Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel

David BOURQUI

10 décembre 2001

Prépuplication de l'Institut Fourier n^o 552 (2001)

http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Résumé : On calcule la fonction zêta des hauteurs associée au fibré anticanonique des surfaces de Hirzebruch dans le cas où le corps de définition est un corps global de caractéristique non nulle. Les résultats obtenus confirment la version de la conjecture de Manin sur la répartition des points de hauteur bornée sur les variétés presque de Fano dans le cas fonctionnel.

Abstract : We compute the anticanonical height zêta function of the Hirzebruch surfaces when the base field is a global field of nonzero characteristic. The result agrees with the version of Manin's conjecture on the distribution of points of bounded height on almost Fano varieties in the functionnal case.

1 Introduction

Soit V une variété projective définie sur un corps global K, telle que l'ensemble $V(K)$ des points rationnels de V soit Zariski dense. On munit alors $V(K)$ de hauteurs permettant de mesurer la “complexité” des points rationnels et on essaie de prédire le comportement asymptotique des points de hauteur bornée. Dans [5], Manin propose une formule asymptotique conjecturale dans le cas où V est une variété de Fano définie sur un corps de nombres, et les trois auteurs de l'article [5] montrent que cette formule est vérifiée pour les variétés de drapeaux, compatible avec le produit de variétés et les prédictions de la méthode du cercle pour les intersections complètes. Cette formule se trouvait par ailleurs déjà vérifiée pour les espaces projectifs ([11]). Dans [8], Peyre raffine la conjecture dans le cas où la hauteur est issue du faisceau anticanonique en proposant une expression de la constante apparaissant dans la formule asymptotique. Cette conjecture raffinée est maintenant établie pour plusieurs classes de variétés de Fano ou presque de Fano : variétés de drapeaux ([5], [8]), certaines intersections complètes ([5],[8]), variétés toriques ([1], [2], [10]), certains éclatements ([8])... Enfin il faut signaler qu'un contre-exemple a également été exhibé par Batyrev et Tschinkel dans [3].

Dans le cas où K est un corps global de caractéristique non nulle, on a une conjecture similaire (qui s'énonce mieux en terme de propriétés analytiques de la fonction zêta des hauteurs qu'en terme de formule asymptotique) mais dans ce cadre et jusqu'ici seul le cas des variétés de drapeaux semble avoir été traité (voir [7]). Le but de ce texte est le calcul de la fonction zêta des hauteurs et la vérification de la conjecture dans le cas où V est une surface de Hirzebruch définie sur un corps global de caractéristique non nulle et la hauteur est issue du faisceau anticanonique.

La section qui suit fixe quelques notations et rappels. Dans la section 3 on introduit les surfaces de Hirzebruch, on construit une hauteur anticanonique et on énonce le résultat sur la fonction zêta des hauteurs. Enfin dans la dernière partie on démontre le résultat et on vérifie sa compatibilité avec la conjecture de Manin.

Je tiens à remercier Emmanuel Peyre pour m'avoir suggéré le problème et patiemment aidé dans la réalisation de ce texte.

Mots-clés : fonction zêta des hauteurs, conjecture de Manin, surfaces de Hirzebruch.
Classification AMS : 11G50, 11M41.

2 Notations, définitions

Dans toute la suite on travaille sur le corps de fonctions d'une courbe $\mathcal{C}$ définie sur un corps fini k de cardinal q, projective, lisse, et géométriquement intègre. Autrement dit ce corps, noté K, est une extension finie du corps des fractions rationnelles $k(T)$, avec k algébriquement clos dans K.

Soit $\mathcal{V}_K$ l'ensemble des valuations normalisées de K, de sorte que $\mathcal{V}_K$ s'identifie à l'ensemble des points fermés de la courbe $\mathcal{C}$. Pour $v \in \mathcal{V}_K$, on note $\mathcal{O}_v = \{x \in K,\ v(x) \geq 0\}$ l'anneau de valuation de v, $\mathcal{M}_v = \{x \in K,\ v(x) > 0\}$ l'idéal maximal de v, $k_v = \mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v$ le corps résiduel de v et K_v le complété de K en v. On notera aussi $f_v = [k_v : k]$ le degré résiduel (de sorte que $\# k_v = q^{f_v}$), et, pour $x \in K$, $|x|_v = q^{-f_v\, v(x)}$. Alors pour tout $x \in K^*$ on a $|x|_v = 1$ pour tout $v \in \mathcal{V}_K$ sauf un nombre fini et la formule du produit

$$\prod_{v \in \mathcal{V}_K} |x|_v \ = \ 1.$$

Soit $\mathrm{Div}_k(K)$ le groupe des diviseurs de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire le groupe abélien libre de base $\mathcal{V}_K$.

Si $D = \sum_{v \in \mathcal{V}_K} n_v\, v$ est un élément de $\mathrm{Div}_k(K)$, on définit, pour $v \in \mathcal{V}_K$, $v(D) = n_v$. On note alors

$$\mathrm{Div}_k^+(K) = \{\, D \in \mathrm{Div}_k(K),\ \forall\, v \in \mathcal{V}_K\ \ v(D) \geq 0\}.$$

On écrira $D \geq 0$ pour $D \in \mathrm{Div}_k^+(K)$. En fait, on a une relation d'ordre partiel sur $\mathrm{Div}_k(K)$ définie par $D \leq D'$ si et seulement si on a $v(D) \leq v(D')$ pour tout v de $\mathcal{V}_K$. Si $D_1, \ldots, D_n$ est un ensemble fini de diviseurs on a donc

$$\sup(D_1, \ldots, D_n) = \sum_{v \in \mathcal{V}_K} \sup(v(D_1), \ldots, v(D_n))\ v$$

Si $x \in K^*$, le diviseur associé à x est $(x) = (x)_0 - (x)_\infty$ où

$$(x)_0 = \sum_{v \in \mathcal{V}_K,\, v(x)>0} v(x)\, v$$

$$(x)_\infty = - \sum_{v \in \mathcal{V}_K,\, v(x)<0} v(x)\, v$$

autrement dit $(x)_0$ est le diviseur des zéros de x (avec multiplicité) et $(x)_\infty$ celui des pôles (avec multiplicité). Par commodité on posera aussi $(0) = (0)_0 = (0)_\infty = 0$.

Le groupe des classes de diviseurs est le quotient de $\mathrm{Div}_k(K)$ par le sous-groupe des diviseurs de la forme (x). On pose, pour $D \in \mathrm{Div}_k(K)$,

$$\deg(D) = \sum_{v \in \mathcal{V}_K} f_v\, v(D)$$

ce qui définit un homomorphisme $\mathrm{Div}_k(K) \to \mathbf{Z}$ appelé degré. On a, pour tout $x \in K^*$, $\deg((x)) = 0$, de sorte que le morphisme ci-dessus se factorise à travers le groupe des classes de diviseurs. On note h le nombre de classes de diviseurs de degré zéro. Ce nombre est fini par [13, IV§ 4,Thm 7].

Pour tout $D \in \mathrm{Div}_k(K)$ on note $l(D)$ la dimension (finie) du k-espace vectoriel

$$H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) \ = \ \{x \in K^*,\ (x) + D \geq 0\} \ \cup\ \{0\}.$$

En particulier si $\deg(D) < 0$ on a $l(D) = 0$. On dispose alors du théorème de Riemann-Roch ([13, VI, Thm 2]) : si on note g le genre de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ un diviseur canonique (de sorte que le degré de $\mathcal{K}$ est $2g - 2$), alors pour tout diviseur D on a

$$l(D) - l(\mathcal{K} - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

On a donc $l(D) = \deg(D)+1-g$ si $\deg(D) > 2g-2$. Notons encore que si on a $D \geq 0$ alors $\{x \in K^*,\ (x)+D \geq 0\} \cup \{0\}$ n'est autre que $\{x \in K,\ (x)_\infty \leq D\}$. Les résultats de ce paragraphe jouent un rôle-clé dans le calcul de la fonctions zêta des hauteurs définie dans la section 3.

La fonction zêta de Dedekind de K, notée ζ_K, est définie de la manière suivante. On pose

$$Z_K(t) = \sum_{D \geq 0} t^{\,\deg(D)} = \prod_{v \in \mathcal{V}_K} (1 - t^{f_v})^{-1} \ \in \mathbf{Z}[[t]]$$

et $\zeta_K(s) = Z_K(q^{-s})$. On dispose ([13, VII,§ 6]) des résultats suivants sur le comportement analytique de ζ_K : la série définissant $\zeta_K(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier, avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu $\frac{h\,q^{1-g}}{(q-1)\,\ln(q)}$, et sans zéro pour $\Re(s) \neq \frac{1}{2}$. De plus $Z_K(t)$ est une fraction rationnelle en t, en particulier ζ_K est $\frac{2\,i\pi}{\ln(q)}$-périodique.

3 Hauteur anticanonique sur les surfaces de Hirzebruch

3.1 Généralités sur les surfaces de Hirzebruch

Le corps de base est ici K mais tout ce qui suit est valable sur un corps quelconque. On considère le produit d'espaces projectifs $\mathbf{P}^2_K \times \mathbf{P}^1_K$ qu'on munit de coordonnées homogènes notées $(x_0 : x_1 : x_2)(y_0 : y_1)$. Soit m un entier naturel. L'équation $y_1^m\, x_0 = y_0^m\, x_1$ définit alors une sous-variété fermée et lisse de $\mathbf{P}^2_K \times \mathbf{P}^1_K$ appelée surface de Hirzebruch $\mathcal{H}_m$. On notera p_1 et p_2 les projections sur le premier et le deuxième facteur. On voit facilement que $\mathcal{H}_0$ est isomorphe au produit $\mathbf{P}^1_K \times \mathbf{P}^1_K$ et que $\mathcal{H}_1$ est isomorphe au plan projectif éclaté en un point.

La variété $\mathcal{H}_m$ peut être également définie de manière intrinsèque comme étant le $\mathbf{P}^1$-fibré au-dessus de $\mathbf{P}^1$ donné par $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(m))$, la fibration correspondant au morphisme $p_{2|_{\mathcal{H}_m}} : \mathcal{H}_m \to \mathbf{P}^1$. Signalons par ailleurs que les surfaces $\mathcal{H}_m$ sont des variétés toriques. Dans le cas où le corps de base est $\mathbf{Q}$ et la hauteur est issue d'un fibré ample, le comportement des points de hauteur bornée sur les surfaces $\mathcal{H}_m$ a été étudié par Billard dans [4], retrouvant ainsi un cas particulier du résultat général de Batyrev et Tschinkel sur la conjecture de Manin pour les variétés toriques.

Comme dans [4], nous noterons h la classe dans le groupe de Picard du fibré $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_m}(1)$ et f la classe d'une fibre. On a alors $[\,p_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1))\,] = h$ et $[\,p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))\,] = f$, où [.] représente la classe dans le groupe de Picard. Rappelons que le cône effectif de $\mathcal{H}_m$ est défini comme étant le cône de $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m) \otimes \mathbf{R}$ engendré par les classes de diviseurs effectifs. Les résultats suivants (voir [4]) nous seront utiles.

Lemme 1 *On a Pic($\mathcal{H}_m$) $= \boldsymbol{Z}\,h \oplus \boldsymbol{Z}\,f$, en particulier Pic($\mathcal{H}_m$) est libre de rang 2. La classe du faisceau anticanonique est $-\omega_m = 2\,h + (2-m)\,f$. Le cône effectif est donné par $\{a\,h + b\,f,\ (a,b) \in \boldsymbol{R}^2,\ a \geq 0, b \geq -m\,a\}$. Les diviseurs amples sont ceux dont la classe est de la forme $a\,h + b\,f$ avec $a > 0$ et $b > 0$.*

Remarquons que le faisceau anticanonique n'est ample (i.e. $\mathcal{H}_m$ est une variété de Fano) que si $m = 0$ ou $m = 1$. En revanche sa classe dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m)$ est toujours à l'intérieur du cône effectif.

Remarquons aussi qu'en fait les surfaces de Hirzebruch peuvent se définir sur n'importe quel schéma de base, en particulier on dispose d'un modèle naturel de $\mathcal{H}_m$ sur $\mathcal{C}$, dont les fibres sont isomorphes aux surfaces $\mathcal{H}_m$ définies sur les différents corps résiduels.

3.2 Construction de la hauteur

Des références concernant la construction des hauteurs d'Arakelov sont [6], [12], [8], [9]. On rappelle que sur l'ensemble $\mathbf{P}^n(K)$ des points K-rationnels de l'espace projectif de dimension n on définit une hauteur "standard" H_n par

$$H_n(x) = H_n(x_0 : \ldots : x_n) = \prod_{v \in \mathcal{V}_K} \sup{}_i\,(|x_i|_v).$$

La formule du produit montre que cette définition ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes pour $x \in \mathbf{P}^n(K)$. Soit alors V une variété projective sur K. A tout fibré en droites L sur V on associe une famille de hauteurs dont le logarithme ne dépend, à addition d'une fonction bornée près, que de la classe de L dans le groupe de Picard. Cependant, pour une étude précise des points de hauteur bornée, il est nécessaire de fixer une hauteur H_L issue de L. Dans le cas où L est sans point-base et que $\phi_L : V \to \mathbf{P}^n_K$ est un morphisme déduit de L (correspondant au choix d'une famille de sections de $\Gamma(V, L)$ engendrant L), on peut prendre pour hauteur H_L la composée $H_n \circ \phi_L$. Par exemple la hauteur H_n définie ci-dessus est une hauteur associée au fibré $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^n$. Si L s'écrit $L = L_1^a \otimes L_2^b$, où a et b sont des entiers relatifs, et si H_{L_1} (respectivement H_{L_2}) est une hauteur d'Arakelov associée à L_1 (respectivement à L_2) alors $H_{L_1}^a\, H_{L_2}^b$ est une hauteur d'Arakelov associée à L. Nous allons nous servir de cette propriété pour construire une hauteur associée au fibré anticanonique de $\mathcal{H}_m$ qui possède des points-base si $m \geq 2$. En effet comme $[\,p_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1))\,] = h$ et $[\,p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))\,] = f$, les projections p_1 et p_2 définissent des hauteurs associées à h et l respectivement. Or $-\omega_m = 2\,h + (2-m)\,f$, d'où on déduit

Lemme 2 *La hauteur H définie comme la restriction à $\mathcal{H}_m(K)$ de la hauteur définie sur $\boldsymbol{P}^2(K) \times \boldsymbol{P}^1(K)$ par $H(x,y) = H_2(x)^2\, H_1(y)^{2-m}$ est une hauteur d'Arakelov associée au fibré anticanonique de $\mathcal{H}_m$.*

3.3 Fonction zêta des hauteurs

On définit la fonction zêta associée à la hauteur H par

$$\zeta_{H,\mathcal{H}_m}(s) = \sum_{x \in \mathcal{H}_m(K)} H(x)^{-s}$$

où s désigne un nombre complexe pour lequel la série converge (voir les résultats de convergence ci-dessous).

Les propriétés analytiques de cette fonction sont directement liées au comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée de $\mathcal{H}_m$ c'est-à-dire à l'étude de $n_{\mathcal{H}_m,B} = \#\{x \in \mathcal{H}_m(K),\ H(x) \leq B\}$ quand le réel positif B tend vers $+\infty$. Cependant considérons la courbe $C_m = (x_0 = x_1 = 0)$ (cette notation reprend celle de [4]). Si $m \geq 1$, cette courbe est dite accumulatrice pour la hauteur étudiée : il y a “trop” de points rationnels de hauteur donnée sur C_m. Soit en effet U l'ouvert $\mathcal{H}_m - C_m$. Si $m \geq 2$ le phénomène est flagrant car le nombre $n_{C,B}$ n'est même pas fini (notons que cela n'arrive jamais si le fibré dont est issue la hauteur est ample), contrairement à $n_{U,B}$. Si $m = 1$ le phénomène d'accumulation est plus subtil. Dans ce cas, $n_{U,B}$ est négligeable devant $n_{C_m,B}$ et le comportement des points rationnels de C_m masque le comportement général des points rationnels de $\mathcal{H}_m$. Ceci fait que si $m \geq 1$, on restreint l'étude aux points de l'ouvert U et on considère donc

$$\zeta_{H,U}(s) = \sum_{x \in U(K)} H(x)^{-s}$$

où $s \in \mathbf{C}$ et $\Re(s) > 1$. La proposition ci-dessous montre la convergence de cette série dans ce domaine.

En exprimant $\zeta_{H,U}(s)$ en fonction de $\zeta_K(s)$ on va en fait montrer le résultat suivant

Proposition 1 *$\zeta_{H,U}(s)$ converge absolument pour $Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe avec un pôle double en $s = 1$, de partie principale égale à*

$$\frac{1}{2\,(m+2)}\,(\lim_{s\to 1}(s-1)\,\zeta_K(s))^2\,\frac{1}{q^{2\,(g-1)}}\prod_{v\in\mathcal{V}_K}(1-q^{-f_v})^2\,(1+2\,q^{-f_v}+q^{-2\,f_v}).$$

De plus $\zeta_{H,U}(s)$ est une fraction rationnelle en q^{-s}.

On rappelle que $\lim_{s\to 1}\,(s-1)\,\zeta_K(s) = \frac{h\,q^{1-g}}{(q-1)\,\ln(q)}$.

4 Démonstration du résultat

4.1 Formule d'inversion

Afin de mener à bien le calcul des fonctions zêta des hauteurs on a besoin de la formule d'inversion rappelée dans ce qui suit. On notera μ la fonction de Möbius $\mathrm{Div}_k^+(K) \to \{0, 1, -1\}$, définie par

$$\mu(D) = \begin{cases} 1 & \text{si } D = 0 \\ (-1)^{\sum_{v\in\mathcal{V}_K} v(D)} & \text{si } D \neq 0 \ \text{ et } \ \forall\, v \in \mathcal{V}_K,\ v(D) = 0 \ \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour f, g deux applications $\mathrm{Div}_k^+(K) \to \mathbf{C}$ on considère leur produit de convolution $f \star g$ défini par

$$\forall\, D \geq 0,\ \ (f \star g)\,(D) = \sum_{0 \leq D' \leq D} f(D')\,g(D-D').$$

Le produit de convolution est associatif et admet pour élément unité δ défini par $\delta(D) = 1$ si $D = 0$ et 0 si $D \neq 0$. On vérifie de manière combinatoire élémentaire que $\mathbf{1} \star \mu = \mu \star \mathbf{1} = \delta$, où $\mathbf{1}$ est l'application constante égale à 1.

On en déduit la formule d'inversion suivante : pour tout couple (f, g) d'applications de $\mathrm{Div}_k^+(K)$ dans $\mathbf{C}$, les deux conditions

$$\forall\, D \geq 0,\ \ f(D) = \sum_{0 \leq D' \leq D} g(D')$$

et

$$\forall\, D \geq 0,\ \ g(D) = \sum_{0 \leq D' \leq D} \mu(D-D')\,f(D')$$

sont équivalentes. On appelera μ-couple tout couple (f,g) d'applications vérifiant ces conditions.

On a en particulier l'identité suivante

$$\frac{1}{Z_K(t)} = \sum_{D\geq 0} \mu(D)\, t^{\,\deg(D)}.$$

En effet comme δ et $\mathbf{1}$ forment un μ-couple on a, pour $D \geq 0$,

$$\sum_{0\leq D'\leq D} \mu(D') = \delta(D)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{D\geq 0} \mu(D)\, t^{\,\deg(D)} \sum_{D\geq 0} t^{\,\deg(D)} &= \sum_{D\geq 0} \left(\sum_{\substack{D'\geq 0,\, D''\geq 0,\\ D'+D''=D}} \mu(D') \right) t^{\,\deg(D)} \\
&= \sum_{D\geq 0} \left(\sum_{0\leq D'\leq D} \mu(D') \right) t^{\,\deg(D)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

4.2 Calcul de la fonction zêta

On écrit d'abord $U(K) = U_1(K) \coprod F(K)$ avec

$$\begin{aligned}
U_1(K) &= \{\, (x_0 : x_1 : x_2)\,(y_0 : y_1) \in \mathbf{P}^2(K)\times\mathbf{P}^1(K),\ x_0\, y_1^m \;=\; x_1\, y_0^m \quad \text{et} \quad x_0 \neq 0 \,\} \\
&= \{\, (1 : x_1^m : x_2)\,(1 : x_1),\ (x_1, x_2) \in K^2 \,\}
\end{aligned}$$

et

$$F(K) = U(K) \setminus U_1(K) = \{\, (0:1:x_2)\,(0:1),\ x_2 \in K \,\}.$$

On décompose

$$\zeta_{H,U}(s) = \sum_{x\in U_1(K)} H(x)^{-s} + \sum_{x\in F(K)} H(x)^{-s} = \zeta_{H,U_1}(s) + \zeta_{H,F}(s)$$

et on va traiter chacun des deux termes de la somme séparément. Le deuxième terme n'apporte d'ailleurs pas de contribution significative, en effet il ne fournit qu'un pôle d'ordre un en $s=1$.

Pour le premier terme, on commence par poser

$$Z_{H,U_1}(t) = \sum_{(x,y)\in K^2} t^{\,\deg(\,2\,\sup(m\,(x)_\infty,(y)_\infty)+(2-m)\,(x)_\infty\,)} \;\in\; \mathbf{Z}[[t]]$$

de sorte que

$$\zeta_{H,U_1}(s) = \sum_{(x,y)\in K^2} H(\,(1:x^m:y)(1:x)\,)^{-s} = Z_{H,U_1}(q^{-s}).$$

En effet si $(x,y)\in K^2$ on a

$$\begin{aligned}
H((1:x^m:y)(1:x)) &= \prod_{v\in\mathcal{V}_K} \sup\,(1, |x|_v^{2\,m}, |y|_v^2) \prod_{v\in\mathcal{V}_K} \sup\,(1,|x|_v)^{2-m} \\
&= \prod_{v\in\mathcal{V}_K,\, \inf(v(x),v(y))<0} \sup\,(|x|_v^{2\,m}, |y|_v^2) \prod_{v\in\mathcal{V}_K,\, v(x)<0} |x|_v^{2-m} \\
&= \prod_{v\in\mathcal{V}_K,\, \inf(v(x),v(y))<0} q^{-\,f_v\,\inf(2\,m\,v(x),\,2\,v(y))} \prod_{v\in\mathcal{V}_K,\, v(x)<0} q^{-\,f_v\,(2-m)\,v(x)}
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
\log_q(H((1:x^m:y)(1:x))) &= -\sum_{v\in\mathcal{V}_K,\,\inf(v(x),v(y))<0} f_v\,\inf(2\,m\,v(x),2\,v(y))\\
&\quad -\sum_{v\in\mathcal{V}_K,\,v(x)<0}(2-m)\,f_v\,v(x)\\
&= \deg(\,2\,\sup(m\,(x)_\infty,(y)_\infty)\,)+\deg(\,(2-m)\,(x)_\infty\,).
\end{aligned}$$

On écrit

$$Z_{H,U_1}(t)=\sum_{D\geq 0}\tilde{R}(D)\,t^{\,\deg(D)}$$

où l'on a posé pour $D\geq 0$

$$\tilde{R}(D)=\#\{(x,y)\in K^2,\ 2\,\sup(m\,(x)_\infty,(y)_\infty)+(2-m)(x)_\infty=D\}.$$

Si on note

$$R(D)=\#\{(x,y)\in K^2,\ 2\,\sup(m\,(x)_\infty,(y)_\infty)+(2-m)\,(x)_\infty\leq D\}$$

R et $\tilde{R}$ forment un μ-couple. Au passage on définit aussi le μ-couple $(N,\tilde{N})$. On pose pour tout $D\geq 0$

$$N(D)=\#\{x\in K^2,\ (x)_\infty\leq D\}$$

et

$$\tilde{N}(D)=\#\{x\in K^2,\ (x)_\infty=D\}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}
\sum_{D\geq 0}\tilde{R}(D)\,t^{\,\deg(D)} &= \sum_{D\geq 0}\sum_{0\leq D'\leq D}\mu(D-D')\,R(D')\,t^{\,\deg(D)}\\
&= \sum_{D\geq 0}\sum_{D'\geq 0}R(D)\,\mu(D')\,t^{\,\deg(D)+\deg(D')}\\
&= (\sum_{D\geq 0}R(D)\,t^{\,\deg(D)})\,(\sum_{D'\geq 0}\mu(D')\,t^{\,\deg(D')})\\
&= (\sum_{D\geq 0}R(D)\,t^{\,\deg\,(D)})\;/\;Z_K(t)\\
&= Z_1(t)/Z_K(t).
\end{aligned}$$

On note $\mathrm{Div}_{m+1}=\{D\geq 0,\,\forall v\in\mathcal{V}_K,\,v(D)\leq(m+1)\}$ de sorte que tout $D\geq 0$ s'écrit de manière unique $(m+2)\,D_1+D_2$ avec $D_1\geq 0$ et $D_2\in\mathrm{Div}_{m+1}$. Alors pour tout $D'\geq 0$ la condition $(m+2)\,D'\leq D$ équivaut à $D'\leq D_1$.

Soit à présent $D\geq 0$ fixé, et (x,y) un élément de $R(D)$. Si on note $D'=(x)_\infty$ on a nécessairement $(m+2)\,D'\leq D$ et donc

$$R(D)=\sum_{0\leq D'\leq D_1}\tilde{N}(D')\,\#\{y\in K,\ 2\,\sup((y)_\infty,m\,D')+(2-m)\,D'\leq D\}$$

en constatant de plus que si $(m+2)\,D'\leq D$, la condition

$$2\,\sup((y)_\infty,m\,D')+(2-m)\,D'\leq D$$

équivaut à

$$2\,(y)_\infty\leq D+(m-2)\,D'.$$

On peut donc écrire

$$
\begin{aligned}
Z_1(t) &= \sum_{\substack{D_1\geq 0\\ D_2\in \mathrm{Div}_{m+1}}} \left(\sum_{0\leq D'\leq D_1} \tilde{N}(D')\ \#\{y\in K,\ 2\,(y)_\infty \leq (m+2)\,D_1 + D_2 + (m-2)\,D'\} \right) \\
&\qquad t^{\deg((m+2)\,D_1+D_2)} \\
&= \sum_{\substack{D_1\geq 0\\ D_2\in \mathrm{Div}_{m+1}}} \left(\sum_{0\leq D'\leq D_1} \tilde{N}(D')\ \#\{y\in K,\ 2\,(y)_\infty \leq (m+2)\,(D_1-D') + D_2 + 2\,m\,D'\} \right. \\
&\qquad \left. t^{\deg(\,(m+2)\,(D_1-D')+D_2+(m+2)\,D')} \right) \\
&= \sum_{\substack{D\geq 0,\, D'\geq 0\\ D_2\in \mathrm{Div}_{m+1}}} \tilde{N}(D')\ \#\{y\in K,\ 2\,(y)_\infty \leq (m+2)\,D + D_2 + 2\,m\,D'\} \\
&\qquad t^{\deg((m+2)\,D+D_2+(m+2)\,D')} \\
&= \sum_{D\geq 0,\, D'\geq 0} \tilde{N}(D')\ \#\{y\in K,\ 2\,(y)_\infty \leq D + 2\,m\,D'\}\, t^{\deg(D+(m+2)\,D')}.
\end{aligned}
$$

En notant $\mathrm{Div}_1 = \{D\geq 0,\ \forall v\in \mathcal{V}_K,\ v(D)\leq 1\}$, de sorte que tout $D\geq 0$ s'écrit de manière unique $2\,D_1 + D_2$ avec $D_1\geq 0$ et $D_2\in \mathrm{Div}_1$, il vient

$$
\begin{aligned}
Z_1(t) &= \sum_{\substack{D\geq 0,\, D'\geq 0\\ D_1\in \mathrm{Div}_1}} \tilde{N}(D')\ \#\{y\in K,\ 2\,(y)_\infty \leq 2\,D + 2\,m\,D' + D_1\} \\
&\qquad t^{\deg(2\,D+D_1+(m+2)\,D')} \\
&= \sum_{\substack{D\geq 0,\, D'\geq 0\\ D_1\in \mathrm{Div}_1}} \tilde{N}(D')\ N(D+m\,D')\ t^{\deg(2\,D+D_1+(m+2)\,D')} \\
&= \sum_{\substack{D\geq 0,\, D'\geq 0\\ D_1\in \mathrm{Div}_1}} \tilde{N}(D')\, q^{1-g}\, q^{\deg(D)+\deg(m\,D')}\, t^{\deg(2\,D+D_1+(m+2)\,D')} \\
&\quad + P_1(t) \sum_{D_1\in \mathrm{Div}_1} t^{\deg(D_1)}
\end{aligned}
$$

où P_1 est un polynôme. En effet, d'une part (voir les remarques suivant l'énoncé de Riemann-Roch) $N(D+m\,D')$ n'est autre que $q^{l(D+m\,D')}$ avec

$$l(D+m\,D') = 1-g+\deg(D+m\,D')$$

dès que $\deg(D)\geq 2g-2$ ou $\deg(D')\geq 2g-2$, d'autre part l'ensemble des couples (D,D') avec $D\geq 0$, $D'\geq 0$, $\deg(D)<2g-2$ et $\deg(D')<2g-2$ est un ensemble fini. Naturellement il faut supposer que $m\geq 1$ pour que ceci soit correct. Cependant, si $m=0$, d'une part l'expression de $Z_1(t)$ ci-dessus montre que $Z_1(t)$ se met directement sous forme d'un produit (et on peut alors terminer le calcul comme indiqué ci-dessous), d'autre part comme $\mathcal{H}_0$ est isomorphe au produit $\mathbf{P}^1_K\times\mathbf{P}^1_K$ il est en fait bien plus naturel dans le cas $m=0$ de calculer la fonction zêta des hauteurs comme produit des deux fonctions zêta des hauteurs associées à chacun des facteurs du produit.

Ainsi en notant

$$Z'_1(t) = Z_1(t) - P_1(t) \sum_{D_1\in \mathrm{Div}_1} t^{\deg(D_1)}$$

on a

$$
\begin{aligned}
Z_1'(t) &= q^{1-g}\left(\sum_{D'\geq 0}\tilde N(D')\,q^{\,m\deg(D')}\,t^{\,(m+2)\deg(D')}\right)\left(\sum_{D\geq 0}(q\,t^2)^{\deg(D)}\right)\\
&\quad\left(\sum_{D_1\in \mathrm{Div}_1} t^{\,\deg(D_1)}\right)\\
&= q^{1-g}\left(\sum_{D'\geq 0}\tilde N(D')\,q^{\,m\ \deg(D')}\,t^{\,(m+2)\ \deg(D')}\right) Z_K(q\,t^2)\prod_{v\in\mathcal{V}_K}(1+t^{f_v}).
\end{aligned}
$$

Il reste à calculer $\sum_{D\geq 0}\tilde N(D)\,q^{\,m\ \deg(D)}\,t^{\,(m+2)\deg(D)}$.

Pour cela on utilise le μ-couple $(N,\tilde N)$ et on trouve

$$
\sum_{D\geq 0}\tilde N(D)\,q^{\,m\ \deg(D)}\,t^{\,\deg(\,(m+2)\,D)} = (q^{1-g}\,Z_K(q^{m+1}\,t^{m+2}) + P_2(t))/Z_K(q^m\,t^{m+2})
$$

où P_2 est un polynôme.

Par ailleurs on a

$$
\frac{\prod_{v\in\mathcal{V}_K}(1+t^{f_v})}{Z_K(t)} = \prod_{v\in\mathcal{V}_K}(1+t^{f_v})\,(1-t^{f_v}) = \prod_{v\in\mathcal{V}_K}(1-t^{\,2\,f_v}) = 1/Z_K(t^2)
$$

Calculons à présent $\zeta_{H,F}$. Si $x\in K$ on a

$$
H((0:1:x)(0:1)) = \prod_{v\in\mathcal{V}_K}\sup(1,|x|_v)^2
$$

de sorte que si on pose

$$
Z_{H,F}(t) = \sum_{x\in K} t^{\,2\ \deg((x)_\infty)}
$$

on a $\zeta_{H,F}(s) = Z_{H,F}(q^{-s})$. Il vient alors

$$
\begin{aligned}
Z_{H,F}(t) &= \sum_{D\geq 0}\tilde N(D)\,t^{\,2\ \deg(D)}\\
&= \sum_{D\geq 0} N(D)\,t^{\,2\ \deg(D)}/Z_K(t^2)\\
&= (q^{1-g}\,Z_K(q\,t^{\,2}) + P_3(t))/Z_K(t^2)
\end{aligned}
$$

où P_3 est un polynôme.

On a donc en recollant les morceaux l'expression suivante

$$
\begin{aligned}
Z_{H,U}(t) &= \frac{q^{2-2\,g}\,Z_K(q^{m+1}\,t^{m+2})\,Z_K(q\,t^2)}{Z_K(t^2)\,Z_K(q^m\,t^{m+2})}\\
&\quad + \frac{q^{1-g}\,Z_K(q\,t^2)\,P_2(t)}{Z_K(t^2)\,Z_K(q^m\,t^{\,m+2})}\\
&\quad + q^{1-g}\,\frac{Z_K(q\,t^2)}{Z_K(t^2)} + \frac{P_1(t)}{Z_K(t^2)} + \frac{P_3(t)}{Z_K(t^2)}
\end{aligned}
$$

soit pour la fonction $\zeta_{H,U}$

$$\begin{aligned}
\zeta_{H,U}(s) &= \frac{q^{2-2g}\,\zeta_K((m+2)\,s-(m+1))\,\zeta_K(2\,s-1)}{\zeta_K(2\,s)\,\zeta_K((m+2)\,s-m)} \\
&+ \frac{q^{1-g}\,\zeta_K(2\,s-1)\,P_2(q^{-s})}{\zeta_K(2\,s)\,\zeta_K((m+2)\,s-m)} \\
&+ q^{1-g}\,\frac{\zeta_K(2\,s-1)}{\zeta_K(2\,s)} + \frac{P_1(q^{-s})}{\zeta_K(2\,s)} + \frac{P_3(q^{-s})}{\zeta_K(2\,s)}
\end{aligned}$$

et des propriétés de la fonction ζ_K rappelées ci-dessus on déduit la proposition. Le pôle d'ordre 2 en $s=1$ provient de la contribution du premier terme de la somme ci-dessus, et le terme principal vaut

$$q^{2-2\,g}\,\frac{1}{2\,(m+2)}\,\frac{(\mathrm{Res}_{s=1}\,\zeta_K(s)\,)^2}{\zeta_K(2)^2}$$

avec

$$\zeta_K(2)^{-2} = \prod_{v\in\mathcal{V}_K}(1-q^{-2\,f_v})^2 = \prod_{v\in\mathcal{V}_K}(1-q^{-f_v})^2\,(1+2\,q^{-f_v}+q^{2\,f_v})$$

ce qui montre le résultat annoncé.

4.3 Compatibilité avec la conjecture de Manin généralisée

Ce résultat confirme, dans le cas des surfaces de Hirzebruch, la version pour les corps globaux de caractéristique non nulle de la conjecture de Manin (qui concerne initialement la répartition des points de hauteur bornée sur les variétés de Fano définies sur un corps de nombres). Cette conjecture prédit que pour une variété V définie sur un corps global de caractéristique non nulle vérifiant certaines hypothèses (par exemple celles énoncées dans [7, 2.1]) la fonction zêta des hauteurs anticanonique (définie relativement à un ouvert suffisamment petit) converge absolument pour $\Re(s)>1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur un ouvert contenant $\{s\in\mathbf{C},\ \Re(s)>1\}$, avec un pôle d'ordre t en $s=1$, où t est le rang du groupe de Picard de V. Par ailleurs, la partie principale de ce pôle a pour expression conjecturale (avec les notations de [7]) $\alpha^*(V)\,\beta(V)\,\tau_H(V)$.

Nous affirmons donc que cette conjecture est vraie dans le cas où $V=\mathcal{H}_m$. Cette variété vérifie les hypothèses énoncées dans [7, 2.1]. On a déjà vu que $t=2$ et d'après le résultat démontré ci-dessus il reste à vérifier que la partie principale obtenue est la bonne.

L'invariant $\alpha^*(V)$ est défini comme $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(\omega_V^{-1})$ où $C_{\mathrm{eff}}(V)$ est le cône effectif de V et $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}$ est défini pour tout élément s de l'intérieur du cône effectif par

$$\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s) = \int_{C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{-<s,y>}dy$$

avec

$$C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{\,y\in(\mathrm{Pic}(V)\otimes\mathbf{R})^\vee,\ \forall x\in C_{\mathrm{eff}}(V),\ <y\,,\,x>\geq 0\,\}.$$

Ainsi en notant (h^*,f^*) la base duale de (h,f) dans $(\mathrm{Pic}(V)\otimes\mathbf{R})^\vee$ et en utilisant la description du cône effectif donnée dans le lemme 1

$$\begin{aligned}
\alpha^*(V) &= \int_{\{a\,h^*+b\,f^*,\,b\geq 0,\,a\geq m\,b\}} e^{-<2h+(2-m)f,y>}dy \\
&= \int_{b\geq 0} e^{(m-2)\,b}\left(\int_{a\geq m\,b} e^{-2\,a}da\right)db \\
&= \frac{1}{2}\int_{b\geq 0} e^{-(m+2)\,b}db \\
&= \frac{1}{2\,(m+2)}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs $\beta(V) = \#H^1(K,\mathrm{Pic}(\overline{V}))=1$ et

$$\tau_H(V) = (\lim_{s\to 1}(s-1)^2\,\zeta_K(s)^2)\,q^{(1-g)\,\dim(V)}\prod_{v\in\mathcal{V}_K}\lambda_v^{-1}\,\omega_v(V(F_v))$$

où les λ_v sont des facteurs de convergences donnés par $\lambda_v = (1 - q^{-f_v})^2$ et $\omega_v(V(K_v))$ désigne le volume de l'espace v-adique $V(F_v)$ pour une certaine mesure ω_v. Cette mesure est construite à partir de la métrisation du faisceau anticanonique (voir la section 1 de [10]) dont est issue la hauteur. Le choix de la métrique effectué ici correspond au choix du modèle naturel de V sur $\mathcal{C}$ (voir la fin de la section 3.1), et dans ces conditions pour tout v on a d'après [10, Cor 2.15]

$$\omega_v(V(K_v)) = \frac{\# V(k_v)}{q^{f_v \, \dim(V)}},$$

$V(k_v)$ désignant l'ensemble des points k_v-rationnels de la k_v-variété obtenue par réduction modulo v du modèle, autrement dit

$$V(k_v) = \{(x_0 : x_1 : x_2)\,(y_0 : y_1) \in \mathbf{P}^2(k_v) \times \mathbf{P}^1(k_v),\ x_0\, y_1^m = x_1\, y_0^m\}.$$

On vérifie facilement que $\# V(k_v) = 1 + 2\, q^{f_v} + q^{2\, f_v}$. Enfin on a bien $\dim(V) = 2$.

Remarquons qu'il est assez aisé, avec la technique utilisée ici, de montrer que, dans le cas $m = 1$, $\zeta_{H,C_m}(s) = \sum_{x \in C_m(K)} H(x)^{-s}$ ne converge absolument que pour $\Re(s) > 2$ avec un pôle simple en $s = 2$ ce qui correspond au phénomène d'accumulation évoqué plus haut. Dans le cas $m \geq 2$, ζ_{H,C_m} ne converge pour aucun s tel que $\Re(s) > 0$.

Références

[1] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel. Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori. *Int. Math. Res. Notices*, **12**, 1995. p. 591-635.

[2] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel. Manin's conjecture for toric varieties. *Jour. of Alg. Geom.*, **7**, 1998. p. 15-53.

[3] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel. Rational points on some Fano cubic bundles. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **323**, 1996. p. 41-46.

[4] H. Billard. Répartition des points rationnels des surfaces géométriquement réglées rationnelles. *Astérisque*, **251**, 1998. p. 79-89.

[5] J. Franke, Y. Manin, Y. Tschinkel. Rational points of bounded height on Fano varieties. *Invent. Math.*, **95**, 1989. p. 421-435.

[6] S. Lang. *Fundamentals of diophantine geometry.* Springer-Verlag, 1983.

[7] E. Peyre. Points de hauteur bornée sur les variétés de drapeaux en caractéristique finie. Prépublication.

[8] E. Peyre. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Mathematical Journal*, **79**, 1995. p. 101-218.

[9] E. Peyre. Etude asymptotique des points de hauteur bornée. Notes de l'école d'été sur les variétés toriques, Grenoble, juin 2000.

[10] P. Salberger. Tamagawa measure on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Astérisque*, **251**, 1998. p. 91-258.

[11] S.H. Schanuel. Heights in number fields. *Bull. Soc. Math. France*, **107**, 1979. p. 433-449.

[12] J.H. Silverman. The theory of height functions *in Arithmetic Geometry,* G. Cornell & J.H. Silverman, ed. Springer-Verlag, 1986. p.151-166

[13] A. Weil. *Basic number theory.* Springer Verlag, 1967.

Institut Fourier
UMR 5582
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex
France
Mail : bourqui@ujf-grenoble.fr