

MARCHE ALÉATOIRE RÉVERSIBLE SUR LE CERCLE

Christophe Leuridan

Prépublication de l'Institut Fourier n° 540 (2001)

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html>

Résumé

Soit $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une marche aléatoire sur le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, indexée par \mathbf{Z} , dont la loi μ des pas est symétrique par rapport à $\hat{0}$ et n'est portée par aucun sous-groupe fini de \mathbf{T} . Dans cet article, nous montrons que la filtration naturelle associée à la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est "de type produit" en construisant explicitement une suite $(\eta_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ qui possède la même filtration naturelle associée.

Introduction

Les filtrations indexées par \mathbf{Z} (ou par $-\mathbf{N}$) présentent dans certains cas des comportements asymptotiques paradoxaux vers $-\infty$, qui bien après les travaux de Vershik [7] ont fait l'objet de nombreux travaux récents, dont ceux de Tsirel'son, Weizsäcker, Smorodinsky, Emery et Schachermayer [1, 6, 7, 5, 3]. Un des problèmes concernant ces filtrations est de caractériser les filtrations "à accroissements indépendants", les filtrations "de type produit" et les filtrations "standard". Comme la terminologie varie d'un article à l'autre, nous redonnons quelques définitions concernant les filtrations indexées par \mathbf{Z} (qui ne serviront que dans l'introduction). Signalons auparavant que nous travaillons modulo les événements négligeables : toutes les tribus considérées sont supposées complétées, ce qui permet de traiter les égalités presque sûres comme des égalités dans les questions de mesurabilité.

- * Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) est à accroissements indépendants s'il existe une suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, ξ_n est indépendante de \mathcal{F}_{n-1} et $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(\xi_n)$.
- * Une filtration \mathcal{F} est de type produit s'il existe une suite de variables aléatoires indépendantes dont la filtration naturelle est \mathcal{F} .
- * Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est immergée dans une filtration $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ du même espace probabilisé si $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$ pour tout n et si toute martingale dans la filtration \mathcal{F} est encore une martingale dans la filtration \mathcal{G} .
- * Une filtration \mathcal{F} d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) est immersible dans une filtration \mathcal{G}' d'un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ si elle est isomorphe à une filtration \mathcal{F}' immergée dans \mathcal{G}' .
- * Une filtration \mathcal{F} est dite standard si elle est immersible dans une filtration de type produit.

Classification math. : 60J05.

Mots-clés : marche aléatoire sur le cercle, filtrations indexées par \mathbf{Z} , filtrations standard.

Pour qu'une filtration \mathcal{G} soit standard, il est nécessaire que la tribu asymptotique $\mathcal{G}_{-\infty}$ soit triviale, à cause de la loi du 0 – 1 de Kolmogorov. Mais cette condition n'est pas suffisante : A. Vershik [7] et M. Smorodinsky [5] ont donné des exemples de filtrations à accroissements indépendants dont la tribu asymptotique est triviale, mais qui ne sont pas de type produit, ni même immersibles dans une filtration de type produit.

Le problème de caractériser les filtrations standards (immersibles dans une filtration de type produit) a donné lieu à de nombreux travaux. En 1973, A. Vershik a donné un critère de "standardité" [7]. Plus récemment, des avancées remarquables ont été apportées à un problème analogue à temps continu, reconnaître les filtrations browniennes. Une notion clé est la notion de filtration confortable introduite en 1997 par B. Tsirel'son. Le confort est une condition nécessaire pour qu'une filtration indexée par \mathbf{R}_+ soit brownienne et B. Tsirel'son s'est servi de cette condition pour montrer que la filtration associée à un mouvement brownien de Walsh n'est pas brownienne puisqu'elle n'est pas confortable. Dernièrement, M. Emery et W. Schachermayer ont introduit une notion de confort pour les filtrations indexées par $-\mathbf{N}$, qui est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une filtration soit standard [3].

Dans cet article, nous nous intéressons à la filtration naturelle associée à une marche aléatoire symétrique sur le cercle : on considère le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et une probabilité μ sur \mathbf{T} symétrique par rapport à 0 et qui n'est portée par aucun sous-groupe fini de \mathbf{T} . On se donne des variables indépendantes U_0 de loi uniforme sur \mathbf{T} et $(\xi_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de loi μ , sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On construit par récurrence une marche aléatoire $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ sur \mathbf{T} indexée par \mathbf{Z} en posant $U_n - U_{n-1} = \xi_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Nous verrons d'ailleurs dans la première partie que toute marche aléatoire indexée par \mathbf{Z} dont les pas ont pour loi μ est de cette forme.

Nous nous trouvons alors dans la situation paradoxale suivante :

- * les filtrations \mathcal{F}^ξ et \mathcal{F}^U associées aux processus $(\xi_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ et $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ sont "à accroissements indépendants" et "ont les mêmes accroissements" puisqu'on passe de \mathcal{F}_{n-1}^U à \mathcal{F}_n^U en ajoutant l'information indépendante ξ_n ;
- * la filtration $(\mathcal{F}_n^\xi)_{n \in \mathbf{Z}}$ est strictement incluse dans la filtration $(\mathcal{F}_n^U)_{n \in \mathbf{Z}}$;
- * pourtant les tribus asymptotiques $\mathcal{F}_{-\infty}^\xi$ et $\mathcal{F}_{-\infty}^U$ sont triviales.

Le fait que la tribu asymptotique $\mathcal{F}_{-\infty}^U$ soit triviale n'est pas du tout évident *a priori*. En effet, lorsque la mesure μ est de la forme $(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})/2$, avec $\alpha \in \mathbf{T}$ irrationnel, chaque trajectoire $(U_n(\omega))_{n \in \mathbf{Z}}$ est portée par l'orbite $O(\omega) = \{U_0(\omega) + k\alpha ; k \in \mathbf{Z}\}$. Comme on a aussi $O(\omega) = \{U_n(\omega) + k\alpha ; k \in \mathbf{Z}\}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la variable aléatoire O à valeurs dans $\mathbf{T}/\alpha\mathbf{Z}$ est asymptotique. Mais cela ne contredit pas le fait que la tribu asymptotique $\mathcal{F}_{-\infty}^U$ soit triviale. En effet, comme α est irrationnel, les boréliens de \mathbf{T} invariants par translation de α sont de mesure 0 ou 1. Or les parties mesurables de $\mathbf{T}/\alpha\mathbf{Z}$ (muni de la tribu quotient) sont les parties dont l'image réciproque par la projection canonique de \mathbf{T} sur $\mathbf{T}/\alpha\mathbf{Z}$ est borélienne ; ces images réciproques étant invariantes par translation de α sont donc de mesure 0 ou 1. Ainsi, la mesure image de la probabilité P par la variable O est une probabilité ne prenant que les valeurs 0 ou 1, si bien que l'information contenue dans la variable O est insaisissable pour les probabilités. D'ailleurs, s'il était possible de conditionner par l'orbite sur laquelle évolue la marche $(U_n(\omega))_{n \in \mathbf{Z}}$, on obtiendrait une marche aléatoire sur \mathbf{Z} indexée par \mathbf{Z} , ce qui n'existe pas...

On peut donc se demander - bien que cela semble impossible à première vue - s'il existe une suite $(\eta_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de variables indépendantes de loi μ dont \mathcal{F}^U soit la filtration naturelle. Dans le cas où $\mu = (\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})/2$ avec $\alpha \in \mathbf{T}$ irrationnel, A. Vershik répond par l'affirmative dans [7] (page 744), comme application de son critère de standardité, mais il ne démontre pas que son

critère est vérifié par cet exemple... On peut aussi utiliser les travaux de M. Emery et W. Schachermayer [3] en montrant que la filtration \mathcal{F}^U satisfait à un des critères de confort qui caractérisent les filtrations standards. Comme ces vérifications ne sont pas évidentes, nous nous proposons de construire directement une telle suite $(\eta_n)_{n \in \mathbf{Z}}$.

La construction que nous faisons est proche de celle qu'utilisent M. Emery et W. Schachermayer [2] pour montrer que la filtration d'un mouvement brownien circulaire (c'est-à-dire d'un mouvement brownien sur \mathbf{T} indexé par \mathbf{R}) devient une filtration brownienne lorsqu'on effectue le changement de temps $t = e^s$: on subdivise le temps à l'aide d'une suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ telle que les différences $t_{n+1} - t_n$ tendent rapidement vers $+\infty$ quand n tend vers $-\infty$. On construit la suite $(\eta_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ en changeant le signe de la suite $(\xi_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ sur des intervalles de temps $]t_n ; T_n]$, où les temps d'arrêts $(T_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ sont choisis de telle sorte que les accroissements $\sum_{t_n < k \leq t_{n+1}} \eta_k$ approchent de mieux en mieux les positions $U_{t_{n+1}}$ quand n tend vers $-\infty$. Les temps d'arrêt $(T_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ sont définis par $T_n = \inf\{k > t_n : |2U_k - U_{t_n}| \leq r_n\}$, où les réels $(r_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ tendent rapidement vers 0 quand n tend vers $-\infty$.

Le problème de la marche aléatoire symétrique sur le cercle est conceptuellement plus simple que le problème du mouvement brownien circulaire, qui est son analogue à temps continu. Il présente néanmoins une difficulté supplémentaire du fait que les accroissements $\sum_{t_{n-1} < k \leq t_n} \eta_k$ ne peuvent qu'approcher (et non évaluer) les positions U_{t_n} . Il est donc plus difficile de montrer que la suite $(\eta_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ contient toute l'information nécessaire pour reconstituer la marche $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$.

1. Notations et résultats préliminaires

Dans cette partie, nous montrons des propriétés classiques qu'on rencontre déjà dans un contexte similaire dans les travaux de M. Yor [9, 10], M. Emery et W. Schachermayer [2] concernant l'équation de Tsirel'son.

Pour $k \in \mathbf{Z}$, l'application $t \mapsto \exp(2i\pi kt)$ de \mathbf{R} dans \mathbf{C} est un morphisme de groupes dont le noyau contient \mathbf{Z} . On note e_k le morphisme quotient de \mathbf{T} dans \mathbf{C} . On note ϕ la transformée de Fourier de la mesure μ , définie par $\phi(k) = \int_{\mathbf{T}} e_k d\mu$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Les hypothèses faites sur μ entraînent le résultat suivant :

LEMME 1.1 *pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$, $|\phi(k)| < 1$.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $|\phi(k)| \leq \int_{\mathbf{T}} |e_k(t)| d\mu(t) = 1$ et $\overline{\phi(k)} = \phi(-k) = \phi(k)$ par symétrie de la loi μ d'où $\phi(k) \in \mathbf{R}$. Si on avait $|\phi(n)| = 1$ pour un certain $n \in \mathbf{N}^*$, on aurait donc $\phi(n) = \epsilon$ avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$, d'où $e_n(t) = \epsilon$ pour μ -presque tout $t \in \mathbf{T}$. Donc μ serait portée le noyau du morphisme e_{2n} , qui est un sous-groupe de \mathbf{T} à $2n$ éléments, ce qui contredirait l'hypothèse de départ. \square

Nous utiliserons à plusieurs reprises le lemme-clé suivant :

LEMME 1.2 *Si \mathcal{S} est une sous-tribu de (Ω, \mathcal{A}, P) et U une variable gléatoire indépendante de \mathcal{S} et de loi uniforme sur \mathbf{T} , alors pour toute variable \mathcal{S} -mesurable S à valeurs dans \mathbf{T} , la variable $U + S$ est encore indépendante de \mathcal{S} et de loi uniforme sur \mathbf{T} .*

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$ et pour tout événement $A \in \mathcal{S}$, on a $\mathbf{E}[\mathbf{I}_A e_k(S + U)] = \mathbf{E}[(\mathbf{I}_A e_k(S)) e_k(U)] = \mathbf{E}[(\mathbf{I}_A e_k(S))]\mathbf{E}[e_k(U)] = 0$. \square

Nous allons maintenant voir rapidement quelques propriétés des marches aléatoires indexées par \mathbf{Z} dont les pas ont pour loi μ , qui sont les chaînes de Markov indexées par \mathbf{Z} pour le noyau de transition Π donné par $\Pi(x, B) = \mu(B - x)$.

Existence. La loi uniforme sur \mathbf{T} est une probabilité invariante pour le noyau Π . Le théorème de Kolmogorov assure donc l'existence d'une chaîne de Markov pour le noyau Π , indexée par \mathbf{Z} , stationnaire. Nous allons voir que "la" chaîne stationnaire est d'ailleurs la seule chaîne de Markov pour le noyau Π indexée par \mathbf{Z} .

Unicité en loi. Soit $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une chaîne de Markov pour le noyau Π . Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la variable $\xi_n = U_n - U_{n-1}$ est indépendante de \mathcal{F}_{n-1}^U et a pour loi μ . Quels que soient les entiers relatifs $m < n$ et $k \neq 0$, on a donc

$$\mathbf{E}[e_k(U_n)] = \mathbf{E}[e_k(U_m)]\mathbf{E}[e_k(\xi_{m+1})] \cdots \mathbf{E}[e_k(\xi_n)] = \mathbf{E}[e_k(U_m)]\phi(k)^{n-m}$$

par indépendance de la tribu \mathcal{F}_m^U et des variables ξ_{m+1}, \dots, ξ_n , d'où $|\mathbf{E}[e_k(U_n)]| \leq |\phi(k)|^{n-m}$. En faisant tendre m vers $-\infty$ et en appliquant le lemme 1.1, on obtient $\mathbf{E}[e_k(U_n)] = 0$, ce qui montre que la variable U_n suit la loi uniforme sur \mathbf{T} . La chaîne $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est donc stationnaire

Indépendance de la position U_0 et de la suite des accroissements $(\xi_n)_{n \in \mathbf{Z}}$. Soit $m \in \mathbf{N}$. Nous savons déjà que vu la variable U_{-m} suit la loi uniforme sur \mathbf{T} et que la suite d'accroissements $(\xi_k)_{k > -m}$ est indépendante de la tribu \mathcal{F}_{-m}^U et *a fortiori* de la variable U_{-m} . En utilisant le lemme 1.2 avec $U = U_{-m}$, $S = U_0 - U_{-m} = \xi_{-m+1} + \cdots + \xi_0$ et $\mathcal{S} = \sigma((\xi_k)_{k > -m})$, on voit donc que la variable U_0 est encore indépendante de la suite $(\xi_k)_{k > -m}$, ce qu'il fallait démontrer.

La tribu asymptotique $\mathcal{F}_{-\infty}^U$ est triviale. Nous allons montrer que l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{-\infty}^U$ de toute variable intégrable et \mathcal{F}_0^U -mesurable est presque sûrement constante. D'après le théorème des classes monotones, il suffit de considérer les variables de la forme $f_m(U_{-m}) \cdots f_0(U_0)$, où $m \in \mathbf{N}$ et f_0, \dots, f_m sont des applications continues de \mathbf{T} dans \mathbf{R} . D'après la propriété de Markov, on a $\mathbf{E}[f_m(U_{-m}) \cdots f_0(U_0) | \mathcal{F}_{-m}^U] = g(U_{-m})$, où g est l'application continue de \mathbf{T} dans \mathbf{R} définie par $g = f_m \Pi(f_{m-1} \dots \Pi(f_1 \Pi(f_0)) \dots)$. Pour tout $n \geq m$, on a donc

$$\mathbf{E}[f_m(U_{-m}) \cdots f_0(U_0) | \mathcal{F}_{-n}^U] = h_n(U_{-n}),$$

où l'application $h_n : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$ est définie par

$$h_n(u) = \Pi^{n-m} g(u) = \mathbf{E}[g(u + \xi_{-n+1} + \cdots + \xi_{-m})].$$

Or pour tout $u \in \mathbf{T}$, la loi de la variable $u + \xi_{-n+1} + \cdots + \xi_{-m}$ tend étroitement vers la loi uniforme sur \mathbf{T} quand n tend vers l'infini (cela se vérifie immédiatement à l'aide des fonctions caractéristiques). Donc les fonctions h_n convergent ponctuellement vers la constante $c = \int_{\mathbf{T}} g(t) dt$. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|h_n\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}$, il y a aussi convergence dans $L^1(\mathbf{T})$. Donc la suite de variables $h_n(U_{-n})$ converge vers c dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. D'après le théorème de convergence des martingales inverses, on a ainsi $\mathbf{E}[f_m(U_{-m}) \cdots f_0(U_0) | \mathcal{F}_{-\infty}^U] = c$, ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons construire une suite $(\eta_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ qui engendre la même filtration que la chaîne $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$. Bien entendu, cette suite doit contenir plus d'information que la suite des accroissements $(\xi_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, qui permet seulement de retrouver la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ à une "constante" additive près (dépendant du hasard, mais pas du temps).

2. Construction de la suite $(\eta_n)_{n \in \mathbf{Z}}$

Pour $t \in \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on pose $|t| = |x|$, où x est l'unique réel de $[-1/2, 1/2[$ tel que $t = \dot{x}$.

LEMME 2.1 Pour $r \in]0; 1/2]$, notons $\tau_r = \inf\{t \in \mathbf{N}^* : |2U_t - U_0| \leq r\}$. Alors :

- * pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $r \mapsto \tau_r(\omega)$ est décroissante et continue à droite. La limite à gauche en tout point $r \in]0; 1/2]$ est donnée par $\tau_{r-} = \inf\{t \in \mathbf{N}^* : |2U_t - U_0| < r\}$;
- * pour tout $r \in]0; 1/2]$, on a $P[\tau_r = \tau_{r-}] = P[\tau_r < +\infty] = 1$.

Démonstration. Le premier point est évident. Montrons le second. Pour tout $r \in \mathbf{R}$, on a

$$P[\tau_r < \tau_{r-}] = P[|2U_{\tau_r} - U_0| = r] \leq P[\exists n \in \mathbf{N}^* : |2U_n - U_0| = r] = 0,$$

car pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable $2U_n - U_0 = U_0 + 2 \sum_{1 \leq k \leq n} \xi_k$ suit la loi uniforme sur \mathbf{T} (d'après le lemme 1.1). La finitude de l'instant τ_r vient de ce que les sommes $\sum_{1 \leq k \leq n} \xi_k$ visitent presque sûrement tout intervalle ouvert non vide de \mathbf{T} (voir par exemple [4], chapitre 3, paragraphe 4 : *topological recurrence of random walks*, théorème 4.6 ou exercice 4.18). \square

Pour tout $r \in]0; 1/2]$, on a donc $P[\tau_{r'} = \tau_r] \rightarrow 1$ quand $r' \rightarrow r$. On peut donc construire (par récurrence descendante) une suite $(r_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de réels appartenant à $]0; 1/2]$ telle que

$$\sum_{n \in -\mathbf{N}} P[\tau_{r_n - r_{n-1}} \neq \tau_{r_n + r_{n-1}}] < +\infty.$$

Puis, grâce à la finitude des instants τ_{r_n} , on peut construire une suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ d'entiers relatifs telle que

$$\sum_{n \in -\mathbf{N}} P[\tau_{r_n} \geq t_{n+1} - t_n] < +\infty.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$ (voir figures 1 et 2),

$$T_n = \inf\{t > t_n : |2U_t - U_{t_n}| \leq r_n\} = \inf\{t > t_n : |U_{t_n} + 2 \sum_{t_n < k \leq t} \xi_k| \leq r_n\},$$

$$V_n = U_{t_n} + U_{t_{n-1}} - 2U_{T_{n-1} \wedge t_n} = \sum_{T_{n-1} \wedge t_n < k \leq t_n} \xi_k - \sum_{t_{n-1} < k \leq T_{n-1} \wedge t_n} \xi_k,$$

$$\tilde{T}_n = \inf\{t > t_n : |V_n + 2 \sum_{t_n < k \leq t} \xi_k| \leq r_n\}.$$

On pose enfin $N = \inf\{n \in \mathbf{Z} : \tilde{T}_n \neq T_n \text{ ou } T_n \geq t_{n+1}\}$ et $S = T_N \wedge \tilde{T}_N \wedge t_{N+1}$. On va voir que pour n assez proche de $-\infty$, on a $\tilde{T}_{n-1} = T_{n-1} < t_n$ et $|V_n - U_{t_n}| \leq r_{n-1}$.

LEMME 2.2 On a les propriétés suivantes :

- * pour tout $n \in \mathbf{Z}$, T_n et \tilde{T}_n sont des temps d'arrêt pour la filtration \mathcal{F}^U ;
- * $N > -\infty$ et $S > -\infty$ presque sûrement ;
- * pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $[N \geq n] \in \mathcal{F}_n^U$;
- * l'instant S est un temps d'arrêt pour la filtration \mathcal{F}^U .

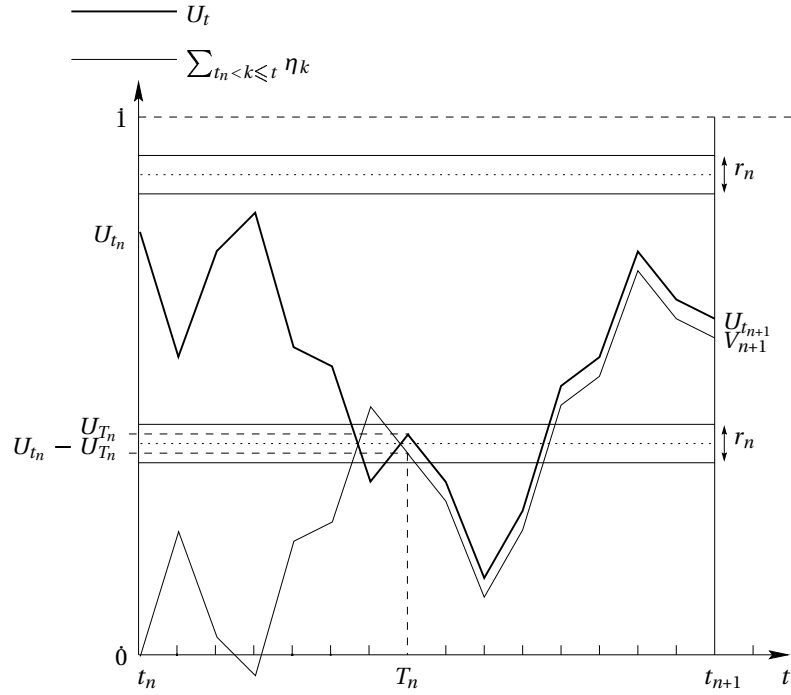


Figure 1. — Définition de T_n et construction de la suite $(\eta_k)_{k \in \mathbf{Z}}$; les deux bandes horizontales représentent l'ensemble des $u \in \mathbf{T}$ tels que $|2u - U_{t_n}| \leq r_n$. Sur l'événement $[T_n < t_{n+1}]$, on a $|U_{t_{n+1}} - V_{n+1}| \leq r_n$.

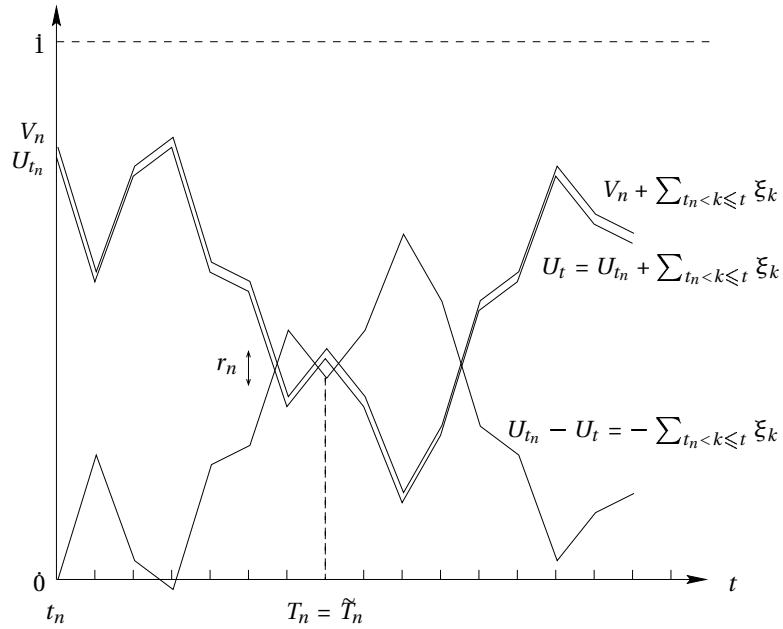


Figure 2. — Remplacer U_{t_n} par V_n dans la définition de T_n ne change pas la valeur de T_n pour n assez proche de $-\infty$: si $\tau_{r_n+r_{n-1}}^{t_n} = \tau_{r_n-r_{n-1}}^{t_n}$ et $|V_n - U_{T_n}| \leq r_{n-1}$, alors $\hat{T}_n = T_n$.

Démonstration. Le premier point est évident. Vérifions les autres.

* D'après le choix fait pour la suite $(t_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, on a

$$\sum_{n \in -\mathbf{N}} P[T_n \geq t_{n+1}] = \sum_{n \in -\mathbf{N}} P[\tau_{r_n} \geq t_{n+1} - t_n] < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel Cantelli, on a presque sûrement, pour tout n assez proche de $-\infty$, $T_n < t_{n+1}$, d'où $V_{n+1} = U_{t_{n+1}} + U_{t_n} - 2U_{T_n}$, d'où $|V_{n+1} - U_{t_{n+1}}| \leq r_n$.

Pour $s \in \mathbf{Z}$ et $r \in]0; 1/2]$, notons $\tau_r^s = \inf\{t > s : |2U_t - U_s| \leq r\}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $T_n = \tau_{r_n}^{t_n}$ d'où

$$\tau_{r_n+r_{n-1}}^{t_n} \leq T_n \leq \tau_{r_n-r_{n-1}}^{t_n}.$$

Mais sur l'événement $[|V_n - U_{t_n}| \leq r_{n-1}]$, on a aussi

$$\tau_{r_n+r_{n-1}}^{t_n} \leq \tilde{T}_n \leq \tau_{r_n-r_{n-1}}^{t_n},$$

grâce à l'inégalité triangulaire. Or d'après le choix fait pour la suite $(r_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, on a

$$\sum_{n \in -\mathbf{N}} P[\tau_{r_n-r_{n-1}}^{t_n} \neq \tau_{r_n+r_{n-1}}^{t_n}] = \sum_{n \in -\mathbf{N}} P[\tau_{r_n-r_{n-1}} \neq \tau_{r_n+r_{n-1}}] < +\infty,$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a donc $\tau_{r_n+r_{n-1}}^{t_n} = \tau_{r_n-r_{n-1}}^{t_n}$ presque sûrement pour tout n assez proche de $-\infty$. Ainsi, presque sûrement, $\tilde{T}_n = T_n < t_{n+1}$ pour tout n assez proche de $-\infty$, d'où $N > -\infty$ et $S > -\infty$ puisque $t_N < S \leq t_{N+1}$.

* Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $[N \geq n] = \bigcap_{k < n} [\tilde{T}_k = T_k < t_{k+1}] \in \mathcal{F}_{t_{n-1}}^U$.

* On a $[S = -\infty] = [N = -\infty] \in \mathcal{F}_{-\infty}^U$ et $[S = +\infty] = [N = +\infty] \in \mathcal{F}_{+\infty}^U$ car $t_N < S \leq t_{N+1}$. Par ailleurs, soit $s \in \mathbf{Z}$. Soit n l'entier relatif tel que $t_n < s \leq t_{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} [S = s] &= [N = n; T_n \wedge \tilde{T}_n \wedge t_{n+1} = s] \\ &= [N \geq n] \cap [\tilde{T}_n \neq T_n \text{ ou } T_n \geq t_{n+1}] \cap [T_n \wedge \tilde{T}_n \wedge t_{n+1} = s] \end{aligned}$$

Comme $[N \geq n] \in \mathcal{F}_{t_{n-1}}^U$ et comme l'événement $[\tilde{T}_n \neq T_n \text{ ou } T_n \geq t_{n+1}]$ est antérieur au temps d'arrêt $T_n \wedge \tilde{T}_n \wedge t_{n+1}$, on a $[S = s] \in \mathcal{F}_s^U$, ce qui montre que S est un temps d'arrêt. \square

Considérons le processus $(H_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ défini par $H_k = -1$ si $k \leq S$ et $t_m < k \leq T_m$ pour un certain $m \in \mathbf{Z}$, $H_k = 1$ sinon. Par construction, le processus $(H_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est prévisible dans la filtration \mathcal{F}^U et à valeurs dans $\{-1; 1\}$. Par symétrie de la loi μ , les variables $\eta_k = H_k \xi_k$ sont donc encore indépendantes et de loi μ . La suite $(\eta_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ répond à notre problème :

THÉORÈME 2.3 *La suite $(\eta_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ ainsi définie engendre la même filtration que $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$.*

Comme la suite $(\eta_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est évidemment adaptée à \mathcal{F}^U , il reste à montrer que la suite $(U_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est adaptée à la filtration \mathcal{F}^η , autrement dit que la suite $(\eta_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ contient toute l'information nécessaire pour reconstituer la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$. L'idée est que les sommes $\sum_{t_{n-1} < k \leq t_n} \eta_k$ coïncident avec les valeurs V_n pour tout n assez proche de $-\infty$ et approchent de mieux en mieux les positions U_{t_n} quand n tend vers $-\infty$.

3. Reconstruction de la marche $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ à partir de la suite $(\eta_n)_{n \in \mathbf{Z}}$

Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose

$$V'_n = \sum_{t_{n-1} < k \leq t_n} \eta_k,$$

$$T'_n = \inf\{t > t_n : |V'_n - 2 \sum_{t_n < k \leq t} \eta_k| \leq r_n\}.$$

Alors T'_n est un temps d'arrêt dans la filtration naturelle \mathcal{F}^n associée au processus $(\eta_n)_{n \in \mathbf{Z}}$. On définit un processus prévisible $(H'_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ et une suite $(\xi'_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ adaptée à la filtration \mathcal{F}^n par $H'_k = -1$ si $t_m < k \leq T'_m$ pour un certain $m \in \mathbf{Z}$, $H'_k = 1$ sinon et $\xi'_k = H_k \eta_k$. Le lemme ci-dessous montre que ces deux processus coïncident avec les processus $(H_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ et $(\xi_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ au voisinage de $-\infty$.

LEMME 3.1 *On a*

- * pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $V'_n = V_n$ sur l'événement $[n \leq N]$;
- * pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $T'_n = \tilde{T}_n = T_n$ sur l'événement $[n < N]$;
- * pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $H'_k = H_k$ et $\xi'_k = \xi_k$ sur l'événement $[k \leq S]$.

Démonstration.

- * Sur l'événement $[n \leq N]$, on a $t_{n-1} < T_{n-1} < t_n$ donc

$$V_n = (U_{t_n} - U_{T_{n-1}}) - (U_{T_{n-1}} - U_{t_{n-1}}) = \sum_{T_{n-1} < k \leq t_n} \xi_k - \sum_{t_{n-1} < k \leq T_{n-1}} \xi_k = \sum_{t_{n-1} < k \leq t_n} \eta_k = V'_n.$$

- * Sur l'événement $[n < N]$, on a $V'_n = V_n$, $\tilde{T}_n = T_n$ et $\eta_k = -\xi_k$ pour tout $k \in]t_n ; T_n]$, d'où

$$T_n = \tilde{T}_n = \inf\{t > t_n : |V_n + 2 \sum_{t_n < k \leq t} \xi_k| \leq r_n\} = \inf\{t > t_n : |V'_n - 2 \sum_{t_n < k \leq t} \eta_k| \leq r_n\} = T'_n.$$

* Soit $k \in \mathbf{Z}$. Soit n l'entier relatif tel que $t_n < k \leq t_{n+1}$. Alors l'événement $[k \leq S ; n > N]$ est impossible. Sur l'événement $[k \leq S ; n < N]$, on a $T'_n = \tilde{T}_n = T_n$, ce qui entraîne $H'_k = H_k$. Sur l'événement $[k \leq S ; n = N]$, on a $V'_n = V_n$ et $\eta_k = -\xi_k$ pour tout $k \in]t_n ; S]$, donc $T'_n \geq S$, ce qui entraîne que $H'_k = H_k = -1$. Comme l'événement $[k \leq S]$ est inclus dans l'événement $[n \leq N]$, on a donc $H'_k = H_k$ et $\xi'_k = \xi_k$ sur l'événement $[k \leq S]$. \square

COROLLAIRE 3.2 *Pour tout $t \in \mathbf{Z}$, on a sur l'événement $[t \leq S]$*

$$V'_n + \sum_{t_n < k \leq t} \xi'_k \rightarrow U_t \text{ quand } n \rightarrow -\infty.$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbf{Z}$. Sur l'événement $[t \leq S]$, on a $\xi'_k = \xi_k$ pour tout $k \leq t$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ tel que $t_n \leq t$, on a $n \leq N$ sur l'événement $[t \leq S]$, d'où $V'_n = V_n$, et ainsi

$$\left| V'_n + \sum_{t_n < k \leq t} \xi'_k - U_t \right| = |V_n - U_{t_n}| \leq r_{n-1},$$

ce qui montre le résultat. \square

Remarquons que sur l'événement $[t > S]$, on a pour tout $n < S$,

$$V'_n + \sum_{t_n < k \leq t} \xi'_k = V'_n + \sum_{t_n < k \leq S} \xi'_k + \sum_{S < k \leq t} \xi'_k \longrightarrow U_S + \sum_{S < k \leq t} \xi'_k \text{ quand } n \rightarrow -\infty.$$

On peut donc définir un processus $(U'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ par

$$U'_t = \lim_{n \rightarrow -\infty} V'_n + \sum_{t_n < k \leq t} \xi'_k.$$

Le processus $(U'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est adapté à la filtration \mathcal{F}^η et coïncide avec le processus $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ sur l'intervalle de temps $] -\infty ; S]$. Comme S est un temps d'arrêt dans la filtration naturelle de $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ et $S > -\infty$ presque sûrement, S est aussi un temps d'arrêt dans la filtration naturelle de $(U'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ et *a fortiori* dans la filtration \mathcal{F}^η . En effet, pour tout $t \in \mathbf{Z}$, on peut trouver une partie mesurable B_t de $\mathbf{T}^{]-\infty, t]}$ telle que $[S \leq t] = [(U_n)_{n \leq t} \in B_t]$. On a alors :

$$S = \inf\{t \in \mathbf{Z} : (U_n)_{n \leq t} \in B_t\} = \inf\{t \in \mathbf{Z} : (U'_n)_{n \leq t} \in B_t\}.$$

Or pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $H_k = H'_k \mathbf{I}_{[k \leq S]} + \mathbf{I}_{[k > S]}$ et $\xi_k = H_k \eta_k$. Comme le processus $(H'_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est prévisible dans la filtration \mathcal{F}^η , le processus $(H_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est lui aussi prévisible et le processus $(\xi_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est adapté à la filtration \mathcal{F}^η . Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{Z}$, la variable

$$U_t = \lim_{n \rightarrow -\infty} V'_n + \sum_{t_n < k \leq t} \xi_k$$

est \mathcal{F}_t^η -mesurable, ce qui achève la démonstration du théorème 2.3.

4. Généralisation

Le théorème 2.3 dit que la filtration \mathcal{F}^U est engendrée par une certaine suite $(\eta_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ ayant même loi que la suite $(\xi_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ des accroissements. En fait, l'hypothèse de symétrie de la loi μ est commode pour l'écriture des formules et la compréhension des figures mais n'est pas nécessaire à la construction d'une telle suite. On a seulement besoin de l'hypothèse (\mathcal{A}) suivante : il existe une bijection bimesurable $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ préservant la mesure μ et telle que la variable $\xi_0 - f(\xi_0)$ ne soit portée par aucun sous-groupe fini de \mathbf{T} .

Sous l'hypothèse (\mathcal{A}) , on étend les démonstrations déjà faites en adaptant convenablement les définitions des variables. On pose par exemple :

$$T_n = \inf\{t > t_n : |U_{t_n} + \sum_{t_n < k \leq t} (\xi_k - f(\xi_k))| \leq r_n\},$$

$$V_n = \sum_{T_{n-1} \wedge t_n < k \leq t_n} \xi_k + \sum_{t_{n-1} < k \leq T_{n-1} \wedge t_n} f(\xi_k),$$

$$\tilde{T}_n = \inf\{t > t_n : |V_n + \sum_{t_n < k \leq t} (\xi_k - f(\xi_k))| \leq r_n\}.$$

On pose enfin $\eta_k = f(\xi_k)$ si $k \leq S$ et $t_m < k \leq T_m$ pour un certain $m \in \mathbf{Z}$, $\eta_k = \xi_k$ sinon.

L'hypothèse (\mathcal{A}) généralise les hypothèses du début de l'article (en prenant $f : x \mapsto -x$) et elle est presque toujours vérifiée : il suffit en effet que μ possède une partie diffuse non nulle ou bien deux atomes de même masse en deux points à distance irrationnelle.

Bibliographie

- [1] Dubins L., Feldman J., Smorodinsky M., Tsirel'son B. *Decreasing sequence of σ -fields and a measure change for Brownian Motion*. Annals of Probability **24**-2 (1968), 882-904.
- [2] Emery M., Schachermayer W. *A remark on Tsirel'son's differential equation*. Séminaire de Probabilités XXXIII, Lecture Notes in Mathematics **1709**, Springer (1999), 291-303.
- [3] Emery M., Schachermayer W. *On Vershik's standardness criterion and Tsirel'son's notion of cosiness*. Séminaire de Probabilités XXXV (2001), 265 – 305.
- [4] Revuz D. *Markov chains*. North-Holland Mathematical Library (1975).
- [5] Smorodinsky M. *Processes with no standard extension*. Israel Journal of Mathematics **107** (1998), 327-331.
- [6] Tsirel'son B. *Triple points : from non-brownian filtrations to harmonic measures*. Geometry and Functionnal Analysis **7** (1997), 1096-1142.
- [7] Vershik A. M. *Approximation in measure theory*. Dissertation. Leningrad Univ. (1973) (en russe). Version anglaise mise à jour et complétée : *The theory of decreasing sequences of measurable partitions*. St Petersburg Mathematical Journal **6** (1995), 705-761.
- [8] von Weizsäcker H. *Exchanging the order of taking suprema and countable intersections of σ -algebras*. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Section B **91** (1983), 91-100.
- [9] Yor M. *De nouveaux résultats sur l'équation de Tsirel'son*. Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **309** Série I (1983), 511-514.
- [10] Yor M. *Tsirel'son's equation in discrete time*. Probability Theory and Related Fields **91**(1992), 135-152.

Christophe LEURIDAN
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)