Définition 7.6 *Soit Ω un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, soit $I \in P'(N)$ et soit $\xi \in E_I$, où I est maximal pour l'inclusion.*
On dit que $[\Omega, \widetilde{\Omega}, \varepsilon, V_1, V_2, V_3, V_4]$ est un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux *si*

(i) ε est un réel strictement positif et V_1, V_2, V_3 et V_4 sont des voisinages ouverts de ξ dans X tels que :

$$V_1 \subset\subset V_2 \subset\subset V_3 \subset\subset V_4 \subset\subset \bigcap_{i \in I} U_i$$

il existe des coordonnées holomorphes $h : V_4 \to \mathbb{C}^n$ au voisinage de ξ et E est holomorphiquement trivial au dessus de V_4.

(ii) $(\varepsilon, V_2, V_3, V_4)$ est adapté à Ω

(iii) $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ est défini par les points 1, 2 et 3 de la Définition 7.3 par rapport à des applications $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_N$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $U_1, \ldots, U_N$ dans $\mathbb{R}$ telles que

(a) $\forall i \in I$, supp $(\rho_i - \widetilde{\rho}_i) \subset\subset V_1$

(b) $\forall i \notin I$, $\widetilde{\rho}_i \equiv \rho_i$

(c) $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, $\|\rho_i - \widetilde{\rho}_i\|_{2, U_i} < \varepsilon$

Si $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ sont des domaines q-convexes à bord lisse par morceaux, on dit que $\widetilde{\Omega}$ peut être obtenu de Ω par un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux s'il existe ε, V_1, V_2, V_3 et V_4 tels que $[\Omega, \widetilde{\Omega}, \varepsilon, V_1, V_2, V_3, V_4]$ est un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe.

Lemme 7.7 *Soit Ω un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, et soit $\alpha > 0$ assez petit pour que Ω_α soit un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par*

morceaux avec les notations utilisées dans la démonstration précédente.
Alors, il existe un nombre fini d'éléments d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux, $[\Omega^i, \Omega^{i+1}, \varepsilon^i, V_1^i, V_2^i, V_3^i, V_4^i]$, $0 \leq i \leq p$ *tel que*

$$\Omega_\alpha = \Omega^0 \supseteq \Omega^1 \supseteq \cdots \supseteq \Omega^{p+1} = \Omega$$

Ce lemme découle du lemme qui suit, par un raisonnement analogue à celui effectué pour démontrer le Lemme 12.3 dans [6] :

Lemme 7.8 *Soit* Ω *un domaine q-convexe à bord* $\mathcal{C}^\infty$ *par morceaux, et pour* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, *on définit* Ω_ε *grâce aux points 1, 2 et 3 de la Définition 7.3 par rapport aux fonctions* $\rho_1 - \varepsilon, \ldots, \rho_N - \varepsilon$, *si* $|\varepsilon|$ *est assez petit,* Ω_ε *est un domaine q-convexe à bord* $\mathcal{C}^\infty$ *par morceaux. Alors il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que si* $-\varepsilon_0 \leq \beta_0 \leq 0 \leq \beta_1 \leq \varepsilon_0$, *on peut trouver un nombre fini de domaines* $\theta_0, \ldots, \theta_K$ *tels que*

$$\Omega_{\beta_1} = \theta_0 \supseteq \theta_1 \supseteq \cdots \supseteq \theta_K = \Omega_{\beta_0}$$

et pour tout $j \in \{0, \ldots, K-1\}$, θ_{j+1} *peut être obtenu de* θ_j *par un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux.*

Démonstration : Comme $\partial\Omega$ est compact, on peut extraire un recouvrement fini de $\partial\Omega$ par des ouverts $\left(V_1^j\right)_{j\in\{1,\ldots,K\}}$ tels que, pour tout $j \in \{1, \ldots, K\}$, il existe $\varepsilon^j > 0$, V_2^j, V_3^j et V_4^j tels que $V_1^j \subset\subset V_2^j \subset\subset V_3^j \subset\subset V_4^j \subset\subset X$, $(\varepsilon^j, V_2^j, V_3^j, V_4^j)$ est adapté à Ω et il existe des coordonnées holomorphes $h_j : V_4^j \to \mathbb{C}^n$. On suppose de plus que si $\xi \in \partial\Omega \cap V_4^j$, alors pour tout i tel que $\xi \in U_i$, $V_4^j \subset\subset U_i$, ce qui est le cas dans la construction que l'on a effectué pour démontrer le Lemme 7.5.
On pose $\widetilde{\varepsilon} = \min_{j\in\{1,\ldots,K\}} \varepsilon^j$.
Soit $\varepsilon' > 0$ tel que

$$\overline{\Omega}_{\varepsilon'} \setminus \Omega_{-\varepsilon'} \subset\subset \bigcup_{j=1}^{K} V_1^j$$

soit de plus pour tout $j \in \{1, \ldots, K\}$, χ_j, application positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que supp $\chi_j \subset\subset V_1^j$ avec $\sum_{j=1}^K \chi_j \equiv 1$ sur $\overline{\Omega}_{\varepsilon'} \setminus \Omega_{-\varepsilon'}$ et $\sum_{j=1}^K \chi_j \leq 1$ sur X.
On pose $\gamma = \max_{j\in\{1,\ldots,K\}} \|\chi_j\|_{2,X}$.
Soit maintenant $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon_0 \leq \varepsilon'$ et $\varepsilon_0 \leq \min\left(\frac{\widetilde{\varepsilon}}{4\gamma}, \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2(1+K\gamma)}\right)$ et soient β_0, β_1 tels que $-\varepsilon_0 \leq \beta_0 \leq 0 \leq \beta_1 \leq \varepsilon_0$.
Soient $\rho_1, \ldots, \rho_N$ des fonctions définissant Ω par la Définition 7.3.
On définit pour tout $k \in \{1, \ldots, K\}$, θ_k par les points *1*, *2* et *3* de la Définition 7.3 par rapport aux applications $\widetilde{\rho}_{k,1}, \ldots, \widetilde{\rho}_{k,N}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

$U_1, \ldots, U_N$ définies par :

$$\widetilde{\rho}_{k,i}(z) = \rho_i(z) - \beta_1 - (\beta_0 - \beta_1) \sum_{j=1}^{k} \chi_j(z)$$

on a bien $\theta_0 = \Omega_{\beta_1}$, $\theta_K = \Omega_{\beta_0}$ de plus on vérifie facilement que pour tout $j \in \{0, \ldots, K-1\}$, $[\theta_j, \theta_{j+1}, \frac{\varepsilon^j}{2}, V_1^j, V_2^j, V_3^j, V_4^j]$ est un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord lisse par morceaux. $\square$

On a, de plus, le résultat de résolution locale suivant :

Lemme 7.9 *Soit $[\Omega, \widetilde{\Omega}, \varepsilon, V_1, V_2, V_3, V_4]$ un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, alors*

$$E^\infty_{0,r}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E) = E^\infty_{0,r}(X \setminus \Omega, E) \cap Z^\infty_{0,r}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E) \tag{7.4}$$

pour tout $1 \leq r \leq q-1$ et si $q \leq n-2$, pour $r = q$.
De plus, dans les mêmes conditions sur r et q, si $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E)$, $\bar{\partial}$-fermée, est telle qu'il existe $u_1 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ telle que $\bar{\partial} u_1 = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$, alors, il existe $u_2 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E)$ telle que $\bar{\partial} u_2 = f$ sur $X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}$ et $u_2 = u_1$ sur $(X \setminus \Omega) \setminus V_1$.

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E)$ telle qu'il existe $u_1 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ avec $\bar{\partial} u_1 = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$. On a alors deux cas à considérer :

- si $r = q$ avec $q \leq n-2$, soit $\widetilde{\chi}$ une application $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans X contenant un voisinage de $\overline{\Omega}$ telle que $\widetilde{\chi} \equiv 1$ sur un voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors $f - \bar{\partial}((1-\widetilde{\chi})u_1) \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(X \setminus \widetilde{\Omega}, E)$, est $\bar{\partial}$-fermée et à support compact, donc d'après la Définition 7.6 et le Lemme 7.5, il existe $v_1 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{(X \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V_3}, E)$ telle que $\bar{\partial} v_1 = f - \bar{\partial}((1-\widetilde{\chi})u_1)$ sur $(X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}) \cap V_3$, on pose alors $v = v_1 + (1-\widetilde{\chi})u_1$, on a $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{(X \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V_3}, E)$ et $\bar{\partial} v = f$ sur $(X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}) \cap V_3$.
- si $1 \leq r \leq q-1$, par définition des éléments d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, il existe $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{(X \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V_3}, E)$ telle que $\bar{\partial} v = f$ sur $(X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}) \cap V_3$.

Dans les deux cas, il existe deux formes, $u_1 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ et $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{(X \setminus \widetilde{\Omega}) \cap V_3}, E)$ telles que $\bar{\partial} u_1 = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$ et $\bar{\partial} v = f$ sur $(X \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}) \cap V_3$.

1. Si $r-1 > 0$, on a $u_1 - v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(\overline{(X \setminus \Omega) \cap V_3}, E)$, $\bar{\partial}$-fermée, or $[\Omega, \Omega, \varepsilon, V_1, V_2, V_3, V_4]$ est un élément d'extension pour le complémentaire d'un domaine q-convexe, donc d'après le Lemme 7.5 *(iii)*, il existe $w \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-2}(\overline{(X \setminus \Omega) \cap V_2}, E)$ telle que $\bar{\partial} w = u_1 - v$ sur $(X \setminus \Omega) \cap V_2$. Soit χ une application $\mathcal{C}^\infty$, positive telle que supp $\chi \subset\subset V_1$ et $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\overline{\Omega \setminus \widetilde{\Omega}}$.

On pose alors

$$u_2 = \begin{cases} u_1 - \bar\partial(\chi w) & \text{sur } X \setminus \Omega \\ v + \bar\partial((1-\chi)w) & \text{sur } \Omega \setminus \widetilde{\Omega} \end{cases}$$

Une telle u_2 convient.

2. Si $r = 1$, $u_1 - v \in \mathcal{C}^\infty_{0,0}(\overline{(X \setminus \Omega) \cap V_3}, E)$ est une application holomorphe, alors comme il existe des coordonnées holomorphes $h : V_4 \to \mathbb{C}^n$, la fonction $(h^{-1})^*(u_1 - v)$ se prolonge en une fonction holomorphe w sur $h(V_2)$ d'après la Proposition 4.10. Comme $\Omega \setminus \widetilde{\Omega} \subset\subset V_2$, on peut poser

$$u_2 = \begin{cases} u_1 & \text{sur } X \setminus \Omega \\ v + h^* w & \text{sur } \Omega \setminus \widetilde{\Omega} \end{cases}$$

Une telle u_2 convient. □

On déduit, comme dans [6], des Lemmes 7.7 et 7.9, le lemme suivant :

Lemme 7.10 *Soit Ω un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux et soit $\alpha > 0$ assez petit pour que Ω_α soit aussi un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. Alors, pour tout $1 \leq r \leq q-1$ et, pour $r = q$ si $q \leq n-2$, l'application restriction*

$$\varphi_r : H^\infty_{0,r}(X \setminus \Omega, E) \longrightarrow H^\infty_{0,r}(X \setminus \Omega_\alpha, E)$$

est injective.
De plus, si $f \in Z^\infty_{0,r}(X \setminus \Omega, E)$, telle qu'il existe $u_1 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega_\alpha, E)$ telle que $\bar\partial u_1 = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega_\alpha}$, alors, il existe V voisinage de Ω relativement compact et $u_2 \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ telle que $\bar\partial v = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$ et $u_2 = u_1$ sur $X \setminus V$.

On peut maintenant démontrer le Théorème 7.4 :

Démonstration du Théorème 7.4 : Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(\overline{W}, E)$ avec $1 \leq r \leq q-1$ ou, si $q \leq n-2$, $1 \leq r \leq q$, à support compact, $\bar\partial$-fermée. Soit $\alpha > 0$ assez petit tel que Ω_α soit un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.
Comme X est une extension q-convexe généralisée de $\overline{\Omega}$, il existe $\mathcal{D} \subset\subset \Omega_\alpha$, tel que X est une extension q-convexe de $\overline{\mathcal{D}}$. Comme f est à support compact, d'après le Théorème 16.1 dans [6], il existe $g \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \overline{\mathcal{D}}, E)$ à support compact dans $X \setminus \overline{\mathcal{D}}$ telle que $\bar\partial g = f$ sur $X \setminus \overline{\mathcal{D}}$.
Soit χ une application positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de $X \setminus \Omega_\alpha$ et $\chi \equiv 0$ au voisinage de $\overline{\mathcal{D}}$.
Alors $f - \bar\partial(\chi g) \in \mathcal{C}^\infty_{0,r}(X \setminus \Omega, E)$, est $\bar\partial$-fermée et à support compact inclus dans $\Omega_\alpha \setminus \Omega$, c'est donc une forme exacte sur $X \setminus \Omega_\alpha$. Alors, d'après le Lemme 7.10, il existe $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ à support compact telle que, sur $X \setminus \overline{\Omega}$

$$\bar\partial v = f - \bar\partial(\chi g)$$

Alors $u = v + \chi g \in \mathcal{C}^\infty_{0,r-1}(X \setminus \Omega, E)$ est à support compact dans $X \setminus \Omega$ et vérifie bien $\bar\partial u = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$. □

7.2 Théorème de séparation.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant que nous démontrons de manière analogue au Théorème 3.4 dans [11].

Théorème 7.11 *Soit X une variété complexe de dimension n et E un fibré holomorphe sur X. Soit $\Omega \subset\subset X$ un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux tel qu'il existe $\mathcal{D}_0$ voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$ dans X qui est une extension q-convexe généralisée de $\overline{\Omega}$. On suppose de plus que X est $(n-q)$-convexe. Alors l'espace*

$$E^\infty_{0,q}(X \setminus \Omega, E)$$

est fermé dans $\mathcal{C}^\infty_{0,q}(X \setminus \Omega, E)$ pour la topologie de convergence uniforme sur tout compact de $X \setminus \Omega$.

Démonstration : Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E^\infty_{0,q}(X \setminus \Omega, E)$ qui converge uniformement sur tout compact de $X \setminus \Omega$ vers $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(X \setminus \Omega, E)$.

Soit $\alpha > 0$ assez petit pour que Ω_α soit aussi un domaine q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux et $\Omega_\alpha \subset\subset \mathcal{D}_0$. Par ailleurs, il existe $\mathcal{D}$ avec $\Omega \subset \mathcal{D} \subset\subset \Omega_\alpha$, tel que $\partial\mathcal{D}$ est strictement q-convexe, en effet, il suffit de considérer Ω_β pour $\beta < \alpha$ est de lisser le bord en utilisant le maximum régularisé comme cela a déjà été fait dans la démonstration du Théorème 6.1 par exemple.
D'après le Théorème de séparation d'Andreotti-Vesentini, voir [1] ou le Théorème 1.2 dans [11], il existe $v \in \mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(X \setminus \overline{\mathcal{D}}, E)$ tel que $\bar\partial v = f$ sur $X \setminus \overline{\mathcal{D}}$.

Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur X telle que supp $\chi \subset X \setminus \overline{\mathcal{D}}$ et que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de $X \setminus \Omega_\alpha$. Alors la forme $g = f - \bar\partial(\chi v)$ appartient à $\mathcal{C}^\infty_{0,q}(X \setminus \Omega)$, est $\bar\partial$-fermée et à un support compact inclus dans $\Omega_\alpha \setminus \Omega$ donc dans $\mathcal{D}_0 \setminus \Omega$. Alors d'après le Thérème 7.4, il existe $u' \in \mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(\mathcal{D}_0 \setminus \Omega, E)$ à support compact telle que $\bar\partial u' = g$ sur $\mathcal{D}_0 \setminus \overline{\Omega}$.
On étend u' par 0 sur X et on pose $u = u' + \chi v$, alors $u \in \mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(X \setminus \Omega, E)$ et $\bar\partial u = f$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$. □

Références

[1] Andreotti A., Vesentini E. *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds.* Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 25, 1965.

[2] Barkatou M.Y. *$\mathcal{C}^k$ estimates for $\bar\partial$ on q-convex wedges.* Math. Z. 239, 335-352, 2002.

[3] Boggess A. *CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex.* CRC Press, Boca Raton, Florida, 1991.

[4] Grauert H. *Kantenkohomologie.* Compositio Math. 44, 79-101, 1981.

[5] Henkin G.M., Leiterer J. *Theory of functions on complex manifolds.* Akademie-Verlag Berlin et Birkhäuser-Verlag Boston, 1984.

[6] HENKIN G.M., LEITERER J. *Androtti-Grauert Theory by Integral Formulas.* Akademie-Verlag Berlin et Birkhäuser-Verlag Boston, 1988.

[7] HENKIN G.M., ROMANOV A.V. *Exact Hölder estimates for the solutions of the $\bar{\partial}$-equation.* Izv. Akad. Nauk. SSSR 35, 1171-1183, 1971 ; English Translation : Math. USSR Izvestija 5, 1180-1192, 1971.

[8] LAURENT-THIÉBAUT C. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables.* InterÉditions / CNRS Éditions, 1997.

[9] LAURENT-THIÉBAUT C., LEITERER J. *Uniform estimates for the Cauchy-Riemann Equation on q-convex wedges.* Ann. Inst. Fourier 43, No.2, 383-436, 1993.

[10] LAURENT-THIÉBAUT C., LEITERER J. *Uniform estimates for the Cauchy-Riemann Equation on q-concave wedges.* Astérisque 217, 151-182, 1993.

[11] LAURENT-THIÉBAUT C., LEITERER J. *The Andreotti-Vesentini separation theorem with $\mathcal{C}^k$ estimates and extension of CR-forms.* Several complex variables, Proc. Mittag-Leffler Inst., Stockholm/Swed, 1987-88 ou Math. Notes 38, 416-439, 1993.

[12] LIEB I., RANGE M. *Lösungsoperatoren für den Cauchy-Riemann-Komplex mit $\mathcal{C}^k$-Abschätzungen.* Math. Ann. 253, 145-164, 1980.

[13] MICHEL J. *Randregularität des $\bar{\partial}$-Problems für stückweise streng pseudoconvexe Gebiete in $\mathbb{C}^n$.* Math. Ann. 280, 45-68, 1988.

[14] MICHEL J., PERROTI A. *$\mathcal{C}^k$-Regularity for the $\bar{\partial}$-equation on Strictly Pseudoconvex Domains with Piecewise Smooth Boundaries.* Math.Z 203, 415-427, 1990.

[15] NACINOVICH M. *Poincaré Lemma for Tangential Cauchy Riemann Complexes* Math. Ann. 268, 449-471, 1984.

[16] RANGE R.M., SIU Y.T. *Uniform estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex bounrdaries.* Math. Ann. 206, 325-354, 1973.

[17] RICARD H. Thèse.

[18] SEELEY R. T. *Extension of $\mathcal{C}^\infty$ functions defined in a half space.* Proc A M S 15, 625-626, 1964.

[19] TOUGERON J. C. *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer, Berlin, 1972.

Université de Grenoble I
Institut Fourier,
B. P. 74
38402 Saint Martin d'Hères, France
E-mail : helene.ricard@ujf-grenoble.fr