Variétés de Sévéri

Pierre-Emmanuel Chaput

Prépublication de l'Institut Fourier n° 516 (2000)
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Résumé

Un théorème de F. Zak conjecturé par R. Hartshorne (cf [4, p.9]) affirme qu'une variété algébrique complexe lisse non dégénérée $X^n \subset \mathbb{P}^m$ avec $m < \frac{3}{2}n + 2$ vérifie $Sec(X) = \mathbb{P}^m$. ($Sec(X)$ désigne la variété des sécantes de X ; dans notre cas où X est lisse c'est la réunion des sécantes et des tangentes de X) Cet article concerne les cas limites de ce théorème, à savoir les variétés de Sévéri, définies par les conditions $m = \frac{3}{2}n + 2$ et $Sec(X) \neq \mathbb{P}^m$. Je propose une variante de la démonstration d'un théorème de F. Zak classifiant les variétés de Sévéri. F. Zak démontre qu'il n'existe que quatre variétés de Sévéri et constate a posteriori qu'elles sont toutes homogènes ; j'adopte ici la démarche inverse : je démontre a priori qu'une variété de Sévéri est homogène et j'en déduis leur classification, satisfaisant ainsi le souhait de R. Lazarsfeld et A. Van de Ven[4, p.18]. Au passage, je donne une démonstration très brève du fait que les dérivées de l'équation de la sécante d'une variété de Sévéri, qui est une hypersurface de degré 3, déterminent un morphisme birationnel de $\mathbb{P}^m$: les détails de la démonstration de cette propriété sont laissés au lecteur dans [3, p.79] et rédigés par L. Ein et N. Shepherd-Barron ([1, p.778]). Ceux-ci proposent deux démonstrations de ce résultat mais ces deux démonstrations utilisent le fait que X est homogène ; par ailleurs les arguments que je vais présenter sont nettement moins sophistiqués.

Je remercie Laurent Manivel pour les discussions instructives que j'ai eues avec lui.

1 Quadriques sur les variétés de Sévéri

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1 *On appelle variété de Sévéri une variété $X^n \subset \mathbb{P}^m$ lisse non dégénérée et telle que $Sec(X) \neq \mathbb{P}^m$ et $m = \frac{3}{2}n + 2$.*

Exemples : On peut exhiber quatre variétés de Sévéri, de dimension 2,4,8 et 16 :

Classification math. :14M07,14M17 et 14E07.
Mots-clés : Variété de Sévéri, variété des sécantes, géométrie projective, théorème de Zak.

- n=2 : $X = \mathcal{V} \subset \mathbb{P}^5$, la surface de Véronèse, soit l'image de

$$\begin{array}{cccc} \nu_2 & : & \mathbb{P}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^5 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x^2,y^2,z^2,xy,xz,yz) \end{array}$$

- n=4 : $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$
- n=8 : $X = G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$
- n=16 : $X = \mathcal{E}_6 \subset \mathbb{P}^{26}$

Le théorème de classification de Zak montre que cette liste est exhaustive et c'est le but de cet article.

$\mathcal{E}_6$ peut être définie comme la variété des matrices de rang 1 dans le projectivisé du complexifié des matrices 3×3 hermitiennes à coefficients octaves de Cayley ; le lecteur pourra trouver une autre présentation de cette variété et comprendre pourquoi elle est homogène sous l'action de E_6 dans [4, p.13].

Proposition 1.1 *Les quatre variétés précédentes sont des variétés de Sévéri.*

Démonstration : Le seul point qui nécessite une démonstration est de vérifier que $Sec(X)$ est une hypersurface. Mais cela découle de considérations de rang : par exemple si on réalise $\mathbb{P}^5$ comme l'ensemble des matrices symétriques, alors $\mathcal{V}$ s'identifie aux matrices de rang 1. Les matrices de $Sec(\mathcal{V})$ sont donc au plus de rang 2. Le cas des deux autres variétés s'étudie de façon analogue. En ce qui concerne $\mathcal{E}_6$, on ne peut pas définir de rang, mais on vérifie par une formule de développement du déterminant par rapport à une ligne ou à une colonne qu'une matrice somme de matrices dont les mineurs s'annulent est de déterminant nul.

•

Remarque : Dans tous les cas, on constate que $Sec(X)$ est une cubique et que X est homogène.

Soit $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$. Posons, pour $P \in Sec(X) - X$,
$Q_P := \{x \in X : (xP)$ sécante ou tangente à X$\}$ et $\Sigma_P := \bigcup_{x \in Q_P}(xP)$, la réunion des tangentes et des sécantes passant par P. C'est aussi le cône de sommet P et de base Q_P.

Exemple : Nous allons étudier en détail $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$ vu comme variété des matrices de rang 1 dans $\mathbb{P}\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car cela nous servira de fil d'Ariane pour toute la fin de ce rapport.

Affirmation 1.1 *Pour tout P, Σ_P est un ($\frac{n}{2}$ +1)-plan et Q_P une quadrique lisse de Σ_P.*

Démonstration : Les éléments de $\mathbb{P}^8$ sont des matrices 3×3 et si P=M+N, avec $M, N \in X$ et $P \in Sec(X) - X$, on a rg(P)=2 donc $Ker(M) \neq Ker(N)$ et $Im(M) \neq Im(N)$, ainsi $Ker(M) \cap Ker(N) = Ker(P)$ et $Im(M) + Im(N) = Im(P)$. Quitte à multiplier P par des matrices inversibles à droite et à gauche, on peut supposer $P = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et alors

$$\Sigma_P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$Q_P = \Sigma_P \cap \{ad - bc = 0\}$$

En effet on vient de montrer une inclusion, mais réciproquement si $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec ad-bc=0, voyons que $M \in Q_P$. On a alors det $\begin{pmatrix} a+\lambda & b \\ c & d+\lambda \end{pmatrix} = \lambda[\lambda + tr(M)]$. Par ailleurs, l'espace tangeant en M est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $d\alpha + a\delta - c\beta - c\gamma = 0$ donc $P \in T_M X \Leftrightarrow tr(M) = 0$. On voit donc bien que si $tr(M) \neq 0$, (MP) est une sécante de X et si $tr(M) = 0$, (MP) est une tangente, de sorte que dans tous les cas $M \in Q_P$.

Soit F la forme trilinéaire symétrique polarisée du déterminant, soit pour $M_i = (C_{i,j})_{1 \leq j \leq 3}$ une matrice considérée comme 3 vecteurs colonnes ($i = 1, 2, 3$),

$$F(M_1, M_2, M_3) = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} \det(C_{\sigma(i),j})_i$$

Identifiant une matrice et son hyperplan horthogonal pour la forme bilinéaire symétrique canonique, il est facile de se persuader que l'application $\tilde{G} : M \to F(M, M, .), M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est simplement l'application $M \mapsto \mathrm{Com}(M)$ et donc G définie par $G(M) = \frac{F(M,M,.)}{F(M,M,M)}$ est une involution en dehors de $Sec(X)$ car c'est la fonction inverse. Par ailleurs, elle se prolonge sur $\mathbb{P}^8$ à $Sec(X) - X$ (par $G(M) = \mathrm{Com}(M)$) et ce prolongement vérifie $G[Sec(X)] = X$. Nous allons voir que les choses se passent de la même façon dans le cas général, à ceci près que nous n'identifierons pas a priori $\mathbb{P}^m$ et $\mathbb{P}^{m*}$.

Nous allons aussi montrer que toute variété de Sévéri est homogène. Dans le cas de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, une matrice M de rang 3 quelconque donne lieu à un isomorphisme linéaire L_M entre $\mathbb{P}^8$ et $\mathbb{P}^{8^*}$ qui envoie X sur $Sec(X)^*$; lorsque M et N varient, les endomorphismes de $\mathbb{P}^m$ égaux à $(L_N)^{-1} \circ L_M$ se restreignent à une famille d'endomorphismes de X agissant transitivement sur X, prouvant ainsi que X est homogène. Nous allons voir que cela se passe de manière similaire dans le cas général.

1.2 Quadriques

Soit X une variété de Sévéri quelconque, on définit Q_P et Σ_P comme précédemment.

Pour une telle variété, et $P \notin Sec(X)$, $\pi_P : X \to \mathbb{P}^{m-1}$ est un isomorphisme et le théorème de Zak que je citais en introduction montre que $\pi_P(Sec(X)) = \mathbb{P}^{m-1}$, de sorte que Sec(X) est une hypersurface.

Le but de ce paragraphe est de montrer le

Théorème 1.2 *Pour tout $P \in Sec\ X - X$,*

- *a : Q_P est une quadrique lisse de dimension $\frac{n}{2}$, et Σ_P est un espace linéaire de dimension $\frac{n}{2}$ +1.*

– b : $\Sigma_P \cap X = Q_P$
– c : $\Sigma_P - X = \{P' : T_{P'}Sec(X) = T_P Sec(X)\}$
– d : $\forall P' \in Sec(X) - X, Q_P = Q_{P'} \Leftrightarrow P' \in \Sigma_P$

En particulier, ce théorème implique que X ne contient pas de trisécante non incluse dans X. Soit en effet d une trisécante à X. Supposons par l'absurde que $P \in d - X$, alors Q_P est une quadrique contenant trois points distincts de d. Ainsi $Q_P \supset d$ et donc $X \supset d$, ce qui est contradictoire.

On commence par montrer un résultat plus faible, mais auquel on fera souvent appel dans la démonstration de ce théorème :

Lemme 1.2 *Une sécante générale de X n'est pas une trisécante.*

Démonstration : Le cas des courbes, cf Mumford [8, pages 134 et suivantes] est classique et on s'y ramène : comme il existe un plan P de codimension n-1 tel que $P \cap X$ soit une courbe et ne soit pas inclus dans un 2-plan, il existe une sécante de X qui ne soit pas une trisécante.

•

Démonstration : Soit $\tilde{X}$ l'éclatement de $X \times X$ selon la diagonale; en d'autres termes, $\tilde{X}$ est l'adhérence des $(x, y, d) \in X \times X \times G(2, m)$ tels que $x \neq y$ et $d = (xy)$. Soit aussi
$S_X = \{(x, y, d, z) : (x, y, d) \in \tilde{X} \text{ et } z \in d\}$

On définit alors les projections :

$$\begin{array}{cccc} p_4 & : & S_X & \to & Sec(X) \\ & & (x,y,d,z) & \mapsto & z \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} p_1 & : & S_X & \to & X \\ & & (x,y,d,z) & \mapsto & x \end{array}$$

p_4 est un fibré localement trivial de fibre type $\mathbb{P}^1$. Cela permet de voir que S_X est lisse de dimension dim $\tilde{X}$+1=2n+1. p_1 permet de calculer la dimension de $Q_P = p_1[p_4^{-1}(P)]$ pour P générique. En effet dim Sec(X)=$\frac{3}{2}n$+1 et donc dim$[p_4^{-1}(P)] = \frac{n}{2}$ pour P générique ; pour P quelconque cette dimension est supérieure. Soit par ailleurs $P \in Sec(X) - X$ quelconque. $p^{-1}_{1|p_4^{-1}(P)}(y)$ est finie car sinon $(yP) \cap X$ est infini et donc $P \in X$. On a donc dim $p_1[p_4^{-1}(P)] = \frac{n}{2}$ pour P générique soit dim $Q_P = \frac{n}{2}$ pour P générique. A P fixé, en étudiant de même $S_X(U) := S_X \cap p_1^{-1}(U)$ où U est un ouvert classique de $\mathbb{P}^m$ passant par $x \in Q_P$, on voit que Q_P est de dimension pure $\frac{n}{2}$ pour P générique.

Notons $H = T_P Sec(X)$ et $L_P = \{P' : T_{P'}Sec(X) = H\}$. Par le théorème de bidualité, L_P est linéaire. On va montrer maintenant qu'une partie du théorème 1.2 est vraie pour P général :

Proposition 1.3 *Pour P général dans $Sec(X) - X$, Q_P est une quadrique lisse de dimension $\frac{n}{2}$ et $\Sigma_P = L_P$ un espace linéaire de dimension $\frac{n}{2}$ +1.*

Démonstration : Soit $R \in L_P$; soit $a, b \in X$ tels que $R \in (ab)$, alors par Terracini $T_a X \subset H$ et $T_b X \subset H$; notant $Z_H = \{x \in X : T_x X \subset H\}$ on a ainsi $Q_R \subset Z_H$.Or soit $c \notin H \cup Sec(X)$ et π une projection de centre c. π est un isomorphisme sur X donc dim $\pi(X)$=n. dim $\pi(H) = \frac{3}{2}n$. Soit aussi $Z'_H = \{y \in \pi(X) : T_y\pi(X) \subset \pi(H)\}$. Par le théorème des tangences, $dim\ Z'_H \leq \frac{n}{2}$. Mais π est un isomorphisme de Z_H sur Z'_H donc $dim\ Z_H \leq \frac{n}{2}$. Comme toutes les composantes de Q_R sont de dimension au moins $\frac{n}{2}$, Q_R est donc de dimension pure $\frac{n}{2}$ et Q_R est une réunion de certaines des composantes de Z_H. Comme l'ensemble des R tels que Q_R contienne une composante de Z_H fixée est fermé[2], il existe Q fixé tel que pour R générique de L_P, $Q_R = Q$. Par ailleurs, pour un tel R, $R \in Sec(Q_R) = Sec(Q)$. Ainsi $Sec(Q) = L_P$. Pour voir qu'aussi $\Sigma_P = L_P$, il suffit de constater que $\dim L_P = \dim Q + 1$. Cela découle du fait que pour R générique de $Sec(Q)$ donc de L_P, $Q_R = Q$.

On finit maintenant de démontrer la proposition. Si Q_P n'était pas une quadrique de Σ_P, pour P général, alors pour x et y généraux de X et P général sur (xy), Q_P serait de degré au moins trois et donc (xy) serait une trisécante, contredisant le lemme 1.2.

Il ne reste plus qu'à montrer que pour P générique la quadrique Q_P est lisse. Tout d'abord, p_1 est injective et de différentielle injective en restriction à $p_4^{-1}(P)$: en effet si (x,y,d,P) et (x,y',d,P) sont des éléments de S_X avec $y \neq y'$ alors x,y,y' sont des éléments de la quadrique Q_P donc $d \subset Q_P$, contredisant $P \notin X$. Comme $p_4^{-1}(P)$ est lisse, $Q_P = p_1[p_4^{-1}(P)]$ est donc lisse également.

•

Corollaire 1.4 *Soit P générique de $Sec(X) - X$ fixé. Alors $\Sigma_P \cap X = Q_P$ et $Q_P = Q_{P'}$ pour $P' \in \Sigma_P - Q_P$ général.*

Démonstration : Comme Q_P est une quadrique lisse de Σ_P, $X \cap \Sigma_P \subset Q_P$ et $Q_P \subset Q_{P'}$ pour $P' \in \Sigma_P$. On conclut en remarquant que pour P' générique, $Q_{P'}$ est une quadrique.

•

1.3 Variété des sécantes et son groupe de monodromie

On va maintenant montrer en plusieurs étapes que $Sec(X)$ est une cubique.

* La première étape est la

Proposition 1.5 *Pour P et R généraux de $Sec(X) - X$, $Q_P \cap Q_R$ est un singleton.*

On commence par établir les outils pour démontrer cette proposition.

Lemme 1.3 *Soit P un point lisse de $Sec(X)$. Alors $Sec(X) = S(Q_P, X)$ et $dim\ T(Q_P, X) = \frac{3}{2}n$.*

Démonstration : Par le théorème de Fulton et Hansen (cf [5]), on sait qu'on a l'alternative suivante : soit $S(Q_P, X)$ et $T(Q_P, X)$ ont les dimensions attendues $\frac{3}{2}n + 1$ et $\frac{3}{2}n$, soit $S(Q_P, X) = T(Q_P, X)$. Il suffit donc d'exhiber $x \in X - T(Q_P, X)$. Il suffit pour cela de choisir un élément en dehors de l'hyperplan $T_P Sec(X)$ car le lemme de Terracini montre que $T(Q_P, X) \subset T_P Sec(X)$.

•

[2]Pour tout $A \subset X$, l'ensemble des R tels que $Q_R \supset A$ est défini par les équations $(aR) \in \mathcal{S}, a \in A$ et est donc fermé ($\mathcal{S} \subset G(2, m)$ désigne les droites sécantes ou tangentes à X, il est un fermé car X lisse).

Corollaire 1.6 *Soit P générique de $Sec(X) - X$ fixé. Pour $P' \in Sec(X) - X$, $Q_P \cap Q_{P'} \neq \phi$.*

Lemme 1.4 *Soit P un point lisse de $Sec(X)$ fixé. Soit M un $(\frac{n}{2}+2)$-plan contenant Σ_P et non inclus dans $T_P Sec(X)$. Alors il existe $r > 0, (x_1, \cdots, x_r) \in (X - \Sigma_P)^r$ tels que*

- *(i) $M \cap X = Q_P \cup \{x_1, \cdots, x_r\}$*
- *(ii) $M \cap Sec(X) = \Sigma_P \bigcup C(x_i, Q_P)$*

Démonstration : D'après le lemme 1.3, $Sec(X) \cap M = S(M \cap X, Q_P)$. Reste donc à montrer que $M \cap X - Q_P$ est de dimension 0. $Sec(X) \cap M$ est une sous-variété de M de dimension $\frac{n}{2}+1$. Soit $(M_i)_{0 \leq i \leq N}$ ses composantes irréductibles avec $M_0 = \Sigma_P$. Soit pour chaque i>0, $m_i \in (X \cap M_i) - Q_P$[3]. $M_i = C(m_i, Q_P)$ et donc M_i n'a qu'un point singuler et $m_i = Sing(M_i)$. On a donc montré $X \cap M - Q_P = \{m_i\}$. On ne peut avoir r=0 car sinon Sec(X) serait de degré 1.

•

On peut maintenant montrer la proposition 1.5 : il suffit de démontrer que pour P général fixé et M fixé, le $Q_P \cap Q_R$ est un singleton pour R sur un et un seul des cônes du lemme précédent (cf fig 5). Mais en effet si $R \in C(x_i, Q_P)$, soit $a \in Q_P \cap Q_R$, $(aR) \subset Sec(X)$ donc $(aR) = (ax_i)$ et donc a appartient au singleton $(x_i R) \cap \Sigma_P$.

•

* La deuxième étape concerne le groupe de monodromie de $Sec(X)$.

Soit Y une variété de $\mathbb{P}^m$ de codimension k et de degré d, avec d>k. Pour la suite on peut supposer k=1. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des k-plans sécants à Y (ie il existe $x_0 \cdots x_k$ indépendants dans $P \cap Y$) et en intersection transverse avec Y (ie $\forall y \in Y \cap P,\ P + T_y Y = \mathbb{P}^m$). C'est un ouvert de la variété des k-plans sécants ; donc il est connexe par arcs. Par ailleurs, la condition de transversalité implique que pour $P \in \mathcal{S}, \exists y_1 \cdots y_d : P \cap Y = \{y_1 \cdots y_d\}$.
Soit $P_0 \in \mathcal{S}$ et $t \mapsto P(t)$ un lacet en P_0 dans $\mathcal{S}$. Notons S_0 l'ensemble des d-uplets de points distincts de $P_0 \cap Y$ (il n'y en n'a qu'un à permutations près). Pour $y \in P_0 \cap \mathcal{S}$, on peut suivre y dans l'intersection $P(t) \cap Y$, ie il existe une unique fonction continue $f_y : [0,1] \to Y$ telle que $f_y(0) = y$ et $f_y(t) \in P(t) \cap Y$.
On note alors $G_{P_0} := \{F : (y_i) \in S_0 \mapsto (f_{y_i,P}(1))\}$, où les fonctions $f_{y_i,P}$ dépendent, à y_i fixé du lacet $P(t)$ choisi. C'est un sous-groupe du groupe des permutations de $d_0 \cap X$.
Par ailleurs, si P est un autre plan, en choisissant un chemin de P à P_0, on voit que G_P et G_{P_0} sont canoniquement isomorphes (l'isomorphisme ne dépend pas du chemin choisi). On peut donc définir le groupe de monodromie de Y comme G_P, pour P quelconque. On peut le voir comme un sous-groupe du groupe des permutations.

On va calculer le groupe de monodromie d'une hypersurface, mais pour cela on commence par des rappels de géométrie différentielle.

Affirmation 1.5 *Soit $Y \subset \mathbb{C}^m$ une variété et $y \in Y$ un point lisse. Soit aussi N un supplémentaire de $T_y Y$ dans $\mathbb{C}^m$ et $P = N \oplus T$ un plan contenant N, avec $T \subset T_y Y$.*

[3] Tout point de M_i est sur une droite joignant un point de Q_P et un point de $X \cap M - Q_P$, ce qui prouve l'existence de tels m_i.

Alors il existe un voisinage U de y dans Y et une fonction f de $T \cap U$ dans N tels que $(t,n) \in P \cap Y \cap U \Leftrightarrow n = f(t)$.

En particulier,

Affirmation 1.6 *Avec les notations précédentes,*
$Y \cap P$ est lisse en tout point de $U \cap P \cap Y$ et
$T_{(t_0,f(t_0))}(Y \cap P) = P \cap T_{(t_0,f(t_0))}Y = \{(t,n) : t \in T$ et $n = f(t_0) + df_{t_0}(t - t_0)\}$

Bien que cela ne sera pas utile immédiatement, on en déduit dès à présent le

Corollaire 1.7 *Si C est une variété et $c_0 \in C$ est tel que pour tout $c \in C$, $c_0 \in T_c C$, alors C est un cône de sommet c_0.*

__**Démonstration :**__ On suppose $Y \subset \mathbb{C}^m$. Soit $c \in C$ un point lisse. Soit $u \in \mathbb{C}^m - T_c C$. Alors par l'affirmation 1.5, $Y \cap (cc_0 u)$ a pour équation locale en c : $y = f(x)$. Supposons que $c_0 = (0,0)$ et $c = (1,0)$. Comme par 1.6, $c_0 \in T_{x,f(x)}(Y \cap (cc_0 u))$, $xf'(x) = f(x)$, soit $f(x) = \lambda x$; $\lambda = 0$ car $c = (1,0) \in C$. Ainsi (cc_0) est localement incluse dans C.

•

Soit Y une hypersurface d'équation P=0, de degré d avec $d \geq 3$ et Δ une droite paramétrée par $t \mapsto \Delta(t)$ et $y_0 = \Delta(0) \in \Delta \cap Y$. J'appelle degré de tangence de Δ à Y en y_0 l'ordre de la fonction $t \mapsto P[\Delta(t)]$ en 0. Ainsi l'ordre d'une sécante est supérieur ou égal à 1, d'une tangente à 2, etc. Nous allons montrer le

Lemme 1.7 *Il existe une droite d' rencontrant Y en exactement d-1 points.*

__**Démonstration :**__ On commence par l'

Affirmation 1.8 *Il existe des tangentes de degré exactement 2 en un point.*

__**Démonstration :**__ Soit Δ une tangente en x_0. Dans un plan contenant Δ, Y s'écrit $y = f(x)$. Si f est d'ordre plus que 2 il suffit de choisir la tangente en un point x proche de x_0.

•

Soit donc Δ une tangente de degré 2 en x_1. Soit $(x_i)_{2 \leq i \leq l}$ tels que $Y \cap \Delta = \{x_i : 1 \leq i \leq l\}$. Si l=d-1, Δ convient ; sinon il existe i tel que Δ soit tangente en x_i. Dans chacun des deux cas suivants, on exhibe une droite ayant un point de tangence de degré 2 et au moins l+1 points d'intersection avec Y :

- $T_{x_i}Y = T_{x_1}Y$. Soit alors $u \in \mathbb{C}^m - T_{x_i}Y$. Par 1.5, si P est engendré par Δ et u, alors $P \cap Y$ est localement en x_1 et en x_i un graphe. Il suffit alors de considérer une tangente en un point proche de x_1.
- $T_{x_i}Y \not\subset T_{x_1}Y$. Soit alors $u \in T_{x_i}Y - T_{x_1}Y$. On considère la droite $(x_1 x_i')$ avec x_i' proche de x_i et dans le plan engendré par Δ et u.

•

On peut donc maintenant montrer la

Proposition 1.8 *Le groupe de monodromie d'une hypersurface Y irréductible de degré d ($d \geq 2$) égale le groupe des permutations de d éléments.*

Démonstration : Soit d_0 une sécante transverse. Soit $x_1, \cdots, x_d \in d_0 \cap Y$. On veut voir que la monodromie peut échanger x_1 et x_2 en préservant les autres points. Soit donc une droite d tangente en y et transverse en y_i ($1 \leq i \leq d-2$). Au voisinage de y, et dans un plan convenable, Y a pour équation $z = x^2 + o(x^2)$. Par souci de clarté, j'oublierai le terme négligeable. L'intersection de Y avec la droite d_θ d'équation $z = \rho^2 e^{2i\theta}$ est donc l'ensemble $\{(\rho e^{i\theta}, \rho^2 e^{2i\theta}) := M^+(\theta); (\rho e^{i(\theta+\pi)}, \rho^2 e^{2i\theta}) := M^-(\theta); T_i(\theta)\}$,
oú $T_i(\theta)$ ($1 \leq i \leq d-2$) désigne l'intersection d'un voisinage de y_i avec d_θ. En particulier $T_i(\theta + \pi) = T_i(\theta)$.
Soit maintenant, comme Y est irréductible, un chemin dans $Y \times Y$ de (x_1, x_2) à $(M^+(0), M^-(0))$, tel que les droites $(x_1(t)x_2(t))$ évitent les tangentes. Soit ensuite le chemin $(M^+(\theta), M^-(\theta))$, $\theta \in [0, \pi]$ qui inverse $M^+(0)$ et $M^-(0)$ et préserve les autres points. Soit enfin le premier chemin parcouru en sens inverse : on voit que le chemin total a inversé x_1 et x_2 en préservant les autres points.

•

* La dernière étape est enfin la démonstration du

Théorème 1.9 *Sec(X) est une hypersurface cubique.*

Démonstration : Soient P et Q des points généraux de $Sec(X) - X$ tels que de plus $P \notin T_Q Sec(X)$ et $Q \notin T_P Sec(X)$. On va voir qu'ils définissent canoniquement un troisième point $A(P,Q)$ sur (PQ), contredisant la transitivité de la monodromie si le degré de Sec(X) est strictement supérieur à 3. Soit $x = x(P,Q) = Q_P \cap Q_R$ (proposition 1.5). On va voir que ni (xP) ni (xQ) ne sont tangentes à X en x. Si elles l'étaient toutes les deux, on aurait $(xPQ) \subset T_x X \subset Sec(X)$ et par conséquent $P \in T_Q Sec(X)$ et $Q \in T_P Sec(X)$. Si par exemple (xQ) est une tangente mais pas (xP) alors considérant les espaces tangents comme des espaces linéaires, il existe un chemin $\alpha(t) \subset X$ tel que $\alpha(0) = x$ et $\alpha'(0) = Q - x$ et il existe $y \in X \cap (xP)$; par une homothétie de centre y du chemin α, on voit que cela implique $Q - x \in T_P Sec(X)$, comme $x - P \in T_P Sec(X)$ on a $Q - P \in T_P Sec(X)$.
Soit donc $y \in (xP) \cap X$ et $z \in (xQ) \cap X$ des éléments distincts de x. Pour P générique, Q_P est une quadrique donc le point y est unique et de même pour z. Il suffit de poser $A(P,Q) = (PQ) \cap (yz)$.

•

En particulier dans le lemme 1.4 on doit avoir r=1 car $Sec(X) \cap M$ est au plus de degré trois dans M. On a donc :

Lemme 1.9 *Soit P un point lisse de $Sec(X)$ fixé. Soit M un $(\frac{n}{2}+2)$-plan contenant Σ_P et non inclus dans $T_P Sec(X)$. Alors il existe $x \in X - \Sigma_P$ tels que*
- *(i) $M \cap X = Q_P \cup \{x\}$*
- *(ii) $M \cap Sec(X) = \Sigma_P \cup C(x, Q_P)$*

On retourne maintenant à la fin de la démonstration du théorème 1.2 Fixons un point général P de $Sec(X) - X$ et notons $U_P = Sec(X) - T_P Sec(X) - X$.

Affirmation 1.10 *Sec(X) est lisse en tout point R de U_P.*

Démonstration : Si on avait $T_R Sec(X) = \mathbb{P}^m$ alors pour M=$\Sigma_P + R$, $T_R(Sec(X) \cap M)$=M, contredisant le lemme 1.9.

•

Affirmation 1.11 *Pour tout $R \in U_P$, Q_R est de dimension pure $\frac{n}{2}$.*

Démonstration : On sait déjà que cette dimension est supérieure à $\frac{n}{2}$. Mais pour $R \in U_P$, $Q_R \subset Z_H$ (cf démonstration de la proposition 1.3).

•

Affirmation 1.12 *Pour tout $R \in U_P$, Q_R est une quadrique.*

Démonstration : Soit $R \in U_P$ général, Q_R est une quadrique lisse de Σ_R. Quitte à changer R, pour un autre point de Σ_R ce qui ne change pas Q_R, on peut supposer $R = (0, \cdots, 0, 1)$ et $Q_R = \{\sum X_i^2 = 0\}$. Soit alors l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} l & : & Q_R & \rightarrow & Q_R \\ & & \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ -x_k \end{pmatrix} \end{array}$$

On voit que $p_4^{-1}(R) = \{(x, l(x), (xR), R)\}$. En effet si $x_k \neq 0$ alors $l(x) \neq x$ et (xl(x)) est une sécante ; si $x_k = 0$ alors $l(x) = x$ et (xR) est une tangente à Q_R. Ainsi $p_4^{-1}(R)$ est de degré 2. Comme $p_{4|U_P}$ a son image dans une variété lisse et ses fibres sont de dimension pure constante, elle est plate par un théorème de Grothendieck [7, paragraphe 15]. Donc $p_4^{-1}(R)$ est de degré 2 pour tout $R \in U_P$, et donc Q_R est une quadrique.

•

On veut maintenant montrer que ces affirmations sont vraies pour tout point de Sec(X)-X. Pour cela il suffit de montrer :

Lemme 1.13 *Soit $R \in Sec(X)$. Alors $R \in U_S$ pour S général de $Sec(X) - X$.*

Démonstration : Pour R fixé, l'ensemble des S tel que $R \in T_S Sec(X)$ est un fermé. Il faut donc seulement voir qu'il n'est pas égal à Sec(X). Mais si c'était le cas par le corollaire 1.7, Sec(X) serait un cône de sommet R. Soit $P \in Sec(X) - X$ générique. Si $R \notin \Sigma_P$, alors $\Sigma_P + R \subset Sec(X)$ contredisant le lemme 1.9. Ainsi $R \in \Sigma_P$ et donc $P \in \Sigma_R$. Finalement, $\Sigma_R = Sec(X)$, contredisant $\Sigma_R \subset C(R, X)$.

•

Il ne reste plus, pour démontrer le théorème, qu'à se convaincre du

Lemme 1.14 *Soit $x \in X$, $P \in Sec(X) - X$ tel que $x \in Q_P$. Alors Q_P est lisse en x.*

Démonstration : Par le lemme précédent soit S tel que $x \notin T_S Sec(X)$ et soit $M = \Sigma_S + x$. x est donc un point isolé de M par le lemme 1.9. Soit Q_P passant par x et $y \in Q_P \cap Q_S$ (1.6). Alors (xy) coupe Q_P en les deux points distincts x et y et (xy) ne peut être incluse dans Q_P. Mais si Q_P n'était pas lisse en x, ce serait un cône de sommet x.

Nous avons achevé la preuve du théorème 1.2.

•

2 Classification des variétés de Sévéri

2.1 Homogénéité des variétés de Sévéri

Soit $X^n \subset \mathbb{P}^m$ une variété de Sévéri quelconque, $Y = Sec(X)^* \subset \mathbb{P}^{m*}$, et comme précédemment F une forme trilinéaire symétrique telle que $v \in Sec(X) \Leftrightarrow F(v,v,v) = 0$. On notera plus simplement $F(v)$ le nombre $F(v,v,v)$. Dorénavant, tous les éléments seront considérés comme des éléments de $\mathbb{C}^{m+1}$ (et non $\mathbb{P}^m$) et l'on notera de la même façon les sous-variétés de $\mathbb{P}^m$ et leurs cônes dans $\mathbb{C}^{m+1}$. Notons pour $w_0 \notin Sec(X)$ et $w \in \mathbb{C}^{m+1}$, $L_{w_0}(w)$ la forme linéaire $2F(w_0)F(w_0,w,.) - 3F(w_0,w_0,w)w_0^*$, où w_0^* désigne la forme linéaire $F(w_0,w_0,.)$. On peut déjà constater que $L_{w_0}(w)$ est colinéaire à la différentielle $D_{w_0}G(w)$ si G désigne l'application $w \mapsto \frac{w^*}{F(w)}$ introduite au paragraphe précédent.

Soit w_0 fixé et $x \in X$ tel que $w_0^*(x) \neq 0$. On va donner une interprétation géométrique de $L_{w_0}(x)$. Tenant compte de $x^* = 0$ (X est le lieu singulier de $Sec(X)$), on a $x + \lambda w_0 \in Sec(X)$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = \lambda_x := -\frac{w_0^*(x)}{F(w_0)}$.
Par ailleurs soit $H_{w_0}(x)$ l'espace tangent à $Sec(X)$ en $x + \lambda_x w_0$. Il a pour équation $F(x+\lambda_x w_0, x+\lambda_x w_0, .) = 0$, soit $L_{w_0}(x)(.) = 0$. Remarquons pour la suite que $w_0 \notin H_{w_0}(x)$.

$D_{w_0}G(x)$ est donc l'équation de l'espace tangent à $Sec(X)$ en l'autre point d'intersection de (xw_0) avec $Sec(X)$ si x est en dehors de l'hyperplan $w_0^* = 0$. On a donc $D_{w_0}G(X) \subset Y$. Réciproquement, si H_P est un hyperplan tangent, le théorème 1.2 permet de lui associer le Σ_P correspondant comme la fermeture des points où l'espace tangent à $Sec(X)$ vaut H_P. Si $w_0 \notin H_P$, d'après le lemme 1.9, il existe alors un unique point x_P dans $X \cap (\Sigma_P + w_0) - Q_P$, et $D_{w_0}G(x_P) = H_P$. Par conséquent, $D_{w_0}G(X)$ contient un ouvert de Y, et comme Y est non dégénérée, on a la

Proposition 2.1 *Si $w_0 \notin Sec(X)$, $D_{w_0}G$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{P}^m$ sur $\mathbb{P}^{m*}$ tel que $D_{w_0}G(X) = Y$.*

Corollaire 2.2 *X est homogène.*

Démonstration : Soit $x, x' \in X$; il suffit de trouver $w, w' \notin Sec(X)$ tels que $D_wG(x) = D_{w'}G(x')$. Soit donc H_P ne passant ni par x ni par x' ; w dans $\Sigma_P + x$ et w' dans $\Sigma_P + x'$ conviennent.

•

On peut alors raisonner au cas par cas comme dans [4, p.14] pour conclure à une classification des variétés de Sévéri ; je propose ici de prolonger la démarche générale jusqu'à l'obtention du résultat. On pourra aussi trouver une autre méthode dans l'appendice du livre de Lazarsfeld et Van de Ven ([4]) rédigé par Zak.

2.2 Etude globale de G

Comme $D_{w_0}G$ réalise un isomorphisme linéaire entre X et Y, Y est une variété de Sévéri. Soit donc F^* la forme trilinéaire symétrique telle que $l \in Sec(Y) \Leftrightarrow F^*(l,l,l) = 0$ et $l \in Y \Leftrightarrow F^*(l,l,.) = 0$. Posons $G^*(l) = \frac{F^*(l,l,.)}{F^*(l,l,l)}$.

Proposition 2.3 *Soit $w_0 \in \mathbb{C}^{m+1} - Sec(X)$. Alors $G^* \circ G(w_0) = w_0$.*

En particulier G définit une application birationnelle de $\mathbb{P}^m$ d'inverse G^* (cf [3] et [1]).

Démonstration : Comme $u \in Sec(X) \Leftrightarrow L_{w_0}(u) \in Sec(Y)$, il existe $\lambda_{w_0} \in \mathbb{C}^*$ tel que
$F^*[L_{w_0}(u), L_{w_0}(v), L_{w_0}(w)] = \lambda_{w_0} F(u,v,w)$ $(\diamond)$

Soit alors $w_0 \in \mathbb{C}^{m+1} - Sec(X)$ et $l \in (\mathbb{C}^{m+1})^*$, on veut voir que

$$\frac{l(w_0)}{F(w_0)} = \frac{F^*(w_0^*, w_0^*, l)}{F^*(w_0^*)}$$

Comme $L_{w_0}(w_0) = -F(w_0)w_0^*$, en appliquant $(\diamond)$ à $u = v = w_0$ et w tel que $L_{w_0}(w) = l$, il vient :
$F^*(w_0^*, w_0^*, l)F^2(w_0) = \lambda_{w_0} F(w_0)$. De même, si on pose $u = v = w = w_0$, il vient :
$F^*(w_0^*, w_0^*, w_0^*)F^3(w_0) = -\lambda_{w_0} F(w_0)$. En quotientant ces deux dernières égalités, on obtient l'égalité souhaitée.

•

G considérée comme une application rationnelle de $\mathbb{P}^m$ se prolonge à $Sec(X) - X$ par $G(p) = p^*$ et on a $G(Sec(X) - X) = Y$. On note maintenant $G(X)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence des $G(x_n)$ pour (x_n) parcourant toutes les suites tendant vers un élément de X. On a alors la proposition suivante qui est un résultat annoncé sans démonstration dans [3, p.79] :

Proposition 2.4 *$G(X) = Sec(Y) = X^*$.*

Démonstration : On a évidemment $G(X) \subset Sec(Y)$ car en dehors de $Sec(Y)$, G est inversible. Réciproquement, si $y_n \to y$ avec $y \in Sec(Y)$ mais $y_n \notin Sec(Y)$, alors en notant $x_n = G^*(y_n)$, on a par la proposition 2.3 $G(x_n) = y_n$ donc $G(x_n) \to y$ et par ailleurs $x_n \to G(y) \in X$; ainsi $y \in G(X)$ et $G(X) = Sec(Y)$.

En ce qui concerne la deuxième égalité, soit $w \in \mathbb{P}^m - Sec(X)$ et $w' = G(w)$. On a les isomorphismes $D_w G$ et $D_{w'} G$ respectivement entre X et Y, et entre Y et $(Sec(Y))^*$. On a donc un isomorphisme composé $X \simeq (Sec(Y))^*$. Mais par le choix de w et w' et la proposition 2.3, cette composée est l'identité, de sorte que $X = (Sec(Y))^*$ et $X^* = Sec(Y)$.

•

3 Homogénéité de la variété des sécantes

Dans ce paragraphe, on montre que $Sec(X) - X$ est homogène.

Soit $p \in Sec(X) - X$ et $P(w_0) = 2F(w_0)p - 6w_0^*(p)w_0$. On commence par deux lemmes techniques :

Lemme 3.1 *Il existe w_0 tel que $P(w_0) \notin Sec(X)$.*

Démonstration : Si on avait $F[P(w)] = 0$ pour tout $w \in \mathbb{C}^{m+1}$, alors en développant cette égalité, on trouve $F(w)^2 F(w,w,p)F(w,p,p) = 0$ pour tout w et donc soit

$F(w,w,p) = 0$ pour tout w, soit $F(w,p,p) = 0$ pour tout w. Dans le premier cas, par polarisation on a aussi $F(w,p,p) = 0$; ainsi dans les deux cas, $p \in X$, contredisant le choix de p.

•

Lemme 3.2 *Soit $\omega \notin Sec(X)$. La matrice $F(\omega,.,.)$ est inversible.*

<u>**Démonstration :**</u> Cette matrice est la différentielle en ω de $H : w \to F(w,w,.)$. Or comme $F(\omega) \neq 0$, on peut au voisinage de ω définir une racine $\sqrt{F(w)}$, qui est non nulle, et par la proposition 2.3, la composée

$$w \mapsto w_0 := \frac{w}{\sqrt{F(w)}} \overset{H}{\mapsto} F(w_0,w_0,.) \overset{G^*}{\mapsto} G^*[F(w_0,w_0,.)]$$

est l'identité, de sorte que $F(\omega,.,.)$ est inversible.

•

Proposition 3.1 *$Sec(X) - X$ est homogène.*

<u>**Démonstration :**</u> Soit $p \in Sec(X) - X$ et w_0 tel que $P(w_0) \notin Sec(X)$. Notons $L(w)$ la dérivée de $L_\omega(p)$ quand ω tend vers w_0 dans la direction w, soit :

$$\begin{aligned} L(w) \ &= 6F(w_0,w_0,w)F(w_0,p,.) + 2F(w_0,w_0,w_0)F(w,p,.) \\ &-6F(w_0,w,p)F(w_0,w_0,.) - 6F(w_0,w_0,p)F(w_0,w,.) \end{aligned}$$

On va voir que Ker$(L)\cap$ Ker$(w_0^*) = \{0\}$, de sorte que L est au moins de rang m. Ainsi, si p et p' sont des éléments dans $Sec(X) - X$, $\{L_w(p)\}$ et $\{L_w(p')\}$ contiennent des ouverts de $Sec(Y)$ donc ils se rencontrent, terminant la preuve de la proposition.

Soit donc w tel que $L(w) = 0$ et $F(w_0,w_0,w) = 0$. En appliquant $L(w) = 0$ à w_0, il vient $F(w_0,w,p) = 0$; tenant compte de $F(w_0,w_0,w) = 0$, on en déduit $F[P(w_0),w,.] = 0$. Comme par définition de w_0, $P(w_0) \notin Sec(X)$, on déduit alors du lemme 3.2 que $w = 0$.

•

4 Classification des variétés de Sévéri

Notons $V = \mathbb{C}^{m+1}$. Soit H le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}V$ respectant X. Comme H agit transitivement sur la variété projective X, c'est un sous-groupe semi-simple de $PGL(V)$; son relevé G dans $GL(V)$ est encore un groupe semi-simple, et comme X est non dégénérée, V est un G-module irréductible. Ainsi l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[V]^G$ égale $\mathbb{C}[F]$. En effet par la proposition 3.1 il ne peut y avoir d'autres invariants sous l'action de G. En particulier, G agit dans V de façon colibre au sens où l'algèbre des invariants est libre. Les groupes colibres ont été classés par [2] :

Théorème 4.1 *Les groupes suivants sont tous les groupes linéaires irréductibles simples connexes qui sont colibres et ont au plus un invariant :*
I. Les groupes localement transitifs : $(SL_n, \mathbb{C}^n)$; $(Sp_n, \mathbb{C}^{2n})$ (n pair) ; $(SL_n, \Lambda^2\mathbb{C}^n)$ (n impair) ; $(Spin_{10}, \Delta)$.

II. Les groupes avec un seul invariant : $(SO_n, \mathbb{C}^n)$ *(*$n \neq 4$*) ;* $(SL_n, \Lambda^2\mathbb{C}^n$ *(n pair) ;* $(SL_n, S^2\mathbb{C}^n)$ *;* $(SL_n, \Lambda^3\mathbb{C}^n)$ *(*$n = 6, 7, 8$*) ;* $(Sp_6, \Lambda^3_0\mathbb{C}^6)$ *;* $(SL_2, S^3\mathbb{C}^2)$ *;* $(Spin_n, \Delta)$ *(*$n = 7, 9, 11, 12, 14$*) ;* E_6 *;* E_7 *;* G_2*.*

Δ désigne une représentation spinorielle et E_6,E_7 et G_2 agissent dans leurs représentations minimales.

On peut maintenant démontrer le théorème de classification :

Théorème 4.2 *Il n'existe que quatre variétés de Sévéri, à savoir :*
- *n=2 :* $X = \mathcal{V} \subset \mathbb{P}^5$, *la surface de Véronèse*
- *n=4 :* $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$
- *n=8 :* $X = G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$
- *n=16 :* $X = \mathcal{E}_6 \subset \mathbb{P}^{26}$

Démonstration : Si G est simple, alors nous sommes dans le cadre II du théorème et les groupes dont l'invariant est de degré 3 sont $(SL_6, \Lambda^2\mathbb{C}^6)$, $(SL_3, S^2\mathbb{C}^3)$ et E_6, ce qui correspond aux variétés de Sévéri $G(2,6)$, $\mathcal{V}$ et E_6. Si G n'est pas simple, alors on peut écrire $G = G_1 \times G_2$ avec G_1 et G_2 non triviaux, agissant sur V_1 et V_2 tels que $V = V_1 \otimes V_2$. Notant $n_i := \dim X_i$ et $n_i + \delta_i := \dim V_i$ (alors $\delta_i \geq 1$), pour que $X = X_1 \times X_2$ soit une variété de Sévéri, on doit avoir $\frac{3}{2}(n_1 + n_2) + 3 = (n_1 + \delta_1) \times (n_2 + \delta_2)$ ce qui conduit à : $(n_1 n_2) + (\delta_2 - \frac{3}{2})n_1 + (\delta_1 - \frac{3}{2})n_2 + (\delta_1\delta_2 - 3) = 0$.

Si $\delta_1 \geq 2$ et $\delta_2 \geq 2$, tous les termes de cette somme sont positifs ; on peut donc supposer $\delta_2 = 1$, ce qui donne
$(\delta_1 - \frac{3}{2})n_2 + (n_2 - \frac{1}{2})n_1 + \delta_1 - 3 = 0$ et donc $\delta_1 \leq 2$.

Si $\delta_1 = 2$, l'équation donne $n_1(n_2 - \frac{1}{2}) + \frac{n_2}{2} - 1 = 0$ soit $n_1 = n_2 = 1$. Dans ce cas la variété obtenue est $X = \mathbb{P}^1 \times \nu_2(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$, qui n'est pas une variété de Sévéri.

Si $\delta_1 = 1$, on trouve $(2n_1 - 1)(2n_2 - 1) = 9$ soit, en supposant $n_1 \leq n_2$, $n_1 = n_2 = 2$ (on retrouve alors $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$) ou $n_1 = 1$ et $n_2 = 5$; dans ce cas la variété serait $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5$ qui n'est pas une variété de Sévéri.

•

Références

[1] L. Ein et N. Shepherd-Barron
Some special Cremona transformations.
Amer. J. Math. **111** (1989), no. 5, 783–800.

[2] V. G. Kac, V.L. Popov et E. B. Vinberg
Sur les groupes linéaires algébriques dont l'algèbre des invariants est libre.
C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), no. 12,Ai, A875–A878.

[3] F. L. Zak
Tangents and Secants of Algebraic Varietes American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[4] R. Lazarsfeld et A. Van de Ven
Topics in the geometry of projective space

Recent work of F.L. Zak
Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, Mass., 1984.

[5] W. Fulton et R. Lazarsfeld
Connectivity and its applications in algebraic geometry.
Algebraic geometry (Chicago, Ill., 1980), pp. 26–92, Lecture Notes in Math., 862
Springer, Berlin-New York, 1981.

[6] R. Hartshorne
Algebraic geometry
Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[7] A. Grothendieck
Éléments de géométrie algébrique.
IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **28**, 1966

[8] D. Mumford
Algebraic geometry.
I. Complex projective varieties.
Springer-Verlag, Berlin, 1995.

Pierre-Emmanuel CHAPUT
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

chaput@ujf-grenoble.fr