STRUCTURES GRADUÉES ET PARAGRADUÉES

par Mirjana VUKOVIĆ

Prépublication de l'Institut Fourier n$^{\text{o}}$ 536 (2001)

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html`

SOMMAIRE

Mots-clés : Structures graduées, (post)para-, extra-graduées : groupes, anneaux ((non-)associatifs), modules ; corps, corps gradués, (quasi-)corpoïdes ; (quasi-), (multi-)graduation ; para-, extra-graduation ; parties homogènes : homogroupoïdes, anéïdes, moduloïdes ; quasi-, multi-, u-extra-, u-para-groupoïdes, quasi-groupoïdes (commutatifs, commutativement linéarisable) ; quasi-, extra-, para- : annéïdes, moduloïdes ; structures dérivées : homogènes : sous-groupes, sous-anneaux, sous-annéïdes, idéaux ; homomorphismes : homogènes, quasi-homogènes ; (quasi)-homomorphismes ; composé direct et cartésien ; agglutiné ; fonction morphisante.
Classification math. : 08A05, 16W50, 20L05, 16Y60.

INTRODUCTION

La notion de graduation, du moins sous la forme d'exemples particuliers, est une notion très ancienne. Elle est entrée explicitement en mathématique au XVIII^{e} siècle quand Euler a défini la notion des polynômes et, plus généralement, des fonctions réelles, homogènes. Cependant, la notion de graduation était familière aux mathématiciens (du moins, dans le cas d'une variable) bien avant Euler (Diophante, Arabes, Viète, Descartes) et on voit même les germes de la notion d'homogénité dans les débuts de la mathématique grecque ("multiplication de segments") et jusqu'en Babylonie (voir [13]).

D'autres notions d'homogénité et de grades (analogue de degré) correspondants ont été introduits après Euler dans différentes structures. Citons-en quelques unes, des plus simples, sans entrer dans les détails : *poids* (des polynômes et des fonctions), *dimension* (des objets géométriques et topologiques), *ordre* (des opérateurs différentiels), etc.

On a ensuite considéré (surtout en géométrie et topologie algébrique, par exemple Samuel et Zariski [21]) la notion générale d'anneau $\mathbb{Z}$-gradué (ou des anneaux avec une graduation un peu plus générale $(Z^2, Z^3, \ldots, Z^n, \ldots)$).

Les anneaux gradués, dont les grades sont contenus dans un groupe abélien, ont été considérés par Chevalley [3]. Mais, la première notion relativement (mais pas assez) générale des groupes et des anneaux gradués a été donnée par Bourbaki [1] qui était accompagnée de conditions restrictives que rien ne justifie.

Bourbaki base sa définition sur la notion de *groupe abélien gradué*. C'est une très bonne définition, bien qu'il n'y a pas besoin de la restreindre au cas abélien. De cette définition, M. Krasner est parti dans son travail "Anneaux gradués généraux" [12] en conservant les bonnes parties et en critiquant et rejetant les inutiles. La définition de M. Krasner, faite sans l'hypothèse de commutativité, montre que la structure d'un groupe gradué est déterminée par la donnée du groupe abstrait sous-jacent et de la partie homogène, ou seulement de la partie homogène munie de la composition partielle[1)], induite par celle du groupe. Ces structures provenant des groupes gradués sont caractérisées axiomatiquement, ce qui ouvre trois méthodes, en principe équivalentes, de l'étude des groupes gradués et des structures graduées plus fortes :

1) méthode non homogène, où on étudie ces structures telles quelles ;

2) méthode semi-homogène, où on étudie ces structures non graduées sous-jacentes

---

1) Partie homogène munie de la composition partielle appelée *homogroupoïde* par M. Krasner, ce qui est un cas particulier des structures connues en théorie des groupes sous le nom *d'amalgames* (voir par exemple [18]).

accompagnées de la partie homogène, c'est-à-dire d'un sous-ensemble du support satisfaisant à certains axiomes ;

3) méthode homogène, où on ne considère que la partie homogène, c'est-à-dire un ensemble muni d'une composition partielle, également soumise à certains axiomes (et dans le cas des structures plus fortes, d'autre composition, en général partout définie).

De telles structures graduées s'obtiennent, sous certaines conditions, des structures filtrées de même espèce, dont la filtration est totalement ordonnée (mais n'est pas forcément une $\mathbb{Z}$-filtration) et qui s'appellent les *grades* des structures filtrées correspondantes (mais souvent seule la partie homogène d'un tel gradué est intéressante pour l'étude de la structure filtrée, dont il provient).

En plus, M. Krasner a introduit, en débarrassant les définitions de Bourbaki de leurs restrictions inutiles, des notions réellement adéquates d'anneau et de module gradués et de leurs parties homogènes *annéïde* et *moduloïde*.

1. Il est introduit, également, l'analogue gradué homogène de corps, appelé *corpoïde*[2)]. Cette notion a été définie par M. Krasner en 1944 dans [5] à partir des corps valués, car les parties homogènes des gradués de ces corps filtrés par leur valuation (qui peut être celle de Krull), le sont.

Ces corpoïdes, *appelés squelettes (des corps valués correspondants)* ne sont pas quelconques : leur groupe des grades[3)] est sans torsion et, bien entendu, la commutativité du corps valué entraîne celle de son squelette.

2. Si q est un corpoïde, un q-moduloïde unitaire V est dit *q-espace vectoriel*. Les q-espaces vectoriels réguliers ont une théorie d'indépendance linéaire et de dimension semblable (du moins formellement) à celle des espaces vectoriels sur les corps (mais, si l'on regarde de plus près, plus riche). Si Q est un surcorpoïde des q, il peut être considéré, selon la méthode habituelle, comme q-espace vectoriel, qui est toujours régulier, ce qui permet de définir le degré (à droite ou à gauche) $[Q : q]$ de l'extension corpoïdale Q/q comme la dimension de cet espace (du même côté).

Les généralités sur les corpoïdes (y compris la définition des squelettes) et leurs extensions et la théorie des espaces vectoriels réguliers sur ces structures, énoncées dans [5], ont été exposés dans [9] en 1954.

3. Les corpoïdes commutatifs sans torsion[4)] *ont une théorie des extensions* (basée sur une théorie adéquate construite des polynômes sur ces corpoïdes) semblable à celle de Steinitz pour les extensions des corps, mais plus riche, *et une bonne théorie de Galois* (le théorème de l'élément primitif n'est plus vrai pour les extensions corpoïdales séparables de degré fini, mais on peut, quand même, prouver intégralement le théorème fondamental

---

2) La notion non homogène correspondante s'appelle *corps gradué*.
3) Les grades d'un corpoïde forment un groupe.
4) C'est-à-dire tels que leur groupe des grades est sans torsion.

de la théorie de Galois). Cette théorie a été énoncée dans la note [6] de 1944, mais n'est pas publiée, et son exposé se trouve seulement dans le preprint [11].

Ces théories ont des applications importantes à la théorie des corps valués, tout particulièrement à la théorie de ramification (énoncées dans les notes [6], [7], [8] de 1944–45 sous l'hypothèse de degré fini, exposés en partie dans le preprint [11], mais sans cette hypothèse).

La théorie homogène des anneaux gradués commutatifs a été étudiée par M. Chadeyras, surtout du point de vue nœthérien, dans sa thèse [2] et E. Halbertstadt a étudié, surtout de point de vue artinien, la théorie homogène des anneaux réguliers, mais en général non commutatifs, dans sa thèse [4].

Les différentes structures graduées (groupes, anneaux, modules) forment les catégories qui ne sont pas fermées par rapport aux compositions directes ou cartésiennes.

Dans notre travail commun : "Structures paragraduées" (groupes, anneaux, modules) [17], M. Krasner et moi-même avons introduit des structures algébriques appelées *paragraduées* qui généralisent des structures correspondantes graduées classiques et ont la propriété que dans chacun de ces trois cas leur catégorie soit fermée par rapport à leur composé direct et cartésien tel que le support de la partie homogène de ces composés soit le produit cartésien restreint resp. cartésien de ceux des composantes. De cette façon, nous avons développé une théorie générale des structures graduées qui généralisent les structures graduées, définies par Bourbaki. En même temps, ces structures généralisent le travail précédent de M. Krasner (voir [12]).

Je commencerai mon exposé avec les définitions de groupe et d'anneau gradué généraux, en quelque sorte définitives, libres des restrictions indues et aussi des parties redondantes des axiomes dus à Marc Krasner dans son travail noté [12], et je vais résumer les propriétés essentielles de ces notions, avant de parler des notions plus générales faisant l'objet du travail commun de M. Krasner et de moi-même.

I. STRUCTURES GRADUÉES (GROUPES, ANNEAUX, MODULES)

1. Groupes gradués

Soit G un groupe multiplicatif et 1 l'élément neutre. Une *graduation* de G est une application $\gamma : \Delta \to Sg(G)$ d'un ensemble Δ (dit *l'ensemble des grades de* γ) dans l'ensemble $Sg(G)$ des sous-groupes $\gamma(\delta) = G_\delta$ de G telle que G soit le composé direct[5)]

$$G = \bigoplus_{\delta \in \Delta} G_\delta \quad \text{des } G_\delta\,,\ \delta \in \Delta\,. \tag{$*$}$$

Le groupe G muni de cette graduation s'appelle un *groupe gradué.*

Remarques.

1. $(*)$ entraîne, en particulier, que les G_δ, $\delta \in \Delta$ sont tous des *sous-groupes invariants* de G, d'où il résulte que, dans ce cas tout $x \in G_\delta$ et tout $x' \in G_{\delta'}$ commutent.

2. L'ensemble $H = \bigcup_{\delta \in \Delta} G_\delta$ s'appelle *la partie homogène* de γ (ou de G pour γ) et les $x \in H$ sont dits les *éléments homogènes* de G pour γ. Les $\delta \in \Delta$ s'appellent les grades (de γ), et $\delta \in \Delta$ est dit *significatif,* resp. *vide* selon que

$$G_\delta \neq \{1\} \quad \text{resp.} \quad G_\delta = \{1\}\,,$$

et

$$\Delta^* = \big\{\delta \in \Delta; G_\delta \neq \{1\}\big\}$$

est dite la *partie significative* de Δ. La graduation γ est dite *stricte* si $\Delta = \Delta^*$.

Si $x \in H$ et $x \neq 1$, il existe un et un seul $\delta \in \Delta$ tel que $x \in G_\delta$, et ce δ sera noté $\delta(x)$ et appelé *grade* de x. Si $\Delta \neq \Delta^*$, on peut choisir un des grades vides qu'on notera 0 ("zéro") et poser $\delta(1) = 0$.

Si $\Delta = \Delta^* \cup \{0\}$, la graduation γ est dite *propre.*

---

5) Pour éviter toute ambiguïté, nous *ne parlons pas,* sauf exception, des *sommes* et des *produits directs.* (Les seuls cas, où nous parlons des sommes directes, sont ceux des sous-groupes des groupes additifs des anneaux et des modules mais à condition qu'ils en soient des idéaux (bilatères) resp. des sous-modules). Nous remplaçons aussi le terme peu élégant de "*composé direct complet*" par "*composé cartésien*".

3. Les graduations $\gamma : \Delta \to Sg(G)$ et $\gamma' : \Delta' \to Sg(G)$ de G sont dites équivalentes s'il existe une bijection $\varphi : \Delta^* \to \Delta'^*$ tel que :

$$\text{pour tout} \quad \delta \in \Delta^*, \quad \text{on ait} \quad \gamma'(\varphi(\delta)) = \gamma(\delta)\ .$$

Autrement dit, les graduations sont équivalentes si, et seulement si, leurs "parties significatives" sont les mêmes au nom des grades près.

On prouve que la partie homogène H d'une graduation γ de G définit γ à l'équivalence près, et aussi

Proposition 1. — *$H \subseteq G$ est la partie homogène de G pour quelque graduation de G si, et seulement si, H satisfait aux axiomes :*

1$^{\text{o}}$) $1 \in H$ *;*

2$^{\text{o}}$) $x \in H$ *implique* $x^{-1} \in H$ *;*

3$^{\text{o}}$) Si $x, y, z, xy, yz \in H$ *et si* $y \neq 1$*, on a* $xz \in H$ *;*

4$^{\text{o}}$) Si $x, y \in H$*, mais* $xy \notin H$*, on a* $xy = yx$ *;*

5$^{\text{o}}$) H *engendre* G *;*

6$^{\text{o}}$) Soient $n \geq 2$ *et* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ *tels que, pour tous* $i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j$*, on ait* $x_i x_j \notin H$*, alors, on a* $x_1 x_2 \cdots x_n \neq 1$.

La donnée du couple (G, H), où G est un groupe et H satisfait aux axiomes 1$^{\text{o}}$) – 6$^{\text{o}}$), permet de reconstruire la graduation correspondante γ à l'équivalence près. C'est pourquoi on appelle aussi une *graduation* (*à l'équivalence près*) tout couple $(G, H \subseteq G)$, où G est un groupe et où H satisfait aux axiomes 1$^{\text{o}}$) – 6$^{\text{o}}$).

Définition 1. — Si H est la partie homogène de G pour une graduation γ, la composition[6)] de G induit, comme suit, une *composition partielle* sur H :

si $x, y \in H$, leur composé xy sera défini dans H

(auquel cas x, y sont dits *composables* ce qu'on note $x \# y$)

si, et seulement si, pour leur composé des xy dans G, on a $xy \in H$.

Dans ce cas, le composé des x, y dans H posé égal à leur composé dans G, et est noté de la même manière.

De telles structures partielles $(H; xy)$ s'appellent les *homogroupoïdes* et les groupes gradués correspondants $G \supseteq H$ s'appellent leurs *groupes enveloppants*.

---

6) Nous n'employons pas le terme juridique "loi de composition"

Remarque. — Il est clair que les éléments ($\neq 1$) de différents sous-groupes G_δ ne sont pas composables.

On prouve :

PROPOSITION 2. — *Si la structure obtenue pour une graduation γ du groupe G $(H; xy)$, où xy est une composition partielle, peut être obtenue de la même manière à partir d'une graduation γ' d'un groupe $G' \supseteq H$, G' est H-isomorphe à G.*

Autrement dit, il existe un isomorphisme du groupe G' sur le groupe G induisant l'application identique 1_H sur H.

Le couple (G, H), considéré à H-isomorphie près sera appelé le linéarisé de $(H; xy)$ et noté $(\overline{H; xy})$, ou simplement $\overline{H}$ si la confusion n'est pas à craindre.

On peut, d'ailleurs, reconstruire $(\overline{H, xy})$ à partir de $(H; xy)$. Alors l'idée vient de définir les graduations des groupes gradués à l'isomorphie par rapport à leur partie homogène H et aux noms des grades près, par la donnée de cette partie homogène avec sa composition partielle induite par celle du groupe gradué correspondant. Mais pour réaliser cela il faut caractériser les monopéroïdes $(H; xy)$ qui sont les parties homogènes de quelque groupe gradué, et dont la composition partielle xy est induite sur H par celle de ce groupe.

Cette caractérisation est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *La structure $(H; xy)$ est la partie homogène de quelque groupe G pour quelque graduation γ si, et seulement si, elle satisfait aux axiomes :*

1°° *Il existe un $1 \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, on ait $x \# 1$ et $x1 = x$ (axiome d'élément neutre) ;*

2°° *$x \# x$ (axiome d'autocomposabilité) ;*

3°° *Si $x, y, z \in H$, $x \# y$, $y \# z$ et $y \neq 1$ impliquent $x \# z$ (la presque-transitivité de la composabilité) ;*

4°° *Si $a \in H$ et $a \neq 1$, la composition partielle xy est partout définie sur $H(a) = \{x \in H \; ; \; a \# x\}$ et $H(a)$ est un groupe par rapport à cette composition (l'axiome de groupe).*

Les structures $(H; xy)$ satisfaisant à ces axiomes s'appellent homogroupoïdes[7]*.*

Ainsi, les graduations (G, H), considérées à H-isomorphie près, coïncident avec les linéarisés des homogroupoïdes.

[7] Dans notre terminologie, les suffixes "oïde", "eïde" signifient qu'il s'agit de structure à composition en principe partielles.

Il est à remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour que G soit abélien est que tous les $H(a)$ le soient, autrement dit que $a \# b$ implique $ab = ba$.

L'homogroupoïde $(H; xy)$ est, en fait, l'amalgame des groupes G_δ, $\delta \in \Delta^*$, telle que si $\delta \neq \delta'$, $G_\delta \cap G_{\delta'} = \{1\}$.

Définition 2. — Un sous-groupe g de G est dit *homogène* si, et seulement si, il est engendré par $h = g \cap H$. Un $h \subseteq H$ est contenu dans l'intersection avec H du sous-groupe $g(h)$ de G qui l'engendre, et $h \subseteq H$ est égal à $g(h) \cap H$ si, et seulement si :

1°) $x, y \in h$ et $x \# y$ (dans $(H; xy)$) implique $xy \in h$;

2°) $x \in h$ implique $x^{-1} \in h$.

Un tel $h \subseteq H$ est dit un *sous-homogroupoïde* (ou simplement sous-groupoïde) de $(H; xy)$.

Définition 3. — Un $h \subseteq H$ est dit *invariant* si pour tous $a \in h$ et $x \in H$, $a \# x$ (qui entraîne $x \# a$) implique $ax = xa$. Un *sous-groupe homogène* g de G y est invariant si, et seulement si, $h = g \cap H$ l'est dans H.

1.1. Graduation γ_g et $\gamma_{G/g}$ induite par γ. Homogroupoïde quotient.

1. Si g est un sous-groupe homogène de G, la graduation γ définit une graduation $\gamma_g : \Delta \to Sg(G)$ de g avec le même ensemble des grades Δ, dite *graduation induite* part γ (qu'on va aussi noter, en général, simplement γ), en posant

$$\forall \delta \in \Delta\,,\ \gamma_g(\delta) = G_\delta \cap g\,.$$

La partie homogène de g pour γ_g est $h = g \cap H$.

2. Si g est invariant, γ induit une graduation $\gamma_{G/g}$ de G/g (également notée γ sauf ambiguïté), en posant

$$\forall \delta \in \Delta\,,\ \gamma_{G/g}(\delta) = G_\delta g/g\,.$$

Remarque. — Comme $G_\delta g/g$ est canoniquement isomorphe à

$$(G_\delta/g) \cap g = G_\delta/g_\delta\,,$$

où $g_\delta = \gamma_g(\delta)$, on peut identifier $\gamma_{G/g}(\delta)$ à G_δ/g_δ ; G/g s'identifie alors à $\bigoplus_{\delta\in\Delta}(G_\delta/g_\delta)$, et la partie homogène Hg/g de G/g pour $\gamma_{G/g}$ s'identifie à $U_{\delta\in\Delta}(G_\delta/g_\delta)$ dans ce composé direct.

Étant donné que cette réunion et la composition partielle que celle de G/g induit (via l'identification précédente) peuvent se définir directement en termes de l'homogroupoïde $(H;xy)$ et de son sous-ensemble invariant h. Ainsi défini, on l'appelle l'*homogroupoïde quotient* de $(H;xy)$ par h et on le note H/h.

Si γ est stricte ou propre, γ_g et $\gamma_{G/g}$ ne le sont pas toujours. C'est, d'ailleurs, la raison pourquoi il n'est pas commode de se limiter aux seules graduations strictes et propres.

1.2. Composé direct et cartésien.

Supposons qu'un groupe gradué G est le *composé direct* $\bigoplus\limits_{i\in I} g^{(i)}$ ou *cartésien* ("*interne*") $\prod\limits_{i\in I} g^{(i)}$ d'une famille $(g^{(i)}\ ;\ i\in I)$ de ses sous-groupes homogènes. Soit $\eta : x \to (x^{(i)}\ ;\ i\in I)$ l'application canonique de G sur le produit direct, resp. cartésien "externe" des $g^{(i)}$, $i\in I$. Soient $1^{(i)}$ l'élément neutre de $g^{(i)}$, et $h^{(i)}$ sa partie homogène pour sa graduation induite.

Si $A^{(i)} : 1^{(i)} \in A^{(i)} \subseteq g^{(i)}$, on appellera *composé ensembliste direct* (noté $\bigoplus\limits_{i\in I}{}^{e} A^{(i)}$), resp. *cartésien* (noté $\prod\limits_{i\in I}{}^{e} A^{(i)}$) des $A^{(i)}$, $i\in I$, l'ensemble des vecteurs

$$(a^{(i)}\ ;\ a^{(i)} \in A^{(i)},\ i\in I)\,,\ \text{tels que}\ \ a^{(i)} = 1^{(i)}$$

pour presque tout $i\in I$ (c'est-à-dire tous sauf un nombre fini), resp. l'ensemble de tous les vecteurs de cette sorte sans aucune condition.

On peut dire que l'homogroupoïde $(H;xy)$ est le composé des homogroupoïdes $(h^{(i)};xy)$, $i\in I$, dans G, mais $(H;xy)$ n'est pas déterminé, à l'isomorphie près, par les homogroupoïdes $(h^{(i)};xy)$, bien qu'il dépende de la manière de l'inclusion des $g^{(i)}$ dans le groupe gradué G.

Ainsi, il n'y a pas un unique composé direct, resp. cartésien "externe" de la famille $((h^{(i)};xy)\ ;\ i\in I)$ d'homogroupoïdes, mais tout un ensemble de tels composés, d'ailleurs caractérisable à partir des $(h^{(i)};xy)$.

Par suite, il n'y a pas un seul composé direct resp. cartésien "externe" des groupes gradués $(g^{(i)}, h^{(i)})$, mais un ensemble de tels composés, dont le groupe abstrait sous-jacent est, d'ailleurs, le même : c'est un tel composé des groupes abstraits $g^{(i)}$, mais la partie homogène peut y prendre, en général, différentes positions. Et, sauf quelques cas tout-à-fait triviaux, le support d'aucun de ces composés directs resp. cartésiens des $(h^{(i)};xy)$, $i\in I$, ne coïncide avec un tel composé ensembliste $\bigoplus\limits_{i\in I}{}^{e} h^{(i)}$ resp. $\prod\limits_{i\in I}{}^{e} h^{(i)}$ de ces homogroupoïdes.

Il est possible (et même tentant) de définir une composition partielle sur ces composés ensemblistes à partir de celles de $(h^{(i)}; xy)$ en posant :

$$(x^{(i)}; i \in I) = x \# y = (y^{(i)}; i \in I) \quad (\text{où } x^{(i)}, y^{(i)} \in h^{(i)})$$

si, et seulement si, pour tout $i \in I$, on a $x^{(i)} \# y^{(i)}$, et en posant, dans ce cas, $xy = (x^{(i)}y^{(i)} \; ; \; i \in I)$. Mais cette structure appelée un *multigroupoïde* n'est pas un homogroupoïde. En effet, sa composabilité n'est pas presque transitive.

Exemple. — Soit $I = \{1, 2\}$, $a, a' \in h^{(1)}$ non-composables, $b \in h^{(2)}$, $b \neq 1^{(2)}$ et $x = (a, 1^{(2)})$, $y = (1^{(1)}, b)$, $z = (a', 1^{(2)})$. Alors :

$$y \neq 1 = (1^{(1)}, 1^{(2)}), \; x \# y \text{ et } y \# z \,,$$

mais, on n'a pas $x \# z$.

Ainsi, la classe des homogroupoïdes n'est pas fermée par rapport à la composition ensembliste directe ou cartésienne.

1.3. Points de vue de la théorie des groupes gradués.

Trois points de vue sont possibles en théorie des groupes gradués (et des structures graduées plus riches : anneaux, modules, car elles comportent comme structure sous-jacente celle d'un certain groupe gradué) :

1) *non-homogène* : on peut envisager un groupe gradué comme un groupe G muni d'une graduation γ ;

2) *semi-homogène* : on peut l'envisager comme un couple (G, H), où G est un groupe et $H \subseteq G$ satisfait aux axiomes 1^{o}) – 6^{o}), en reconstruisant éventuellement la graduation correspondante γ à l'équivalence près ;

3) *homogène* : on n'envisage que les homogroupoïdes $(H; xy)$, en reconstruisant éventuellement le couple correspondant (G, H) comme linéarisé $(\overline{H; xy})$ de $(H; xy)$.

On ne peut pas dire qu'une de ces méthodes soit la meilleure dans tous les cas. Quand on s'intéresse à tous les éléments d'une structure graduée, ce qui est surtout le cas quand l'ensemble des grades est totalement ordonné (car on peut définir alors les grades des éléments non homogènes), le point de vue non-homogène est le plus approprié. Par contre, si l'on s'intéresse uniquement aux éléments et aussi aux objets homogènes, ce sont les points de vue semi-homogène et surtout homogène, qui sont les meilleurs. Ils sont d'ailleurs, très proches en pratique.

1.4. Homomorphismes homogènes et quasi-homogènes. Homomorphismes et quasi-homomorphismes.

DÉFINITION 4. — Si (G, H) et (G', H') sont deux groupes gradués, un homomorphisme $\varphi : G \to G'$ est dit *quasi-homogène* si

$$\varphi(H) \subseteq H' .$$

Alors, si $x, y \in H$ sont tels que $\varphi(x) \neq 1'$, $\varphi(y) \neq 1'$ où $1'$ est l'élément neutre de G',

$$\delta(x) = \delta(y) \text{ implique } \delta(\varphi(x)) = \delta(\varphi(y)) .$$

Si, sous les même hypothèses

$$\delta(\varphi(x)) = \delta(\varphi(y)) \text{ implique } \delta(x) = \delta(y) ,$$

l'homomorphisme φ est dit *homogène*.

Tout homomorphisme φ de G dans G' est défini par sa restriction ψ à H, car H engendre G et $\psi : H \to G'$ se prolonge en un homomorphisme $\varphi : G \to G'$ si, et seulement si,

$$\forall x, y \in H , \ x \,\#\, y \text{ implique } \psi(xy) = \psi(x)\psi(y) ,$$

car tout $x \in G$ se représente d'une seule manière à permutation des facteurs près comme un composé commutatif des éléments de H non-composables deux à deux.

DÉFINITION 5. — Si φ est un homomorphisme quasi-homogène resp. homogène, sa restriction $\psi = (\varphi|H)$ à H est une application de H dans H' dite un *quasi-homomorphisme* resp. *homomorphisme* de H dans H'. L'application $\psi : H \to H'$ est

1. *un quasi-homomorphisme* si, et seulement si,

$$\forall x, y \in H , \ x \,\#\, y \text{ implique } \psi(x) \,\#\, \psi(y) \text{ et } \psi(xy) = \psi(x)\psi(y) ;$$

2. *un homomorphisme* si, en plus, pour $x, y \in H$

$$\psi(x) \neq 1' , \ \psi(y) \neq 1' \text{ et } \psi(x) \,\#\, \psi(y) \text{ implique } x \,\#\, y .$$

1.5. Composition partielle $x^{(\varphi)}y$. Agglutiné et leur cœur.

Soit $\varphi : G \to G'$ un homomorphisme quasi-homogène. Alors il définit, comme suit une composition $x^{(\varphi)}y$ sur $H^{(\varphi)} = \varphi^{-1}(H')$ tel que $x, y \in H^{(\varphi)}$ sont *composables* pour (φ) ou en bref *φ-composable*, ce qu'on note avec $x \,\#\, ^{(\varphi)}y$ si, et seulement si, $\varphi(x), \varphi(y)$ sont composables dans (H', xy). Alors, on pose $x^{(\varphi)}y = xy$, où xy est la composition de G. On va d'ailleurs écrire xy au lieu de $x^{(\varphi)}y$ et appeler $(H^{(\varphi)}; xy)$ *l'agglutiné* de H par φ.

Il est, d'ailleurs défini par $\psi = (\varphi|H)$ et, à H-isomorphie près, par le seul homogroupoïde $(H; xy)$, car G peut être reconstruit à partir de cet homogroupoïde à une telle isomorphie près (ainsi que G' à partir de $(H'; xy)$).

Il est facile de voir que les H-isomorphies transforment le prolongement φ de ψ à G', $H^{(\varphi)} = \varphi^{-1}(H')$ et $x^{(\varphi)}y$ solidairement avec G. Donc, si $\psi : H \to H'$ est un quasi-homomorphisme, et si $\varphi : (\overline{H; xy}) \to (\overline{H'; xy})$ est un homomorphisme quasi-homogène prolongeant ψ, $(H^{(\varphi)}; xy)$ ne dépend que de ψ, et pas du choix de φ, à H-isomorphies près.

Ainsi considéré $(H^{(\varphi)}; xy)$ sera noté $(H^{(\psi)}; xy)$, et sera dit *l'agglutiné* de H par ψ, et le phénomène lui-même s'appelle *l'agglutination.* Les agglutinés ne sont pas en général des homogroupoïdes, plus précisément $(H^{(\varphi)}; xy)$ n'est un homogroupoïde que dans les deux cas suivants :

1) le noyau de φ, $N^{(\varphi)} = \{1\}$, autrement dit φ est, en tant qu'homomorphisme des groupes abstraits, un isomorphisme ;

2) la composition $x^{(\varphi)}y$ est définie partout sur $H^{(\varphi)}$, autrement dit celle xy de H' l'est sur $\varphi(H)$, ce qui a lieu si, et seulement si, il existe un $\delta' \in \Delta'$ tel que $\varphi(H) \subseteq G'_{\delta'}$.

Définition 6. — $N^{(\varphi)} = C$ est, en général, l'ensemble des $c \in H^{(\varphi)}$, φ-composables avec tous les $x \in H^{(\varphi)}$ qui s'appelle le *cœur* de $(H^{(\varphi)}, xy)$. C'est un sous-groupe invariant de G.

Étant donné que $G^{(\varphi)}_{\delta'} = \varphi^{-1}(G'_{\delta'}) \supseteq C$ $(\delta' \in \Delta')$ est un sous-groupe de G contenu dans $H^{(\varphi)}$, on peut définir une structure quotient

$$G/C = \bigoplus_{\delta' \in \Delta'} (G^{(\varphi)}_{\delta'}/C) \quad \text{et} \quad H^{(\varphi)} = \bigcup_{\delta' \in \Delta'} G^{(\varphi)}_{\delta'} \,,$$

assez analogue à celle de groupe gradué, mais plus générale, appelée par M. Krasner dans [4], *groupe quasi-gradué.* Une structure analogue, dans le cas des anneaux, est définie par M. Chadeyras (voir [2]).

1.6. Analogue de graduation appelée quasi-graduation.

On suppose que la graduation de G' est propre et $\Delta'' = \Delta' \cup \{\omega\}$, où Δ' est l'ensemble des grades pour cette graduation. Soit $\kappa : \Delta'' \to Sg(G)$, où on pose : $\kappa(\omega) = C$, et $\kappa(\delta') = G^{(\varphi)}_{\delta'}$ ou $\{1\}$, selon que $\delta' \neq 0$, ou $\delta' = 0$, quand $\delta' \in \Delta'$. Si $x \in H^{(\varphi)}$ n'appartient pas à C, x appartient à un sel $G^{(\varphi)}_{\delta'}$, et on pose $\delta^{(\varphi)}(x) = \delta'$, et dans le cas où $x \in C$, on pose $\delta^{(\varphi)}(x) = \omega$ ou 0 selon que $x \neq$ ou $= 1$.

Du point de vue semi-homogène, les groupes quasi-gradués sont les couples

$(G, H \subseteq G)$, où G est un groupe, et $H \subseteq G$ (dite la *partie homogène* de G), satisfait aux axiomes :

1°) Il existe un sous-groupe invariant $C \subseteq H$ de G tel que $CH = H$;

2°) $x \in H$ implique $x^{-1} \in H$;

3°) $x, y, z, xy, yz \in H$ et $y \notin C$ implique $xz \in H$;

4°) $x, y \in H$ et $xy \notin H$ impliquent $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1} \in C$;

5°) H engendre G ;

6°) Si $n \geq 2$ et $x_1, \ldots, x_n \in H$ sont tels que, pour tous $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$ implique $x_i x_j \notin H$, on a $x_1 x_2 \cdots x_n \notin C$.

Du point de vue homogène, la structure $(H; xy)$, où H est la partie homogène de quelque *groupe quasi-gradué* G et où xy est la composition partielle induite sur H par celle de G (on appelle ces structures *groupels*) est caractérisée par les axiomes :

1°°) $x \# x$;

2°°) Si $x \# y$, $y \# z$ et $y \notin C$, on a $x \# z$;

3°°) Si $a \notin C$, xy est partout défini sur $H(a) = \{x \in H; a \# x\}$ et $(H(a); xy)$ est un groupe, dont $C \subseteq H(a)$ est un sous-groupe invariant, où

$$C = \{c \in H \,;\, (\forall x \in H)(x \# c)\} \quad \text{est le } \textit{cœur} \text{ de } (H; xy).$$

Si $(H; xy)$ et $(H'; xy)$ sont deux homogroupoïdes, un quasi-homomorphisme $\varphi : H \to H'$ peut être identifié à un élément du multigroupoïde

$$\Big(\prod_{a \in H} H'_a = H; xy\Big) \quad \text{qu'on notera} \quad (H'; xy)^H, \quad \text{à savoir que}$$

$$\{(a \to x_a = \varphi(a)) \,;\, a \in H\} \ .$$

Les éléments de $(H'; xy)^H$ ainsi identifiés avec les quasi-homomorphismes se caractérisent par la condition :

$$a \# b \Longrightarrow (x_a \# x_b \text{ et } x_{ab} = x_a x_b) \ .$$

Quand les homogroupoïdes considérés sont commutatifs on les notera additivement : $(H; x{+}y)$ et $(H'; x{+}y)$, et la composabilité sera dite *addibilité*. Dans ce cas l'ensemble des quasi-homomorphismes de H dans H' est noté $\mathrm{Hom}(H, H')$. Cet ensemble est fermé par rapport à la composition (dite ici addition) partielle de $(H', x{+}y)^H$.

Toutefois, on munit $\mathrm{Hom}(H, H')$ d'une addibilité un peu plus restreinte que celle de $(H', x{+}y)^H$, telle que : quand $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(H, H')$ sont ainsi addibles, leur somme $\varphi + \psi$ est la même que dans $(H', x{+}y)^H$.

2. Anneaux gradués

Soient $(A; x{+}y, xy)$ un anneau (pouvant ne pas être associatif) et $\gamma : \Delta \to Sg((A; x{+}y))$ une graduation de son groupe additif. La graduation γ est dite *une graduation d'anneau* $(A; x{+}y, xy) = A$ si,

$$\text{pour tous } \xi, \eta \in \Delta \text{ il existe un } \zeta \in \Delta \text{ tel que } A_\xi A_\eta \subseteq A_\zeta.$$

Si $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$ ce ζ est unique, et on le notera $\xi\eta$, et si $A_\xi A_\eta = \{0\}$, on a $A_\xi A_\eta \subseteq A_\zeta$, pour tout $\zeta \in \Delta$. Dans ce cas la structure $(A; x{+}y, xy, \gamma)$ s'appelle *un anneau gradué.*

Définition 7. — On appelle une *composition des grades* de l'anneau A gradué par γ, toute la composition partielle $\xi\eta$ de Δ (dite *multiplication de grades*), telle que :

$$A_\xi A_\eta \neq \{0\} \text{ implique } \xi \# \eta \text{ et que } \xi \# \eta \text{ implique } A_\xi A_\eta \subseteq A_{\xi\eta}.$$

Autrement dit, $\xi\eta$ est défini et a le même sens que précédemment pour tous les ξ, η tels que $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$, et peut ne pas être défini ou être défini arbitrairement pour les ξ, η tels que $A_\xi A_\eta = \{0\}$.

Définition 8. — La graduation γ considérée comme un ensemble avec une multiplication $\xi\eta$ des grades est dite *stricte* resp. *propre* si elle l'est en tant que la graduation de son groupe additif $(A; x{+}y)$ et $\xi \# \eta$ implique $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$, resp. $\xi\eta$ est partout définie sur Δ et $\xi\eta = 0$, quand $A_\xi A_\eta = \{0\}$.

Remarque. — Si A est associatif et si $A_\xi A_\eta A_\zeta \neq \{0\}$, tous les cas imaginables peuvent se réaliser, même si la graduation est stricte, comme l'a montré M. Chadeyras dans [2] : un des $(\xi\eta)\zeta$, $\xi(\eta\zeta)$ peut être défini et l'autre pas, ou tous les deux peuvent être définis, mais il peut arriver que $(\xi\eta)\zeta \neq \xi(\eta\zeta)$.

Définition 9. — On appelle toujours *partie homogène* de l'anneau $(A; x{+}y, xy)$ pour sa graduation d'anneau γ celle $H = \bigcup\limits_{\delta\in\Delta} A_\delta$ de $(A, x{+}y)$, et on définit, comme précédemment les grades $\delta(x)$, des $x \in H$ non nuls.

Rappelons que si : $x, y \in H$ sont non nuls, $\delta(x) = \delta(y)$ équivaut à $x{+}y \in H$.

On peut prouver la proposition suivante :

Proposition 4. — *La condition*

$$(\forall \xi, \eta \in \Delta)\ (\exists \zeta \in \Delta)\ (A_\xi A_\eta \subseteq A_\zeta)$$

équivaut à l'ensemble des deux conditions :

I. Le produit des éléments homogènes de A est homogène, autrement dit $H^2 \subseteq H$.

II. Si $x, y \in H$ et $xy \neq 0$, $\delta(xy)$ ne dépend que des $\delta(x), \delta(y)$.

Mais, il se trouve que I implique II.

Comme les graduations d'anneau de $(A; x+y, xy)$ sont parmi celles de son groupe additif $(A; x+y)$, elles sont définies (en supposant que la multiplication des grades soit ou bien strict, ou bien propre, aux normes des grades significatifs près) par le couple (A, H).

Plaçons-nous maintenant le *point de vue semi-homogène*. Il est clair que de ce point de vue les anneaux gradués sont des couples (A, H), où le sous-ensemble H de l'anneau A satisfait aux axiomes donnés dans la proposition suivante :

Proposition 5. — *Pour qu'un couple $(A, H \subseteq A)$, où A est un anneau, soit, du point de vue semi-homogène, un anneau gradué, il faut et il suffit que H satisfasse, en plus des axiomes "additifs" :*

1°) $0 \in H$;

2°) $x \in H$ implique $-x \in H$;

3°) Si x, y, z, $x+y$, $y+z \in H$ et $y \neq 0$, on a $x+z \in H$;

4°) H engendre le groupe additif de A.

5°) Si $n \geq 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ et $x_i + x_j \notin H$ pour tous $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ implique $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \neq 0$,

l'axiome "multiplicatif" :

6°) $H^2 \subseteq H$.

Puis, on se pose la question : Que se passe-t-il du *point de vue homogène ?* On va considérer H muni de l'addition partielle $x+y$ (dont la composabilité, appelée ici *addibilité* sera notée #) et de la multiplication xy partout définie (à cause de $H^2 \subseteq H$), induites. Quand une telle structure $(H; x+y, xy)$ est-elle la partie homogène d'un anneau*) (ou anneau non-associatif) gradué ?

La réponse aux questions posées est donnée par la proposition suivante :

Proposition 6. — *Pour que $(H; x+y, xy)$ soit la partie homogène d'un anneau (resp. anneau non-associatif) gradué avec l'addition (partielle) et la multiplication induites par celles de cet anneau, il faut et il suffit que les axiomes suivants soient satisfaits :*

---

*) ceci signifie, anneau associatif

I. H *est un demi-groupe (resp. monopère) multiplicatif ayant un élément biabsorbant* 0.

II. *1°)* $x \# 0$ *; 2°)* $x \# x$ *; 3°)* $x \# y,\ y \# z$ *et* $y \neq 0$ *impliquent* $x \# z$.

III. Pour tout $a \neq 0$, $A(a) = \{x \in A\,;\ a \# x\}$ *est un groupe abélien par rapport à l'addition.*

IV. $x \# y$ *implique* $zx \# zy$, $z(x+y) = zx + zy$, $(x+y)z = xz + yz$.

Définition 10. — La structure $(H; x+y, xy)$ satisfaisant aux axiomes *I–IV* précédents s'appelle *annéïde* si la multiplication est associative et *annéïde non-associatif* si on ne fait pas cette hypothèse.

L'anneau correspondant $(A, x+y, xy)$ de l'annéïde $(H; x+y, xy)$ est défini à H-isomorphie près, et il est dit le *linéarisé* de $(H; x+y, xy)$ qui se note avec $(\overline{H; x+y, xy})$ (ou simplement $\overline{H}$).

Définition 11. — Un *anneau gradué* A est dite un *corps gradué*[8] si l'ensemble H^* de ses éléments homogènes non-nuls de A est un groupe multiplicatif. La partie homogène d'un corps gradué A est appelée *corpoïde*.

Donc, on peut prouver que les corpoïdes sont caractérisés par le système d'axiomes suivants :

Proposition 7. — *Les* corpoïdes *sont les structures* $(Q; x+y, xy)$ *(où l'addition* $x+y$ *est partielle et la multiplication* xy *est partout définie), qui satisfont aux axiomes :*

I′. Q *est un presque-groupe*[9] *(avec élément biabsorbant noté* 0*, et l'élément neutre noté* 1*) ;*

et II, III, IV les mêmes que pour les annéïdes.

En plus, les axiomes II et III peuvent se remplacer par les faibles :

II′. $1'$. $1 \# 0$ *;*

$2'$. $1 \# 1$*, car, en vertu de IV,* $1 \# 1$ *implique* $x = x1 \# x1 = x$ *;*

$3'$. $(x \# 1,\ 1 \# y)$ *implique* $x \# y$*, car*

$(x \# y,\ y \# z,\ y \neq 0)$ *implique* $(y^{-1}x \# 1,\ 1 \# y^{-1}z)$ *implique* $y^{-1}x \# y^{-1}z$

implique $x \# z$.

[8] Il ne faut pas considérer un corps gradué comme un corps muni d'une graduation, mais, au contraire un corps comme un cas particulier d'un corps gradué dont la graduation est triviale.

[9] C'est-à-dire la réunion d'un groupe et d'un élément biabsorbant 0.

Enfin, III peut se remplacer par la même condition pour $A(1)$.

III'. $A(1) = \{x \in A\,;\ 1\#x\}$ *est un groupe abélien par rapport à l'addition, car*

$$a \# x \iff 1\#a^{-1}x,\ \ \textit{donc}\ A(a) = aA(1)\ \ \textit{et}\ \ x \to ax$$

est un isomorphisme additif de $A(1)$ *sur* $A(a)$.

Le corpoïde est dit sans torsion si son groupe l'est.

Définition 12. — Si H est un annéïde (non-associatif), il est dit *régulier à droite* resp. *à gauche* si

$$xz \neq 0,\ yz \neq 0 \text{ et } xz \# yz \quad \text{resp.} \quad zx \neq 0,\ zy \neq 0 \text{ et } zx \# zy \text{ impliquent } x \# y.$$

Il est dit *régulier* s'il l'est à droite et à gauche.

Définition 13. — On appelle *intégroïde* un annéïde (associatif) commutatif, régulier et sans diviseur de zéro.

Définition 14. — Si (H^*, xy) est un groupe, l'anneau gradué (A, H) s'appellera le *corps de corpoïde* et l'annéïde correspondant $(A; x+y, xy)$ sera dit le *corpoïde*.

Définition 15. — Soit (A, H) est un anneau gradué et $B \subseteq H$ un sous-objet de quelque type (sous-anneau, idéal à droite ou à gauche, idéal bilatère) de cet anneau. Alors, on dit que B est *homogène* s'il l'est en tant que sous-groupe de $(A; x+y)$, c'est-à-dire engendré additivement par l'ensemble $B \cap H$. Les $B \cap H$ correspondants sont des sous-ensembles h de l'annéïde $(H; x+y, xy)$, qui s'appellent respectivement ses *sous-annéïdes* et ses *idéaux* (ou *idéaloïdes* quand on veut souligner que leur addition est partielle) à droite, à gauche et bilatère.

Remarque. — Si h est un idéal bilatère d'un annéïde $(H; x+y, xy)$, il est facile de définir le quotient $(H/h; x+y, xy)$ de H par h, qui est encore un annéïde, et même la partie homogène du quotient $\overline{H}/\overline{h}$ du linéarisé $\overline{H}$ de H par celui $\overline{h}$ de h.

On définit les notions de l'idéal (unilatère et bilatère) premier et primaire d'un annéïde comme dans les anneaux et on démontre beaucoup des résultats analogues, comme :

1. H/h est sans diviseurs de zéro si, et seulement si, h est premier.
2. H/h est corpoïde si, et seulement si, $H^2 \nsubseteq h$ est un idéal à droite et aussi un idéal à gauche maximal, etc.

2.1. Somme cartésienne et directe des anneaux gradués.

Si (A, H) est un anneau gradué, on dit qu'il est la *somme cartésienne* ou *direct* (interne) d'une famille $\{A_i\ ;\ i \in I\}$ de ses idéaux bilatères s'il l'est en tant qu'anneau abstrait et qu'en plus ces idéaux sont homogènes.

Mais le support de H n'est pas, sauf dans des cas triviaux, le produit cartésien resp. cartésien restreint[10)] des parties homogènes H_i des A_i.

Comme pour les groupes gradués, il est possible de définir l'ensemble des sommes directes et cartésiennes ("externes") d'une famille $((A_i, H_i)\ ;\ i \in I)$ d'anneaux gradués et de la famille $(H_i\ ;\ i \in I)$ des annéïdes[11)]. Mais il n'y a pas une telle somme unique ne dépendant que de cette famille. Ainsi, la catégorie des annéïdes n'est pas fermée par rapport au produit cartésien ou cartésien restreint des supports.

Toutefois, on peut définir les structures, appelées *multiannéïdes*, dont le support est un tel produit de ceux des annéïdes $(H_i; x{+}y)$, $i \in I$ et en le munissant de la multiplication (partout définie) :

$$(x_i \in H_i\ ;\ i \in I)(y_i \in H_i\ ;\ i \in I) = (x_i y_i \in H_i\ ;\ i \in I)\ .$$

2.2. Homomorphismes quasi-homogènes et quasi-homomorphismes. Agglutiné.

Définition 16. — Soit $(A; H)$, $(A'; H')$ deux anneaux gradués et

$$H = (H; x{+}y, xy)\ ,\quad H' = (H'; x{+}y, xy)$$

les annéïdes correspondants. Une application

$$\varphi : A \to A' \ \text{ resp. }\ \varphi : H \to H'$$

est dite un *homomorphisme quasi-homogène* de (A, H) dans (A', H') ou encore un *quasi-homomorphisme* de $(H; x{+}y, xy)$ dans $(H'; x{+}y, xy)$ si elle est :

1) un tel homomorphisme des groupes additifs gradués (A, H) dans (A', H'), resp. *quasi-homomorphisme* de $(H; x{+}y)$ dans $(H'; x{+}y)$ et

2) un homomorphisme multiplicatif.

Si $(H^{(\varphi)}; x{+}y)$ est l'agglutiné "additif" de $(H; x{+}y)$ par un tel φ, la multiplication xy de $A = \overline{H}$ induit la multiplication partout définie sur $H^{(\varphi)}$ (qui est associative si, et seulement si, celle de H l'est), qui sera toujours écrite xy. La structure $(H^{(\varphi)}; x{+}y, xy)$ sera dite *l'agglutiné par* φ de l'annéïde $H = (H; x{+}y, xy)$.

---

10) Le produit cartésien restreint des H_i est l'ensemble des vecteurs $(x_i \in H_i\ ;\ i \in I)$ tels que presque tous les x_i sont égaux à zéro.

11) En principe non-associatifs.

Ces *agglutinés* ne sont qu'exceptionnellement (en particulier quand $C = N^{(\varphi)} = \{0\}$) des annéïdes, et en général, ils sont des structures qui s'appellent *anels*.

D'ailleurs, on peut définir sur l'anneau A la structure non-homogène correspondante, dont $H^{(\varphi)}$ est la partie homogène et qui s'appelle *l'anneau quasi-gradué*.

2.3. Applications.

On prouve que les véritables analogues des corps commutatifs du point de vue de *la théorie des extensions* et *la théorie de Galois* ne sont pas les corpoïdes commutatifs, mais les corpoïdes commutatifs sans torsion. En particulier, grâce à la théorie des polynômes, les corpoïdes commutatifs sans torsion ont une théorie des extensions très proche de celle de Steinitz pour les extensions des corps, mais plus riche, car l'extension d'un corpoïde se fait, en général, en étendant à la fois son corps et son groupe des grades. Cette théorie des extensions comporte une théorie de Galois, dont les résultats essentiels sont les mêmes (à quelques précisions supplémentaires près) que ceux de la théorie de Galois des corps, mais les démonstrations sont en partie différentes. En effet :

1) *le théorème d'élément primitif n'a pas lieu pour les extensions séparables de tels corpoïdes, et*

2) *la démonstration de la seconde partie du théorème de Galois pour les extensions algébriques finies et normales de tels corpoïdes est basée pas seulement sur le même théorème pour les corps*, mais aussi sur le fait que le premier groupe de cohomologie galoisienne du groupe multiplicatif de telles extensions des corps est trivial, et aussi sur la dualité dans les groupes abéliens.

Si k est un corps valué, il est possible d'y définir : un corpoïde sans torsion (qui est commutatif si k l'est) $s(k)$, dit son *squelette*, qui est synthèse de son corps résiduel $\overline{k}$ (qui est le corps de $s(k)$) et de son groupe de valuation $\Gamma(k)$ (qui est le groupe des grades significatifs de $s(k)$).

La théorie des corpoïdes commutatifs sans torsion (et tout particulièrement, leur théorie des extensions et de Galois) a, à travers les squelettes, des applications considérables aux corps valués commutatifs, tout particulièrement à leur théorie de la ramification (voir [12]).

Disons encore : dans le cas commutatif (et, même, dans le cas non-commutatif quand le groupe des grades est commutatif), les corps gradués (et au fond les corpoïdes) rentrent, comme un cas particulier, dans la notion des anneaux gradués au sens de Bourbaki, ce qui n'est remarqué ni par eux-mêmes, ni dans la littérature, bien que la définition des corpoïdes a été donnée par M. Krasner dans [5] en 1944, et une grande partie de leur théorie a été énoncée dans [6] et développée avec les démonstrations dans [8] et [9].

3. Modules gradués

Soient $A = (A; x+y, xy)$ un anneau gradué, dont la graduation soit $\gamma : \Delta \to Sg(A)$ (où $Sg(A)$ est l'ensemble des sous-groupes additifs de A) et $M = (M; x+y)$ un groupe abélien gradué, dont la graduation soit $\Gamma : D \to Sg(M)$, qui soit un A-module, dont soit ax ($a \in A$, $x \in M$) la composition externe. On note H, N les parties homogènes des A resp. M pour γ resp. Γ, et on écrit, si $\delta \in \Delta$ et $d \in D$, $A_\delta = \gamma(\delta)$, $M_d = \Gamma(d)$. $(M; x+y)$ est un A-*module gradué* si

$$\text{pour tous } \xi \in \Delta,\ s \in D \text{ existe un } t \in D \text{ tel que } A_\xi M_s \subseteq M_t\,. \tag{$*$}$$

On prouve

PROPOSITION 8. — *La condition* $(*)$ *équivaut aux deux conditions suivantes :*

I. $HN \subseteq N$;

II. Si $ax \neq 0$ ($a \in A$, $x \in M$), *le grade* $d(ax)$ *de* ax *ne dépend que de* $\delta(a)$ *et* $d(x)$.

Par un raisonnement analogue à celui du cas des anneaux, on prouve que *II* est une conséquence de *I*.

Ainsi, *du point de vue semi-homogène*, si (A, H) est un anneau gradué et (M, N) est un groupe gradué tel que M soit un A-module avec la multiplication externe ax, il sera un (A, H)-module gradué si, et seulement si, $HN \subseteq N$.

Du point de vue homogène, si $(H; x+y, xy)$ et $(N; x+y)$ sont les parties homogènes de A resp. M, $(N; x+y)$ est dit un $(H; x+y, xy)$-*moduloïde* (ou simplement H-*moduloïde*) si le couple (H, N) est muni d'une composition ax ($a \in H$, $x \in N$) et si $M = \overline{N}$ est un $(A; x+y, xy)$-module gradué par rapport à la multiplication externe des $x \in M$ par les $a \in A$ prolongeant ax ($a \in H$, $x \in N$) par distributivité.

Ces structures se caractérisent par les axiomes ($(H; x+y, xy)$ étant supposé un annéïde, $(M; x+y)$ un homogroupoïde commutatif et $(a, x) \to ax$ une application de $H \times N$ dans N) :

1°) $(ab)x = a(bx)$ $(a, b \in H,\ x \in N)$;

2°) Si $a \# b$, on a $ax \# bx$ et $(a+b)x = ax + bx$ $(a, b \in H,\ x \in N)$;

3°) Si $x \# y$, on a $ax \# ay$ et $a(x+y) = ax + ay$ $(a \in H,\ x, y \in N)$.

Le H-moduloïde N est dit unitaire si H est unitaire et si, pour tout $x \in N$, on a $1x = x$.

Comme pour les anneaux gradués, on définit les multiplications (externes) des grades ξs $(\xi \in \Delta,\ s \in D)$, en principe partielles, par les conditions :

1. Si $A_\xi M_s \neq \{0\}$, ξs est défini ;

2. $A_\xi M_s \subseteq M_{\xi s}$.

Donc, ce que l'on entend par *graduations strictes et propres* est clair.

DÉFINITION 17. — Un H-moduloïde (et le module gradué correspondant) est dit *strict* resp. *régulier* si pour $a, b \in H$ et $x, y \in N$

$ax \neq 0, ay \neq 0$ et $ax \# ay$ impliquent $x \# y$ resp.

$ax \neq 0,\ bx \neq 0$ et $ax \# bx$ impliquent $a \# b$.

DÉFINITION 18. — Un sous-module M' d'un A-module gradué M est dit *homogène* s'il l'est en tant que groupe additif, c'est-à-dire est engendré additivement par $N' = M' \cap N$. C'est un module naturellement gradué, dont $M' \cap N$ est la partie homogène.

De tels N', dits des *sous-moduloïdes* du H-moduloïde N, se caractérisent dans N par les propriétés suivantes :

$1^{\text{o}})$ $x \in N'$ implique $-x \in N'$;

$2^{\text{o}})$ $x, y \in N'$ et $x \# y$ dans N impliquent $x + y \in N'$;

$3^{\text{o}})$ $a \in H$ et $x \in N'$ impliquent $ax \in N'$.

Il est facile de définir le quotient ou la "différence" $N - N'$ de N et N', et définir naturellement sur $M - M'$ la structure du module gradué, dont $N - N'$ soit la partie homogène.

DÉFINITION 19. — Si $H = q$ est un corpoïde, un q-moduloïde unitaire V est dit un *q-espace vectoriel.*

Toutefois, si q est un corps, on parle de *q-espaçoïdes vectoriels*, pour les distinguer des q-espaces vectoriels habituels.

Les q-espaces vectoriels sont toujours des moduloïdes stricts, mais pas toujours réguliers.

On a, dans les q-espaces vectoriels réguliers V, *une théorie de dépendance linéaire* tout-à-fait analogue à celles des espaces vectoriels sur les corps, et on peut définir la dimension $[V : q]$ de V sur q, ayant toutes les propriétés habituelles.

Soient (A,H) un anneau gradué et $(H;x{+}y,xy)$ l'annéïde correspondant. Soit B un sous-anneau homogène de A, donc $K = B \cap H$ un sous-annéïde de H. On sait que A peut être considéré comme un B-module gauche ${}_BA$ ou droit A_B et, sous nos hypothèses, ces modules se munissent naturellement d'une structure des modules gradués qui induit sur leur partie homogène H les structures de K-moduloïde gauche ${}_KH$ et droit H_K.

Les idéaux homogènes (unilatères) de (A,H) resp. les idéaux (unilatères) de H coïncident avec les sous-modules homogènes de A-module gradué A de même côté resp. avec les sous-moduloïdes de H-moduloïde H du même côté.

Si Q/q est une extension corpoïdale, les q-moduloïdes gauche ${}_qQ$ et droit Q_q sont réguliers. Alors,

$$[Q:q]_g = [{}_qQ:q] \text{ et } [Q:q]_d = [Q_q:q]$$

s'appellent les *degrés* gauche et droit *de* Q/q. Ils jouent le même rôle pour les extensions corpoïdales (et tout particulièrement quand il s'agit de corpoïdes commutatifs sans torsion) que les degrés habituels pour les extensions des corps.

3.1. Sommes directes et cartésiennes des modules gradués et des moduloïdes.

Concernant les notations des sommes directes et cartésiennes internes et externes des modules gradués et des moduloïdes, la situation est assez semblable à celle qu'on a vue pour les anneaux et les groupes gradués resp. annéïdes et homogroupoïdes. La notion des sommes internes dans les modules gradués est la même que dans les modules abstraits sous la condition que les sommandes soient des sous-modules homogènes, ce qui détermine la notion de telles sommes internes de sous-moduloïdes.

Quant à la somme externe d'une famille de modules gradués ou moduloïdes, elle n'est pas unique et, sauf dans les cas triviaux, le support de la partie homogène, d'une telle somme n'est jamais le produit cartésien complet ou restreint de celles des sommandes. Mais on peut définir (aussi bien du point de vue homogène que non-homogène) de tels produits de familles $((M_i,N_i)\,;\ i \in I)$ de (A,H)-modules gradués ou de leurs parties homogènes $N_i\,;\ i \in I$. Ces structures ne sont pas, sauf dans des cas triviaux, des modules gradués resp. moduloïdes, et s'appellent *modules multigradués* resp. *multimoduloïdes*). Pour le faire, il suffit de prendre de tels produits des groupes additifs gradués resp. des homogroupoïdes additifs de ces modules gradués resp. moduloïde, et si

$$a \in A \text{ resp. } \in H \text{ et } x = (x_i\,;\ i \in I) \ (x_i \in M_i \text{ resp. } \in N_i),$$

et de le munir de multiplication externe $ax = (ax_i\,;\ i \in I)$.

3.2. Homomorphisme quasi-homogène des modules gradués et quasi-homomorphisme des moduloïdes. Agglutinés multiplicatifs.

Soient (M, N) et (M', N') deux (A, H)-modules gradués. On définit d'une manière évidente, les notions d'homomorphisme quasi-homogène $\varphi : M \to M'$ de modules gradués et de quasi-homomorphisme $\psi : H \to H'$ des moduloïdes.

Si $(N^{(\varphi)}; x+y)$ est l'agglutiné du groupe additif gradué par un tel φ, on a $HN^{(\varphi)} \subseteq N^{(\varphi)}$ et, ainsi, la multiplication de A-module M en induit une $(a, x) \to ax$, où (a, x) parcourt $A \times H^{(\varphi)}$. La structure $(N; x+y, xy)$ ainsi obtenue s'appelle *monel* (elle n'est moduloïde qu'exceptionnellement), et on la caractérise, en ajoutant aux mêmes axiomes additifs que ceux des anels, les axiomes :

ME 1. La multiplication externe en est une application $H \times N \to N$;

ME 2. On a $HC \subseteq C$;

ME 3. Soient $a, b \in H$ et $x \in N$. Alors, $(ab)x = a(bx)$ et, si $a \# b$, on a $ax \# bx$, $(a + b)x = ax + bx$;

ME 4. Soient $a \in H$ et $x, y \in N$. Alors, $x \# y$ implique $ax \# ay$ et $a(x+y) = ax + ay$.

La structure non-homogène correspondante s'appelle *module quasi-gradué*. Si $(H; x+y, xy)$ est un annéïde, les multiplications à gauche $m_g(a) : x \to ax$ et à droite $m_d(a) : x \to xa$ des $x \in N$ par un $a \in H$ sont des quasi-homomorphismes des H-moduloïdes ${}_HH$ resp. H_H. Ils jouent, ainsi que leurs agglutinés (appelés *agglutinés multiplicatifs* de H), un rôle essentiel dans la théorie des *annéïdes commutatifs nœthériens non-réguliers* (voir [2] et [12]).

Soient H un annéïde et $(N; x+y)$, $(N'; x+y)$ deux H-moduloïdes commutatifs. Soit $\mathrm{Hom}_H(N, N')$ l'ensemble des quasi-homomorphismes $\varphi : N \to N'$ des moduloïdes, qui est un sous-ensemble de celui $\mathrm{Hom}(N, N')$ des quasi-homomorphismes des homogroupoïdes additifs sous-jacents (un $\varphi \in \mathrm{Hom}(N, N')$ est un élément de $\mathrm{Hom}_H(N, N')$ si, et seulement si, pour tous $a \in H$, et $x \in N$, on a $\varphi(ax) = a\varphi(x)$), et il est fermé par rapport à l'addition (partielle) de $\mathrm{Hom}(N, N')$. Autrement dit, si

$\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_H(N, N')$ sont addibles dans $\mathrm{Hom}(N, N')$, on a $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}_H(N, N')$.

En plus, la multiplication externe par les $a \in H$ peut être définie sur $\mathrm{Hom}_H(N, N')$ (*qui est fermé par rapport à cette multiplication*) en posant :

$$(a\varphi)(x) = a\varphi(x) = \varphi(ax) .$$

Si $(N'; xy) = (N; xy)$, et si $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_H(N, N)$, $\varphi\psi = \varphi \circ \psi$ est une composition interne de $\mathrm{End}_H(N) = \mathrm{Hom}_H(N, N)$, bilatéralement distributive par rapport à ses addibilité et addition. Mais $(\mathrm{End}_H(N) ;\ \varphi+\psi, \varphi\psi)$ n'est pas, en général, un annéïde.

D'ailleurs *la recherche des parties de* $\operatorname{End}_H(N)$, *qui sont fermées* et *annéïdes par rapport aux* $\varphi + \psi$ et $\varphi\psi$ *joue un rôle important dans la théorie des annéïdes non-commutatifs réguliers* (voir [12] et sa bibliographie).

II. STRUCTURES PARAGRADUÉES (GROUPES, ANNEAUX, MODULES)*)

Nous voyions que les différentes structures graduées (groupe, anneaux, modules) forment les catégories qui ne sont pas fermés par rapport aux compositions directes ou cartésiennes telles que le support de la partie homogène de ces composés soit le produit cartésien restreint resp. cartésien de ceux des composantes. Pourtant, de telles compositions peuvent être définies, mais elles conduisent aux structures plus générales que les structures graduées, qui s'appellent *structures multigraduées.* D'autre part, les homomorphismes quasi-homogènes des structures graduées (et les quasi-homomorphismes de leurs parties homogènes) conduisent à un autre type de structures : groupes, anneaux et modules *quasi-graduées* et leurs correspondants homogènes *groupels, anels* et *monels.* Enfin, les Hom et les End des homogroupoïdes abéliens et des moduloïdes constituent une troisième généralisation naturelle des structures graduées.

L'idée vient qu'il existe peut-être des structures généralisant les structures graduées et englobant, comme cas particuliers, toutes les structures qu'on vient de mentionner, et qui soient, en plus telles que, dans chacun des trois cas (groupes, anneaux, modules), leur catégorie soit fermée par rapport à leur composés direct et cartésien tel que le support de la partie homogène de ces composés soit le produit cartésien restreint resp. cartésien de ceux des composantes. Cette idée est exacte, et, en plus, ce point de vue est très éclairant pour les structures graduées elles-mêmes. On va appeler ces structures les *structures paragraduées* (du moins quand il s'agit des points de vue non-homogène et semi-homogène, car, du point de vue homogène, on est amené à considérer les structures, quelque peu plus générales). Nous nous bornons à en donner les définitions, accompagnées de quelques remarques indispensables.

1. Groupes extragradués et paragradués

Trois points de vue (non-homogène, semi-homogène et homogène) sont possibles en théorie des groupes gradués et structures graduées plus riches : anneaux et modules.

*) Voir M. Krasner et M. Vuković [17].

Nous verrons que les points de vue analogues existent pour les structures paragraduées qui généralisent les structures graduées et qui étaient l'objet du travail de M. Krasner et moi-même (voir [14], [15], [16] et [17]).

1.1. Point de vue non-homogène.

Soient G un groupe (écrit multiplicativement), $(\Delta, <)$ un ensemble ordonné, qui soit un demi-treillis complet inférieur et supérieurement inductif.

Une application $\pi : \Delta \to Sg(G)$, qui fait correspondre à chaque $\delta \in \Delta$ un sous-groupe $G_\delta \in Sg(G)$ de G, est dite une *paragraduation* de G avec l'ensemble des grades (ordonné) $(\Delta, <)$ si elle satisfait aux axiomes **(I)–(VI)** suivants :

(I) $\pi(0) = G_0 = \{1\}$, et $\delta < \delta'$ $(\delta, \delta' \in \Delta)$ implique $G_\delta \subseteq G_{\delta'}$;

Remarques.

1) $H = \bigcup_{\delta\in\Delta} G_\delta$ sera appelé la *partie homogènes* de G pour π, et les $x \in H$ seront dits les *éléments homogènes* de G ;

2) Si $x \in H$, $\delta(x) = \mathrm{Inf}\{\delta \in \Delta\,;\, x \in G_\delta\}$ s'appelle le *grade* de x. On a $\delta(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$. Les $\delta(x)$, $x \in H$ sont dits les *grades principaux*, et leur ensemble est noté Δ_p. L'application $\delta : x \to \delta(x)$ est une surjection de H sur Δ_p ;

3) La paragraduation $\pi : \Delta \to Sg(G)$ est dite *propre* si elle est injective ;

4) On va noter Δ^* l'ensemble des $\delta \in \Delta$ non nuls.

(II) Si $\overline{\Delta} \subseteq \Delta$, on a $\bigcap_{\delta\in\overline{\Delta}} G_\delta = G_{\mathrm{Inf}\,\overline{\Delta}}$.

Remarque. — Si $x{\in}H$, on a $x \in \bigcap\{G_\delta\,;\, x{\in}G_\delta\}$, donc $\delta(x) = \min\{\delta \in \Delta,\, x{\in}G_\delta\}$.

(III) Tout G_δ, $\delta \in \Delta$ est invariant dans G.

Remarque. — Donc le commutateur $(y, x) = yxy^{-1}x^{-1}$ qu'on notera $z(x, y)$ appartient à $G_{\delta(x)} \cap G_{\delta(y)} = G_{\mathrm{Inf}(\delta(x),\delta(y))}$. Ainsi, $z(x, y) \in H$,

$$\delta(z(x, y)) \leq \mathrm{Inf}(\delta(x), \delta(y)) \quad \text{et} \quad yx = z(x, y)xy\,.$$

(IV) H engendre G.

(V) Si $A \subseteq H$ est tel que, pour tous $x, y \in A$, on ait $xy \in H$, il existe un $\delta \in \Delta$ tel que $A \subseteq G_\delta$.

Remarques.

1) Si $x, y \in H$, $xy \in H$ équivaut à l'existence d'une majorante commune de $\delta(x), \delta(y)$;

2) Si π satisfait aux axiomes **(I)–(V)**, il est dit une *postparagraduation* de G, et G muni de π est dit un *groupe postparagradué*. Parmi les relations, qui lient les éléments de H, en tant que générateur de G, il y a en tout cas, les relations $xy = z$ pour tous les $x, y, z \in H$, qui satisfont à cette égalité dans G (relations H-internes) et les relations $yx = z(x, y)xy$ pour tous $x, y \in H$ (relations de commutation à gauche). On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble de toutes ces relations.

(VI) G est engendré par H avec l'ensemble des relations $\mathbb{R}$.

Remarque. — Tout groupe postparagradué G est une image H-homomorphe, où H est la partie homogène de G, d'un groupe paragradué contenant H (autrement dit l'image de ce groupe par un homomorphisme, dont la restriction H est l'identité).

Si π satisfait aux axiomes **(I)–(V)** et à l'axiome **(VI')**, il s'appelle une *extragraduation* de G, et G muni de π est dit un *groupe extragradué*.

(VI') Soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in \Delta_p$, incomparables deux à deux, et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \in H$ tels que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, on ait $\delta(x_i) \leq \delta_i$ et $\delta(x'_i) \leq \delta_i$. Alors, si $x_1 x_2 \cdots x_n = x'_1 x'_2 \cdots x'_n$, on a, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $\delta(x_i^{-1} x'_i) < \delta_i$.

On prouve

Théorème 1. — *Une extragraduation est toujours une paragraduation.*

Vraisemblablement, l'inverse n'a pas lieu (voir [17], Théorème 1).

Deux paragraduations $\pi : \Delta \to Sg(G)$ et $\pi' : \Delta' \to Sg(G)$ de G sont dites *équivalentes* si leurs parties homogènes respectives H, H' coïncident. Il résulte de l'axiome **(V)** que ceci a lieu si, et seulement si pour tout $\delta \in \Delta$ existe un $\delta' \in \Delta'$ tel que $G_\delta \subseteq G_{\delta'}$ et vice versa.

1.1.1. Exemples d'extragraduations.

Exemple 1. — Supposons que $\Delta = \Delta^* \cup \{0\}$ où tous les $\delta \in \Delta^*$ sont plus que 0 et incomparables deux à deux. Alors, pour tous $\delta, \delta' \in \Delta^*$, distincts, on a $\inf(\delta, \delta') = 0$, donc $G_\delta \cap G_{\delta'} = \{1\}$ et, si $x \in G_\delta$ et $y \in G_{\delta'}$, $\delta(z(x, y)) = 0$, donc $z(x, y) = 1$ et $yx = xy$. Par ailleurs, si $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ sont les éléments de Δ^* et distincts, ils sont incomparables deux à deux, et, si

$$x_1 x_2 \cdots x_s = x'_1 x'_2 \cdots x'_s, \text{ où, pour tout } i = 1, 2, \ldots, s\,,$$

x_i, x'_i sont les éléments de H et sont tels que $\delta(x_i)$ et $\delta(x'_i)$ sont moins ou égal à δ_i, on a, en vertu de l'axiome **VI**, $\delta(x_i^{-1} x'_i) < \delta_i$, donc égal à 0, et $x_i^{-1} x'_i = 1$, donc $x_i = x'_i$. Ainsi, G est le composé direct $\bigoplus\limits_{\delta \in \Delta^*} G_\delta = \bigoplus\limits_{\delta \in \Delta} G_\delta$ des G_δ $(\delta \in \Delta^*$ ou $\delta \in \Delta)$. Donc, une telle extragraduation est une graduation, où un des grades vides est considéré comme le grade de 1.

Vice versa, une graduation, où tout élément homogène de G est muni d'un grade, est une extragraduation de G avec l'ensemble des grades de cette forme.

Exemple 2. — Supposons que $\Delta = \Delta^* \cup \{\omega, 0\}$, où tous les $\delta \in \Delta^*$ sont plus que ω et incomparables deux à deux, et où $\omega > 0$. Alors, si δ, $\delta' \in \Delta^*$ sont distincts, on a $\inf(\delta, \delta') = \omega$, donc $G_\delta \cap G_{\delta'} = G_\omega$ et, si $x \in G_\delta$ et $y \in G_{\delta'}$, on a $\delta(z(x, y)) \leq \omega$, donc $z(x, y) \in G_\omega$. Ainsi G_ω commute, pour tout $\delta \in \Delta^*$, avec tout élément de G_δ, donc avec tout élément de $H = \bigcup\limits_{\delta \in \Delta^*} G_\delta$, donc, puisque H engendre G, avec tout élément de G. Par suite, G_ω est invariant dans G.

D'autre part, tous $x, y \in G$ commutent $(\text{mod}\, G_\omega)$. Donc, G/G_ω est, le composé direct $\bigoplus\limits_{\delta \in \Delta^*} (G_\delta / G_\omega)$ des G_δ / G_ω, $\delta \in \Delta^*$. Ainsi (voir [12], p. 77), G est un groupe quasi-gradué, dont $C = G_\omega$ est le cœur, et $E : \Delta \to Sg(G)$ est, à petite différence de notation, sa quasi-graduation$^{(*)}$. Il est évident, d'autre part, que (à cette différence de notations près) l'extragraduation d'un groupe quasi-gradué est de la forme considérée.

1.2. Point de vue semi-homogène.

On sait (voir Chapitre I) que, dans le cas des groupes gradués G, la graduation propre est complètement déterminée par la donnée de la partie homogène H, et il existe un système d'axiomes caractérisant les $H \subseteq G$, qui en sont les parties homogènes pour quelque graduation. S'agissant des paragraduations, il est impossible que H détermine la paragraduation correspondante : en effet, si δ et $\delta' > \delta$ sont deux grades contigus tels que le groupe $G_{\delta'} / G_\delta$ ne soit pas simple, et si G_δ $(\subset G^*)$ est un sous-groupe invariant propre de $G_{\delta'}$, on peut ajouter à Δ un nouveau grade δ^* tel que $G_{\delta^*} = G^*$ sans changer H.

Mais on peut se demander :

1) Qu'est ce qui est déterminé dans une paragraduation par la donnée de sa partie homogène H?

$^{(*)}$ En effet, ω est noté 0 dans [12], et notre grade 0 n'y est pas considéré

2) Peut-on caractériser et comment les $H \subseteq G$, qui en sont les parties homogènes pour quelques paragraduation?

Si H est un sous-ensemble de G et si $x \in H$, soit $H(x) = \{y \in H\ ,\ xy \in H\}$. Alors, H est la partie homogène de G pour quelque paragraduation π de G si, et seulement si, H satisfait aux trois axiomes suivants :

1°) Si $x \in H$, $g(x) = \{y \in H; H(y) \supseteq H(x)\}$ est un sous-groupe invariant de G.

Remarques.

1) Donc $z = z(x,y) = yxy^{-1}x^{-1} \in g(x) \cap g(y)$, d'où résulte que $z \in H$ et $H(z) \supseteq H(x) \cup H(y)$;

2) Un groupe $g \subseteq H$ est dit *fortement saturé* si $x \in g$ implique $g(x) \subseteq g$.

2°) Si $A \subseteq H$ est tel que, pour tous $x, y \in A$, on ait $xy \in H$, il existe un sous-groupe $g \subseteq H$ de G fortement saturé tel que $A \subseteq g$.

3°) *(a)* H engendre G et

(b) il l'engendre avec le système de relations $\mathbb{R}$.

Le couple $(G, H \subseteq G)$, où H satisfait aux axiomes **1°) – 3°)** , définit, donc, la paragraduation de G à l'équivalence et est appelé le *groupe paragradué* du point de vue semi-homogène. Il permet, d'ailleurs, de construire, d'une manière canonique, une certaine paragraduation appartenant à cette classe d'équivalence. Le groupe paragradué (G, H) est extragradué, si, et seulement si, au lieu de la partie (b) de l'axiome **3°**), il satisfait à l'axiome

4°) Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n \in H$, tels que tous les $H(u_i)$ soient incomparables deux à deux (par rapport à $\subset$), et $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n \in H$, tels que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, on ait $H(x_i) \cap H(x'_i) \supseteq H(u_i)$. Alors, $x_1x_2 \cdots x_n = x'_1x'_2 \cdots x'_n$ implique pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $H(x_i^{-1}x'_i) \supset H(u_i)$ (on a bien $x_i^{-1}x'_i \in H$, car $x_i, x'_i \in g(u_i)$).

1.3. Point de vue homogène.

On considère les parties homogènes H des groupes G avec la composition partielle xy induite par celle de G (la composabilité des $x, y \in H$ est notée $x \# y$ et équivaut à $xy \in H$ dans G). On appellera une structure $(H; xy)$, où xy est une composition partielle, *paragroupoïde* si elle est de ce type. Soit $H(x) = \{y \in H; x \# y\}$. Alors, en traduisant les parties des axiomes **1°) – 3°)**, qui ne font intervenir que les éléments de H et leur composition *partielle* dans H, on obtient, d'abord, les conditions **(I*) – (III*)** suivantes, pour que $(H; xy)$ soit un paragroupoïde :

(I*) Il existe $1 \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, on ait $1 \# x$ et $1x = x$.

(II*) *a)* Si $x \in H$, la composition xy est partout définie sur

$$g(u) = \{v \in H; H(v) \supseteq H(u)\} ,$$

et $g(u)$ est un groupe par rapport à cette composition ;

b) Si $x \# y$, on a $y \# x$, et il existe un $z = z(x, y) \in H$ tel que

$$z \# xy, \;\; yx = z(x, y)xy \;\text{ et }\; H(z) \supseteq H(x) \cup H(y) .$$

Remarques.

1) Un $g \subseteq H$ est dit un *sous-groupe* de H si xy y est partout définie et g est un groupe par rapport à cette composition ;

2) Un sous-groupe g de H est dit *fortement saturé* si $x \in g$ implique $g(x) \subseteq g$.

(III*) Si $A \subseteq H$ est tel que, pour tous $x, y \in A$, on ait $x \# y$, il existe un sous-groupe fortement saturé g de H tel que $A \subseteq g$.

Les structures $(H; xy)$ satisfaisant aux axiomes **(I*)** – **(III*)** s'appelle *quasi-groupoïdes.* Ce $(H; xy)$ est, en fait, un amalgame de groupes, à savoir celui de tous les sous-groupes fortement saturés de H. La structure $(H; xy)$ est un paragroupoïde si, et seulement si, cet amalgame de groupe peut-être immergé d'une manière invariante dans un groupe G (c'est-à-dire d'une manière telle que l'image de tout groupe de l'amalgame devienne un sous-groupe invariant de G) et de telle manière que G soit engendré par H juste avec le système $\mathbb{R}$ précédemment décrit de relations, réunion de l'ensemble des relations H-internes

$$\{xyz^{-1} = 1 \,;\; x, y, z \in H \,;\; x \# y, \; xy = z \text{ dans } H\}$$

et celui des relations gauches de commutation

$$\{z(x, y)xyx^{-1}y^{-1} = 1 \,;\; x, y \in H, \; yx = z(x, y)xy \text{ dans } G\}$$

obtenues après l'immersion. Pour étudier l'ensemble de telles immersions de $(H; xy)$ (à $(H; xy)$-isomorphie), on considère les fonctions $u : H \times H \to H$ qui sont, en quelque sorte, candidats pour que $u(x, y)$ devienne, après une telle immersion invariante convenable, le commutateur $yxy^{-1}x^{-1}$ des y et x. Pour que u puisse prétendre à ce rôle, il faut que

a) $H(u(x, y)) \supseteq H(x) \cup H(y)$ et

b) $u(x, y) = z(x, y)$ si $x \# y$ (où $z(x, y)$ a été défini par l'axiome **(II*)** b)).

Une telle fonction est dite *morphisante.* Si $F = F(H)$ est le groupe libre engendré par H, soit N_u son sous-groupe invariant, engendré par ses éléments

$$xyz^{-1} \;\; (x \# y \text{ et } xy = z \text{ dans } (H; xy)) \text{ et } \; u(x, y)xyx^{-1}y^{-1} \;\; (x, y \in H).$$

Alors, $\eta_u : x \to xN_u$ est une application de H dans F/N_u, et on montre facilement que $(H;xy)$, en tant qu'amalgame de ses sous-groupes fortement saturés, est immersible dans un groupe d'une telle manière invariante que, pour tous $x, y \in H$, on ait $yxy^{-1}x^{-1} = u(x, y)$ si, et seulement si, η_u est une telle immersion de H dans F/N_u (dans ce cas, H engendre F/N_u précisément avec le système de relations $\mathbb{R} = \mathbb{R}_u = \{v = 1\,;\ v \in N_u\}$). On montre, en employant, en particulier, l'axiome **(II*)** que ceci a lieu si, et seulement si :

α) pour tout $x \in H$, $xN_u \cap H = \{x\}$;

β) pour tous $x, y \in H$, $xyN_u \cap H \neq \emptyset$ implique $x \# y$ dans $(H;xy)$.

Si une fonction morphisante satisfait à ces conditions, elle est dite une fonction *linéarisante*, et le groupe paragradué $(F/N_u;H)$ (considéré à $(H;xy)$-isomorphie et équivalence près) est dit le *u-linéarisé* de $(H;xy)$ et est noté $(\overline{H;xy,u})$ (et $(H;xy)$ est dit *u-linéarisable*). Un quasi-groupoïde peut n'avoir aucune fonction linéarisante, auquel cas il n'est pas un paragroupoïde, et aussi il peut en avoir plusieurs, auquel cas il est un paragroupoïde "de plusieurs manières". Si $(H;xy)$ est un quasi-groupoïde commutatif (autrement dit, tel que si $x \# y$ (ce qui implique $y \# x$) on ait $yx = xy$) il est immersible, en tant qu'amalgame de ses sous-groupes fortement saturés, dans un groupe commutatif (auquel cas $(H;xy)$ est dit *commutativement linéarisable*) si, et seulement si, $u(x, y) = 1$ (on notera cette fonction morphisante 1, et on la notera 0 si xy est écrite additivement : $x + y$) est une fonction linéarisante. Donc, si un quasi-groupoïde commutatif est "commutativement paragroupoïde" il l'est d'une seule manière, le groupe paragradué correspondant ne pouvant être que $(\overline{H;xy,1})$.

L'étude des quasi-groupoïdes (même quand ils sont des paragroupoïdes) peut se faire directement, sans faire intervenir les groupes paragradués englobant quand ils existent. L'existence ou la non-existence des linéarisés n'influe guère sur la possibilité et la manière de définir les structures dérivées, ni sur les propriétés de ces structures. Les quasi-groupoïdes sont, ainsi, des structures plus générales que les groupes paragradués. Si u est une fonction morphisante d'un quasi-groupoïde $(H;xy)$, ce quasi-groupoïde est dit un *u-extragroupoïde* s'il satisfait à l'axiome :

(IV*) Il existe un sous-groupe $\overline{F} \supseteq N_u$ de $F(H)$ satisfaisant à la condition suivante : si $u_1, u_2, \ldots, u_n \in H$ sont tels que $H(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ soient incomparables deux à deux pour $\subset$, et si $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \in H$ sont tels que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on ait $H(x_i) \cap H(x'_i) \supseteq H(u_i)$ (donc, $x_i, x'_i \in g(u_i)$),
$$x_1x_2\cdots x_n \equiv x'_1x'_2\cdots x'_n (\operatorname{mod} \overline{F}) \text{ implique } H(x_i^{-1}x'_i) \supset H(u_i)$$
(à remarquer que $x_i^{-1}x'_i \in g(u_i) \subseteq N$).

On prouve que, si u satisfait à l'axiome **(IV*)**, alors :

1) Elle est linéarisante, donc, un u-extragroupoïde est un u-paragroupoïde ;

2) $\overline{F} = N_u$.

On dit que $(H; xy)$ est un extragroupoïde s'il est un u-extragroupoïde pour quelque u. On peut prouver pour les extragroupoïdes quelques résultats supplémentaires.

Les catégories des groupes paragradués et extragradués sont fermées par rapport aux agglutinations par les homomorphismes quasi-homogènes (définis comme dans le cas gradué). Les catégories des quasi-groupoïdes et des paragroupoïdes (mais pas celle des extra-groupoïdes) sont fermées par rapport à la composition cartésienne et cartésienne restreinte de leurs supports, et dans le cas commutatif, par rapport à Hom et à End.

Les groupes gradués peuvent être considérés comme paragradués à condition de comporter le grade vide 0 et d'ordonner Δ de manière que tous les grades significatifs soient maximaux, que $\operatorname{Inf} \Delta^*$, où Δ^* est l'ensemble de ces grades, soit 0, et que $(\Delta, <)$ soit inférieurement complet et supérieurement inductif. Les groupes quasi-gradués peuvent être aussi considérés comme paragradués. Ils sont, d'ailleurs, extragradués.

Les groupes gradués et quasi-gradués se caractérisent, parmi les groupes extragradués, par la forme de l'ensemble (ordonné) des grades $(\Delta, <)$ de leur graduation propre. Un groupe extragradué est gradué si, et seulement si, l'ensemble des grades $(\Delta, <)$ de sa graduation propre (qui est unique sans les conditions qui suivent, aux noms des grades près) est tel que $\Delta = \Delta^* \cup \{0\}$, où tous les $\delta \in \Delta^*$ sont maximaux et plus que 0. Et il est quasi-gradué sans être gradué si, et seulement si, cet ensemble $(\Delta, <)$ est tel que $\Delta = \Delta^* \cup \{\omega, 0\}$, où tous les $\delta \in \Delta^*$ sont plus que ω et ω est plus que 0.

2. Anneaux paragradués

Soient $(A; x+y, xy)$ un anneau (pas forcément associatif), et $\pi : \Delta \to Sg(A)$ une paragraduation de son groupe additif $(A; x+y)$. L'application π est dite une *paragraduation d'anneau* de $(A; x+y, xy)$ si,

pour tous $\xi, \eta \in \Delta$ il existe un ζ tel que $A_\xi A_\eta \subseteq A_\zeta$ (où $A_\delta = \pi.\,\delta$)

et l'anneau $(A; x+y, xy)$ muni de π est dit un *anneau paragradué*. Une application $(\xi, \eta) \to \xi\eta$ de $\Delta \times \Delta$ dans Δ est dite une *multiplication* (ou *composition*) des grades (pour π) si :

1) pour tous ξ, η, on a $A_\xi A_\eta \subseteq A_{\xi\eta}$;

2) pour tous $\xi, \xi', \eta, \eta' \in \Delta$, $\xi \leq \xi'$ et $\eta \leq \eta'$ impliquent $\xi\eta \leq \xi'\eta'$.

La multiplication

$$\xi\eta = \mathrm{Sup}\{\delta(xy)\,;\ x, y \in H,\ \delta(x) = \xi,\ \delta(y) = \eta\}\,,$$

où H est la partie homogène de $(A; x{+}y)$ pour π est définie et satisfait aux conditions **1)** et **2)**. Elle s'appelle la *multiplication minimale* des grades (pour π). Une paragraduation π de $(A; x{+}y, xy)$ est dite *propre* si elle l'est en tant que paragraduation de $(A; x{+}y)$ et si elle est munie de la multiplication minimale de ses grades. Si π est une extragraduation de $(A; x{+}y)$ elle en est dite une de $(A; x{+}y, xy)$, qui est dit un *anneau extragradué*.

On montre que l'existence, pour tous $\xi, \eta \in \Delta$, d'un $\zeta \in \Delta$ tel que $A_\xi A_\eta \subseteq A_\zeta$ équivaut à deux conditions :

(I) $H^2 \subseteq H$;

(II) Si $x, x', y, y' \in H$ sont tels que $x + x',\ y + y' \in H$, on a $xy + x'y' \in H$.

(Contrairement au cas des anneaux gradués, **(II)** n'est pas une conséquence de **(I)**).

Donc, du *point de vue semi-homogène*, le couple $(A = (A; x{+}y, xy),\ H \subseteq A)$ est un anneau paragradué si, et seulement si, en posant $H(x) = \{y \in H\,;\ x{+}y \in H\}$, $(x \in H)$, on a :

1$^{\mathrm{o}}$) Si $a \in H,\ A(a) = \{x \in H\,;\ H(x) \supseteq H(a)\}$ est un sous-groupe de $(A; x{+}y)$;

2$^{\mathrm{o}}$) Si $A \subseteq H$ est tel que $A + A \subseteq H$, il existe un sous-greoupe $g \subseteq H$ de $(A; x{+}y)$, qui est fortement saturé et tel que $A \subseteq g$;

3$^{\mathrm{o}}$) H engendre le groupe *abélien* $(A; x{+}y)$ avec le système des relations $x + y = z$, où $x, y, z \in H$ et on a $x + y = z$ dans $(A; x{+}y)$;

4$^{\mathrm{o}}$) $H^2 \subseteq H$;

5$^{\mathrm{o}}$) Si $x, x', y, y' \in H,\ x + x' \in H$ et $y + y' \in H$ impliquent $xy + x'y' \in H$.

Il est clair quand (G, H) est un anneau extragradué.

L'analogue homogène, dans le cadre des anneaux, des quasi-groupoïdes (appelés quasi-annéïdes non associatifs) est la structure $(H; x{+}y, xy)$ avec l'addition partielle $x{+}y$ et la multiplication partout définie xy satisfaisant aux axiomes suivants. On pose, si $x \in H,\ H(x) = \{y \in H\,;\ x \# y\}$. Alors, ces axiomes sont

1*) Il existe un $0 \in H$ tel que $H(0) = H$ et que, pour tout $x \in H$, on ait $0 + x = x$;

2*) Si $a \in H,\ x{+}y$ est partout défini sur $g(a) = \{x \in H\,;\ H(x) \supseteq H(a)\}$ et $g(a)$ est un groupe abélien par rapport à $x + y$.

3*) Si $A \subseteq H$ est tel que, pour tous $x, y \in A$, on ait $x \# y$, il existe un sous-groupe fortement saturé g de $(H; x{+}y)$ (autrement dit, $x + y$ est partout défini sur g, g

est un groupe par rapport à $x+y$ et $x \in g$ implique $g(x) \subseteq g$), tel que $A \subseteq g$;

4*) $x \# x'$ et $y \# y'$ impliquent $xy \# x'y'$.

Remarque. — En particulier, $x \# y$ implique $zx \# zy$ et $xz \# yz$.

5*) Si $x \# y$, on a $z(x+y) = zx + zy$ et $(x+y)z = xz + yz$.

On prouve que si 0 désigne la fonction-morphisante $u(x,y) = 0$ du quasi-groupoïde additif $(H; x{+}y)$ de $(H; x{+}y, xy)$, la multiplication xy de H induit canoniquement une multiplication sur le groupe abélien additif $F(H)/N_0$ $(= Z(H)/N^*$, où $Z(H)$ est le Z-module libre engendré par H et N^* en est le sous-groupe engendré par les $x + y - z$, où $x, y, z \in H$, $x \# y$ et $x + y = z$ dans H), qui en fait un anneau. Donc, $(H; x{+}y, xy)$ est la partie homogène d'un anneau paragradué si, et seulemnt si, $(H; x{+}y)$ est commutativement linéarisable (car, dans ce cas, la multiplication canonique de $F(H)/N_0$ s'obtient en prolongeant celle de H par distributivité. Dans ce ces, $(H; x{+}y, xy)$ est dit un *parannéïde non-associatif.* Il est une telle partie d'un anneau extragradué, auquel cas il est dit un *extrannéïde non-associatif,* si, les axiomes “multiplicatifs' **4**$^{\text{o}}$) et **5**$^{\text{o}}$) restant les mêmes, $(H; x{+}y)$ est un 0-extragroupoïde. Si la multiplication xy est associative, $(H; x{+}y, xy)$ satisfaisant aux axiomes **1**$^{\text{o}}$) – **5**$^{\text{o}}$) est appelé un *quasi-annéïde* et il est dit un *parannéïde* resp. *extrannéïde* si $(H; x{+}y)$ est un 0-paragroupoïde resp. 0-extragroupoïde.

Un quasi-annéïde est dit un quasi-corpoïde s'il est un presque-groupe multiplicatif. Mais, les corpoïdes sont les seuls quasi-corpoïdes.

3. Modules paragradués

Soient $A = (A; x{+}y, xy)$ un anneau et $M = (M; x{+}y)$ un A-module, dont soit ax $(a \in A,\ x \in M)$ la multiplication externe. Soient $\pi : \Delta \to Sg((A; x{+}y))$ et $\Pi : D \to Sg(M)$ les paragraduations et H, N les parties homogènes de l'anneau A resp. du groupe additif M. Le couple (π, Π) est dit une *paragraduation de l'A-module M* si,

$$\text{pour tous } \xi \in \Delta \text{ et } s \in D \text{ il existe un } t \in D \text{ tel que } A_\xi M_s \subseteq M_t$$

(on pose $A_\delta = \pi.\delta$, $M_d = \Pi.d$ et si $a \in H$, $x \in N$, le grade de a par rapport à π sera noté $\delta(a)$, et celui de x par rapport à Π sera noté $d(x)$).

Une multiplication (externe) des grades $(\xi, s) \to \xi s$ est une application $\Delta \times D \to D$ telle que

$$A_\xi M_s \subseteq M_{\xi s} \text{ et que } s \leq s' \text{ et } \xi \leq \xi' \text{ impliquent } \xi s \leq \xi' s'.$$

La multiplication $\xi s = \mathrm{Sup}\{d(ax)\ ;\ a \in H,\ x \in N,\ \delta(a) = \xi,\ d(x) = s\}$ est dite *minimale* et $(\pi, \Pi, \xi s)$ est dite une paragraduation *propre* du A-module M si π et Π sont propres et ξs est minimale. Si Π est une extragraduation de $(M; x{+}y)$ le module paragradué considéré est dit un *module extragradué*.

Si A est un anneau paragradué unitaire (autrement dit, comporte une unité homogène 1), le module gradué considéré est dit *unitaire* si, pour tout $x \in M$, on a $1x = x$.

Du point de vue semi-homogène, la structure $((A,H),(M,N),ax)$, où (A,H) est un anneau paragradué, (M,N) est un groupe commutatif paragradué et ax une multiplication externe $A \times M \to M$, est un module paragradué si, et seulement si :

1^o) $HN \subseteq N$;

2^o) pour tous $a, a' \in H$ et $x, x' \in N$, $a + a' \in H$ et $x + x' \in N$ implique $ax + a'x' \in N$.

Le module paragradué est dit *extragradué* si (M,N) est un groupe extragradué.

Du point de vue homogène, une structure $((H; x{+}y, xy), (N; x{+}y), ax)$, où $(H; x{+}y, xy)$ est un quasi-annéïde, $(N; x{+}y)$ est un quasi-groupoïde commutatif et ax est une multiplication externe $H \times N \to N$, est dite un quasi-moduloïde si ax satisfait aux axiomes :

1°) $(ab)x = a(bx)$ $(a, b \in H,\ x \in N)$;

2°) $a \# b$ et $x \# y$ $(a, b \in H\ ;\ x, y \in N)$ implique $ax \# by$
(en particulier, $a \# b$ implique $ax \# bx$ et $x \# y$ implique $ax \# ay$) ;

3°) $a \# b$ implique $(a + b)x = ax + bx$.

4°) $x \# y$ implique $a(x + y) = ax + ay$.

Si $(H; x + y, xy)$ est un paragroupoïde et si $(N; x + y)$ est un 0-paragroupoïde resp. 0-extragroupoïde commutatifs, le quasi-moduloïde $((H; x{+}y, xy), (N; x{+}y); ax)$ est dit un *paramoduloïde* resp. *extramoduloïde*.

Dans ce cas, si $(A; x{+}y, xy)$ resp. $(M; x{+}y)$ est le linéarisé de $(H; x{+}y, xy)$ resp. le 0-linéarisé de $(N; x{+}y)$, ay s'étend par distributivité en une application $A \times M \to M$, qui fait de $(M; x{+}y)$ un $(A; x{+}y, xy)$-module paragradué resp. extragradué.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki. — *Algèbre*, Chap. II, 3e édit., Paris, Hermann, 1962.

[2] M. Chadeyras. — *Essai d'une théorie nœthérienne pour les anneaux commutatifs, dont la graduation est aussi générale que possible*, Bull. Soc. Math. France , Supplément, Mémoire n^{o} 22, Paris, 1970.

[3] C. Chevalley. — *The construction and study of certain important algebras*, Publ. of the Math. Soc. of Japan 1. Tokyo, 1955.

[4] A. Halberstadt. — *Théorie artinienne homogène des anneaux gradués aux grades non commutatifs réguliers*, (Thèse de doctorat d'État, miméographiée, soutenue en 1971, Paris VI.

[5] M. Krasner. — *Une généralisation de la notion de corps-corpoïde. Un corpoïde remarquable de la théorie des corps valués*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **219** (1944), 345–347.

[6] M. Krasner. — *Hypergroupes moduliformes et extramoduliformes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **219** (1944), 473–476.

[7] M. Krasner. — *Théorie de la ramification dans les exensions finies des corps valués : hypergroupe d'inertie et de ramification ; théorie extrinsèque de la ramification*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **220** (1945), 28–30.

[8] M. Krasner. — *Quelques méthodes nouvelles dans la théorie des corps valués complets*, Algèbre et théorie des nombres (Colloque Int. du C.N.R.S., n^{o} **24**, Paris 1949), Édit. C.N.R.S., Paris, 1950.

[9] M. Krasner. — *Congruences multiplicatives. Squelettes et corpoïdes*, Séminaire Krasner, 1953–54, Vol. 1, exposé n^{o} 4, Secrétariat Math. de la Fac. des Sc. Paris.

[10] M. Krasner. — *Théorie élémentaire des corpoïdes commutatifs sans torsion*, Séminaire Krasner, 1953–54, Vol. 2, exposé n^{o} 5, Secrétariat Math. de la Fac. des Sc. Paris, 1956.

[11] M. Krasner. — *Théorie de Galois des corpoïdes commutatifs sans torsion et ses applications à la théorie de la ramification des extensions algébriques des corps valués*, Preprint de l'Univ. de Paris VI, 1978.

[12] M. Krasner. — *Anneaux gradués généraux*, Colloque d'Algèbre Rennes (1980), 209–308.

[13] M. Krasner. — *Le vieux qui est neuf*, Revue roumaine de math. pures et appliquées **XXVII** (1982), 443–472.

[14] M. Krasner et M. Vuković. — *Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules), I*, Proc. Japan Acad. **62** (1986), Ser. A, n^{o} 9, 350–352.

[15] M. Krasner et M. Vuković. — *Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules), II*, Proc. Japan Acad. **62** (1986), Ser. A, n^{o} 10, 389–391.

[16] M. Krasner et M. Vuković. — *Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules), III*, Proc. Japan Acad. **63** (1987), Ser. A, n^{o} 1, 10–12.

[17] M. Krasner et M. Vuković. — *Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules)*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, **77**, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, 1987.

[18] A. Kouroch. — *Théorie des groupes*, (en russe), 3e édition, Édit. "Naouka" Moscou (1967), (voir chap. 9, § 35).

[19] P. Ribenboim. — *Théorie des valuations*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1968.

[20] P. RIBENBOIM. — *Il mondo Krasneriano*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1982.

[21] P. SAMUEL et O. ZARISKI. — *Commutative Algebra*, Vol. II, D. van Nostrand Co, Princeton, 1960.

– ◇ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5582 CNRS-UJF
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

Université de Sarajevo
Faculté ses Sciences
Département de Mathématiques
71000 SARAJEVO (Bosnie et Hercegovine)

email: mirjanav@yahoo.com

(30 mai 2001)