Renormalisation du produit, Jacobiens et Transformations de Riesz

Lucien Chevalier

Prépublication de l'Institut Fourier numéro 519 (2000)

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Résumé : En transposant en analyse harmonique un algorithme utilisé pour d'autres raisons en théorie des martingales, nous introduisons et nous étudions un nouvel opérateur de "renormalisation du produit", au sens de Coifman-Dobyinski-Meyer. Cet opérateur, qui semble échapper à la théorie générale des opérateurs pseudo-différentiels bilinéaires, a plusieurs applications, dont nous donnons quelques exemples dans cet article, concernant l'appartenance aux espaces de Hardy de certaines quantités non linéaires.

Abstract : The "correction algorithm", applied in probability theory to the pointwise product of two martingales, has a natural analogue in the real-variable setting. It turns out that the corresponding bilinear operators obtained in this way provide us with a new "renormalization algorithm", in the sense of Coifman-Dobyinski-Meyer. We give a few examples of applications, regarding multidimensional Hardy spaces and various nonlinear quantities.

Mots-clés : Renormalisation, applications bilinéaires, espaces de Hardy.

Classification : 42B30, 47H99, 47G30.

1. — Introduction

On désigne par n un entier ≥ 1, fixé une fois pour toutes, par L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$ les espaces relatifs à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, et H^p $(p > 0)$ les espaces de Hardy correspondants. Etant donné deux fonctions f et $g \in L^2$, la *renormalisation du produit (ponctuel)* fg consiste ([8]) à soustraire de ce produit une certaine fonction $Q(f,g)$, où Q est une application bilinéaire de $L^2 \times L^2$ dans L^1, de façon à ce que le *produit renormalisé* $R(f,g) = fg - Q(f,g)$ appartienne à H^1. Bien entendu, on demande aussi aux opérateurs Q et R de remplir certaines conditions supplémentaires, dont nous donnerons le détail plus loin, afin que l'opération soit non triviale et présente un intérêt. La renormalisation est une des méthodes utilisées pour démontrer ([8]) que certaines quantités non linéaires qui se présentent comme sommes de produits de fonctions appartiennent en fait à l'espace H^1 (et non seulement à L^1 comme il résulte facilement, en général, des inégalités de Hőlder).

Cette renormalisation du produit présente certaines analogies avec une opération couramment pratiquée, mais dans un but à priori différent, en théorie des martingales. Plus précisément, si M et N sont deux martingales continues, nulles en 0 et bornées dans L^2, leur produit MN est un processus borné dans L^1, qui n'est en général plus une martingale. Les probabilistes redressent la situation en retranchant de MN le *compensateur* $\langle M, N\rangle$, ce qui fait du *processus compensé* $MN - \langle M, N\rangle$ une martingale, comme il résulte aussitôt de la formule d'Itô. Ce processus est évidemment borné dans L^1, en raison de l'inégalité de Kunita-Watanabe $|\langle M, N\rangle| \leq \langle M, M\rangle^{1/2}\langle N, N\rangle^{1/2}$ et de la propriété d'isométrie $E(M^2) = E(\langle M, M\rangle)$. Mais on a beaucoup mieux : en utilisant l'expression de $MN - \langle M, N\rangle$ comme intégrale stochastique et les inégalités de Burkholder-Gundy, on voit que ce processus *appartient à l'espace* H^1 *probabiliste.* Compte tenu des analogies qui existent entre les deux contextes, il *doit* se passer quelque chose d'analogue en analyse harmonique. L'objet de cet article est donc d'identifier l'opérateur bilinéaire renormalisateur Q qui correspond au compensateur probabiliste, et de montrer qu'il vérifie toutes les propriétés requises. Un outil essentiel sera une égalité qui correspond en analyse à la formule d'Itô des probabilistes, que nos récents résultats concernant une "formule de Tanaka" en analyse ([2], [4]) nous ont permis d'obtenir facilement ([6]).

Nous rappelons maintenant les règles du jeu de la renormalisation, telles qu'elles sont énoncées dans [8]. Les opérateurs Q et R sont deux applications bilinéaires symétriques de $L^2 \times L^2$ dans L^1, permettant d'écrire le produit fg de deux fonctions de L^2 sous la forme

$$fg = Q(f, g) + R(f, g) \,. \tag{1}$$

L'opérateur Q vérifie la condition

$$Q(f, \cdot) = 0 \quad \text{si} \quad f \quad \text{est constante.} \tag{2}$$

L'opérateur R vérifie la condition déjà énoncée

$$R(L^2 \times L^2) \subset H^1 \,, \tag{3}$$

ainsi que la propriété de continuité suivante, dans laquelle la notation $\rightharpoonup$ exprime la convergence au sens des distributions : Pour tout couple $((f_j), (g_j))$ de suites bornées de L^2 telles que $f_j \rightharpoonup f$ et $g_j \rightharpoonup g$ lorsque $j \to +\infty$, alors

$$R(f_j, g_j) \rightharpoonup R(f, g) \tag{4}$$

lorsque $j \to +\infty$.

Nous devons également rappeler quelques notations et propriétés relatives à l'opérateur g_* de Littlewood-Paley, qui jouera un rôle important dans la suite.

On désigne par $\mathbb{R}_+^{n+1}$ le demi-espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, dont le point courant est systématiquement noté $z = (x, y)$. Pour tout point $\xi \in \mathbb{R}^n$, on note p_ξ le noyau de Poisson relatif au point ξ, défini dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ par

$$p_\xi(z) = \frac{c_n y}{(|x-\xi|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} ,$$

où c_n désigne la constante de normalisation habituelle.

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications mesurables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(0,1)|f(\xi)|\, d\xi < +\infty.$$

A toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on peut associer son intégrale de Poisson $P(f)$, définie dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ par

$$P(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(z) f(\xi)\, d\xi.$$

On associe à toute fonction $f \in \mathcal{M}$ sa fonction maximale non tangentielle $N(f)$, définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$N(f)(\xi) = \sup_{|\xi - x| < y} |P(f)(x,y)| .$$

L'espace de Hardy H^1 est (par exemple) défini comme l'ensemble des fonctions $f \in L^1$ telles que $N(f) \in L^1$, pour lesquelles on pose $\|f\|_{H^1} = \|N(f)\|_1$.

Dans tout l'article, la notation ∇ désigne l'opérateur gradient dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$. A toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on associe également la fonction de Littlewood-Paley $g_*^2(f)$, définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$g_*^2(f)(\xi) = 2 \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y p_\xi(z) |\nabla P(f)(z)|^2\, dz .$$

Il est classique ([23], pp. 82-83) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_*^2(f)(\xi)\, d\xi = 2 \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y |\nabla P(f)(z)|^2\, dz = \|f\|_2^2 , \tag{5}$$

et par suite la fonctionnelle quadratique g_*^2 applique L^2 dans L^1. Nous noterons G_* l'opérateur obtenu à partir de cette fonctionnelle par bilinéarisation. Précisément, si nous posons

$$G_*(f,g)(\xi) = 2 \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y p_\xi(z) \nabla P(f)(z) \nabla P(g)(z)\, dz$$

pour tout couple $(f, g) \in L^2 \times L^2$ et (presque) tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, il est clair que nous définissons un opérateur bilinéaire symétrique $G_* : L^2 \times L^2 \to L^1$. Notre résultat principal est le

THÉORÈME 1. — *Posons, pour tout couple* $(f, g) \in L^2 \times L^2$,

$$Q(f,g) = G_*(f,g) \quad \text{et} \quad R(f,g) = fg - G_*(f,g)\ .$$

Le couple d'opérateurs (Q, R) *réalise la renormalisation du produit, i. e. vérifie les propriétés* (1), (2), (3) *et* (4).

Le plan de cet article est le suivant : Le §2 est consacré à la preuve du théorème précédent (celle de la propriété (3) est indépendante de celle que nous avons donnée dans [3]). Nous indiquons ensuite (§3) comment se situe notre opérateur par rapport à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels bilinéaires développée dans [12] et [11]. Enfin, le §4 contient des exemples d'applications.

2. — Preuve du résultat principal

Le couple (Q, R) défini dans l'énoncé du théorème 1 vérifie trivialement les propriétés (1) et (2). Pour établir la partie non triviale du théorème 1, nous utiliserons comme principal outil le théorème suivant, qui donne une égalité ponctuelle entre fonctions, directement inspirée de la formule d'Itô de la théorie des martingales. Cette égalité nous fournira une expression explicite de l'opérateur R, à partir de laquelle nous montrerons que les propriétés (3) et (4) sont satisfaites. Pour énoncer ce théorème, il est commode d'introduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des éléments de L^2 pour lesquels

$$\|f\|_{\mathcal{E}} = \|f\|_2 + \sup_{z \in \mathbb{R}^{n+1}_+} |\nabla P(f)(z)| < +\infty\ .$$

Il est clair que l'espace $\mathcal{E}$ contient tous les éléments de L^2 qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ et dont les dérivées partielles d'ordre ≤ 2 sont bornées, et notamment les éléments de la classe de Schwartz $\mathcal{S}$. En particulier, $\mathcal{E}$ est dense dans L^2. Notre version de la “formule d'Itô” est le

THÉORÈME 2. — *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^2$. *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{E}$, *et presque tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *on a l'égalité*

$$\varphi \circ f(\xi) = \varphi(0) + 2 \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y\varphi' \circ (P(f))(z) \nabla P(f)(z) \nabla p_\xi(z)\, dz \\ + \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \varphi'' \circ (P(f))(z) y p_\xi(z) |\nabla P(f)(z)|^2\, dz\ . \quad (6)$$

Ce résultat s'obtient facilement à partir de la “formule de Tanaka” établie par l'auteur dans [2] ou [4] (voir [6] pour une preuve détaillée). Dans le présent article, nous utiliserons uniquement cette formule dans le cas où $\varphi(x) = x^2$, c'est à dire l'égalité

$$f^2 = 4 \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y P(f)(z) \nabla P(f)(z) \nabla p_x(\cdot, y)\, dz + g_*^2(f), \quad (7)$$

derrière laquelle les probabilistes reconnaitront la formule

$$M^2 = 2 \int M\, dM + \langle M, M \rangle \ ,$$

bien connue en calcul stochastique.

Posons, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$,

$$h(f) = 4 \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y P(f)(z) \nabla P(f)(z) \nabla p_x(\cdot, y)\, dz \ .$$

Si (f_j) est une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ qui converge dans L^2 vers f, alors les suites (f_j^2) et $(g_*^2(f_j))$ convergent dans L^1 vers f^2 et $g_*^2(f)$ respectivement, donc la suite $h(f_j)$ converge dans L^1 vers une fonction, que nous noterons encore $h(f)$, qui réalise l'égalité

$$f^2 = h(f) + g_*^2(f) \ , \tag{8}$$

ce qui permet d'étendre la formule (7) aux fonctions de L^2.

Pour prouver que la propriété (3) est satisfaite, nous allons exprimer l'opérateur R au moyen de la fonctionnelle h que nous venons d'introduire et utiliser un argument de dualité. En utilisant l'égalité (8), on voit que

$$R(f, g) = \frac{1}{2} \left(h(f+g) - h(f) - h(g) \right)$$

pour tout couple $(f, g) \in L^2 \times L^2$. En utilisant la définition et les propriétés de la fonctionnelle h on voit que, si (f_j) et (g_j) sont deux suites d'éléments de $\mathcal{E}$ qui convergent dans L^2 vers f et g respectivement, on a

$$R(f, g) = 2 \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y \left(P(f_j) \nabla P(g_j) + P(g_j) \nabla P(f_j) \right)(z) \nabla p_x(\cdot, y)\, dz$$

au sens de la convergence dans L^1. Donc, pour toute fonction $k \in L^\infty$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} R(f, g)(\xi) k(\xi) d\xi \\ &\qquad = 2 \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y \left(P(f_j) \nabla P(g_j) + P(g_j) \nabla P(f_j) \right)(z) \nabla P(k)(z)\, dz \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y P(f_j) \nabla P(g_j)(z) \nabla P(k)(z)\, dz \right)^2 \\ &\qquad \leq \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y |\nabla P(g_j)(z)|^2\, dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y (P(f_j)(z))^2 |\nabla P(k)(z)|^2\, dz \right) \ . \end{aligned} \tag{10}$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y |\nabla P(g_j)(z)|^2\, dz = \frac{1}{2} \|g_j\|_2^2 \ ,$$

et d'autre part on voit en utilisant le th. 2, p. 59 de [24] et une propriété classique des fonctions maximales que

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y(P(f_j)(z))^2 |\nabla P(k)(z)|^2 \, dz \leq C\|N(f_j)\|_2^2 C(\mu) \leq C\|f_j\|_2^2 C(\mu) \,,$$

où μ est la mesure dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ définie par $\mu(dz) = y|\nabla P(k)(z)|^2 \, dz$ et $C(\mu) = \sup_B \mu(T(B))/|B|$, où la borne supérieure porte sur les boules B de $\mathbb{R}^n$, $|B|$ est la mesure de Lebesgue de B et $T(B)$ est la "tente" au dessus de B. Comme $k \in \mathrm{BMO}$, μ est une mesure de Carleson et $C(\mu) \leq C\|k\|_*^2$ ([15]). En utilisant ces inégalités et l'inégalité (10), on obtient l'estimation

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} yP(f_j) \nabla P(g_j)(z) \nabla P(k)(z) \, dz \right| \leq C\|f_j\|_2 \|g_j\|_2 \|k\|_* \,,$$

et évidemment aussi l'estimation obtenue à partir de la précédente en permutant f_j et g_j. Ces estimations et l'égalité (9) montrent que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} R(f,g)(\xi) k(\xi) d\xi \right| \leq C\|f\|_2 \|g\|_2 \|k\|_* \,,$$

ce qui prouve que $R(f,g) \in H^1$ et que $\|R(f,g)\|_{H^1} \leq C\|f\|_2\|g\|_2$, en vertu du théorème de dualité (on sait qu'il suffit d'utiliser comme fonctions-tests des fonctions bornées de BMO ([24], pp. 142-143)).

Il reste à prouver que l'opérateur R vérifie la propriété de continuité (4). Soit $((f_j),(g_j))$ un couple de suites bornées de L^2 telles que $f_j \rightharpoonup f$ et $g_j \rightharpoonup g$ lorsque $j \to +\infty$, et soit φ une fonction test, i. e. un élément de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact définies dans $\mathbb{R}^n$. Nous avons à montrer que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} (R(f_j,g_j)(x) - R(f,g)(x)) \varphi(x) \, dx$$

tend vers 0 quand j tend vers l'infini. Pour cela nous posons, pour tout $t > 0$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout entier $j \geq 0$, $f_t(x) = P(f)(x,t)$, $g_t(x) = P(g)(x,t)$, $f_{j,t}(x) = P(f_j)(x,t)$ et $g_{j,t}(x) = P(g_j)(x,t)$. En utilisant la bilinéarité de R, sa bornitude comme application de $L^2 \times L^2$ dans L^1 et la bornitude dans L^2 des suites (f_j) et (g_j), on voit facilement qu'il suffit de prouver que, pour tout $t > 0$, l'intégrale

$$I(j) = \int_{\mathbb{R}^n} (R(f_{j,t}, g_{j,t})(x) - R(f_t, g_t)(x)) \varphi(x) \, dx$$

tend vers 0 quand j tend vers l'infini. Posons $u = P(f_t)$, $v = P(g_t)$, $u_j = P(f_{j,t})$, $v_j = P(g_{j,t})$ et $w = P(\varphi)$; comme les quatre fonctions f_t, g_t, $f_{j,t}$ et $g_{j,t}$ appartiennent à l'espace $\mathcal{E}$, on a $I(j) = 4(I_1(j) + I_2(j) + I_1'(j) + I_2'(j))$, où

$$I_1(j) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y(u_j - u)(z) \nabla v_j(z) \nabla w(z) \, dz \,,$$

$$I_2(j) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} yu(z)(\nabla v_j - \nabla v)(z)\nabla w(z)\, dz\ ,$$

et où $I'_k(j)$ est obtenu à partir de $I_k(j)$ en permutant les lettres u et v ($k = 1,2$). En utilisant l'inégalité de Schwarz, l'égalité (5) et l'estimation $\|r * s\|_2 \leq \|r\|_2\|s\|_1$, on obtient l'inégalité

$$|I_1(j)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|g_j\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y((u_j - u)(z))^2|\nabla w(z)|^2\, dz\right)^{1/2} ,$$

et par suite il suffit de montrer que l'intégrale du second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 quand j tend vers l'infini. Pour cela, on observe que $\left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y|\nabla w(z)|^2\, dz\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\varphi\|_2 < +\infty$ puisque $\varphi \in \mathcal{D}$. Il suffit donc, en vertu du théorème de convergence dominée de prouver que, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $u_j(z) \to u(z)$ quand $j \to +\infty$, et qu'il existe un nombre C tel que $|u_j - u|(z) \leq C$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ et tout entier $j \geq 0$. La convergence ponctuelle résulte facilement du fait que $f_j \rightharpoonup f$ lorsque $j \to +\infty$. Pour obtenir la bornitude, il suffit de remarquer qu'on a, par simple application de l'inégalité de Schwarz,

$$|u_j(z)| = |P(f_j)(x, y+t)| \leq C(n)\|f_j\|_2(y+t)^{-n/2} \leq C(n)\sup_j \|f_j\|_2\, t^{-n/2}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, ainsi qu'une estimation de la même forme pour $|u(z)|$.

Passons à l'intégrale $I_2(j)$. Un raisonnement identique au précédent montre que $\nabla v_j \to \nabla v$ quand $j \to +\infty$ ponctuellement dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$, et que $|\nabla(v_j - v)(z)| \leq C(y+t)^{-1-n/2}$, où C est un nombre indépendant de j et de z. Le résultat voulu est donc encore une conséquence du théorème de convergence dominée, car on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (y+t)^{-1-n/2} y|u(z)||\nabla w(z)| dz \leq C(n)\|f\|_2\|\varphi\|_2 \int_0^{+\infty} (y+t)^{-1-n/2} dy < +\infty\ .$$

Comme les intégrales $I'_1(j)$ et $I'_2(j)$ se traitent de la même manière, ceci termine la preuve de la propriété (4), et donc celle du théorème 1.

La propriété de bornitude de notre opérateur $R : L^2 \times L^2 \to H^1$ admet l'extension suivante :

PROPOSITION 1. — *Pour tout $p > \frac{2n}{n+1}$, l'opérateur R se prolonge en un opérateur borné de $L^p \times L^p$ dans $H^{p/2}$.*

Démonstration :

Il suffit de montrer qu'il existe un nombre $C(n,p)$ tel que, pour tout couple $(f,g) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, $\|R(f,g)\|_{H^{p/2}} \leq C(n,p)\|f\|_p\|g\|_p$. Posons, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $F(z) = y\nabla(P(f)P(g))(z)$. En utilisant une extension naturelle du théorème 6 de [13] ([6], proposition 2), on voit qu'il suffit de montrer que la norme dans $L^{p/2}$ de la fonction $\mathfrak{S}(F)$ définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$\mathfrak{S}(F)(\xi) = \left(\int_{|x-\xi|<y} |F^2(z)| \frac{dz}{y^{n+1}} \right)^{1/2}$$

est convenablement contrôlée. Mais on a évidemment $\mathfrak{S}(F) \le N(f)S(g)$, où $S(g)$ est l'intégrale d'aire de Lusin-Calderón associée à g. Par suite

$$\|\mathfrak{S}(F)\|_{p/2} \le 4(\|N(f)\|_p\|S(g)\|_p + \|N(g)\|_p\|S(f)\|_p) \le C(n,p)\|f\|_p\|g\|_p \; ,$$

d'où le résultat.

3. — Relations avec la théorie des opérateurs pseudo-différentiels bilinéaires

En utilisant de manière répétée le théorème de Fubini et l'expression bien connue de la transformée de Fourier du noyau de Poisson, on montre facilement que, si f et g sont de bonnes fonctions (par exemple, des éléments de $\mathcal{S}$), alors

$$R(f,g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i(\xi+\eta)\cdot x} \rho(\xi,\eta) \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta)\, d\xi d\eta \; ,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{|\xi+\eta|(|\xi+\eta| - |\xi| - |\eta|)}{(|\xi| + |\eta| + |\xi+\eta|)^2} \; . \tag{11}$$

pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Notre opérateur est donc formellement du type étudié par R. R. Coifman et Y. Meyer dans [12], avec toutefois une restriction importante : le "symbole bilinéaire" ρ ne possède pas la régularité en dehors de $(0,0)$ qui permettrait d'utiliser les résultats de [12] et [11]. En particulier, notre théorème 1 ne semble pas être une conséquence du théorème V.1. de [11] (qui donnerait le résultat voulu en ce qui concerne l'appartenance à H^1, car la condition d'annulation $\rho(\xi,-\xi) = 0$ est évidemment satisfaite), en raison de ce défaut de régularité.

Toutefois, dans le cas particulier de la dimension 1, il est possible de contourner cet obstacle grâce à l'argument suivant, que nous remercions Yves Meyer de nous avoir indiqué. Dans ce qui suit, il sera commode de considérer que les notations L^p, H^p précédemment introduites concernent les espaces de fonctions à valeurs *complexes* et définies dans $\mathbb{R}$. Pour $p \ge 1$, on notera $\mathcal{H}^p$ le sous-espace de H^p constitué des fonctions f dont l'intégrale de Poisson $P(f)$ est holomorphe dans le demi-plan $\mathbb{R}^2_+$. Enfin, pour toute fonction $f \in L^2$, on notera f_+ sa projection orthogonale sur $\mathcal{H}^2$ (concrètement, on a $f_+ = (f + iH(f))/2$, où H est la transformation de Hilbert), et on posera $f_- = f - f_+$.

Nous commençons par remarquer que, si f et $g \in \mathcal{H}^2$, alors $P(f)$, $P(g)$ et $P(f)P(g)$ sont harmoniques, donc $Q(f,g) = G_*(f,g) = 0$, et par suite $R(f,g) =$

fg. Comme on sait que le produit de deux éléments de $\mathcal{H}^2$ est un élément de $\mathcal{H}^1$, donc de H^1, on voit que $R(\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2) \subset H^1$. La même inclusion subsiste évidemment si on remplace $\mathcal{H}^2$ par son orthogonal.

Soient maintenant f et $g \in L^2$. Pour montrer que $R(f,g) \in H^1$, il suffit d'après la remarque précédente de montrer que $R(f_+, g_-)$ et $R(f_-, g_+) \in H^1$ et, l'opérateur R étant symétrique, on peut se borner à prouver que $h = R(f_+, g_-) \in H^1$. Pour cela, il suffit de prouver que h_+ et $h_- \in H^1$ et, les deux preuves étant similaires, il suffit de faire le travail pour h_+. Dans ce but nous associons à tout opérateur bilinéaire T l'opérateur T_+ défini par l'égalité $T_+(u,v) = (T(u_+, v_-))_+$. Un calcul immédiat permet d'obtenir le

LEMME 1. — *Soit τ le symbole bilinéaire de l'opérateur T. Le symbole τ_+ de l'opérateur T_+ est alors donné par*

$$\tau_+(\xi,\eta) = \frac{1}{8}\tau(\xi,\eta)(1+\mathrm{sgn}(\xi+\eta))(1+\mathrm{sgn}(\xi)-\mathrm{sgn}(\eta)-\mathrm{sgn}(\xi)\mathrm{sgn}(\eta)) .$$

Soit Σ le secteur de $\mathbb{R}^2$ défini par les inégalités $\xi \geq 0$, $\eta \leq 0$ et $\xi + \eta \geq 0$. En utilisant le lemme 1 et l'égalité (11), on voit aussitôt que le symbole ρ_+ de l'opérateur R_+ est défini par

$$\rho_+(\xi,\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\xi} + \frac{\eta^2}{\xi^2}\right) & \text{si } (\xi,\eta) \in \Sigma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = 1$ pour tout $x \in [-1, 0]$, et soit S l'opérateur associé au symbole bilinéaire σ défini par

$$\sigma(\xi,\eta) = \rho_+(\xi,\eta)\phi\left(\frac{\eta}{\xi}\right) .$$

Comme σ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et vérifie la condition d'annulation $\sigma(\xi, -\xi) = 0$, on peut maintenant recourir à la théorie de Coifman-Meyer ([12]) pour conclure que $S(L^2 \times L^2) \subset H^1$. Comme la transformation de Hilbert est bornée dans L^2 et dans H^1, on a donc aussi $S_+(L^2 \times L^2) \subset H^1$. D'autre part les opérateurs R_+ et S_+ sont égaux, car leurs symboles bilinéaires sont tous deux nuls hors de Σ en vertu du lemme 1, et tous deux égaux à ρ dans Σ, par construction. On a donc finalement $h_+ = R_+(f,g) = S_+(f,g) \in H^1$, et la démonstration est terminée.

Notons également que notre théorème 1 ne se déduit pas des résultats de R. R. Coifman et L. Grafakos ([9], [17]), qui concernent d'autres types d'opérateurs multilinéaires.

4. — Exemples d'applications

La principale utilité d'un procédé de renormalisation est de faciliter la preuve de l'appartenance à H^1 de certaines quantités non linéaires ([8]). L'intérêt pour ces questions provient principalement de la théorie de la "compacité par compensation" : voir [10] et [11]. Nous allons rappeler trois de ces résultats, et indiquer ensuite le rôle que peut jouer notre théorème 1, soit dans leur preuve directe, soit dans l'étude des implications qui existent entre ces divers résultats.

Pour cela, il est utile de rappeler quelques notations. Nous désignons par $R_1, \ldots, R_n$ les transformations de Riesz. Pour tout $p > 0$, nous notons $W^{1,p}$ l'espace (de Sobolev) des fonctions de L^p dont le gradient appartient aussi à L^p. Etant donné une application convenable $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, le Jacobien de u sera noté $J(u)$. Dans toute la suite, on désigne par $C(n)$ un nombre (variable) qui ne dépend que de n.

Le premier de ces résultats est le

THÉORÈME 3. — *Pour tout couple* $(f, g) \in L^2 \times L^2$, et tout entier $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$fR_j(g) + gR_j(f) \in H^1$$

et $\|fR_j(g) + gR_j(f)\|_{H^1} \leq C(n)\|f\|_2\|g\|_2$.

Des arguments de dualité montrent qu'un énoncé équivalent est le suivant : si b désigne un élément de BMO (et aussi l'opérateur de multiplication qui lui correspond), alors les n commutateurs $[b, R_j]$ sont bornés dans L^p si $1 < p < +\infty$. Ces théorèmes sont dus à R. R. Coifman, R. Rochberg et G. Weiss ([14]).

Le deuxième résultat est la forme suivante du "lemme du div-rot" ([10], [11]):

THÉORÈME 4. — *Soient* $(E_1, \ldots, E_n)$ *et* $(B_1, \ldots, B_n)$ *deux champs de vecteurs sur* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $E_j \in L^2$ *et* $B_j \in L^2$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *et vérifiant (au sens des distributions)*

$$\operatorname{div}(E) = 0 \text{ et } \operatorname{rot}(B) = 0\ .$$

Alors

$$E \cdot B = \sum_{j=1}^{n} E_j B_j \in H^1\ .$$

et $\|E \cdot B\|_{H^1} \leq C(n)\|E\|_2\|B\|_2$.

Le troisième résultat est dû aux mêmes auteurs et concerne le jacobien :

THÉORÈME 5. — *Pour toute fonction* $u \in \left(W^{1,n}\right)^n$, $J(u) \in H^1$.

Observons que la version 2-dimensionnelle du résultat précédent admet l'extension suivante (conséquence facile du théorème 4) :

THÉORÈME 6. — *Pour tout couple* (u_1, u_2) *d'applications de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *dont les gradients appartiennent à* $L^2(\mathbb{R}^n)$, *et tout couple* (i, j) *d'éléments de*

$\{1, \ldots, n\}$, *le "jacobien partiel"*

$$J_{i,j}(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} & \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_j} & \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \end{vmatrix}$$

appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$ *et on a* $\|J_{i,j}(u_1, u_2)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(n)\|\nabla u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}|\nabla u_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Nous pouvons maintenant donner quelques exemples montrant que notre procédé de renormalisation remplit correctement sa mission.

4.1. — Preuve du théorème 3 dans le cas où $n = 1$

Soit H la transformation de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que, pour tout couple $(f, g) \in L^2 \times L^2$, $fH(g) + gH(f) \in H^1$. Pour cela, nous appliquons l'algorithme de renormalisation défini par le théorème 1 à chacun des produits $fH(g)$ et $gH(f)$, puis nous ajoutons membre à membre les égalités obtenues, ce qui nous donne

$$fH(g) + gH(f) = R(f, H(g)) + R(g, H(f)) + G_*(f, H(g)) + G_*(g, H(f)) \ .$$

Comme H est une isométrie de L^2, le théorème 1 montre que chacun des termes $R(f, H(g))$ et $R(g, H(f))$ appartient à H^1, donc il suffit de vérifier que $G_*(f, H(g)) + G_*(g, H(f)) \in H^1$. Mais on voit facilement, en utilisant les équations de Cauchy-Riemann, que $G_*(f, H(g)) + G_*(g, H(f)) = 0$, d'où le résultat.

4.2. — Relations entre les théorèmes 3, 4 et 5 dans le cas où $n = 2$

Il a été observé que le théorème 3 implique le théorème 4, qui implique lui-même le théorème 5. Ces implications (vraies en toute dimension) résultent facilement d'arguments "algébriques", dont le détail est donné dans [11]. La possibilité de faire le chemin en sens inverse n'est pas aussi évidente et n'a pas, à notre connaissance, été prouvée auparavant. Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on peut obtenir le théorème 3 en partant du théorème 5, ce qui établit, en un certain sens, l' "équivalence" de ces trois résultats. Nous procédons de la manière suivante :

Montrons que (par exemple) $fR_1(g) + gR_1(f) \in H^1$ pour tout couple $(f, g) \in L^2 \times L^2$. En utilisant le théorème 1, on voit qu'il suffit d'établir le

LEMME 2. — *Pour tout couple* $(f, g) \in L^2 \times L^2$,

$$G_*(f, R_1(g)) + G_*(g, R_1(f)) \in H^1 \ .$$

Pour faciliter l'usage des propriétés des transformations de Riesz, nous poserons (en convenant que R_0 est l'identité) :

$$u_i = P(R_i(f)) \ \text{ et } \ v_i = P(R_i(g)) \ \ (0 \leq i \leq 2) \ .$$

Nous avons par définition, pour de bonnes fonctions f et g ,

$$G_*(f, R_1(g)) + G_*(g, R_1(f)) = \int_{\mathbb{R}^3_+} y p_\xi(z) \left(\nabla u_0 \nabla v_1 + \nabla v_0 \nabla u_1\right)(z)\, dz \ .$$

On pose $x = (x_1, x_2)$ et $y = x_0$. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann généralisées, i. e.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \ , \ \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \ \text{ pour } \ j \neq k$$

et

$$\sum_{j=0}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \sum_{j=0}^{2} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \ ,$$

on élimine toutes les dérivées partielles par rapport à x_0 et on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \nabla u_0 \nabla v_1 + \nabla v_0 \nabla u_1 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_0}{\partial x_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\ &= J_{1,2}(u_2, v_0) + J_{1,2}(v_2, u_0) \ . \end{aligned}$$

Revenant aux notations précédentes, il nous suffit donc de prouver que (par exemple) la fonction k définie dans $\mathbb{R}^2$ par

$$k(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3_+} y p_0(x, y) J_{1,2}(u_2, v_0)(\xi - x, y)\, dx\, dy$$

appartient à H^1. A fortiori, il suffit d'établir que cette intégrale est normalement convergente dans H^1. Mais on a

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} y p_0(x, y) \|J_{1,2}(u_2, v_0)(\cdot - x, y)\|_{H^1}\, dx\, dy = \int_0^{+\infty} y \|J_{1,2}(u_2, v_0)(\cdot, y)\|_{H^1}\, dy \ ,$$

et, grâce au théorème 5 (et à l'estimation de norme qui l'accompagne)

$$\|J_{1,2}(u_2, v_0)(\cdot, y)\|_{H^1} \leq C \|\nabla_{1,2}(u_2(\cdot, y))\|_2 \|\nabla_{1,2}(v_0(\cdot, y))\|_2 \ ,$$

où C est une constante universelle et $\nabla_{1,2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$. Par suite on a

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3_+} y p_0(z) \|J_{1,2}(u_2, v_0)(\cdot - x, y)\|_{H^1}\, dz \\ &\qquad \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} y (\nabla u_2)^2(z)\, dz \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} y (\nabla v_0)^2(z)\, dz \right)^{1/2} \\ &\qquad \leq C \|R_2(g)\|_2 \|f\|_2 \leq C \|g\|_2 \|f\|_2 \ , \end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité (5) et de la bornitude des transformations de Riesz dans L^2. On peut donc obtenir le théorème 3 à partir du théorème 5.

4.3. — Relations entre les théorèmes 3, 4 et 6 dans le cas général

Nous allons montrer que, en toute dimension, le théorème 6 implique le théorème 3, établissant ainsi l'équivalence des trois résultats bilinéaires en général. Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, il suffit de prouver l'analogue du lemme 1 en toute dimension pour obtenir le théorème 3. En utilisant des notations analogues, et en utilisant le même type d'arguments, on est amené à estimer la norme dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ de l'application

$$(\nabla u_0 \nabla v_1 + \nabla v_0 \nabla u_1)(\cdot, y)$$

pour tout nombre $y > 0$. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann généralisées, on voit facilement que

$$\nabla u_0 \nabla v_1 + \nabla v_0 \nabla u_1 = \sum_{i=2}^{n} \left(J_{1,i}(u_i, v_0) + J_{1,i}(v_i, u_0)\right) \ .$$

Il nous suffit donc d'estimer la norme dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ des applications $J_{1,i}(u_i, v_0)(\cdot, y)$ et $J_{1,i}(v_i, u_0)(\cdot, y)$, qui se traitent toutes de la même manière : d'après le théorème 6, on a

$$\|J_{1,i}(u_i, v_0)(\cdot, y)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(n) \|(\nabla_{1,\dots,n} u_i)(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|(\nabla_{1,\dots,n} v_0)(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ ,$$

ce qui permet de reprendre les arguments de la démonstration du lemme 1.

4.4. — Jacobiens et classe $L \log L$: une extension d'un théorème de S. Mũller

Nous rappelons le résultat suivant de S. Mũller ([20], [21]), qui a été la principale motivation des auteurs de [10] et [11] pour démontrer, notamment, les théorèmes 4 et 5 cités plus haut :

THÉORÈME 7 . — *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $u \in (W^{1,n}(\Omega))^n$. Si $J(u) \geq 0$ dans Ω, alors $J(u) \in L \log L_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Ce résultat a été étendu, et peut l'être encore, de plusieurs manières. Pour cela, il faut introduire la définition précise suivante : Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on dira ici [1] qu'une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ appartient à $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si $f \in L^1(\Omega)$ et si $N(\widetilde{f}) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, où $\widetilde{f}$ est définie dans $\mathbb{R}^n$ par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in \Omega$ et $\widetilde{f}(x) = 0$ si $x \notin \Omega$. D'après les résultats de [5], on obtient une définition

1. La notation H^1_{loc} a déjà fait quelques apparitions dans la littérature ([16] ; [24], p. 134), avec un sens différent.

équivalente en remplaçant $N(\widetilde{f})$ par $\sup_{t>0}|\phi_t * \widetilde{f}|$, où $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(x/t)$, $\phi \in \mathcal{S}$ et $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx \neq 0$ (ce qui permet de retrouver la définition implicitement utilisée dans [11]), ou par $|\widetilde{f}| + \sum_{i=1}^n |R_i(\widetilde{f})|$.

Comme observé dans [10] et [11], une première extension du théorème 7 est la version locale suivante du théorème 5 : avec les notations et sous les hypothèses du théorème 8, $J(u) \in H^1_{\rm loc}(\Omega)$. En effet, d'après un résultat classique de E. M. Stein ([22]), les propriétés $f \in H^1_{\rm loc}(\Omega)$ et $f \in L\log L_{\rm loc}(\Omega)$ sont équivalentes si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Nous avons étendu, de plusieurs manières et sous des formes diverses ([1], [2], [5]), le résultat précédent de E. M. Stein, en remplaçant l'hypothèse de positivité par une condition moins exigeante, qui permet en outre d'obtenir une *condition nécessaire et suffisante* d'appartenance globale ou locale à la classe $L\log L$. Cette condition met en jeu une fonctionnelle encore assez peu connue, la *densité de l'intégrale d'aire*[2], dont nous allons rappeler la définition.

Étant donné $f \in \mathcal{M}$ on pose, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$D^0_*(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y p_\xi(z)\Delta|P(f)|(dz). \tag{12}$$

La mesure $\Delta|P(f)|(dz)$ est positive parce que $|P(f)|$ est sous-harmonique, de sorte qu'on définit bien ainsi une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+ \bigcup\{+\infty\}$; on peut montrer ([2]) qu'elle est à valeurs presque partout finies si f appartient à (par exemple) l'un des espaces L^p, avec $1 \leq p < +\infty$. La fonction $D^0_*(f)$ est la valeur en 0 (d'une variante) de la *densité de l'intégrale d'aire*, introduite par R. F. Gundy ([18], [19]) au début des années 80. Si f est seulement définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on pose $D^0_*(f) = D^0_*(\widetilde{f})$, où $\widetilde{f}$ est le prolongement de f défini précédemment. Notons qu'il existe une autre expression de $D^0_*(f)$ comme valeur principale d'intégrale singulière ([7]).

Il est clair d'après (12) que $D^0_*(f) \equiv 0$ si f est à valeurs ≥ 0, et par suite toute condition de "petitesse" portant sur $D^0_*(f)$ est plus générale que la positivité de f. Le résultat suivant étend donc le théorème 7 :

THÉORÈME 8 . — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $u \in (W^{1,n}(\Omega))^n$. les propriétés suivantes sont équivalentes*:
(i) $J(u) \in L\log L_{\rm loc}(\Omega)$;
(ii) $D^0_*(J(u)) \in L\log L_{\rm loc}(\Omega)$.

La démonstration consiste simplement à appliquer la version locale du théorème 5 et le théorème 3 de [2] (qui est une de nos généralisations du résultat de E. M. Stein rappelé plus haut).

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, le théorème 7 perd tout intérêt car alors les hypothèses ne sont réalisées que si $J(u) \equiv 0$, en raison du théorème 5 et de propriétés bien connues de l'espace H^1. Il n'est donc pas inutile d'énoncer le

2. il s'agit ici de l'intégrale d'aire "complète", i. e. l'opérateur g_* de Littlewood-Paley.

THÉORÈME 9 . — *Pour toute fonction $u \in (W^{1,n}(\mathbb{R}^n))^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) $J(u) \in L\log L(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $D^0_*(J(u)) \in L\log L(\mathbb{R}^n)$.

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 5 et du théorème 2 de [2].

Une variante des théorèmes 8 et 9 mettant en jeu la densité de l'intégrale d'aire non-tangentielle peut aussi être obtenue, au moyen des résultats de [1].

Références

[1] J. Brossard et L. Chevalier. — *Densité de l'intégrale d'aire et classe $L\log L$ dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$*. Ann. Math. **128** (1988), 603-618.

[2] L. Chevalier. — *Une "formule de Tanaka" en analyse harmonique et quelques applications*. Adv. in Math. **138**,1 (1998), 182-210.

[3] L. Chevalier. — *Une renormalisation du produit*. C. R. Acad. Sci. Paris **329**, sér. I (1999), 265-268

[4] L. Chevalier. — *Mouvement brownien et formule de Tanaka en analyse*. Potential Anal. **12** (2000), 419-439.

[5] L. Chevalier. — *Localisation de l'espace de Hardy H^1 et opérateurs de Calderón-Zygmund*. J. London Math. Soc. (2) **61** (2000), 835-845.

[6] L. Chevalier. — *Une nouvelle preuve de certaines inégalités de Littlewood-Paley*. J. Fourier Anal. Appl. À paraître.

[7] L. Chevalier et A. Dufresnoy. — *Densité de l'intégrale d'aire et Intégrales singulières*. Ark. Mat. **38** (2000), 209-221.

[8] R.R. Coifman, S. Dobyinski et Y. Meyer. — *Opérateurs bilinéaires et renormalisation*. Essays in Fourier Analysis in Honor of Elias M. Stein. Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, (1995), 146-161.

[9] R.R. Coifman and L. Grafakos. — *Hardy Space Estimates for Multilinear Operators, I*. Rev. Mat. Iberoam. **8**,1 (1992) 45-67.

[10] R.R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer et S. Semmes. — *Compacité par compensation et espaces de Hardy*. C. R. Acad. Sci. Paris **309**, sér. I (1989), 945-949.

[11] R.R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer and S. Semmes. — *Compensated compactness and Hardy spaces*. J. Math. Pures Appl. **72** (1993), 247-286.

[12] R.R. Coifman et Y. Meyer. — *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*. Astérisque 57 (2ème édition), Société Mathématique de France (1978).

[13] R.R. Coifman, Y. Meyer and E. M. Stein. — *Some new function spaces and their applications to harmonic analysis*. J. Funct. Anal. **62** (1985), 304-335.

[14] R. R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss. — *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables*. Ann. Math. **103** (1976), 611-635.

[15] Ch. Fefferman and E. M. Stein. — *H^p spaces of several variables*. Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[16] D. Goldberg. — *A local version of real Hardy spaces.* Duke Math. J. **46**, 1 (1979), 27-42.

[17] L. Grafakos. — *Hardy Space Estimates for Multilinear Operators, II.* Rev. Mat. Iberoam. **8**,1 (1992) 69-92.

[18] R. F. Gundy. — *The density of the area integral.* Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund. Wadsworth, Belmont, Calif. (1983) 138-149.

[19] R. F. Gundy and M. L. Silverstein. — *The density of the area integral in* $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Ann. Inst. Fourier **35** (1985), 215-229.

[20] S. Mŭller. — *A surprising higher integrability property of mappings with positive determinant.* Bull. Amer. Math. Soc (new series) **21**, 2 (1989), 245-248.

[21] S. Mŭller. — *Higher integrability of determinants and weak convergence in* L^1. J. reine angew. Math. **412**, (1990), 20-34.

[22] E. M. Stein. — *Note on the class* $L \log L$. Studia Math. **32** (1969), 305-310.

[23] E. M. Stein. — *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1970.

[24] E. M. Stein. — *Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1993.

Institut Fourier
U.M.R. 5582 C.N.R.S./U.J.F.
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères
France
e-mail : lucchev@fourier.ujf-grenoble.fr