Sur la catégorie $\mathcal{D}^G(X)$ pour l'action d'un groupe fini avec quotient lisse

Sophie Térouanne

Avril 2002

Prépublication de l'Institut Fourier n° 569 (2002)
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Abstract

Let X be a smooth projective scheme over an algebraically closed field k of characteristic 0. Let G be a finite group acting on X. If X/G is smooth, then $X/G \overset{\text{can}}{\cong} X/\!\!/G$ but the theorem of [BKR01] does not a priori apply because the dualizing sheaf of X is not trivial as a G-sheaf. We compare the categories $\mathcal{D}^G(X)$ and $\mathcal{D}(X/G)$ in this case by giving the image of the Fourier-Mukai functor $\mathcal{D}(X/G) \simeq \mathcal{D}(X/\!\!/G) \longrightarrow \mathcal{D}^G(X)$ defined in [BKR01]. The result generalizes a theorem of Lønsted on G-equivariant K-theory in the case of curves ([Lø83])

Introduction

Pour un groupe fini G agissant sur un schéma lisse X donné, la catégorie dérivée G-équivariante de X est par définition la catégorie dérivée bornée des G-faisceaux quasicohérents sur X, que l'on a restreinte aux complexes à homologie cohérente. On la notera $\mathcal{D}^G(X)$. Notons $X/\!\!/G$ la composante irréductible du G-schéma de Hilbert $G\text{−Hilb}(X)$ contenant les G-orbites libres. Sous une hypothèse sur la dimension de $X/\!\!/G \times_{X/G} X/\!\!/G$, et lorsque le faisceau dualisant de X est trivial en tant que G-faisceau, Bridgeland, King et Reid ont démontré ([BKR01]) que $X/\!\!/G$ est une résolution crépante du quotient X/G et que la catégorie $\mathcal{D}^G(X)$ est équivalente à la catégorie dérivée $\mathcal{D}(X/\!\!/G)$.

Il semble alors légitime de se poser la question suivante : lorsque le quotient X/G est lisse, et qu'il n'est donc pas nécessaire de le désingulariser, y-a-t-il toujours équivalence entre la catégorie dérivée G-équivariante de X, et la catégorie dérivée du quotient $\mathcal{D}(X/G)$?

Dans cet article, X est un schéma projectif lisse sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle. On suppose qu'un groupe fini G agit sur X de façon à ce que le quotient X/G soit lisse. Par exemple, X est le produit E^n où E est une courbe lisse et $G = \mathfrak{S}^n$ agit par permutation des composantes. On note $\pi : X \longrightarrow X/G$ le morphisme quotient. Les foncteurs adjoints suivant apparaissent alors naturellement.

$$\pi_*^G : \mathcal{D}^G(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X/G)$$

$$\pi^* : \mathcal{D}(X/G) \longrightarrow \mathcal{D}^G(X).$$

Ces foncteurs sont exacts entre les catégories de faisceaux car, par lissité de X/G, π est plat, et on est sur un corps k dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de G. Ainsi, ils induisent naturellement des foncteurs entre les catégories dérivées.

En considérant X comme une famille plate de G-clusters de X indexée par X/G, on démontre aisément que $X/G \overset{\text{can}}{\cong} X/\!\!/G$ avec X pour famille universelle. Ainsi, le foncteur de Fourier-Mukai $\mathcal{D}(X/G) \longrightarrow \mathcal{D}^G(X)$ défini dans [BKR01] est le foncteur π^*. Le fait que le quotient X/G soit lisse implique que localement (en tant que sous groupe du groupe d'endomorphisme de l'espace tangent), G est engendré par des pseudoréflexions ([Bou81]). En particulier, le faisceau canonique de X n'est pas G-trivial a priori, de sorte que l'on ne peut pas appliquer le théorème donnant une équivalence de catégories. Le résultat de cet article est le théorème suivant qui caractérise l'image de π^* dans $\mathcal{D}^G(X)$.

Théorème (2.1) *Un objet $E \in \mathcal{D}^G(X)$ est l'image par π^* d'un objet de $\mathcal{D}(X/G)$ si et seulement si pour tout H sous-groupe de G, la restriction de E au sous-schéma $\overline{\Delta}_H$ (adhérence des points de stabilisateur H) appartient à la composante correspondant à la représentation triviale dans la décomposition de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^H(\overline{\Delta}_H) = \oplus_{\rho \in \mathrm{Irr}(H)} \mathcal{D}^\rho(\overline{\Delta}_H)$.*

Dans la première partie, nous définissons la catégorie $\mathcal{D}^G(X)$ et nous démontrons qu'elle est équivalente à la sous-catégorie formée des G-faisceaux cohérents localement libres. Nous étudions les cas extrêmes où G agit soit trivialement, soit librement sur X. Puis, en suivant le modèle donné par Beĭlinson dans [Beĭ79] dans le cas non équivariant, nous donnons une description de $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$, où $\mathbb{P}^n$ est l'espace projectif de dimension n sur k.

Dans la deuxième partie, nous démontrons le théorème 2.1 après avoir montré comment réduire le problème à la recherche d'un critère de descente pour les G-faisceaux localement libres sur X.

1 La catégorie dérivée bornée G-équivariante

1.1 Définition

Rappelons que si X est un schéma et G un groupe fini agissant sur X, un faisceau F cohérent est dit G-linéarisé si il existe une collection d'isomorphismes : $\phi_g : F \longrightarrow g_*F,\ g \in G$, telle que $\phi_{gh}^{-1} = h_*\phi_g^{-1}\phi_h^{-1}$. On appelle morphisme de G-faisceaux un morphisme de faisceaux entre deux faisceaux G-linéarisés qui commute avec les morphismes $\phi_g,\ g \in G$. Alors on définit la catégorie $G-\mathrm{Coh}(X)$ dont les objets sont les faisceaux cohérents G-linéarisés et les morphismes sont les morphismes de G-faisceaux. Cette catégorie est abélienne et elle a assez d'injectifs (cf [Gro57]).

Lemme 1.1 *Si X est un G-schéma lisse de dimension n, alors la catégorie $G-\mathrm{Coh}(X)$ est de dimension homologique inférieure à n. C'est à dire, pour tout couple de G-faisceaux cohérents (A, B) et pour tout entier $s \geq n$, $\mathrm{Ext}^s_G(A, B) = 0$.*

Preuve. Notons I^G le foncteur qui à un G-module associe sa partie G-invariante, et Γ le foncteur qui à un G-faisceau associe ses sections globales. Notons H^*_G la cohomologie G équivariante. Alors, le foncteur Ext_G est le foncteur dérivé de $\mathrm{I}^G \circ \Gamma \circ \mathscr{H}om$, et pour tout couple (A, B) de G-faisceaux cohérents, la suite spectrale de terme initial $\mathrm{E}_2^{p,q} = H^p_G(X, \mathscr{E}xt^q(A, B)$ converge vers $\mathrm{Ext}^{p+q}_G(A, B)$. On va démontrer que pour tout couple d'entiers (p, q) tel que $p + q > n$, tous les termes de cette suite spectrale sont nuls.

Fixons provisoirement q, et notons d la dimension du support du faisceau $\mathscr{E}xt^q(A, B)$ La caractéristique de k ne divisant pas l'ordre de G, I^G est un foncteur exact sur la catégorie des k-espaces vectoriels, de sorte que l'on a $H^p_G(X, \mathscr{E}xt^q(A, B)) = \mathrm{I}^G(H^p(X, \mathscr{E}xt^q(A, B)))$. Par ailleurs, si $j : Z := \mathrm{Supp}(\mathscr{E}xt^q(A, B)) \longrightarrow X$ est l'inclusion du support de $\mathscr{E}xt^q(A, B)$ dans X, alors on a ([Har66, p.209]) $H^p(X, j_*(\mathscr{E}xt^q(A, B)_{|Z})) = H^p(Z, \mathscr{E}xt^q(A, B)_{|Z}) = H^p(Z, \mathscr{E}xt^q(A, B))$ donc par théorème d'annulation de Grothendieck, $H^p(X, \mathscr{E}xt^q(A, B)) = 0$ si $p > d$.

Supposons maintenant que $\mathscr{E}xt^q(A, B)$ est non nul et majorons la dimension d de Z. Soit x un point générique de Z. Alors $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau régulier de dimension inférieure à $n - d$. Comme x est dans le support de $\mathscr{E}xt^q(A, B)$ par hypothèse, la fibre $\mathscr{E}xt^q(A, B)_x = \mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_{X,x}}(A_x, B_x)$ est un $\mathscr{O}_{X,x}$-module non nul. Or la dimension homologique de la catégorie des $\mathscr{O}_{X,x}$-module est inférieure à la dimension de $\mathscr{O}_{X,x}$, donc la non-nullité de $\mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_{X,x}}(A_x, B_x)$ implique $q \leq n - d$.

Finalement, pour que $\mathrm{E}_2^{p,q} = H^p_G(X, \mathscr{E}xt^q(A, B))$ soit non nul, il est nécessaire d'avoir $p + q \leq n$. En particulier, pour tout entier $s > n$, $\mathrm{Ext}^s_G(A, B) = 0$. □

1.2 Une équivalence de catégories

Pour décrire la catégorie dérivée G-équivariante, on va voir qu'il suffit de connaître la sous-catégorie pleine dont les objets sont des complexes de faisceaux cohérents localement libres.

Théorème 1.1 *Soit X un schéma projectif lisse et soit G un groupe fini agissant sur X. Soit $\mathscr{L} \subset G-\mathrm{Coh}(X))$ la sous-catégorie pleine des G-faisceaux cohérents localement libres sur X et $\mathscr{M} \subset \mathcal{D}^G(X)$ la sous-catégorie pleine des complexes de faisceaux dans $\mathscr{L}$. On a une équivalence de catégories*

$$\mathscr{M} \simeq \mathcal{D}^G(X).$$

Comme on a imposé dans la définition que $\mathscr{M}$ soit une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}^G(X)$, il suffit de démontrer que tout objet de $\mathcal{D}^G(X)$ admet un quasi-isomorphisme vers un objet de $\mathscr{M}$. Remarquons que $\mathscr{M}$ n'est pas la catégorie dérivée de $\mathscr{L}$. En effet, en imposant que la sous-catégorie soit pleine, on a ajouté des morphismes par rapport à ceux de $\mathcal{D}(\mathscr{L})$. Soit donc $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}^G(X))$. On va démontrer par récurrence sur l'amplitude homologique de F qu'il est quasi-isomorphe à un objet de $\mathscr{M}$.

Si F est d'amplitude nulle, alors il admet au plus un faisceau d'homologie non nul. Et si celui-ci est en degré i, alors $F \cong H^i(F)[-i]$. Il suffit donc de démontrer que le faisceau $H^i(F)$ admet une résolution libre finie. C'est le lemme classique suivant.

Lemme 1.2 *Soit X un schéma projectif sur laquelle agit G un groupe fini. Tout G-faisceau cohérent admet une résolution finie par des G-faisceaux localement libre de types finis.*

Preuve. Pour commencer, on remarque que X admet un faisceau très ample G-linéarisé. En effet, on peut plonger X dans un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ de telle façon que G agisse linéairement sur V. Soit L un faisceau très ample sur $\mathbb{P}(V)$. A priori, L n'est pas G-linéarisé. En revanche, le produit $\otimes_{g\in G} g^*(L)$ est ample et admet une G-linéarisation naturelle. Il existe une puissance de ce faisceau $M = L^{\otimes n}$ qui est très ample. Le pull-back de M sur X (encore noté M) est bien un G-faisceau très ample sur X.

Soit F un G-faisceau cohérent sur X. Par théorème, il existe un entier n tel que $F \otimes M^{\otimes n}$ est engendré pas ses sections globales. Alors G agit naturellement sur $\Gamma(X, F \otimes M^{\otimes n})$ et le morphisme de G-faisceaux :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_X \otimes \Gamma(X, F\otimes M^{\otimes n}) & \longrightarrow & F \otimes M^{\otimes n} \\ \\ a \otimes s & \longrightarrow & as \end{array}$$

est surjectif. D'où la surjection

$$\Gamma(X, F \otimes M^{\otimes n}) \otimes M^{\otimes(-n)} \longrightarrow F.$$

En répétant autant de fois que nécessaire ce procédé en remplaçant F par le noyau de ce morphisme, on obtient une résolution de F par des G-faisceaux cohérents localement libres. Or d'après le lemme 1.1, la catégorie $G-\mathrm{Coh}(X)$ est de dimension homologique finie, donc cette itération s'arête et F admet une résolution libre finie par des objets de $\mathscr{L}$. $\square$

Preuve du théorème 1.1. Le lemme initialise notre récurrence sur l'amplitude homologique de F.

Supposons que pour tout complexe d'amplitude k, il existe un complexe d'objets de $\mathscr{L}$ qui lui est quasi-isomorphe, et démontrons le pour un complexe d'amplitude $k+1$. Soit F un complexe d'amplitude $k+1$. On peut supposer que les faisceaux d'homologie non nuls se trouvent en les degrés i tels que $0 \leq i \leq k$. On considère le complexe tronqué $\tau^{\geq 1}F$. Il est d'amplitude $k-1$, donc par hypothèse de récurrence, il existe un complexe $L \in \mathscr{M}$ et un morphisme de complexe $L \longrightarrow \tau^{\geq 1}F$ qui soit un isomorphisme en cohomologie. Ainsi on a le diagramme ci-après où pour tout $i \geq 2$, α^i est un isomorphisme en cohomologie, et $\alpha^1(\ker(d^1)) = \ker(\partial^1)$.

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & F^0 \arrow[r, "\partial^0"] & F^1 \arrow[r, "\partial^1"] & \cdots \arrow[r, "\partial^{k-1}"] & F^k \arrow[r, "\partial^k"] & F^{k+1} \arrow[r] & {} \\
 & & L^1 \arrow[u, "\alpha^1"] \arrow[r, "d^1"] & \cdots \arrow[r, "d^{k-1}"] & L^k \arrow[u, "\alpha^k"] \arrow[r] & 0 \arrow[u, "0"] \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Pour commencer, complétons ce morphisme de complexes en construisant :

$$\begin{tikzcd}
F^0 & \\
L^0 \arrow[u, "\alpha^0"] \arrow[r, "d^0"] & L^1
\end{tikzcd}
\quad \text{tel que :} \begin{cases} \alpha^1 \text{ est un isomorphisme en cohomologie,} \\ \alpha^0(\ker(d^0)) = \ker(\partial^0) = H^0(F). \end{cases}$$

Soient p_1 et p_2 les projections de $F^0 \times \ker(d^1)$ sur F^0 et $\ker(d^1)$. Notons $F^0 \times^{F^1} \ker(d^1)$ le noyau de l'application $\partial^0 p_1 - \alpha^1 p_2$. C'est un sous-$G$-faisceau cohérent de $F^0 \times \ker(d^1)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & F^0 \arrow[r, "\partial^0"] & F^1 \\
 & F^0 \times^{F^1} \ker(d^1) \arrow[u, "p'_1"] \arrow[r, "p'_2"] & L^1 \arrow[u, "\alpha^1"'] \\
L^0 \arrow[uur, "\alpha^0"] \arrow[ur, "q"] \arrow[urr, "d^0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Notons p'_i la restriction de p_i à $F^0 \times^{F^1} \ker(d^1)$. D'après le lemme, il existe un G-faisceau cohérent localement libre L^0 et une application q surjective.
Posons $\alpha^0 = p'_1 \circ q$ et $d^0 = p'_2 \circ q$. Alors $\mathrm{im}(d^0) = \mathrm{im}(p'_2)$ et un calcul donne $\mathrm{im}(p'_2)_x = \ker(d^1)_x \cap (\alpha^1)^{-1}(\mathrm{im}(\partial^0)_x) = \ker(d^1)_x \cap \ker(\bar{\alpha}^1)_x$ avec $\bar{\alpha}^1 = \pi \circ \alpha^1$, où π est le quotient de F^1 par $\mathrm{im}(\partial^0)$. Ainsi, $\mathrm{im}(d^0) = \ker(\bar{\alpha}^1_{|\ker d^1})$, et par propriété universelle du noyau, cela implique que α^1 est un isomorphisme en cohomologie, car $\bar{\alpha}^1_{|\ker d^1}$ induit un isomorphisme

$$\ker(d^1)/\mathrm{im}(d^0) \cong \ker(\partial^1)/\mathrm{im}(\partial^0).$$

Puis $\alpha^0(\ker(d^0)) = p'_1 \circ q(\ker(p'_2 \circ q)) = p'_1(\ker(p'_2))$, car q est surjective. En se plaçant sur une fibre, on a $p'_1(\ker p'_2)_x = p'_1(F^0_x \times^{F^1_x} \{0\}) = \ker(\partial^0)_x$, d'où la deuxième condition à vérifier :

$$\alpha^0(\ker(d^0)) = \ker(\partial^0).$$

Alors pour avoir un quasi-isomorphisme de complexe, il suffit de construire une résolution libre finie $L^{-k} \longrightarrow \dots \quad L^{-1} \longrightarrow$ du noyau de α^0. En effet, cela implique que α^0 est un isomorphisme en cohomologie puis en posant $\alpha^i = 0$ pour tout $i < 0$, on en déduit que $\alpha : L \longrightarrow F$ est un quasi-isomorphisme. D'après le lemme cette résolution existe, et elle est finie.

On a donc bien construit un complexe $L \in \mathscr{M}$ qui est quasi-isomorphe à F, d'où l'équivalence de catégorie. □

1.3 Cas d'une action libre

Dans le cas où l'action de G est libre sur X, si X est lisse alors le quotient X/G est lisse et on trouve dans [Mum74, p.70] la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 1.1 *Lorsque G agit librement sur un schéma X, on a une équivalence de catégorie :*

$$G{-}\mathrm{Coh}(X) \simeq \mathrm{Coh}(X/G).$$

On en déduit alors

Corollaire 1.1 *Si G agit librement sur un schéma lisse X, le foncteur*

$$\pi^* : \mathcal{D}(X/G) \longrightarrow \mathcal{D}^G(X)$$

est une équivalence de catégorie.

Preuve. Comme dans le théorème 1.1 considérons un triangle du type :

$$\tau^{\geq 1}F[-1] \longrightarrow H^0(F) \longrightarrow F \longrightarrow \tau^{\geq 1}F,$$

et on raisonne par récurrence sur l'amplitude. On se ramène ainsi à démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.3 *Soient E un faisceau cohérent sur X/G et F un objet de $\mathcal{D}(X/G)$. On peut considérer E comme étant un complexe concentré en degré 0. Si $\alpha : \pi^*F \longrightarrow \pi^*E$ est un morphisme dans $\mathcal{D}^G(X)$, alors $\alpha = \pi^*\beta$ pour un certain morphisme $\beta \in \mathcal{D}(X/G)$.*

Preuve. D'après le théorème 1.1 on peut remplacer F par un complexe L de faisceaux localement libres et par exactitude de π^*, π^*L est alors une résolution de π^*F. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
H^i(\mathscr{H}om(\pi^*F, \pi^*E)) &= H^i(\mathscr{H}om(\pi^*L, \pi^*E)) \\
&= \mathscr{E}xt^i(\pi^*L, \pi^*E) \\
&= 0, \text{ pour i} \neq 0,
\end{aligned}$$

car π^*L est localement libre. On est donc ramené à des morphismes de faisceaux et on peut utiliser la proposition 1.1 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\pi^*F, \pi^*E) &= \mathrm{Hom}_{G-\mathrm{Coh}(X)}(\pi^*L^0, \pi^*E) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}(X/G)}(L^0, E) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(X/G)}(L, E) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(X/G)}(F, E).
\end{aligned}$$

□ □

1.4 Cas de l'action triviale

On a traité le cas de l'action libre. L'autre cas simple et extrême est celui où G agit trivialement sur le schéma X. Cela ne nous empêche pas de définir la catégorie des G-faisceaux, ni a fortiori la catégorie dérivée $\mathcal{D}^G(X)$. Nous allons voir que dans ce cas, cette catégorie se décompose en le sens suivant :

Définition 1.1 *On dit qu'une catégorie additive $\mathscr{A}$ se décompose en $\oplus\mathscr{A}_i$ si pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$, il existe $A_i \in \mathscr{A}_i$ tels que $A = \oplus A_i$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_i, A_j) = 0$ si $i \neq j$.*

Lemme 1.4 *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne qui se décompose en $\mathscr{A} = \oplus_{i\in I}\mathscr{A}_i$, où I est fini. Supposons que $\mathscr{A}$ et les sous-catégories $\mathscr{A}_i$ admettent assez d'injectif et que les injectifs des sous-catégories soient des injectifs de $\mathscr{A}$. Alors la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathscr{A})$ se décompose en $\oplus_{i\in I}\mathcal{D}(\mathscr{A}_i)$*

Preuve. Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(A))$. On peut clairement écrire $X = \oplus X_i$ où chaque complexe X_i est formé d'objets de $\mathscr{A}_i$. Soient maintenant X_i et X_j des complexes formés respectivement d'objets de $\mathscr{A}_i$ et $\mathscr{A}_j$. Soit I_i un complexe formé d'injectifs de $\mathscr{A}_i$ quasi-isomorphe au complexe X_i. Par hypothèse, I_i est un complexe formé d'injectifs de $\mathscr{A}$, donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathscr{A})}(X_i, X_j) = \mathrm{Hom}_{K(\mathscr{A})}(I_i, X_j) = 0$. On a donc bien une décomposition de la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathscr{A})$. □

On applique ce lemme à la catégorie $G-\mathrm{Qco}(X)$ des G-faisceaux quasi-cohérents sur X , dans le cas où G agit trivialement sur X. En effet,

Proposition 1.2 *Si G agit trivialement sur le schéma X, on a une décomposition de $G-\mathrm{Qco}(X)$ suivant les représentations irréductibles de G, dont chaque facteur est isomorphe à $\mathrm{Qco}(X)$: Tout G-faisceau se décompose en une somme directe $\oplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)}E_\rho \otimes \rho$, où les E_ρ sont des faisceaux quasicohérents sur X (sans action de G).*

Preuve. Pour commencer, démontrons la décomposition pour les G-faisceaux cohérents. Le cas quasi-cohérent s'en déduira par limite inductive. Pour tout ρ, représentation irréductible de G, et pour tout G-faisceau cohérent F, notons

$$F_\rho = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X - G}(\mathscr{O}_X \otimes \rho, F).$$

F_ρ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent (sans action de G) et on a un morphisme naturel

$$\oplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)}(F_\rho \otimes \rho) \xrightarrow{\varphi} F$$

$$f \otimes v \longrightarrow f(1 \otimes v).$$

Montrons que φ est un isomorphisme.

Dans un premier temps, supposons F localement libre. Alors le problème étant local, on peut se placer sur un ouvert où F est libre et alors pour toute représentation ρ irréductible de G, F_ρ est libre. Sur chaque fibre on a donc un morphisme de $(G\text{-}\mathscr{O}_{X,x})$-module libres de type fini qui est un isomorphisme lorsqu'on passe au quotient par l'idéal maximal. En effet, cette décomposition est connue pour les représentation linéaires de dimensions finies. D'après le lemme de Nakayama, φ induit donc un isomorphisme sur chaque fibre. Cela implique que φ est un isomorphisme.

Maintenant, soit F un G-faisceau cohérent quelconque et soit $L_1 \to L_0 \to F \to 0$ une présentation libre de F. Si on applique le foncteur $F \longrightarrow \oplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)}(F_\rho \otimes \rho)$ à cette suite exacte, on obtient une suite exacte car le foncteur $F \longrightarrow F_\rho$ est exact à droite. En effet, $\mathscr{O}_X \otimes \rho$ est un $(\mathscr{O}_X\text{-}G)$-module projectif car il est libre. Puis, d'après le lemme des cinq, on obtient l'isomorphisme pour le faisceau F, et la proposition est démontrée pour les faisceaux cohérents..

Soit maintenant F un G-faisceau quasi-cohérent. Localement, F est un $(A\text{-}G)$-module. Montrons qu'il est limite inductive de $(A\text{-}G)$-modules de types finis. Comme G est fini, pour tout $x \in F$, x appartient à un sous-$(A\text{-}G)$-module de type fini, par exemple celui engendré par les éléments de l'orbite de x. On a donc bien : $F = \mathrm{limind}(M)$, pour M sous-$(A\text{-}G)$-module de type fini. On écrit alors $F = \mathrm{limind}(\oplus M_\rho \otimes \rho)$, et comme une somme directe est une limite inductive sur une catégorie discrète, limite inductive et somme directe commutent, de sorte que l'on a $F = \oplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)}\mathrm{limind}(M_\rho)\otimes\rho$ qui est bien une décomposition de la forme attendue. Le caractère fonctoriel de la construction locale assure que les modules ainsi obtenus se recollent pour former des faisceaux de $(\mathscr{O}_X\text{-}G)$-modules F_ρ tels que

$$F = \oplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)}F_\rho \otimes \rho.$$

□

Les hypothèses du lemme 1.4 étant vérifiées, on a une décomposition de $\mathcal{D}(G-\mathrm{Qco}(X))$, qui par restriction aux complexes de faisceaux à homologie cohérente donne :

Corollaire 1.2 *Si G agit librement sur le schéma X, on a une décomposition*

$$\mathcal{D}^G(X) = \oplus_{\rho\in \mathrm{Irr}(G)} \mathcal{D}^\rho(X),$$

où pour tout ρ, le foncteur $\mathcal{D}(X) \xrightarrow{\otimes\rho} \mathcal{D}^\rho(X)$ est une équivalence de catégorie. Ainsi, un objet $F \in \mathcal{D}^G(X)$ est image réciproque d'un objet de $\mathcal{D}(X/G) = \mathcal{D}(X)$ si et seulement si il appartient à la composante $\mathcal{D}^{\rho_0}(X)$ correspondante à la représentation triviale de G.

1.5 Description de la catégorie $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$

Soit $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V) = \mathrm{Proj}(A)$ où V est un espace vectoriel de dimension $(n+1)$ et A est l'algèbre symétrique sur V. On cherche une description de la catégorie dérivée bornée G-équivariante $\mathcal{D}(\mathbb{P}^n)$ des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}^n$.

Soit $M_A^G([0,n])$ la catégorie des $(A\text{-}G)$-modules libres de type fini dont les générateurs sont de degrés compris entre 0 et n. Soit $K_A^G([0,n])$ la catégorie triangulée des complexes d'objets de $M_A^G([0,n])$ à homotopie près. Comme dans l'article [Beĭ79] de Beĭlinson pour décrire la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathbb{P}^n)$ on construit un foncteur $F : K_A^G([0,n]) \longrightarrow \mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$. Dans cette partie, nous adaptons la démarche de Beĭlinson pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.2 *Le foncteur $F : K_A^G([0,n]) \longrightarrow \mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$ est une équivalence de catégories.*

Pour cela, on va mettre en bijection des objets des deux catégories, qui forment des familles génératrices au sens suivant : La plus petite sous-catégorie triangulée pleine de $K_A^G([0,n])$ (respectivement $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$) contenant cette classe d'objet est la catégorie entière. Rappelons alors le lemme suivant ([Beĭ79]) :

Lemme 1.5 *Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories triangulées, et $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un foncteur triangulé. Si X_i est une famille génératrice d'objets de $\mathscr{C}$ telle que $F(X_i)$ est une famille génératrice de $\mathscr{D}$, si pour tout (i,j) et pour tout l :*

$$F : \mathrm{Hom}^l(X_i, X_j) \longrightarrow \mathrm{Hom}^l(F(X_i), F(X_j))$$

est un isomorphisme, alors F est une équivalence de catégorie.

Pour appliquer ce lemme, il suffit donc de déterminer une famille génératrice $\{X_i\}$ de $K_A^G([0,n])$ et un foncteur $F : K_A^G([0,n]) \longrightarrow \mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$ vérifiant les hypothèses et tel que $\{F(X_i)\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$.

1.5.1 Théorème de structure des $(A\text{-}G)$-modules libres de types finis sur une k-algèbre graduée A de type fini

Dans ce paragraphe, A est une k-algèbre graduée sur laquelle agit un groupe fini G. Un $(A\text{-}G)$-module gradué est un $(A\text{-}G)$-module gradué en tant que A-module et tel que l'action de G respecte le degré.

Proposition 1.3 *Soit M un $(A\text{-}G)$-module gradué libre de type fini sur A dont les générateurs sont de degrés compris entre 0 et n. Alors il existe des représentations $V_\alpha \in R(G)$ telles que*

$$M = \oplus_{\alpha=0}^n V_\alpha \otimes A(-\alpha),$$

où $A(-\alpha)$ est l'anneau gradué obtenu en décalant la graduation de A de α : $A(-\alpha)_i = A_{i-\alpha}$

Preuve. Soit $\{e_i, i\in I\}$ une famille de générateurs de M. On peut partitionner $I = \sqcup_{\alpha\in[O,n]} I_\alpha$ de telle sorte que pour tout $i \in I_\alpha$, le générateur e_i soit de degré α. Pour tout g dans G et pour tout α, si $i\in I_\alpha$ alors $g\cdot e_i$ est de degré α, donc :

$$g\cdot e_i = \sum_{j\in I_\alpha} r_{j,i} e_j + \sum_{j\in I_{\alpha-1}} r_{j,i} e_j + \ldots + \sum_{j\in I_0} r_{j,i} e_j$$

où $r_{j,i}$ est de degré $\alpha - \deg(e_j)$. Il s'agit de démontrer que l'on peut choisir la base $\{e_i\}_{i\in I}$ telle que pour tout g dans G, pour tout α, et pour tout $i \in I_\alpha$,

$$g \cdot e_i = \sum_{j \in I_\alpha} r_{j,i} e_j.$$

Soient $\alpha_o = \max\{\alpha \mid I_\alpha \neq 0\}$, $J = \sqcup_{\alpha<\alpha_o} I_\alpha$ et $N = \oplus_{j\in J} Ae_j$. Pour tout $g \in G$, $g \cdot N \subset N$, de sorte que N est un sous-(A-G)-module de M.

On va démontrer qu'il existe un sous-(A-G)-module gradué N' de M, dont les générateurs sont de degré α_o et tel que $M = N \oplus N'$.

Le A-module M peut être vu comme k-espace vectoriel, car A est une k-algèbre graduée ($A_0 = k$). Comme la caractéristique de k ne divise pas l'ordre du groupe G, les représentations de dimension finie de G sont semi-simples. Or en tant que représentation de G, $M = \oplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$, où M_n est la partie de M de degré n :

$$M_n = \oplus_{\alpha\leq n} \oplus_{i\in I_\alpha} A_{n-\alpha} e_i.$$

Comme M est de type fini sur A, I_α est fini, et chaque A_i étant une représentation de dimension finie de G, M_n est une représentation de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Remarquons que M_n est stable par G car l'action respecte la graduation). Ainsi, en tant que somme directe de représentations semi-simples, M est semi-simple.

En particulier, la suite exacte de (k-G)-modules

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

est scindée. Ainsi, la (A-G)-base $\{\bar{e}_i, i \in I_{\alpha_o}\}$ de M/N se relève en $\{e'_i, i \in I_{\alpha_o}\}$ dans M, de telle façon que $g \cdot e'_i = \sum_{j\in I_{\alpha_o}} r_{j,i} e'_j$. Le A-module engendré par la famille $\{e'_i, i \in I_{\alpha_o}\}$ est donc un sous-(A-G)-module de M. Cependant, il n'est pas gradué a priori. On a pour tout $i \in I_{\alpha_o}$,

$$e'_i = e_i + \sum_{j\in J} \lambda_{i,j} e_j.$$

Posons

$$e''_i = [e'_i]_{\alpha_o} = e_i + \sum_{\alpha<\alpha_o} \sum_{j\in I_\alpha} [\lambda_{i,j}]_{\alpha_o-\alpha} e_j.$$

Pour tout $i \in I_{\alpha_o}$, e''_i est un antécédent de $\bar{e}_i \in M/N$ de degré α_o et on a :

$$\begin{aligned} g \cdot e''_j &= g \cdot [e'_i]_{\alpha_o} \\ &= [\textstyle\sum_{j\in I_{\alpha_o}} r_{j,i} e'_j]_{\alpha_o} \\ &= \textstyle\sum_{j\in I_{\alpha_o}} r_{j,i} [e'_j]_{\alpha_o} \quad \text{(les } r_{j,i} \text{ sont de degré nul)} \\ &= \textstyle\sum_{j\in I_{\alpha_o}} r_{j,i} e''_j \end{aligned}$$

Soit N' le A-module engendré par la famille $\{e''_i, i \in I_{\alpha_o}\}$. N' est un sous-(A-G)-module de M supplémentaire de N. De plus, on a $N' = V_{\alpha_o} \otimes A(-\alpha_o)$ où $V_{\alpha_o} = \oplus_{i\in I_{\alpha_o}} ke_i$ est la représentation de G de dimension finie définie par l'action de G sur la base $\{e''_1, i \in I_{\alpha_o}\}$. En effet, $A(-\alpha_o)$ est le module libre de dimension 1 sur A avec un générateur en degré α_o.

On peut recommencer le raisonnement en remplaçant M par N. Par récurrence descendante sur le degré maximal des générateurs de M, on obtient le résultat :

$$M = \oplus_{\alpha=0}^n V_\alpha \otimes A(-\alpha).$$

□

1.5.2 Démonstration du théorème 1.2

D'après la proposition 1.3, la famille $\{V \otimes A(-i), V \in \mathrm{Irr}(G), i \in [0,n]\}$ engendre la catégorie $M_A^G([0,n])$. Si on la considère comme une famille de complexes (où les faisceaux sont vus comme des complexes concentrés en degré nul), cette famille engendre la catégorie triangulée $K_A^G([0,n])$.

Considérons le foncteur additif

$$F: \quad M_A^G([0,n]) \longrightarrow G\text{−}\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)$$

$$M = \oplus_{\alpha=0}^n V_\alpha \otimes A(-\alpha) \longrightarrow \oplus_{\alpha=0}^n V_\alpha \otimes \mathscr{O}(-\alpha)$$

Il se prolonge à la catégorie triangulée des complexes $K_A^G([0,n])$, et quitte à composer avec le foncteur de localisation, on peut voir F comme étant un foncteur de $K_A^G([0,n])$ dans $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$. Démontrons que pour tout triplet (V,W,l), on a

$$\mathrm{Hom}^l_{K_A^G([0,n])}(V\otimes A(-i), W\otimes A(-j)) \cong \mathrm{Hom}^l_{\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)}(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j)). \quad (1)$$

Soient (V,W) un couple de représentations irréductibles et (i,j) un couple d'entiers entre 1 et n. Alors d'après le lemme de Schur et si l'on suppose k algébriquement clos (de sorte que pour toute représentation irréductible V de G, $\mathrm{End}_G(V)=k$) ,

$$\mathrm{Hom}(V\otimes A(-i), W\otimes A(-j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } j>i \\ 0 & \text{si } i=j \text{ et } V\neq W \\ k & \text{si } i=j \text{ et } V=W \\ k^m & \text{si } j<i \text{ et } m(V, A_{i-j}\otimes W)=m, \end{cases}$$

où $m(V,E)$ est la multiplicité de la représentation irréductible V dans la représentation de dimension finie E. Puis, pour $l\neq 0$, comme les morphismes de $K_A([0,n])$ sont des morphismes de complexes, il n'y a pas de morphisme non nul de $V\otimes A(-i)$ vers $W\otimes A(-j)$ décalé de l car ils sont concentrés en des degrés distincts.

$$\mathrm{Hom}^l(V\otimes A(-i), W\otimes A(-j)) = 0.$$

Calculons maintenant le terme de droite dans (1) Pour $l=0$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j)) &\cong \mathrm{Hom}(V\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, W\otimes \mathcal{O}(i-j)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(V, \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(i-j)\otimes W)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(V, \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(i-j))\otimes W). \end{aligned}$$

D'où, d'après le lemme de Schur,

$$\mathrm{Hom}(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } j>i \\ 0 & \text{si } i=j \text{ et } V\neq W \\ k & \text{si } i=j \text{ et } V=W \\ k^m & \text{si } j<i \text{ et } m(V, A_{i-j}\otimes W)=m \end{cases}$$

Pour $l\neq 0$, il s'agit de démontrer que $\mathrm{Ext}^l_G(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j))=0$. Or d'après [Gro57], il s'agit de l'aboutissement de la suite spectrale de terme initial

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = H^p(G, \mathrm{Ext}^q(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j))).$$

Or comme on est sur un corps k dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de G, il n'y a pas de cohomologie des groupes, donc on a

$$\mathrm{Ext}^l_G(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j)) = \mathrm{Ext}^l(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j))^G.$$

Il suffit donc de démontrer que $\mathrm{Ext}^l(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j))=0$. Or il s'agit de l'aboutissement de la suite spectrale de terme initial

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^n, \mathscr{E}xt^q(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j))).$$

Comme $\mathcal{O}(-i)\otimes V$ est localement libre, les Ext locaux sont triviaux pour $q\neq 0$, donc on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^l(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j)) &= H^l(\mathbb{P}^n, \mathscr{H}om(V\otimes \mathcal{O}(-i), W\otimes \mathcal{O}(-j))) \\ &= H^l(\mathbb{P}^n, V^*\otimes W\otimes \mathcal{O}(i-j)) \\ &= H^l(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(i-j))\otimes V^*\otimes W \qquad \text{car } i-j>-n-1. \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $V,W\in R(G)$ et pour tout $i,j\in[0,n]$, on a

$$\mathrm{Hom}_{K_A^G([0,n])}(V\otimes A(-i), W\otimes A(-j)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)}(F(V\otimes A(-i)), F(W\otimes A(-j))).$$

Pour appliquer le lemme 1.5, il reste à démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.4 *La famille* $\{V\otimes \mathcal{O}(-i), V\in \mathrm{Irr}(G), i\in[0,n]\}$ *engendre la catégorie* $\mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n)$.

Comme dans [Beĭ79], on considère la résolution de la diagonale par le complexe de Koszul :

$$0 \longrightarrow p_1^*\Omega^n(n) \otimes p_2^*\mathscr{O}(-n) \longrightarrow \dots\ p_1^*\Omega^1(1) \otimes p_2^*\mathscr{O}(-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathscr{O}_\Delta \longrightarrow 0.$$

La diagonale Δ est un sous-G-schéma de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, donc $\mathscr{O}_\Delta$ est un G-faisceau et la résolution étant composée de G-faisceaux, il s'agit d'une résolution dans la catégorie $G-\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$ de $\mathscr{O}_\Delta$ par des G-faisceaux localement libres donc projectifs.

Considérons les foncteurs

$$p_1^* \ : G-\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow G-\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$$

$$\otimes\mathscr{O}_\Delta \ : G-\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \longrightarrow G-\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$$

$$p_{2,*} \ : G-\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \longrightarrow G-\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)$$

La composition de ces trois foncteurs est l'identité de $G-\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)$, de sorte qu'en dérivant on obtient :

$$\forall M \in \mathcal{D}^G(\mathbb{P}^n),\ M = Rp_{2,*}(\mathscr{O}_\Delta \otimes^L p_1^*(M)).$$

Or, d'après la résolution de la diagonale par des complexes $\otimes$-acycliques, on sait calculer le complexe $\mathscr{O}_\Delta \otimes^L p_1^*(M)$. En degré $-\alpha$, on trouve le faisceau $\oplus_{d=0}^n p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*\Omega^d(d) \otimes p_1^*(M)^{d-\alpha}$. Puis, comme p_1^* est exact et commute au produit tensoriel, $p_1^*\Omega^d(d) \otimes p_1^*(M)^{d-\alpha} = p_1^*(\Omega^d(d) \otimes M^{d-\alpha})$. Ainsi, le complexe $\mathscr{O}_\Delta \otimes^L p_1^*(M)$ appartient à la sous-catégorie triangulée engendrée par les faisceaux du type : $p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*(N)$, où N est un G-faisceau sur $\mathbb{P}^n$.

Alors, comme les triangles sont conservés par les foncteurs dérivés, on peut obtenir M par une suite de triangles débutant par des objets du type $Rp_{2,*}(p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*(N))$, où $N \in G-\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)$.

Il suffit donc de démontrer que ces objets appartiennent à la sous-catégorie triangulée engendrée par la famille $\{V \otimes \mathscr{O}(-i), V \in \mathrm{Irr}(G), i \in [0,n]\}$. Or, d'après la formule de projection,

$$Rp_{2,*}(p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*(N)) = \mathscr{O}(-d) \otimes Rp_{2,*}(p_1^*(N)).$$

Par ailleurs, pour tout i, $R^ip_{2,*}(p_1^*(N)) = H^i(Rp_{2,*}(p_1^*(N)))$ est le faisceau associé au préfaisceau $V \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^n \times V, p_1^*(N)_{|\mathbb{P}^n \times V}) = H^i(\mathbb{P}^n, P)$, donc le faisceau constant $H^i(\mathbb{P}^n, N)$ qui est une représentation de G.

Les faisceaux d'homologie de $Rp_{2,*}(p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*(N))$ sont de la forme $V \otimes \mathscr{O}(-i)$ et appartiennent donc à la sous-catégorie triangulée voulue. Le lemme suivant implique qu'alors, le complexe $Rp_{2,*}(p_2^*\mathscr{O}(-d) \otimes p_1^*(N))$ appartient aussi à cette sous-catégorie. □

Lemme 1.6 *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, $\mathscr{C}$ une classe d'objets de $\mathscr{A}$ et $<\mathscr{C}>$ la sous catégorie triangulée de $\mathcal{D}^b(\mathscr{A})$ engendrée par $\mathscr{C}$. Si $M \in \mathcal{D}^b(\mathscr{A})$ a tous ses faisceaux d'homologie dans $<\mathscr{C}>$, alors $M \in <\mathscr{C}>$.*

Preuve. On démontre ce lemme par récurrence sur l'amplitude homologique de M. Si elle est nulle, il n'existe qu'un faisceau d'homologie non nul $H^k(M)$, et M est quasi-isomorphe au complexe $H^k(M)[-k]$. Puis, comme $<\mathscr{C}>$ est stable par triangles, elle l'est en particulier par quasi-isomorphisme, donc $M \in <\mathscr{C}>$.

Supposons le lemme démontré pour tout complexe d'amplitude homologique inférieure ou égale à d. Soit $M \in \mathcal{D}^b(\mathscr{A})$ un complexe d'amplitude $d+1$ dont les faisceaux d'homologie appartiennent à $<\mathscr{C}>$. Soit $k_o = \min\{k \text{ tel que } H^k(M) \neq 0\}$. Considérons le triangle

$$H^{k_o}(M) \longrightarrow M \longrightarrow \tau^{>k_o}M$$

dans $\mathcal{D}^b(\mathscr{A})$. Le premier terme appartient à $<\mathscr{C}>$ par hypothèse et le troisième par hypothèse de récurrence, car $\tau^{>k_o}M$ est d'amplitude homologique d et ses faisceaux d'homologie sont ceux de M, donc appartiennent à $<\mathscr{C}>$ par hypothèse. Ainsi, comme $<\mathscr{C}>$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{D}^b(\mathscr{A})$, $M \in <\mathscr{C}>$. □

On peut donc appliquer le lemme 1.5, et on obtient le théorème 1.2 □

2 Critère de descente d'un objet de la catégorie dérivée G-équivariante

Dans cette deuxième partie, nous évaluons la distance qui sépare les catégories $\mathcal{D}^G(X)$ et $\mathcal{D}(X/G)$. Autrement dit, nous déterminons l'obstruction pour un objet de $\mathcal{D}^G(X)$ à être l'image par π^* d'un objet de $\mathcal{D}(X/G)$

On a vu dans le théorème 1.1 que $\mathcal{D}^G(X) \simeq \mathscr{M}$, mais $\mathscr{M}$ n'est pas la catégorie dérivée bornée de la catégorie $\mathscr{L}$ des G-faisceaux cohérents localement libres sur X.

Dans un premier paragraphe, on traite malgré cela le problème sur $\mathscr{L}$.

On se ramènera alors à ce cas en démontrant qu'un objet de $\mathscr{M}$ est image par π^* d'un objet de $\mathcal{D}(X/G)$ si et seulement si chacun des faisceaux de $\mathscr{L}$ qui le compose est image parπ^* d'un faisceau de $\mathrm{Coh}(X/G)$. Cela résout le problème de la descente d'un objet de $\mathcal{D}^G(X)$.

2.1 Descente d'un G-faisceau localement libre.

On commence par raisonner dans le cas local. La proposition suivante traite le cas de la descente d'un G-faisceau localement libre au voisinage d'un point fermé de X (schéma projectif lisse sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle).

Proposition 2.1 *Soit R une k-algèbre locale d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k. Alors la catégorie $\mathscr{L}$ des (R-G)-modules libres est équivalente à la catégorie $\mathscr{R}$ des représentations de G. Les foncteurs d'équivalence sont :*

$$\mathscr{L} \xrightarrow{\otimes k} \mathscr{R} \text{ et } \mathscr{R} \xrightarrow{\otimes R} \mathscr{L}.$$

Preuve. On a clairement

$$\forall V \in \mathscr{R},\ (V \otimes_k R) \otimes_R k = V \otimes_k R/\mathfrak{m} \cong V.$$

Réciproquement, il s'agit de démontrer que

$$\forall M \in \mathscr{L},\ M/\mathfrak{m}M \otimes_k R \cong M \text{ dans } \mathscr{L}.$$

Soit donc M un (R-G)-module libre. Comme M est la limite inductive de ses sous-(R-G)-modules de types finis, on peut supposer M de type fini. En effet, si $M = \mathrm{limind}(N)$, alors

$$(M \otimes k) \otimes R = (\mathrm{limind}(N) \otimes k) \otimes R = \mathrm{limind}(N \otimes k) \otimes R = \mathrm{limind}((N \otimes k) \otimes R)$$

car les limites inductives commutent aux foncteurs adjoints à gauches, donc en particulier aux produits tensoriels.

Soit $V = M \otimes k = M/\mathfrak{m}M$. On veut démontrer que $M \cong V \otimes R$ en tant que (R-G)-module. V étant une représentation de type fini de G, on peut en choisir une base $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$, où les e_i sont dans M et $\overline{e_i}$ est la classe modulo $\mathfrak{m}$. Soit W le sous-(k-G)-module de M engendré par les e_i. C'est le sous-espace vectoriel engendré par les e_i et leurs transformés par G. Il est de dimension finie car G est fini. Soit V_1 le quotient de W par un supplémentaire de V en tant que k-espace vectoriel. La surjection $W \longrightarrow V_1 \cong V$, est un morphisme de ($k$-$G$)-modules par construction. Soit V' son noyau. On a

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

Comme toute représentation de dimension finie, W est semi-simple. Il existe donc un (k-G)-module $V_2 \cong V$ telle que $W = V_2 \oplus V'$. Notons le encore V. On a alors un morphisme naturel de (R-G)-modules

$$V \otimes_k R \xrightarrow{\varphi} M.$$

D'après le lemme de Nakayama, il est surjectif, et comme il s'agit d'une surjection entre R-modules libres de même rang, c'est un isomorphisme. □

Corollaire 2.1 *Soit E un G-faisceau localement libre sur X. Il existe un faisceau $F \in \mathrm{Qco}(X/G)$ tel que $E = \pi^*(F)$ si et seulement si en chacun des points fixes fermés de X, la représentation $i_x^*(E) = E_x/\mathfrak{m}_x E_x$ du stabilisateur de x est triviale.*

Preuve. Le morphisme canonique $\pi^*\pi_*^G(E) \longrightarrow E$ est un isomorphisme si et seulement si c'est un isomorphisme sur chacune des fibres au dessus des points fermés.

En tout point où G agit librement, il s'agit bien d'un isomorphisme d'après le paragraphe 1.3.

Soit x est un point fixe de X et H son stabilisateur. D'après la proposition 2.1, si x est un point fermé on a

$$E_x \cong \mathcal{O}_{X,x} \otimes V$$

où $V = E_x/\mathfrak{m}_x E_x$. Par ailleurs, $\pi_*^G(E) = E_x^H$ est un $\mathcal{O}_{X/G,\pi(x)}$-module libre donc d'après la proposition 2.1,

$$E_x^H \cong \mathcal{O}_{X/G,\pi(x)} \otimes E_x^H/\mathfrak{m}_{\pi(x)} E_x^H \cong \mathcal{O}_{X/G,\pi(x)} \otimes V^H.$$

Si $\mathcal{O}_{X,x}$ est complet, on a $\mathcal{O}_{X,\pi(x)} = \mathcal{O}_{X,x}^H$, donc on obtient $E_x^H = \mathcal{O}_{X,x}^H \otimes V^H$, d'où

$$\begin{aligned}(\pi^*\pi_*^G(E))_x &\cong (\mathcal{O}_{X,x}^H \otimes V^H) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}^H} \mathcal{O}_{X,x} \\ &\cong V^H \otimes \mathcal{O}_{X,x}\end{aligned}$$

Ainsi, le morphisme induit un isomorphisme sur la fibre en x si et seulement si $V^H = V$, autrement dit, $i_x^*(E)$ est la représentation triviale de H.

Sinon, on se ramène à ce cas là car $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_{X,x}$. □

Dans le cas général, les points fixes ne sont pas isolés. Une condition du type du corollaire 2.1 devient donc insuffisante, car trop contraignante : il s'agit de vérifier une condition sur chaque sous-schéma fermé défini par un point fixe de X.

On construit une stratification de $Fix(X) = \{x \in X \mid G_x \neq 0\}$ de la façon suivante. Pour tout sous-groupe H de G, notons Δ_H l'ensemble des points de stabilisateur H et X^H le schéma des points fixes par H :

$$\Delta_H = \{x \in X \mid G_x = H\},\ X^H = \{x \in X \mid Hx = x\} = \coprod_{H \subset K \subset G} \Delta_K.$$

X^H est lisse car il s'agit du sous-schéma des points fixes sous l'action du sous-groupe H de G réductif.

On considère alors le sous-schéma fermé $\overline{\Delta}_H$ de X muni de sa structure réduite, et on note $i_H : \overline{\Delta}_H \hookrightarrow X$ l'inclusion fermée.

Lemme 2.1 *$\overline{\Delta}_H$ est lisse.*

Preuve. Notons $X^H = \sqcup_{\alpha\in I} X_\alpha^H$ les composantes irréductibles de X^H. Alors $\Delta_H = \sqcup_{\alpha\in I} \Delta_H \cap X_\alpha^H$. Puis, si $J \subset I$ est le sous-ensemble (non vide si Δ_H est non vide) formé des indices α tels que $\Delta_H \cap X_\alpha^H$ est non vide, alors $\Delta_H = \sqcup_{\alpha\in J} \Delta_H \cap X_\alpha^H$ et $\overline{\Delta}_H = \sqcup_{\alpha\in J} X_\alpha^H$. En effet, l'adhérence d'un sous-ensemble non vide d'une composante irréductible X_α^H est X_α^H entier. Ainsi, $\overline{\Delta}_H$ est la réunion de certaines composantes connexes de X^H qui est lisse, donc est lisse. □

H agit trivialement sur $\overline{\Delta}_H \subset X_H$. Ainsi, d'après le paragraphe 1.4 on a une décomposition :

$$H-\mathrm{Qco}(\overline{\Delta}_H) = \oplus_{\rho\in R(H)} \mathrm{Qco}^\rho(\overline{\Delta}_H)$$

Proposition 2.2 *Soit E un G-faisceau localement libre sur X. Pour tout H sous-groupe de G, $i_H^*(E) = E_H$ est un H-faisceau localement libre sur $\overline{\Delta}_H$. Alors E est l'image réciproque d'un faisceau localement libre sur X/G si et seulement si pour tout sous-groupe H de G, $i_H^*(E)$ appartient à la composante correspondant à la représentation triviale de H dans la décomposition de $H-\mathrm{Qco}(\overline{\Delta}_H)$.*

Preuve. Soit H un sous-groupe de G. Si Δ_H est vide, on conviendra que $i_H^*(E)$ est trivial dans le sens ci-dessus. Sinon, soit $x \in \Delta_H$. En particulier, x est un point fixe. D'après le corollaire 2.1, E provient du bas si et seulement si pour tout $x \in Fix(X)$, $i_x(E)$ est une représentation triviale du stabilisateur de x. Considérons le morphisme $i_x^H : \mathrm{Spec}(k(x)) \longrightarrow \overline{\Delta}_H$ d'image x. Alors $i_x = i_H \circ i_x^H$, de sorte que si $i_H^*(E)$ appartient à la composante correspondant à la représentation triviale de H dans la décomposition de $H-\mathrm{Qco}(\overline{\Delta}_H)$, alors $i_x^*(E) = i_x^{H*} \circ i_H^*(E)$ est une représentation triviale de H. D'où la condition suffisante.

Réciproquement, supposons que $E = \pi^*(F)$ où F est un faisceau localement libre sur X/G. E est un G-faisceau trivial sur X en ce sens que l'action de G sur E est diagonale : Pour tout ouvert $U \subset X$, le $(G\text{-}\mathcal{O}_X(U))$-module $E(U)$ vérifie : $g.(ae) = (g.a)e$ pour tout $(g,a,e) \in G \times \mathcal{O}_X(U) \times E(U)$. Ainsi, comme l'action de H est triviale sur $\overline{\Delta}_H$, elle l'est également sur $i_H^*(E)$, de sorte que $i_H^*(E)$ appartient à la composante correspondant à la représentation triviale de H dans la décomposition de $H-\mathrm{Qco}(\overline{\Delta}_H)$. □

2.2 Réduction du problème

On va maintenant démontrer que pour qu'un complexe de faisceaux cohérents localement libres provienne du bas, il suffit que chacun des faisceaux qui le compose soit image réciproque d'un faisceau de $\mathrm{Coh}(X/G)$.

Commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.2 *Soit A un anneau local avec action de G. Soient V et W deux représentations triviales de dimensions finies du groupe G et $V \otimes A \xrightarrow{\phi} W \otimes A$ un morphisme de A-modules commutant à l'action de G. Alors ϕ provient d'un morphisme $V \otimes A^G \longrightarrow W \otimes A^G$.*

Preuve. Soit $(e_1, \ldots, e_N)$ une base de V et $(f_1, \ldots, f_M)$ une base de W. On a :
$\phi(\sum_{i=1}^N a_i e_i) = \sum_{i=1}^N a_i \phi(e_i) = \sum_{i=1}^N a_i \sum_{i=1}^M \phi_{j,i} f_j$ où l'application A-linéaire ϕ est représentée par la matrice $((\phi_{j,i})) \in \mathscr{M}_{M,N}(A)$.

Alors le fait que ϕ commute à l'action de G s'écrit de la manière suivante (compte tenu du fait que G agit trivialement sur V et W, et donc que les bases sont invariantes)

$$\begin{array}{llll} \forall g \in G, & g \cdot \phi(\sum_{i=1}^N a_i e_i) & = & \sum_{i=1}^N g \cdot a_i \sum_{i=1}^M g \cdot \phi_{j,i} f_j \quad = \\ & \phi(g \cdot \sum_{i=1}^N a_i e_i) & = & \sum_{i=1}^N g \cdot a_i \sum_{i=1}^M \phi_{j,i} f_j. \end{array}$$

De sorte que ϕ commute à l'action de G revient à dire que ϕ est G-invariant, en ce sens qu'il provient d'un morphisme $V \otimes A^G \longrightarrow W \otimes A^G$. □

Proposition 2.3 *Soit $L_1 = \pi^*(E_1) \xrightarrow{\phi} L_2 = \pi^*(E_2)$ un G-morphisme entre G-faisceaux localement libres de types finis sur X images réciproques de faisceaux sur X/G. Alors ϕ provient d'un morphisme unique $E_1 \longrightarrow E_2$ dans* $\mathrm{Coh}(X/G)$.

Preuve. L'identité $\pi_*^G \circ \pi^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{Coh}(X/G)}$ entraine que s'il existe, ce morphisme est nécessairement $\pi_*^G(L_1) = E_1 \xrightarrow{\pi_*^G(\phi)} \pi_*^G(L_2) = E_2$. Par aileurs, l'adjonction de π^* et π_*^G fournit un morphisme canonique $\pi^* \circ \pi_*^G \xrightarrow{\eta} \mathrm{Id}_{G-\mathrm{Coh}(X)}$ d'où le diagrame :

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\pi^*(\pi_*^G(\phi))"] \arrow[d, "\eta(L_1)"'] & L_2 \arrow[d, "\eta(L_2)"] \\ L_1 \arrow[r, "\phi"] & L_2 \end{tikzcd}$$

Il s'agit donc de démontrer que $\eta(L_i) = \mathrm{Id}_{L_i}$, pour $i = 1, 2$ et que $\phi = \pi^*(\pi_*^G(\phi))$.

On peut raisonner localement, et donc se placer sur un ouvert affine $\mathrm{Spec}(A)$, où A est local. Comme L_1 et L_2 sont localement libre, la proposition 2.1 s'applique et donc $L_i = V_i \otimes A$, où V_i est une représentation de G. Alors l'hypothèse que les L_i proviennent du bas se traduit par le fait que ces représentations sont triviales. Par ailleurs, ϕ étant un morphisme de G-faisceaux, il commute à l'action de G et on peut appliquer le lemme 2.2. Ainsi, ϕ est G invariante.

Or dans le cas affine, $\mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}(B)$, où $B = A^G$, l'opération π_*^G revient à considérer un A-module comme B-module et prendre sa partie G invariante, de sorte que le complexe $V_1 \otimes A \xrightarrow{\phi} V_2 \otimes A$ est transformé en $V_1 \otimes A^G \xrightarrow{\phi^G = \phi} V_2 \otimes A^G$, puis π^* revient à tensoriser par A au dessus de A^G, de telle sorte qu'on retrouve le complexe $V_1 \otimes A \xrightarrow{\phi} V_2 \otimes A$.

On a donc $\pi^* \pi_*^G \phi = \phi$. Autrement dit, ϕ provient du morphisme $\pi_*^G \phi : E_1 \longrightarrow E_2$. □

Corollaire 2.2 *Soit L un objet de $\mathcal{D}^G(X)$ formé de G-faisceaux localement libres. Alors L est image réciproque d'un objet de $\mathcal{D}(X/G)$ si et seulement si pour tout i, L_i est image réciproque d'un faisceau de* Coh(X/G).

Preuve. La partie directe est évidente. Réciproquement, si L est un complexe du type :

$$\pi^*(E_1) \xrightarrow{\phi_1} \pi^*(E_2) \quad \ldots \xrightarrow{\phi_{r-1}} \pi^*(E_r) \xrightarrow{\phi_r}$$

où chaque ϕ_i est un morphisme de G-faisceaux, alors en appliquant la proposition 2.3 on obtient que chaque morphisme provient du bas, et donc le complexe provient du bas. □

2.3 Critère général

D'après le paragraphe 1.4, pour tout sous-groupe H de G et tout schéma Δ_H associé, on a une décomposition de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^H(\overline{\Delta}_H)$ suivant les représentations irréductibles de H.

Théorème 2.1 *Un objet $E \in \mathcal{D}^G(X)$ est l'image par π^* d'un objet de $\mathcal{D}(X/G)$ si pour tout sous-groupe H de G, $Li_H^*(E) \in \mathcal{D}^H(\overline{\Delta}_H)$ appartient à la composante correspondant à la représentation triviale dans la décomposition de la catégorie dérivée. Autrement dit, la flèche*

$$\mathcal{D}^G(X) \xrightarrow{\oplus_H Li_H^*} \oplus_H \mathcal{D}^H(\overline{\Delta}_H)$$

est à but dans $\oplus_H \mathcal{D}^{\rho_0}(\overline{\Delta}_H)$.

Preuve. D'après le paragraphe 1.2 on peut toujours supposer que E est formé de G-faisceaux cohérents localement libres. Puis, d'après le paragraphe 2.2 un complexe de faisceaux localement libre se descend si et seulement si chacun des faisceaux se descend. Alors en appliquant la proposition 2.2, on obtient que E provient du bas si et seulement si pour tout sous-groupe H de G et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $i_H^*(E_k)$ est un H-faisceau cohérent sur $\overline{\Delta}_H$ appartenant à la composante correspondant à la représentation triviale dans la décomposition de $H-\mathrm{Coh}(\overline{\Delta}_H)$. Or les faisceaux localement libres sont i_H^*-acycliques, donc cette condition s'écrit encore (d'après le paragraphe 1.4) $Li_H^*(E) \in \mathcal{D}^{\rho_0}(\overline{\Delta}_H)$. □

Références

[Beĭ79] A. A. Beĭlinson. Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problem of linear algebra. *Funct. Anal. Appl*, 12 :214–216, 1979.

[BKR01] T. Bridgeland, A. King, and M. Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Am. Math. Soc.*, 14(No.3) :535–554, 2001.

[Bou81] Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie*, volume Chapitres 4, 5 et 6. Masson, 1981.

[Gro57] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J.*, 9 :119–221, 1957.

[Har66] R. Hartshorne. *Residues and duality.* Lect. Notes Math. **20**. Springer-Verlag, 1966.

[Lø83] K. Lønsted. On G-linebundles and $K_G^{\cdot}(X)$. *J. Math. Kyoto Univ*, 23(4) :775–793, 1983.

[Mum74] D. Mumford. *Abelian variety.* Oxford Univesity Press, 1974.

Sophie Térouanne
Université Grenoble 1
Institut Fourier
BP 74
38402 Saint Martin d'Hères Cedex
France
Sophie.Terouanne@ujf-grenoble.fr