Une propriété de continuité du temps local

Lucien Chevalier

Prépublication de l'Institut Fourier N° 557 (2002)

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Abstract : Let $L^0(M)$ denote the local time (at 0) associated with a martingale M. The aim of this note is to prove that the mapping $M \mapsto L^0(M)$ is continuous from L^1 into weak-L^1.

Key-words : Martingales, Continuity, Local Time.

AMS Classification : 60 G 44

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\mathcal{F}_t))$un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions usuelles de la théorie des martingales. Pour $1 \leq p < +\infty$, nous désignons par L^p l'ensemble des processus adaptés X définis sur cet espace et tels que

$$\|X\|_p = \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}^{1/p}(|X_t|^p) < +\infty \ ,$$

et par L^1_{f} l'ensemble des processus adaptés X définis sur cet espace et tels que

$$\sup_{t\geq 0} \sup_{\lambda>0} \lambda \mathbb{P}(|X_t| > \lambda) < +\infty \ ,$$

muni de la "norme" associée à cette quantité. Étant donné une martingale locale continue M, nous lui associons sa "transformée de Lévy" $\widetilde{M}$ définie par

$$\widetilde{M}_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(M_s)\, dM_s \ ,$$

et son temps local en 0, noté $L^0(M)$. On sait, depuis les travaux de M. T. Barlow et M. Yor ([2]) que les applications $M \mapsto L^0(M)$ et $M \mapsto \widetilde{M}$ sont continues de L^p dans L^p pour $1 < p < +\infty$. Le but de ce qui suit est de prouver que l'application $M \mapsto L^0(M)$ est continue de L^1 dans L^1_{f}, ce qui, grâce à la formule de Tanaka, revient à montrer que la transformation de Lévy l'est. Or on a plus précisément le

Théorème. — *Il existe une constante universelle C telle que, pour tout couple (M,N) de martingales continues appartenant à L^1, on ait*

$$\sup_{t\geq 0}\sup_{\lambda>0}\lambda\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t-\widetilde{N}_t|>\lambda)\leq C(\|M-N\|_1)^{1/2}(\|M\|_1+\|N\|_1)^{1/2}\,. \tag{1}$$

Dans ce qui suit, nous désignerons par C une constante universelle, dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre. Nous poserons, pour toute martingale locale continue M et tout $t\geq 0$, $S_t(M)=\langle M\rangle_t^{1/2}$. Nous commencerons par déduire le théorème du

Lemme. — *Il existe une constante universelle C telle que, pour tout couple (M,N) de martingales locales continues, tout $\lambda>0$, tout $c>0$ et tout $t\geq 0$, on ait*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t-\widetilde{N}_t|>\lambda)&\\ \leq C\,(\mathbb{P}(S_t(M-N)>c\lambda)&+\mathbb{P}(S_t(M)+S_t(N)>\lambda/c))\\ &+\frac{C}{\lambda^2}\,\mathbb{E}^{1/2}\left(S_t^2(M-N)\,;\;S_t(M-N)\leq c\lambda\right)\\ &\qquad\mathbb{E}^{1/2}\left(S_t^2(M)+S_t^2(N)\,;\;S_t(M)+S_t(N)\leq\lambda/c\right)\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Admettant provisoirement ce résultat, nous fixons $\lambda>0$ et $t\geq 0$, et nous nous donnons un nombre $c>0$, dont la valeur sera choisie ultérieurement. Nous rappelons qu'on a, pour toute martingale locale continue X, tout $t\geq 0$ et tout $\lambda>0$, l'inégalité classique

$$\mathbb{P}(S_t(X)>\lambda)\leq\frac{C}{\lambda}\|X\|_1 \tag{3}$$

de D. L. Burkholder ([3]). En utilisant cette inégalité, on voit que, pour tout $c>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_t(M-N)>c\lambda)&+\mathbb{P}(S_t(M)+S_t(N)>\lambda/c)\\ &\leq C\left(\frac{1}{c\lambda}\,\|M-N\|_1+\frac{c}{\lambda}\,(\|M\|_1+\|N\|_1)\right)\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Nous majorons maintenant la seconde partie du second membre de l'inégalité (2). On a, pour toute variable aléatoire $X\geq 0$ et tout nombre $a\geq 0$,

$$\mathbb{E}(X^2\,;\;X\leq a)=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X^2\mathbf{1}_{\{X\leq a\}}>\mu)\,d\mu\leq\int_0^{a^2}\mathbb{P}(X>\sqrt{\mu})\,d\mu\,,$$

ce qui permet d'obtenir, en utilisant encore l'inégalité (3),

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(S_t^2(M-N)\,;\;S_t(M-N)\leq c\lambda\right)\\ \leq&\int_0^{c^2\lambda^2}\mathbb{P}(S_t(M-N)>\sqrt{\mu})\,d\mu\leq C\|M-N\|_1\int_0^{c^2\lambda^2}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}=Cc\lambda\|M-N\|_1\,.\end{aligned}$$

En procédant de la même manière, on obtient l'inégalité

$$\mathbb{E}\big(S_t^2(M)+S_t^2(N)\ ;\ S_t(M)+S_t(N)\le \lambda/c\big)\le C\frac{\lambda}{c}\left(\|M\|_1+\|N\|_1\right)\ .$$

On déduit de ces deux estimations qu'on a, pour tout $t\ge 0$, tout $\lambda>0$ et tout $c>0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda^2}\ &\mathbb{E}^{1/2}\big(S_t^2(M-N)\ ;\ S_t(M-N)\le c\lambda\big)\\ &\qquad\mathbb{E}^{1/2}\big(S_t^2(M)+S_t^2(N);S_t(M)+S_t(N)\le\lambda/c\big)\\ &\qquad\qquad\le\frac{C}{\lambda}\left(\|M-N\|_1\right)^{1/2}\left(\|M|_1+\|N\|_1\right)^{1/2}\ .\end{aligned}\tag{5}$$

On choisit maintenant
$$c=\frac{\left(\|M-N\|_1\right)^{1/2}}{\left(\|M\|_1+\|N\|_1\right)^{1/2}}$$
de façon à minimiser le second membre de l'inégalité (4). Il est clair que cette inégalité ainsi optimisée et l'inégalité (5) permettent d'obtenir l'estimation (1) à partir de l'inégalité (2).

Passons à la preuve du lemme. Ayant fixé tous les paramètres, nous introduisons l'ensemble

$$A=\left\{S_t(M-N)\le c\lambda\ ;\ S_t(M)+S_t(N)\le\frac{\lambda}{c}\right\}\ ,$$

la martingale associée a définie (pour $0\le s\le t$) par $a_s=\mathbb{E}(\mathbf{1}_A/\mathcal{F}_s)$, et nous posons $B=\{(1-a)_t^*\le 1/2\}$[1]. On a évidemment

$$\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t-\widetilde{N}_t|>\lambda)\le\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t-\widetilde{N}_t|>\lambda\ ;\ B)+\mathbb{P}(B^{\mathrm{c}})\ ,$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B^{\mathrm{c}})&=\mathbb{P}((1-a)_t^*>1/2)\le 2\,\mathbb{E}(1-a_t)=2\mathbb{P}(A^{\mathrm{c}})\\ &\le 2\left(\mathbb{P}(S_t(M-N)>c\lambda)+\mathbb{P}(S_t(M)+S_t(N)>\lambda/c)\right)\ ,\end{aligned}$$

donc il nous suffit de contrôler convenablement $\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t-\widetilde{N}_t|>\lambda\ ;\ B)$. Pour cela, nous commençons par remarquer que, sur B, $a_{s^-}\ge 1/2$ pour tout $s\le t$ et donc, l'intégrale stochastique étant locale, on a pour toute martingale X et tout $s\le t$,
$$X_s=X'_s=\int_0^s\mathbf{1}_{\{a_{r^-}\ge 1/2\}}\,dX_r$$
sur l'ensemble B. Pour la même raison, on a aussi $(\widetilde{X})'_s=(\widetilde{X'})_s$ sur B pour tout $s\le t$. Nous pouvons donc écrire

$$\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t-\widetilde{N}_t|>\lambda\ ;\ B)=\mathbb{P}(|\widetilde{M}'_t-\widetilde{N}'_t|>\lambda\ ;\ B)\le\frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left((\widetilde{M}'_t-\widetilde{N}'_t)^2\right)\ .\tag{6}$$

1. Etant donné un processus X et $s\ge 0$, on pose (comme c'est l'usage) $X_s^*=\sup_{r\le s}|X_r|$.

Or on a, d'après un résultat de M. T. Barlow et M. Yor ([2])

$$\mathbb{E}((\widetilde{X}_t - \widetilde{Y}_t)^2) \leq C\mathbb{E}^{1/2}((X_t - Y_t)^2)\mathbb{E}^{1/2}(X_t^2 + Y_t^2)$$

pour tout couple (X,Y) de martingales locales continues et tout $t \geq 0$. Par conséquent, on déduit de (6) que

$$\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t - \widetilde{N}_t| > \lambda \; ; \; B) \leq \frac{C}{\lambda^2}\mathbb{E}^{1/2}((M'_t - N'_t)^2)\mathbb{E}^{1/2}((M'_t)^2 + (N'_t)^2) \, . \tag{7}$$

D'autre part

$$\langle M' - N' \rangle_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{a_{s^-} \geq 1/2\}} \, d\langle M - N \rangle_s \leq 2 \int_0^t a_{s^-} \, d\langle M - N \rangle_s \, ,$$

et

$$\int_0^t a_{s^-} \, d\langle M - N \rangle_s = a_t \langle M - N \rangle_t - a_0 \langle M - N \rangle_0 - \int_0^t \langle M - N \rangle_s \, da_s \, ,$$

en vertu de la formule 38.1, p. 315 de [5]. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((M'_t - N'_t)^2) = \mathbb{E}(\langle M' - N' \rangle_t) &\leq \mathbb{E}(S_t^2(M - N) \; ; \; A) \\ &\leq \mathbb{E}(S_t^2(M - N) \; ; \; S_t(M - N) \leq c\lambda) \, . \end{aligned} \tag{8}$$

De la même manière, on voit que

$$\mathbb{E}((M'_t)^2 + (N'_t)^2) \leq \mathbb{E}(S_t^2(M) + S_t^2(N) \; ; \; S_t(M) + S_t(N) \leq \lambda/c) \, . \tag{9}$$

On déduit donc des estimations (7), (8) et (9) que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t - \widetilde{N}_t| > \lambda \; ; \; B) \\ &\qquad \leq \frac{C}{\lambda^2}\mathbb{E}^{1/2}(S_t^2(M - N) \; ; \; S_t(M - N) \leq c\lambda) \\ &\qquad\qquad \mathbb{E}^{1/2}(S_t^2(M) + S_t^2(N) \; ; \; S_t(M) + S_t(N) \leq \lambda/c) \, , \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous ne savons pas si le temps local définit une application continue de L^1 dans L^1. En d'autres termes, peut-on remplacer le premier membre de l'inégalité (1) par $\|\tilde{M} - \tilde{N}\|_1$? Rappelons que, en ce qui concerne la *bornitude* de l'application L^0 dans les espaces L^p, on dispose ([1]) de l'estimation $\|L^0(M)\|_p \leq p\|M\|_p$ pour tout $p \geq 1$, qui constitue un résultat beaucoup plus satisfaisant. Mais bien entendu, l'application concernée manquant totalement de linéarité, on est dépourvu d'arguments pour déduire la continuité de la bornitude.

Comme le temps local et la transformation de Lévy ont désormais des analogues en analyse harmonique, il est naturel de se demander si le résultat présent est transposable en analyse. C'est effectivement le cas, comme nous le montrons dans [4]. Observons toutefois que ce résultat d'analyse ne peut pas se déduire du résultat probabiliste (du moins au moyen des arguments usuels ...), car il faudrait pour cela que l'opérateur g_* de Littlewood-Paley vérifie une inégalité de type faible analogue à (3), ce qui n'est pas le cas. On doit donc adapter à l'analyse la méthode utilisée ici, ce qui oblige à surmonter de nouvelles difficultés techniques (l'une d'elles provient du fait que le caractère local de l'intégrale stochastique n'a pas d'équivalent dans l'autre contexte).

Références

[1] J. Azéma et M. Yor. — *En guise d'introduction.* Astérisque **52-53** (Temps locaux), Société mathématique de France (1978), 3-16.

[2] M. T. Barlow and M. Yor. — *Semi-martingale inequalities and local times.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. **55** (1981), 237-254.

[3] D. L. Burkholder. — *Martingale transforms.* Ann. Math. Stat. **37** (1966), 1494-1504.

[4] L. Chevalier. — *Sur la continuité dans L^1 d'une fonctionnelle non linéaire remarquable.* Preprint, 2002.

[5] P. A. Meyer. — *Un cours sur les intégrales stochastiques.* Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics 511, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1976), 246-354.

Institut Fourier
U.M.R. 5582 C.N.R.S./U.J.F.
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères
France
lucchev@fourier.ujf-grenoble.fr