

SUR UNE CONJECTURE DE MUKAI

LAURENT BONAVERO, CINZIA CASAGRANDE, OLIVIER DEBARRE, STÉPHANE DRUEL

Prépublication de l'Institut Fourier n° 566 (2002)
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html>

Résumé. Généralisant une question de Mukai, nous conjecturons qu'une variété de Fano X de nombre de Picard ρ_X et de pseudo-indice ι_X vérifie $\rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$. Nous démontrons cette conjecture dans plusieurs situations : X est une variété de Fano de dimension ≤ 4 , X est une variété de Fano torique de dimension ≤ 7 ou X est une variété de Fano toriques de dimension arbitraire avec $\iota_X \geq \dim(X)/3 + 1$. Enfin, nous présentons une approche nouvelle pour le cas général.

Abstract. Generalizing a question of Mukai, we conjecture that a Fano manifold X with Picard number ρ_X and pseudo-index ι_X satisfies $\rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$. We prove this inequality in several situations : X is a Fano manifold of dimension ≤ 4 , X is a toric Fano manifold of dimension ≤ 7 or X is a toric Fano manifold of arbitrary dimension with $\iota_X \geq \dim(X)/3 + 1$. Finally, we offer a new approach to the general case.

INTRODUCTION

Soit X une variété de Fano, c'est-à-dire une variété projective lisse dont le fibré anticanonique $-K_X$ est ample, définie sur \mathbb{C} . Notons ι_X le pseudo-indice de X , c'est-à-dire le plus petit entier de la forme $-K_X \cdot C$ où C est une courbe rationnelle de X , et ρ_X le nombre de Picard de X . L'indice r_X de X est le plus grand entier m tel qu'il existe un fibré en droites L satisfaisant $-K_X = mL$ dans $\text{Pic}(X)$; c'est un nombre particulièrement adapté à l'étude des variétés de Fano X avec $\rho_X = 1$, tandis le pseudo-indice nous semble plus adapté à l'étude des variétés de Fano X avec $\rho_X \geq 2$ (penser par exemple aux produits d'espaces projectifs). Mukai a proposé dans [Mu88] l'inégalité $\rho_X(r_X - 1) \leq \dim(X)$, vérifiée en dimension ≤ 3 à l'aide de la classification. Nous proposons plus généralement l'inégalité

$$(*) \quad \rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$$

avec égalité si et seulement si $X \simeq (\mathbb{P}^{\iota_X-1})^{\rho_X}$, en partie motivés par le

Théorème ([Wi90]). *Soit X une variété de Fano de dimension n , d'indice r_X et de pseudo-indice ι_X . Si $2\iota_X > n + 2$, on a $\rho_X = 1$. Si $2r_X = n + 2$, on a $\rho_X = 1$ sauf si $X \simeq (\mathbb{P}^{\iota_X-1})^2$.*

Date: 2002.

Mots clés : variétés de Fano, théorie de Mori, géométrie torique.

Classification A.M.S. : 14J45, 14E30, 14M25.

D'après la théorie de Mori, une variété de Fano X de dimension n vérifie toujours $\iota_X \leq n + 1$. Si $\iota_X = n + 1$, on a $X \simeq \mathbb{P}^n$ d'après un résultat de Cho, Miyaoka et Shepherd-Barron ([CMS00]) dont une démonstration simplifiée se trouve dans [Ke01].

Dans ce travail, on se propose de montrer l'inégalité (*) lorsque X est une variété de Fano de dimension 3 ou 4 (l'inégalité (*) est vérifiée directement en dimension 2) et lorsque X est une variété de Fano torique de pseudo-indice au moins égal à $\dim(X)/3 + 1$.

L'inégalité (*) peut être vérifiée directement pour les variétés de Fano de dimension 4 et d'indice au moins 2, dont la classification est établie par exemple dans [IP99].

Nous démontrons, sans utiliser les résultats de classification des variétés de Fano de dimension 3 ou 4, le résultat suivant, nouveau dans le cas des variétés d'indice 1 et de pseudo-indice au moins 2 :

Théorème. *Si X est une variété de Fano de dimension 3 ou 4, de pseudo-indice ι_X et de nombre de Picard ρ_X , on a $\rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$. Si $\rho_X(\iota_X - 1) = \dim(X)$, on a $X \simeq (\mathbb{P}^{\iota_X - 1})^{\rho_X}$.*

Dans la situation torique, nos résultats principaux sont :

Théorème. *Soit X une variété de Fano torique de dimension n , de pseudo-indice ι_X et de nombre de Picard ρ_X . Si $3\iota_X \geq n + 3$, on a $\rho_X(\iota_X - 1) \leq n$. Si de plus $\rho_X(\iota_X - 1) = n$, on a $X \simeq (\mathbb{P}^{\iota_X - 1})^{\rho_X}$.*

Théorème. *Soit X une variété de Fano torique de dimension $n \leq 7$, de pseudo-indice ι_X et de nombre de Picard ρ_X . On a $\rho_X(\iota_X - 1) \leq n$. Si $\rho_X(\iota_X - 1) = n$, on a $X \simeq (\mathbb{P}^{\iota_X - 1})^{\rho_X}$.*

Les méthodes utilisées sont celles de la théorie de Mori, dont nous rappelons plus bas quelques uns des résultats ou définitions. Mentionnons les deux résultats suivants obtenus au cours de la démonstration des théorèmes précédents et qui ont leur intérêt propre.

Proposition. *Soit X une variété de Fano de dimension n , de nombre de Picard $\rho_X \geq n$ et de pseudo-indice $\iota_X \geq 2$. Si toutes les contractions extrémales de X sont des fibrations, X est isomorphe à $(\mathbb{P}^1)^n$.*

Théorème. *Soit X une variété de Fano de dimension $n \geq 4$. Si toutes les contractions extrémales de X sont ou bien des éclatements lisses de centre une courbe lisse ou bien des fibrations de dimension relative 1 et que X possède au moins une contraction extrémale birationnelle, on a $\rho_X \leq 3$.*

Nous présentons enfin une approche possible, en toute dimension, où l'inégalité (*) découlerait de l'existence de certaines chaînes de courbes rationnelles. Le résultat suivant fournit une motivation supplémentaire en direction de la conjecture de Mukai généralisée.

Théorème. *Soit X une variété de Fano de dimension n , de nombre de Picard ρ_X et de pseudo-indice ι_X . S'il existe des familles propres irréductibles V^1, \dots, V^{ρ_X} de courbes rationnelles irréductibles sur X dont les classes dans $N_1(X)_{\mathbb{Q}}$ sont linéairement indépendantes et des courbes C^1, \dots, C^{ρ_X} avec $[C^j] \in V^j$ pour tout $1 \leq j \leq \rho_X$ et $C^j \cap C^{j+1} \neq \emptyset$ pour tout $1 \leq j \leq \rho_X - 1$, on a $\rho_X(\iota_X - 1) \leq n$.*

1. NOTATIONS

1.1. Si X est une variété projective, on note

$$N_1(X)_{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_i a_i C_i \mid a_i \in \mathbb{Q}, C_i \text{ courbe irréductible de } X \right\} / \equiv$$

où \equiv désigne l'équivalence numérique. Le cône de Mori, ou cône des courbes effectives, est le sous-cône de $N_1(X)_{\mathbb{Q}}$ défini par

$$NE(X) = \left\{ Z \in N_1(X)_{\mathbb{Q}} \mid Z \equiv \sum_i a_i C_i, a_i \geq 0 \right\}.$$

Si E est un diviseur et R une arête de $NE(X)$, la notation $E \cdot R > 0$ (resp. $E \cdot R = 0$) signifie $E \cdot C > 0$ (resp. $E \cdot C = 0$) pour toute courbe C de X telle que $[C] \in R$. La partie de $NE(X)$ située dans le demi-espace ouvert $\{-K_X > 0\}$ est localement polyédrale et pour toute arête R de $NE(X)$ telle que $-K_X \cdot R > 0$, il existe un morphisme $\varphi_R : X \rightarrow X_R$ à fibres connexes, appelé contraction extrémale, de X sur une variété projective normale X_R tel que les courbes irréductibles contractées par φ_R sont exactement celles dont la classe dans $N_1(X)_{\mathbb{Q}}$ appartient à R .

- Soit $\dim(X_R) < \dim(X)$; on dit que φ_R est une fibration, et $\rho_{X_R} = \rho_X - 1$.
- Soit φ_R est birationnelle, son lieu exceptionnel est un diviseur irréductible E tel que $E \cdot R < 0$: on dit que φ_R est une contraction divisorielle, et $\rho_{X_R} = \rho_X - 1$.
- Soit φ_R est birationnelle, son lieu exceptionnel est de codimension > 1 dans X : on dit que φ_R est une petite contraction.

Si X est une variété de Fano, le cône $NE(X)$ est polyédral et si $\varphi_R : X \rightarrow X_R$ est une contraction extrémale, $NE(X_R)$ est engendré par les $\varphi_R(R')$ où R' décrit l'ensemble (fini) des arêtes de $NE(X)$.

1.2. Rappelons un résultat de Wiśniewski ([Wi91], Theorem (1.1)) sur le lieu d'une contraction extrémale. Soit $\varphi_R : X \rightarrow X_R$ une telle contraction, d'arête R . Notons E_R le lieu de X couvert par les courbes contractées par φ_R et

$$l(R) = \min\{-K_X \cdot C \mid C \text{ courbe rationnelle contractée par } \varphi_R\}$$

la longueur de R . Pour toute composante irréductible F d'une fibre non triviale de φ_R , on a

$$2 \dim(E_R) \geq \dim(E_R) + \dim(F) \geq \dim(X) + l(R) - 1 \geq \dim(X) + \iota_X - 1.$$

1.3. Nous utiliserons aussi le résultat suivant : soient X une variété de Fano, R une arête de $NE(X)$ et $\varphi_R : X \rightarrow X_R$ la contraction associée. Si toutes les fibres de φ_R sont de dimension 1, X_R est lisse ([An85], Theorem 3.1(ii)) et une fibre générale F de φ_R est une courbe rationnelle lisse qui vérifie $-K_X \cdot F = 2 \geq \iota_X$. Deux cas sont alors possibles :

- soit φ_R est une fibration en \mathbb{P}^1 et X_R est une variété de Fano ([KMM92], Corollary 2.9) ;
- soit φ_R a au moins une fibre singulière et $\iota_X = 1$.

2. LA DIMENSION TROIS

2.1. Vérifions l'inégalité (*) en dimension 3. Le seul cas non trivial et non couvert par le résultat de Wiśniewski est donné par la

Proposition 2.2. *Soit X une variété de Fano de dimension 3. Si $\iota_X = 2$, on a $\rho_X \leq 3$.*

Démonstration. Supposons $\rho_X \geq 4$. La variété X possède au moins 4 contractions extrémales distinctes qui ne peuvent pas toutes être des fibrations ([Wi91], Theorem (2.2)). Les contractions extrémales sont complètement décrites par Mori ([Mo82], Theorem 3.3) et seule la contraction birationnelle lisse de centre un point est de longueur au moins 2. Cette possibilité est par exemple exclue par la classification des variétés dont l'éclatée en un point est de Fano ([BCW01]). ■

Toujours en dimension 3, le cas d'égalité dans l'inégalité (*) est caractérisé par la

Proposition 2.3. *Si $\rho_X(\iota_X - 1) = \dim(X) = 3$, on a $X \simeq (\mathbb{P}^{\iota_X - 1})^{\rho_X}$.*

Démonstration. Si $\rho_X = 1$ et $\iota_X = 4$, la variété X est isomorphe à \mathbb{P}^3 ([CMS00], [Ke01]). Supposons $\rho_X = 3$ et $\iota_X = 2$ et considérons une contraction extrême $\varphi : X \rightarrow Z$. Si φ est divisorielle de lieu exceptionnel E , alors $\varphi(E)$ est une courbe (cf. 1.2) et φ s'identifie à l'éclatement d'une courbe lisse dans la variété lisse Z ([Mo82], Corollary 3.4.1), ce qui est absurde puisque $\iota_X = 2$. Les contractions extrémales sont donc toutes des fibrations et le résultat annoncé est donné par la proposition qui suit. ■

Proposition 2.4. *Soit X une variété de Fano de dimension n , de nombre de Picard $\geq n$ et de pseudo-indice ≥ 2 . Si toutes les contractions extrémales de X sont des fibrations, X est isomorphe à $(\mathbb{P}^1)^n$.*

Démonstration. Montrons la proposition par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant immédiat. Par [Wi91], Theorem (2.2), toutes les contractions extrémales sont de dimension relative 1 et il y en a exactement n : le cône $\text{NE}(X)$ est donc simplicial. Notons R_1, \dots, R_n ses arêtes. Pour $1 \leq i \leq n - 1$, le cône $V_i = R_1 + \dots + R_i$ est une face extrême de $\text{NE}(X)$ dont on note $\varphi_i : X \rightarrow Z_i$ la contraction. Par le lemme de rigidité, φ_{i+1} se factorise en $X \xrightarrow{\varphi_i} Z_i \rightarrow Z_{i+1}$. L'inclusion $V_i \subset V_{i+1}$ étant stricte, on a $\dim(Z_i) > \dim(Z_{i+1})$. On en déduit $\dim(Z_{n-1}) = 1$ et Z_{n-1} est isomorphe à \mathbb{P}^1 .

Pour $1 \leq i \leq n$, on considère la contraction $\varphi_{R_i} : X \rightarrow W_i$. Les fibres de $\varphi_{R_{n-1}}$ et de φ_{R_n} se coupent en un nombre fini de points. Le morphisme φ_{R_n} est donc équidimensionnel de dimension relative 1. Il en résulte que W_n est une variété de Fano lisse (cf. 1.3) et que φ_{R_n} est une fibration en \mathbb{P}^1 puisque $\iota_X \geq 2$. Comme toute arête de $\text{NE}(W_n)$ est image d'une arête de $\text{NE}(X)$, le cône $\text{NE}(W_n)$ est simplicial et toute contraction extrême de W_n est une fibration.

Lemme 2.5. *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ une fibration en \mathbb{P}^r entre variétés projectives et lisses. On suppose que X est une variété de Fano. Alors,*

- (a) *Y est une variété de Fano et $\iota_Y \geq \iota_X$;*
- (b) *si Y vérifie (*), il en est de même de X ;*
- (c) *si $\iota_Y = \iota_X$ et que $\mathbb{P}^1 \rightarrow Y$ est une courbe de degré anticanonique ι_Y , le produit $\mathbb{P}^1 \times_Y X$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^r$.*

Démonstration. Par [KMM92], Corollary 2.9, Y est une variété de Fano. Soit $\mathbb{P}^1 \rightarrow Y$ une courbe de degré anticanonique ι_Y . Comme $H^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^*)$ est nul, il résulte de [Gr68], § 8, que la fibration $\mathbb{P}^1 \times_Y X \rightarrow \mathbb{P}^1$ est isomorphe au projectifié d'un fibré vectoriel $E = \bigoplus_{i=0}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ sur \mathbb{P}^1 , où les a_i sont des entiers positifs avec $a_0 = 0$. Si C_i est la section de $\mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}^1$ définie par le fibré quotient $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ de E , on a $-K_{\mathbb{P}(E)/\mathbb{P}^1} \cdot C_i = -ra_i$, d'où, en notant g la composée $\mathbb{P}^1 \rightarrow C_i \rightarrow X$, $\iota_X \leq -K_X \cdot g_* C_i = -\pi^* K_Y \cdot g_* C_i - K_{X/Y} \cdot g_* C_i = \iota_Y - g^* K_{X/Y} \cdot C_i = \iota_Y - K_{\mathbb{P}(E)/\mathbb{P}^1} \cdot C_i = \iota_Y - ra_i$

ce qui prouve (a) et (c).

Montrons (b). On a $\rho_Y = \rho_X - 1$, d'où, en utilisant (a),

$$(\rho_X - 1)(\iota_X - 1) \leq \rho_Y(\iota_Y - 1) \leq \dim(Y) = \dim X - r.$$

Si C est une droite contenue dans une fibre de π , on a $-K_X \cdot C = r + 1$, de sorte que $\iota_X \leq r + 1$ et

$$\rho_X(\iota_X - 1) \leq \iota_X - 1 + \dim(X) - r \leq \dim(X),$$

ce qui prouve (b). ■

On a donc $\iota_{W_n} \geq 2$ et par hypothèse de récurrence, W_n est isomorphe à $(\mathbb{P}^1)^{n-1}$. De plus, l'image réciproque de toute droite du type $\mathbb{P}^1 \times \{t_2, \dots, t_{n-1}\}$ est isomorphe à $(\mathbb{P}^1)^2$. Puisque $\text{NE}(X)$ est simplicial, la contraction $\varphi_{R_1+R_n}$ est la composée de φ_{R_n} et d'une projection $p : W_n \rightarrow (\mathbb{P}^1)^{n-2}$; de même, φ_{n-1} est la composée de φ_{R_n} et d'une projection $W_n \rightarrow \mathbb{P}^1$. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{\varphi_{R_n}} & W_n \simeq (\mathbb{P}^1)^{n-1} \\ & \swarrow \varphi_{n-1} & \downarrow \varphi_{R_1} & \searrow \varphi_{R_1+R_n} & \downarrow p \\ \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{p_1} & W_1 \simeq \mathbb{P}^1 \times (\mathbb{P}^1)^{n-2} & \xrightarrow{p_2} & (\mathbb{P}^1)^{n-2} \end{array}$$

où p_1 et p_2 sont les deux projections. L'image réciproque d'un point de $(\mathbb{P}^1)^{n-2}$ par $\varphi_{R_1+R_n}$ est isomorphe à $(\mathbb{P}^1)^2$, les restrictions de φ_{R_1} et φ_{R_n} étant les projections sur chacun des facteurs. En d'autres termes, une fibre de φ_{R_n} est envoyée isomorphiquement par φ_{R_1} sur le facteur \mathbb{P}^1 de W_1 . Cela signifie que le degré du morphisme produit

$$\varphi_{n-1} \times \varphi_{R_n} : X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times (\mathbb{P}^1)^{n-1},$$

qui est le degré de la restriction de φ_{n-1} à une fibre générale de φ_{R_n} , vaut 1. Ce morphisme étant fini, c'est un isomorphisme et la preuve de la proposition est achevée. ■

3. LA DIMENSION QUATRE

3.1. Montrons l'inégalité (*) en dimension 4. Une remarque essentielle est que sur une variété de Fano de dimension 4 et de pseudo-indice ≥ 2 , il n'y a pas de petite contraction (cf. 1.2).

Proposition 3.2. *Soit X une variété de Fano de dimension 4. Si $\iota_X = 3$, on a $\rho_X \leq 2$.*

Démonstration. Supposons $\rho_X \geq 3$. Les fibrations extrémales sont de dimension relative au moins 2 (cf. 1.2) et il y en a donc au plus 2 ([Wi91], Theorem (2.2)). Il existe ainsi au moins une contraction divisorielle contractant son lieu exceptionnel sur un point (cf. 1.2). Il en résulte l'existence sur X d'une contraction lisse de centre de codimension 2 ([Wi91], Corollary (1.3)), ce qui est absurde puisqu'une telle contraction est de longueur 1. ■

Le résultat principal de cette section est le

Théorème 3.3. *Soit X une variété de Fano de dimension 4. Si $\iota_X = 2$, on a $\rho_X \leq 4$.*

3.4. Quelques lemmes intermédiaires. La démonstration du théorème 3.3 repose sur les lemmes suivants.

Lemme 3.5. *Une variété de Fano X de dimension 4, de pseudo-indice 2 et de nombre de Picard ≥ 5 n'a pas de fibration extrémale $\varphi : X \rightarrow Y$ dont toutes les fibres sont de dimension 1.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Le morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ est une fibration lisse car $\iota_X = 2$, de sorte que Y est une variété de Fano lisse de dimension 3 d'après 1.3. Puisque $\rho_Y \geq 4$, il existe une contraction lisse $\pi : Y \rightarrow Z$ de centre une courbe lisse ([MM81], Theorem 5). Toute courbe de Y contractée par π est une courbe rationnelle de fibré normal dans Y égal à $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}$, donc de degré anticanonique 1. Ceci, avec le lemme 2.5, contredit l'hypothèse $\iota_X = 2$. ■

Lemme 3.6. *Soit X une variété de Fano de dimension 4, de pseudo-indice 2 et de nombre de Picard ≥ 5 . Toute contraction extrémale $X \rightarrow Y$ est ou bien une contraction divisorielle lisse de centre une courbe, autrement dit est l'éclatement d'une variété lisse Y le long d'une courbe lisse de Y , ou bien une fibration de dimension relative 1.*

Dans le cas d'une fibration, le lemme 3.5 montre qu'il y a au moins une fibre de dimension 2.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que les fibrations extrémales $X \rightarrow Y$ vérifient toutes $\dim(Y) = 2$ ou $\dim(Y) = 3$. En effet, si $\dim(Y) = 0$ (resp. $\dim(Y) = 1$), on a $\rho_X = 1$ (resp. $\rho_X = 2$). D'autre part, comme $\dim(X) = 4$ et $\rho_X \geq 5$, il y a au moins une contraction extrémale divisorielle ([Wi91], Theorem (2.2)).

Soient $\varphi : X \rightarrow Y$ une telle contraction et E son diviseur exceptionnel. Les fibres non triviales de φ sont de dimension ≥ 2 (cf. 1.2). Si $\dim(\varphi(E)) = 0$, il existe sur X une fibration extrémale dont toutes les fibres sont de dimension 1 ou une contraction extrémale birationnelle lisse de centre de codimension 2 ([Wi91], Corollary (1.3)), ces deux situations étant exclues respectivement par le lemme 3.5 et par l'hypothèse $\iota_X = 2$. Ainsi, $\dim(\varphi(E)) = 1$ et φ s'identifie à l'éclatement d'une variété lisse Y le long de la courbe lisse $\varphi(E)$ ([AW98], Theorem 4.1).

Vérifions enfin qu'il n'existe pas de fibration extrémale $\pi : X \rightarrow S$ où S est une surface. Supposons qu'une telle fibration existe ; S est alors une surface lisse ([ABW92], Proposition 1.4.1) et une fibre non triviale F de φ est isomorphe à \mathbb{P}^2 . Puisque $\varphi|_F : F \rightarrow S$ est fini, S est également isomorphe à \mathbb{P}^2 ([La83]), de sorte que $\rho_X = 2$, ce qui est absurde. ■

Le résultat suivant précise le cas des éclatements de centre une courbe lisse.

Proposition 3.7. *Soit X une variété de Fano de dimension $n \geq 4$ et de pseudo-indice $\iota_X \geq 2$. Si $\pi : X \rightarrow Y$ est l'éclatement d'une variété lisse Y le long d'une courbe lisse, Y est une variété de Fano et $\iota_Y \geq \iota_X$.*

Démonstration. Si Y n'est pas une variété de Fano, le centre de l'éclatement π est une courbe rationnelle lisse de fibré normal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus n-1}$ ([Wi91], Proposition (3.5)), de sorte que $\iota_X = 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

Vérifions ensuite l'inégalité $\iota_Y \geq 2$. Soient C le centre de π et E son diviseur exceptionnel. Si C' est une courbe rationnelle de Y distincte de C , et si on note encore C' sa transformée stricte dans X , on a $-K_Y \cdot C' = -K_X \cdot C' + (n-2)E \cdot C' \geq \iota_X$. Si $\iota_Y < \iota_X$, on ne peut donc avoir $-K_Y \cdot C' = \iota_Y$, de sorte que C est une courbe rationnelle qui satisfait $-K_Y \cdot C = \iota_Y$.

Soit $N_{C/Y} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ son fibré normal. On a d'une part

$$\iota_Y = -K_Y \cdot C = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + 2,$$

et d'autre part, si $C_i \subset E$ est la courbe définie par le fibré quotient $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ de $N_{C/Y}$,

$$-K_X \cdot C_i = \iota_Y - (n-2)a_i \geq \iota_X.$$

On en déduit $\iota_Y \geq \iota_X$, sauf si tous les a_i sont strictement négatifs, ce qu'exclut l'égalité $\sum_{i=1}^{n-1} a_i = \iota_Y - 2 \geq -1$. ■

3.8. Variétés de Fano spéciales. Nous nous intéressons ici à certaines variétés de Fano, que nous appelons « spéciales », faute d'une meilleure terminologie.

Définition. Une variété de Fano de dimension n sera dite *spéciale* si toutes ses contractions extrémales sont ou bien des éclatements lisses de centre une courbe lisse ou bien des fibrations de dimension relative 1 et si elle possède au moins une contraction extrémale birationnelle.

Exemple. La variété $X = \mathbb{P}_a^n \times \mathbb{P}^1$, où \mathbb{P}_a^n désigne l'éclatement de \mathbb{P}^n de centre a , est une variété de Fano spéciale, de pseudo-indice 2 et de nombre de Picard 3. En effet, X possède 3 contractions extrémales : $X \rightarrow \mathbb{P}_a^n$ et $X \rightarrow \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$, fibrations en \mathbb{P}^1 , et $X \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$, contraction lisse de centre $\{a\} \times \mathbb{P}^1$.

Cet exemple est d'une certaine façon extrémal comme le montre le

Théorème 3.9. *Une variété de Fano spéciale X de dimension ≥ 4 vérifie $\rho_X \leq 3$.*

La démonstration de ce résultat occupe la fin de ce paragraphe.

Lemme 3.10. *Soit X une variété de Fano spéciale de dimension ≥ 4 et de nombre de Picard ≥ 4 .*

- (a) *La variété X possède au plus une fibration extrémale de dimension relative 1.*
- (b) *Si X possède une fibration extrémale de dimension relative 1, d'arête R , les contractions extrémales birationnelles ont pour centre une courbe rationnelle à fibré normal trivial, leur diviseur exceptionnel E vérifie $E \cdot R = 0$ et $\iota_X \leq 2$.*

Démonstration. Soient $\pi : X \rightarrow W$ une contraction extrémale birationnelle de centre une courbe lisse $C \subset W$ et de diviseur exceptionnel E et $\varphi : X \rightarrow Y$ une fibration extrémale d'arête R et de dimension relative 1. Nous allons montrer que π détermine R , donc φ .

Le morphisme $\varphi|_E : E \rightarrow Y$ n'est pas surjectif car $\rho_E = 2$ et $\rho_Y \geq 3$; comme l'intersection d'une fibre de $\varphi|_E$ avec une fibre de $\pi|_E$ est finie, chaque fibre de $\varphi|_E$ est de dimension 1. En particulier, $\varphi(E)$ est de codimension 1 dans Y ; l'image réciproque par φ d'un point général de $\varphi(E)$ est de dimension 1, donc coïncide avec son image réciproque par $\varphi|_E$. C'est en particulier une courbe rationnelle qui domine C , de sorte que cette dernière aussi est rationnelle.

Le diviseur E est isomorphe à $\mathbb{P}(N_{C/W}^*)$, où $N_{C/W} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$. La fibration induite $\tilde{\varphi}|_E : E \rightarrow \tilde{\varphi}(E)$, où $\tilde{\varphi}(E)$ est la normalisation de $\varphi(E)$, est équidimensionnelle, de fibre générale \mathbb{P}^1 ; c'est une contraction extrémale puisque $\rho_E = 2$. Le cône de Mori de $\mathbb{P}(N_{C/W}^*)$ est engendré par deux courbes : une droite d'une fibre de $\pi|_E : E \rightarrow C$ et une section de $\pi|_E$. Il s'ensuit que E est isomorphe à $\mathbb{P}^{n-2} \times \mathbb{P}^1$, que $\pi|_E$ et $\varphi|_E$ sont les deux projections et que R est engendré

par une courbe du type $\{*\} \times \mathbb{P}^1$. Comme $n \geq 4$, il y a donc au plus une fibration extrémale de dimension relative 1.

Ce qui précède montre aussi que si X possède une fibration extrémale de dimension relative 1, les contractions extrémales birationnelles ont pour centre une courbe rationnelle de fibré normal trivial. En effet, on a vu que $\mathbb{P}(N_{C/W}^*)$ est isomorphe à $\mathbb{P}^{n-2} \times \mathbb{P}^1$, de sorte que $N_{C/W}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)^{\oplus n-1}$ pour un entier a convenable et, puisque les courbes du type $\{*\} \times \mathbb{P}^1$ ont un fibré normal (dans X) trivial (ce sont les fibres d'une fibration), c'est que $a = 0$. ■

Lemme 3.11. *Soit X une variété projective lisse de dimension 4 et soit $\pi : X \rightarrow W$ (resp. $\pi' : X \rightarrow W'$, $\pi'' : X \rightarrow W''$) une contraction extrémale birationnelle lisse de centre une courbe lisse $C \subset W$ (resp. $C' \subset W'$, $C'' \subset W''$) d'arête R (resp. R' , R'') et de diviseur exceptionnel E (resp. E' , E'').*

- (a) *Si $R \neq R'$ et $E \cap E' \neq \emptyset$, on a $E \cdot R' > 0$ et $E' \cdot R > 0$.*
- (b) *Si R , R' et R'' sont deux à deux distinctes et si $E \cap E' \neq \emptyset$ et $E \cap E'' \neq \emptyset$, on a $E' \cap E'' \neq \emptyset$.*

Démonstration. Vérifions le point (a). Soit x un point de $E \cap E'$. La surface $\pi^{-1}(\pi(x))$, isomorphe à \mathbb{P}^2 , n'est pas contenue dans E' car $R \neq R'$. Il existe donc une courbe dans $\pi^{-1}(\pi(x))$ passant par p et non contenue dans E' , d'où (a) en échangeant les rôles de E et E' .

Vérifions le point (b). Soit $y \in C$. Les courbes $\pi^{-1}(y) \cap E'$ et $\pi^{-1}(y) \cap E''$ sont contenues dans $\pi^{-1}(y)$, qui est isomorphe à \mathbb{P}^2 , de sorte que $\pi^{-1}(y) \cap E' \cap E'' \neq \emptyset$, d'où (b). ■

3.12. Démonstration du théorème 3.9. Supposons $\rho_X \geq 4$. Par hypothèse, il existe une contraction extrémale birationnelle $\pi : X \rightarrow W$ d'arête R_1 et de diviseur exceptionnel E_1 , d'image une variété de Fano lisse (proposition 3.7) et de centre une courbe lisse $C \subset W$.

Soit C_1 une courbe telle que $E_1 \cdot C_1 > 0$. Cette courbe est numériquement combinaison linéaire à coefficients rationnels strictement positifs de classes engendrant des arêtes. L'une d'entre elles, notée R_2 , satisfait $E_1 \cdot R_2 > 0$. Le lemme 3.10(b) entraîne que la contraction φ_{R_2} est birationnelle.

Notons $R_1, R_2, \dots, R_k, R_{k+1}, \dots, R_m, R_F$ les arêtes de $\text{NE}(X)$, où

- les contractions φ_{R_i} sont birationnelles de diviseur exceptionnel E_i (noter que $\pi = \varphi_{R_1}$);
- φ_{R_F} est l'éventuelle unique fibration et, d'après le lemme 3.10(b), $E_i \cdot R_F = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$;
- $E_1 \cap E_i \neq \emptyset$ pour $2 \leq i \leq k$ d'où, d'après le lemme 3.11(a), $E_1 \cdot R_i > 0$;
- $E_1 \cap E_i = \emptyset$ pour $k+1 \leq i \leq m$, d'où, d'après le lemme 3.11(b), $E_2 \cap E_i = \emptyset$.

Supposons $n \geq 5$. L'intersection $E_1 \cap E_2$ n'est pas vide, de dimension au moins $n-2 \geq 3$: il y a donc des courbes de $E_1 \cap E_2$ contractées à la fois par φ_{R_1} et par φ_{R_2} , ce qui est absurde.

Supposons $n = 4$ et vérifions que C est extrémale dans $\text{NE}(W)$. Rappelons que ce cône est engendré par $\pi(R_F)$ et les $\pi(R_i)$ pour $i \geq 2$. Pour $2 \leq i \leq k$, la classe de C appartient à $\pi(R_i)$, ainsi qu'à $\pi(R_F)$: en effet, chaque fibre non triviale de φ_{R_i} intersecte E_1 le long d'une courbe C_i telle que $\pi(C_i) = C$, de même, toute fibre F de φ_{R_F} intersectant E_1 est contenue dans E_1 et satisfait donc $\pi(F) = C$. Si la classe de C n'est pas extrémale, $\text{NE}(W)$ est donc engendré par les arêtes $\pi(R_i)$ pour $i \geq k+1$. L'image $\pi(E_2)$ est un diviseur effectif de W numériquement trivial puisque $E_2 \cdot R_F = E_2 \cdot R_i = 0$, ce qui est absurde.

Étudions la contraction extrémale $\varphi : W \rightarrow Y$ d'arête engendrée par C et montrons que le diviseur $\pi(E_2)$ est contracté sur un point par φ . Notons W_2 l'image de φ_{R_2} et $C_2 \subset W_2$ son centre. Pour tout $y \in C_2$, la fibre $\varphi_{R_2}^{-1}(y)$, isomorphe à \mathbb{P}^2 , contient une courbe dont l'image par π est C et qui est donc contractée par φ sur le point $\varphi(C)$. D'autre part, $\pi(\varphi_{R_2}^{-1}(y))$ est également contracté sur le point $\varphi(C)$. La contraction $\varphi : W \rightarrow Y$ est donc ou bien divisorielle ou bien une fibration. Soit $C' \in R_2$ une courbe rationnelle de X telle que $E_2 \cdot C' = -1$. Il existe un entier $r \geq 1$ tel que

$$\pi(E_2) \cdot \pi_*(C') = \pi^*(\pi(E_2)) \cdot C' = (E_2 + rE) \cdot C' = -1 + rE \cdot C'.$$

Or $E \cdot C' \geq 1$; on en déduit $\pi(E_2) \cdot \pi_*(C') \geq 0$ puis, puisque les courbes C et $\pi_*(C')$ sont numériquement proportionnelles, $\pi(E_2) \cdot C \geq 0$.

Comme $\pi(E_2)$ est contracté sur un point par φ , le calcul d'intersection précédent montre que φ est une fibration. En particulier, $\dim(Y) \leq 1$ et $\rho_W \leq 2$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé $\rho_X \geq 4$. ■

3.13. Démonstration du théorème 3.3. Le lemme 3.6 montre que si X est une variété de Fano de dimension 4, de pseudo-indice 2 et de nombre de Picard ≥ 5 , la contraction extrémale associée à toute arête extrémale de X est soit une contraction divisorielle lisse de centre une courbe lisse, soit une fibration de dimension relative 1. De plus, comme $\rho_X \geq 5$, il existe sur X au moins une contraction extrémale birationnelle ([Wi91], Theorem (2.2)). C'est donc que X est spéciale et le théorème 3.9 permet de conclure à une absurdité. ■

3.14. Familles propres de courbes rationnelles. Nous renvoyons au livre [Ko96] pour plus de détails sur les notations et les rappels qui suivent. Soit X une variété complexe, projective, lisse et connexe. Soit $\text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ le schéma des morphismes birationnels de \mathbb{P}^1 vers X et soit $\text{Hom}_{\text{bir}}^n(\mathbb{P}^1, X)$ sa normalisation. Le groupe linéaire $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ agit sur $\text{Hom}_{\text{bir}}^n(\mathbb{P}^1, X)$ et $\text{Hom}_{\text{bir}}^n(\mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1$. Les quotients géométriques au sens de Mumford existent et seront respectivement notés $\text{RatCurves}^n(X)$ et $\text{Univ}^{rc}(X)$. Soit $V \subset \text{RatCurves}^n(X)$ une famille propre irréductible de courbes rationnelles irréductibles sur X et soit $\mathcal{U} \subset \text{Univ}^{rc}(X)$ la famille universelle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\text{ev}} & X \\ \pi \downarrow & & \\ & & V \end{array}$$

Notons $\text{lieu}(V) = \text{ev}(\mathcal{U})$ l'ensemble des points de X par lesquels il passe une courbe rationnelle C de X telle que $[C] \in V$. Soit $x \in \text{lieu}(V)$; on note $V_x = \pi(\text{ev}^{-1}(x)) \subset V$ les courbes de V passant par x , puis $\mathcal{U}_x = \pi^{-1}(V_x)$ et $\text{lieu}(V_x) = \text{ev}(\mathcal{U}_x)$. Les dimensions de ces différentes variétés satisfont

$$(1) \quad \begin{aligned} \dim(V) &\geq -K_X \cdot V + n - 3 \\ \dim(V_x) &\geq -K_X \cdot V - 2 \end{aligned}$$

où $-K_X \cdot V$ désigne l'intersection $-K_X \cdot C$ pour une courbe rationnelle C de X telle que $[C] \in V$. Si x est un point général de $\text{lieu}(V)$, on a

$$(2) \quad \dim(\text{lieu}(V)) + \dim(V_x) = \dim(V) + 1$$

et, par le lemme de cassage ([Mo79], Theorem 6),

$$\dim(\text{lieu}(V_x)) = \dim(V_x) + 1 \geq -K_X \cdot V - 1.$$

Nous utiliserons de façon répétée le résultat suivant ([Ko96], II.4.21).

Lemme 3.15. *Soit $V \subset \text{RatCurves}^n(X)$ une famille propre et irréductible de courbes rationnelles irréductibles sur une variété X projective et lisse et soit $x \in \text{lieu}(V)$. Toute courbe tracée sur $\text{lieu}(V_x)$ est numériquement proportionnelle à une courbe C telle que $[C] \in V$.*

3.16. La famille V détermine une relation d'équivalence sur X pour laquelle des points x et x' de X sont équivalents s'il existe une chaîne connexe de courbes rationnelles de V passant par x et x' . Il existe un ouvert $X_0 \subset X$ et un morphisme propre $X_0 \rightarrow Z_0$ à fibres connexes vers une variété normale dont les fibres sont des classes d'équivalence pour la relation précédente ([Ko96], IV.4.16).

3.17. **Les cas d'égalité.** L'objet de ce paragraphe est l'étude des cas d'égalité dans (*).

Proposition 3.18. *Soit X une variété de Fano de dimension 4. Si $\rho_X(\iota_X - 1) = 4$, la variété X est isomorphe à $(\mathbb{P}^{\iota_X-1})^{\rho_X}$.*

Démonstration. Si $\rho_X = 1$ et $\iota_X = 5$, la variété X est isomorphe à \mathbb{P}^4 ([CMS00], [Ke01]).

Supposons $\rho_X = 2$ et $\iota_X = 3$. Notons $\varphi_1 : X \rightarrow W_1$ et $\varphi_2 : X \rightarrow W_2$ les deux contractions extrémales, d'arêtes respectives R_1 et R_2 . Elles sont ou bien divisorielles ou bien des fibrations (cf. 1.2). Supposons par exemple que φ_1 soit divisorielle. Le lieu exceptionnel E_1 de φ_1 est contracté sur un point par φ_1 (cf. 1.2). Rappelons que l'intersection de fibres de deux contractions extrémales différentes est finie. Les fibres non triviales de φ_2 sont de dimension au moins 2, donc ne rencontrent pas E_1 , autrement dit, φ_2 est également divisorielle de lieu exceptionnel E_2 disjoint de E_1 . Le diviseur $-E_1$ est donc numériquement effectif puisque $-E_1 \cdot R_1 > 0$ et $-E_1 \cdot R_2 = 0$, ce qui est manifestement absurde. Les morphismes φ_1 et φ_2 sont donc des fibrations équidimensionnelles de dimension relative 2 (cf. 1.2) et W_1 et W_2 sont lisses ([ABW92], Proposition 1.4.1). Une fibre générale F_1 (resp. F_2) de φ_1 (resp. φ_2) est de pseudo-indice 3 par la formule d'adjonction et donc isomorphe à \mathbb{P}^2 . Le morphisme $F_1 \rightarrow W_2$ (resp. $F_2 \rightarrow W_1$) est fini et W_1 (resp. W_2) est isomorphe à \mathbb{P}^2 par le théorème de Lazarsfeld ([La83]).

Les fibres de φ_2 ne sont *a priori* pas des sections de φ_1 . Nous allons montrer que de telles sections existent. Si $\ell \subset \mathbb{P}^2$ est une droite générale, $X_\ell = \varphi_1^{-1}(\ell)$ est lisse et connexe. Les fibres générales de $X_\ell \rightarrow \ell$ sont isomorphes à \mathbb{P}^2 . Il existe donc une section de $X_\ell \rightarrow \ell$ par le théorème de Tsen ([Ko96], Theorem IV.6.5).

Soit donc $C \subset X$ une courbe rationnelle vérifiant $C \cdot \varphi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) = 1$, de degré minimal relativement au diviseur ample $-K_X$. La courbe C détermine une famille propre irréductible $V \subset \text{RatCurves}^n(X)$ de courbes rationnelles irréductibles sur X (cf. 3.14). La dimension de V est au moins $-K_X \cdot C + 1 \geq 4$ et celle de V_x , pour $x \in \text{lieu}(V)$, au moins $-K_X \cdot C - 2 \geq 1$. Si la dimension de $\text{lieu}(V_x)$ est au moins 3, il rencontre une fibre générale de φ_1 au moins le long d'une courbe et $[C] \in R_1$ (cf. lemme 3.15) ce qui est absurde par le choix de C . Ainsi, $\dim(\text{lieu}(V_x)) = 2$ et le lieu de V est X par la formule (2) de 3.14.

Il existe un ouvert $X_0 \subset X$, une variété normale Z_0 et un morphisme propre $q : X_0 \rightarrow Z_0$ à fibres connexes dont les fibres sont des classes pour la relation d'équivalence déterminée par

V (cf. 3.14). La famille V est couvrante et Z_0 est donc de dimension au plus 3. Soient F une fibre générale de q et x un point de F . Comme $\dim(\text{lieu}(V_x)) = 2$, on a $\dim(F) \geq 2$. Si F est de dimension au moins 3, elle rencontre une fibre générale de φ_1 au moins le long d'une courbe. Comme F est couverte par une famille propre de courbes rationnelles irréductibles de V , toutes les courbes de F sont algébriquement équivalentes à un multiple de C ([Ko96], IV 3.13.3) et $[C] \in R_1$, ce qui est à nouveau absurde. Ainsi F est une surface de pseudo-indice 3 par la formule d'adjonction, donc isomorphe à \mathbb{P}^2 ; on a $F = \text{lieu}(V_x)$ pour tout x dans F , les courbes de V_x étant les droites passant par x . Notons que F est une section de φ_1 .

Vérifions que l'on peut prendre $X_0 = X$. Le fibré normal à F dans X est trivial et le schéma de Hilbert de X est donc lisse au point $[F]$. Soient H son unique composante passant par $[F]$ et $X' \subset X \times H$ la famille universelle. Quitte à remplacer Z_0 par un ouvert dense, on peut supposer que q est plat et on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\varphi} & X \\ q \downarrow & & \pi \downarrow & & \\ Z_0 & \longrightarrow & H & & \end{array}$$

où le carré est cartésien et où la composée des flèches horizontales supérieures est l'inclusion. Le morphisme π s'identifie, au-dessus d'un ouvert H_0 convenable de H , au morphisme $X_0 \rightarrow Z_0$.

Fixons un point t_0 de H et des points x'_1 et x'_2 de $\pi^{-1}(t_0)$. Notons $T \rightarrow H$ un germe de courbe lisse passant par t_0 et rencontrant H_0 . Le schéma $\pi_T : X'_T \rightarrow T$ obtenu par le changement de base $T \rightarrow H$ est irréductible : il existe donc des courbes $T_1 \rightarrow X'_T$ et $T_2 \rightarrow X'_T$ dominant T et rencontrant $\pi_T^{-1}(t_0)$ uniquement en x'_1 et x'_2 respectivement. Pour tous points $t_1 \in T_1$ et $t_2 \in T_2$ situés au-dessus du même point général t de T , les points correspondant de X peuvent être joints par une (unique) courbe $C_{t_1, t_2} \subset \pi_T^{-1}(t)$ de V . Cette famille étant propre, les courbes C_{t_1, t_2} dégèrent vers une courbe de V , qui est en particulier irréductible, joignant x'_1 et x'_2 . Les fibres de π sont donc irréductibles et deux points quelconques sont reliés par une courbe de V .

Supposons que le morphisme φ contracte une courbe irréductible $C \subset X'$ vers un point x de X . Celle-ci est horizontale pour π et le lieu couvert par les $\varphi(X'_t)$, pour $t \in \pi(C)$, est de dimension 3. Ainsi, le lieu couvert par les courbes de V_x est de dimension 3, ce qui est exclu par les arguments précédents. Le morphisme φ est donc birationnel et fini : c'est un isomorphisme.

Notons $H' \rightarrow H_{\text{réd}}$ la normalisation ; il existe une factorisation $\pi : X' \xrightarrow{\pi'} H' \rightarrow H_{\text{réd}}$ et le morphisme $q' = \pi' \circ \varphi^{-1} : X \rightarrow H'$ étend q . Le morphisme produit $\varphi_1 \times q' : X \rightarrow \mathbb{P}^2 \times H'$ est birationnel (puisque'une fibre générale de q' est une section de φ_1) ; puisque $\rho_X = 2$, il est fini : c'est un isomorphisme. On en déduit que H' est lisse et, comme les fibres de φ_1 , isomorphe à \mathbb{P}^2 .

Supposons $\rho_X = 4$ et $\iota_X = 2$. Par 1.2, toute contraction extrémale birationnelle est divisorielle et ses fibres non triviales sont de dimension ≥ 2 . Vérifions que les fibrations extrémales, s'il en existe, sont de dimension relative 1. Soit $\varphi : X \rightarrow Z$ une telle contraction ; supposons qu'elle soit de dimension relative au moins 2. Notons que Z est lisse ([ABW92], Proposition 1.4.1). Puisque $\rho_X = 4$, il existe ([Wi91], Theorem (2.2)) une contraction extrémale birationnelle ; ses fibres non triviales sont de dimension ≥ 2 , de sorte que φ est de dimension relative 2. La variété W est donc lisse et ψ s'identifie à l'éclatement d'une courbe lisse dans W ([AW98], Theorem 4.1). Toute fibre de $\psi|_E : E \rightarrow \psi(E)$ est en particulier isomorphe à \mathbb{P}^2 et domine Z . Il en résulte que Z est

isomorphe à \mathbb{P}^2 ([La83]) ce qui est absurde puisque $\rho_Z = \rho_X - 1 = 3$.

La variété X n'est pas spéciale (théorème 3.9) et ou bien toutes les contractions élémentaires sont des fibrations de dimension relative 1, ou bien il existe une contraction birationnelle $\psi : X \rightarrow W$, divisorielle, dont le lieu exceptionnel E est contracté sur un point. Vérifions que ce dernier cas ne peut pas se produire. Il existe alors une contraction extrémale $\varphi : X \rightarrow Z$ dont le lieu exceptionnel rencontre E . L'intersection d'une fibre de φ avec E étant finie, cette fibre est de dimension au plus 1. Puisque $\iota_X = 2$, le morphisme φ est une fibration lisse de dimension relative 1 par 1.3. On en déduit que Z est une variété de Fano de dimension 3, de nombre de Picard 3 et de pseudo-indice au moins 2 (lemme 2.5) et donc exactement 2 (cf. section 2). Finalement, Z est isomorphe à $(\mathbb{P}^1)^3$ (proposition 2.3). Posons $\ell = \mathbb{P}^1 \times \{t, t'\}$, pour t et t' généraux dans \mathbb{P}^1 . La surface $X_\ell = \varphi^{-1}(\ell)$ est une surface de Hirzebruch et la courbe $\ell' = E \cap X_\ell$ est exceptionnelle car contractée par ψ : c'est donc une section de $\varphi|_{X_\ell} : X_\ell \rightarrow \ell$. Le morphisme $E \rightarrow Z$ est birationnel et fini : c'est un isomorphisme. On a $-K_E \cdot \ell' = 2$ et $-E \cdot \ell' > 0$ puisque ℓ' est exceptionnelle dans X_ℓ . Or, par la formule d'adjonction, on a $-K_E \cdot \ell' = -K_X \cdot \ell' - E \cdot \ell' > 2$ ce qui est absurde.

En conclusion, toutes les contractions extrémales de X sont des fibrations. Le résultat cherché est donné par la proposition 2.4. ■

4. LE CAS TORIQUE

Nous montrons dans ce paragraphe que si X est une variété de Fano *torique* de dimension n , on a $\rho_X(\iota_X - 1) \leq n$ lorsque $\iota_X \geq \frac{1}{3}n + 1$ (n arbitraire) ou $n \leq 7$.

4.1. Préliminaires. Soit X une variété torique projective et lisse d'éventail Σ_X . Nous renvoyons à [Fu93] ou [Od88] pour les fondements de la géométrie torique. Soit $G(\Sigma_X)$ l'ensemble des générateurs primitifs des cônes de dimension 1 dans Σ_X ; son cardinal est $\rho_X + \dim(X)$. Notons $V(\sigma)$ l'adhérence de l'orbite correspondant à un élément σ de Σ_X .

Rappelons ([Ba91], § 2 et [Ba99], § 2.1) qu'une *collection primitive* P est un sous-ensemble de $G(\Sigma_X)$ minimal qui n'engendre pas un cône de Σ_X . À toute collection primitive $P = \{x_1, \dots, x_h\}$ est associée sa *relation primitive*

$$x_1 + \dots + x_h = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k,$$

où $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$ est le plus petit cône dans Σ_X contenant le point $x_1 + \dots + x_h$ et où les a_i sont des entiers strictement positifs. Le degré de P est, par définition, $\deg(P) = h - \sum_i a_i$, et son ordre est $|P| = h$.

Le groupe $N_1(X)$ des 1-cycles sur X modulo équivalence numérique s'identifie au groupe des relations entre les éléments de $G(\Sigma_X)$; toute relation $\sum_{x \in G(\Sigma_X)} a_x x = 0$ s'identifie à la classe d'équivalence numérique des 1-cycles dont l'intersection avec le diviseur $V(\langle x \rangle)$ est a_x .

En particulier, la relation primitive $x_1 + \dots + x_h - (a_1 y_1 + \dots + a_k y_k) = 0$ définit un élément $r(P)$ de $N_1(X)$. Cette classe est toujours la classe d'un cycle effectif et $\deg(P) = -K_X \cdot r(P)$ ([Ba91], Theorem 2.15, [Ca01], Lemma 1.4). La variété X est une variété de Fano si et seulement si toute relation primitive est de degré strictement positif et le pseudo-indice ι_X vérifie alors $|P| = h \geq \deg(P) \geq \iota_X$.

Une collection primitive P , ou sa relation associée $r(P)$, sont dites *contractibles* s'il existe une application équivariante $\varphi : X \rightarrow W$ vers une variété torique complète W telle que les courbes irréductibles contractées par φ soient exactement celles dont la classe est dans $\mathbb{Q}_{\geq 0} r(P)$ ([Ca01],

Definition 2.3). Avec les notations précédentes, le lieu exceptionnel de φ est $A = V(\langle y_1, \dots, y_k \rangle)$ et $\varphi|_A : A \rightarrow \varphi(A)$ est une fibration équivariante lisse en \mathbb{P}^{h-1} . Si $\deg(P) < 2\iota_X$, la collection P est contractible ([Ca01], Theorem 4.1).

4.2. Fibrés projectifs. Soit X une variété torique projective et lisse. La contraction $\varphi : X \rightarrow Y$ d'une arête numériquement effective de $\text{NE}(X)$ est un fibré en espaces projectifs, Y est une variété torique et φ est équivariant.

Le lemme 2.5 permet de traiter facilement le cas des variétés toriques X pour lesquelles toutes les collections primitives de Σ_X sont disjointes. Cette condition combinatoire est équivalente à l'existence d'une suite $X = X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_r$ où X_r est un espace projectif et X_i est une fibration en espaces projectifs sur X_{i+1} pour $i = 1, \dots, r-1$ ([Ba91], Corollary 4.4). Rappelons enfin que les variétés toriques de nombre de Picard 2 sont précisément les fibrés en espaces projectifs sur l'espace projectif ([Kl88], Theorem 1) et qu'elles satisfont donc aux hypothèses du

Corollaire 4.3. *Soit X une variété de Fano torique. Si toutes les collections primitives de Σ_X sont disjointes, on a $\rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$; de plus, si $\rho_X(\iota_X - 1) = \dim(X)$, on a $X \simeq (\mathbb{P}^{\iota_X - 1})^{\rho_X}$.*

Démonstration. Il existe donc des fibrations

$$X = X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_r = \mathbb{P}^{s_r}$$

où X_i est une fibration en espaces projectifs sur X_{i+1} de fibre \mathbb{P}^{s_i} pour $i = 1, \dots, r-1$. En appliquant le lemme 2.5, on obtient, par récurrence sur i , l'inégalité $\rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$. Supposons $\rho_X(\iota_X - 1) = \dim(X)$. Comme $\rho_X = r$, $\dim(X) = s_1 + \dots + s_r$ et $\iota_X - 1 \leq \min\{s_1, \dots, s_r\}$, on a

$$s_1 + \dots + s_r = r(\iota_X - 1) \leq r \min\{s_1, \dots, s_r\} \leq s_1 + \dots + s_r,$$

et donc $s_1 = \dots = s_r = \iota_X - 1$. On vérifie enfin que X est un produit d'espaces projectifs par récurrence descendante sur l'entier $1 \leq i \leq r-1$. ■

4.4. Le cas $3\iota_X \geq \dim(X) + 3$. Soit X une variété de Fano torique. La preuve du résultat principal repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 4.5. *Soit $A \subset X$ une sous-variété irréductible invariante de codimension k . Si $k \leq \iota_X - 2$, alors A est une variété de Fano de nombre de Picard ρ_X et de pseudo-indice $\geq \iota_X - k$.*

Démonstration. Il suffit de prouver le lemme pour $k = 1$ et $\iota_X \geq 3$: le résultat général s'ensuit par récurrence sur k . Soit donc $A = V(\langle x \rangle)$ un diviseur irréductible invariant et supposons $\iota_X \geq 3$. Si P est une collection primitive dans Σ_A , ou bien P est une collection primitive dans Σ_X et $\deg_A(P) \geq \deg_X(P) \geq \iota_X$, ou bien $P \cup \{x\}$ est une collection primitive dans Σ_X , et $\deg_A(P) = \deg_X(P) - 1 \geq \iota_X - 1$. Comme $\iota_X \geq 2$, le diviseur A est une variété de Fano de pseudo-indice $\geq \iota_X - 1$. Puisque $\iota_X \geq 3$, il n'y a pas de collections primitives d'ordre 2 (cf. 4.1) : Σ_A a donc exactement un cône de dimension 1 de moins que Σ_X et $\rho_A = \rho_X$. ■

Lemme 4.6. *Soit X une variété de Fano torique de dimension n , de pseudo-indice ι_X et de nombre de Picard ρ_X . Si $4\iota_X > n + 4$, il existe dans X une collection primitive contractible telle que la codimension du lieu exceptionnel de la contraction associée soit $\leq \iota_X - 2$.*

Démonstration. Supposons que toute relation primitive contractible de X soit de la forme $x_1 + \dots + x_h = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k$ avec $k \geq \iota_X - 1$. On a alors $h - k \geq h - \sum_i a_i \geq \iota_X$, d'où

$h \geq \iota_X + k \geq 2\iota_X - 1$. D'autre part, si P est une collection primitive non contractible, on a $|P| \geq \deg(P) \geq 2\iota_X$ (cf. 4.1). Il n'existe donc pas de collection primitive d'ordre $\leq 2\iota_X - 2$ dans Σ_X , de sorte que $f_{j-1} = \binom{f_0}{j}$ pour tout $j \leq 2\iota_X - 2$. Puisque X n'est pas isomorphe à \mathbb{P}^n , on a $2\iota_X - 2 < [n/2] + 1$ par la proposition 4.11, ce qui contredit les hypothèses. ■

Nous sommes en mesure de prouver le

Théorème 4.7. *Soit X une variété de Fano torique de dimension n , de pseudo-indice ι_X et de nombre de Picard ρ_X . Si $3\iota_X \geq n + 3$, on a $\rho_X(\iota_X - 1) \leq n$ (et donc $\rho_X \leq 3$); de plus, si $\rho_X(\iota_X - 1) = n$, on a $X \simeq (\mathbb{P}^{\iota_X - 1})^{\rho_X}$.*

Démonstration. Le théorème se montre par récurrence sur ρ_X . Si $\rho_X = 1$, on a $X \simeq \mathbb{P}^n$ et le résultat est démontré. Sinon, d'après le lemme 4.6, il existe dans X une relation primitive contractible qui s'écrit

$$x_1 + \cdots + x_h = a_1 y_1 + \cdots + a_k y_k$$

avec $k \leq \iota_X - 2$. Soit $A = V(\langle y_1, \dots, y_k \rangle)$ le lieu exceptionnel de la contraction associée. D'après le lemme 4.5, A est une variété de Fano, $\rho_A = \rho_X$ et $\iota_A \geq \iota_X - k$. De plus, la contraction fait de A une fibration $A \rightarrow B$ en \mathbb{P}^{h-1} , où B est une variété de Fano torique satisfaisant $\rho_B = \rho_X - 1$, $\dim(B) = n - k - h + 1$ et $\iota_B \geq \iota_A \geq \iota_X - k$.

Vérifions l'inégalité $\iota_B > \frac{1}{3} \dim(B) + 1$. Notons que $h \geq k + \iota_X \geq 2k + 2$ et que $\dim(B) = n - k - h + 1 \leq n - 3k - 1 < n - 3k$, d'où

$$\iota_B \geq \iota_X - k \geq \frac{1}{3}n + 1 - k = \frac{1}{3}(n - 3k) + 1 > \frac{1}{3} \dim(B) + 1.$$

L'hypothèse de récurrence donne donc $\rho_B(\iota_B - 1) \leq \dim(B)$ et $\rho_B = \rho_X - 1 \leq 2$ puisque $\iota_B > \frac{1}{3} \dim(B) + 1$. Finalement :

$$(\rho_X - 1)(\iota_X - k - 1) \leq \rho_B(\iota_B - 1) \leq \dim(B) = n - k - h + 1$$

d'où

$$\rho_X(\iota_X - 1) - n \leq \rho_X k + \iota_X - h - 2k \leq k + \iota_X - h \leq 0.$$

Supposons maintenant $\rho_X(\iota_X - 1) = n$ et notons qu'il suffit de montrer $A = X$, c'est-à-dire $k = 0$. En effet, X est alors une fibration en espaces projectifs sur une variété de Fano torique B satisfaisant $\rho_B \leq 2$ et le corollaire 4.3 s'applique. Supposons donc $k > 0$. Les inégalités précédentes sont des égalités, d'où

$$\iota_B = \iota_A = \iota_X - k, \quad \rho_B(\iota_B - 1) = \dim(B), \quad \rho_X = \rho_A = 3, \quad \rho_B = 2 \quad \text{et} \quad h = k + \iota_X.$$

La variété B est donc isomorphe à $\mathbb{P}^{\iota_X - k - 1} \times \mathbb{P}^{\iota_X - k - 1}$ (corollaire 4.3) et, puisque $A \rightarrow B$ est une fibration en $\mathbb{P}^{\iota_X + k + 1}$ et $\iota_A = \iota_X - k$, la variété A est isomorphe à $\mathbb{P}^{\iota_X + k - 1} \times \mathbb{P}^{\iota_X - k - 1} \times \mathbb{P}^{\iota_X - k - 1}$. L'éventail Σ_A est donc déterminé par les relations primitives

$$\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_{\iota_X + k} = 0, \quad \bar{v}_1 + \cdots + \bar{v}_{\iota_X - k} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{w}_1 + \cdots + \bar{w}_{\iota_X - k} = 0,$$

où l'on a noté \bar{u} le générateur de Σ_A induit par l'élément $u \in G(\Sigma_X)$ tel que $\langle u, y_1, \dots, y_k \rangle \in \Sigma_X$. On a nécessairement $G(\Sigma_X) = \{x_1, \dots, x_{\iota_X + k}, y_1, \dots, y_k, v_1, \dots, v_{\iota_X - k}, w_1, \dots, w_{\iota_X - k}\}$ puisque $\rho_X = 3$. Puisque toute classe extrême de X se restreint à une classe extrême dans A , il doit

y avoir dans X trois relations primitives extrémales, de degré au moins ι_X , dont les restrictions à A sont les relations primitives ci-dessus. La seule possibilité est que les relations

$$v_1 + \cdots + v_{\iota_X - k} + y_1 + \cdots + y_k = 0 \text{ et } w_1 + \cdots + w_{\iota_X - k} + y_1 + \cdots + y_k = 0$$

soient extrémales dans X , ce qui est absurde si $k > 0$ car ces relations ne sont pas disjointes ([Ca01], Corollary 3.2). ■

4.8. Les petites dimensions. Dans ce paragraphe, on étudie les cas $\iota_X = [n/2]$ et $\iota_X = [n/2] - 1$ lorsqu'ils ne sont pas couverts par le théorème 4.7, c'est-à-dire respectivement pour $n \leq 7$ et $n \leq 13$. Nous en déduisons que l'inégalité (*) est toujours vérifiée si $n \leq 7$. Nous supposons dans la suite $n \geq 4$.

Proposition 4.9. *Soit X une variété de Fano torique de dimension $n \leq 13$ et de pseudo-indice $\iota_X = [n/2]$ ou $\iota_X = [n/2] - 1$. Si X n'est pas une fibration en $\mathbb{P}^{\iota_X - 1}$, l'entier ρ_X satisfait les inégalités suivantes :*

	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$
$\iota_X = [n/2]$	$\rho_X \leq 2$	$\rho_X \leq 2$	$\rho_X \leq 2$	$\rho_X \leq 2$						
$\iota_X = [n/2] - 1$			$\rho_X \leq 4$	$\rho_X \leq 4$	$\rho_X \leq 3$	$\rho_X \leq 3$	$\rho_X \leq 2$	$\rho_X \leq 3$	$\rho_X \leq 2$	$\rho_X \leq 2$

Vérifions que cette proposition entraîne le

Corollaire 4.10. *Soit X une variété de Fano torique de dimension $n \leq 13$ et de pseudo-indice $\iota_X = [n/2]$ ou $\iota_X = [n/2] - 1$. Alors $\rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$ et on a égalité si et seulement si $X \simeq (\mathbb{P}^{\iota_X - 1})^{\rho_X}$.*

Démonstration. L'inégalité $\rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$, dans les cas non couverts par le théorème 4.7, est équivalente aux bornes du tableau ci-dessous :

	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$
$\iota_X = [n/2]$	$\rho_X \leq 4$	$\rho_X \leq 5$	$\rho_X \leq 3$	$\rho_X \leq 3$						
$\iota_X = [n/2] - 1$			$\rho_X \leq 6$	$\rho_X \leq 7$	$\rho_X \leq 4$	$\rho_X \leq 4$	$\rho_X \leq 3$	$\rho_X \leq 3$	$\rho_X \leq 3$	$\rho_X \leq 3$

Si X n'est pas une fibration en $\mathbb{P}^{\iota_X - 1}$, la proposition 4.9 implique $\rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$ et il n'y a jamais égalité.

Si X est une fibration en $\mathbb{P}^{\iota_X - 1}$ sur Z , on a $\dim(Z) = n + 1 - \iota_X \leq (n - 1)/2$ et $\iota_Z \geq \iota_X \geq \dim(Z) - 1$. Si $\dim(Z) \geq 5$, la variété Z est un espace projectif (cf. 4.12) et donc $\rho_X = 2$: le résultat est une conséquence du corollaire 4.3. Si $\dim(Z) \leq 4$, on a $\iota_Z \geq 3$ et $\rho_Z \leq 2$, de sorte que le corollaire 4.3 s'applique encore à X . ■

Soit P_X le polytope associé à X , c'est-à-dire le polytope simplicial convexe engendré par les éléments de $G(\Sigma_X)$. Les faces de P_X correspondent aux cônes de Σ_X . Soit f_j le nombre de faces

de dimension j de P_X . Rappelons l'égalité $f_0 = |G(\Sigma_X)| = \rho_X + n$. L'éventail Σ_X n'a pas de collections primitives d'ordre $j < \iota_X$, autrement dit,

$$(3) \quad f_{j-1} = \binom{f_0}{j} \quad \text{pour tout } j < \iota_X.$$

De plus, si Σ_X possède une collection primitive $P = \{x_1, \dots, x_{\iota_X}\}$ d'ordre ι_X , la relation associée est nécessairement $x_1 + \dots + x_{\iota_X} = 0$, puisque son degré est au moins ι_X . Elle est contractible et la contraction associée est une fibration en \mathbb{P}^{ι_X-1} . Finalement :

$$f_{\iota_X-1} < \binom{f_0}{\iota_X} \quad \text{si et seulement si } X \text{ est une fibration en } \mathbb{P}^{\iota_X-1}.$$

Nous renvoyons à [MMS71] pour les propriétés fondamentales des polytopes simpliciaux. Rappelons en particulier qu'il existe des relations linéaires entre les f_j , appelées relations de Dehn-Sommerville, de sorte que les nombres $f_0, \dots, f_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$ déterminent tous les f_j . Rappelons aussi le résultat suivant ([MMS71], Chap. 2, Proposition 24).

Proposition 4.11. *Un polytope de dimension n est un simplexe si et seulement si $f_{j-1} = \binom{f_0}{j}$ pour tout $j \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$.*

4.12. Remarquons en particulier que si $\iota_X > \lfloor n/2 \rfloor + 1$, la relation (3) et la proposition entraînent que X est isomorphe à \mathbb{P}^n . Cela redémontre dans le cas torique le théorème de Wiśniewski cité dans l'introduction.

Les deux lemmes suivants donnent des relations supplémentaires entre les nombres f_j .

Lemme 4.13. *Soit X une variété de Fano torique. Si $\iota_X > 1$, toutes les collections primitives de Σ_X d'ordre $\iota_X + 1$ sont deux à deux disjointes.*

Démonstration. Soit $P = \{x_1, \dots, x_{\iota_X+1}\}$ une collection primitive d'ordre $\iota_X + 1$. Elle est nécessairement contractible puisque $\deg(P) \leq \iota_X + 1 < 2\iota_X$ (cf. 4.1). Ou bien $\deg(P) = \iota_X + 1$, la relation primitive $r(P)$ est $x_1 + \dots + x_{\iota_X+1} = 0$ et P est disjointe de toutes les autres collections primitives de Σ_X ([Ca01], Corollary 3.2), ou bien $\deg(P) = \iota_X$ et la relation primitive $r(P)$ est de la forme $x_1 + \dots + x_{\iota_X+1} = y$. Supposons par l'absurde qu'il existe deux relations primitives

$$x_1 + \dots + x_r + y_1 + \dots + y_s = z \quad \text{et} \quad x_1 + \dots + x_r + u_1 + \dots + u_s = v$$

avec $r + s = \iota_X + 1$ et $r > 0$. Comme P est contractible, $\{y_1, \dots, y_s, v\}$ doit contenir une collection primitive ([Ca01], Lemma 3.1), de sorte que $s + 1 \geq \iota_X$ et $r \leq 2$. Si $r = 2$ et $s = \iota_X - 1$, la collection $\{y_1, \dots, y_s, v\}$ est primitive, de relation associée $y_1 + \dots + y_s + v = 0$, ce qui est absurde. Si $r = 1$ et $s = \iota_X$, la collection $\{y_1, \dots, y_s, v\}$ est primitive, de relation associée $y_1 + \dots + y_s + v = w$. Par ce qui précède, on a $s = 1$ et $\iota_X = 1$, ce qui est exclu par l'hypothèse. ■

Lemme 4.14. *Si X est une variété de Fano torique de dimension n , on a*

$$12f_{n-3} \geq (3n + \iota_X - 5)f_{n-2}.$$

Démonstration. Posons $d_X = \sum \deg(N_{C/X})$, où la somme porte sur toutes les courbes invariantes de X . Si C est une courbe invariante, on a $\deg(N_{C/X}) = -K_X \cdot C - 2 \geq \iota_X - 2$, de sorte que

$d_X \geq (\iota_X - 2)f_{n-2}$. D'autre part, on a $d_X = 12f_{n-3} - 3(n-1)f_{n-2}$ ([Ba99], Theorem 2.3.7), d'où l'inégalité cherchée. ■

Démonstration de la proposition 4.9. Posons $k = \lfloor n/2 \rfloor$ et supposons $\iota_X = k$. Comme X n'est pas une fibration en \mathbb{P}^{ι_X-1} , on a $f_{j-1} = \binom{f_0}{j}$ pour tout $j \leq k$. Les relations de Dehn-Sommerville permettent d'exprimer f_k à l'aide de f_0 ([MMS71], § 2.4) :

$$f_k = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j-1} \frac{j+1}{k+1} \binom{2k-j}{k} \binom{f_0}{j+1} \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

$$f_k = \sum_{j=-1}^{k-1} (-1)^{k-j-1} \binom{2k-j+1}{k+1} \binom{f_0}{j+1} \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Le lemme 4.13 donne l'inégalité

$$\binom{f_0}{k+1} - f_k \leq \frac{f_0}{k+1},$$

d'où les bornes de la première ligne du tableau.

Supposons $\iota_X = k-1$ et que X n'est pas une fibration en \mathbb{P}^{ι_X-1} . On a alors

$$f_{j-1} = \binom{f_0}{j} \text{ pour tout } j \leq k-1 \quad \text{et} \quad \binom{f_0}{k} - f_{k-1} \leq \frac{f_0}{k}.$$

Les relations de Dehn-Sommerville permettent d'exprimer tous les f_j avec $j \geq k$ à l'aide de f_0 et f_{k-1} . Si n est pair, on a ([MMS71], § 2.4)

$$f_{n-2} = kf_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \frac{k-j}{k+j-1} \left((k-1) \binom{k+j}{k} + \binom{k+j-1}{k} \right) \binom{f_0}{k-j} \quad \text{et}$$

$$f_{n-3} = \binom{k}{2} f_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \frac{k-j}{k+j-2} \left(\binom{k}{2} \binom{k+j}{k} \right. \\ \left. + (k-2) \left(\binom{k+j-1}{k} + \binom{k+j-2}{k} \right) \right) \binom{f_0}{k-j}.$$

Et si n est impair, on a

$$f_{n-2} = (2k+1)f_{k-1} + \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{2k+1}{k+j} \left(k \binom{k+j+1}{k+1} + \binom{k+j}{k+1} \right) \binom{f_0}{k-j} \quad \text{et}$$

$$f_{n-3} = k^2 f_{k-1} + \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{2k}{k+j-1} \left(\binom{k}{2} \binom{k+j+1}{k+1} \right. \\ \left. + (k-1) \left(\binom{k+j}{k+1} + \binom{k+j-1}{k+1} \right) \right) \binom{f_0}{k-j}.$$

Finalement, en appliquant le lemme 4.14, on obtient $f_{k-1} \leq \Psi_k(f_0)$, où, si n est pair,

$$\Psi_k(f_0) = \frac{k^3 - k^2 + 12}{k^2} \binom{f_0}{k-1} \\ + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{(-1)^{j-1} (k-j)(k+j-3)!}{k(k!)(j!)} \left((k+j-1)(k+j-2)k + 12j \right) \binom{f_0}{k-j}$$

et, si n est impair,

$$\Psi_k(f_0) = \frac{2k^3 + 3k^2 - 2k + 21}{(k-1)(2k+3)} \binom{f_0}{k-1} + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^{j-1}(k+j-2)!}{(k-1)(2k+3)(k!)(j!)} \left(2k^4 + (4j-1)k^3 \right. \\ \left. + 2(j^2 - 2)k^2 + (j^2 + 17j + 3)k + 3j(1-j) \right) \binom{f_0}{k-j}.$$

On déduit alors du lemme 4.13 l'inégalité

$$\binom{f_0}{k} - \frac{f_0}{k} - \Psi_k(f_0) \leq 0,$$

ce qui donne les bornes de la deuxième ligne du tableau par une étude directe. ■

5. CHAÎNES DE COURBES RATIONNELLES

Soit X une variété projective, lisse et connexe et soient V^1, \dots, V^k des familles propres irréductibles de courbes rationnelles irréductibles sur X (cf. 3.14). Fixons $x \in \text{lieu}(V^1)$, posons $\text{lieu}(V^1)_x = \text{lieu}(V_x^1)$ et $Z_1 = \mathcal{U}_x^1$ (cf. 3.14) et, avec les notations

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}^k & \xrightarrow{\text{ev}_k} & X \\ \pi_k \downarrow & & \\ V^k & & \end{array}$$

définissons par récurrence pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} Z_k &= \pi_k^{-1}(\pi_k(\text{ev}_k^{-1}(\text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x \cap \text{lieu}(V^k)))) \\ \text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x &= \text{ev}_k(Z_k) \\ U_x^k &= \text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x - \text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x \end{aligned}$$

Le fermé $\text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x$ est donc l'ensemble des points y de X tels qu'il existe des courbes C^1, \dots, C^k avec

- $[C^j] \in V^j$;
- les intersections $C^1 \cap C^2, \dots, C^{k-1} \cap C^k$ ne sont pas vides ;
- $x \in C^1$ et $y \in C^k$.

Lemme 5.1. *Si les classes des familles V^1, \dots, V^k dans $N_1(X)_{\mathbb{Q}}$ sont linéairement indépendantes et que $\text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x$ n'est pas vide,*

- (a) *le morphisme d'évaluation $\text{ev}_k : Z_k \rightarrow \text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x$ est fini au-dessus de l'ouvert U_x^k , qui n'est pas vide ;*
- (b) *toute courbe tracée sur $\text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x$ est algébriquement équivalente dans cette variété à une combinaison linéaire à coefficients rationnels de courbes dans V^1, \dots, V^k .*

Démonstration. Le résultat se montre par récurrence sur l'entier $k \geq 1$. Si $k = 1$, le point (a) est une conséquence du lemme de cassage de Mori ([Mo79], Theorem 6) et le point (b) est le lemme 3.15. Supposons $k \geq 2$.

Démontrons (a). Soit z un point de $\text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x \cap \text{lieu}(V^k)$, qui n'est pas vide par hypothèse. Si $\text{lieu}(V_z^k) \subset \text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x$, les classes des familles V^1, \dots, V^k sont linéairement

dépendantes dans $N_1(X)_\mathbb{Q}$ par hypothèse de récurrence, ce qui est absurde. Ainsi, U_x^k n'est pas vide. Si un point y de U_x^k vérifie $\dim(\text{ev}_k^{-1}(y) \cap Z_k) \geq 1$,

- soit $\dim(\text{lieu}(V_y^k) \cap \text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x) \geq 1$ et, à nouveau par hypothèse de récurrence, les classes des familles V^1, \dots, V^k sont linéairement dépendantes dans $N_1(X)_\mathbb{Q}$, ce qui contredit l'hypothèse ;
- soit il existe une famille de dimension 1 de courbes rationnelles de V^k passant toutes par deux points distincts de X fixés, ce qui, par le lemme de cassage ([Mo79], Theorem 6), est absurde puisque la famille V^k est propre.

Démontrons (b). Soit C une courbe tracée sur $\text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x$ telle que $[C] \notin V^k$. Si C est dans $\text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Supposons donc que C n'est pas contenue dans $\text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x$. Soit $\mathcal{C} \subset \text{ev}_k^{-1}(C) \cap Z_k$ une courbe irréductible dominant C , soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}^k$ la surface irréductible $\pi_k^{-1}(\pi_k(\mathcal{C}))$, soit S la surface $\text{ev}_k(\mathcal{S}) \subset X$ et soit $\mathcal{C}' \subset \mathcal{S}$ une courbe dominant $S \cap \text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x$. Toute courbe tracée sur \mathcal{S} est algébriquement équivalente dans \mathcal{S} à une combinaison linéaire à coefficients rationnels de la multisection \mathcal{C}' et d'une fibre de $\pi_{k|\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \pi_k(\mathcal{S})$ ([Ko96], II.4.19). Toute courbe tracée sur S est donc algébriquement équivalente dans S , donc dans $\text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x$, à une combinaison linéaire à coefficients rationnels de $\text{ev}_k(\mathcal{C}')$ et d'une courbe de V^k ([Ko96], II.4.4.2). Il reste à remarquer que $\text{ev}_k(\mathcal{C}') \subset \text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x$: l'hypothèse de récurrence permet de conclure. ■

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 5.2. *Si les classes des familles V^1, \dots, V^k dans $N_1(X)_\mathbb{Q}$ sont linéairement indépendantes, $\text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x$ est vide ou de dimension $\geq -\sum_{j=1}^k K_X \cdot V^j - k$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur l'entier $k \geq 1$. Si $k = 1$, l'estimation sur la dimension a déjà été mentionnée en 3.15. Supposons $k \geq 2$ et que $\text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x$ n'est pas vide. Le lemme précédent donne

$$\dim(\text{lieu}(V^1, \dots, V^k)_x) \geq \dim(Z_k).$$

Si y est un point général de $\text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x \cap \text{lieu}(V^k)$, on a $\dim(\text{ev}_k^{-1}(y)) = \dim(V_y^k)$ et, si l'on note

$$W_k = \text{ev}_k^{-1}(\text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x \cap \text{lieu}(V^k)),$$

on a, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \dim(W_k) &= \dim(V_y^k) + \dim(\text{lieu}(V^1, \dots, V^{k-1})_x \cap \text{lieu}(V^k)) \\ &\geq \dim(V_y^k) - \sum_{j=1}^{k-1} K_X \cdot V^j - (k-1) + \dim(\text{lieu}(V^k)) - n \\ &\geq \dim(V_k) - \sum_{j=1}^{k-1} K_X \cdot V^j - k + 2 - n, \end{aligned}$$

d'où, par l'inégalité (1) de 3.14,

$$\dim(W_k) \geq -\sum_{j=1}^k K_X \cdot V^j - k - 1.$$

Comme $\dim(Z_k) = \dim(W_k) + 1$, le lemme précédent permet de conclure. ■

On déduit du théorème le résultat suivant.

Corollaire 5.3. *Soit X une variété de Fano de nombre de Picard ρ_X et de pseudo-indice ι_X . S'il existe des familles propres irréductibles V^1, \dots, V^{ρ_X} de courbes rationnelles irréductibles sur X dont les classes dans $N_1(X)_{\mathbb{Q}}$ sont linéairement indépendantes et que $\text{lieu}(V^1, \dots, V^{\rho_X})_x$ n'est pas vide, on a $\rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$.*

Il n'est évidemment pas facile d'assurer l'existence de familles propres de courbes rationnelles irréductibles sur X vérifiant les conditions du corollaire précédent. Si $R \subset \text{NE}(X)$ est une arête, les courbes rationnelles irréductibles dont la classe appartient à R et de degré anticanonique minimal forment une famille propre. En considérant ces familles de courbes rationnelles, on montre le

Corollaire 5.4. *Soit X une variété de Fano homogène. On a $\rho_X(\iota_X - 1) \leq \dim(X)$.*

RÉFÉRENCES

- [An85] T. Ando. On extremal rays of the higher dimensional varieties. *Invent. Math.* **81** (1985), 347–357.
- [ABW92] M. Andreatta, E. Ballico, J.A. Wiśniewski. Vector bundles and adjunction. *Internat. J. Math.* **3** (1992), 331–340.
- [AW98] M. Andreatta, J.A. Wiśniewski. Contractions of smooth varieties. II. Computations and applications. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 1* (1998), 343–360.
- [Ba91] V.V. Batyrev. On the classification of smooth projective toric varieties. *Tohoku Mathematical Journal* **43** (1991), 569–585.
- [Ba99] V.V. Batyrev. On the classification of toric Fano 4-folds. *Journal of Mathematical Sciences (New York)* **94** (1999), 1021–1050.
- [BCW01] L. Bonavero, F. Campana, J.A. Wiśniewski. Variétés projectives complexes dont l'éclatée en un point est de Fano. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **334** (2002), 463–468.
- [Ca01] C. Casagrande. Contractible classes in toric varieties. *Prépublication math.AG/0111332* (2001).
- [CMS00] K. Cho, Y. Miyaoka, N. Shepherd-Barron. Characterizations of projective spaces and applications. *Preprint* (2000).
- [Fu93] W. Fulton. Introduction to toric varieties. *Annals of mathematics studies* **131**, Princeton University Press, 1993.
- [Gr68] A. Grothendieck. Le groupe de Brauer. I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, 46–66, North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris, 1968.
- [IP99] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov. Fano varieties. Algebraic geometry, V. *Encyclopaedia Math. Sci.* **47**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Ka89] Y. Kawamata. Small contractions of four dimensional algebraic manifolds. *Math. Ann.* **284** (1989), 595–600.
- [Ke01] S. Kebekus. Characterizing the projective space after Cho, Miyaoka and Shepherd-Barron. *Prépublication math.AG/0107069*. À paraître dans « *Festschrift in honor of Hans Grauert* ».
- [Kl88] P. Kleinschmidt. A classification of toric varieties with few generators. *Aequationes Math.* **35** (1988), 254–266.
- [Ko96] J. Kollár. Rational curves on algebraic varieties. *Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete. 3 Folge* **032**, Springer-Verlag, 1996.
- [KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori. Rational Connectedness and Boundedness of Fano Manifolds. *J. Diff. Geom.* **36** (1992), 765–769.
- [La83] R. Lazarsfeld. Some applications of the theory of positive vector bundles. *Complete intersections (Acireale, 1983)*, 29–61, *Lecture Notes in Math.* **1092**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

- [MMS71] P. McMullen, G.C. Shephard. Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture. *London Mathematical Society Lecture Note Series* **3**, Cambridge University Press, 1971.
- [Mo79] Mori, S., Projective manifolds with ample tangent bundles, *Ann. of Math.* **110** (1979), 593–606.
- [Mo82] S. Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Ann. of Math.* **116** (1982), 133–176.
- [MM81] S. Mori, S. Mukai. Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$. *Manuscripta Math.* **36** (1981), 147–162.
- [Mu88] S. Mukai. Birational geometry of algebraic varieties. Open problems. *The 23rd Intern. Sympos. Division of Math. The Taniguchi Foundation. Kataka (1988)*.
- [Od88] T. Oda. Convex bodies and algebraic geometry : an introduction to the theory of toric varieties. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge.* **015**, Springer-Verlag, 1988.
- [Wi90] J.A. Wiśniewski. On a conjecture of Mukai. *Manuscripta Mathematica* **68** (1990), 135–141.
- [Wi91] J.A. Wiśniewski. On contractions of extremal rays of Fano manifolds. *J. Reine Angew. Math.* **417** (1991), 141–157.

L.B. e-mail : bonavero@ujf-grenoble.fr

S.D. e-mail : druel@ujf-grenoble.fr

Institut Fourier, UFR de Mathématiques, Université de Grenoble 1, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, FRANCE.

C.C. e-mail : ccasagra@mat.uniroma1.it

Università di Roma "La Sapienza", Dipartimento di Matematica, Piazzale Aldo Moro, 2, 00185 Rome, ITALIE.

O.D. e-mail : debarre@math.u-strasbg.fr

Mathématique - IRMA - UMR 7501, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, FRANCE.