Résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables définis dans un anneau

Salomon SAMBOU

Prépublication de l'Institut Fourier n° 537 (2001)

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html`

Introduction

Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact à bord $\mathscr{C}^\infty$ de X. Posons $D = X \setminus \overline{\Omega}$. Un courant T défini sur D est dit prolongeable, si T est la restriction à D d'un courant $\widetilde{T}$ défini sur X. Supposons que X est une extension q-convexe de Ω. On veut résoudre $\overline{\partial}U = T$ sur D, où T est un courant prolongeable $\overline{\partial}$-fermé. Ce problème entre donc dans le cadre général de la résolution du $\overline{\partial}$. On sait que pour les formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D, cette équation n'a pas toujours une solution. Même dans le cas où l'on sait résoudre, on ignore parfois si pour une donnée de classe $\mathscr{C}^\infty$ jusqu'au bord, on a une solution $\mathscr{C}^\infty$ jusqu'au bord. D'après l'isomorphisme de Dolbeault si le $\overline{\partial}$ admet une solution pour les formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ $\overline{\partial}$-fermées sur D, alors il admet une solution pour les courants $\overline{\partial}$-fermés sur D. Les courants prolongeables sont pour les courants ce que les formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies jusqu'au bord sont pour les formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies dans un domaine. Il est donc naturel de se demander si T est un courant prolongeable $\overline{\partial}$-fermé sur D, il existe un courant prolongeable U défini sur D, solution de $\overline{\partial}U = T$. Ce problème a déjà été étudié dans [13] dans le cas d'un domaine complètement strictement q-convexe à bord $\mathscr{C}^\infty$.

Sous l'hypothèse $\overset{\circ}{\overline{D}} = D$, on sait d'après [11] que l'espace $\check{\mathscr{D}}'^{p,r}_{D}(X)$ des courants prolongeables de bidegré (p,r) définis sur D est le dual topologique de l'espace $\mathscr{D}^{n-p,n-r}(\overline{D})$ des $(n-p,n-r)$-formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$, à support compact dans $\overline{D}$. On va donc comme dans [13] résoudre le $\overline{\partial}$ avec conditions de support et obtenir par dualité la résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables. Mais contrairement au cas convexe, $\mathscr{D}^{n-p,n-r}(\overline{D})$ n'est pas un espace de Fréchet mais simplement une limite inductive d'espaces de Fréchet, d'où des difficultés à appliquer le théorème de l'application ouverte. Grâce à des artifices d'analyse

Math. classification: 32F10, 32F20.

Keywords: Courants prolongeables, équation de Cauchy-Riemann, domaine complètement strictement q-convexe, extension q-convexe et q-concave généralisée.

fonctionnelle, on parvient à surmonter ce problème pour prouver le théorème suivant :

THÉORÈME . — *Soient X une variété de Stein de dimension n, $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact à bord $\mathscr{C}^\infty$ de X tels que X soit une extension q-convexe de Ω, $1 \leqslant q \leqslant n-1$. Alors*

i) Pour $1 \leqslant r \leqslant q$ et $r \leqslant n-2$,

$$\overline{\partial}\check{\mathscr{D}}'^{p,r-1}_{X\setminus\overline{\Omega}}(X) = \check{\mathscr{D}}'^{p,r}_{X\setminus\overline{\Omega}}(X) \cap \ker\overline{\partial} .$$

ii) Si $q = n-1$,

$$\overline{\partial}\check{\mathscr{D}}'^{p,n-2}_{X\setminus\overline{\Omega}}(X) = \left\{T \in \check{\mathscr{D}}'^{p,n-1}_{X\setminus\overline{\Omega}}(X) \mid \langle T,\varphi\rangle = 0, \forall\varphi \in \mathscr{D}^{n-p,1}(X\setminus\Omega) \cap \ker\overline{\partial}\right\} .$$

Ce théorème est pour les courants prolongeables l'analogue du corollaire 2.2.13 de [8] sur les formes différentielles définies jusqu'au bord dans un anneau local q-concave.

Notons $\check{H}^{p,r}(D)$ respectivement $H^{p,r}_{\mathrm{cour}}(D)$ le $(p,r)^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de Dolbeault des courants prolongeables respectivement des courants. On a comme conséquence du théorème 4.1 de [13] et du théorème ci-dessus, les relations entre $\check{H}^{p,r}(D)$ et $H^{p,r}_{\mathrm{cour}}(D)$ suivantes :

THÉORÈME . — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine à bord $\mathscr{C}^\infty$ de X. Supposons que :*

a) bD est strictement q-concave, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, alors l'application induite par restriction :

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \longrightarrow H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(D) \ \text{ est un isomorphisme pour } 0 \leqslant r \leqslant q-1$$

et

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,q}(D) \longrightarrow H^{0,q}_{\mathrm{cour}}(D), \ \text{ est injective.}$$

b) bD est strictement q-convexe, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, l'application induite par restriction :

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \longrightarrow H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(D) \ \text{ est un isomorphisme si } r > n-q$$

et

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,n-q}(D) \longrightarrow H^{0,n-q}_{\mathrm{cour}}(D) \ \text{ est surjective.}$$

La partie *b)* du théorème a été démontrée dans [9], théorème 3.13 pour un domaine à bord $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux.

Si $H^{0,r}_\infty(\overline{D})$ respectivement $H^{0,r}_\infty(D)$ désigne le $(0,r)$-ième groupe de cohomologie de Dolbeault pour les formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\overline{D}$ respectivement sur D, on a sous les hypothèses du théorème ci-dessus les mêmes conclusions pour l'application induite par restriction $\mathscr{S} : H^{0,r}_\infty(\overline{D}) \to H^{0,r}_\infty(D)$.

On applique ces différentes relations entre groupe de cohomologie à l'étude de l'isomorphisme de Dolbeault dans les hypersurfaces réelles. On sait que pour une variété analytique complexe X, l'application naturelle entre le $H^{p,r}_\infty(X)$ et $H^{p,r}_{\mathrm{cour}}(X)$ est un isomorphisme. Dans le cas d'une hypersurface réelle S de X, à cause de l'absence du lemme de Poincaré pour le $\overline{\partial}_S$

dans les degrés intermédiaires, l'application naturelle entre $H^{p,r}_\infty(S)$ et $H^{p,r}_{\rm cour}(S)$ semble ne pas être toujours un isomorphisme. On montre :

THÉORÈME . — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et S une hypersurface réelle de classe $\mathscr{C}^\infty$ de X. Si la forme de Lévi de S admet en chaque point de S :*

i) q valeurs propres de même signe $q \geqslant \frac{n+1}{2}$, l'application naturelle de $H^{0,r}_\infty(S) \to H^{0,r}_{\rm cour}(S)$ est surjective si $n-q \leqslant r \leqslant q-1$, et $H^{0,r}_\infty(S) \to H^{0,r}_{\rm cour}(S)$ est injective si $n-q+1 \leqslant r \leqslant q$.

ii) q paires de valeurs propres de signe contraire, $1 \leqslant q \leqslant \frac{n-1}{2}$, l'application naturelle de $H^{0,r}_\infty(S) \to H^{0,r}_{\rm cour}(S)$ est un isomorphisme si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et $n-q+1 \leqslant r \leqslant n-1$,

et

$$H^{0,q}_\infty(S) \longrightarrow H^{0,q}_{\rm cour}(S) \ \text{ est injective}$$
$$H^{0,n-q}_\infty(S) \longrightarrow H^{0,n-q}_{\rm cour}(S) \ \text{ est surjective.}$$

Le cas *ii)* correspond au cas de la codimension 1 dans [9]. Ces résultats ont été annoncés dans [14].

1. Préliminaires

NOTATIONS 1.1. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine de X. Posons $D = X \setminus \overline{\Omega})$. On note $\mathscr{D}^{p,r}(X\setminus\Omega)$ l'espace des (p,r)-formes différentielles de classe C^∞ sur X et à support compact dans $X\setminus\Omega$. On munit $\mathscr{D}^{p,r}(X\setminus\Omega)$ de sa topologie usuelle de limite inductive d'espace de Fréchet. $\check{\mathscr{D}}'^{p,r}_D(X)$ désigne l'espace des courants de bidegré (p,r) dans D prolongeables à X. D'après [11], si $\overline{\mathring{D}} = D$, alors $\check{\mathscr{D}}'^{p,r}_D(X)$ est le dual topologique de $\mathscr{D}^{n-p,n-r}(X\setminus\Omega)$.

DÉFINITION 1.2. — Une fonction ρ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X est dite q-convexe, $1 \leqslant q \leqslant n$, si sa forme de Lévi possède au moins q valeurs propres strictement positives. ρ est dite q-concave si $-\rho$ est q-convexe.

DÉFINITION 1.3. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact de X. Ω est complètement strictement q-convexe, $0 \leqslant q \leqslant n-1$, s'il existe une fonction $\varphi(q+1)$-convexe, définie dans un voisinage $U_{\overline{\Omega}}$ de $\overline{\Omega}$ telle que $\Omega = \{z \in U_{\overline{\Omega}} \mid \varphi(z) < 0\}$.

S'il existe une fonction φ qui est $(q+1)$-convexe dans un voisinage $U_{b\Omega}$ du bord de Ω, telle que $\Omega \cap U_{b\Omega} = \{z \in U_{b\Omega} \mid \varphi(z) < 0\}$, on dit alors que Ω est strictement q-convexe.

X est une extension q-convexe de Ω, $0 \leqslant q \leqslant n-1$, s'il existe une fonction $\varphi(q+1)$-convexe, définie sur un voisinage U de $X\setminus\Omega$ telle que $\Omega\cap U = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\}$ et pour tout réel α, $0 < \alpha < \sup\limits_{z\in U} \varphi(z)$, l'ensemble $\{z \in U \mid 0 \leqslant \varphi(z) \leqslant \alpha\}$ est compact.

REMARQUE 1. — Puisque si U est un voisinage de $X\setminus\Omega$, U est aussi un voisinage du bord $b\Omega$ de Ω, alors si X est une extension q-convexe de Ω, Ω est stricement q-convexe.

2. Résolution du $\overline{\partial}$ avec conditions de support

Nous allons d'abord résoudre le $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles appartenant à $\mathscr{D}^{p,r}(X\setminus\Omega)$.

Théorème 1. — *Soient X une variété de Stein de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact à bord $\mathscr{C}^\infty$ de X tel que X soit une extension q-convexe de Ω, $1 \leqslant q \leqslant n-1$. Alors,*

i) si $n-q+1 \leqslant r \leqslant n-1$, $\overline{\partial}\mathscr{D}^{p,r-1}(X\setminus\Omega) = \mathscr{D}^{p,r}(X\setminus\Omega)\cap \operatorname{Ker}\overline{\partial}$.

ii) $\overline{\partial}\mathscr{D}^{p,n-1}(X\setminus\Omega)$ est fermé dans $\mathscr{D}^{p,n}(X\setminus\Omega)$.

iii) si $r = n-q$ et $q \leqslant n-2$, soit $f \in \mathscr{D}^{p,n-q}(X\setminus\Omega)\cap\operatorname{Ker}\overline{\partial}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe $g_\varepsilon \in \mathscr{D}^{p,n-q-1}(X)$ tels que $\overline{\partial}g_\varepsilon = f$ et $|g_\varepsilon|_{\ell,\overline{\Omega}} < \varepsilon$, où $|\ |_{\ell,\overline{\Omega}} < \varepsilon$, où $|\ |_{\ell,\overline{\Omega}}$ désigne la norme C^ℓ sur $\overline{\Omega}$.

Démonstration.

i) Soit $f \in \mathscr{D}^{p,r}(X\setminus\Omega)\cap\operatorname{Ker}\overline{\partial}$, $f \in \mathscr{D}^{p,r}(X)\cap\operatorname{Ker}\overline{\partial}$. Puisque X est de Stein, il existe $h \in \mathscr{D}^{p,r-1}(X)$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, telle que $\overline{\partial}h = f$ sur X. Comme X est une extension q-convexe de Ω, Ω est strictement q-convexe dans une variété de Stein, donc complètement strictement q-convexe, cf. [3], théorème 5.14.

Puisque $2 \leqslant n-q+1 \leqslant r$, c'est-à-dire $1 \leqslant n-q \leqslant r-1$ et $\overline{\partial}h = 0$ sur Ω complètement strictement q-convexe, il existe (cf. [10], théorème 2) une $(p,r-2)$-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^\infty$ θ sur $\overline{\Omega}$ telle que $\overline{\partial}\theta = h$ sur Ω. Soit $\widetilde{\theta}$ une extension $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans X de θ, $u = h - \overline{\partial}\widetilde{\theta}$ convient.

ii) Pour montrer que $\overline{\partial}\mathscr{D}^{p,n-1}(X\setminus\Omega)$ est fermé dans $\mathscr{D}^{p,n}(X\setminus\Omega)$, il suffit de montrer que :

$$\overline{\partial}\mathscr{D}^{p,n-1}(X\setminus\Omega) = \{ f \in \mathscr{D}^{p,n}(X\setminus\Omega) \mid \int_X f\wedge g = 0\,,\ \text{pour toute } (n-p)\text{-forme } g \text{ holomorphe dans } X\}\,.$$

D'après le théorème de Stokes,

$$\overline{\partial}\mathscr{D}^{p,n-1}(X\setminus\Omega) \subset \{ f \in \mathscr{D}^{p,n}(X\setminus\Omega) \mid \int_X f\wedge g = 0\,,\ \text{pour toute } (n-p)\text{-forme } g \text{ holomorphe dans } X\}\,.$$

Soit $f \in \mathscr{D}^{p,n}(X\setminus\Omega)$ telle que $\int_X f\wedge g = 0$, pour toute $(n-p)$-forme g holomorphe dans X. D'après la proposition 20.2 de [3] et la régularité du $\overline{\partial}$, cf. [7], chapitre 5, corollaire 4.5, il existe $h \in \mathscr{D}^{p,n-1}(X)$ telle que $\overline{\partial}h = f$. On termine alors comme dans *i)*. Par conséquent $f \in \overline{\partial}\mathscr{D}^{p,n-1}(X\setminus\Omega)$, d'où l'inclusion dans l'autre sens, ce qui donne l'égalité.

iii) Si $f \in \mathscr{D}^{p,n-q}(X\setminus\Omega)\cap\operatorname{Ker}\overline{\partial}$, alors $f \in \mathscr{D}^{p,n-q}(X)\cap\operatorname{Ker}\overline{\partial}$. Il existe $h \in \mathscr{D}^{p,n-q-1}(X)$ telle que :

$$\overline{\partial}h = f \quad \text{sur } X\,.$$

$\overline{\partial}h = 0$ sur Ω et h est une $(p,n-q-1)$-forme différentielle $\overline{\partial}$-fermée sur Ω. On ne sait pas résoudre $\overline{\partial}U = h$ dans Ω.

Pour compléter *iii)* nous allons utiliser le lemme ci-dessous qui est une version $\mathscr{C}^\infty$ du théorème 12.11 de [3].

LEMME 2.1. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $D \subset\subset X$ un domaine strictement q-convexe tel que X soit une extension q-convexe de D, $0 \leqslant q \leqslant n-1$. Alors pour tous $n-q-1 \leqslant r \leqslant n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, l'image de l'application restriction de $Z^\ell_{0,r}(X) \to Z^\ell_{0,r}(\overline{D})$ est dense pour la norme $|\cdot|_{\ell,\overline{D}}$.*

Démonstration du lemme. — Elle est analogue à celle du théorème 12.11 de [3], où les résultats locaux avec estimations uniformes de Henkin et Leiterer sont remplacés par des résultats locaux correspondants avec estimations c^ℓ de Lieb et Range [10]. □

D'après le lemme 2.1, il existe une famille $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de formes différentielles dans X, $\overline{\partial}$-fermées qui convergent vers $h_{|\overline{\Omega}}$ pour la topologie de la convergence uniforme des formes différentielles et de leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à ℓ sur $\overline{\Omega}$. Puisque $q \leqslant n-2$, il existe une famille $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $(p,n-q-2)$ formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X telles que $\overline{\partial}\psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ sur X.

Soit χ une fonction dans $\mathscr{C}^\infty(X)$ à support compact dans X qui vaut 1 dans $\overline{\Omega}$. Posons $\theta_\varepsilon = \chi\psi_\varepsilon$ et $g_\varepsilon = h - \overline{\partial}\theta_\varepsilon$. $f = \overline{\partial}g_\varepsilon$, g_ε est une $(p,n-q-1)$ forme différentielle à support compact dans X avec $|g_\varepsilon|_{\ell,\overline{\Omega}} < \varepsilon$.

Notons que pour les assertions *i)* et *ii)* il suffit que D soit complètement strictement q-convexe. Le fait que X soit une extension q-convexe de D ne sert que pour *iii)*.

REMARQUE 2. — Le théorème 1 reste vrai sous les hypothèses légèrement plus faibles suivantes : X est une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ est un domaine relativement compact à bord $\mathscr{C}^\infty$ de X. On suppose que X est une extension q-convexe de Ω et qu'il existe un ouvert de Stein U tel que $\Omega \subset\subset U \subset X$.

3. Résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables

Comme conséquence de la résolution à support compact et de la dualité entre $\check{\mathscr{D}}'^{p,r}_D(X)$ et $\mathscr{D}^{n-p,n-r}(X \smallsetminus \Omega)$, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soient X une variété de Stein de dimension n, $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact à bord $\mathscr{C}^\infty$ de X tels que X soit une extension q-convexe de Ω, $1 \leqslant q \leqslant n-1$. Alors,*

i) Pour $1 \leqslant r \leqslant q$ et $r \leqslant n-2$,

$$\overline{\partial}\check{\mathscr{D}}'^{p,r-1}_{X\smallsetminus\overline{\Omega}}(X) = \check{\mathscr{D}}'^{p,r}_{X\smallsetminus\overline{\Omega}}(X) \cap \operatorname{Ker}\overline{\partial}\,.$$

ii) *Si* $q = n-1$,

$$\bar\partial \check{\mathscr{D}}'^{\,p,n-2}_{X\smallsetminus\overline{\Omega}}(X) = \left\{ T \in \check{\mathscr{D}}'^{\,p,n-1}_{X\smallsetminus\overline{\Omega}}(X) \mid \langle T,\varphi\rangle = 0\ ,\ \forall\varphi \in \mathscr{D}^{n-p,1}(X\smallsetminus\Omega)\cap \operatorname{Ker}\bar\partial \right\} .$$

Pour faire la démonstration du théorème, on a besoin de deux lemmes :

LEMME 3.1. — *Sous les hypothèses de la remarque 2, soit K un compact d'intérieur non vide de $U\smallsetminus\Omega$. Si T est un courant de bidegré (p,r) sur $U\smallsetminus\overline{\Omega}$, $\bar\partial$-fermé et prolongeable à U, il existe un courant $S^{(K)}$ défini dans $U\smallsetminus\overline{\Omega}$ prolongeable à U tel que $\bar\partial S^{(K)} = T$ dans $\mathring{K}$, pour $1 \leqslant r \leqslant q$ et $r \leqslant n-2$.*

Si $q = n-1$ pour tout $T \in \{F \in \check{\mathscr{D}}'^{\,p,n-1}_{U\smallsetminus\overline{\Omega}}(U) \mid \langle F,\varphi\rangle = 0, \forall\varphi \in \mathscr{D}^{n-p,1}(U\smallsetminus\Omega)\cap\ker\bar\partial\}$,

il existe un courant $S^{(K)}$ défini dans $U\smallsetminus\overline{\Omega}$ prolongeable à U tel que $\bar\partial S^{(K)} = T$ dans $\mathring{K}$.

Démonstration du lemme. — D'après la remarque 2, $\bar\partial\mathscr{D}^{n-p,n-r}(U\smallsetminus\Omega)$ est fermé dans $\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}(U\smallsetminus\Omega)$ pour $2 \leqslant n-q+1 \leqslant n-r+1 \leqslant n$, c'est-à-dire $1 \leqslant r \leqslant q$.

Donc si $1 \leqslant r \leqslant q$, pour un compact K de $U\smallsetminus\Omega$, notons $\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)$ le sous-espace des formes différentielles appartenant à $\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}(U\smallsetminus\Omega)$ et qui ont leur support dans K.

$\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\cap\bar\partial\mathscr{D}^{n-p,n-r}(U\smallsetminus\Omega)$ est fermé dans $\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)$ qui est un espace de Fréchet, c'est donc un espace de Fréchet.

$$\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\cap\bar\partial\mathscr{D}^{n-p,n-r}(U\smallsetminus\Omega) = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\cap\bar\partial\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{K_\nu}(U\smallsetminus\Omega)\right);$$

où $(K_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts de $U\smallsetminus\Omega$. Il existe ν_0 tel que $\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\cap\bar\partial\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{K_{\nu_0}}(U\smallsetminus\Omega)$ soit de deuxième catégorie de Baire. L'opérateur $\bar\partial$ est alors un opérateur fermé de domaine de définition $\{\varphi\in\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{K_{\nu_0}}(U\smallsetminus\Omega) \mid \bar\partial\varphi\in\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\}$ entre les espaces de Fréchet $\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{K_{\nu_0}}(U\smallsetminus\Omega)$ et $\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\cap\bar\partial\mathscr{D}^{n-p,n-r}(U\smallsetminus\Omega)$ dont l'image est de seconde catégorie de Baire. Le théorème de l'application ouverte implique alors que cet opérateur est surjectif et ouvert. Donc

$$\bar\partial\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{K_{\nu_0}}(U\smallsetminus\Omega)\cap\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega) = \mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\cap\bar\partial\mathscr{D}^{n-p,n-r}(U\smallsetminus\Omega) .$$

Posons $\widetilde{K} = K_{\nu_0}$. L'application

$$\begin{aligned} L^K_T : \mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\cap\bar\partial\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{\widetilde{K}}(U\smallsetminus\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \bar\partial\varphi &\longrightarrow \langle T,\varphi\rangle \end{aligned}$$

est bien définie. En effet, si $\bar\partial\varphi = \bar\partial\varphi'$, on a $\bar\partial(\varphi-\varphi') = 0$. $\varphi-\varphi'$ est une $(n-p,n-r)$ forme différentielle, $\bar\partial$-fermée à support compact dans $\widetilde{K}$, en particulier dans $U\smallsetminus\Omega$.

$*$ Si $r \leqslant q-1$, d'après *i)* du théorème 1 et la remarque 2, il existe $\theta\in\mathscr{D}^{n-p,n-r-1}(U\smallsetminus\Omega)$ tel que $\varphi-\varphi' = \bar\partial\theta$ car $n-r \geqslant n-q+1$. Par densité de $\mathscr{D}^{n-p,n-r-1}(U\smallsetminus\overline{\Omega})$ dans

$\mathscr{D}^{n-p,n-r-1}(U\smallsetminus\Omega)$, il existe une suite $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}^{n-p,n-r-1}(U\smallsetminus\overline{\Omega})$ qui convergent uniformément vers θ dans $\mathscr{D}^{n-p,n-r-1}(U\smallsetminus\Omega)$ et par conséquent $\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\varphi'\rangle + \langle T,\overline{\partial}\theta\rangle = \langle T,\varphi'\rangle$ car T étant $\overline{\partial}$-fermé, $\langle T,\overline{\partial}\theta\rangle = \lim\limits_{j\to+\infty}\langle T,\overline{\partial}\theta_j\rangle = 0$. Donc

$$L_T^K(\overline{\partial}\varphi) = L_T^K(\overline{\partial}\varphi')\,.$$

$**$ Si $r=q$ et $r\leqslant n-2$, soit $\widetilde{T}$ une extension de T à U. $\overline{\partial}\widetilde{T}$ est un courant à support compact sur $\overline{\Omega}$, donc $\overline{\partial}\widetilde{T}$ est d'ordre fini ℓ. Puisque $\varphi-\varphi'\in\mathscr{D}^{n-p,n-q}(U\smallsetminus\Omega)\cap\operatorname{Ker}\overline{\partial}$ pour tout $\varepsilon>0$, on a d'après *iii)* du théorème 1 et la remarque 2, une $(n-p,n-q-1)$ forme différentielle h_ε de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans U telle que $\varphi-\varphi'=\overline{\partial}h_\varepsilon$ et $|h_\varepsilon|_{\ell,\overline{\Omega}}\leqslant\varepsilon$.

$$|\langle\widetilde{T},\overline{\partial}h_\varepsilon\rangle| = |\langle\overline{\partial}\widetilde{T},h_\varepsilon\rangle| \leqslant c|h_\varepsilon|_{\ell,\overline{\Omega}}\,.$$

Donc $|\langle\widetilde{T},\overline{\partial}h_\varepsilon\rangle| \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} 0$, d'où $\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\varphi'\rangle$, ainsi $L_T^K(\overline{\partial}\varphi) = L_T^K(\overline{\partial}\varphi')$.

$***$ Si $q=n-1$ et $T\in\{F\in\check{\mathscr{D}}'^{\,p,n-1}_{U\smallsetminus\overline{\Omega}}(U)\mid\langle F,\varphi\rangle=0,\ \forall\varphi\in\mathscr{D}^{n-p,1}(U\smallsetminus\Omega)\cap\operatorname{Ker}\overline{\partial}\}$, $\varphi-\varphi'\in\mathscr{D}^{n-p,1}(U\smallsetminus\Omega)\cap\operatorname{Ker}\overline{\partial}$ et d'après l'hypothèse sur T, $\langle T,\varphi-\varphi'\rangle = 0$. D'où $L_T^K(\overline{\partial}\varphi) = L_T^K(\overline{\partial}\varphi')$.

L'application L_T^K est linéaire, mais également continue comme composée de deux applications continues :

$$T:\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{\widetilde{K}}(U\smallsetminus\Omega)\longrightarrow\mathbb{C}$$

et

$$\delta:\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\cap\overline{\partial}\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{\widetilde{K}}(U\smallsetminus\Omega)\longrightarrow\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{\widetilde{K}}(U\smallsetminus\Omega)$$

qui vérifie $\overline{\partial}\circ\delta=I$ et qui est obtenue par application du théorème de l'application ouverte appliqué à

$$\begin{aligned}\overline{\partial}:\{\varphi\in\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{\widetilde{K}}(U\smallsetminus\Omega)\mid\overline{\partial}\varphi\in\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\}\subset\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{\widetilde{K}}(U\smallsetminus\Omega)\\ \longrightarrow\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K(U\smallsetminus\Omega)\cap\overline{\partial}\mathscr{D}^{n-p,n-r}_{\widetilde{K}}(U\smallsetminus\Omega)\,.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut étendre L_T^K à une application $\widetilde{L}_T^K:\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}(U\smallsetminus\Omega)\to\mathbb{C}$ qui est linéaire et continue. Donc $\widetilde{L}_T^K$ est un courant prolongeable défini dans $U\smallsetminus\overline{\Omega}$ et $\overline{\partial}\widetilde{L}_T^K = (-1)^{p+r}T$ sur $\mathring{K}$ car si $\operatorname{supp}\varphi\subset K$, $\overline{\partial}\varphi\in\mathscr{D}^{n-p,n-r+1}_K((U\smallsetminus\Omega)$ et $\langle\widetilde{L}_T^K,\overline{\partial}\varphi\rangle = (-1)^{p+r}\langle T,\varphi\rangle$. On pose $S^{(K)} = (-1)^{p+r}\widetilde{L}_T^K$. □

LEMME 3.2. — *Sous les hypothèses du théorème 2, soient K_1, K_2, K_3 trois compacts d'intérieur non vide tels que $\mathring{K}_1\subset\subset\mathring{K}_2\subset\subset\mathring{K}$ et $\mathring{K}_i\cup\overline{\Omega}=\{z\in X\smallsetminus\rho(z)<\eta_i\}, i=1,2,3$, où ρ est une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique qui existe du fait que X est de Stein. Soit T un courant prolongeable sur $X\smallsetminus\overline{\Omega}$ tel qu'il existe S_2 et S_3 deux $(p,r-1)$ courants définis sur $\mathring{K}_2$ et $\mathring{K}_3$ et prolongeables à X tels que, pour tout indice $i=2,3$, $\overline{\partial}S_i = T$ sur $\mathring{K}_i$ et soit $\varepsilon>0$, alors il existe un courant prolongeable $\widetilde{S}_3$ défini sur $\mathring{K}_3$ tel que : $\overline{\partial}\widetilde{S}_3 = T$ sur $\mathring{K}_3$ et*

i) $\widetilde{S}_3{}_{|\mathring{K}_1} = S_2{}_{|\mathring{K}_1}$ *si* $2\leqslant r\leqslant q$;

ii) $|\langle\widetilde{S}_3-S_2,\varphi\rangle| < \varepsilon|\varphi|_{0,K_1}$, *pour toute* $\varphi\in\mathscr{D}^{n-p,n}(\mathring{K}_1\cup b\Omega)$ *si* $r=1$.

Démonstration du lemme.
i) Comme $\overline{\partial} S_2 = T$ sur $\overset{\circ}{K}_2$ et $\overline{\partial} S_3 = T$ sur $\overset{\circ}{K}_3$, $\overline{\partial}(S_2 - S_3) = 0$ sur $\overset{\circ}{K}_2$. Puisque sur $\overset{\circ}{K}_2$, on peut résoudre le $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles à support compact dans $\overset{\circ}{K}_2 \cup b\Omega$ de bidegré (p,r) avec $2 \leqslant n-q+1 \leqslant r \leqslant n-1$ et $\overline{\partial}\mathscr{D}^{n-p,n-1}(\overset{\circ}{K}_2 \cup b\Omega)$ est fermé dans $\mathscr{D}^{n-p,n}(\overset{\circ}{K}_2 \cup b\Omega)$, cf. Remarque 2, on a d'après le lemme 3.1 et pour K un compact tel que $\overset{\circ}{K}_1 \subset\subset K \subset\subset \overset{\circ}{K}_2$ un courant $S^{(K)}$ sur $\overset{\circ}{K}$ prolongeable à $\overset{\circ}{K}_2 \cup \overline{\Omega}$ tel que $S_2 - S_3 = \overline{\partial} S^{(K)}$ sur $\overset{\circ}{K}$.

Soient χ une fonction dans $\mathscr{C}^\infty(X)$ à support compact dans $\overset{\circ}{K} \cup \overline{\Omega}$ qui vaut 1 dans K_1 et $\widetilde{S}^{(K)}$ une extension de $S^{(K)}$ à X

$$S_3 + \overline{\partial}(\chi \widetilde{S}^{(K)}) = S_2 - \overline{\partial}((1-\chi)\widetilde{S}^{(K)}) \text{ sur } \overset{\circ}{K}_1 .$$

On pose

$$\widetilde{S}_3 = S_3 + \overline{\partial}(\chi \widetilde{S}^K) .$$

ii) Si $r = 1$, comme $\overline{\partial} S_2 = T$ sur $\overset{\circ}{K}_2$ et $\overline{\partial} S_3 = T$ sur $\overset{\circ}{K}_3$, $\overline{\partial}(S_2 - S_3) = 0$ sur $\overset{\circ}{K}_2$. Il existe θ une p-forme holomorphe sur $\overset{\circ}{K}_2$ telle que $S_3 - S_2 = \theta$ sur $\overset{\circ}{K}_2$.

$\overset{\circ}{K}_2 \cup \overline{\Omega}$ est une variété de Stein, $\overline{\Omega}$ est un compact de $\overset{\circ}{K}_2 \cup \overline{\Omega}$ et $\overset{\circ}{K}_2 = (\overset{\circ}{K}_2 \cup \overline{\Omega}) \setminus \overline{\Omega}$ est connexe. Par le phénomène de Hartogs, toute p-forme holomorphe sur $\overset{\circ}{K}_2$ se prolonge holomorphiquement à $\overset{\circ}{K}_2 \cup \overline{\Omega}$. Soit $\widetilde{\theta}$ un tel prolongement de θ à $\overset{\circ}{K}_2 \cup \overline{\Omega}$. Il existe alors, cf. [5], théorème 5.2.8, une suite $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de p-formes holomorphes dans $\overset{\circ}{K}_3 \cup \overline{\Omega}$ qui convergent uniformément vers $\widetilde{\theta}$ sur $K_1 \cup \overline{\Omega}$. Il existe j_0 tel que $\sup\limits_{K_1 \cup \overline{\Omega}} |\theta_{j_0} - \widetilde{\theta}| < \varepsilon$.

Posons $\widetilde{S}_3 = S_3 - \theta_{j_0}$, on a $|\langle \widetilde{S}_3 - S_2, \varphi\rangle| \leqslant \varepsilon \sup\limits_{K_1 \cup \overline{\Omega}} |\varphi|$, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}^{n-p,n}(\overset{\circ}{K}_1 \cup b\Omega)$. □

Démonstration du théorème. — Considérons une suite exhaustive $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de compacts de $X \setminus \Omega$. Supposons que $\overset{\circ}{K}_j \cup \overline{\Omega} = \{z \in X \mid \rho(z) < \eta_j\}$ où $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont des réels tels que $\eta_j < \eta_{j+1}$ et ρ est une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique de X. Pour $2 \leqslant r \leqslant q$, on associe à $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ grâce aux lemmes 3.1 et 3.2 une suite de courants $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définis dans K_j et prolongeables à X telle que $\overline{\partial} S_j = T$ sur $\overset{\circ}{K}_j$ et si j, $j+1$, $j+2$ sont trois indices consécutifs, $S_{j+2} = S_{j+1}$ sur $\overset{\circ}{K}_j$.

La suite $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers un courant S défini sur $X \setminus \overline{\Omega}$ et prolongeable. De plus, S est solution de l'équation $\overline{\partial} U = T$ dans $X \setminus \overline{\Omega}$.

Pour $r = 1$, soit $\varepsilon > 0$, il existe d'après les lemmes 3.1 et 3.2, une solution $\widetilde{S}_3$ de $\overline{\partial} S = T$ dans $\overset{\circ}{K}_3$, une solution S_2 de $\overline{\partial} S = T$ dans $\overset{\circ}{K}_2$ telles que $|\langle \widetilde{S}_3 - S_2, \varphi\rangle| \leqslant \varepsilon |\varphi|_{0,K_1}$, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^{n-p,n}(\overset{\circ}{K}_1 \cup b\Omega)$. On construit ainsi une suite $(\widetilde{S}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de courants définis sur $\overset{\circ}{K}_j$ et prolongeables à X tels que si j, $j+1$, $j+2$ sont trois indices consécutifs, $|\langle \widetilde{S}_{j+2} - \widetilde{S}_{j+1}, \varphi\rangle| < \frac{\varepsilon}{2^j} |\varphi|_{0,K_j}$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^{n-p,n}(\overset{\circ}{K}_j \cup b\Omega)$. La suite $(\widetilde{S}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la topologie faible. En effet, soit $\varphi \in \mathscr{D}^{n-p,n}(X \setminus \Omega)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset \overset{\circ}{K}_N \cup b\Omega$ et pour tout $m > N$ et $p > 0$

$$|\langle \widetilde{S}_{m+p} - \widetilde{S}_m, \varphi\rangle| \leqslant \Big(\frac{\varepsilon}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{m+p-1}}\Big) |\varphi|_{0,K_N} ,$$

par conséquent $\langle \widetilde{S}_{m+p} - \widetilde{S}_m, \varphi\rangle \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $(\widetilde{S}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers S. S est linéaire. En effet, soient φ, $\psi \in \mathscr{D}^{n-p,n}(X \smallsetminus \Omega)$. $\varphi+\psi \in \mathscr{D}^{n-p,n}(X \smallsetminus \Omega)$. Il existe K_N tel que supp φ, supp ψ, supp$(\varphi+\psi)$ soient inclus dans K_N.

$$\langle S, \varphi+\psi\rangle = \lim_{j>N}\langle S_j, \varphi+\psi\rangle = \lim_{j>N}\langle S_j,\varphi\rangle + \lim_{j>N}\langle S_j,\psi\rangle = \langle S,\varphi\rangle + \langle S,\psi\rangle\ .$$

Soit $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}^{n-p,n}(X \smallsetminus \Omega)$ avec $\varphi_\nu \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathscr{D}^{n-p,n}(X \smallsetminus \Omega)$. Il existe un compact K_N tel que pour tout ν, supp $\varphi_\nu \subset K_N$. $|\langle S,\varphi_\nu\rangle| = |\lim_{j>N}\langle S_j,\varphi_\nu\rangle|$ et

$$|\langle S_j,\varphi_\nu\rangle| \leqslant \varepsilon \sum_{k=N}^{j-1} \frac{1}{2^k}|\varphi_\nu|_{0,K_N} + |\langle S_{N+1},\varphi_\nu\rangle|\ .$$

S_{N+1} est un courant donc $\langle S_{N+1},\varphi_\nu\rangle \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par hypothèse $\varphi_\nu \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $|\varphi_\nu|_{0,K_N} \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $\langle S_j,\varphi_\nu\rangle \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. S est alors continu et est un courant prolongeable solution de l'équation $\overline{\partial}U = T$ dans $X \smallsetminus \overline{\Omega}$. □

4. Invariance de la cohomologie pour les extensions q-concaves et q-convexes

Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X. On note $H^{p,r}_\infty(D)$ respectivement $H^{p,r}_{\mathrm{cour}}(D)$ le $(p,r)^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans D respectivement des courants dans D.

Si $\check{Z}^{p,r}(D)$ désigne l'espace des courants de bidegré (p,r) sur D prolongeables, $\overline{\partial}$-fermés et $\check{E}^{p,r}(D) = \overline{\partial}\check{\mathscr{D}}'^{p,r-1}_D(X)$, alors on note

$$\check{H}^{p,r}(D) = \frac{\check{Z}^{p,r}(D)}{\check{E}^{p,r}(D)}\ ,$$

le $(p,r)^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de Dolbeault des courants prolongeables définis sur D.

Nous étudions dans ce paragraphe l'injectivité et la surjectivité de l'application induite par restriction :

$$\check{\mathscr{I}} : \check{H}^{0,r}(D) \longrightarrow H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(D)\ .$$

Définition 4.1. — Un domaine $D \subset X$ est dit à bord strictement q-convexe, respectivement q-concave, si :

i) bD rencontre toutes les composantes connexes de X.

ii) Il existe un voisinage U de bD, une fonction $\rho : U \to \mathbb{R}$, $(q+1)$-convexe, respectivement $(q+1)$-concave, tels que

$$D \cap U = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}\ .$$

X est dit extension q-convexe généralisée, respectivement q-concave généralisée, de D si :

1) D rencontre toutes les composantes connexes de X.

2) Il existe une application $\rho : [0,+\infty[\times U \to \mathbb{R}$ où U est un voisinage de $X \smallsetminus D$ telle que :

a) Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\rho(t,\cdot)$ est $(q+1)$-convexe, respectivement $(q+1)$-concave.

b) Pour tout $z \in U$, $\rho(\cdot,z)$ est une fonction décroissante.

c) L'application $t \to \rho(t,\cdot)$ est continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R})$.

d) $D \cap U = \{z \in U \mid \rho(0,z) < 0\}$ et pour tout $t > 0$, $\{z \in U \mid \rho(t,z) < 0\} \cap \complement\overline{D}$ est relativement compact dans X.

Soit G un domaine de X. Supposons que G est une extension q-concave généralisée de D, $1 \leqslant q \leqslant n-1$. On a d'après [6] les résultats suivants : l'application induite par restriction

$\mathscr{S} : H^{0,r}_\infty(G) \to H^{0,r}_\infty(D)$ est un isomorphisme pour $0 \leqslant r \leqslant q-1$, (théorème 1.1.3).

$\mathscr{S} : H^{0,q}_\infty(G) \to H^{0,q}_\infty(D)$ est injective, (théorème 1.1.4).

De plus, pour tout domaine Ω de X, l'application naturelle de $H^{0,r}_\infty(\Omega) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(\Omega)$, $0 \leqslant r \leqslant n$, est un isomorphisme appelé isomorphisme de Dolbeault. On en déduit l'équivalent pour les courants de l'invariance de la cohomologie pour les extensions q-concaves suivant : l'application induite par restriction

$\mathscr{S}' : H^{0,r}_{\text{cour}}(G) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$ est un isomorphisme pour $0 \leqslant r \leqslant q-1$,

$\mathscr{S}' : H^{0,q}_{\text{cour}}(G) \to H^{0,q}_{\text{cour}}(D)$, est injective.

Dans le cas convexe, on a l'analogue suivant du lemme 1.1.2 de [6].

LEMME 4.2. — *Soit* $\rho : [0, +\infty[\times X \to \mathbb{R}$ *une application vérifiant les propriétés suivantes :*

a) Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\rho(t,\cdot)$ *est* $(q+1)$*-convexe.*

b) Pour tout $z \in X$, $\rho(\cdot,z)$ *est une fonction décroissante.*

c) L'application $t \to \rho(t,\cdot)$ *est continue de* $[0, +\infty[$ *dans* $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$.

d) ρ *n'a pas de point critique dégénéré.*

Posons $D_\alpha = \{z \in X \mid \rho(\alpha,z) < 0\}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et on suppose qu'il existe* α_0 *tel que* $\alpha < \alpha_0$, $\alpha' < \alpha_0$, $\alpha' < \alpha$ *et* $D_\alpha \setminus \overline{D}_{\alpha'}$, *est relativement compact dans* X. *Il existe alors un réel* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout* α,β *vérifiant* $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \varepsilon$, *il existe un nombre fini de domaines* $(A_i)_{i=0}^N$ *tels que :* $D_\alpha = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_N = D_\beta$ *et pour tout* j, $1 \leqslant j \leqslant N$, A_j *se déduit de* A_{j-1} *à l'aide d'un élément d'extension* q*-convexe de* X.

Démonstration. — Elle est identique à celle de [6], on définit A_k par

$$A_k = \{z \in X \mid \rho(\alpha,z) - (\rho(\beta,z) - \rho(\alpha,z)) \sum_{j=1}^{k} \chi_j < 0\}$$

où χ_j est comme dans la preuve du lemme 12.3 de [3]. □

En utilisant le lemme 4.2, le lemme 12.4 de [3] et en procédant comme dans le paragraphe 12 de [3], on a

Théorème 3. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n, q un entier, $0 \leqslant q \leqslant n-1$ et D un domaine de X. On suppose que X est une extension q-convexe généralisée de D. Alors l'application induite par restriction :*

$$\mathscr{S} : H^{0,r}_{\infty}(X) \longrightarrow H^{0,r}_{\infty}(D) \text{ est un isomorphisme si } r > n-q$$

et

$$\mathscr{S} : H^{0,n-q}_{\infty}(X) \longrightarrow H^{0,n-q}_{\infty}(D), \text{ est surjective.}$$

Si D est relativement compact, alors $\mathscr{S} : H^{0,n-q}_{\infty}(X) \to H^{0,n-q}_{\infty}(D)$, est en plus injective.

Dans le cas compact le théorème 3 correspond au théorème 12.14 de [3].

Théorème 4. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n, D un domaine à bord bD $\mathscr{C}^\infty$ de X. Supposons que :*

a) bD est strictement q-concave, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, alors l'application induite par restriction :

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \longrightarrow H^{0,r}_{\text{cour}}(D) \text{ est un isomorphisme pour } 0 \leqslant r \leqslant q-1$$

et

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,q}(D) \longrightarrow H^{0,q}_{\text{cour}}(D),\ 1 \leqslant q \leqslant n-1, \text{ est injective.}$$

b) bD est strictement q-convexe, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, l'application induite par restriction

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \longrightarrow H^{0,r}_{\text{cour}}(D) \text{ est un isomorphisme si } r > n-q$$

et

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,n-q}(D) \longrightarrow H^{0,n-q}_{\text{cour}}(D) \text{ est surjective.}$$

Si de plus D est relativement compact, on a : $\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,n-q}(D) \longrightarrow H^{0,n-q}_{\text{cour}}(D)$ qui est en plus injective.

Démonstration.
a) Soient ρ une fonction définissante de D et$(K_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de X. Considérons une fonction $\chi_1 \in \mathscr{D}(X)$ à support dans $\overset{\circ}{K}_2$ qui vaut 1 dans K_1. Il existe $t_1 > 0$ tel que $\rho_1 = \rho - t_1\chi_1$ soit $(q+1)$-concave dans un voisinage de $\{\rho_1 = 0\}$.

Posons $D_1 = D \cup \{\rho_1 < 0\}$. D_1 est un domaine de X à bord $\mathscr{C}^\infty$ strictement q-concave. $D_1 \setminus D = \{0 \leqslant \rho < t_1\chi_1\}$ est relativement compact et D_1 est une extension q-concave généralisée de D.

Soit $\chi_2 \in \mathscr{D}(X)$ à support dans $\overset{\circ}{K}_3$ qui vaut 1 dans K_2. Il existe $t_2 > 0$ tel que $\rho_2 = \rho_1 - t_2\chi_2$ soit $(q+1)$-concave dans un voisinage de $\{\rho_2 = 0\}$. $D_2 = D_1 \cup \{\rho_2 < 0\}$ est un domaine à bord $\mathscr{C}^\infty$ strictement q-concave, $D_2 \setminus D_1 = \{0 \leqslant \rho_1 < t_2\chi_2\}$ est relativement compact et D_2 est une extension q-concave généralisée de D_1. On construit ainsi une suite de domaines $(D_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ avec $D_0 = D$, $D_\nu \subset D_{\nu+1}$, $D_{\nu+1} \setminus D_\nu$ est relativement compact et $D_{\nu+1}$ est une extension q-concave généralisée de $D_\nu \cdot \widetilde{D} = \bigcup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} D_\nu \supset \overline{D}$ et est une extension q-concave généralisée de D.

• **Surjectivité de** $\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$, $0 \leqslant r \leqslant q-1$.

Nous voulons montrer que pour tout $[T] \in H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$, il existe $[\check{T}] \in \check{H}^{0,r}(D)$ tel que $\check{\mathscr{S}}[\check{T}] = [T]$. Si $1 \leqslant r \leqslant q-1$, cela revient à montrer qu'il existe $\check{T}$ un courant $\overline{\partial}$-fermé sur D, prolongeable et θ un $(0,r-1)$ courant dans D tels que :

$$\check{T} = T + \overline{\partial}\theta \ \text{ dans } \ D\,.$$

De la surjectivité de l'application $\mathscr{S}' : H^{0,r}_{\text{cour}}(\widetilde{D}) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$, $0 \leqslant r \leqslant q-1$, il existe un courant T' défini dans $\widetilde{D}$, $\overline{\partial}$-fermé et θ' un $(0,r-1)$ courant dans D tels que :

$$T' - T = \overline{\partial}\theta' \ \text{ dans } \ D \ \text{ pour } \ 1 \leqslant r \leqslant q-1\,.$$

Il suffit de choisir $\check{T} = T'_{|D}$ d'où la surjectivité de $\check{\mathscr{S}}$ pour $1 \leqslant r \leqslant q-1$. De même

$$\begin{array}{ccccl} \mathscr{S}' : & H^{0,0}_{\text{cour}}(\widetilde{D}) & \longrightarrow & H^{0,0}_{\text{cour}}(D) & \\ & \| & & \| & \quad \text{est surjective,} \\ & \mathscr{O}(\widetilde{D}) & & \mathscr{O}(D) & \end{array}$$

où $\mathscr{O}(D)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans D. Si $T \in \mathscr{O}(D)$, T est la restriction d'une fonction holomorphe T' définie dans $\widetilde{D}$. On pose là aussi $\check{T} = T'_{|D}$.

Ainsi $\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$ est surjective pour $0 \leqslant r \leqslant q-1$.

• **Injectivité de** $\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$, $0 \leqslant r \leqslant q$.

Pour $r = 0$, $\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,0}(D) \to \mathscr{O}(D)$.

Soit $[\check{T}] \in \check{H}^{0,0}(D)$ tel que $\check{\mathscr{S}}[\check{T}] = 0$ dans $D \cdot \check{T}_{|D} = 0$ et est un courant prolongeable. $\check{T}$ appartient au dual topologique de $\mathscr{D}^{n,n}(\overline{D})$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}^{n,n}(\overline{D})$, il existe une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}^{n,n}(D)$ qui converge vers φ dans $\mathscr{D}^{n,n}(\overline{D})$.

$$\langle \check{T},\varphi\rangle = \lim_{j\to 0}\langle \check{T},\varphi_j\rangle = 0 \ \text{ car } \ \check{T}_{|D} = 0\,.$$

Ainsi $\langle \check{T},\varphi\rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^{n,n}(\overline{D})$, d'où $\check{T} = 0$. Donc $\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,0}(D) \to H^{0,0}_{\text{cour}}(D)$ est injective.

Pour montrer l'injectivité de $\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$ pour $1 \leqslant r \leqslant q$, nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 4.3. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine à bord $\mathscr{C}^\infty$ strictement q-concave. Pour tout $\xi \in bD$, il existe un voisinage θ de ξ, tel que pour tout domaine D_1 à bord $\mathscr{C}^\infty$ suffisamment proche de D au sens de la topologie $\mathscr{C}^2$ et pour tout $\check{T} \in \check{\mathscr{D}}'^{0,r}_{D_1}(X) \cap \ker\overline{\partial}$, $\overline{\partial}$-exact dans D_1, avec $1 \leqslant r \leqslant q$, il existe un courant $S \in \check{\mathscr{D}}'^{0,r-1}(D_1 \cap \theta)$ tel que $\overline{\partial}S = \check{T}$ dans $D_1 \cap \theta$.*

Avant de faire la preuve du lemme donnons d'abord une définition.

Définition 4.4. — Un domaine local q-concave dans $\mathbb{C}^n$ $(1 \leqslant q \leqslant n-1)$, cf. [8], est un triplet $[U,D,\rho]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

i) $U \subset\subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert convexe.

ii) ρ est une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie dans un voisinage de U qui est strictement convexe par rapport aux $(q+1)$ premières coordonnées $z_1 \cdots z_{q+1}$ de $z \in U$.

iii) $\{\rho < 0\} \neq \emptyset$ et $\{\rho < 1\} \subset\subset U$.

iv) $D = \{0 < \rho < 1\}$ et $d\rho(z) \neq 0$ pour tout $z \in bD$.

v) ρ est strictement convexe sur un voisinage de $\{\rho \geqslant 1\}$.

Démonstration du lemme. — Puisque D est à bord strictement q-concave, pour tout $1 \leqslant r \leqslant q$, D est aussi à bord strictement r-concave. Il suffit de faire la preuve pour q.

D'après le lemme 2.1.4 de [8], il existe un système de coordonnées (W,h) autour de ξ, un domaine local q-concave $[U,\widetilde{D},\rho]$ tels que :

a) $h(W) = U$, $\{\rho < 0\} \subset h(W \cap \{\varphi < 0\})$ où φ est une fonction définissante de $X \setminus \overline{D}_1$.

b) Il existe un voisinage $V \subset U$ de $h(\xi)$ pour lequel on a $V \cap \{\rho < 0\} = h(W \cap \{\varphi < 0\})$.

Posons $\tilde{\rho} = \rho \circ h$, $\Delta = \{0 < \tilde{\rho} < 1\} = h^{-1}(\widetilde{D})$ vérifie les hypothèses du théorème 2. Posons $S_0 = \{\tilde{\rho} = 0\}$ le bord intérieur de Δ et $S_1 = \{\tilde{\rho} = 1\}$ le bord extérieur de Δ. Soient $\Omega = \{\tilde{\rho} < 1\}$ et $V_1 \subset\subset V_2 \subset\subset V_3 \subset\subset V_4 \subset\subset V_5$ des voisinages dans Ω de ξ tels que $V_5 \cap \complement D_1 \subset\subset \{\tilde{\rho} < 0\}$. Considérons une fonction χ de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans Ω, à valeurs dans $[0,1]$ qui vaut 1 dans $V_3 \setminus \overline{V}_2$ et 0 dans $V_5 \setminus (V_4 \setminus \overline{V}_1)$. Pour ε suffisamment petit, $\tilde{\rho} - \varepsilon\chi$ est $(q+1)$-convexe dans un voisinage de S_0 et $\tilde{\rho} - \varepsilon\chi = \rho$ dans un voisinage de S_1.

$\Delta' = \{0 < \tilde{\rho} - \varepsilon\chi < 1\} \subset \Delta$ vérifie encore les hypothèses du théorème 2.

Puisque $\check{T} \in \check{\mathscr{D}}'^{0,q}_{D_1}(X) \cap \ker\overline{\partial}$ et $\check{T}$ est $\overline{\partial}$-exacte dans D_1, il existe un courant γ défini dans D_1 tel que $\check{T} = \overline{\partial}\gamma$ dans D_1. Soient $D_2 \subset D_1$ un domaine de X et χ_1 une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support dans D_1 qui vaut 1 dans D_2. Posons $\widetilde{T} = \check{T} - \overline{\partial}(\chi_1\gamma)$. $\widetilde{T}$ est un $(0,q)$ courant défini sur D_1 prolongeable, $\overline{\partial}$-fermé et à support dans $D_1 \setminus D_2$. Choisissons D_2 suffisamment proche de D_1 de sorte que $(D_1 \setminus D_2) \cap \Delta'$ ait deux composantes connexes.

$$T' = \begin{cases} \widetilde{T} & \text{sur } \Delta' \cap D_1 \cap V_3 \\ 0 & \text{sur } \Delta' \setminus (D_1 \cap V_2) \end{cases}$$

est un $(0,q)$ courant défini sur Δ', nul au voisinage de S_1, prolongeable à Ω et $\overline{\partial}$-fermé.

Si $q \leqslant n-2$, d'après le théorème 2, il existe un courant w défini dans Δ' prolongeable à Ω tel que $T' = \overline{\partial}w$ dans Δ'.

Si $q = n-1$, posons $S'_0 = \{\tilde{\rho} - \varepsilon\chi = 0\}$. D'après le théorème2, *ii)*,

$$\overline{\partial}\check{\mathscr{D}}'^{0,n-2}_{\Delta'}(\Omega) = \{T \in \check{\mathscr{D}}'^{0,n-1}_{\Delta'}(\Omega) \mid \langle T,\varphi\rangle = 0,\ \forall\varphi \in \mathscr{D}^{n,1}(\Delta' \cup S'_0) \cap \ker\overline{\partial}\}.$$

Donc pour montrer que $T' \in \overline{\partial}\check{\mathscr{D}}'^{0,n-2}_{\Delta'}(\Omega)$, il suffit de montrer que $\langle T',\varphi\rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^{n,1}(\Delta' \cup S'_0) \cap \ker\overline{\partial}$.

Considérons T_0 une extension de T' à Ω. Puisque T' est nul au voisinage de S_1, T_0 est à support compact dans Ω. Il appartient au dual des formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω. Puisque T' est $\overline{\partial}$-fermé dans Δ', on a $\overline{\partial}T_0$ qui est à support dans $\Omega \setminus \Delta'$. $\overline{\partial}T_0$ est d'ordre fini ℓ.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}^{n,1}(\Delta' \cup S_0') \cap \ker \overline{\partial}$, $\varphi \in \mathscr{D}^{n,1}(\Omega) \cap \ker \overline{\partial}$ et Ω est complètement strictement $(n-1)$-convexe. Donc il existe $\alpha \in \mathscr{D}^{n,0}(\Omega)$ telle que $\varphi = \overline{\partial}\alpha$ où $\alpha_{|\Omega \smallsetminus \Delta'}$ est une n-forme $\mathscr{C}^\infty$ dans $\Omega \smallsetminus \Delta'$, holomorphe dans $\Omega \smallsetminus \overline{\Delta}'$. Puisque Ω est une extension q-convexe de $\Omega \smallsetminus \overline{\Delta}'$, il existe une suite $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de n-formes holomorphes définies dans Ω qui converge pour la topologie C^ℓ vers α dans $\Omega \smallsetminus \Delta'$.

$$|\langle T', \varphi\rangle| = |\langle T_0, \varphi\rangle| = |\langle \overline{\partial} T_0, \alpha - \alpha_j\rangle| \leqslant C|\alpha - \alpha_j|_{\ell, \Omega\smallsetminus\Delta'}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. D'où $\langle T', \varphi\rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^{n,1}(\Delta' \cup S_0') \cap \ker\overline{\partial}$. Il existe donc $w \in \check{\mathscr{D}}'^{0,n-2}_{\Delta'}(\Omega)$ tel que $\overline{\partial} w = T'$ dans Δ'. On pose $\theta = V_1$. Pour tout q, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, $\check{T} = \overline{\partial}(\chi\gamma + w)$ dans $D_1 \cap \theta$ et $\chi\gamma + w$ est un courant prolongeable défini sur $D_1 \cap \theta$. □

LEMME 4.5. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine à bord bD $\mathscr{C}^\infty$ strictement q-concave $(1 \leqslant q \leqslant n-1)$. Soient $\check{T}$ un $(0,r)$ courant, $1 \leqslant r \leqslant q$, $\overline{\partial}$-exact dans D, prolongeable et S un compact de bD. Il existe un courant v_1 défini sur D, prolongeable, un courant T_1 défini dans $D \cup W_S$, $\overline{\partial}$-fermé, où W_S est un voisinage de S dans X tels que :*

$$\check{T} = \overline{\partial} v_1 + T_1 \ \ dans\ \ D\,.$$

Démonstration du lemme. — Soit Γ un fermé de S. On dit que Γ satisfait à la condition Ex, s'il existe $U \in \check{\mathscr{D}}'^{0,r-1}_D(X)$ tel que $\check{T} - \overline{\partial} U$ admet une extension $\overline{\partial}$-fermée à $D \cup W_\Gamma$, où W_Γ est un voisinage de Γ dans X.

Notons que d'après le lemme 4.3, si $\xi \in bD$, il existe $\Gamma \subset bD$ tel que Γ satisfait à la condition Ex. En effet, soit $\Gamma \subset\subset \theta \cap bD$, où θ est comme dans le lemme 4.3. Si χ_1 est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur V_2 à support compact qui vaut 1 dans un voisinage de $\overline{\theta}$, $U = \chi\gamma + \chi_1 w$ est un courant défini dans D qui est prolongeable. $\check{T} - \overline{\partial} U$ admet une extension $\overline{\partial}$-fermée à $D \cup \theta$.

Pour faire la démonstration du lemme, il suffit de montrer que S satisfait à la condition Ex. Puisque S est compact, il suffit de montrer que pour tout $\xi \in bD$, il existe Λ un voisinage de ξ dans X tel que si $\Gamma \subset S$ satisfait à la condition Ex, alors $\Gamma \cup (\overline{\Lambda} \cap S)$ satisfait aussi à la condition Ex.

Fixons $\xi \in S$ et choisissons deux voisinages Λ et θ de ξ, $\Lambda \subset\subset \theta$, où θ est comme dans le lemme 4.3. Soit $\Gamma \subset S$ qui vérifie la condition Ex. Il existe v un courant prolongeable défini sur D, un voisinage W_Γ de Γ dans X tels que $\check{T} - \overline{\partial} v$ admet une extension $\widetilde{T}$, $\overline{\partial}$-fermée dans $D \cup W_\Gamma$. On choisit D_1 suffisamment proche de D au sens du lemme 4.3 tel que $D \subset D_1$, $\Gamma \subset\subset D_1 \subset\subset D \cup W_\Gamma$. D'après le lemme 4.3, il existe w un courant prolongeable défini sur $D_1 \cap \theta$ tel que $\widetilde{T} = \overline{\partial} w$ dans $D_1 \cap \theta$.

Soit $\chi \in \mathscr{D}(X)$ à support dans θ et $\chi \equiv 1$ dans un voisinage $U_{\overline{\Lambda}}$ de $\overline{\Lambda}$. Posons $U = v + \chi w$ sur D. U est un courant prolongeable, $\check{T} - \overline{\partial} U$ est nul dans un voisinage $U_{\overline{\Lambda}}$ de $\overline{\Lambda}$. $\check{T} - \overline{\partial} U = (\check{T} - \overline{\partial} v) - \overline{\partial}(\chi w)$ admet un prolongement $\overline{\partial}$-fermé dans un voisinage $D_1 \cup U_{\overline{\Lambda}}$ de $\Gamma \cup \overline{\Lambda}$.

Comme conséquence du lemme 4.5, nous allons montrer que si sous les hypothèses du lemme 4.5, il existe un domaine D_1 de X à bord $\mathscr{C}^\infty$ strictement q-concave tel que : $D \cup S \subset D_1 \subset D \cup W_S$ et D_1 est une extension q-concave généralisée de D, alors il existe un courant U_1 défini dans D_1 tel que $\check{T} = \overline{\partial} U_1$ dans D.

D'après le lemme 4.5, il existe un courant U défini sur D prolongeable tel que $\check{T} - \overline{\partial} U = \widetilde{T}$ dans D où $\widetilde{T}$ est un courant $\overline{\partial}$-fermé défini dans $D \cup W_S$. $\widetilde{T}_{|D_1} \in Z^{0,r}_{\text{cour}}(D_1)$ et puisque par hypothèses $\check{T} = \overline{\partial}\psi$ dans D, $\widetilde{T} = \overline{\partial}(\psi - U)$ dans D. Donc $\widetilde{T}$ représente la classe nulle dans $H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$. De l'injectivité de l'application induite par restriction $\mathscr{S}'$: $H^{0,r}_{\text{cour}}(D_1) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$, $0 \leqslant r \leqslant q$, on déduit que T représente la classe nulle dans $H^{0,r}_{\text{cour}}(D_1)$. Il existe $\widetilde{\psi}$ un courant dans D_1 tel que $\widetilde{T} = \overline{\partial}\widetilde{\psi}$. Ainsi $\check{T} = \overline{\partial}(U + \widetilde{\psi}_{|D})$. Il suffit de poser $u_1 = \widetilde{u} + \widetilde{\psi}$, où $\widetilde{u}$ est une extension de U à D_1. □

Fin de la démonstration de la partie *a)* **du théorème**. Soit $[\check{T}] \in \check{H}^{0,r}(D)$ tel que $\check{\mathscr{S}}[\check{T}] = 0$ dans $H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$. Pour montrer l'injectivité de $\check{\mathscr{S}}$: $\check{H}^{0,r}(D) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$, $1 \leqslant r \leqslant q$, on va construire une suite $(D_j,T_j)_{j\in\mathbb{N}}$, où D_j est un domaine de X tel que $D_{j+1} \supset D_j$, D_{j+1} est une extension q-concave généralisée de D_j, $D_{j+1} \smallsetminus D_j$ est relativement compact, $\widetilde{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j \supset \overline{D}$ et T_j est un courant défini sur D_j, prolongeable, $\overline{\partial}$-exact dans D_j tel que $T_{j+1} = T_j$ dans D_j.

Supposons que la suite $(D_j,T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ construite. $\widetilde{T} = \lim_j T_j$ est un courant défini dans $\widetilde{D}$, $\overline{\partial}$-fermé et $\widetilde{T} = \check{T}$ dans D. Puisque par hypothèses $\check{T}$ est $\overline{\partial}$-exact dans D, $\widetilde{T}$ représente la classe nulle dans $H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$. Par invariance de la cohomologie pour les extensions q-concaves généralisées, $\widetilde{T}$ représente la classe nulle dans $H^{0,r}_{\text{cour}}(\widetilde{D})$. Il existe donc un courant $\widetilde{\psi}$ défini dans $\widetilde{D}$ tel que $\widetilde{T} = \overline{\partial}\widetilde{\psi}$ dans $\widetilde{D}$. $\check{T} = \overline{\partial}(\widetilde{\psi}_{|D})$, d'où $[\check{T}] = 0$ dans $\check{H}^{0,r}(D)$ pour $0 \leqslant r \leqslant q$.

Construction de la suite $(D_j,T_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Considérons une suite exhaustive $(S_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de compacts de bD. Posons $D_0 = D$ et $T_0 = \check{T}$. Supposons (D_k,T_k) construit pour $k \leqslant j$, D_j est un domaine à bord $\mathscr{C}^\infty$ strictement q-concave. T_j est un courant défini sur D_j, prolongeable à travers bD_j et $\overline{\partial}$-exact dans D_j. Soit S'_{j+1} un compact de bD_j tel que :

$$bD_j \smallsetminus S'_{j+1} = bD \smallsetminus S_{j+1} .$$

D'après le lemme 4.5 appliqué à S'_{j+1}, D_j et T_j, il existe un courant v_{j+1} défini dans D_j prolongeable, un courant T'_j défini dans $D_j \cup W_{S'_{j+1}}$ (où $W_{S'_{j+1}}$ est un voisinage dans X de S'_{j+1}), $\overline{\partial}$-fermé tels que $T_j = \overline{\partial} v_{j+1} + T'_j$ dans D_j. Considérons D_{j+1} et D'_{j+1} deux domaines de X, obtenus par une déformation C^2 de la fonction définissante de D_j. Supposons que D_{j+1} et D'_{j+1} vérifient : $D_j \cup S'_{j+1} \subset D_{j+1} \subset D'_{j+1} \subset D_j \cup W_{S'_{j+1}}$, D'_{j+1} est une extension q-concave généralisée de D_{j+1}, D_{j+1} est une extension q-concave généralisée de D_j, $D'_{j+1} \smallsetminus D_{j+1}$ et $D_{j+1} \smallsetminus D_j$ sont relativement compacts.

$T'_{j|D'_{j+1}} \in Z^{0,r}_{\text{cour}}(D'_{j+1})$. Puisque $T_j = \overline{\partial}\psi_j$ dans D_j, $T'_j = \overline{\partial}(\psi_j - v_{j+1})$ dans D_j. T'_j représente la classe nulle dans $H^{0,r}_{\text{cour}}(D_j)$ d'où T'_j représente la classe nulle dans $H^{0,r}_{\text{cour}}(D'_{j+1})$ [6], théorème (1.1.3) et isomorphisme de Dolbeault. Il existe un courant v'_j dans D'_{j+1} tel que $T'_j = \overline{\partial} v'_j$ dans D'_{j+1}. On pose $T_{j+1} = \overline{\partial}((v'_j + v'_{j+1})_{|D_{j+1}})$ où v'_{j+1} est une extension de v_{j+1} à D'_{j+1} ce qui donne (D_{j+1},T_{j+1}) avec les propriétés requises.

Preuve de b) C'est une répétition de la démarche de la démonstration de la partie *a)* ; du théorème 3 et de l'isomorphisme de Dolbeault, on a une version courant du théorème 3 d'où l'on déduit la surjectivité de $\check{\mathscr{S}}$: $\check{H}^{0,r}(D) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$, $n - q \leqslant r \leqslant n$. Pour l'injectivité de $\check{\mathscr{S}}$: $\check{H}^{0,r}(D) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(D)$, $r > n - q$ respectivement $r \geqslant n - q$ si D est relativement compact, on remplace le lemme 4.3 par le lemme suivant :

LEMME 4.6. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X à bord $\mathscr{C}^\infty$ strictement q-convexe. Soit $\check{T}$ un courant sur D, prolongeable et $\overline{\partial}$-exact dans D. Pour tout $\xi \in bD$, il existe un voisinage θ de ξ dans X, un courant $\check{U}$ sur $\theta \cap D$, prolongeable tel que $\check{T} = \overline{\partial}\check{U}$ dans $\theta \cap D$.*

Démonstration du lemme. — Puisque bD est strictement q-convexe, D est localement biholomorphe à un domaine linéairement q-convexe. Pour tout $\xi \in bD$, on choisit un ouvert de coordonnées (U,h) autour de ξ, où U est biholomorphe à un convexe de $\mathbb{C}^n$. $U \cap D$ est un domaine complètement strictement q-convexe. Par les fonctions $\max_\beta$ de [3], on peut construire un domaine $D_1 \subset U \cap D$, complètement strictement q-convexe à bord $\mathscr{C}^\infty$ tel que $\xi \in bD_1$. $\check{T}_{|D_1}$ est un courant prolongeable, $\overline{\partial}$-fermé. D'après le théorème 4.1 de [13], il existe $\check{U}$ un courant prolongeable sur D_1 solution de $\overline{\partial}S = \check{T}$ dans D_1. Il suffit de choisir θ tel que $\overline{\theta \cap D} \subset \overline{D}_1$.
□

□

Dans le cas des fonctions on a la relation suivante entre $H^{0,r}_\infty(\overline{D})$ et $H^{0,r}_\infty(D)$:

THÉORÈME 5. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X à bord $bD\mathscr{C}^\infty$. Supposons que :*

a) bD est strictement q-concave, alors l'application induite par restriction :

$$\mathscr{S} : H^{0,r}_\infty(\overline{D}) \longrightarrow H^{0,r}_\infty(D) \text{ est un isomorphisme si } 0 \leqslant r \leqslant q-1$$

et

$$\mathscr{S} : H^{0,q}_\infty(\overline{D}) \longrightarrow H^{0,q}_\infty(D) \text{ est injective.}$$

b) Si bD est strictement q-convexe, alors l'application induite par restriction

$$\mathscr{S} : H^{0,r}_\infty(\overline{D}) \longrightarrow H^{0,r}_\infty(D) \text{ est un isomorphisme si } n-q < r \leqslant n$$

et

$$\mathscr{S} : H^{0,n-q}_\infty(\overline{D}) \longrightarrow H^{0,n-q}_\infty(D) \text{ est surjective.}$$

Démonstration. — C'est une répétition de la preuve du théorème 4. Pour l'injectivité de $\mathscr{S} : H^{0,r}_\infty(\overline{D}) \to H^{0,r}_\infty(D)$, $1 \leqslant r \leqslant q$ dans *a)* on utilise le lemme 3.2 de [8]. Pour l'injectivité de $\mathscr{S} : H^{0,r}_\infty(\overline{D}) \to H^{0,r}_\infty(D)$, $n-q < r \leqslant n$ dans *b)*, on remplace dans le lemme 4.6 le courant $\check{T}$ par une forme différentielle $f \in Z^{0,r}_\infty(\overline{D})$, $\overline{\partial}$-exacte dans D et le théorème 4.1 de [13] par le théorème 2 de [10]. □

COROLLAIRE 4.7. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X à bord $\mathscr{C}^\infty$. Supposons que :*

a) bD est strictement q-concave. Alors l'application naturelle de :

$$H^{0,r}_\infty(\overline{D}) \longrightarrow \check{H}^{0,r}(D) \text{ est un isomorphisme si } 0 \leqslant r \leqslant q-1$$

et

$$H^{0,q}_\infty(\overline{D}) \longrightarrow \check{H}^{0,q}(D) \text{ est injective.}$$

b) bD est strictement q-convexe. Alors l'application naturelle de :

$$H^{0,r}_{\infty}(\overline{D}) \longrightarrow \check{H}^{0,r}(D) \ \textit{ est un isomorphisme si } r > n-q$$

et

$$H^{0,n-q}_{\infty}(\overline{D}) \longrightarrow \check{H}^{0,n-q}(D) \quad \textit{est surjective.}$$

Démonstration.
a) C'est une conséquence de l'isomorphisme de Dolbeault et des théorèmes 4, *a)*, et 5, *a)*. Pour $r = q$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^{0,q}(D) & \hookrightarrow & H^{0,q}_{\mathrm{cour}}(D) \\ \uparrow & & \uparrow\wr \\ H^{0,q}_{\infty}(\overline{D}) & \hookrightarrow & H^{0,q}_{\infty}(D)\ . \end{array}$$

D'où $H^{0,q}_{\infty}(\overline{D}) \to \check{H}^{0,q}(D)$ est injective.

b) C'est une conséquence de l'isomorphisme de Dolbeault et des théorèmes 4, *b)* et 5, *b)*. Pour $r = n-q$, $\widetilde{D}$ un voisinage de $\overline{D}$ qui est en plus une extension q-convexe généralisée de D, on a d'après le lemme 3 de [4], la surjectivité de l'application restriction de : $H^{0,n-q}_{\infty}(\widetilde{D}) \to H^{0,n-q}_{\infty}(\overline{D})$. Du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^{0,n-q}_{\infty}(\widetilde{D}) & \twoheadrightarrow & H^{0,n-q}_{\infty}(\overline{D}) \\ \downarrow\wr & & \downarrow \\ H^{0,n-q}_{\mathrm{cour}}(\widetilde{D}) & \twoheadrightarrow & \check{H}^{0,n-q}(D)\ , \end{array}$$

on a la surjectivité de l'application naturelle de : $H^{0,n-q}_{\infty}(\overline{D}) \longrightarrow \check{H}^{0,n-q}(D)$. □

5. Application à l'étude de l'isomorphisme de Dolbeault dans les hypersurfaces réelles

Nous allons utiliser dans cette partie les relations entre la $\overline{\partial}$-cohomologie et la $\overline{\partial}_b$-cohomologie établies par [1], [2] pour les formes différentielles et [12], [2] pour les courants afin d'étudier l'isomorphisme de Dolbeault dans les hypersurfaces réelles. On sait que l'application naturelle de $H^{0,r}_{\infty}(X) \to H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(X)$ est un isomorphisme appelé isomorphisme de Dolbeault. Si S est une hypersurface réelle, nous allons nous intéresser à l'application naturelle de $H^{0,r}_{\infty}(S) \to H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(S)$, où $H^{0,r}_{\infty}(S)$ respectivement $H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(S)$, est le $(0,r)^{\text{ème}}$ groupe de $\overline{\partial}_b$-cohomologie des formes différentielles $\mathscr{C}^{\infty}$ définies sur S respectivement des courants définis sur S.

THÉORÈME 6. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et S une hypersurface réelle de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ de X. Si la forme de Lévi de S admet en chaque point de S ;*

i) q valeurs propres de même signe, $q \geqslant \frac{n+1}{2}$, l'application naturelle de

$$H^{0,r}_{\infty}(S) \longrightarrow H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(S) \ \textit{ est surjective si } n-q \leqslant r \leqslant q-1$$

et

$$H_\infty^{0,r}(S) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S) \quad \textit{est injective si } n-q+1 \leqslant r \leqslant q.$$

ii) *q paires de valeurs propres de signe contraire,* $1 \leqslant q \leqslant \frac{n-1}{2}$*, l'application naturelle de :*

$$H_\infty^{0,r}(S) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S) \ \textit{ est un isomorphisme si } 0 \leqslant r \leqslant q-1$$
$$\textit{et } n-q+1 \leqslant r \leqslant n-1,$$

et

$$H_\infty^{0,q}(S) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(S) \ \textit{ est injective}$$
$$H_\infty^{0,n-q}(S) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(S) \ \textit{ est surjective.}$$

Remarque. — Le cas *ii)* correspond au cas de la codimension 1 dans [9].

Démonstration.
i) On peut supposer sans perte de généralité que X^- se situe du côté concave de S. D'après le corollaire 4.7, *a)*, l'application naturelle de :

et

$$H_\infty^{0,r}(\overline{X^-}) \longrightarrow \check{H}^{0,r}(X^-) \ \text{ est un isomorphisme si } 0 \leqslant r \leqslant q-1$$
$$H_\infty^{0,q}(\overline{X^-})) \longrightarrow \check{H}^{0,q}(X^-) \ \text{ est injective.}$$

D'après le corollaire 4.7, *b)*, l'application naturelle de :

et

$$H_\infty^{0,r}(\overline{X^+}) \longrightarrow \check{H}^{0,r}(X^+) \ \text{ est un isomorphisme si } r > n-q$$
$$H_\infty^{0,n-q}(\overline{X^+})) \longrightarrow \check{H}^{0,n-q}(X^+) \ \text{ est surjective.}$$

On applique ces informations au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H_\infty^{0,r}(X) & \longrightarrow & H_\infty^{0,r}(\overline{X^+}) \oplus H_\infty^{0,r}(\overline{X^-}) & \longrightarrow & H_\infty^{0,r}(S) & \longrightarrow & H_\infty^{0,r+1}(S) & \longrightarrow \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle c_r} & & \Big\downarrow{\scriptstyle a_r} & & \Big\downarrow{\scriptstyle b_r} & & \Big\downarrow{\scriptstyle c_{r+1}} & \\
\longrightarrow & H_{\text{cour}}^{0,r}(X) & \longrightarrow & \check{H}^{0,r}(X^+) \oplus \check{H}^{0,r}(X^-) & \longrightarrow & H_{\text{cour}}^{0,r}(S) & \longrightarrow & H_{\text{cour}}^{0,r+1}(X) & \longrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\longrightarrow & H^{0,r+1}(\overline{X^+}) \oplus H_\infty^{0,r+1}(\overline{X^-}) & \longrightarrow \cdots \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle a_{r+1}} & \\
\longrightarrow & \check{H}^{0,r+1}(X^+) \oplus \check{H}^{0,r+1}(\overline{X^-}) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

où les flèches verticales sont des applications naturelles.

Pour $q-1 \geqslant r \geqslant n-q+1$, a_r, c_r, c_{r+1} sont des isomorphismes et a_{r+1} injective. D'après le lemme des quatre, b_r est un isomorphisme.

De même, pour $r = q$, a_q est injective, c_q et c_{q+1} sont des isomorphismes. Par le lemme des quatre, b_q est injective.

Pour $r = n-q$, c_{n-q}, c_{n-q+1}, a_{n-q+1} sont des isomorphismes et a_{n-q} est surjective. b_{n-q} est surjective par le lemme des quatre.

ii) Si la forme de Lévi de S admet q paires de valeurs propres de signe contraire, alors

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,r}(X^{\pm}) \longrightarrow H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(X^{\pm}) \quad \text{est un isomorphisme pour } 0 \leqslant r \leqslant q-1 \text{ et } n-q+1 \leqslant r \leqslant n\,,$$

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,q}(X^{\pm}) \longrightarrow H^{0,q}_{\mathrm{cour}}(X^{\pm}) \quad \text{est injective et}$$

$$\check{\mathscr{S}} : \check{H}^{0,n-q}(X^{\pm}) \longrightarrow H^{0,n-q}_{\mathrm{cour}}(X^{\pm}) \quad \text{est surjective.}$$

De même

$$\mathscr{S} : H^{0,r}_{\infty}(\overline{X}^{\pm}) \longrightarrow H^{0,r}_{\infty}(X^{\pm}) \quad \text{est un isomorphisme pour } 0 \leqslant r \leqslant q-1 \text{ et } n-q+1 \leqslant r \leqslant n\,,$$

$$\mathscr{S} : H^{0,q}_{\infty}(\overline{X}^{\pm}) \longrightarrow H^{0,q}_{\infty}(X^{\pm}) \quad \text{est injective et}$$

$$\mathscr{S} : H^{0,n-q}_{\infty}(\overline{X}^{\pm}) \longrightarrow H^{0,n-q}_{\infty}(X^{\pm}) \quad \text{est surjective.}$$

Donc l'application naturelle de :

$$H^{0,r}_{\infty}(\overline{X}^{+}) \oplus H^{0,r}_{\infty}(\overline{X}^{-}) \longrightarrow \check{H}^{0,r}(X^{+}) \oplus \check{H}^{0,r}(X^{-}) \quad \text{est un isomorphisme pour } 0 \leqslant r \leqslant q-1 \text{ et } n-q+1 \leqslant r \leqslant n\,,$$

$$H^{0,q}_{\infty}(\overline{X}^{+}) \oplus H^{0,q}_{\infty}(\overline{X}^{-}) \longrightarrow \check{H}^{0,q}(X^{+}) \oplus \check{H}^{0,q}(X^{-}) \quad \text{est injective et}$$

$$H^{0,n-q}_{\infty}(\overline{X}^{+}) \oplus H^{0,n-q}_{\infty}(\overline{X}^{-}) \longrightarrow \check{H}^{0,n-q}(X^{+}) \oplus \check{H}^{0,n-q}(X^{-}) \quad \text{est surjective.}$$

On conclut alors par l'utilisation du lemme des quatre comme dans *i)*. □

Corollaire 5.1. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et S une hypersurface réelle de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ de X. Supposons que pour tout $z \in S$, la forme de Lévi de S à ℓ valeurs propres d'un même signe et q paires de valeurs propres des signes opposés avec $q \leqslant \ell$. Alors,*

i) Si $\ell \leqslant \frac{n}{2}$, l'application naturelle de : $H^{0,r}_{\infty}(S) \longrightarrow H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(S)$ est un isomorphisme pour $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et $n-q+1 \leqslant r \leqslant n-1$, est injective si $r=q$ et est surjective si $r=n-q$.

ii) Si $\ell = \frac{n+1}{2}$, l'application naturelle de : $H^{0,r}_{\infty}(S) \longrightarrow H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(S)$ est un isomorphisme pour $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et $n-q+1 \leqslant r \leqslant n-1$, injective si $r=q$ et ℓ, surjective si $r=n-\ell$ et $n-q$.

iii) Si $\ell \geqslant \frac{n}{2}+1$, l'application naturelle de : $H^{0,r}_{\infty}(S) \longrightarrow H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(S)$ est un isomorphisme pour $0 \leqslant r \leqslant q-1$, $n-\ell+1 \leqslant r \leqslant \ell-1$ et $n-q+1 \leqslant r \leqslant n-1$. Elle est injective si $r=q$ et ℓ, surjective si $r=n-\ell$ et $n-q$.

Bibliographie

[1] Andreotti A., Hill D.C., *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy Problem I*, Ann. norm. super. Pisa (1972), 325–363.

[2] ANDREOTTI A., HILL D.C., LOJASIEWICZ S. and MACKICHAN B., *Complexes of differential operators: the Mayer-Vietoris sequence*, Inventiones Math. **26** (1976), 43–86.

[3] HENKIN G.M., LEITERER J., *Andreotti-Grauert theory by integrals formulas*, Birkhäuser, 1986.

[4] HILL C.D., NACINOVICH M., *On the Cauchy problem in complexe analysis*, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CLXXI (1996), 159–179.

[5] HORMANDER L., *Introduction to analysis of several complex variables*, (IV edition) North-Holland company Publishing (1973).

[6] LAURENT-THIÉBAUT CH., *Phénomène de Hartogs-Bochner relatif dans une hypersurface réelle 2-concave d'une variété analytique complexe*, Math. Z. **212** (1993), 511–523.

[7] LAURENT-THIÉBAUT CH., *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, Inter-Editions et CNRS Editions, 1997.

[8] LAURENT-THIÉBAUT CH. et LEITERER J., *Andreotti-Vesentini separation theorem with C^k estimates and extension of CR forms*, Mathematical Notes, **38**, Princeton University (1993), 416–436.

[9] LAURENT-THIÉBAUT CH. et LEITERER J., *Dolbeault isomorphism for CR manifolds*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 521, Grenoble (2000).

[10] LIEB I., RANGE R.M., *Lösungsoperatoren für den Cauchy-Riemann komplex mit C^k Abschätzungen*, Math. Ann. **253** (1980), 145–165.

[11] MARTINEAU A., *Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes*, Strasbourg RCP **25** (1966).

[12] NACINOVICH M., VALLI G., *Tangential Cauchy-Riemann complexes on distributions*, Ann. di Matematica pura ed applicata (IV) vol. CXLVI (1987), 123–160.

[13] SAMBOU S., *Résolution du $\overline{\partial}$ pour les courant prolongeables*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 486, Grenoble (1999), à paraître aux Math. Nachrichten.

[14] SAMBOU S., *Équation de Cauchy-Riemann pour les courants prolongeables - Applications*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. , **332** (2001), 497–500.

INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)