Séries d'Eisenstein adéliques et leurs versions algébriques

Julien PUYDT

Prépublication de l'Institut Fourier n° 567 (2002)
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

1 Introduction

Les séries d'Eisenstein classiques :

$$E_{k,\chi} = \frac{L(1-k,\chi)}{2} + \sum_{n\geq 1}\sum_{d|n} \chi(d)\, d^{k-1} q^n$$

attachées aux caractères de Dirichlet χ mod M, $M \geq 1$ et aux nombres entiers $k \geq 3$, sont des exemples typiques de formes modulaires holomorphes, et fournissent des congruences pour les valeurs spéciales $L(1-k,\chi) = -B_{k,\chi}/k$ des séries de Dirichlet, où les $B_{k,\chi} = N^{k-1}\sum_{a=1}^{n} \chi(a)\, B_k(a/N)$ sont les nombres de Bernoulli généralisés. Selon Deligne-Ribet [6] et Kubota-Leopold [7], ces congruences proviennent de certaines distributions sur le groupe des classes d'idèles, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times} \cong \mathbb{R}_{+}^{\times} \times \prod_p \mathbb{Z}_p^{\times}$ (à valeurs dans l'espace des formes modulaires holomorphes). D'autre part, Katz [4] a étudié des séries d'Eisenstein analytiques réelles, utilisées par Scholl [1] dans une construction de systèmes d'Euler.

Le but du présent travail est de décrire des séries d'Eisenstein analytiques réelles adéliques et leurs versions algébriques dans un anneau de type $A[[q]][R]$ (avec en particulier l'anneau $A = \mathbb{C}$, $q = \exp(2i\pi z)$ et $R = (4\pi y)^{-1}$ où y est la partie imaginaire de z). À partir de cette description, on veut construire des mesures p-adiques sur $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}$, attachées à des formes modulaires $f = \sum_n a_n q^n$ classiques de poids $k \geq 2$, à l'aide de convolutions de distributions d'Eisenstein adéliques.

Par conséquent, on pourrait obtenir des congruences de type Deligne-Ribet pour toutes les valeurs spéciales de $L_f(s,\chi) = \sum_n \chi(n)\, a_n q^n$, avec $s = 1,\ldots,k-1$ et χ arbitraires.

Classification math. : 11F30, 11F67, 11M06, 33C15.
Mots-clés : séries d'Eisenstein, coefficients de Fourier, formes modulaires.

Ce passage de caractères de Dirichlet $\chi \bmod p^m$ à des caractères de conducteur quelconque correspond à la variation “horizontale” dans la théorie d'Iwasawa, et les valeurs spéciales considérées donnent des invariants numériques du type de Wiles ([8, 9]).

2 Définitions générales

Le but ici est de définir une distribution à valeurs dans un espace de formes modulaires semi-adéliques, à partir de la définition trouvée dans Scholl [1], mais modifiée pour pouvoir travailler avec des formes presque-holomorphes.

2.1 Formes modulaires semi-adéliques

2.1.1 Notations

Pour un anneau commutatif unitaire A, on note par G_A le groupe $GL_2(A)$, $\mathbb{A}_f = \hat{\mathbb{Z}} \bigotimes \mathbb{Q}$ sont les adèles finis sur $\mathbb{Q}$ (munis de la norme $|.|_f$ usuelle), et on abrège $G_f = G_{\mathbb{A}_f}$. On note $\mathcal{H}^{\pm} = \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré, munis des actions habituelles de $G_{\mathbb{R}}$ et $G_{\mathbb{R}}^{+}$. Pour $\gamma \in G_{\mathbb{R}}$ et $\tau \in \mathcal{H}^{\pm}$, on note $j(\gamma,\tau) = \det \gamma \cdot (c\tau + d)^{-1}$ le facteur d'holomorphie usuel. Pour définir la transformée de Fourier, on aura de plus besoin de définir un caractère “exponentiel” sur les adèles finis : $\psi_f = \prod_p \psi_p$, défini localement par : $\psi_p\left(\frac{x}{p^n}\right) = \exp\left(2i\pi\frac{x}{p^n}\right)$ pour $x \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\psi_p \ : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}^{\times}$. De manière générale, lorsque l'on considérera un objet “adélique” o, on notera sa partie finie o_f et sa partie archimédienne o_∞. On définit par exemple ainsi le caractère standard sur $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$: $\psi \ : \mathbb{A} \to \mathbb{C}^{\times}$ par : $\psi(x) = \exp(2i\pi x_\infty)\, \psi_f(-x_f)$.

2.1.2 Définitions

On appelle forme modulaire semi-adélique de poids k toute fonction F holomorphe en la première variable : $\mathcal{H}^{\pm} \times G_f \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- $\forall \gamma \in G_{\mathbb{Q}}, F(\gamma\tau,\gamma g) = j(\gamma,\tau)^{-k} F(\tau,g)$;
- il existe un sous-groupe compact ouvert K de G_f tel que $F(\tau,gh) = F(\tau,g)$ quel que soit $h \in K$.
- F est holomorphe en chaque pointe.

Toute forme modulaire semi-adélique F admet un développement en série de Fourier de la forme suivante : $F(\tau,g) = \sum_{m\in\mathbb{Q}} a_m(g) \exp(2i\pi m\tau)$ avec $\tau \in \mathcal{H}$ et $g \in G_f$. Le coefficient a_1 a un rôle très particulier ; on le nomme fonction de Whittaker de F, et sa connaissance permet, par modularité, de retrouver la plupart des autres coefficients : $a_m(g) = m^k a_1\left(\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$ si $m > 0$. Le calcul de cette fonction de Whittaker est donc un des points importants sur lesquels on va se pencher.

2.2 Formes modulaires presque-holomorphes

2.2.1 Séries formelles à exposant dans $\mathbb{Q}$

Pour A un anneau commutatif unitaire, on note $A\left[\left[q^{\mathbb{Q}}\right]\right]$ le sous-anneau de $A\left[\left[\mathbb{Q}^{+},+\right]\right]$ (dans lequel on a choisi de noter la variable : q), dont les éléments sont de la forme $\sum_{m\in\mathbb{Q}^{+}} a_m q^m$ avec $a_m = 0$ si $m \notin N^{-1}\mathbb{Z}$ pour un N non fixé, c'est-à-dire :

$$A\left[\left[q^{\mathbb{Q}}\right]\right] = \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Q}^{+}} a_m q^m \in A\left[\left[\mathbb{Q}^{+},+\right]\right] \mid \exists N \in \mathbb{N} / \forall m \notin N^{-1}\mathbb{Z}\, a_m = 0 \right\}$$

2.2.2 Presque-holomorphie en 0

On dit qu'une fonction, définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, est presque-holomorphe en ce point, si elle provient de l'anneau $\mathbb{C}\left[\left[q^{\mathbb{Q}}\right]\right]\left[\omega^{-1}\right]$ (ou $\overline{\mathbb{Q}}\left[\left[q^{\mathbb{Q}}\right]\right]\left[\omega^{-1}\right]$) via l'évaluation $q = \exp(2i\pi z)$, $\omega = 4\pi y$ (où y est la partie imaginaire de z).

2.2.3 Définition

On appelle forme modulaire semi-adélique presque-holomorphe de poids k toute fonction F presque-holomorphe en la première variable : $\mathcal{H}^{\pm} \times G_f \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- $\forall \gamma \in G_{\mathbb{Q}}, F(\gamma\tau,\gamma g) = j(\gamma,\tau)^{-k} F(\tau,g)$;
- il existe un sous-groupe compact ouvert K de G_f tel que $\forall h \in K$, $F(\tau,gh) = F(\tau,g)$;
- F est presque-holomorphe en chaque pointe.

3 Série d'Eisenstein : définition

3.1 Départ : séries d'Eisenstein selon Scholl [1]

Scholl définit de manière générale des séries d'Eisenstein, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{C}$, et Φ une fonction localement constante à support compact de $\mathbb{A}_f^2$ dans $\mathbb{C}$, par la formule suivante :

$$\Sigma_{k,s}(\phi)(\tau,g) = \sum_{0\neq \underline{m}\in\mathbb{Q}^2} (g\Phi)(\underline{m})\,(m_1 - m_2\tau)^{-k}\,|m_1 - m_2\tau|^{-2s}$$

avec l'action : $(g\Phi)(\underline{m}) = \Phi\left(g^{-1}\underline{m}\right)$ sur les fonctions de Schwartz, et l'action usuelle $(Fh)(\tau,g) = F(\tau,gh)$ sur les formes modulaires ; il fait tendre s vers 0, donne des résultats de G_f-équivariance pour les actions mentionnées, et donne la fonction de Whittaker :

$$\frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \lim_{s\to 0} \sum_{y\in\mathbb{Q}^{\times}} y^k\,|y|_{\infty}^{1-2s} \int_{\mathbb{A}_f} \psi_f\left(-\frac{x}{y}\right)(g\Phi)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx$$

3.2 Premier facteur correctif

Mais notre but n'est pas de faire tendre s vers 0, mais vers une autre limite, comme dans Panchishkin[2], pour obtenir non plus des formes modulaires holomorphes, mais presque-holomorphes ; il y a donc des modifications à apporter à la série $\Sigma_{k,s}$; on a d'abord besoin de garder la modularité avec $s \neq 0$, ce qui impose de multiplier la série de Scholl par un facteur supplémentaire, qui devient égal à 1 lorsque l'on fait l'hypothèse $s = 0$: $|y|^s$.

3.3 G_f-équivariance

L'introduction du facteur précédent fait perdre l'équivariance avec les actions définies par Scholl ; pour la récupérer, il faut :

- soit conserver les actions telles que Scholl les utilise, mais rajouter un second facteur correctif ;
- soit modifier l'une des actions pour qu'elle contienne le facteur correctif.

C'est le second choix qui est fait ici ; on définit donc les actions de G_f par :

- sur les formes modulaires : $(Fh)(\tau,g) = F(\tau,gh)$ (action classique)
- sur les fonctions de Schwartz : $(h\Phi)(\underline{m}) = |\det h|_f^{-s}\, \Phi\left(h^{-1}\underline{m}\right)$ (action modifiée par l'introduction d'un facteur, qui vaut 1 lorsque $s = 0$).

3.4 Résumé des propriétés

On a maintenant discuté de tous les éléments qui permettent de définir les séries d'Eisenstein étudiées ici :

$$E_{k,s}(\Phi)(\tau,g) = |y|^s \sum_{0 \neq \underline{m} \in \mathbb{Q}^2} (g\Phi)(\underline{m})\,(m_1 - m_2\tau)^{-k}\,|m_1 - m_2\tau|^{-2s}$$

Elles vérifient des propriétés convenables :

- de modularité : si $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$, on a : $E_{k,s}(\Phi)(\gamma\tau,\gamma g) = j(\gamma,\tau)^{-k}\, E_{k,s}(\Phi)(\tau,g)$
- de G_f-équivariance : $E_{k,s}(\Phi)\, h = E_{k,s}(h\Phi)$

Remarque 1. Cette équivariance a une conséquence intéressante : on va pouvoir supposer que Φ est à support dans $\hat{\mathbb{Z}}^2$; en effet, si on note d la matrice de $G_{\mathbb{Q}}$ de multiplication par l'entier $d \geq 0$, on a :

$$E_{k,s}(d\Phi)(\tau,g) = (E_{k,s}(\Phi)\, d)(\tau,g)$$

par équivariance, puis par définition de l'action :

$$E_{k,s}(d\Phi)(\tau,g) = E_{k,s}(\Phi)(\tau,gd)$$

mais comme $d\tau = \tau$, on peut aussi appliquer la modularité pour obtenir finalement :

$$E_{k,s}(d\Phi)(\tau,g) = d^{-k} E_{k,s}(\Phi)(\tau,g)$$

ce qui montre, comme $\mathrm{Supp}(d\Phi) = d \cdot \mathrm{Supp}(\Phi)$, qu'on peut faire les calculs pour une fonction à support entier.

4 Série d'Eisenstein : calcul des coefficients de Fourier

4.1 Fonction de Whittaker

Le but de ce paragraphe est le calcul explicite de la fonction de Whittaker W de $E_{k,s}(\Phi)$. Il faut noter que les coefficients de Fourier dépendent aussi de y.

Proposition 1. *On a la formule suivante, pour $g_f \in G_f$ et $\tau \in \mathcal{H}$:*

$$W(g_f,y) = \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \times \omega(4\pi y\ ; k+s,s)$$
$$\times \sum_{m\in\mathbb{Q}^\times} m^{-k} |m|_\infty^{1-2s} \int_{\mathbb{A}_f} (g_f\Phi)\begin{pmatrix} x \\ m \end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-x}{m}\right) dx$$

où $\omega(z\ ;\alpha,\beta) = z^\beta \Gamma(\beta)^{-1} \int_0^{+\infty} \exp(-zu)(u+1)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du.$

Démonstration. On considère la fonction

$$F\ : \mathbb{A} \to \mathbb{C}, x \mapsto E_{k,s}(\Phi)\left(\tau + x_\infty, \begin{pmatrix} 1 & x_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_f\right)$$

il s'agit en fait de faire agir la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $E_{k,s}(\Phi)$; on voit que lorsque $x \in \mathbb{Q}$, c'est l'action d'une matrice de $G_\mathbb{Q}$, et la modularité montre alors que F est $\mathbb{Q}$-périodique.

On sait que : $E_{k,s}(\Phi)(\tau,g_f) = \sum_m c_m(g_f,y)\exp(2i\pi m\tau)$, donc

$$F(x) = \sum_m c_m\left(\begin{pmatrix} 1 & x_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_f, y\right) \exp(2i\pi m(\tau + x_\infty))$$

et on a de plus :

$$F(x) = \sum_m a_m(\tau)\psi(mx)$$

par périodicité. En comparant les coefficients de Fourier dans les expressions précédentes, et en faisant le choix $x_f = 0$, il vient :

$$W(g_f,y) = a_1(\tau)\exp(-2i\pi\tau)\ \ ;$$

comme on sait calculer : $a_1 = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} F(x)\psi(-x)\,dx$, on obtient une première expression explicite :

$$W(g_f) = \exp(-2i\pi\tau) \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} E_{k,s}(\Phi)\left(\tau + x_\infty, \begin{pmatrix} 1 & x_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_f\right) \psi(-x)\,dx$$

dans laquelle on remplace $E_{k,s}(\Phi)$ par son expression en série, en laissant tout de suite de côté les termes indépendants de τ ($m_2 = 0$), qui ont une contribution nulle (ils n'apparaissent que dans le terme constant) :

$$\begin{aligned}W(g_f,y) &= \exp(-2i\pi\tau)\, y^s \sum_{m_1\in\mathbb{Q}} \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \sum_{m_2\in\mathbb{Q}^\times} \left(\begin{pmatrix}1 & x_f\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_f\Phi\right)\begin{pmatrix}m_1\\ m_2\end{pmatrix}\\ &\qquad \times \left(m_1 - m_2(\tau + x_\infty)\right)^{-k} \left|m_1 - m_2(\tau + x_\infty)\right|^{-2s} \psi(-x)\, dx\\ &= \exp(-2i\pi\tau)\, y^s \sum_{m_1\in\mathbb{Q}} \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \sum_{m_2\in\mathbb{Q}^\times} (g_f\Phi)\begin{pmatrix}m_1 - m_2 x_f\\ m_2\end{pmatrix}\\ &\qquad \times \left(m_1 - m_2\tau - m_2 x_\infty\right)^{-k} \left|m_1 - m_2\tau - m_2 x_\infty\right|^{-2s} \psi(-x)\, dx\end{aligned}$$

où on voit qu'on peut simplifier l'écriture en faisant le changement de variable : $z = m_1 - m_2 x$, ce qui donne : $x = \frac{m_1 - z}{m_2}$, et $dx = dz$ (changement de variable $\mathbb{Q}$-linéaire), d'où :

$$\begin{aligned}W(g_f,y) = \exp(-2i\pi\tau)\, y^s \sum_{m_1\in\mathbb{Q}} \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \sum_{m_2\in\mathbb{Q}^\times} (g_f\Phi)\begin{pmatrix}z_f\\ m_2\end{pmatrix}&\\ \times \left(z_\infty - m_2\tau\right)^{-k} \left|z_\infty - m_2\tau\right|^{-2s} \psi\left(\frac{z}{m_2}\right) dz&\end{aligned}$$

où la dépendance en m_1 a disparu, ce qui donne une expression intégrale :

$$\begin{aligned}W(g_f,y) = \exp(-2i\pi\tau)\, y^s \sum_{m_2\in\mathbb{Q}^\times} \int_{\mathbb{A}} (g_f\Phi)\begin{pmatrix}z_f\\ m_2\end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-z_f}{m_2}\right)&\\ \times \left(z_\infty - m_2\tau\right)^{-k} \left|z_\infty - m_2\tau\right|^{-2s} \psi_\infty\left(\frac{z_\infty}{m_2}\right) dz_f\, dz_\infty&\end{aligned}$$

dans laquelle tout est factorisable en une partie semi-adélique et une partie archimédienne, ce qui donne :

$$\begin{aligned}W(g_f,y) = \exp(-2i\pi\tau)\, y^s \sum_{m_2\in\mathbb{Q}^\times} \int_{\mathbb{A}_f} (g_f\Phi)\begin{pmatrix}z_f\\ m_2\end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-z_f}{m_2}\right) dz_f&\\ \times \int_{\mathbb{R}} \left(z_\infty - m_2\tau\right)^{-k} \left|z_\infty - m_2\tau\right|^{-2s} \exp\left(2i\pi\frac{z_\infty}{m_2}\right) dz_\infty&\end{aligned}$$

il suffit alors d'un changement de variable dans l'intégrale archimédienne pour obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned}W(g_f,y) = y^s \exp(-2i\pi\tau)\,(-1)^k \int_{\mathbb{R}} (\tau + x)^{-k} \left|\tau + x\right|^{-2s} \exp(-2i\pi x)\, dx&\\ \times \sum_{m\in\mathbb{Q}^\times} m^{-k} |m|_\infty^{1-2s} \int_{\mathbb{A}_f} (g\Phi)\begin{pmatrix}x\\ m\end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-x}{m}\right) dx&\end{aligned}$$

dans laquelle on voit apparaître une intégrale archimédienne, qui est calculée dans [5] : si on pose $\omega(z\,;\alpha,\beta) = z^{\beta}\Gamma(\beta)^{-1}\int_0^{+\infty}\exp(-zu)(u+1)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du$, on a (après prolongement analytique) la formule suivante :

$$\int_{\mathbb{R}}(\tau+x)^{-k}|\tau+x|^{-2s}\exp(-2i\pi x)\,dx = \frac{(2i\pi)^k\pi^s}{\Gamma(k+s)}\omega(4\pi y\,;k+s,s) \\ \times y^{-s}(-1)^k\exp(2i\pi\tau)$$

dont l'utilisation donne le lemme. □

Lemme 1. *où y est la partie imaginaire de τ.*

Remarque 2. Il faut noter que comme la fonction de Whittaker dépend de y, la relation qui permet de retrouver les autres coefficients de Fourier en la connaissant est modifiée de la façon suivante :

$$c_m(g_f,y) = m^k W\left(\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} g_f, my\right)$$

4.2 Calcul du coefficient constant

Proposition 2. *Le coefficient constant de $E_{k,s}(\Phi)$ est donné par la formule suivante :*

$$c_0(g_f,y) = \frac{(2i\pi)^k\pi^s}{(4\pi y)^{k+s-1}}\frac{\Gamma(k+2s-1)}{\Gamma(k+s)\Gamma(s)}\zeta\left(k-1,2s,\int_{\mathbb{A}_f}(g_f\Phi)\begin{pmatrix} z_f \\ \cdot\end{pmatrix}dz_f\right) \\ + y^s\zeta\left(k,2s,(g_f\Phi)\begin{pmatrix}\cdot \\ 0\end{pmatrix}\right)$$

où ζ est une fonction donnée par :

$$\zeta(p,q,\Psi) = \sum_{0\neq m\in\mathbb{Q}}\Psi(m)\,m^{-p}|m|^{-q}$$

Démonstration. On procède de manière similaire au calcul de la fonction de Whittaker ; on obtient cette fois la relation :

$$\begin{aligned} c_0(g_f,y) = a_0 &= \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} F(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} E_{k,s}(\Phi)\left(\tau + x_\infty, \begin{pmatrix} 1 & x_f \\ 0 & 1\end{pmatrix} g_f\right)dx \\ &= y^s\sum_{0\neq \underline{m}\in\mathbb{Q}^2}\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}(g_f\Phi)\begin{pmatrix} m_1 - m_2x_f \\ m_2\end{pmatrix}(m_1 - m_2x_\infty - m_2\tau)^{-k} \\ &\quad\times|m_1 - m_2x_\infty - m_2\tau|^{-2s}\,dx \end{aligned}$$

où on souhaite faire le changement de variable $z = m_1 - m_2 x$; ce qui n'est possible que si $m_2 \neq 0$: on coupe donc la somme en deux par cette condition, puisqu'ici, le cas $m_2 = 0$ est à prendre en considération :

$$c_0\left(g_f\right) = y^s \sum_{m_1 \in \mathbb{Q}} \sum_{0 \neq m_2 \in \mathbb{Q}} \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \left(g_f \Phi\right) \begin{pmatrix} z_f \\ m_2 \end{pmatrix} \left(z_\infty - m_2 \tau\right)^{-k} \ \left|z_\infty - m_2 \tau\right|^{-2s} dz$$
$$+ y^s \sum_{0 \neq m_1 \in \mathbb{Q}} \left(\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} dx\right) \left(g_f \Phi\right) \begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \end{pmatrix} m_1^{-k} \left|m_1\right|^{-2s}$$

où bien évidemment $\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} dx = 1$; on ne peut pas vraiment améliorer le second terme, mais le premier fait apparaître une somme sur $\mathbb{Q}$ d'intégrales sur $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$, donc une intégrale sur $\mathbb{A}$, que l'on va pouvoir factoriser en une partie finie et une partie archimédienne (de façon tout à fait similaire au cas de la fonction de Whittaker) :

$$c_0\left(g_f\right) = y^s \sum_{0 \neq m_2 \in \mathbb{Q}} \int_{\mathbb{A}_f} \left(g_f \Phi\right) \begin{pmatrix} z_f \\ m_2 \end{pmatrix} dz_f \ \int_{\mathbb{R}} \left(z_\infty - m_2 \tau\right)^{-k} \left|z_\infty - m_2 \tau\right|^{-2s} dz_\infty$$
$$+ y^s \sum_{0 \neq m_1 \in \mathbb{Q}} \left(g_f \Phi\right) \begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \end{pmatrix} m_1^{-k} \left|m_1\right|^{-2s}$$

l'intégrale archimédienne peut être rendue indépendante de m_2, ce qui amène à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} c_0\left(g_f\right) = y^s & \sum_{0 \neq m \in \mathbb{Q}} \left(\int_{\mathbb{A}_f} \left(g_f \Phi\right) \begin{pmatrix} z_f \\ m \end{pmatrix} dz_f\right) m^{1-k} \left|m\right|^{-2s} \\ & \times (-1)^k \left(\int_{\mathbb{R}} (x+\tau)^{-k} \left|x+\tau\right|^{-2s} dx\right) \\ & + y^s \sum_{0 \neq m \in \mathbb{Q}} \left(g_f \Phi\right) \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} m^{-k} \left|m\right|^{-2s} \end{aligned}$$

où l'on voit apparaître une sorte de fonction ζ, que je vais définir ainsi :

$$\zeta\left(p,q,\Psi\right) = \sum_{0 \neq m \in \mathbb{Q}} \Psi\left(m\right) m^{-p} \left|m\right|^{-q}$$

où $p$est entier, q complexe et $\Psi \ : \mathbb{A}_f \to \mathbb{C}$; et une intégrale archimédienne, qui est aussi calculée dans [5] :

$$\int_{\mathbb{R}} (x-\tau)^{-k} \left|x-\tau\right|^{-2s} dx = (2i\pi)^k \pi^s \frac{\Gamma\left(k+2s-1\right)}{\Gamma\left(k+s\right)\Gamma\left(s\right)} \frac{(-1)^k (4\pi)^s}{(4\pi y)^{k+2s-1}}$$

où y est la partie imaginaire de τ. On peut alors écrire :

$$c_0(g_f) = \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{(4\pi y)^{k+s-1}} \frac{\Gamma(k+2s-1)}{\Gamma(k+s)\Gamma(s)} \zeta\left(k-1{,}2s, \int_{\mathbb{A}_f} (g_f \Phi) \begin{pmatrix} z_f \\ \cdot \end{pmatrix} dz_f\right) + y^s \zeta\left(k{,}2s, (g_f\Phi)\begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

□

4.3 Prolongement méromorphe

Il faut noter que cette série, qui converge absolument lorsque $k + 2\Re(s) > 2$, se prolonge de façon méromorphe à tout le plan complexe. En effet, cette série est suffisamment proche de celle étudiée dans [5] pour que les calculs effectués s'appliquent.

Plus précisément, Shimura obtient des majorations des coefficients de Fourier, pour $k$fixé et $s$dans un compact, qui permettent d'utiliser le développement de Fourier pour prolonger la fonction de façon méromorphe à tout le plan s-complexe.

5 Lien avec la théorie classique

5.1 Séries d'Eisenstein de niveau 1

Le but ici est de vérifier que si l'on choisit k pair assez grand, $s = 0$, $\Phi = 1_{\hat{\mathbb{Z}}^2}$et $g_f = 1$, on retrouve bien les séries d'Eisenstein habituelles. Le calcul est assez facile, on calcule les coefficients de Fourier à partir de la fonction de Whittaker, celle-ci étant ici indépendante de y :

$$\begin{aligned} a_n &= n^k W\left(\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{(2i\pi n)^k}{(k-1)!} \sum_{m\in\mathbb{Q}^\times} |m|^{1-k} \int_{\mathbb{A}_f} \left(\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi\right) \begin{pmatrix} x \\ m \end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-x}{m}\right) dx \\ &= \frac{(2i\pi n)^k}{(k-1)!} \sum_{m\in\mathbb{Q}^\times} |m|^{1-k} \int_{\mathbb{A}_f} \Phi\begin{pmatrix} x/n \\ m \end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-x}{m}\right) dx \end{aligned}$$

on effectue ici un changement de variable $x = nx'$, pour retrouver un calcul de Φ facile :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2i\pi n)^k}{(k-1)!} \sum_{m\in\mathbb{Q}^\times} |m|^{1-k} |n|_f \int_{\mathbb{A}_f} \Phi\begin{pmatrix} x' \\ m \end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-nx'}{m}\right) dx' \\ &= \frac{(2i\pi)^k n^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{0\neq m\in\mathbb{Z}} |m|^{1-k} \int_{\hat{\mathbb{Z}}} \psi_f\left(\frac{-nx'}{m}\right) dx' \end{aligned}$$

on voit ici apparaître une intégrale d'un type bien connu : elle va fournir une indicatrice, qui va nous donner une condition de divisibilité ; en retravaillant cette condition, on verra que le facteur n^{k-1} devant la somme disparaît :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(2i\pi)^k n^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{0 \neq m \in \mathbb{Z}} |m|^{1-k} 1_{\hat{\mathbb{Z}}} \left(\frac{n}{m}\right) \\
&= \frac{(2i\pi)^k n^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m|n} |m|^{1-k} \\
&= \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{m|n} \left(\frac{n}{|m|}\right)^{k-1} \\
&= \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{d|n} |d|^{k-1}
\end{aligned}$$

où l'on voit apparaître la somme $\sigma_{k-1}(n)$ attendue.

5.2 Séries d'Eisenstein de niveau supérieur

On suppose toujours que $s = 0$, $g_f = 1$ et k assez grand (plus forcément pair), mais maintenant, on prend Φ de la forme $1_{a \bmod N \times b \bmod N}$, pour un $N \geq 1$. On calcule (en utilisant une des expressions déjà un peu simplifiée) :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} \left(\frac{n}{m}\right)^k |m| \int_{\mathbb{A}_f} \Phi\left(\frac{x}{m}\right) \psi_f\left(\frac{-nx}{m}\right) |n|_f \, dx \\
&= \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} \left(\frac{n}{m}\right)^k \left|\frac{n}{m}\right|_f \int_{\mathbb{A}_f} 1_{a+N\hat{\mathbb{Z}}}(x) \, 1_{b+N\hat{\mathbb{Z}}}(m) \, \psi_f\left(\frac{-nx}{m}\right) dx \\
&= \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} \left(\frac{n}{m}\right)^k \left|\frac{n}{m}\right|_f 1_{b+N\hat{\mathbb{Z}}}(m) \int_{\hat{\mathbb{Z}}} \psi_f\left(\frac{-n(a+Nx)}{m}\right) |N|_f \, dx \\
&= \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} \left(\frac{n}{m}\right)^k \left|\frac{nN}{m}\right|_f 1_{b+N\hat{\mathbb{Z}}}(m) \, \psi_f\left(\frac{-an}{m}\right) \int_{\hat{\mathbb{Z}}} \psi_f\left(\frac{-nNx}{m}\right) dx
\end{aligned}$$

où l'on voit là encore apparaître l'intégrale-indicatrice qui donne une relation de divisibilité :

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} \left(\frac{n}{m}\right)^k \left|\frac{nN}{m}\right|_f 1_{b+N\hat{\mathbb{Z}}}(m)\, \psi_f\left(\frac{-an}{m}\right) 1_{\hat{\mathbb{Z}}}\left(\frac{nN}{m}\right) \\
&= \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!N^k} \sum_{\substack{m \mid nN \\ m \equiv b \bmod N}} \left(\frac{nN}{m}\right)^k \left|\frac{nN}{m}\right|_f \psi_f\left(\frac{-a\left(\frac{nN}{m}\right)}{N}\right) \\
&= \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} N^{-k} \sum_{\substack{dd'=nN \\ d' \equiv b \bmod N}} (\operatorname{sgn} d)\, d^{k-1} \psi_f\left(\frac{-ad}{N}\right)
\end{aligned}
$$

où on a forcé l'apparition de facteurs en N^k pour obtenir une somme sur les $\frac{nN}{m}$, qui s'interprète aisément comme une somme conditionnelle sur les diviseurs.

6 Calculs explicites de coefficients de Fourier

6.1 Réduction du calcul

On va vouloir regarder les coefficients de Fourier de $E_{k,s}(\Phi)(\tau,1_f)$ pour diverses fonctions Φ ; on va donc essayer d'obtenir une expression de ses coefficients de Fourier à partir de laquelle les calculs seront plus simples. On va supposer que s est un entier, et que Φ est à support dans $\hat{\mathbb{Z}}^2$, ce qui signifie qu'on peut faire le calcul pour Φ de la forme $1_{a \bmod N \times b \bmod N}$, et ensuite conclure pour toute Φ. L'homogénéité de la distribution $E_{k,s}$ permet de ensuite de généraliser à un support compact dans $\mathbb{A}_f^2$, comme on l'a déjà dit.

Proposition 3. *Si s est entier, et $\Phi = 1_{a \bmod N \times b \bmod N}$, on a : (pour $n \geq 1$)*

$$
a_n = \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)\, N^{k+s}} \omega(4\pi ny\ ; k+s, s) \sum_{\substack{dd'=nN \\ d' \equiv b \bmod N}} \operatorname{sgn} d d^{k+s-1} d'^{-s} \psi_f\left(\frac{-ad}{N}\right)
$$

et

$$
\begin{aligned}
a_0 = \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{(4\pi y)^{k+s-1} N} \frac{\Gamma(k+2s-1)}{\Gamma(k+s)\Gamma(s)} &\sum_{m \equiv b \bmod N} m^{1-k} |m|^{-2s} \\
&+ 1_{b \bmod N}(0)\, y^s \sum_{m \equiv a \bmod N} m^{-k} |m|^{-2s}
\end{aligned}
$$

Démonstration. On calcule d'abord à partir de la définition de la fonction de Whittaker :

$$
\begin{aligned}
a_n &= n^k W\left(\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n\tau\right) \\
&= \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \omega(4\pi n y\ ; k+s, s) \sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} n^k m^{-k} |m|_\infty^{1-2s} \\
&\qquad \times \int_{\mathbb{A}_f} \left(\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi\right) \begin{pmatrix} x \\ m \end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-x}{m}\right) dx
\end{aligned}
$$

puis on utilise la définition de l'action, et le changement de variable $x = nz$:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \omega(4\pi n y\ ; k+s, s) \sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} n^{k+s} m^{-k} |m|_\infty^{1-2s} \\
&\qquad \times \int_{\mathbb{A}_f} \Phi \begin{pmatrix} \frac{x}{n} \\ m \end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-x}{m}\right) dx \\
&= \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \omega(4\pi n y\ ; k+s, s) \sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} n^{k+s-1} m^{-k} |m|_\infty^{1-2s} \\
&\qquad \times \int_{\mathbb{A}_f} \Phi \begin{pmatrix} z \\ m \end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-nz}{m}\right) dz
\end{aligned}
$$

et on est ramené au calcul de l'intégrale non-archimédienne, pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Q}^\times$, pour Φ telle qu'on l'a définie :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{A}_f} \Phi \begin{pmatrix} z \\ m \end{pmatrix} \psi_f\left(\frac{-nz}{m}\right) dz &= 1_{b \bmod N}(m) \int_{\hat{\mathbb{Z}}} \psi_f\left(\frac{-n(a+Nx)}{m}\right) \frac{1}{N} dx \\
&= 1_{b \bmod N}(m)\, \psi_f\left(\frac{-an}{m}\right) \frac{1}{N} \int_{\hat{\mathbb{Z}}} \psi_f\left(\frac{-nNx}{m}\right) dx \\
&= \frac{1}{N} \psi_f\left(\frac{-an}{m}\right) 1_{b \bmod N}(m)\, 1_{\mathbb{Z}}\left(\frac{nN}{m}\right)
\end{aligned}
$$

on obtient alors, en replaçant ce résultat dans l'expression des coefficients de Fourier :

$$
\begin{aligned}
a_n = \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \omega(4\pi n y\ ; k+s, s) &\sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} n^{k+s-1} m^{-k} |m|_\infty^{1-2s} \\
&\qquad \times \frac{1}{N} \psi_f\left(\frac{-an}{m}\right) 1_{b \bmod N}(m)\, 1_{\mathbb{Z}}\left(\frac{nN}{m}\right)
\end{aligned}
$$

expression dans laquelle je veux forcer l'apparition de facteurs en $\frac{nN}{m}$ pour pouvoir écrire une somme sur des diviseurs, comme dans le cas classique :

$$a_n = \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \omega(4\pi ny\ ; k+s,s) \frac{1}{N^{k+s}} \sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} \operatorname{sgn} d \left(\frac{Nn}{m}\right)^{k+s-1} m^{-s}$$
$$\times \psi_f \left(\frac{-a\frac{nN}{m}}{N}\right) 1_{b \bmod N}(m)\, 1_{\mathbb{Z}} \left(\frac{nN}{m}\right)$$

on obtient aisément la proposition à partir de cette dernière expression, ce qui clôt la preuve, dans la mesure où le calcul du coefficient constant est simple. □

6.2 Cas de l'indicatrice des entiers

On regarde ici le cas où $\Phi = 1_{\hat{\mathbb{Z}}^2}$; ce qui revient dans le calcul précédent, à choisir : $a = b = 0$ et $N = 1$; on a alors :

Proposition 4. *Les coefficients de Fourier sont donnés par la formule : (où $n \geq 1$)*

$$a_n = \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \omega(4\pi ny\ ; k+s,s) \sum_{dd'=n} \operatorname{sgn} d d^{k+s-1} d'^{-s}$$

6.3 Cas des caractères de Dirichlet

On s'intéresse ici à la situation suivante : χ_1 et χ_2 sont des caractères de Dirichlet de conducteurs N_1 et N_2 respectivement, avec $N_1 \wedge N_2 = 1$, et on considère la fonction $\Phi(x,y) = \chi_1(x)\chi_2(y)$; on a alors :

Proposition 5. *Les coefficients de Fourier sont donnés par la formule :*

$$a_n = \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \frac{\chi_2(N_1) G_{\chi_1}}{N_1^{k+s}} \omega(4\pi ny\ ; k+s,s)$$
$$\times \sum_{dd'=n} \overline{\chi_1}(d)\, \chi_2(d') \operatorname{sgn} d d^{k+s-1} d'^{-s}$$

où $G_{\chi_1} = \sum_{a \bmod N_1} \chi_1(a) \psi_f(-a/N_1)$ est la somme de Gauss de χ_1, et $n \geq 1$.

Démonstration. On écrit Φ sous la forme :

$$\sum_{a \bmod N} \sum_{b \bmod N} \chi_1(a)\, \chi_2(b)\, 1_{a \bmod N \times b \bmod N}$$

avec $N = N_1 N_2$, et on somme les expressions des coefficients de Fourier (on utilise ici le fait que $E_{k,s}$ est une distribution, donc linéaire). Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
a_n(\Phi) = {} & \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s) N^{k+s}} \\
& \times \sum_{b \bmod N} \sum_{\substack{dd'=nN \\ d' \equiv b \bmod N}} \omega(4\pi dd'y\ ; k+s, s)\, \chi_2(d') \operatorname{sgn} dd^{k+s-1} d'^{-s} \\
& \times \sum_{a \bmod N} \chi_1(a)\, \psi_f\left(\frac{-ad}{N}\right)
\end{aligned}
$$

où la somme sur b avec une condition ensuite se simplifie évidemment, et où seule la somme sur a reste à étudier :

$$
\begin{aligned}
\sum_{a \bmod N} \chi_1(a)\, \psi_f\left(\frac{-ad}{N}\right) &= \sum_{a \bmod N_1} \sum_{b \bmod N_2} \chi_1(a + N_1 b)\, \psi_f\left(\frac{-(a+N_1 b)\, d}{N}\right) \\
&= \sum_{a \bmod N_1} \sum_{b \bmod N_2} \chi_1(a)\, \psi_f\left(\frac{-ad}{N}\right) \psi_f\left(\frac{-bd}{N_2}\right) \\
&= \left(\sum_{a \bmod N_1} \chi_1(a)\, \psi_f\left(\frac{-ad}{N}\right)\right) \left(\sum_{b \bmod N_2} \psi_f\left(\frac{-bd}{N_2}\right)\right) \\
&= \left(\sum_{a \bmod N_1} \chi_1(a)\, \psi_f\left(\frac{-ad}{N}\right)\right) \left(N_2 1_{\hat{\mathbb{Z}}}\left(\frac{d}{N_2}\right)\right) \\
&= \left(\sum_{a \bmod N_1} \chi_1(a)\, \psi_f\left(\frac{-ad''}{N_1}\right)\right) \left(N_2 1_{\hat{\mathbb{Z}}}\left(\frac{d}{N_2}\right)\right) \\
&= \overline{\chi_1}(d'')\, G_{\chi_1} N_2 1_{\hat{\mathbb{Z}}}\left(\frac{d}{N_2}\right)
\end{aligned}
$$

où le second facteur permet de calculer le premier en supposant : $d = N_2 d''$, cette hypothèse permet alors de simplifier tous les N_2 en facteur dans l'expression de $a_n(\Phi)$, ainsi que la somme sur $\sum_{dd'=nN}$en $\sum_{dd'=nN_1}$; mais dans cette somme, comme le produit $\overline{\chi_1}(d)\, \chi_2(d')$ intervient, on a nécessairement $N_1 | d'$, ce qui permet de se ramener enfin à la somme $\sum_{dd'=n}$, mais fait apparaître le facteur $\chi_2(N_1)$. □

Cet exemple des caractères fait apparaître la série qui motive en partie ce travail, il est donc opportun de regarder aussi le coefficient constant dans ce cadre-là :

Proposition 6. *On suppose χ_2 trivial et on choisit $\chi_1 = \overline{\chi}$ un caractère de conducteur N ; alors :*

$$
a_0 = \frac{\overline{G_\chi}\, (2i\pi)^k \pi^s (-1)^s (4\pi y)^s}{N^{k+s} \Gamma(k+2s)} \left[1 + (-1)^k \chi(-1)\right] L(1-k-2s, \chi)
$$

Démonstration. Le terme constant est constitué de deux termes. Le premier est nul, car $\int_{\mathbb{A}_f} \overline{\chi} = 0$. Le second fait intervenir le caractère $\overline{\chi}$, et nous intéresse ; c'est : $y^s \zeta(k,2s,\overline{\chi})$; et en regroupant les termes de ζpour avoir une somme sur les entiers positifs, on fait apparaître la fonction L de $\overline{\chi}$, ainsi que le facteur de parité du caractère. On utilise alors l'équation fonctionnelle de cette fonction L, pour faire apparaître $L(1-k-2s,\chi)$ fois un facteur. En distinguant les deux cas : $k$et χ pairs d'une part, et k et χ impairs d'autre part, et en utilisant le fait que : $G_{\overline{\chi}} = \chi(-1)\overline{G_\chi}$ d'autre part, on établit la proposition. □

Ce résultat devient plus lisible sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} E_{k,s}(\Phi)(\tau,1) = {} & \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \frac{\overline{G_\chi}}{N^{k+s}} \left[1 + (-1)^k \chi(-1)\right] \\ & \times \left[(4\pi y)^s \frac{\Gamma(k+s)}{\Gamma(k+2s)} (-1)^s \frac{L(1-k-2s,\chi)}{2} \right. \\ & \left. + \chi(-1) \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{dd'=n \\ d,d'>0}} \frac{\omega(4\pi n y, k+s, s)}{n^s} \chi(d) d^{k+2s-1} \right) q^n \right] \end{aligned}$$

car on voit apparaître la série comme un facteur transcendant, fois un facteur algébrique, fois une série qui, quand on fait tendre s vers 0, est familière. Nous allons voir maintenant que cette remarque permet de transformer $E_{k,s}$ en distribution à valeurs presque-holomorphes, à coefficients algébriques.

7 Version algébrique

7.1 Prescription du coefficient de Fourier

On voudrait réaliser la construction inverse de la précédente, en se donnant a priori la forme des coefficients de Fourier par des conditions algébriques (de congruence, par exemple) sur les diviseurs de n, et trouver la fonction Φ qui permet de les obtenir à travers $E_{k,s}$. Plus précisément, on va s'appuyer sur la proposition suivante :

Proposition 7. *Si on se fixe $\widetilde{\Phi} : \mathbb{A}_f^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, à support compact dans $\hat{\mathbb{Z}}^2$, et si on lui associe une fonction Φ par la formule suivante :*

$$\Phi(x,m) = \int_{\mathbb{A}_f} \widetilde{\Phi}(z,m)\, \psi_f(zx)\, dz$$

alors on a, pour tout entier $n > 0$, la relation suivante :

$$\sum_{dd'=n} d^k |d|_\infty^{2s-1} \widetilde{\Phi}(d,d') = \sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} \left(\frac{n}{m}\right)^k \left|\frac{n}{m}\right|_\infty^{2s-1} \int_{\mathbb{A}_f} \Phi(x,m)\, \psi_f\left(\frac{-nx}{m}\right) dx$$

Démonstration. La relation est $\widetilde{\Phi}$-linéaire, donc on peut se contenter de la prouver pour $\widetilde{\Phi} = 1_{a \bmod N \times b \bmod N}$; on va pour cela commencer par calculer la fonction Φ correspondante :

$$\begin{aligned}
\Phi(x,m) &= \int_{\mathbb{A}_f} \widetilde{\Phi}(z,m)\,\psi_f(zx)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{A}_f} 1_{a \bmod N}(z)\,1_{b \bmod N}(m)\,\psi_f(zx)\,dz \\
&= 1_{b \bmod N}(m) \int_{\mathbb{A}_f} 1_{a \bmod N}(z)\,\psi_f(zx)\,dz \\
&= 1_{b \bmod N}(m) \int_{\hat{\mathbb{Z}}} \psi_f((a+Ny)\,x)\,d(a+Ny) \\
&= 1_{b \bmod N}(m)\,\psi_f(ax)\,N^{-1} 1_{\hat{\mathbb{Z}}}(Nx)
\end{aligned}$$

un commentaire est nécessaire à propos de cette expression : a n'est bien défini que modulo N, donc l'expression $\psi_f(ax)$ n'a aucun sens sans contexte ; mais ici, elle apparaît à côté d'une indicatrice $1_{\hat{\mathbb{Z}}}(Nx)$, qui permet d'assurer que l'expression complète est bien définie. On peut maintenant se lancer dans le calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{A}_f} \Phi(x,m)\,\psi_f\left(\frac{-nx}{m}\right) dx &= \int_{\mathbb{A}_f} \psi_f(ax)\,N^{-1} 1_{\hat{\mathbb{Z}}}(Nx)\,\psi_f\left(\frac{-nx}{m}\right) dx \\
&\quad \times 1_{b \bmod N}(m) \\
&= \int_{\hat{\mathbb{Z}}} \psi_f\left(\frac{az}{N}\right) \psi_f\left(\frac{-nz}{mN}\right) N^{-1} d\left(\frac{z}{N}\right) \\
&\quad \times 1_{b \bmod N}(m) \\
&= \int_{\hat{\mathbb{Z}}} \psi_f\left(\frac{a - \frac{n}{m}}{N} z\right) dz 1_{b \bmod N}(m) \\
&= 1_{b \bmod N}(m)\,1_{\hat{\mathbb{Z}}}\left(\frac{a - \frac{n}{m}}{N}\right)
\end{aligned}$$

il reste à expliciter la condition donnée par ces indicatrices : la première est facile ; elle demande que m soit un entier congru à b modulo N. La seconde affirme d'une part que m divise n(car on sait déjà que m est entier!), et d'autre part que cet entier $\frac{n}{m}$ est congru à a modulo N. On peut donc réécrire le terme de droite de la proposition sous la forme :

$$\begin{aligned}
\sum_{m \in \mathbb{Q}^\times} \left(\frac{n}{m}\right)^k \left|\frac{n}{m}\right|_\infty^{2s-1} &\int_{\mathbb{A}_f} \Phi(x,m)\,\psi_f\left(\frac{-nx}{m}\right) dx \\
&= \sum_{dd'=n} 1_{d \equiv a \bmod N}(d)\,1_{d' \equiv b \bmod N}(d')\,d^k\,|d|_\infty^{2s-1} \\
&= \sum_{dd'=n} d^k\,|d|_\infty^{2s-1}\,\widetilde{\Phi}(d,d')
\end{aligned}$$

ce qui clôt la démonstration. □

On constate alors qu'on peut définir une nouvelle distribution sur les fonctions $\widetilde{\Phi} : \mathbb{A}_f^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ localement constantes à support dans $\hat{\mathbb{Z}}^2$, par la formule :

$$G_{k,s}\left(\widetilde{\Phi}\right) = a_0 + \sum_{dd'>0} \omega\left(4\pi dd'y\ ; k+s,s\right)(dd')^{-s} d^k |d|_\infty^{2s-1} \widetilde{\Phi}(d,d') q^{dd'}$$

où le coefficient a_0 est à ajuster pour obtenir la proposition suivante :

Proposition 8. *On a la relation suivante entre les distributions $E_{k,s}$ et $G_{k,s}$:*

$$\frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} G_{k,s}\left(\widetilde{\Phi}\right) = E_{k,s}(\Phi)$$

où l'on a posé, comme précédemment : $\Phi(x,m) = \int_{\mathbb{A}_f} \widetilde{\Phi}(z,m)\psi_f(zx)\,dz$.

On voit que la distribution $G_{k,s}$ se présente de façon plus algébrique que la distribution $E_{k,s}$, puisque l'on peut choisir ses coefficients de Fourier, et on va voir qu'on peut la voir comme prenant ses valeurs dans les fonctions presque-holomorphes. Si on se fixe des coefficients de Fourier algébriques, on aura alors un analogue purement algébrique de $E_{k,s}$.

7.2 Version algébrique du facteur de non-holomorphie

Pour $r \in \mathbb{N}$, on trouve dans [5] la formule polynomiale suivante :

$$\omega\left(R^{-1},\alpha,-r\right) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-i)} R^i$$

qui permet, lorsque $s=-r$, de donner une version totalement algébrique de $G_{k,s}$: le facteur $\omega(4\pi y,k+s,s)$ fait apparaître une partie polynomiale en $(4\pi y)^{-1}$, qui entre dans le cadre de la théorie des fonctions presque-holomorphes, via l'identification $R=(4\pi y)^{-1}$.

7.3 Lien avec les séries de Ramanujan

Il y a une parenté évidente entre les séries $E_{k,s}$ et les séries dites "d'Eisenstein-Ramanujan" telles que considérées dans [4] (voir en particulier 5.11.3, page 517), comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
&\sum_{dd'=n>0} n^{-s} d^k |d|_\infty^{2s-1} \widetilde{\Phi}(d,d') \\
&\quad= \sum_{\substack{dd'=n>0\\ d,d'>0}} n^{-s} d^k d^{2s-1} \widetilde{\Phi}(d,d') + n^{-s}(-d)^k d^{2s-1} \widetilde{\Phi}(-d,-d') \\
&\quad= \sum_{\substack{dd'=n>0\\ d,d'>0}} d^{k+s-1} d'^{-s} \widetilde{\Phi}(d,d') + (-1)^{2s-1}(-d')^{-s}(-d)^{k+s-1} \widetilde{\Phi}(-d,-d') \\
&\quad= \sum_{\substack{dd'=n>0\\ d,d'>0}} d^{k+s-1} d'^{-s} \widetilde{\Phi}(d,d') - (-d')^{-s}(-d)^{k+s-1} \widetilde{\Phi}(-d,-d')
\end{aligned}$$

Références

[1] A. J. Scholl : *An introduction to Kato's Euler systems*, dans *Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry*, Cambridge University Press 1998.

[2] A.A. Panchishkin : *Two variable p-adic L functions attached to eigenfamilies of positive slope*, DFG - Forschergruppe Arithmetik (Heidelberg-Mannheim), Preprintserie 8 (2001), 1–63.

[3] H. Hida : *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Mathematical Society Student Texts 26, Cambridge University Press, 1993.

[4] N. Katz : *p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series*, Annals of Mathematics 104(2) (1976), 459–571.

[5] G. Shimura : *On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proceedings of the London Mathematical Society, 31(3) (1975), 79–98.

[6] P. Deligne, K.A. Ribet : *Values of Abelian L-functions at Negative Integers over Totally Real Fields*, Inventiones Mathematicae, 59 (1980), 227–286.

[7] T. Kubota, H.W. Leopold : *Eine p-adische Theorie der Zetawerte*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 214/215 (1964), 328–339.

[8] A. Wiles : *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics 141(3) (1995), pp443–551.

[9] H. Darmon : *The Shimura-Taniyama conjecture*, Russian Mathematical Surveys 50(3)(1995), 503–548.

Julien PUYDT
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
julien.puydt@ujf-grenoble.fr