

Singularités symplectiques

Stéphane DRUEL

Prépublication de l'Institut Fourier n° 556 (2001)

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html>

Introduction

Soit (V, \mathfrak{o}) un germe de singularité *normal*. La singularité est dite *symplectique* s'il existe une 2-forme symplectique φ sur le lieu régulier V_{reg} de V , *i.e.* une 2-forme holomorphe fermée et non dégénérée, et si pour toute résolution $\pi : X \rightarrow V$ des singularités de V , le pull-back de φ à $\pi^{-1}(V_{\text{reg}})$ est la restriction d'une 2-forme holomorphe sur X (*voir* [Be00] définition 1.1). Si le lieu singulier de V est de codimension ≥ 4 alors la dernière condition est toujours vérifiée (*voir* [F188]).

Une algèbre de Lie complexe simple a une plus petite orbite nilpotente non nulle \mathcal{O}_{\min} pour l'action adjointe; son adhérence $\overline{\mathcal{O}}_{\min} = \mathcal{O}_{\min} \cup \{0\}$ a une singularité symplectique isolée en 0 isomorphe au cône sur la variété lisse $\mathbf{P}\mathcal{O}_{\min}$ des droites de \mathcal{O}_{\min} et toute singularité symplectique isolée dont le cône tangent est lisse, est analytiquement isomorphe à $(\overline{\mathcal{O}}_{\min}, 0)$ pour une algèbre de Lie complexe simple convenable (*voir* [Be00]).

Fixons un entier $n > 0$. Soit ζ une racine cubique de l'unité et soit $\langle \zeta \rangle$ le groupe cyclique d'ordre 3 engendré par ζ . Soit $V = \mathbf{C}^{2n} / \langle \zeta \rangle$ où $\langle \zeta \rangle$ agit sur \mathbf{C}^{2n} par la formule

$$\zeta \cdot (z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = (\zeta z_1, \zeta^2 z_2, \dots, \zeta z_{2n-1}, \zeta^2 z_{2n}).$$

La 2-forme symplectique $\sum_{i=1}^n dz_{2i-1} \wedge dz_{2i}$ sur \mathbf{C}^{2n} est invariante sous $\langle \zeta \rangle$ et induit une 2-forme symplectique sur V_{reg} . Notons 0 l'unique point singulier de V . Soit $\pi : X \rightarrow V$ l'éclatement normalisé de 0 dans V . Le diviseur $\pi^{-1}(0)$ est réduit et globalement à croisements normaux (*voir* §1). Nous prouvons le

Théorème.— *Soit (V, \mathfrak{o}) une singularité symplectique isolée de dimension $2n \geq 6$ et soit $\pi : X \rightarrow V$ l'éclatement normalisé de \mathfrak{o} dans V . On suppose que le diviseur $\pi^{-1}(\mathfrak{o})$ est réduit, globalement à croisements normaux et qu'il a au moins deux composantes irréductibles. Alors (V, \mathfrak{o}) est analytiquement isomorphe à la singularité quotient $(\mathbf{C}^{2n} / \langle \zeta \rangle, 0)$.*

Mots clés : singularités, éclatements, théorie de Mori.

Classification A.M.S. : 14B05, 14E15, 32S45.

Soit $F := \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2) \oplus \mathbf{H}^0(\mathbf{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}$ et soit p_F le morphisme vers \mathbf{P}^{n-1} . Soient p et q les projections de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ sur \mathbf{P}^{n-1} et soit i l'immersion fermée $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \subset F$ au dessus de \mathbf{P}^{n-1} correspondant au quotient inversible sur $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$

$$p^* \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{H}^0(\mathbf{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}} \rightarrow q^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)$$

où $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ est considéré comme variété sur \mathbf{P}^{n-1} via p . Soit enfin $j := i \circ s$ où s est l'involution naturelle de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}} \times \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}$. Nous montrons que le lieu exceptionnel est isomorphe au recollement de deux copies de F le long de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ via les immersions fermées i et j puis nous montrons que le complété formel de X le long du diviseur exceptionnel est déterminé à isomorphisme près par le germe de singularité (V, o) . Le résultat cherché est alors une conséquence du premier théorème de comparaison de la théorie "algébrique" à la théorie "formelle" (voir [Gr66] Chap. III théorème 4.1.5).

Remerciements.—Je tiens à exprimer ici mes remerciements Arnaud Beauville pour toute l'aide qu'il m'a apportée.

1. Exemple et géométrie torique

Nous renvoyons à [Od88] pour les définitions et propriétés des variétés toriques. Fixons un entier $n \geq 1$. Soit $N_0 = \mathbf{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}e_{2n}$ un \mathbf{Z} -module libre de rang $2n$ et soit $N = N_0 + \frac{\mathbf{Z}}{3}(1, -1, \dots, 1, -1) \subset N_0 \otimes \mathbf{R}$. Soit $M = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$. Soit enfin $\sigma = \langle e_1, \dots, e_{2n} \rangle \subset N \otimes \mathbf{R}$. La variété affine V est torique et son algèbre de fonctions est $\mathbf{C}[z_1, \dots, z_{2n}]^{\langle \zeta \rangle} = \mathbf{C}[M \cap \sigma^\vee]$ (voir [Od88] §1.5). Soit (e_1^*, \dots, e_{2n}^*) la base duale de (e_1, \dots, e_{2n}) . Les fonctions

$$\begin{cases} z_{2i}z_{2j-1} & (i, j \in \{1, \dots, n\}) \\ z_{2i}z_{2j}z_{2k} & (i, j, k \in \{1, \dots, n\}) \\ z_{2i-1}z_{2j-1}z_{2k-1} & (i, j, k \in \{1, \dots, n\}) \end{cases}$$

sont invariantes sous le groupe $\langle \zeta \rangle$ et forment un système minimal de générateurs sur \mathbf{C} de l'algèbre $\mathbf{C}[z_1, \dots, z_{2n}]^{\langle \zeta \rangle}$, autrement dit, les éléments

$$\begin{cases} e_{2i}^* + e_{2j-1}^* & (i, j \in \{1, \dots, n\}) \\ e_{2i}^* + e_{2j}^* + e_{2k}^* & (i, j, k \in \{1, \dots, n\}) \\ e_{2i-1}^* + e_{2j-1}^* + e_{2k-1}^* & (i, j, k \in \{1, \dots, n\}) \end{cases}$$

forment une base de Hilbert du monoïde $M \cap \sigma^\vee$. Soient $e_{2n+1} = \frac{1}{3}(1, 2, \dots, 1, 2)$ et $e_{2n+2} = \frac{1}{3}(2, 1, \dots, 2, 1)$. L'éclatement normalisé X de l'idéal \mathfrak{m} de 0 dans V est la variété torique lisse dont l'éventail est l'ensemble des cônes réguliers

$$\begin{cases} \sigma_{i,j} = \langle e_1, \dots, \widehat{e}_{2i}, \dots, \widehat{e}_{2j-1}, \dots, e_{2n+2} \rangle & (i, j \in \{1, \dots, n\}) \\ \sigma'_i = \langle e_1, \dots, \widehat{e}_{2i}, \dots, \widehat{e}_{2n+1}, e_{2n+2} \rangle & (i \in \{1, \dots, n\}) \\ \sigma''_j = \langle e_1, \dots, \widehat{e}_{2j-1}, \dots, e_{2n+1}, \widehat{e}_{2n+2} \rangle & (j \in \{1, \dots, n\}) \end{cases}$$

et de leurs faces. Le lieu exceptionnel est un diviseur globalement à croisements normaux réunion des deux diviseurs irréductibles $V(e_{2n+1})$ et $V(e_{2n+2})$.

L'idéal $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ du diviseur $\pi^{-1}(0)$ est engendré par la fonction $z_{2i}z_{2j-1}$ (resp. z_{2i}^3 et z_{2j-1}^3) sur l'ouvert affine $U_{\sigma_{2i, 2j-1}}$ ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) (resp. $U_{\sigma'_i}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) et $U_{\sigma''_j}$ ($j \in \{1, \dots, n\}$)). Notons $v_i = e_i$ pour $1 \leq i \leq 2n-1$ et $v_{2n} = e_{2n+2}$. Soit (v_1^*, \dots, v_{2n}^*) la base duale de (v_1, \dots, v_{2n}) . Les éléments $(v_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ forment une base du \mathbf{Z} -module M et l'algèbre des fonctions régulières sur l'ouvert $U_{\sigma'_n}$ est l'algèbre sur \mathbf{C} du monoïde libre engendré par ces éléments. On a $v_{2i}^* = e_{2i}^* - e_{2n}^*$ pour $1 \leq i \leq n-1$, $v_{2i-1}^* = e_{2i-1}^* - 2e_{2n}^*$ pour $2 \leq i \leq n$ et $v_{2n}^* = 3e_{2n}^*$. Le diviseur $\pi^{-1}(0)$ est donc localement défini par l'annulation d'une coordonnée sur l'ouvert considéré et en particulier réduit le long de $V(e_{2n+2})$. On vérifie que ce diviseur est également réduit le long de $V(e_{2n+1})$.

2. Préliminaires

(2.1) Soit X une variété projective lisse sur le corps \mathbf{C} des nombres complexes. Soit $N_1(X) = (\{1\text{-cycles}\} / \equiv) \otimes \mathbf{R}$ où \equiv désigne l'équivalence numérique. On considère le cône $NE(X) \subset N_1(X)$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs. Une *arête extrême* est une demi-droite R dans $\overline{NE}(X)$, adhérence de $NE(X)$ dans $N_1(X)$, vérifiant $K_X \cdot R^* < 0$ et telle que pour tout $Z_1, Z_2 \in \overline{NE}(X)$, si $Z_1 + Z_2 \in R$ alors $Z_1, Z_2 \in R$. Une *courbe rationnelle extrême* est une courbe rationnelle irréductible C telle que $\mathbf{R}^+[C]$ soit une arête extrême et $-K_X \cdot C \leq \dim(X) + 1$. Toute arête extrême R est engendrée par une courbe rationnelle extrême et admet une *contraction*, c'est-à-dire qu'il existe une variété projective normale Y et un morphisme $\phi : X \rightarrow Y$, surjectif à fibres connexes, contractant les courbes irréductibles C telles que $[C] \in R$ (théorème de Kawamata-Shokurov).

Rappelons un résultat de J. Wisniewski (voir [Wi91]) sur le lieu exceptionnel d'une contraction extrême. Soit F une composante irréductible d'une fibre non triviale d'une contraction élémentaire associée à l'arête extrême R . Nous appelons *lieu de* R , le lieu des courbes dont la classe d'équivalence numérique appartient à R . On a alors l'inégalité :

$$\dim(F) + \dim(\text{lieu de } R) \geq \dim(X) + \ell(R) - 1,$$

où $\ell(R)$ désigne la *longueur* de l'arête extrême R :

$$\ell(R) = \inf\{-K_X \cdot C_0 \mid C_0 \text{ étant une courbe rationnelle et } C_0 \in R\}.$$

Lemme 2.2.—*Soit X une variété projective de dimension $n \geq 2$ et soit $Y \subset X$ un diviseur effectif. Soit D un diviseur numériquement effectif. Si $-K_X \equiv D + Y$ alors il existe une arête extrême R telle que $Y \cdot R^* > 0$.*

Démonstration.—Soit $C \subset X$ une courbe telle que $Y \cdot C > 0$. La courbe C se décompose $C \equiv C_0 + \sum_{i \in I} a_i C_i$ avec $C_0 \in \overline{NE}^+(X) = \{z \in \overline{NE}(X) \mid K_X \cdot z \geq 0\}$ et $(C_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des courbes rationnelles extrêmes (voir [Mo82] théorème 1.5). Les coefficients $(a_i)_{i \in I}$ sont positifs ou nuls et presque tous nuls. On a $Y \cdot C_0 = -K_X \cdot C_0 - D \cdot C_0 \leq 0$ et il existe donc un élément $i \in I$ tel que $a_i C_i \cdot Y > 0$. ■

(2.3) Fixons quelques notations. Soient $a \in \mathbf{Z}$ et $k \geq 2$. Soit $F(a) := \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{k-1}}(\mathcal{E}(a))$ où $\mathcal{E}(a) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a) \oplus H^0(\mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}$ et soit p_a le morphisme vers \mathbf{P}^{k-1} . Soient p et q les projections de $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$ sur \mathbf{P}^{k-1} et soit enfin $i(a)$ l'immersion fermée $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1} \subset F(a)$ au dessus de \mathbf{P}^{k-1} correspondant au quotient inversible sur $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$

$$p^*\mathcal{E}(a) \twoheadrightarrow H^0(\mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}} \twoheadrightarrow q^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)$$

où $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$ est considéré comme variété sur \mathbf{P}^{k-1} via p .

Proposition 2.4.—*Soit (X, L) une variété polarisée de dimension $n \geq 2$ et soit $Y = \cup_{i=1}^l Y_i$ un diviseur réduct et globalement à croisements normaux. On suppose $\omega_X \simeq L^{-k}(-Y)$.*

1. Si $k > \frac{n+1}{2}$ et $l = 1$ ou $k \geq \frac{n+1}{2}$ et $l \geq 2$ alors X est de Fano et $b_2(X) = 1$.
2. Si $k = \frac{n+1}{2}$ et $l = 1$ alors $Y \subset X$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_2 \subset \mathbf{P}^3$ ou $Y \subset X$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_2 \subset \mathbf{Q}_3$ ou Y et X sont de Fano et $b_2(Y) = b_2(X) = 1$ ou $Y \subset X$ est isomorphe à $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1} \subset F(a)$ pour un entier a convenable, L est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{F(a)}(1) \otimes p_a^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1))$ et l'idéal de Y dans X est $L^{\otimes -1} \otimes p_a^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a+1)$.

Démonstration.—La première partie de la proposition se montre par récurrence sur la dimension $n \geq 2$ de X . Si $n = 2$ alors $k \geq 2$ et, par le lemme 2.2, il existe une arête extrême R telle que $R^*.Y > 0$ et donc de longueur ≥ 3 . La surface X est donc de Fano et de nombre de Picard 1 (voir [Wi89] proposition 2.4.1).

Supposons la proposition démontrée jusqu'en dimension $n-1 \geq 2$ et considérons X comme dans l'énoncé. Soit C_1 une courbe rationnelle extrême telle que $Y.C_1 > 0$ et $R_1 = \mathbf{R}_+[C_1]$ et supposons par exemple $Y_1.C_1 > 0$ (voir lemme 2.2). Notons $X \xrightarrow{\varphi_1} Z_1$ la contraction élémentaire correspondante. La formule d'adjonction donne $\omega_{Y_1} \simeq L_{|Y_1}^{-k}(-\sum_{i \neq 1} Y_i \cap Y_1)$ avec $k \geq \frac{n+1}{2} > \frac{\dim(Y_1)+1}{2}$. Si $\sum_{i \neq 1} Y_i \cap Y_1 \neq \emptyset$ alors, par hypothèse de récurrence, Y_1 est de Fano et $b_2(Y_1) = 1$. Si $\sum_{i \neq 1} Y_i \cap Y_1 = \emptyset$ alors Y_1 est de Fano et $b_2(Y_1) = 1$ sauf si $k = \frac{n+1}{2}$ et $(Y_1, L_{|Y_1}) \simeq (\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1))$ (voir [Wi90]).

Soit F_1 la fibre de φ_1 contenant C_1 . La fibre F_1 rencontre en particulier Y_1 et $\dim(F_1 \cap Y_1) \geq \dim(F_1) - 1 \geq \ell(R_1) - 2 \geq \frac{n-1}{2} > 0$. Soit $C \subset F_1 \cap Y_1$ une courbe irréductible. La courbe C est contractée par φ_1 et on a donc $C \in R_1$ et $C.Y_1 > 0$. Notons que par tout point de Y_1 il passe une courbe tracée sur Y_1 numériquement proportionnelle à C et donc contractée par φ_1 . La contraction élémentaire φ_1 est donc divisorielle ou de type fibrée. Si φ_1 est divisorielle alors R_1 n'est pas numériquement effective, autrement dit, il existe un diviseur irréductible D tel que $D.C < 0$. On a donc $C \subset D$ et $Y_1 = D$, ce qui est impossible puisque $C.Y_1 > 0$. La contraction φ_1 est donc de type fibrée.

Supposons $b_2(Y_1) = 1$.—Le diviseur Y_1 est donc contracté sur un point par φ_1 et, puisque $Y_1.C > 0$, $\dim(Z_1) = 0$. La variété X est donc de Fano de nombre de Picard 1.

Supposons $Y_1 \simeq \mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$ et $L_{|Y_1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)$.—Notons (a, b) le bidegré de la courbe $C \subset Y_1$.

Supposons $a > 0$ et $b > 0$. Alors, par tout couple de points de Y_1 , il passe une courbe tracée sur Y_1 de bidegré (a, b) et donc numériquement proportionnelle à C dans X . Le diviseur Y_1 est

donc contracté sur un point par φ_1 . Le morphisme $Y_1 \xrightarrow{\varphi_1|_{Y_1}} Z_1$ est surjectif puisque $Y_1.C > 0$. Finalement, Z_1 est de dimension 0 et $b_2(X) = 1$. On en déduit que $k = 2$ par le théorème de Lefschetz, puis que X est une quadrique et Y_1 une section hyperplane ou que X est un espace projectif et Y_1 une quadrique par le théorème de Kobayashi-Ochiai (*voir* [KO73]).

Supposons maintenant $(a,b) = (0,1)$. Notons p la première projection de Y_1 sur \mathbf{P}^{k-1} . Soit $F \subset Y_1$ une fibre ensembliste de $\varphi_1|_{Y_1}$. Les courbes tracées sur Y_1 de bidegré $(0,1)$ sont contractées par φ_1 et on a donc $F = p^{-1}(p(F))$. S'il existe une courbe C_2 tracée sur F de bidegré (a_1, b_1) avec $a_1 > 0$ alors le 1-cycle $C_2 + C_1 \in R_1$ est de bidegré $(a_1, b_1 + 1)$ avec $a_1 > 0$ et $b_1 + 1 > 0$ et les arguments utilisés ci-dessus suffisent pour conclure. On peut donc supposer que les courbes tracées sur F sont de bidegré $(0,*)$. On en déduit que $p(F)$ est de dimension 0 puis que F est équidimensionnelle de dimension $k - 1$ et que Z_1 est de dimension $k - 1$. Soit $F_1 \subset X$ une composante irréductible d'une fibre de φ_1 ; F_1 rencontre Y_1 puisque $R^*.Y_1 > 0$ et $\dim(F_1 \cap Y_1) = k - 1$. On a donc $\dim(F_1) = k$. Le morphisme φ_1 est donc équidimensionnel de dimension k . Soit F_1 une fibre générique de φ_1 . On a $\omega_{F_1} = L_{|F_1}^{-k} \otimes \mathcal{O}_{F_1}(-Y)$. Le fibré $\mathcal{O}_{F_1}(Y)$ est numériquement effectif puisque $R_1^*.Y > 0$ et F_1 est donc de Fano. Soit R_{F_1} une arête extrême de F_1 . On a $\ell(R_{F_1}) \geq \dim(F_1) + 1$ et donc $b_2(F_1) = 1$ (*voir* [Wi89] proposition 2.4.1). On en déduit $(F_1, L_{|F_1}) = (\mathbf{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1))$ puis que φ_1 est un fibré en espaces projectifs localement trivial pour la topologie de Zariski (*voir* [Fu87] lemme 2.12) et en particulier que Z_1 est lisse. La fibre ensembliste $F_1 \subset \mathbf{P}^k$ de $\varphi_1|_{Y_1}$ est réunion disjointes de fibres de p de dimension $k - 1$ et donc irréductible. Le morphisme $\varphi_1|_{Y_1}$ s'identifie finalement à la seconde projection de $Y_1 = \mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$ sur \mathbf{P}^{k-1} et X à la fibration $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{k-1}}(\varphi_{1*}L)$ au dessus de \mathbf{P}^{k-1} . L'immersion fermée $Y_1 \subset X$ au dessus de \mathbf{P}^{k-1} est donnée par le quotient inversible $p^*(\varphi_{1*}L) \twoheadrightarrow L_{|Y_1} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)$ et on a donc un morphisme surjectif $\varphi_{1*}L \twoheadrightarrow p_*(L_{|Y_1}) = H^0(\mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)$. Finalement $\varphi_{1*}L = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a) \oplus H^0(\mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)$ avec $a \geq 1$. L'idéal de Y_1 dans X est $L^{\otimes -1} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(b)$ où b est un entier convenable. Le fibré canonique est donné par la formule $\omega_X = L^{-k-1} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a) = L^{-k}(-Y)$ et l'idéal de Y dans X est donc $L^{\otimes -1} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a)$. L'idéal du diviseur $\sum_{i \neq 1} Y_i$ dans X est donc $p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a - b)$. Or les diviseurs Y_1 et $\sum_{i \neq 1} Y_i$ sont disjoints et on a donc $a = b$ et $\sum_{i \neq 1} Y_i = \emptyset$. La première partie de la proposition est donc démontrée.

La seconde partie de la proposition a en fait déjà été prouvée ci-dessus. ■

3. Démonstration du théorème

(3.1) Fixons les notations. Soit (V, ω) une singularité symplectique isolée de dimension $2n$ ($n > 1$) vérifiant les hypothèses du théorème et soit $\pi : X \rightarrow V$ l'éclatement normalisé de l'idéal maximal de ω dans V . On peut toujours supposer qu'il existe une 2-forme symplectique φ sur $V - \{\omega\}$ restriction d'une 2-forme holomorphe sur X notée encore φ . Notons $E = E_1 \cup \dots \cup E_l$ ($l \geq 2$) le diviseur exceptionnel et $L := \mathcal{O}_X(-E)$. Le fibré $L_{|E}$ est ample et engendré par ses sections.

Proposition 3.2 (*voir* [Be00]).— *L'ordre d'annulation de φ^n le long de E_i est $n - 1$ pour $1 \leq i \leq l$.*

Démonstration.—Notons k_i ($1 \leq i \leq l$) l'ordre d'annulation de φ^n le long de E_i ($1 \leq i \leq l$)

de sorte que $\text{div}(\varphi^n) = \sum_{i=1}^l k_i E_i$.

Les singularités symplectiques sont rationnelles (*voir* [Be00] proposition 1.3) et ainsi $\varphi \in H^0(X, \Omega_X^2(\log E)(-E))$ (*voir* [CF01] théorème 2.1) où $\Omega_X^2(\log E)$ est le faisceau des 2-formes différentielles méromorphe à pôles au pire logarithmiques le long de E . La $2n$ -forme $\varphi^n \in H^0(X, \omega_X(-(n-1)E))$ est non nulle en dehors de E et il s'ensuit $k_i \geq n-1$ ($1 \leq i \leq l$) puisque le diviseur E est contracté par π .

Le produit extérieur avec φ^{n-1} donne une application \mathcal{O}_X -linéaire $\Omega_X^1 \longrightarrow T_X(\sum_{i=1}^l k_i E_i)$ qui est un isomorphisme en dehors de E . Notons $k_i - j_i \geq 0$ l'ordre d'annulation de cette application le long du diviseur E_i ($1 \leq i \leq l$). On obtient une application $\lambda : \Omega_X^1 \longrightarrow T_X(\sum_{i=1}^l j_i E_i)$ dont la restriction au diviseur E_i est non nulle et une section $\det(\lambda)$ de $\mathcal{O}_X(2\sum_{i=1}^l (n j_i - k_i) E_i)$ non nulle en dehors de E . On a donc $k_i \leq n j_i$ pour $1 \leq i \leq l$ puisque le diviseur E est contracté par π et en particulier $j_i \geq 1$.

Supposons par exemple $j_1 \geq j_i$ pour $1 \leq i \leq l$ et considérons le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{E_1}(-E_1) & \longrightarrow & \Omega_{X|E_1}^1 & \longrightarrow & \Omega_{E_1}^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \lambda|_{E_1} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & T_{E_1}(\sum_{i=1}^l j_i E_i) & \longrightarrow & T_{X|E_1}(\sum_{i=1}^l j_i E_i) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{E_1}((j_1+1)E_1 + \sum_{i=2}^l j_i E_i) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On a $\text{Hom}_{E_1}(\mathcal{O}_{E_1}(-E_1), \mathcal{O}_{E_1}((j_1+1)E_1 + \sum_{i=2}^l j_i E_i)) \subset H^0(E_1, L_{|E_1}^{-j_1-2}) = 0$ et, de même, $\text{Hom}_{E_1}(\mathcal{O}_{E_1}(-E_1), T_{E_1}(\sum_{i=1}^l j_i E_i)) = \text{Hom}_{E_1}(\Omega_{E_1}^1, \mathcal{O}_{E_1}((j_1+1)E_1 + \sum_{i=2}^l j_i E_i)) \subset H^0(E_1, T_{E_1} \otimes L_{|E_1}^{-j_1-1}) = 0$ puisque $j_1 \geq 1$ (*voir* [Be00] lemme 3.3). L'application $\lambda|_{E_1}$ se factorise à travers une flèche antisymétrique $\Omega_{E_1}^1 \xrightarrow{\mu_{E_1}} T_{E_1}(\sum_{i=1}^l j_i E_i)$ et provient donc d'un élément non nul de $H^0(E_1, \overset{2}{\wedge} T_{E_1}(\sum_{i=1}^l j_i E_i)) = H^0(E_1, \overset{2}{\wedge} T_{E_1} \otimes L_{|E_1}^{-j_1}(-\sum_{i=2}^l (j_1 - j_i) E_i))$. Il s'ensuit $j_1 \leq 2$ (*voir* [Be00] lemme 3.3). Le diviseur E est connexe et l'ensemble $\{E_{i_1}, \dots, E_{i_m}\}$ des diviseurs rencontrant E_1 et distincts de celui-ci est donc non vide. Si $j_1 = 2$ alors $j_{i_1} = \dots = j_{i_m} = j_1 = 2$, $(E_1, L_{|E_1}) \simeq (\mathbf{P}^{2n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{2n-1}}(1))$ et $(E_{i_r}, L_{|E_{i_r}}) \simeq (\mathbf{P}^{2n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{2n-1}}(1))$ pour $1 \leq r \leq m$ (*voir* [Be00] lemme 3.3). Les fibrés $\mathcal{O}_{E_1}(-E_1) \simeq L_{|E_1}(\sum_{i=2}^l E_i)$ et $\mathcal{O}_{E_{i_1}}(E_1)$ sont en particulier amples ce qui est absurde puisque $E_1 \cap E_{i_1}$ est de dimension ≥ 1 . Finalement $j_i = 1$ et $k_i \leq n$ pour $1 \leq i \leq l$. Si $k_1 = n$ alors $\det(\lambda|_{E_1})$ est génériquement non nul puisque le diviseur E est contracté par π . Ceci est à nouveau exclu car $\lambda|_{E_1}$ s'annule sur le sous-fibré $\mathcal{O}_{E_1}(-E_1) \subset \Omega_{X|E_1}^1$. Ceci démontre les égalités $k_i = n-1$ pour $1 \leq i \leq l$. ■

Lemme 3.3.—*Le lieu exceptionnel E de π a exactement deux composantes irréductibles dont l'intersection est connexe.*

Démonstration.—Le fibré canonique ω_X de X est isomorphe à $L^{-(n-1)}$ par la proposition 3.2 et $\omega_{E_i} \simeq L_{|E_i}^{-n}(-\sum_{j \neq i} E_j \cap E_i)$ par la formule d'adjonction. Si $l \geq 3$ alors il existe $i_1 \in \{1, \dots, l\}$

tel que E_{i_1} rencontre au moins deux autres composantes irréductibles de E et E_{i_1} est de Fano avec $b_2(E_{i_1}) = 1$ par la proposition 2.4. Le fibré $\mathcal{O}_{E_{i_1}}(-E_{i_1}) \simeq L_{E_{i_1}}(\sum_{j \neq i_1} E_j)$ et sa restriction à $E_{i_1} \cap E_{i_2}$ sont donc amples. Notons $\{E_{i_1}, \dots, E_{i_m}\}$ l'ensemble des composantes rencontrant E_{i_1} ($m \geq 3$). Si $b_2(E_{i_2}) = 1$ alors E_{i_2} est de Fano. Le fibré $\mathcal{O}_{E_{i_2}}(E_{i_1})$ et sa restriction à $E_{i_1} \cap E_{i_2}$ sont donc amples, ce qui est absurde puisque $E_{i_1} \cap E_{i_2}$ est de dimension ≥ 1 . L'argument précédent montre également que l'intersection $E_{i_1} \cap E_{i_2}$ est connexe. Il existe donc un isomorphisme $(E_{i_1} \cap E_{i_2} \subset E_{i_2}) \simeq (\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E}(a)))$ pour un entier a convenable (voir proposition 2.4). L'idéal $\mathcal{O}_{E_{i_2}}(-E_{i_1})$ de $E_{i_1} \cap E_{i_2}$ dans E_{i_2} est $L^{\otimes -1} \otimes p_a^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(a+1)$ (voir proposition 2.4) et sa restriction à $E_{i_1} \cap E_{i_2} \simeq \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ n'est donc pas ample. La connexité de l'intersection des deux composantes irréductibles de E se démontre par des arguments analogues. ■

(3.4) Posons $i = i(2)$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}(2)$. Soit enfin $j := i \circ s$ où s est l'involution naturelle de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$. Notons F et G les deux composantes irréductibles de E . Posons $W := H^0(\mathbf{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1))$.

Proposition 3.5.—*Le lieu exceptionnel E de π est isomorphe au recollement de deux copies de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ le long de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ via les immersions fermées i et j .*

Démonstration.—Notons $H = F \cap G$. La proposition 3.2 et la formule d'adjonction donnent $\omega_F \simeq L_{|F}^{-n}(-H)$ et $\omega_G \simeq L_{|G}^{-n}(-H)$. Si $b_2(H) = 1$ alors F et G sont de Fano et $b_2(F) = b_2(G) = 1$ par la proposition 2.4. Les fibrés $L_{|F}$ et $\mathcal{O}_F(G)$ sont amples et $\mathcal{O}_F(-F)$ l'est donc également. Le fibré $\mathcal{O}_G(F)$ est ample et $H = F \cap G$ est de dimension au moins 1, ce qui est finalement absurde. On a donc $b_2(H) \geq 2$ et H est isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ toujours par la proposition 2.4. Supposons F isomorphe à \mathbf{P}^3 ou Q_3 ($n = 2$). La restriction du fibré $\mathcal{O}_X(-F) = L \otimes \mathcal{O}_X(G)$ à $H = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est en particulier ample et on a donc $b_2(G) \geq 2$, puisque $\mathcal{O}_X(F)|_G$ est effectif et $F \cap G$ est de dimension ≥ 1 , et $H \subset G$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}_{\mathbf{P}^1}(\mathcal{E}(a_G))$. La restriction de $\mathcal{O}_X(-F)$ à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_G) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$ ou $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_G)$ (voir proposition 2.4) qui n'est pas ample, ce qui est absurde.

Il existe ainsi un isomorphisme de $H \subset F$ (resp. $H \subset G$) sur $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E}(a_F))$ (resp. $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E}(a_G))$) tel que la restriction de L à F (resp. G) soit isomorphe à $\mathcal{O}_F(1) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)$ (resp. $\mathcal{O}_G(1) \otimes p_G^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)$) où p_F (resp. p_G) est la projection de F (resp. G) sur \mathbf{P}^{n-1} . Enfin, $\mathcal{O}_F(-H) \simeq L_{|F}^{-1} \otimes p_F^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(a_F+1))$ et $\mathcal{O}_G(-H) \simeq L_{|G}^{-1} \otimes p_G^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(a_G+1))$.

Soit $\ell \subset H$ une droite, i.e. $(\ell, L) := \deg_\ell(L|_\ell) = 1$, verticale pour p_G . Le fibré $\mathcal{O}_X(F)|_G \simeq \mathcal{O}_G(H)$ est isomorphe à $L_{|G} \otimes p_G^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-a_G-1))$ et en particulier $(\ell, \mathcal{O}_X(F)) = 1$. La restriction de $\mathcal{O}_X(F)$ à F est isomorphe à $L_{|F}^{-2} \otimes p_F^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(a_F+1))$ et donc $(\ell, \mathcal{O}_X(F)) = -2 + (a_F+1) \deg_\ell(p_F^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)|_\ell))$. La droite ℓ est donc horizontale pour p_F et la restriction de $p_F \times p_G$ à H est un isomorphisme de H sur $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$, autrement dit, les restrictions de p_F et p_G à H s'identifient aux deux projections de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ sur \mathbf{P}^{n-1} via les deux isomorphismes de H sur $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$. On a donc $\deg_\ell(p_F^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)|_\ell)) = 1$ et $a_F = a_G = 2$.

Le lieu exceptionnel E s'identifie donc au recollement de deux copies de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ le long de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ et l'automorphisme de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ induit par les deux isomorphismes de H sur $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ est de la forme $(x, y) \mapsto (\alpha(y), \beta(x))$ où α et β sont deux automorphismes de \mathbf{P}^{n-1} .

Il reste à vérifier que tout automorphisme de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ de la forme $(x,y) \mapsto (\alpha(x), \beta(y))$ où α et β sont deux automorphismes de \mathbf{P}^{n-1} est la restriction à $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ d'un automorphisme de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ stabilisant $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$.

Fixons un automorphisme β de \mathbf{P}^{n-1} et notons encore β l'automorphisme linéaire de $W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}$ correspondant. L'automorphisme de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ au dessus de \mathbf{P}^{n-1} induit par $\text{Id} \oplus \beta$ stabilise $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ et sa restriction à $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ est $(x,y) \mapsto (x, \beta(y))$. Soit α un automorphisme de \mathbf{P}^{n-1} . Fixons des isomorphismes $\alpha^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2)$ et $\alpha^* W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}} \simeq W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}$. L'isomorphisme $\alpha^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$ déduit des deux précédents induit un automorphisme de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ au dessus de α qui stabilise $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ et sa restriction à $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ est de la forme $(x,y) \mapsto (\alpha(x), \beta'(y))$ où β' est un automorphisme de \mathbf{P}^{n-1} . ■

Lemme 3.6.— On a $H^1(F, T_F \otimes \mathcal{O}_F(-F)) = H^1(G, T_G \otimes \mathcal{O}_G(-G)) = 0$ si $n \geq 2$ et $H^1(E, T_X \otimes \mathcal{O}_E(-iE)) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Démonstration.— Les faisceaux $R^j p_{F*}(\mathcal{O}_F(k))$ sont nuls pour $j \in \{1,2\}$ et $k \in \mathbf{Z}$. Il existe donc un isomorphisme $H^i(F, \mathcal{O}_F(k) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l)) \simeq H^i(\mathbf{P}^{n-1}, S^k(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2) \oplus W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))$ pour $i \in \{1,2\}$ et $k, l \in \mathbf{Z}$. Le groupe $H^i(F, \mathcal{O}_F(k) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))$ est donc nul pour $k, l \in \mathbf{Z}$ si $i = 1$ et pour $l > -3$ si $i = 2$. Les groupes $H^1(F, p_F^*(T_{\mathbf{P}^{n-1}}(l)) \otimes \mathcal{O}_F(k))$ et $H^1(\mathbf{P}^{n-1}, T_{\mathbf{P}^{n-1}}(l) \otimes S^k(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2) \oplus W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}))$ sont également isomorphes pour $k, l \in \mathbf{Z}$ et donc nuls pour $l > -3$.

La longue suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte courte

$$(0 \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow p_F^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-2) \oplus W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}) \otimes \mathcal{O}_F(1) \longrightarrow T_{F/\mathbf{P}^{n-1}} \longrightarrow 0) \otimes \mathcal{O}_F(k) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l)$$

et les annulations précédentes donnent l'annulation du groupe $H^1(F, T_{F/\mathbf{P}^{n-1}} \otimes \mathcal{O}_F(k) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))$ pour $l > -3$ et, de même, la longue suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte courte

$$(0 \longrightarrow T_{F/\mathbf{P}^{n-1}} \longrightarrow T_F \longrightarrow p_F^* T_{\mathbf{P}^{n-1}} \longrightarrow 0) \otimes \mathcal{O}_F(k) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l)$$

donne finalement l'annulation du groupe $H^1(F, T_F \otimes \mathcal{O}_F(k) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))$ pour $k + l > -3$. Le fibré $\mathcal{O}_F(-F)$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_F(2) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-1)$ et les groupes $H^1(F, T_F \otimes \mathcal{O}_F(-F))$ et $H^1(G, T_G \otimes \mathcal{O}_G(-G))$ sont donc nuls.

La longue suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte courte

$$(0 \longrightarrow T_F \longrightarrow T_{X|F} \longrightarrow N_{F/X} = \mathcal{O}_F(-2) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1) \longrightarrow 0) \otimes \mathcal{O}_F(k) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l)$$

donne l'annulation de $H^1(F, T_{X|F} \otimes \mathcal{O}_F(k) \otimes p_F^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))$ pour $l > -3$. L'idéal de E dans X est $I_F I_G = I_F \cap I_G$ et la longue suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte courte

$$(0 \longrightarrow \mathcal{O}_G(-F) = \mathcal{O}_G(-1) \otimes p_G^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow 0) \otimes T_{X|E} \otimes \mathcal{O}_E(-kE)$$

donne finalement l'annulation du groupe $H^1(E, T_{X|E} \otimes \mathcal{O}_E(-kE))$ pour $k > -3$ et en particulier pour $k > 0$. ■

(3.7) Soit ζ une racine cubique de l'unité et soit $\langle \zeta \rangle$ le groupe cyclique engendré par ζ .

Notons $V' = \mathbf{C}^{2n} / \langle \zeta \rangle$ où $\langle \zeta \rangle$ agit sur \mathbf{C}^{2n} par la formule

$$\zeta.(z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = (\zeta z_1, \zeta^2 z_2, \dots, \zeta z_{2n-1}, \zeta^2 z_{2n})$$

et X' l'éclatement normalisé de l'idéal maximal de o' dans V' où o' est le point singulier de V' . Notons $E' = F' \cup G'$ le diviseur exceptionnel et E_i (resp. E'_i) le $i^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de E (resp. E') dans X (resp. X') pour $i \geq 1$. Notons F_i et G_i (resp. F'_i et G'_i) les $i^{\text{ièmes}}$ voisinages infinitésimaux de F et G (resp. F' et G') dans X (resp. X'). Fixons un isomorphisme $\psi_1 : E_1 \simeq E'_1$ (voir proposition 3.5) qui applique F (resp. G) sur F' (resp. G').

Proposition 3.8.—*Il existe un isomorphisme $\psi_2 : E_2 \simeq E'_2$ compatible avec l'isomorphisme $\psi_1 : E_1 \simeq E'_1$.*

Démonstration.—L'obstruction à l'existence d'un morphisme $E_2 \rightarrow X'$ étendant le morphisme $E \simeq E' \hookrightarrow X$ est un élément de $H^1(E, T_{X'} \otimes \mathcal{O}_E(-E)) = H^1(E', T_{X'} \otimes \mathcal{O}_{E'}(-E'))$ (voir [Gr71] Exposé 3 corollaire 5.2) nul par le lemme 3.6. Fixons un tel morphisme. Il se factorise à travers E'_2 et détermine un morphisme $\psi_2 : E_2 \rightarrow E'_2$ et, par restriction à F_2 (resp. G_2), un morphisme $\psi_{F_2} : F_2 \rightarrow F'_2$ (resp. $\psi_{G_2} : G_2 \rightarrow G'_2$) étendant la restriction ψ_F (resp. ψ_G) de ψ à F (resp. G). Montrons que ψ_2 est en fait un isomorphisme.

L'obstruction à l'existence d'un morphisme $F_2 \rightarrow F$ (resp. $F'_2 \rightarrow F'$) étendant l'identité $F \rightarrow F$ (resp. $F' \rightarrow F'$) est un élément de $H^1(F, T_F \otimes \mathcal{O}_F(-F))$ (resp. $H^1(F', T_{F'} \otimes \mathcal{O}_{F'}(-F'))$) nul par le lemme 3.6. Le schéma F_2 (resp. F'_2) est donc un F -schéma (resp. F' -schéma) dont le faisceau structural est isomorphe au quotient $S^\bullet(\mathcal{O}_F(-F))/\mathcal{O}_F(-2F)S^\bullet(\mathcal{O}_F(-F))$ (resp. $S^\bullet(\mathcal{O}_{F'}(-F'))/\mathcal{O}_{F'}(-2F')S^\bullet(\mathcal{O}_{F'}(-F'))$). Les schémas F_2 et F'_2 sont donc isomorphes.

Notons i et j les injections respectivement de $\mathcal{O}_{G'}$ et $\mathcal{O}_{F'}(-F')$ dans $\mathcal{O}_{F'} \oplus \mathcal{O}_{F'}(-F')$ et notons p et q les projections sur $\mathcal{O}_{F'}$ et $\mathcal{O}_{F'}(-F')$ respectivement. Remarquons enfin l'égalité $\psi_{F_2*} \mathcal{O}_{F_2} = \psi_{F*} \mathcal{O}_F \oplus \psi_{F*} \mathcal{O}_F(-F) = \mathcal{O}_{F'} \oplus \mathcal{O}_{F'}(-F')$. Le morphisme d'anneaux $\psi_{F_2}^* : \mathcal{O}_{F'} \oplus \mathcal{O}_{F'}(-F') \rightarrow \mathcal{O}_{F'} \oplus \mathcal{O}_{F'}(-F')$ est déterminé par la dérivation $D_F = q \circ \psi_{F_2}^* \circ i \in \text{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_{F'}, \mathcal{O}_{F'}(-F'))$ et l'application $\mathcal{O}_{F'}$ -linéaire $p \circ \psi_{F_2}^* \circ j \in \text{Hom}_{F'}(\mathcal{O}_{F'}(-F'), \mathcal{O}_{F'}(-F')) = \mathbf{C}$. Nous noterons λ_F l'élément de \mathbf{C} correspondant à $p \circ \psi_{F_2}^* \circ j$. Notons enfin $D_G \in \text{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_{G'}, \mathcal{O}_{G'}(-G'))$ et $\lambda_G \in \text{Hom}_{G'}(\mathcal{O}_{G'}(-G'), \mathcal{O}_{G'}(-G'))$ les éléments correspondants associés à ψ_{G_2} .

Le morphisme ψ_{F_2} est un homéomorphisme et si $\lambda_F \neq 0$ alors c'est un isomorphisme de schémas. Supposons donc $\lambda_F \neq 0$ et vérifions que ψ_{F_2} induit un isomorphisme de $F_2 \cap G_2$ sur $F'_2 \cap G'_2$. Soit $U \subset F'$ un ouvert affine non vide d'anneau A au dessus duquel le fibré $\mathcal{O}_{F'}(-F')$ est trivial. Les anneaux $\mathcal{O}_{F_2}(U)$ et $\mathcal{O}_{F'_2}(U)$ sont isomorphes à l'anneau $A \oplus \varepsilon A$ avec $\varepsilon^2 = 0$. Le morphisme $\psi_{F_2}^*$ est $a + \varepsilon b \mapsto a + \varepsilon(D_F(a) + \lambda_F b)$. Soit $h + \varepsilon h_1$ un générateur de l'idéal de $F'_2 \cap G'_2$ dans F'_2 sur U . L'élément h est une équation du diviseur $F' \cap G'_2$ dans F' . La restriction de ψ_2 à $F_2 \cap G_2$ se factorise à travers $F'_2 \cap G'_2$ et l'élément $\psi_{F_2}^*(h + \varepsilon h_1)$ est donc dans l'idéal de $F_2 \cap G_2$ dans F_2 . Ce dernier est engendré par un élément de la forme $uh + \varepsilon h_3$ où u est inversible dans A . Ecrivons $\psi_{F_2}^*(h + \varepsilon h_1) = h + \varepsilon h_2$ avec $h_2 = D_F(h) + \lambda_F h_1$. Il existe donc une relation $h + \varepsilon h_2 = (a + \varepsilon b)(uh + \varepsilon h_3) = auh + \varepsilon(ah_3 + buh)$ et en particulier $h = auh$. L'élément a est inversible dans A et $a + \varepsilon b$ est donc inversible dans $A \oplus \varepsilon A$. L'image par $\psi_{F_2}^*$ de l'idéal de $A \oplus \varepsilon A$ engendré par $h + \varepsilon h_1$ est l'idéal - $\psi_{F_2}^*$ est un isomorphisme - engendré par $\psi_{F_2}^*(h + \varepsilon h_1)$ et donc

l'idéal de $F_2 \cap G_2$ dans F_2 .

Si $\lambda_F = 0$ alors le morphisme ψ_{F_2} se factorise à travers $F' \hookrightarrow F'_2$. L'image schématique de $F_2 \cap G_2$ est en particulier un sous-schéma fermé de F' et le morphisme induit par ψ_2 de $F_2 \cap G_2$ vers $F'_2 \cap G'_2$ n'est pas un isomorphisme.

En particulier, si $\lambda_F = 0$ alors $\lambda_G = 0$ et l'image schématique de $F_2 \cap G_2$ est donc le sous-schéma fermé $F' \cap G'$, autrement dit, il existe une rétraction de l'inclusion $E \subset E_2$, ce qui est exclu par le lemme 3.9.

On a donc finalement $\lambda_F \neq 0$, $\lambda_G \neq 0$ et ψ_2 est bien l'isomorphisme cherché. ■

Lemme 3.9 (voir [De01] lemme 2.8).— Soit (R, \mathfrak{m}) un anneau local noethérien et soit $I \subset \mathfrak{m}^2$ un idéal de R . S'il existe une section de la projection canonique $R \rightarrow R/I$ alors $I = 0$.

Le lemme suivant et le lemme 3.6 nous assurent que l'isomorphisme ψ_2 s'étend en un isomorphisme $\widehat{X} \simeq \widehat{X}'$ des complétés formels de X et X' le long de E et E' respectivement. Les complétés $\widehat{\mathcal{O}}_{V,o}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{V',o'}$ sont donc isomorphes (voir [Gr66] Chap. III théorème 4.1.5) et la preuve du théorème est achevée.

Lemme 3.10 (voir [Mo82] lemme 3.33).— Soient X et X' deux espaces analytiques complexes réduits et irréductibles de même dimension et E et E' deux diviseurs de cartier effectifs sur X et X' respectivement. Notons E_i (resp. E'_i) le $i^{\text{ème}}$ voisinage infinitésimal de E (resp. E') dans X (resp. X') pour $i \geq 1$. On suppose que X est lisse et qu'il existe un isomorphisme $E_{i_0} \simeq E'_{i_0}$ pour un $i_0 \geq 2$. Si $H^1(E, T_X \otimes \mathcal{O}_E(-iE)) = 0$ pour $i \geq i_0$ alors l'isomorphisme $E_{i_0} \simeq E'_{i_0}$ s'étend en un isomorphisme $\widehat{X} \simeq \widehat{X}'$ des complétés formels de X et X' le long de E et E' respectivement.

Références

- [Be00] A. Beauville, *Symplectic singularities*, Invent. Math. **139** (2000), 541-549.
- [CF01] F. Campana, H. Flenner, *Contact singularities* à paraître dans Manuscripta Mathematica.
- [De01] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 2001.
- [Fl88] H. Flenner, *Extendability of differential forms on non-isolated singularities*, Invent. Math. **94** (1988), 317-326.
- [Fu87] T. Fujita, *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive*, dans *Algebraic geometry, Sendai 1985*, Adv. Stud. Pure Math. 10, 167-178, 1987.
- [Gr66] A. Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique III*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 11, 1966.
- [Gr71] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag, 1971.

- [KO73] S. Kobayashi, T. Ochiai, *Characterization of complex projective spaces and hyperquadrics*, J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973), 31-47.
- [Mo82] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math. **116** (1982), 133-176.
- [Od88] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry* 15, Springer-Verlag, 1988.
- [Wi89] J. Wisniewski, *Length of extremal rays and generalized adjonction*, Math. Z. **200** (1989), 409-427.
- [Wi90] J. Wisniewski, *On a conjecture of Mukai*, Manuscripta Math. **68** (1990), 135-141.
- [Wi91] J. Wisniewski, *On contractions of extremal rays on Fano manifolds*, J. Reine Angew. Math. **417** (1991), 141-157.

Stéphane DRUEL, INSTITUT FOURIER, UMR 5582 du CNRS, Université Joseph Fourier, BP 74,
38402 Saint Martin d'Hères, France.

e-mail: druel@mozart.ujf-grenoble.fr