Bornitude et Continuité de la transformation de Lévy en Analyse

Lucien Chevalier

Prépublication de l'Institut Fourier n° 554 (2001)
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Abstract : In our previous papers [4] and [5], we have obtained a decomposition of $|f|$, where f is a function defined on $\mathbb{R}^n$, that is analogous to the one proved by H. Tanaka for martingales (the so-called "Tanaka formula"). More precisely, the decomposition has the form $|f| = \widetilde{f} + D_*^0(f)$, where $D_*^0(f)$ is (a variant of) the *density of the area integral* associated with f. This functional (introduced by R. F. Gundy in his 1983 paper [9]) can be viewed as the counterpart of the local time in Euclidean harmonic analysis. In this paper, we are interested in boundedness and continuity properties of the mapping $f \mapsto \widetilde{f}$ (which we call the *Lévy transform in analysis*) on some classical function or distribution spaces. As was shown in [4] and [5], the above (non-linear) decomposition is bounded in L^p for every $p \in [1, +\infty[$, i. e. one has $\|\widetilde{f}\|_p \leq C_p\|f\|_p$, where C_p is a constant depending only on p. Nevertheless our methods (roughly speaking, the Calderón-Zygmund theory in [4], stochastic calculus and martingale inequalities in [5]) both gave constants C_p whose order of magnitude near 1 is $O(1/(p-1))$. The aim of this paper is twofold: first, we improve the preceding result and we answer a natural question, by proving that the best constants C_p are bounded near 1. Second, we prove that the Lévy transform $f \mapsto \widetilde{f}$ is continuous on the Hardy spaces H^p with $p > n/(n+1)$.

Mots-clés : Formule de Tanaka, Densité de l'intégrale d'aire, Mouvement brownien, Temps local.

Classification : 42B25, 42B30, 60G46, 60J65.

1. — Introduction

Nous avons obtenu ([4], [5]) une "formule de Tanaka" dans le cadre de l'analyse réelle qui, a l'instar de son analogue probabiliste, fournit une écriture explicite de la valeur absolue d'une fonction convenable f définie dans $\mathbb{R}^n$, de la forme

$$|f| = \widetilde{f} + D_*^0(f) \ , \tag{1}$$

où $D^0_*(f)$ est la valeur en 0 d'une forme appropriée de la *densité de l'intégrale d'aire* associée à f. Cette fonctionnelle, dont nous rappellerons la définition plus loin, joue en analyse le rôle tenu en probabilités par le temps local (pour des exemples de résultats suggérés par la correspondance entre ces deux notions, nous renvoyons à [2], [4], [5], [9], [10]).

En raison de l'analogie avec le contexte probabiliste, nous appellerons *transformation de Lévy en analyse* l'application $f \mapsto \widetilde{f}$. Il est prouvé dans [4] et [5] que, *grosso modo*, cette application conserve les espaces fonctionnels usuels de l'analyse réelle (y compris l'espace de Hardy H^1, qui n'est pas stable par l'application $f \mapsto |f|$), et notamment les espaces L^p pour $1 \le p < +\infty$. Le but de ce qui suit est de préciser certaines propriétés de bornitude de cette application dans les espaces L^p (dans lesquels la norme sera notée $\|\cdot\|_p$), et les espaces H^p pour $p > n/(n+1)$.

Concernant la bornitude dans les espaces L^p, la proposition 2 de [4] montre que $\|D^0_*(f)\|_1 \le \|f\|_1$, et par suite on a $\|\widetilde{f}\|_1 \le 2\|f\|_1$. Dans le cas où $1 < p < +\infty$, les méthodes de variable réelle utilisées dans [4] fournissent une estimation de la forme $\|\widetilde{f}\|_p \le C(n,p)\|f\|_p$, et la constante $C(n,p)$ (qui provient de l'utilisation du théorème de Calderón-Zygmund) est, pour tout n, de l'ordre de $1/(p-1)$ au voisinage de 1. Du côté probabiliste, l'égalité $\langle \widetilde{M},\widetilde{M}\rangle = \langle M,M\rangle$ et les inégalités de Burkholder-Gundy montrent que l'application $M \mapsto \widetilde{M}$ est bornée dans H^p pour $0 < p < +\infty$, donc aussi (grâce à l'inégalité de Doob) dans L^p pour $1 < p < +\infty$, mais là encore au prix d'une constante qui est de l'ordre de $1/(p-1)$ au voisinage de 1. La méthode probabiliste suivie dans [5] donne donc un contrôle de $\|\widetilde{f}\|_p$ en fonction de $\|f\|_p$ indépendant de la dimension, mais dont la dépendance en p reste aussi peu satisfaisante. Il importe aussi de noter que le manque de linéarité ou de sous-linéarité des applications en question interdit de recourir aux arguments classiques d'interpolation.

Ces remarques sont à l'origine de la question suivante : Peut-on obtenir un contrôle de la forme $\|\widetilde{f}\|_p \le C(p)\|f\|_p$, avec une constante $C(p)$ qui reste bornée au voisinage de 1 ? Nous répondons par l'affirmative (compte tenu de l'égalité (1)), en prouvant le

Théorème 1. — *Pour tout $p \in [1,+\infty[$, et toute fonction $f \in L^p$, la fonction $D^0_*(f) \in L^p$ et on a*

$$\|D^0_*(f)\|_p \le p\|f\|_p \,. \tag{2}$$

Étant donné une martingale M, nous désignons par $L^0(M)$ le processus croissant défini par son temps local en 0. Le résultat probabiliste correspondant au théorème précédent est le

Théorème 2. — *Pour tout $p \in [1,+\infty[$, et toute martingale $M \in L^p$, la variable aléatoire $L^0_\infty(M) \in L^p$ et on a*

$$\|L^0_\infty(M)\|_p \le p\|M\|_p \,. \tag{3}$$

Il se trouve que ce dernier résultat est connu. Plus précisément, J. Azéma et M. Yor ont obtenu dans [1] l'estimation (3), en utilisant une propriété spécifique du temps local, i. e. le fait que la mesure dL^0 est portée par l'ensemble des $s \in \mathbb{R}$ tels que $M_s = 0$. Signalons également que l'inégalité (3) est optimale, comme l'a montré P. Vallois dans [15].

Nous obtenons d'autre part le résultat suivant, qui donne la continuité de la transformation de Lévy dans tous les espaces de Hardy "possibles". Ceci améliore à la fois le résultat de continuité dans les L^p (pour $p > 1$), et le résultat de bornitude dans H^1, précédemment obtenus, au moyen d'autres arguments, dans [4].

THÉORÈME 3. — *Pour tout* $p > n/(n+1)$, *il existe une constante* $C(n,p)$ *telle que, pour tout couple* (f,g), *d'éléments de* H^p, *on ait*

$$\|\widetilde{f} - \widetilde{g}\|_{H^p} \leq C(n,p) \|f - g\|_{H^p}^{1/2} (\|f\|_{H^p} + \|g\|_{H^p})^{1/2} \,. \tag{4}$$

Le plan de l'article est le suivant : dans le §2, nous déduirons le théorème 1 du théorème 2, en utilisant certains résultats de [5]. Nous donnerons d'autre part au §3 le détail de l'argument utilisé dans [1] pour prouver le théorème 2. Elle est en effet particulièrement simple, et de plus elle semble pouvoir donner quelques arguments, dans la perspective d'une éventuelle transposition en analyse, qui est discutée au §4. Enfin, nous prouvons le théorème 3 dans le §5, au moyen d'arguments d'analyse réelle, utilisant notamment les espaces T^p de Coifman-Meyer-Stein et la caractérisation de Gundy-Silvertstein des espaces H^p au moyen de la "densité maximale" de l'intégrale d'aire.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'introduire quelques notations et définitions. On désigne par n un entier ≥ 1, fixé une fois pour toutes, et par $\mathbb{R}_+^{n+1}$ le demi-espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Le point courant de $\mathbb{R}_+^{n+1}$ est généralement noté $z = (x,y)$. Pour tout point $\xi \in \mathbb{R}^n$, on note p_ξ le noyau de Poisson relatif au point ξ, défini dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ par

$$p_\xi(z) = \frac{c_n y}{(|x-\xi|^2 + y^2)^{(n+1)/2}},$$

où c_n désigne la constante de normalisation habituelle.

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications mesurables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(0,1) |f(\xi)| \, d\xi < +\infty.$$

En d'autres termes, $\mathcal{M}$ est l'ensemble des applications *prolongeables*, au sens de la définition de [13], p. 139. À toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on peut associer son intégrale de Poisson $P(f)$, définie dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ par

$$P(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(z) f(\xi) \, d\xi.$$

On note $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},(B_t)_{t\geq 0},(\mathbb{P}^z)_{z\in\mathbb{R}^{n+1}})$ la réalisation canonique du processus de Wiener dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Le processus $B=(B_t)_{t\geq 0}$ est donc le mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{P}^z$ désigne , pour tout $z\in\mathbb{R}^{n+1}$, la probabilité du mouvement brownien issu du point z, et l'espérance mathématique correspondante est notée $\mathbb{E}^z$.

Pour tout $a>0$, on notera m_a la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan $\mathbb{R}^n\times\{a\}$, $\mathbb{P}^{m_a}$ la mesure $\sigma-$ finie sur Ω définie par

$$\mathbb{P}^{m_a}=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{P}^{(x,a)}\,dx$$

et $\mathbb{E}^{m_a}$ l'espérance mathématique correspondante.

On notera τ le temps de sortie du demi-espace pour le mouvement brownien. Il est classique que, pour tout $z\in\mathbb{R}_+^{n+1}$, la loi de B_τ sous $\mathbb{P}^z$ est la mesure harmonique relative au point z. On a donc, pour toute fonction $f\in\mathcal{M}$ (ou à valeurs ≥ 0) et tout $z\in\mathbb{R}_+^{n+1}$, l'égalité

$$\mathbb{E}^z(f(B_\tau))=P(f)(z)\ . \tag{5}$$

On pose, pour toute fonction $f\in\mathcal{M}$ et tout $\xi\in\mathbb{R}^n$,

$$D_*^0(f)(\xi)=\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}yp_\xi(z)\Delta|P(f)|(dz).$$

La fonction $|P(f)|$ étant sous-harmonique, son laplacien au sens des distributions est une mesure positive, et par suite la fonction $D_*^0(f)$ est bien définie. Elle est à valeurs presque partout finies si (par exemple) $f\in\bigcup_{1\leq p<+\infty}L^p$ (conséquence du théorème 1).

Sauf mention contraire, les espaces L^p considérés sont relatifs à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, et la norme usuelle dans L^p est notée $\|\cdot\|_p$. Cette dernière notation sera également utilisée dans le contexte probabiliste, où l'on pose classiquement $\|M\|_p=\sup_{t\geq 0}(\mathbb{E}(|M_t|^p))^{1/p}$.

Terminons cette introduction en rappelant (en vue du §4) une définition des espaces H^p et en analyse et en probabilités. A toute *distribution bornée*[1] f définie dans $\mathbb{R}^n$, on associe sa fonction maximale non tangentielle $N(f)$, définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$N(f)(\xi)=\sup_{|\xi-x|<y}|P(f)(x,y)|\ .$$

L'espace $H^p=H^p(\mathbb{R}^n)$ est défini comme l'ensemble des distributions bornées f définies dans $\mathbb{R}^n$ telles que $\|f\|_{H^p}=\|N(f)\|_p<+\infty$. Du côté probabiliste, on dit qu'une P - martingale locale (brownienne, donc continue) $M\in H^p(P)$ si $\|M\|_{H^p(P)}=(\mathbb{E}((M_\infty^*)^p))^{1/p}<+\infty$, où $M_t^*=\sup_{0\leq s<t}|M_s|$. Pour tout $a>0$, on définit de même les espaces $H^p(\mathbb{P}^{m_a})$, ainsi que les normes correspondantes, en remplaçant dans les définitions précédentes P par $\mathbb{P}^{m_a}$ et $\mathbb{E}$ par $\mathbb{E}^{m_a}$.

1. Pour la définition précise d'une telle distribution et de son intégrale de Poisson, nous renvoyons à [14], pp. 89-90

De bonnes relations entre la version analytique et les différentes versions probabilistes des espaces H^p ont permis de démontrer (ou de re-démontrer) de manière probabiliste de nombreux résultats d'analyse.

Nous remercions Marc Yor de nous avoir signalé le théorème 2.

2. — Preuve du théorème 1

Soient $p \in [0, +\infty[$ et $f \in L^p$. Nous posons $u = P(f)$, et nous désignons par M le processus défini par $M_t = u(B_{t\wedge\tau})$. Ce processus est une martingale pour toute loi $\mathbb{P}^z$, et nous désignons par L^0 son temps local en 0.

Nous commençons par donner les deux résultats techniques suivants :

LEMME 1. — *Pour tout $a > 0$ et toute variable aléatoire X $\mathbb{P}^{m_a}$ - intégrable ou à valeurs ≥ 0, on a l'égalité*

$$\mathbb{E}^{m_a}(X/B_\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}^{(x,a)}(X/B_\tau) p_{B_\tau}(x,a)\, dx \quad \mathbb{P}^{m_a} - \text{p. s.} \tag{6}$$

LEMME 2. — *Pour tout $a > 0$, on a l'égalité*

$$\mathbb{E}^{m_a}(L^0_\tau/B_\tau) = D^0_{*a}(f)(B_\tau) \quad \mathbb{P}^{m_a} - \text{p. s.}, \tag{7}$$

où

$$D^0_{*a}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} (y \wedge a) p_\xi(z) \Delta |u|(dz)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Le lemme 1 est une conséquence immédiate de la définition de l'espérance conditionnelle et de l'égalité (5). Pour le lemme 2, nous renvoyons à [5].

Pour tout $a > 0$, la loi de B_τ sous $\mathbb{P}^{m_a}$ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ (conséquence de l'égalité (5)), et par suite le lemme 2 donne l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D^0_{*a}(f)(\xi))^p \, d\xi = \mathbb{E}^{m_a}((\mathbb{E}^{m_a}(L^0_\tau/B_\tau))^p) \, .$$

D'autre part on déduit du lemme 1, en appliquant deux fois l'inégalité de Jensen, que

$$(\mathbb{E}^{m_a}(L^0_\tau/B_\tau))^p \leq \mathbb{E}^{m_a}((L^0_\tau)^p/B_\tau) \, , \tag{8}$$

et par suite

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D^0_{*a}(f)(\xi))^p \, d\xi \leq \mathbb{E}^{m_a}((L^0_\tau)^p) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}^{(x,a)}((L^0_\tau)^p) \, dx \, .$$

Mais on a, en vertu du théorème 2,

$$\mathbb{E}^{(x,a)}((L^0_\tau)^p) \leq p^p \, \mathbb{E}^{(x,a)}(|M_\tau|^p) = p^p \, \mathbb{E}^{(x,a)}(|f(B_\tau)|^p)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On en déduit que, pour tout $a > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D^0_{*a}(f)(\xi))^p \, d\xi \leq p^p \, \mathbb{E}^{m_a}((|f(B_\tau)|^p)) = p^p \|f\|_p^p \,,$$

ce qui achève la démonstration.

3. — Preuve du théorème 2

Nous donnons ici l'argument utilisé par J. Azéma et M. Yor pour obtenir le théorème 2 (une des motivations est constituée par nos remarques du paragraphe 4). L'argument essentiel est le

LEMME 3. — *Soient* $p \geq 1$, M *une* P*–martingale continue telle que* $\|M\|_p < +\infty$ *et* L^0 *son temps local en* 0. *Le processus* N *défini par*

$$N_t = (L^0_t)^p - p(L^0_t)^{p-1}|M_t| \tag{9}$$

est une martingale, qui est nulle en 0 *si* $p > 1$.

Démonstration. — En utilisant la formule d'intégration par parties, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} p(L^0_t)^{p-1}|M_t| &= p(L^0_0)^{p-1}|M_0| \\ &\quad + \int_0^t p(L^0_s)^{p-1} \, (d\widetilde{M}_s + dL^0_s) + \int_0^t |M_s| p(p-1)(L^0_s)^{p-2} \, dL^0_s \,. \end{aligned}$$

Comme la mesure dL^0 est portée par l'ensemble des s tels que $M_s = 0$, la dernière intégrale du second membre est nulle et par suite, si $p > 1$,

$$N_t = -\int_0^t p(L^0_s)^{p-1} \, d\widetilde{M}_s \,,$$

pour tout $t \geq 0$, ce qui prouve notre assertion (si $p = 1$, on obtient l'égalité $N = -\widetilde{M}$, donc la martingale N n'est nulle en 0 que si M l'est, car on a $\widetilde{M}_0 = |M_0|$). On peut montrer (nous le ferons au paragraphe suivant) que la martingale $N \in H^1(P)$ si $p > 1$.

Pour achever la preuve du théorème 2 on se ramène, au moyen d'un argument d'arrêt, au cas où $\mathbb{E}((L^0_t)^p) < +\infty$ pour tout $t \geq 0$. On fixe ensuite un nombre $t \geq 0$ et on écrit , en supposant $p > 1$ et en utilisant le lemme 3,

$$\mathbb{E}((L^0_t)^p) = p\mathbb{E}((L^0_t)^{p-1}|M_t|) \leq p(\mathbb{E}((L^0_t)^p))^{(p-1)/p}(\mathbb{E}(|M_t|^p))^{1/p} \,,$$

d'où l'on tire, après division par $(\mathbb{E}((L^0_t)^p))^{(p-1)/p}$,

$$(\mathbb{E}((L^0_t)^p)))^{1/p} \leq p(\mathbb{E}(|M_t|^p))^{1/p} \,.$$

Il ne reste plus qu'à prendre la borne supérieure sur t pour obtenir l'estimation cherchée.

4. — Une variante de la preuve du théorème 1

Les arguments utilisés dans le paragraphe précédent nous paraissent intéressants, dans la mesure où ils fournissent quelques pistes dans la direction d'une preuve du théorème 1 interne à l'analyse réelle. Plus précisément, si l'on veut faire une démonstration du théorème 1 suivant le schéma suivi dans le paragraphe précédent, on est conduit à se demander si la fonction

$$(D^0_*(f))^p - p(D^0_*(f))^{p-1}|f|$$

est d'intégrale nulle dans $\mathbb{R}^n$. C'est vrai si $p = 1$ et si f est d'intégrale nulle, comme il résulte du théorème de Fubini et de l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y\Delta|P(f)|(dz) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|\, d\xi - \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, d\xi\right| .$$

En revanche c'est faux en général, si $p > 1$, comme nous le verrons plus loin. On peut toutefois obtenir une propriété similaire, de la manière suivante : étant donné $p \geq 1$ et $f \in L^p$, on définit une fonction $g_p(f)$ dans $\mathbb{R}^n$ en posant

$$g_p(f)(B_\tau) = \lim_{a\to+\infty} \mathbb{E}^{m_a}((L^0_\tau)^p/B_\tau) ,$$

où, comme précédemment, L^0 est le temps local en 0 de la martingale $(P(f)(B_{t\wedge\tau}))$. Par exemple, le lemme 2 montre que $g_1(f) = D^0_*(f)$. Le résultat principal de ce paragraphe est le

Lemme 4. — *Pour tout $p > 1$, et toute fonction $f \in L^p$, la fonction*

$$h_p(f) = g_p(f) - pg_{p-1}(f)|f|$$

appartient à H^1 ; en particulier, elle est d'intégrale nulle.

Démonstration. — Posons, pour tout $t \geq 0$, $M_t = P(f)(B_{t\wedge\tau})$, désignons par L^0 le temps local en 0 de la martingale M ainsi définie et par N la martingale associée à M au moyen de l'égalité (9). Par définition des fonctions $h_p(f)$ et $g_p(f)$, on a

$$h_p(f)(B_\tau) = \lim_{a\to+\infty} \mathbb{E}^{m_a}(N_\tau/B_\tau) .$$

En reprenant la méthode suivie dans [5] pour établir l'assertion (iii) du résultat principal[2], on voit qu'il suffit de montrer que

$$\sup_{a>0} \mathbb{E}^{m_a}(N^*_\tau) < +\infty .$$

2. Schématiquement, on procède comme suit : On associe, à toute martingale brownienne (convenable) M la fonction $\pi(M)$ définie presque partout dans $\mathbb{R}^n$ par $\pi(M)(B_\tau) = \lim_{a\to+\infty} \mathbb{E}^{m_a}(M_\tau/B_\tau)$. Un des résultats obtenus par P. A. Meyer dans [13] est le fait que (essentiellement) la fonction $\pi(M)$ appartient à BMO dès que la martingale M appartient à une classe BMO probabiliste convenablement définie. En utilisant le théorème de dualité de Fefferman-Stein, une version probabiliste appropriée de cette dualité ([13]), et une partie du théorème de Burkholder-Gundy-Silverstein ([3] ; [13], p. 167) on voit que la fonction $\pi(M)$ appartient à H^1 dès que $\sup_{a>0} \mathbb{E}^{m_a}(M^*_\tau) < +\infty$. Ce résultat est implicite dans [13] ; pour les détails, nous renvoyons à [5].

En vertu des inégalités de Burkholder-Gundy, il suffit de prouver que

$$\sup_{a>0} \mathbb{E}^{m_a}(\langle N,N\rangle_\tau^{1/2}) < +\infty \ .$$

Mais on voit, en utilisant l'expression de N comme intégrale stochastique obtenue au cours de la preuve du lemme 3, que

$$\langle N,N\rangle_\tau = p^2 \int_0^\tau (L_s^0)^{2p-2} d\langle M,M\rangle_s \ ,$$

et par suite

$$\langle N,N\rangle_\tau^{1/2} \leq p(L_\tau^0)^{p-1} \langle M,M\rangle_\tau^{1/2} \ ,$$

d'où l'on déduit que

$$\mathbb{E}^{m_a}(\langle N,N\rangle_\tau^{1/2}) \leq p \left(\mathbb{E}^{m_a}((L_\tau^0)^p)\right)^{(p-1)/p} \left(\mathbb{E}^{m_a}((\langle M,M\rangle_\tau)^{p/2})\right)^{1/p} \ . \tag{10}$$

De plus on a, comme conséquence du théorème 2,

$$\left(\mathbb{E}^{m_a}((L_\tau^0)^p)\right)^{(p-1)/p} \leq p \left(\mathbb{E}^{m_a}(|M_\tau|^p)\right)^{(p-1)/p} = p\|f\|_p^{p-1} \ ,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{E}^{m_a}((\langle M,M\rangle_\tau)^{p/2})\right)^{1/p} \\ &\qquad \leq A_p \left(\mathbb{E}^{m_a}((M_\tau^*)^p)\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} A_p \left(\mathbb{E}^{m_a}(|M|_\tau^p)\right)^{1/p} = \frac{p}{p-1} A_p \|f\|_p\end{aligned}$$

(où A_p est un nombre qui ne dépend que de p), en vertu des inégalités de Burkholder-Gundy et de Doob. On déduit des deux inégalités précédentes et de l'estimation (10) qu'on a

$$\mathbb{E}^{m_a}(\langle N,N\rangle_\tau^{1/2}) \leq \frac{p^2}{p-1} A_p \|f\|_p \ ,$$

ce qui achève la preuve du lemme 4.

Remarques

1. — La démonstration précédente montre plus généralement que, si M est une P-martingale continue quelconque telle que $\|M\|_p < +\infty$, la martingale N associée au moyen de l'égalité (9) appartient à $H^1(P)$, et que $\|N\|_{H^1(P)} \leq K_p\|M\|_p$, avec une constante K_p de l'ordre de $1/(p-1)$ au voisinage de 1. Dans ce cas, la meilleure constante possible ne peut pas — contrairement à celle qui a motivé la présente étude — rester bornée au voisinage de 1. En effet, cela impliquerait que $N \in H^1(P)$ dès que $M \in L^1$ et $M_0 = 0$; or, dans ce cas, on a $\|N\|_{H^1(P)} = \|\widetilde{M}\|_{H^1(P)} = \|M\|_{H^1(P)}$, alors que les conditions $M \in L^1$ et $M_0 = 0$ n'obligent pas M à appartenir à $H^1(P)$.

2. — On peut énoncer un résultat s'appliquant à tout $p \geq 1$, en remplaçant dans l'hypothèse du lemme 4 "$f \in L^p$" par "$f \in H^p$". En effet $H^p = L^p$ si $1 < p < +\infty$, et d'autre part $g_1(f) = D^0_*(f)$ et $g_0(f) = 1$, d'où $h_1(f) = \widetilde{f}$. On a donc $h_1(f) \in H^1$ si $f \in H^1$, en vertu des résultats de [4] ou [5].

A partir du lemme précédent, on obtient très facilement le théorème 1 (au moins dans le cas où $1 < p \leq 2$), de la manière suivante : soit $f \in L^p$. On a $D^0_*(f)^p \leq g_p(f)$ (conséquence de l'inégalité (8)), et d'autre part $g_{p-1}(f) \leq (D^0_*(f))^{p-1}$ (conséquence de l'inégalité de Jensen, vu que $p \leq 2$). Le lemme 4 donnant l'égalité $\int_{\mathbb{R}^n} g_p(f)(x)dx = p\int_{\mathbb{R}^n} g_{p-1}(f)(x)|f(x)|dx$, l'inégalité de Hölder et les remarques précédentes permettent d'obtenir l'estimation

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D^0_*(f)(x))^p \, dx \leq p \left(\int_{\mathbb{R}^n} (D^0_*(f)(x))^p \, dx \right)^{(p-1)/p} \|f\|_p \, .$$

Comme on sait déjà que $D^0_*(f) \in L^p$ si $f \in L^p$ (conséquence des résultats de [4] ou [5]), on en déduit l'inégalité voulue. Si on ne suppose pas que $p \leq 2$, on utilise un argument analogue au précédent et on majore $(g_{p-1}(f))^{p/(p-1)}$ par $g_p(f)$ (inégalité de Jensen) ; ce qui permet de prouver que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_p(f)(x) \, dx \leq p \left(\int_{\mathbb{R}^n} (g_p(f)(x))^p \, dx \right)^{(p-1)/p} \|f\|_p \, .$$

On conclut ensuite après s'être assuré de la finitude du premier membre, ce qui, faute de bien connaître les fonctions g_p, semble exiger un nouveau recours aux probabilités.

Remarque. — Compte tenu du lemme 4, il est facile de voir qu'en général, la fonction $(D^0_*(f))^p - p(D^0_*(f))^{p-1}|f|$ n'est pas d'intégrale nulle. Car, si tel était le cas, on déduirait du lemme 4 que (par exemple) la fonction $g_2(f) - (D^0_*(f))^2$ est d'intégrale nulle pour toute $f \in L^2$, ce qui impose $g_2(f) = (D^0_*(f))^2$ presque partout dans $\mathbb{R}^n$, ou encore (en reprenant nos notations usuelles)

$$\lim_{a \to +\infty} \mathbb{E}^{m_a}((L^0_\tau)^2 / B_\tau) = \lim_{a \to +\infty} (\mathbb{E}^{m_a}(L^0_\tau / B_\tau))^2 \quad \mathbb{P}^{m_a} - \text{p. s.} \, ,$$

ce qui n'est pas le cas en général.

5. — Preuve du théorème 3

Nous aurons à utiliser une légère variante d'un résultat de R. R. Coifman, Y. Meyer et E. M. Stein, qui relie les "tent spaces" T^p et les espaces H^p. En vue d'énoncer ce résultat, nous devons rappeler quelques définitions.

Pour toute fonction borélienne F définie dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathfrak{S}(F)(\xi) = \left(\int_{|x-\xi|<y} |F(z)|^2 \frac{dz}{y^{n+1}} \right)^{1/2} \, .$$

Pour tout $p > 0$, on désigne par T^p l'ensemble des fonctions boréliennes F définies dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ pour lesquelles

$$\|F\|_{T^p} = \|\mathfrak{S}(F)\|_p < +\infty \ .$$

Pour établir un lien entre les espaces T^p et H^p, on introduit dans [8] une fonction ϕ définie dans $\mathbb{R}^n$, possédant des propriétés adéquates de régularité, d'annulation et de support. Une telle fonction ϕ permet de définir un opérateur π_ϕ sur T^p par la formule suivante [3] :

$$\pi_\phi(F) = \int_0^{+\infty} F(\cdot,y) * \phi_y \frac{dy}{y} \ .$$

Sous certaines conditions explicitées dans [8], π_ϕ se prolonge en un opérateur borné de T^p dans H^p. Cette propriété est encore vraie lorsque ϕ est la fonction (vectorielle) définie par les égalités

$$\phi = \left(\phi^1, \cdots, \phi^{n+1}\right) \ , \tag{11}$$

où

$$\phi^i(x) = \frac{-(n+1)c_n x_i}{(|x|^2+1)^{(n+3)/2}}$$

pour $1 \le i \le n$ et

$$\phi^{n+1}(x) = \frac{c_n(|x|^2 - n)}{(|x|^2+1)^{(n+3)/2}} \ ,$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Plus précisément, on a le résultat suivant ([6], proposition 2), qui est une légère adaptation du théorème 6 de [8] :

Lemme 5. — *L'opérateur π_ϕ associé à la fonction ϕ définie par l'égalité* (11) *se prolonge en un opérateur continu de T^p dans H^p si $p > n/(n+1)$.*

Rappelons d'autre part qu'on dispose de l'expression explicite suivante de la transformée de Lévy $\widetilde{f}$ d'une fonction f appartenant à l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact dans $\mathbb{R}^n$ ([4], proposition 4) : pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\widetilde{f}(\xi) = 2\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y \operatorname{sgn}(P(f)(z)) \nabla P(f)(z) \nabla p_\xi(z)\, dz \ .$$

Un calcul immédiat montre que, si ϕ est définie par l'égalité (11), on a $y\nabla p_\xi(z) = \phi_y(x-\xi)$, et par suite, étant donné deux fonctions f et $g \in \mathcal{D}$, on a

$$\widetilde{f} - \widetilde{g} = \pi_\phi(F) \ , \tag{12}$$

où

$$F(z) = 2y\left(\operatorname{sgn}(P(f)(z))\nabla P(f)(z) - \operatorname{sgn}(P(g)(z))\nabla P(g)(z)\right) . \tag{13}$$

3. Plus précisément, cette formule définit $\pi_\phi(F)$ lorsque F appartient à un sous-espace dense convenable de T^p ; nous renvoyons le lecteur à [8] pour les détails.

Dans ce qui suit, on note $C(n,p)$ une constante dépendant uniquement des paramètres indiqués, mais dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Bien entendu, il suffit d'établir l'estimation (4) dans le cas où f et $g \in \mathcal{D}$. Soient donc f et g de telles fonctions, et $p > n/(n+1)$. En utilisant l'égalité (12) et le lemme 5, on voit que

$$\|\widetilde{f} - \widetilde{g}\|_{H^p} \leq C(n,p)\|F\|_{T^p} = C(n,p)\|\mathfrak{S}(F)\|_p \, ,$$

où F est définie par l'égalité (13). D'autre part, on a visiblement

$$\mathfrak{S}^2(F) \leq 8(S^2(f-g) + \mathfrak{S}_1^2(f,g)) \, ,$$

où $S(f-g)$ est l'intégrale d'aire standard de Lusin-Calderón associée à $P(f-g)$, et

$$\mathfrak{S}_1^2(f,g)(\xi) = \int_{\{|x-\xi|<y\}} y^{1-n}(\operatorname{sgn}(P(f)(z)) - \operatorname{sgn}(P(g)(z)))^2 |\nabla P(g)(z))|^2 \, dz \, .$$

Il est classique ([14], p. 124) que

$$\|S(f-g)\|_p \leq C(n,p)\|f-g\|_{H^p} \, ,$$

donc il nous suffit maintenant de prouver que

$$\|\mathfrak{S}_1(f,g)\|_p \leq C(n,p)\|f-g\|_{H^p}^{1/2}(\|f\|_{H^p} + \|g\|_{H^p})^{1/2} \, . \tag{14}$$

On a, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$,

$$|\operatorname{sgn}(P(f)(z)) - \operatorname{sgn}(P(g)(z))| \leq 2 \times \mathbf{1}_{\{|P(g)(z)| \leq |P(g)(z) - P(f)(z)|\}}$$

et

$$|P(g)(z) - P(f)(z)| \leq N(f-g)(\xi)$$

si $|x-\xi| < y$. Par conséquent,

$$\mathfrak{S}_1^2(f,g)(\xi) \leq 2\int_{\{|x-\xi|<y\}} y^{1-n}\mathbf{1}_{\{-N(f-g)(\xi),N(f-g)(\xi)\}}(P(g)(z))|\nabla P(g)(z))|^2 dz.$$

D'autre part, en utilisant la formule de changement de variable qui a valu son nom à la densité de l'intégrale d'aire ([10], p. 217), on peut écrire

$$\begin{aligned} &\int_{\{|x-\xi|<y\}} y^{1-n}\, \mathbf{1}_{\{-N(f-g)(\xi),N(f-g)(\xi)\}}(P(g)(z))|\nabla P(g)(z))|^2 \, dz \\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_{-N(f-g)(\xi)}^{N(f-g)(\xi)} D(g,r)(\xi) \, dr \leq N(f-g)(\xi) D(g)(\xi) \, , \end{aligned}$$

où

$$D(g,r)(\xi) = \int_{\{|x-\xi|<y\}} y^{1-n} \, \Delta|P(g) - r|(dz) \quad \text{et} \quad D(g)(\xi) = \sup_{r\in\mathbb{R}} D(g,r)(\xi) \, .$$

On déduit donc de ces inégalités que

$$\|\mathfrak{S}_1(f,g)\|_p \leq C(n,p)\|f-g\|_{H^p}^{1/2}\|D(g)\|_p^{1/2} .$$

Par conséquent, l'estimation (14) résulte de l'inégalité précédente et de l'inégalité

$$\|D(g)\|_p \leq C(n,p)\|g\|_{H^p}$$

de Gundy-Silverstein ([10]). Ceci achève la démonstration.

Remarque. — Dans le cas où $p > 1$, le résultat précédent constitue une nouvelle preuve de la continuité dans l'espace L^p de la fonctionnelle D_*^0 (ou de la transformation de Lévy), obtenue dans [4]. Toutefois, aucune de ces deux méthodes ne permet de répondre à la question de leur continuité dans l'espace L^1, qui reste donc, à notre connaissance, un problème ouvert. On pourra trouver dans [7] un résultat partiel dans ce sens, dans le contexte probabiliste correspondant.

Références

[1] J. Azéma et M. Yor. — *En guise d'introduction.* Astérisque 52-53 (Temps locaux), Société Mathématique de France (1978), 3-16.

[2] J. Brossard et L. Chevalier. — *Classe $L\log L$ et densité de l'intégrale d'aire dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$.* Ann. of Math. **128** (1988), 603-618.

[3] D. L. Burkholder, R. F. Gundy and M. L. Silverstein. — *A maximal function characterization of the class H^p.* Trans. Amer. Math. Soc. **157**, 1971, 137-153.

[4] L. Chevalier. — *Une "formule de Tanaka" en analyse harmonique et quelques applications.* Adv. in Math. **138**, 1 (1998), 182-210.

[5] L. Chevalier. — *Mouvement brownien et formule de Tanaka en analyse.* Potential Anal. **12** (2000), 419-439.

[6] L. Chevalier. — *A new proof of certain Littlewood-Paley inequalities.* J. Fourier Anal. Appl. **7**, 2 (2001), 189-198.

[7] L. Chevalier. — *Une propriété de continuité du temps local.* Preprint (2001).

[8] R. R. Coifman, Y. Meyer and E. M. Stein. — *Some new function spaces and their applications to harmonic analysis.* J. Funct. Anal. **62** (1985), 304-335.

[9] R. F. Gundy. — *The density of the area integral.* Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund. Wadsworth, Belmont, Calif. (1983), 138-149.

[10] R. F. Gundy and M. L. Silverstein. — *The density of the area integral in $\mathbb{R}_+^{n+1}$.* Ann. Inst. Fourier **35** (1985), 215-229.

[11] P. A. Meyer. — *Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley.* Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics **511** (1976), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 126-140.

[12] P. A. Meyer. — *Un cours sur les intégrales stochastiques.* Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics **511** (1976), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 246-354.

[13] P. A. Meyer. — *Le dual de $H^1(\mathbb{R}^\nu)$: Démonstrations probabilistes.* Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes in Mathematics **581** (1977), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 135-195.

[14] E. M. Stein. — *Harmonic Analysis.* Princeton University Press, Princeton, N. J. (1993).

[15] P. Vallois. — *Quelques inégalités avec le temps local en 0 du mouvement brownien.* Stoch. Proc. Appl. **41** (1992), 117-155.

Institut Fourier
U.M.R. 5582 C.N.R.S./U.J.F.
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères
France
lucchev@fourier.ujf-grenoble.fr