INÉGALITÉS DE HARNACK POUR LES COMBINAISONS LINÉAIRES DE SECTIONS PROPRES DE L'OPÉRATEUR DE HODGE. GÉNÉRALISATIONS ET APPLICATIONS

Erwann AUBRY

Prépublication de l'Institut Fourier n° 515 (2000)

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Le but de cet article est, dans un premier temps, de donner deux inégalités du type Harnack pour les combinaisons linéaires d'un nombre fini de sections propres d'un opérateur de Schrödinger $(\overline{\triangle} + V)$ agissant sur les sections d'un fibré dont la base est une variété riemannienne compacte (M^n,g).

La première de ces inégalités précise et améliore des estimées obtenues précédemment par P. Li ([11]) et S. Gallot ([4], [5]) : on y démontre une majoration optimale du rapport $\|S\|_\infty / \|S\|_2$, pour toute combinaison linéaire finie S de sections propres de l'opérateur de Schrödinger (correspondant éventuellement à des valeurs propres différentes). Ce majorant est universel et se calcule en fonction seulement d'un majorant du diamètre, d'une borne sur les normes $L^{\frac{n}{2}+\epsilon}$ du potentiel et de la partie négative de la courbure de Ricci de la base, et de l'écart entre les valeurs propres considérées (lemme 1.5). Le fait que ce majorant ne dépende pas du nombre de sections propres correspondant à des valeurs propres distinctes entrant dans la combinaison linéaire permet de minorer chaque valeur propre de n'importe quel opérateur de Schrödinger (agissant sur n'importe quel fibré) par une fonction de l'indice de cette valeur propre (corollaire 1.7), déterminée de manière universelle (i.e. en fonction des seules informations géométriques citées ci-dessus).

La seconde de ces inégalités consiste à minorer de manière optimale le rapport $\frac{\inf |S|}{\sup |S|}$ pour toute combinaison linéaire finie S de sections propres de l'opérateur de Schrödinger (correspondant éventuellement à des valeurs propres différentes). Ce minorant est universel et se calcule en fonction d'un majorant du diamètre et de la norme $L^{\frac{n}{2}+\epsilon}$ de la partie négative de la courbure de Ricci de la base, d'un majorant des normes $L^{\frac{n}{2}+\epsilon}$ (L^2 en dimension 2 et 3) du potentiel et de la courbure du fibré, et de l'écart entre les valeurs propres qui entrent en jeu (proposition 1.11 et corollaire 1.12). Cette inégalité avait été établie par M. Le Couturier et G. Robert ([10]) dans le cas de sections appartenant au noyau de l'opérateur de Schrödinger et quand la base est de dimension supérieure ou égale à 4. Des estimées du même type ont été obtenues par P. Petersen et C. Sprouse dans le cas où le potentiel est nul ([13]). Lorsque ce minorant est non nul, cette dernière inégalité de Harnack donne un critère qui assure la trivialisation (partielle ou totale suivant le nombre de sections propres mises en jeu) du fibré considéré (corollaire

Classification math. : 58G25.
Mots-clés : Nilvariétés, opérateurs de Schrödinger, valeurs propres, inégalité de Harnack, trivialisation d'un fibré.

1.12) et l'existence d'un repère global qui, en tout point, est presque orthonormé (corollaire 1.12).

Dans la section 2, nous appliquons cette méthode pour montrer que, lorsque la norme $L^{\frac{n}{2}+\epsilon}$ de la partie négative de la courbure de Ricci est suffisamment petite, les 1-formes différentielles propres du laplacien de Hodge (correspondant à des petites valeurs propres) forment un repère global qui, en tout point, est presque orthonormé et donnent par conséquent une trivialisation du fibré tangent. De plus, la première inégalité de Harnack énoncée ci-dessus nous permet de montrer que ces 1-formes propres ont une différentielle qui est petite en norme L^∞. Un principe, dû à P. Ghanaat ([9]) permet d'en déduire que la variété de base peut-être munie d'une structure de nilvariété. Nous montrons de plus l'existence, sur cette nilvariété, d'une métrique invariante à gauche qui est presque isométrique à la métrique initiale.

Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant, qui fournit une démonstration nouvelle et complète (ainsi qu'une amélioration) d'un résultat publié récemment par P. Petersen et C. Sprouse ([13]) :

THÉORÈME 0.1 *Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $p > n$ il existe une constante positive $\xi(p,n) > 0$ telle que toute variété riemannienne compacte (M^n,g) vérifiant :*

$$\begin{cases} \mathrm{Diam}(M)^2 . \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} < \xi(p,n)(1+\mathrm{Diam}(M)^2\|\mathrm{R}\|_{\mathrm{q}/2})^{-\beta(\mathrm{p,n})}, \\ \mathrm{Diam}(M)^2 . \quad \lambda_n \quad < \xi(p,n)(1+\mathrm{Diam}(M)^2\|\mathrm{R}\|_{\mathrm{q}/2})^{-\beta(\mathrm{p,n})}, \\ \textit{avec } q = \max(p,4) \textit{ et } \beta = \frac{(p+n)(q-2)}{p-n}. \end{cases}$$

(où λ_n est la n-ième valeur propre du laplacien de Hodge agissant sur les 1-formes différentielles) est difféomorphe à une nilvariété $\Gamma\backslash G$.

De plus, pour tout $\epsilon \in]0, \frac{1}{3^{\beta+2}}[$, on peut munir $\Gamma\backslash G$ d'une forme de Maurer-Cartan α_0 et de sa métrique invariante à gauche associée g_{α_0}, et trouver un difféomorphisme $\Phi : M \to \Gamma\backslash G$ qui vérifie :

$$\left(1-3\epsilon^{\frac{1}{\beta+2}}\right) < \frac{\Phi^* g_{\alpha_0}}{g} < \frac{1}{\left(1-3\epsilon^{\frac{1}{\beta+2}}\right)}$$

dès que (M,g) vérifie :

$$\begin{cases} \mathrm{Diam}(M)^2 . \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} & \leqslant \epsilon.\xi(p,n)(1+\mathrm{Diam}(M)^2\|\mathrm{R}\|_{\mathrm{q}/2})^{-\beta(\mathrm{p,n})}, \\ \mathrm{Diam}(M)^2 . \quad \lambda_n & \leqslant \epsilon.\xi(p,n)(1+\mathrm{Diam}(M)^2\|\mathrm{R}\|_{\mathrm{q}/2})^{-\beta(\mathrm{p,n})}. \end{cases}$$

REMARQUE 0.2 La borne sur la courbure sectionnelle de la variété (M,g) n'est pas superflue comme le prouve un contre-exemple de M. Anderson (cf. [1]).

L'amélioration qu'apporte ce résultat réside d'abord dans le remplacement de l'hypothèse de minoration L^∞ de la courbure de Ricci par une hypothèse intégrale ($L^{p/2}$, avec p>n). Cette amélioration est non négligeable, en effet S. Gallot [5] (pour les problèmes liés à la topologie des variétés) et D. Yang [14] (pour les problèmes de convergence de variétés au sens de Gromov-Hausdorff) ont montré qu'il existe des suites de variétés qui peuvent être munies d'une suite de métriques de diamètre borné et dont la partie négative de la courbure de Ricci est bornée en norme $L^{p/2}$ (resp. dont le tenseur de courbure est borné en norme $L^{p/2}$), qui n'admettent aucune suite de métriques de diamètre borné et de courbure de Ricci minorée (resp. et dont le tenseur de courbure soit borné en norme L^∞). De plus, l'utilisation de la caractérisation des nilvariétés donnée par P. Ghanaat [9] plutôt que celle de M. Min-Oo et E. Ruh [12] (utilisée par Pertersen et Sprouse dans [13]), nous permet de conclure que la variété riemannienne considérée est une nilvariété et que sa métrique est presque invariante à gauche, alors que [13] concluait que la variété est une infra-nilvariété sans contrôle de la métrique. Enfin, la démonstration proposée ne nécessite pas de faire appel à un argument sujet à controverse : le fait que le flot de Hamilton permette, en partant d'une métrique de courbure bornée, d'obtenir une métrique C^1-proche de la métrique initiale, dont la courbure et la dérivée covariante de la courbure sont bornées par une fonction universelle de la borne initiale.

Remerciements : Je tiens tout particulièrement à remercier B. Colbois pour avoir porté mon attention sur les résultats de P. Ghanaat et sur la possibilité de les utiliser en vue d'améliorer les résultats de P. Petersen et C. Sprouse. Je remercie également S. Gallot pour ses conseils, ses encouragements et ses remarques.

1. Estimées sur les sections propres et la multiplicité des valeurs propres d'un opérateur de Schrödinger

1.1. Notations et définitions

Dans toute la suite (M^n,g) est une variété riemannienne compacte sans bord de dimension n,$W \to M$ un fibré vectoriel riemannien de dimension l sur M et $E = \bigotimes^k(W)$ le fibré des k-tenseurs covariants de M à valeurs dans W. On note $<.,.>_W$ le produit scalaire sur W et $<.,.>$ son extension canonique à E donnée par :

$$< T,T' > (m) = \sum_{i_1,\dots,i_k} < T(i_1,\dots,i_k),T'(i_1,\dots,i_k) >_W ,$$

où $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de (T_mM,g_m) et $T(i_1,\dots,i_k) = T(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$.

On note alors D la connexion riemannienne de E, obtenue par extension de la connexion de W, et R^E le tenseur de courbure associé ($R^E(X,Y)S = D^2_{X,Y}S - D^2_{Y,X}S$).

Le produit scalaire sur E et la mesure riemannienne de (M,g) permettent de définir un produit scalaire L^2 sur l'ensemble des sections C^∞ de E par :

$$(T|T') = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M < T,T' > dv_g$$

(toutes les normes L^p, notées $\|.\|_p$, seront relatives à la mesure de probabilité riemannienne $\frac{dv_g}{\mathrm{Vol}(M)}$ sur M).

Soit D^* l'adjoint de l'opérateur D pour ce produit scalaire, et :

$$\overline{\triangle} = D^*D = -\sum_{k=1}^{n} D^2T(e_k,e_k;\cdot,\dots,\cdot)$$

le laplacien brut agissant sur $\bigotimes^k(W)$.

Notons $\mathrm{Sym}(E)$ le fibré des endomorphismes symétriques de E. Un opérateur de Schrödinger agissant sur les sections C^∞ de E est alors un opérateur de la forme $\overline{\triangle}+V$, où V est un élément de

$\mathrm{Sym}(E)$. Cette famille d'opérateurs contient en particulier tous les laplaciens naturels agissant sur des fibrés vectoriel sur M (dans ce cas V dépend linéairement du tenseur de courbure R de E, cf. [2], chap.1). Par exemple, si $E = T^*M$, l'opérateur de Schrödinger $\triangle_g = \overline{\triangle} + \mathrm{Ric}$ agissant sur les 1-formes différentielles de M n'est autre, d'après la formule de Böchner, que le laplacien de Hodge.

Enfin, pour toute section V du fibré des endomorphismes symétriques, *on notera* $\underline{V}(m)$ *sa plus petite valeur propre sur* E_m, et pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$, *on notera* $f^-(m) = \mathrm{Max}(0, -f(x))$ *sa partie négative.*

1.2. Inégalités de Sobolev

Nous établissons nos estimées grâce aux techniques, désormais classiques, d'itérations à laDe Giorgi-Moser des inégalités de Sobolev. Pour cela nous aurons besoin des inégalités de Sobolev quantitatives données par les deux lemmes suivants, dus à S. Gallot (cf. [5]) :

LEMME 1.1 *Pour tout entier n et pour tout couple de réels* $p \geqslant q > n$ *il existe des constantes* $C(p,q,n)$ *et* $\zeta(p,q,n)$ *(universelles et explicitement calculables) telles que, sur toute variété riemannienne compacte* (M^n,g) *vérifiant :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2 \|\underline{\mathrm{Ric}}_M^-\|_{p/2} \leqslant \zeta(p,q,n),$$

on ait :

– *toute fonction u de* $H^{1,2}(M)$ *vérifie :*

$$\|u\|_{\frac{2q}{q-2}} \leqslant C(p,q,n)\,\mathrm{Diam}(M)\|du\|_2 + \|u\|_2.$$

– *toute fonction u de* $H^{1,q}(M)$ *vérifie :*

$$\sup\ u - \inf\ u \leqslant C(p,q,n)\,\mathrm{Diam}(M)\|du\|_q.$$

REMARQUE 1.2 On peut, dans la proposition précédente, prendre $p = \infty$ et $q = n$. Dans ce cas, la constante C ne dépendra que de n. On peut aussi prendre $q = \frac{p+n}{2}$, les constantes ne dépendant alors plus que de n et d'un minorant de $p - n$.

Les résultats sur le contrôle universel des sections propres des opérateurs de Schrödinger sur toute une classe de variétés, énoncés dans la suite, nécessitent l'existence d'une inégalité de Sobolev universelle sur cette classe de variété. En vue de l'application de ces estimées à la démonstration du théorème 0.1 nous avons choisi de déduire l'existence d'une telle inégalité de Sobolev universelle des hypothèses de courbure énoncées dans le lemme 1.1, mais cette inégalité (et donc le contrôle des sections propres d'un opérateur de Schrödinger) peut-être obtenue sous d'autres hypothèses (sur la courbure ou par exemple sur la constante isopérimétrique de Cheeger). A titre d'exemple nous citons le résultat suivant, qui découle aussi des travaux de S. Gallot ([5]) :

LEMME 1.3 *Pour tout entier n et pour tout couple de réels* $p \geqslant q > n$ *il existe des constantes* $C(p,q,n)$, $B(p,q,n)$ *et* $\zeta(p,q,n)$ *(explicitement calculables) telles que, sur toute variété riemannienne compacte* (M^n,g) *vérifiant :*

$$e^{B(p,q,n)\,\mathrm{Diam}(M)} \| (\underline{\mathrm{Ric}} + (n-1))^- \|_{p/2} \leqslant \zeta(p,q,n),$$

on ait :

-toute fonction u de $H^{1,2}(M)$ *vérifie :*

$$\|u\|_{\frac{2q}{q-2}} \leqslant C(p,q,n)e^{B(p,q,n)\,\mathrm{Diam}(M)}\|du\|_2 + \|u\|_2.$$

-toute fonction u de $H^{1,q}(M)$ *vérifie :*

$$\sup\ u - \inf\ u \leqslant C(p,q,n)e^{B(p,q,n)\,\mathrm{Diam}(M)}\|du\|_q.$$

1.3. Estimations sur les sections propres et minorations des valeurs propres

Commençons par une remarque classique sur le spectre des opérateurs de Schrödinger, qui découle de considérations classiques sur les opérateurs elliptiques et de la positivité de la formes quadratique $S \mapsto \|DS\|_2^2$ associée à $\overline{\triangle}$:

Remarque 1.4 Soit V une section de $\mathrm{Sym}(E)$ alors, lorsque la variété riemannienne (M,g) est compacte, les sous-espaces propres de l'opérateur $\overline{\triangle} + V$ sont de dimension finie, ont une somme directe (orthogonale) dense dans $H^{1,2}$ et les valeurs propres associées forment une suite divergente :

$$\inf\ \underline{V} \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots \infty,$$

de plus, si l'égalité $\lambda_1 = \inf\ \underline{V}$ a lieu, alors toutes les sections propres associées à la première valeur propre sont parallèles.

Dans la suite, on note (S_i) *une famille* L^2*-orthonormale de sections propres de l'opérateur de Schrödinger (i.e.* $(\overline{\triangle} + V)S_i = \lambda_i.S_i$*). Si* I *désigne une sous-partie finie de* $\mathbb{N}$*, on note alors* $F_I = \mathrm{Vect}\,(\{S_i\}_{i\in I})$ *le sous-espace vectoriel de* E *engendré par cette famille.* Le lemme suivant donne une estimation du rapport entres les normes L^∞ et L^2 des combinaisons linéaires de sections propres de F_I en fonction du potentiel V, des valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ et d'une intégrale de la courbure de Ricci (via les constantes qui interviennent dans les inégalités de Sobolev).

Lemme 1.5 *Pour tout entier* $n \geqslant 2$ *et pour tout couple de réels* $p > q > n$*, il existe des constantes (explicitement calculables)* $\zeta(p,q,n)$ *et* $a(p,q,n)$ *telles que, sur toute variété riemannienne compacte* (M^n,g) *vérifiant :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{\mathrm{Ric}}_M^-\|_{p/2} \leqslant \zeta(p,q,n),$$

toute combinaison linéaire de sections propres $S \in F_I$ *de l'opérateur* $\overline{\triangle} + V$ *vérifie, pour tout* $K \in \mathbb{R}$ *:*

$$\|S\|_\infty \leqslant \left(1 + a(p,q,n)\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right)(1+\Lambda)^{\frac{pq}{2(p-q)}}\ \|S\|_2$$

où $\Lambda = \mathrm{Diam}(M)\sqrt{(\|(\underline{V} - K)^-\|_{p/2} + \sup_{i\in I}|\lambda_i - K|)}$.

Remarque 1.6 Cette estimation est optimale dans la mesure où le rapport $\frac{\|S\|_\infty}{\|S\|_2}$ tend vers 1 lorsque Λ tend vers 0.

Démonstration. — On pose, pour la suite, $A_k(I) = \sup_{S\in F_I\setminus\{0\}} \frac{\|S\|_k}{\|S\|_2}$, où k est un réel plus grand que 1 ou égal à $+\infty$.

Soient S un élément de F_I et K un réel quelconque; posons $f = \sqrt{|S|^2+\epsilon^2}$ pour $\epsilon > 0$. La fonction f est C^∞ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$|d\left(\sqrt{|S|^2+\epsilon^2}\right)|^2 \leqslant \frac{|DS|^2|S|^2}{|S|^2+\epsilon^2} \leqslant |DS|^2.$$

On en déduit l'inégalité :

$$\begin{aligned} f\triangle f &= \frac{1}{2}\triangle(f^2)+|df|^2 \leqslant \frac{1}{2}\triangle(|S|^2)+|DS|^2 = <\overline{\triangle}S,S> \\ &\leqslant <(\overline{\triangle}+V-K.Id)S,S>+(\underline{V}-K)^-\,|S|^2 \\ &\leqslant |(\overline{\triangle}+V-K.Id)S|\,f+(\underline{V}-K)^-\,f^2. \end{aligned}$$

Or, f étant une fonction strictement positive, on obtient, par la formule de Green, que si $k > 1/2$, alors :

$$\begin{aligned} \int_M |d(f^k)|^2 &= \frac{k^2}{2k-1}\int_M <df,d(f^{2k-1})> = \frac{k^2}{2k-1}\int_M (\triangle f)\,f^{2k-1} \\ &\leqslant \frac{k^2}{2k-1}\left(\int_M |(\overline{\triangle}+V-K.Id)S|\,f^{2k-1}+\int_M (\underline{V}-K)^-\,f^{2k}\right) \end{aligned}$$

On a donc, pour tout réel $k > 1/2$:

$$\|d(f^k)\|_2 \leqslant \frac{k}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\|\,(\underline{V}-K)^-\,\|_{p/2}\|f\|^{2k}_{\frac{2kp}{p-2}}+\|(\overline{\triangle}+V-K.Id)S\|_{2k}\|f\|^{2k-1}_{2k}}.$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev donnée par le lemme 1.1 (appliquée à la fonction $u = f^k$), en faisant tendre ϵ vers 0 et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient l'inégalité suivante, valable pour tout $k > 1/2$ (où $C(p,q,n)$ est une constante universelle) :

$$\begin{aligned} \|S\|^k_{\frac{2kq}{q-2}} \leqslant\ & \frac{C(p,q,n)k}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\mathrm{Diam}(M)^2(\|\,(\underline{V}-K)^-\,\|_{p/2}\|S\|^{2k}_{\frac{2kp}{p-2}}+\|(\overline{\triangle}+V-K.Id)S\|_{2k}\|S\|^{2k-1}_{\frac{2kp}{p-2}})} \\ & +\|S\|^k_{\frac{2kp}{p-2}} \end{aligned}$$

Or $(\overline{\triangle}+V-K.Id)$ est une application linéaire de F_I dans lui-même, on a donc :

$$\begin{aligned} \|(\overline{\triangle}+V-K.Id)S\|_{2k} &\leqslant A_{2k}(I)\|(\overline{\triangle}+V-K.Id)S\|_2. \\ &\leqslant A_{\frac{2kp}{p-2}}(I)\sup_{i\in I}|\lambda_i-K|.\|S\|_2. \end{aligned}$$

On en déduit donc l'inégalité (toujours pour $k > 1/2$) :

$$\|S\|_{\frac{2kq}{q-2}} \leqslant \left(1+\frac{C(p,q,n)k}{\sqrt{2k-1}}\Lambda\right)^{1/k} A_{\frac{2kp}{p-2}}(I)\|S\|_2$$

où Λ est définie dans l'énoncé du lemme 1.5.

Comme S a été choisi quelconque dans l'espace vectoriel F_I, on obtient donc :

$$A_{\frac{2qk}{q-2}}(I) \leqslant \left(1+\frac{C(p,q,n)k}{\sqrt{2k-1}}\Lambda\right)^{1/k} A_{\frac{2kp}{p-2}}(I)$$

Si on pose successivement $k=\beta^j$ dans cette inégalité, avec $\beta=\frac{q(p-2)}{p(q-2)}>1$ et $j\in\mathbb{N}$, et qu'on multiplie membre à membre les inégalités ainsi obtenues, en remarquant que $A_m(I)\to A_\infty(I)$, lorsque m tend vers $+\infty$, et que le produit infini converge, on obtient :

$$A_\infty(I) \leqslant \prod_{j=0}^{\infty}\left(1+\frac{C(p,q,n)\beta^j}{\sqrt{2\beta^j-1}}\Lambda\right)^{\frac{1}{\beta^j}} A_{\frac{2p}{p-2}}(I).$$

Enfin, comme $\frac{2p}{p-2}>2$, on a $\|S\|_{\frac{2p}{p-2}} \leqslant \|S\|_\infty^{\frac{2}{p}}.\|S\|_2^{\frac{p-2}{p}}$, ce qui se traduit en termes des $A_k(I)$ par $A_{\frac{2p}{p-2}}(I)\leqslant A_\infty^{\frac{2}{p}}(I)$ d'où :

$$A_\infty(I) \leqslant \prod_{j=0}^{\infty}\left(1+\frac{C(p,q,n)\beta^j}{\sqrt{2\beta^j-1}}\Lambda\right)^{\frac{p}{p-2}.\frac{1}{\beta^j}}.$$

Pour simplifier l'expression, remarquons que dès que $a>1$, on a :

$$Log(1+a.x) < Log(1+x)+(a-1)\frac{x}{x+1},$$

D'où :

$$Log\, A_\infty(I) \quad\leqslant\quad \frac{p}{p-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^j}\left[Log(1+\Lambda)+C(p,q,n)\beta^{j/2}\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right]$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned} A_\infty(I) &\leqslant e^{C'(p,q,n)\frac{\Lambda}{1+\Lambda}}.(1+\Lambda)^{\frac{pq}{2(p-q)}} \\ &\leqslant \left[1+a(p,q,n)\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right)\right].(1+\Lambda)^{\frac{pq}{2(p-q)}}, \end{aligned}$$

car pour tout $x\in[0,1]$, on a $e^{ax}\leqslant e^a.ax+1$. □

On remarquera que le majorant du rapport $\frac{\|\sum\alpha_i S_i\|_\infty}{\|\sum\alpha_i\|_2}$ donné par ce lemme ne dépend pas du nombre de sections propres S_i qui entrent dans la combinaison linéaire. Ceci permet, en utilisant une technique développée dans [11] par P. Li, de majorer le dimension de F_I, et donc de majorer la multiplicité des valeurs propres et la fonction de comptage du spectre d'un opérateur de Schrödinger :

COROLLAIRE 1.7 *Pour tout entier $n\geqslant 2$, pour tout réel $p>n$ et tout réel $\alpha\in]0,\frac{1}{n}-\frac{1}{p}[$ il existe des constantes (explicitement calculables) $\zeta(p,\alpha,n)$, et $a(p,\alpha,n)\geqslant 1$ telles que, sur toute variété riemannienne compacte (M^n,g) vérifiant :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{\mathrm{Ric}}_M^-\|_{p/2}\leqslant\zeta(p,\alpha,n),$$

on ait :

(i) La multiplicité $mult(\lambda)$ de toute valeur propre λ de tout opérateur de Schrödinger $(\overline{\triangle} + V)$, agissant sur les sections de n'importe quel fibré E (de rang l) sur M, vérifie :

$$mult(\lambda) \quad \leqslant \quad l.\left(1 + a(p,\alpha,n)\sqrt{\mathrm{Diam}(M)^2 \| \,(\underline{V} - \lambda)^- \, \|_{p/2}}\right)^{2+\frac{1}{\alpha}}$$

(ii) La i^{eme} valeur propre λ_i du spectre de $(\overline{\triangle} + V)$ vérifie :

$$\lambda_i \geqslant \lambda_1 - \|(\underline{V} - \lambda_1)^-\|_{p/2} + \frac{1}{\mathrm{Diam}(M)^2}\left[\left(\frac{1}{b(p,\alpha,n)}.\frac{i}{l}\right)^{\alpha} - 1\right]^2,$$

où λ_1 est la première valeur propre de $(\overline{\triangle} + V)$. Par ailleurs, on a :

$$\lambda_{l+1} - \lambda_1 > \frac{1}{a(p,\alpha,n)^2\,\mathrm{Diam}(M)^2}.\left[\left(1 + \frac{1}{l}\right)^{\frac{\alpha}{1+2\alpha}} - 1\right]^2 - \|(\underline{V} - \lambda_1)^-\|_{p/2}.$$

le minorant étant une constante strictement positive lorsque $\mathrm{Diam}(M)^2\|(\underline{V} - \lambda_1)^-\|_{p/2}$ *est inférieur à une constante* $\gamma(p,n) > 0$.

Remarque 1.8 Dans ce qui précède, on peut choisir α en fonction de p et n (par exemple prendre $\alpha = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{p})$), auquel cas les constantes ζ, a et b ne dépendent plus que de n et d'un minorant positif de $(p - n)$.

Démonstration. — Pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, nous notons toujours F_I le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble des sections propres S_i, où $i \in I$. Posons $F(m) = \sum_i |S_i^m(m)|^2$, où $\{S_i^m\}$ est une base L^2-orthonormée de F_I qui diagonalise la forme bilinéaire symétrique donnée par $(t,s) \mapsto < t(m),s(m) >$. Remarquons d'une part que, cette somme étant la trace de la forme bilinéaire relativement au produit scalaire L^2, on a aussi $F(m) = \sum_i |S_i(m)|^2$ pour toute autre base L^2-orthonormée de F_I. D'autre part, sous cette forme, $F(m)$ est la somme d'au plus l termes non nuls, on a donc :

$$\mathrm{Dim}(F_I) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M F(x) \leqslant l.\sup_i \|S_i^m\|_\infty^2 \leqslant l.A_\infty(I)^2.$$

Le lemme 1.5 permet d'en déduire que, pour toute constante K et tout réel $p > q > n$, et en choisissant $a(p,q,n) \geqslant 1$:

$$\dim(F_I) \leqslant l.(1 + a(p,q,n))^2.\left(1 + \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V} - K)^-\|_{p/2} + \sup_{i\in I}|\lambda_i - K|}\right)^{\frac{pq}{p-q}},$$

ou :

$$\dim(F_I) \leqslant l\left(1 + a(p,q,n)\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{\|(\underline{V} - K)^-\|_{p/2} + \sup_{i\in I}|\lambda_i - K|}\right)^{2+\frac{pq}{p-q}}.$$

La partie (i) du corollaire se déduit de ces deux inégalités, où l'on choisit $I = \{i/\lambda_i = \lambda\}$, $K = \lambda$ et $q = \frac{p}{1+p\alpha}$. La partie (ii) du corollaire s'en déduit également en choisissant $I = \{j/\lambda_j \leqslant \lambda_i\}$, $K = \lambda_1$ et $q = \frac{p}{1+p\alpha}$, et en remarquant qu'alors $\dim(F_I) = i$. □

Remarque 1.9 Les estimées universelles sur le spectre (sections propres et valeurs propres) d'opérateurs de Schrödinger données par le lemme 1.5 et son corollaire 1.7 sont valables sur la classe des variétés riemanniennes compactes satisfaisant une certaine inégalité sur la norme $L^{p/2}$ de la partie négative de leur courbure de Ricci. En fait la méthode permet d'établir ces estimées sur toute classe de variété riemannienne compacte où est donnée une majoration universelle des constantes de Sobolev correspondant à l'injection de $H^{1,2}(M)$ dans $L^{\frac{2q}{q-2}}$. Ces propriétés resteront donc valables sous d'autres hypothèses de courbure (voir à ce titre le lemme 1.2). En particulier, si $p=\infty$ et $q=n$ un contrôle universel de l'injection de $H^{1,2}$ dans $L^{\frac{2n}{n-2}}$ est possible (cf. [3]), et le corollaire 1.7 redonne alors les résultats classiques sur la minoration du spectre d'un opérateur de Schrödinger et sur le fait que, si $\mathrm{Diam}(M)^2\|(\underline{V}-\lambda_1)^-\|_\infty$ est petit, on ne peut avoir plus de l petites valeurs propres (arbitrairement proches de λ_1) pour l'opérateur $\overline{\triangle}+V$ (cf. [4] et [8]).

En considérant le cas particulier du laplacien de Hodge vu (via les formules de Weitzenböck) comme un opérateur de Schrödinger agissant sur les k-formes différentielles et en majorant, via le corollaire 1.7, la multiplicité de la valeur propre nulle, on retrouve la majoration des nombres de Betti $b_i(M)$ donnée par S. Gallot dans [5]. L'auteur a montré que les termes intervenant dans cette majoration (qui correspondent à notre terme en $\mathrm{Diam}(M)^2\| (\underline{V}-\lambda)^- \|_{p/2}$) et l'hypothèse sur la courbure ne peuvent être affaiblis. Cela prouve l'optimalité des hypothèses de notre lemme.

1.4. Inégalité de Harnack

Nous allons donner une inégalité de Harnack vérifiée par les combinaisons linéaires de sections propres des opérateurs de Schrödinger. La méthode utilisée généralise celle de M. Le Couturier et G. Robert (cf. [10]), qui établissent de telle inégalités pour les sections harmoniques de tels opérateurs. La démonstration est encore une variante de la technique d'itération à la De Giorgi-Moser.

Commençons par établir le lemme suivant :

LEMME 1.10 *Pour toute section S de E, on a :*

$$\frac{1}{2}\triangle\left(|DS|^2\right)+|D^2S|^2 \leqslant \; < D^*R^ES,DS> +\underline{\mathrm{Ric}}^-|DS|^2+ < D\overline{\triangle}S,DS> +n\|R^E\|.|DS|^2,$$

où $\|R^E\|$ est la norme de l'application linéaire induite par $\mathrm{R^E}$:

$$R^E \; : \quad \begin{cases} \bigwedge^2 T_mM & \to \quad \bigwedge^2 E_m^* \\ \quad u\wedge v & \mapsto \quad R^E(u,v) \end{cases}$$

où $R^E(u\wedge v)(T,S)=< R^E(u,v)T,S>$.

Démonstration. — On déduit de la formule classique $<\overline{\triangle}T,T> = \frac{1}{2}\triangle|T|^2+|DT|^2$, valable pour tout tenseur de E, que :

$$\frac{1}{2}\triangle\left(|DS|^2\right)+|D^2S|^2 = <(\overline{\triangle}D-D\overline{\triangle})S,DS> + < D\overline{\triangle}S,DS> .$$

Or, si DS, R^ES et D^3S sont considérés (respectivement) comme des 1, 2 et 3-tenseurs à valeurs dans E, et si $< .,. >$ désigne le produit scalaire dans E, on a :

$$\begin{aligned}
< (\overline{\triangle}D - D\overline{\triangle})S,DS > &= \sum_{i,j} < D^3S(i,j,j) - D^3S(j,j,i),DS(i) > \\
&= \sum_{i,j} < D^3S(i,j,j) - D^3S(j,i,j) + D^3S(j,i,j) - D^3S(j,j,i),DS(i) >
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{cases}
D^3S(i,j,j) - D^3S(j,i,j) &= \sum_k R^M(i,j,j,k)DS(k) + R^E(i,j)(DS(j)) \\
\sum\limits_j D^3S(j,i,j) - \sum\limits_j D^3S(j,j,i) &= \sum\limits_j D(R^E S)(j,i,j) = D^* R^E S(i)
\end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
< (\overline{\triangle}D - D\overline{\triangle})S,DS > &= -\sum_{i,k} \mathrm{Ric}(i,k) < DS(i),DS(k) > + < D^* R^E S,DS > \\
&\quad + \sum_{i,j} < R^E(i,j)(DS(j)),DS(i) > ,
\end{aligned}$$

dont on déduit aisément le résultat annoncé. □

Les inégalités de Sobolev données en 1.2 nous permettent alors d'obtenir :

Proposition 1.11 *Pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout réel $p > n$, il existe des constantes (explicitement calculables) $\zeta(p,n) \leqslant 1$ et $A(p,n)$ telles que, sur toute variété riemannienne compacte (M,g) vérifiant l'hypothèse de courbure :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2 \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} \leqslant \zeta(p,n),$$

toute section S de E vérifie:

$$1 - \frac{\inf|S|}{\sup|S|} \leqslant A(p,n) \left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty}\right)^\tau \left(1 + \mathrm{Diam}(M)^2(\|R^E\|_{q/2} + \frac{\|\overline{\triangle}S\|_{q/2}}{\|S\|_\infty})\right)^{1-\tau},$$

où $q = \max(p,4)$ et $\tau = \frac{2(p-n)}{pq+n(q-4)}$.

Démonstration. — Posons $u = \sqrt{|DS|^2 + \epsilon^2}$. En procédant comme dans la démonstration du lemme 1.5, on montre :

$$u\triangle u \leqslant \frac{1}{2}\triangle|DS|^2 + |D^2S|^2$$

Donc, d'après le lemme précédent :

$$\begin{aligned}
\int_M |d(u^k)|^2 &\leqslant \frac{k^2}{2k-1} \int_M (\frac{1}{2}\triangle|DS|^2 + |D^2S|^2)u^{2(k-1)} \\
&\leqslant \frac{k^2}{2k-1}\left(\int_M \underline{\mathrm{Ric}}^- u^{2k} + \int_M < D\overline{\triangle}S,DS > u^{2(k-1)}\right. \\
&\quad \left. + \int_M < D^* \mathrm{R^E S,DS} > \mathrm{u^{2(k-1)}} + \mathrm{n}\int_\mathrm{M} \|\mathrm{R^E}\|\mathrm{u^{2k}}\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant le théorème de la divergence, on montre que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\int_M < D\overline{\triangle}S,DS > u^{2(k-1)} &= \int_M |\overline{\triangle}S|^2 u^{2(k-1)} - 2(k-1)\int_M \sum_i < \overline{\triangle}S,DS(i) > du(i).u^{2k-3} \\
&\leqslant \int_M |\overline{\triangle}S|^2 u^{2(k-1)} + 2(k-1)\int_M |\overline{\triangle}S||du|u^{2(k-1)} \\
&\leqslant \frac{k-1}{2}\int_M |du|^2 u^{2(k-1)} + (2k-1)\int_M |\overline{\triangle}S|^2 u^{2(k-1)}
\end{aligned}$$

En faisant de même, et en remarquant que, par antisymétrie de $\mathrm{R^E}$, on a :

$$\sum_{i,j} < \mathrm{R^E S(i,j), D^2 S(i,j)} >= \frac{1}{2}|\mathrm{R^E S}|^2,$$

on trouve :

$$\int_M < D^* R^E S,DS > u^{2(k-1)} \leqslant \frac{k-1}{2}\int_M |du|^2 u^{2(k-1)} + (2k-1)\int_M |\mathrm{R^E S}|^2 \mathrm{u}^{2(k-1)}$$

En remarquant que $\int_M |du|^2 u^{2(k-1)} = \frac{1}{k^2}\int_M |d(u^k)|^2$, en posant $k = \frac{q-2}{2}$ et en appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons l'inégalité suivante, valable pour tout $q \geqslant 4$:

$$\|d(u^{\frac{q-2}{2}})\|_2 \leqslant \frac{q-2}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} + n\|\mathrm{R^E}\|_{\mathrm{p/2}})\|\mathrm{u}\|^{\mathrm{q-2}}_{\frac{\mathrm{p(q-2)}}{\mathrm{p-2}}} + (\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|^2_{\mathrm{q/2}} + \|\mathrm{R^E S}\|^2_{\mathrm{q/2}})\|\mathrm{u}\|^{\mathrm{q-4}}_{\mathrm{q}}}\right)$$

En choisissant $p > n$, $r = \frac{p+n}{2}$, en se servant de l'inégalité de Hölder, puis de la première inégalité de Sobolev du lemme 1.1 (appliquée à la fonction $u^{\frac{q-2}{2}}$), nous obtenons (pour tout $q \geqslant 4$) :

$$\frac{\|u\|^{\frac{q-2}{2}+\gamma}_{\frac{p(q-2)}{p-2}}}{\|u\|_2^{\gamma}} \leqslant \|u^{\frac{q-2}{2}}\|_{\frac{2r}{r-2}}$$

$$\leqslant \|u\|^{\frac{q-2}{2}}_{q-2}$$
$$+C'(p,n).\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} + \|\mathrm{R^E}\|_{\mathrm{p/2}})\|\mathrm{u}\|^{\mathrm{q-2}}_{\frac{\mathrm{p(q-2)}}{\mathrm{p-2}}} + (\|\overline{\triangle}\mathrm{S}\|^2_{\mathrm{q/2}} + \|\mathrm{R^E S}\|^2_{\mathrm{q/2}})\|\mathrm{u}\|^{\mathrm{q-4}}_{\mathrm{q}}},$$

où $\gamma = \frac{2(p-r)(q-2)}{[(q-4)p+4]r}$.

Comme la constante ϵ n'intervient dans cette inégalité que dans la définition de la fonction u, on peut (quitte à faire tendre ϵ vers 0) remplacer $u = \sqrt{|DS|^2+\epsilon^2}$ par $u = |DS|$. De plus, si on pose $q = \max(p,4)$, on a $\gamma = \frac{2(p-r)}{r(q-2)}$ et $\frac{p(q-2)}{p-2} \geqslant q \geqslant p$, nous en déduisons donc :

$$\|DS\|_2^{\gamma} \geqslant$$
$$\frac{\|DS\|^{1+\gamma}_{\frac{p(q-2)}{p-2}}}{\|DS\|_{\frac{p(q-2)}{p-2}} + C'(p,n)\,\mathrm{Diam}(M)\sqrt{(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} + \|R^E\|_{p/2})\|DS\|^2_{\frac{p(q-2)}{p-2}} + \|\overline{\triangle}S\|^2_{q/2} + \|R^E S\|^2_{q/2}}}$$

La croissance de la fonction $x \mapsto \frac{x^{1+\gamma}}{x+\sqrt{a^2x^2+b^2}}$ permet, dans cette dernière inégalité, de remplacer $\|DS\|_{\frac{p(q-2)}{p-2}}$ par $\|DS\|_p$, puis par le minorant $\left(\frac{\sup|S|-\inf|S|}{C(p,n)\,\mathrm{Diam}(M)}\right)$ fourni par la seconde inégalité du lemme 1.1; nous en déduisons :

$$(\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2)^\gamma \geqslant \frac{(\sup|S|-\inf|S|)^{1+\gamma}}{C''(p,n)\left[\|S\|_\infty+\sqrt{(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2}+\|R^E\|_{p/2})\|S\|_\infty^2\,\mathrm{Diam}(M)^2+(\|R^ES\|_{q/2}^2+\|\overline{\triangle}S\|_{q/2}^2)\,\mathrm{Diam}(M)^4}\right]}.$$

Nous achevons la preuve en remarquant que $\mathrm{Diam}(M)^2\,\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} < 1$ par hypothèse,que $\|R^ES\|_{q/2}^2 \leqslant \|R^E\|_{q/2}^2.\|S\|_\infty^2$, que $\|R^E\|_{p/2}(\mathrm{Diam}(M))^2 \leqslant 1+\|R^E\|_{q/2}^2(\mathrm{Diam}(M))^4$ et que $\frac{\sup|S|-\inf|S|}{\|S\|_\infty} = 1-\frac{\inf|S|}{\sup|S|}$. □

Nous donnons maintenant un corollaire important de ce résultat :

Comme précédemment, $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille L^2-orthonormale (ordonnée dans le sens des valeurs propres λ_i croissantes) de sections propres de l'opérateur de Schrödinger $\overline{\triangle}+V$, agissant sur les sections d'un fibré euclidien E. Pour tout entier k, nous posons $H_k = \mathrm{Vect}\{S_i, 1\leqslant i\leqslant k\}$ et pour tout point m de M nous notons $H_k(m) = \mathrm{Vect}\{S_i(m), 1\leqslant i\leqslant k\}$. On sait alors qu'on a toujours les relations suivantes pour les dimensions de ces espaces :

$$\begin{cases} \mathrm{Dim}(H_k) = k \\ \mathrm{Dim}(H_k(m)) \leqslant \inf(l,k) \end{cases}$$

où l est la dimension du fibré E.

Le corollaire suivant nous donne une condition suffisante, en termes de courbure de la variété (M,g), pour que les dimensions des espaces H_k et $H_k(m)$ associés aux petites valeurs propres soient égales :

Corollaire 1.12 *Pour tout entier $n \geqslant 2$, pour tout réel $p > n$, il existe des constantes (explicitement calculables) $\zeta(p,n)$ et $a(p,n)$ telles que, pour tout réel $\eta \in [0,1[$, pour toute variété riemannienne compacte (M^n,g) vérifiant :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2.\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} \leqslant \zeta(p,n),$$

pour tout fibré euclidien $E \to M$ et tout opérateur de Schrödinger $\overline{\triangle}+V$ sur les sections de ce fibré dont les k premières valeurs propres vérifient :

$$\mathrm{Diam}(M)^2\|(\underline{V}-\lambda_k)^-\|_{p/2} \leqslant \eta.a(p,n)\left[1+\mathrm{Diam}(M)^2(\|V\|_{q/2}+\|\mathrm{R^E}\|_{\mathrm{q/2}})+\tilde{\Lambda}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{b(p,n)}}\right]^{-\beta} < 1$$

(où $q = \max(p,4)$, $\beta = \frac{(p+n)(q-2)}{p-n}$, $b(p,n) = \frac{p(p+n)}{4(p-n)}+1$ et $\Lambda_k = \mathrm{Diam}(M)^2\sup_{i\leqslant k}|\lambda_i|$), alors toute combinaison linéaire S des k premières sections propres vérifie l'inégalité :

$$\left|\frac{\inf|S|}{\sup|S|}-1\right| \leqslant \eta^{\frac{1}{\beta+2}}.$$

En particulier, on a $\mathrm{Dim}(H_k(m)) = \mathrm{Dim}(H_k) = k$, pour tout point m de M, et la famille $(S_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est presque-orthonormale en tout point de M (i.e. $|<S_i,S_j>-\delta_{ij}| < \frac{2\eta^{\frac{1}{\beta+2}}}{\left(1-\eta^{\frac{1}{\beta+2}}\right)^2}$).

REMARQUE 1.13 Ce corollaire est une généralisation du théorème d'annulation de M. Le Couturier et G. Robert [7] (dans leur résultat, la condition $q \geqslant \max(p,4)$ a été omise, mais elle semble nécessaire). Il permet d'obtenir l'existence d'une trivialisation d'un fibré, non plus seulement par des sections harmoniques relativement à un opérateur de Schrödinger, mais aussi par des sections propres associées à de petites valeurs propres de cet opérateur. On peut espérer qu'une telle généralisation des théorèmes d'annulation à la Böchner permettra de généraliser certains des théorèmes de classification des variétés réalisant certaines hypothèses de pincement de la courbure et des valeurs spectrales d'un opérateur de Schrödinger. Un tel exemple de généralisation est donné dans la seconde partie de cet article.

Démonstration. — La première inégalité découle directement de la proposition précédente, puisqu'on a d'une part, si $S = \sum_{i \leqslant k} \alpha_i S_i$:

$$
\begin{aligned}
\|DS\|_2^2 &= ((\overline{\triangle} + V)(S)|S) - (V(S)|S) \leqslant \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M (\lambda_k - \underline{V})|S|^2 \\
&\leqslant \|(\underline{V} - \lambda_k)^-\|_1 . \|S\|_\infty^2,
\end{aligned}
$$

et d'autre part :

$$
\begin{aligned}
\|\overline{\triangle} S\|_{q/2} &\leqslant \|(\overline{\triangle} + V)S\|_{q/2} + \|V\|_{q/2}\|S\|_\infty, \\
&\leqslant A_{q/2}\|(\overline{\triangle} + V)S\|_2 + \|V\|_{q/2}\|S\|_\infty, \\
&\leqslant \left(A_{q/2} . \sup_{i \leqslant k} |\lambda_i| + \|V\|_{q/2}\right) \|S\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Or le lemme 1.5 donne :

$$
A_{q/2} \leqslant a''(p,n)(1 + \sqrt{\Lambda})^{2b'(p,n)},
$$

où $b'(p,n) = \frac{p(p+n)}{4(p-n)}$ et où $\Lambda = \mathrm{Diam}(M)^2 \left(\|(\underline{V} - \lambda_k)^-\|_{p/2} + |\lambda_k - \lambda_1| \right)$ est, par hypothèse, majoré par $1 + 2\Lambda_k$. D'où :

$$
A_{q/2} . \sup |\lambda_i| \leqslant \frac{4^{b'(p,n)} a''(p,n)}{\mathrm{Diam}(M)^2} (1 + \Lambda_k)^{b'(p,n)+1} \leqslant \frac{a'(p,n)}{\mathrm{Diam}(M)^2} (1 + \Lambda_k^{b'(p,n)+1})
$$

ce qui donne :

$$
\mathrm{Diam}(M)^2 \|\overline{\triangle} S\|_{q/2} \leqslant \left(a'(p,n)(1 + \Lambda_k^{b'(p,n)+1}) + \mathrm{Diam}(M)^2 \|V\|_{q/2} \right) \|S\|_\infty .
$$

En appliquant la proposition 1.11, on en déduit :

$$
\begin{aligned}
&1 - \frac{\inf |S|}{\sup |S|} \leqslant A(p,n) \left(\frac{\mathrm{Diam}(M)\|DS\|_2}{\|S\|_\infty} \right)^\tau \left(1 + \mathrm{Diam}(M)^2 (\|R^E\|_{q/2} + \frac{\|\overline{\triangle} S\|_{q/2}}{\|S\|_\infty}) \right)^{1-\tau} \\
&\leqslant A'(p,n)\, \mathrm{Diam}(M)^\tau \|(\underline{V} - \lambda_k)^-\|_{p/2}^{\tau/2} \left(1 + \mathrm{Diam}(M)^2 (\|R^E\|_{q/2} + \|V\|_{q/2}) + \Lambda_k^{b(p,n)} \right)^{1-\tau}
\end{aligned}
$$

La seconde hypothèse de corollaire 1.12 implique alors l'existence d'une constante $a(p,n)$ telle que :

$$
\left| \frac{\inf|S|}{\sup|S|} - 1 \right| \leqslant \eta^{\frac{1}{\beta+2}} .
$$

Pour finir la démonstration, posons $f_{i,j} = |S_i + S_j|$. On a alors, d'après ce qui précède, $|\inf f_{i,j}/\sup f_{i,j} - 1| \leqslant \eta^{\frac{1}{\beta+2}}$. De plus $\| f_{i,j}\|_2^2 = 2(1+\delta_{ij})$. On en déduit :

$$| f_{i,j}^2 - 2(1+\delta_{ij})| < \frac{4(1+\delta_{ij})\eta^{\frac{1}{\beta+2}}}{(1-\eta^{\frac{1}{\beta+2}})^2}.$$

En faisant de même avec la fonction $|S_i - S_j|$ et en prenant la différence des deux pincements obtenus, on obtient :

$$| < S_i,S_j > -\delta_{ij}| < \frac{2\eta^{\frac{1}{\beta+2}}}{(1-\eta^{\frac{1}{\beta+2}})^2}.$$

□

2. Application

2.1. Un théorème de structure des variétés riemanniennes compactes de courbure de Ricci presque positive

Dans cette seconde partie, nous allons appliquer ce qui précède pour démontrer le théorème 0.1 cité en introduction. Pour cela nous utiliserons un résultat dû à P. Ghanaat [9] qui caractérise les nilvariétés :

Soit M^n une variété différentielle compacte de dimension n; supposons qu'elle admette une trivialisation $\alpha : TM \to \mathbb{R}^n$ de son fibré tangent dual T^*M. On peut alors munir M de la métrique $g_\alpha = \sum_i \alpha_i \otimes \alpha_i$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.1 *(Ghanaat[9]). Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe des constantes $\delta(n)$ et $C(n)$ telles que toute variété différentiable compacte M^n possédant une trivialisation $\alpha : TM \to \mathbb{R}^n$ qui vérifie $\mathrm{Diam}(M)\|d\alpha\|_\infty \leqslant \delta$ (où M est munie de la métrique g_α) est difféomorphe à une nilvariété $\Gamma\backslash G$.*

On peut de plus trouver un difféomorphisme $\Phi : M \to \Gamma\backslash G$ et une forme de Maurer-Cartan α_0 sur $\Gamma\backslash G$ tels que :

$$\|\alpha - \Phi^*\alpha_0\|_\infty \leqslant C(n)\,\mathrm{Diam}(M)\|d\alpha\|_\infty,$$

où la norme L^∞ est donnée par la métrique g_α.

Avant de commencer la preuve du théorème 0.1, nous allons d'abord établir les deux lemmes suivants, qui interviennent dans cette preuve :

Lemme 2.2 *Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $p > n$, il existe des constantes positives $\zeta(p,n)$ et $a(p,n)$ (les même que celle du lemme 1.5, où l'on remplace q par $\left(\frac{p+n}{2}\right)$) telles que, sur toute variété riemannienne compacte (M^n,g) vérifiant $\mathrm{Diam}(M)^2\|\underline{Ric}^-\|_{p/2} < \zeta(p,n)$, toute combinaison linéaire α des i premières formes propres du laplacien de Hodge (agissant sur les k-formes différentielles) vérifie :*

$$\|\alpha\|_\infty \leqslant \left(1 + a(p,n)\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right)(1+\Lambda)^{\frac{p(p+n)}{2(p-n)}}\|\alpha\|_2,$$

$$\textit{avec} \qquad \Lambda = \begin{cases} \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\lambda_i + \|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2}} & \textit{si } k=1, \\ \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\lambda_i + k(n-k)\|\underline{\mathrm{R}}^-\|_{p/2}} & \textit{si } k \geqslant 2, \end{cases}$$

où $\underline{\mathrm{R}}(x)$ désigne la plus petite valeur propre de l'opérateur de courbure de (M,g), vu comme endomorphisme symétrique de $\bigwedge^2(T_xM)$.

Démonstration. — Le laplacien de Hodge (agissant sur les k-formes) s'écrit, en vertu des formules de Bochner et de Weitzenböck, comme l'opérateur de Schrödinger $\overline{\triangle} + \mathscr{R}$, où $\mathscr{R} = \mathrm{Ric}$ lorsque k=1, et où $\mathscr{R}_x \geqslant k(n-k)\underline{\mathrm{R}}(x).Id_{\bigwedge^2 T_xM}$ lorsque $k \geqslant 2$ (cf. [7]). A cet opérateur de Schrödinger, on applique le lemme 1.5, ce qui achève la preuve. □

LEMME 2.3 *Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $p > n$, il existe une constante positive $\Xi(p,n)$ telle que, pour tout $\eta \in [0,1[$ et sur toute variété riemannienne compacte (M^n,g) telle que la n^{ieme} valeur propre λ_n de son laplacien de Hodge (agissant sur les 1-formes différentielles) vérifie :*

$$\mathrm{Diam}(M)^2\left(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} + \lambda_n\right) \leqslant \eta.\Xi(p,n)\left[1 + \mathrm{Diam}(M)^2\|\mathrm{R}\|_{\mathrm{q}/2}\right]^{-\frac{(p+n)(q-2)}{p-n}}$$

(où $q = \max(4,p)$), on ait : toute combinaison linéaire non triviale α de 1-formes propres correspondant aux n premières valeurs propres (y compris les valeurs propres nulles) du laplacien de Hodge est une 1-forme partout non nulle, vérifiant de plus :

$$\frac{\inf(|\alpha|)}{\sup(|\alpha|)} \geqslant 1 - \eta^{\frac{p-n}{pq+n(q-4)}}.$$

De plus, tout système L^2-orthonormé $\{\alpha_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ de 1-formes propres correspondant aux n premières valeurs propres vérifie :

$$|<\alpha_i,\alpha_j> - \delta_{ij}| \leqslant \frac{2\eta^{\frac{p-n}{pq+n(q-4)}}}{(1-\eta^{\frac{p-n}{pq+n(q-4)}})^2}$$

en tout point de M.

Démonstration. — Par la formule de Bochner, le laplacien de Hodge (opérant sur les 1-formes) se lit comme l'opérateur de Schrödinger $(\overline{\triangle} + V)$, où $V = \mathrm{Ric}$.

La variété (M^n,g) vérifie la première hypothèse du corollaire 1.12, quitte à prendre $\Xi(p,n)$ inférieure à $\zeta(p,n)$, puisque $\mathrm{Diam}(M)^2.\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} \leqslant \Xi(p,n)$. Par ailleurs puisque, dans le cas présent, le potentiel V est l'endomorphisme symétrique associé à la forme quadratique Ric, l'hypothèse du lemme 2.3 donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{Diam}(M)^2\|(\underline{V} - \lambda_n)^-\|_{p/2} &\leqslant \mathrm{Diam}(M)^2(\|\underline{\mathrm{Ric}}^-\|_{p/2} + \lambda_n) \\ &\leqslant 2^\beta\eta\Xi(p,n)\left[2 + \mathrm{Diam}(M)^2(\|\mathrm{R}\|_{\mathrm{q}/2} + \|\mathrm{Ric}\|_{\mathrm{q}/2})\right]^{-\beta}, \end{aligned}$$

où $\beta = \frac{(p+n)(q-2)}{p-n}$.

Si on choisit $\Xi(p,n)$ inférieur à $\min(1,\frac{a(p,n)}{2^\beta})$, où $a(p,n)$ est la constante définie au corollaire 1.12, on en déduit :

$$\mathrm{Diam}\, M^2\|(\underline{V} - \lambda_n)^-\|_{p/2} \leqslant \eta a(p,n)\left[1 + \mathrm{Diam}(M)^2(\|\mathrm{R}\|_{\mathrm{q}/2} + \|\mathrm{V}\|_{\mathrm{q}/2}) + \tilde{\ }^{\mathrm{b(p,n)}}_{\mathrm{n}}\right]^{-\beta}$$

(car par hypothèse, on a $\Lambda_n \leqslant 1$).

Ceci montre que le laplacien de Hodge vérifie la deuxième hypothèse du corollaire 1.12. Le corollaire 1.12 permet d'en déduire que toute combinaison linéaire (à coefficients constants non tous nuls) α des n premières sections propres vérifie :

$$1-\frac{\inf(|\alpha|)}{\sup(|\alpha|)}\leqslant \eta^{\frac{p-n}{pq+n(q-4)}}<1$$

et, qu'en tout point de M et pour tout système L^2-orthonormé $\{\alpha_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ de 1-formes propres correspondant aux n premières valeurs propres, on a :

$$|<\alpha_i,\alpha_j>-\delta_{ij}|\leqslant \frac{2\eta^{\frac{p-n}{pq+n(q-4)}}}{(1-\eta^{\frac{p-n}{pq+n(q-4)}})^2}.$$

□

Lemme 2.4 *Soit (M^n,g) une variété riemannienne compacte dont le fibré tangent est muni d'une trivialisation $\alpha\ :\ TM\to\mathbb{R}^n$ (i.e. les 1-formes $\alpha_i(x)$ forment une base de T^*_xM en tout point x de M). On peut alors munir M d'une nouvelle métrique $g_\alpha=\sum_i\alpha_i\otimes\alpha_i$. Le rapport entre les métriques g et g_α est borné par :*

$$\frac{\inf|\omega|^2}{\|\omega\|_2^2}g\leqslant g_\alpha\leqslant\frac{\sup|\omega|^2}{\|\omega\|_2^2}g,$$

où ω parcourt l'espace (privé de 0) des combinaisons linéaires (à coefficients constants non tous nuls) des formes $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$.

Démonstration. — On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique (noté $<\cdot,\cdot>$) et on considère l'application :

$$L\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}(TM,g)&\to&(\mathbb{R}^n,<\cdot,\cdot>)\\ u&\mapsto&(\alpha_i(u))_{1\leqslant i\leqslant n}\end{array}\right.$$

ainsi que son application adjointe :

$$L^*\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^n,<\cdot,\cdot>)&\to&(TM,g)\\ (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}&\mapsto&\sum_i v_i\cdot\alpha_i^\#\end{array}\right.$$

où $\alpha_i^\#$ désigne le vecteur dual de α_i (pour la dualité associée à la métrique g). Remarquons que, $|L(u)|^2=g_\alpha(u,u)$ et que $g(L^*_x(v),L^*_x(v)))=|\omega|^2(x)$ si $v=(v_1,\dots,v_n)$ et $\omega=\sum_{i=1}^n v_i\alpha_i$. Comme les bornes inférieure et supérieure de $\frac{<L(u),L(u)>}{g(u,u)}$ et $\frac{g(L^*(v),L^*(v))}{<v,v>}$ coïncident (car $\|L^*\|=\|L\|$ et $\|(L^*)^{-1}\|=\|L^{-1}\|$ en normes d'applications linéaires), on en déduit que les bornes supérieure et inférieure de $\frac{g_\alpha(u,u)}{g(u,u)}$ et de $\frac{|\omega|^2}{\|\omega\|_2^2}$ coïncident (car $\|\omega\|_2^2=<v,v>$ par définition de ω). □

Fin de la preuve du théorème 0.1 : Soit $\{\alpha_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système L^2-orthonormé de 1-formes propres correspondant aux n premières valeurs propres $0\leqslant\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$ du laplacien de Hodge. Si les hypothèses du théorème 0.1 sont vérifiées (en choisissant $\xi(p,n)\leqslant\frac{1}{2}\Xi(p,n)$), celle du lemme 2.3 l'est aussi si l'on y remplace η par ϵ. On applique le lemme 2.3 pour obtenir que :

$$\alpha \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} TM & \to & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & (\alpha_1(u), \ldots, \alpha_n(u)) \end{array} \right.$$

donne une trivialisation du fibré TM (puisque les $\alpha_i(x)$ forment une base de $T_x^* M$ pour tout x). De plus, en vertu du lemme 2.3 et du lemme 2.4, la métrique $g_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes \alpha_i$ vérifie :

$$\left(1 - \epsilon^{\frac{1}{\beta+2}}\right)^2 \cdot g \leqslant g_\alpha \leqslant \frac{1}{\left(1 - \epsilon^{\frac{1}{\beta+2}}\right)^2} \cdot g \tag{1}$$

En appliquant le lemme 2.2 à la 2-forme $d\Psi$, où Ψ est n'importe quelle combinaison linéaire (à coefficients constants) de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathrm{Diam}(M)^2 \|d\Psi\|_\infty^2 &\leqslant a'(p,n)\left(1 + \mathrm{Diam}(M)\sqrt{\lambda_n + 2(n-2)\|\underline{\mathrm{R}}^-\|_{p/2}}\right)^{\frac{p(p+n)}{(p-n)}} \mathrm{Diam}(M)^2 \|d\Psi\|_2^2 \\ &\leqslant a''(p,n)\left(1 + \sqrt{1 + \mathrm{Diam}(M)^2 \|\underline{\mathrm{R}}^-\|_{p/2}}\right)^{\frac{p(p+n)}{(p-n)}} . \mathrm{Diam}(M)^2 \lambda_n . \|\Psi\|_2^2 \\ &\leqslant \epsilon a'''(p,n)\xi(p,n) \frac{(1 + \mathrm{Diam}(M)^2 \|\underline{\mathrm{R}}^-\|_{p/2})^{\frac{p(p+n)}{2(p-n)}}}{(1 + \mathrm{Diam}(M)^2 \|\mathrm{R}\|_{\mathrm{p}/2})^\beta} \|\Psi\|_2^2 \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{64(1 + 12nC(n))^2(1 + \delta(n))^2} \delta(n)^2 \|\Psi\|_2^2 \end{aligned}$$

(dès que $\xi(p,n) \leqslant \dfrac{\delta(n)^2}{64a'''(p,n)(1 + 12nC(n))^2(1 + \delta(n))^2}$, où $\delta(n)$ et $C(n)$ sont les constantes du théorème 2.1, car $\beta(p,n) \geqslant \frac{p(p+n)}{2(p-n)}$, puisque $q - 2 \geqslant \frac{p}{2}$).

D'après l'inégalité (1), on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Diam}_{g_\alpha}(M) \|d\Psi\|_{g_\alpha,\infty} &\leqslant \frac{1}{(1 - \epsilon^{\frac{1}{\beta+2}})^3} \mathrm{Diam}_g(M) \|d\Psi\|_{g,\infty} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{\epsilon}\delta(n)}{(1 + 12nC(n))(1 + \delta(n))} \|\Psi\|_{g,2} \end{aligned} \tag{2}$$

où $\|d\Psi\|_{g_\alpha,\infty}$ désigne la norme L^∞ de $d\Psi$ et $\mathrm{Diam}_{g_\alpha}(M)$ le diamètre de M, mesurés par la métrique g_α. En remplaçant Ψ par les α_i, ce qui donne $\|\Psi\|_{g,2} = 1$, on montre que les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées.

Nous en déduisons l'existence d'une nilvariété $\Gamma\backslash G$, d'une forme de Maurer-Cartan α_0 sur cette nilvariété et d'un difféomorphisme $\Phi \ : \ M \to \Gamma\backslash G$ tels que :

$$\left| \frac{\Phi^* g_{\alpha_0}}{g_\alpha} - 1 \right| < \sqrt{\epsilon},$$

où g_{α_0} est la métrique invariante à gauche sur G associée à la forme de Maurer-Cartan et à un choix de métrique euclidienne sur $T_e G$ (cette métrique passe au quotient sur $\Gamma\backslash G$). En effet, par le théorème 2.1 et par le lemme 2, on a :

$$\begin{aligned}
&\| \sum_i \Phi^* \alpha_0^i \otimes \Phi^* \alpha_0^i - \sum_i \alpha^i \otimes \alpha^i \|_{\infty,g_\alpha} \\
&\leqslant \sum_i \|\Phi^* \alpha_0^i - \alpha^i\|_{\infty,g_\alpha} \cdot \|\alpha^i\|_{\infty,g_\alpha} + \|\Phi^* \alpha_0^i\|_{\infty,g_\alpha} \cdot \|\Phi^* \alpha_0^i - \alpha^i\|_{\infty,g_\alpha} \\
&\leqslant C(n)\, \mathrm{Diam}_{g_\alpha}(M) \sum_i \|d\alpha^i\|_{\infty,g_\alpha} \left(\|\alpha^i\|_{\infty,g_\alpha} + \|\Phi^* \alpha_0^i\|_{\infty,g_\alpha} \right) \\
&\leqslant \frac{\sqrt{\epsilon}}{12}(2 + \frac{1}{24n}) \sup_i \|\alpha^i\|_{\infty,g_\alpha}
\end{aligned}$$

donc (comme $\epsilon^{\frac{1}{\beta+2}} < \frac{1}{2}$), en vertu des inégalités (1) et du lemme 2.3 :

$$\|\Phi^* g_{\alpha_0} - g_\alpha\|_{\infty,g_\alpha} \leqslant \frac{\sqrt{\epsilon} \sup_i \|\alpha_i\|_{\infty,g}}{4(1 - \epsilon^{\frac{1}{\beta+2}})} \leqslant \frac{\sqrt{\epsilon} \|\alpha_i\|_{2,g}}{2(1 - \epsilon^{\frac{1}{\beta+2}})} \leqslant \sqrt{\epsilon}$$

Or, d'après l'inégalité (1), on en déduit que :

$$(1 - \sqrt{\epsilon})(1 - \epsilon^{\frac{1}{\beta+2}})^2 < \frac{\Phi^* g_{\alpha_0}(u,u)}{g(u,u)} < \frac{1 + \sqrt{\epsilon}}{(1 - \epsilon^{\frac{1}{\beta+2}})^2},$$

ce qui donne, puisque $\frac{1}{\beta+2} < \frac{1}{2}$:

$$\left(1 - 3\epsilon^{\frac{1}{\beta+2}}\right) < \frac{\Phi^* g_{\alpha_0}(u,u)}{g(u,u)} < \frac{1}{\left(1 - 3\epsilon^{\frac{1}{\beta+2}}\right)}$$

Remarque 2.5 On a vu que toute variété de courbure de Ricci presque positive admet une minoration non triviale de sa n+1-ème valeur propre. Notre résultat classifie le genre différentiel (et donne approximativement les métriques) des variétés de courbure de Ricci presque positive admettant n petites valeurs propres. Il semble a peu près évident que si la variété (M,g) de courbure de Ricci presque positive est orientable et admet n-1 petites valeurs propres, alors l'opérateur de Hodge appliqué au produit extérieur des n-1 premières 1-formes propres donne, par dualité, une 1-forme de petit quotient de Rayleigh. On est donc alors en fait dans le cas où les n premières valeurs propres sont petites, et la conclusion de notre théorème est toujours vérifiée (dans le cas non-orientable, c'est la revêtement orientable à deux feuillets qui est une nilvariété, et la variété elle-même n'est plus qu'une infra-nilvariété). Pour chercher à renforcer ce résultat, on pourrait chercher à montrer que si seulement k valeurs propres sont petites $(1 \leqslant k \leqslant n-2)$ alors M est l'espace total d'un fibré principal dont la fibre-type est un groupe nilpotent. On pourrait aussi chercher à classifier les nilvariétés difféomorphes à nos variété M en fonction du nombre de valeurs propres nulles admises par (M,g).

Bibliographie

[1] M. ANDERSON *Hausdorff perturbations of Ricci-flat manifolds and splitting theorem*, Duke Math. J. **68** (1992), p. 67-82.

[2] A. BESSE *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 1987.

[3] S. GALLOT *Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques, I*, C.R.A.S., **296**, Série I (1983), p. 333-336.

[4] S. GALLOT *Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques, II*, C.R.A.S., **296**, Série I (1983), p. 365-368.

[5] S. GALLOT *Isoperimetric inegalities based on integral norms of the Ricci curvature*, Colloque Paul Lévy sur les processus stochastiques, Astérisque, **157-158** (1988), p. 191-216.

[6] S. GALLOT *Volume, courbure de Ricci et convergence des variétés (d'après T. H. Colding et Cheeger-Colding)*, séminaire Bourbaki 50-ème année, **835** (1997-98), p. 01-25.

[7] S. GALLOT, D. MEYER *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. pures et appl. **54** (1975), p. 259-284.

[8] S. GALLOT, D. MEYER *D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison entre spectres. Applications*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, **21**, (1988), p. 561-591.

[9] P. GHANAAT *Almost Lie groups of type* $\mathbb{R}^n$, J. reine angew. Math. **401** (1989), p. 60-81.

[10] M. LE COUTURIER, G. ROBERT L^p*-pinching and the geometry of compact Riemannian manifolds*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), no.2 p. 249-271.

[11] P. LI *On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact riemannian manifold*, Ann. Scient. Éc. Norm. sup. **13** (1980), p. 451-469.

[12] M. MIN-OO, E. RUH L^2*-curvature pinching*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 36-51.

[13] P. PETERSEN, C. SPROUSE *Eigenvalue pinching for riemannian vector bundles*, J. reine angew. Math. **511** (1999), p. 73-86.

[14] D. YANG *Convergence of riemannian manifolds with integral bounds on curvature I*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4ème série, **25** (1992), p. 77-105.

INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)